Universitat Autònoma de Barcelona

Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals

Coneixements i creences sobre la resolució de problemes dels professors i estudiants de professor d'educació primària i secundària:

Un estudi sobre la continuïtat en l'ensenyament de les matemàtiques

TESI DOCTORAL

Cèlia Giné de Lera

Director: Jordi Deulofeu Piquet

Bellaterra, juliol de 2012

Agraïments

Són moltes les persones que han fet possible aquest treball, i a les quals vull donar el meu sincer agraïment.

El primer agraïment és per al Jordi Deulofeu, director de la tesi, sense el qual aquesta recerca no hagués estat possible: li dono les gràcies per tot el que m’ha ensenyat, pels seus savis consells, per obrir-me tot un món, per creure en mi, i sobretot per fer-me confiança en tants moments.

El meu agraïment també a tots els membres del grup de recerca PREMAT, per les seves aportacions i pel molt que he pogut aprendre d’ells, i en especial a la Dra. Lourdes Figueiras, pel seu suport en tot moment i per l’oportunitat que m’ha donat de formar part del seu projecte. Als doctors José Carrillo, Ube Geller i Tim Rowling, per dedicar-me una part del seu temps a Barcelona i oferir-me orientacions en la fase en la què aquest estudi s’estava dissenyant. També vull agrair a la Judit Chico i al Josep Maria Fortuny que m’hagin convidat a les edicions dels *divendres de recerca,* donant-me l’oportunitat de compartir la feina que anava fent i de rebre crítiques constructives que han estat molt útils per a tirar endavant amb la recerca. Igualment útils han estat les aportacions que m’han fet els membres del tribunal dels seguiments de primer i segon any: Núria Planas, Lluís Bibiloni i Meque Edo.

Evidentment no puc oblidar-me de tots els professors i estudiants de professor que formen part de la mostra, els agraeixo enormement el gran esforç realitzat: és gràcies a ells que he pogut dur a terme aquest estudi.

Agraeixo també el suport de tots els meus amics: els amics de la carrera i del màster –ells entenen el què això suposa millor que ningú–, les meves amigues de Tarragona –per ajudar-me a desconnectar els caps de setmana–, el meu cosí Jordi –sempre m’ha animat a fer recerca– i en especial la Laura, pels seus consells i ànims, i per la seva implicació personal en el meu projecte.

Però molt especialment, vull deixar constància que aquest treball mai s’hagués realitzat sense el suport incondicional dels meus pares, Josep i Mª José, que sempre m’han ajudat a fer possibles els meus somnis i m’han fet costat en totes les meves decisions, incloent la d’escriure aquesta tesi.

Moltes gràcies a tots i totes.

Índex

1. Introducció

És una creença generalitzada del professorat que tant la relació de l'alumnat amb la matemàtica com l'evolució de la seva competència en aquesta matèria canvien en general de forma negativa al llarg de l'escolarització. Això és avalat també per les investigacions actuals, que afirmen que l'actuació del docent durant la transició pot causar un perjudici a llarg termini en la futura actitud de l'estudiant cap a les matemàtiques (Howard, Perry i Tracey, 1997; McGee, Ward, Gibbons i Harlow, 2003). Aquests aspectes justifiquen la necessitat d'investigar la pràctica docent des del punt de vista de la transició, i analitzar fins a quin punt factors com els coneixements del professor de matemàtiques, les seves creences, o els objectius que persegueix amb el seu ensenyament poden afectar a l'aprenentatge present i futur dels alumnes.

D'altra banda, la Resolució de Problemes constitueix un dels eixos principals en l'ensenyament de les Matemàtiques. Les dificultats dels alumnes de tots els nivells per resoldre problemes i el paper de la Resolució de Problemes en l'ensenyament són un dels temes de recerca més rellevants en l'àmbit de la Didàctica de les Matemàtiques (Polya, 1957; Mason, Burton i Stacey, 1982; Schoenfeld, 1985, 1992; Castro 2008; Puig, 2008; Voskoglou, 2008). Des del punt de vista de la transició, entenem que la Resolució de Problemes pot ser una de les eines que ajudin a donar sentit a les matemàtiques.

En aquest marc, una línia d'investigació consisteix en diagnosticar i analitzar els factors que, des de la instrucció, afecten la discontinuïtat en l'aprenentatge dels alumnes entre les etapes de primària i secundària en l'adquisició de la competència matemàtica de resolució de problemes –una de les competències principals en l'àmbit de les matemàtiques (OCDE PISA, 2003; Vila i Callejo, 2004; Carlson i Bloom, 2005)-, per tal de minimitzar els efectes derivats de processos de transició com ara el fracàs acadèmic o l'abandonament de l'interès pel coneixement científic, i incrementar la cultura i formació matemàtica de la ciutadania.

En concret, aquesta tesi doctoral es dirigeix a investigar els perfils dels professors i estudiants de professor de matemàtiques, tant de primària com de secundària, pel que fa als seus coneixements i creences sobre l'ensenyament-aprenentatge de la resolució de problemes, ja que considerem que aquests factors poden tenir un impacte en l'aprenentatge matemàtic de l'alumne durant la transició entre les etapes d'educació primària i secundària. La tesi s'emmarca en el projecte *Detecció i anàlisi de factors d'influència en la discontinuïtat de l'aprenentatge matemàtic entre les etapes de l'educació primària i secundària* (EDU2009-07298) que duem a terme el grup de recerca PREMAT (Educació i Competència Matemàtica), que té com a investigadora principal la doctora Lourdes Figueiras, i en el qual participem, entre d'altres, Jordi Deulofeu i jo mateixa.

La memòria s'ha estructurat en 6 capítols, el primer dels quals és aquesta introducció. En el capítol 2 plantejarem i concretarem el problema de recerca i, en coherència amb aquest, ens marcarem els objectius que perseguim amb aquesta investigació. El desenvolupament i concreció d'aquests objectius necessiten un marc teòric on centrar l'estudi, en el qual precisarem els termes i les opcions de model teòric considerades, i on s'emmarcaran i concretaran les aportacions del present treball. Aquest marc considerarà quatre grans àmbits: el fenomen de les transicions, la resolució de problemes en educació matemàtica, les creences dels professors de matemàtiques i els seus coneixements professionals, i seran l'objecte a desenvolupar en el capítol 3. Un següent pas ha estat el disseny metodològic de la investigació: les opcions i consideracions metodològiques generals, l'assumpció d'un marc teòric propi que desenvolupi de forma coherent el marc teòric general i el disseny de cadascun dels instruments de recerca seran els aspectes que centraran el capítol 4 de la present memòria. L'anàlisi dels resultats es desenvoluparà en el capítol 5, i les conclusions i el plantejament de possibles investigacions derivades de l'estudi seran explicitades en el capítol 6.

2. Plantejament i concreció del problema

2.1. El problema de recerca i la seva justificació

Segons Polya (1962), la principal finalitat de les matemàtiques escolars és ensenyar als alumnes a PENSAR. "Ensenyar a pensar" vol dir que el professor de matemàtiques no ha d'impartir únicament informació, sinó que ha d'intentar també desenvolupar l'habilitat dels alumnes per a utilitzar la informació subministrada: ha d'emfatitzar coneixements, actituds útils i hàbits mentals desitjables. Aquest "pensar" l'identifiquem, si més no en una primera aproximació, amb la **resolució de problemes**. Per tant, podem considerar –i així és considerat en el nostre país- que una de les principals finalitats del currículum de matemàtiques consisteix en desenvolupar l'habilitat dels alumnes per a resoldre problemes. A més d'una eina per a aprendre a "pensar matemàticament", la resolució de problemes la considerem, en sí mateixa, com un mètode d'ensenyament: és la interacció amb situacions problemàtiques la que fa que els alumnes construeixin activament el seu coneixement. Per aquesta raó defensem la gran importància de la Resolució de Problemes (a partir d'ara RP) en el món de l'ensenyament-aprenentatge de les matemàtiques, i, per tant, considerem que és un dels camps en els quals s'han de centrar les recerques en Didàctica de les Matemàtiques. És per això que hem decidit emmarcar la nostra recerca en el marc de la Resolució de Problemes.

D'altra banda, el **fenomen de la transició d'etapa** en l'educació científica és un procés complex que afecta l'aprenentatge de l'estudiant de matemàtiques de manera especialment significativa (Kajander and Lovric, 2005). La transició de Primària a Secundària, de Secundària a Batxillerat o de Batxillerat a la Universitat han estat objecte d'investigacions que es centren en un o diversos elements característics i / o influents en el procés de transició, com per exemple el currículum (Coad and Jones, 1999) o el gènere de l'alumne i la mida de la institució d'acollida (Ferguson and Fraser, 1998). A més, determinats influxos externs al context educatiu, com poden ser la família, la cultura social, o la desmotivació i altres lligats al moment evolutiu dels estudiants, són igualment elements que influeixen en la transició d'etapa. Segons Coad i Jones (op cit.), els elements no curriculars que influeixen en la transició tenen una durada més a curt termini. Tanmateix, aquells relacionats amb la pràctica docent i l'aprenentatge són els que més semblen influir en el baix rendiment de l'estudiant a llarg termini. Per exemple, en l'educació primària predominen més activitats manipulatives que a secundària, tot i els beneficis que aquest tipus d'activitats suposa per a molts estudiants dels primers nivells de secundària (Howard, Perry i Tracy, 1997).

Malgrat la importància de la pràctica docent en situacions de transició educativa, les investigacions prèvies sobre el tema es centren en general en l'alumnat i no tant en el **paper que exerceix el docent** en aquests processos de transició. No obstant això, és una creença generalitzada del professorat que tant la relació de l'alumnat amb la matemàtica com la seva competència en aquesta matèria canvia en molts casos de forma brusca i negativa al llarg de la seva educació. Encara que és evident la complexitat de relacions que s'estableixen entre els factors que poden influir en aquest canvi, és interessant preguntar-se quins d'ells depenen de la pràctica docent i aprofundir des d'aproximacions teòriques al fenomen de la transició d'etapa. Considerem que des de la didàctica de les matemàtiques és especialment interessant i necessari estudiar la tasca del professor abans i durant la transició amb l'objectiu d'analitzar quines pràctiques docents ajuden l'estudiant en aquest procés. Així doncs, les característiques del docent –en quant als coneixements i les creences– i el seu impacte en l'aprenentatge de l'estudiant durant la transició –en el camp de la Resolució de Problemes de matemàtiques– seran el nostre objecte d'estudi.

La conceptualització del fenomen *transició* des de la que s'inicia aquesta investigació no respon a una definició discreta en el temps, caracteritzada pel moment de pas d'un curs acadèmic a un altre i deslligada de la singularitat de l'aprenentatge matemàtic. Es tracta d'un fenomen que es gesta en un **procés continu de creixement de la competència matemàtica** dels estudiants, i que es manifesta amb més èmfasi en moments determinats. La transició així entesa pot afectar la continuïtat en la competència matemàtica de diferents maneres i amb una intensitat diferent al llarg de l'educació matemàtica dels estudiants. La influència dels factors curriculars i contextuals associats al pas d'un curs acadèmic a un altre, o encara més d'una etapa a una altra, com el canvi de professorat, de centre, de projecte educatiu, d'organització curricular, de mesures d'atenció a la diversitat, etc., condueixen a pensar que els moments més crítics i proclius a l'aparició d'alguna discontinuïtat es produiran en les transicions que Rice (1997) anomena sistèmiques, és a dir, aquelles transicions obligatòries dins del propi sistema educatiu, ja que en elles els canvis són generalment molt significatius. Serà, per tant, especialment important prestar atenció a aquests moments per tal de diagnosticar i analitzar les discontinuïtats que es produeixen, fins i tot dins d'una mateixa etapa educativa. La consideració d'un creixement continu de la competència matemàtica dels estudiants i la gradació de les discontinuïtats generades per un procés de transició al llarg de l'educació matemàtica seran, per tant, els nostres ancoratges conceptuals de partida.

La nostra recerca s'emmarca en una línia d'investigació incipient del grup PREMAT i compta amb aproximacions d'investigació dutes a terme en el si del grup en **moments de transició sistèmica** especialment significatius, com són la transició de primària a secundària, d'educació secundària obligatòria a batxillerat i de batxillerat a la universitat (Fernández, Giné, Martínez, 2010; Fernández i Figueiras, 2011; Martínez, Giné, Fernández, Figueiras y Deulofeu, 2011). En el primer i tercer cas hi ha canvis molt significatius en la formació del professorat assignat a cada nivell, la qual cosa es tradueix en una major probabilitat de discontinuïtats en la pràctica docent. En el cas de la transició al batxillerat, la decisió personal de l'estudiant cap a carreres professionals que inclouen matemàtiques, l'existència de proves d'accés a la universitat, i l'intens caràcter algebraic que marca l'evolució dels continguts matemàtics, caracteritzen una transició difícil i amb importants reptes per a la investigació educativa, iniciada ja en interessants treballs (Guzmán, Hodgson, Robert i Villani, 1998). Durant el canvi de batxillerat a la universitat, els estudiants amb bon rendiment acadèmic previ superen la transició amb èxit (Rodríguez, Fita i Torrado, 2004). Tanmateix, la manca de preparació dels estudiants de primer curs per afrontar la complexitat de les matemàtiques universitàries (Jourdan, Cretchley i Passmore, 2007) comporta un fracàs acadèmic durant la transició des del batxillerat.

Sense perdre de vista la **projecció futura** d'aquesta investigació i la seva continuïtat més enllà de la realització de la tesi, hem optat per centrar-nos únicament en la transició de l'educació primària a la secundària. Junt amb les altres tesis doctorals del grup de recerca que es realitzaran en aquest mateix marc, pretenem crear una base teòrica sòlida sobre el fenomen de la transició, i oferir un ampli marge de viabilitat per a la proposta, amb contribucions científico-tècniques de la màxima actualitat i oportunisme, i amb resultats que complementin tots aquells que es dirigeixen a la interpretació d'estudis comparatius com TEDS-M (Tatoo, et al., 2012), i al disseny dels nous plans d'estudi de formació del professorat de primària i de secundària.

La **formació del professorat** tant inicial com permanent ha estat fins al moment actual específica de cada etapa educativa concreta, sent natural l'existència de diferències molt notables entre les pràctiques docents de diferents nivells educatius. No obstant això, existeixen evidències empíriques que apunten que per a aconseguir una continuïtat en l'aprenentatge, la formació docent hauria d'incloure aspectes i coneixements clau d'altres etapes, tant anteriors com posteriors (Figueiras, Deulofeu i Edo, 2008; Figueiras i Fernández, 2008). La nostra finalitat és identificar aquests aspectes i coneixements amb l'objectiu de desenvolupar en el futur propostes de formació del professorat des de la perspectiva de la continuïtat. Des d'aquesta perspectiva inicial, la **finalitat de la recerca** és diagnosticar i analitzar alguns dels factors que, des de la instrucció, afecten la discontinuïtat dels estudiants entre les etapes de primària i secundària en l'adquisició de la competència matemàtica de resolució de problemes, per tal de minimitzar els efectes derivats de processos de transició com ara el fracàs acadèmic o l'abandonament de l'interès pel coneixement científic, i incrementar la cultura i formació matemàtica de la ciutadania.

Els factors que analitzarem seran els relacionats amb els *coneixements professionals* dels professors de matemàtiques i amb les seves *creences.* Així doncs, la nostra recerca pretén estudiar la continuïtat de l'ensenyament-aprenentatge de les matemàtiques tenint en compte **tres dimensions**: els coneixements dels professors, les seves creences, i la resolució de problemes. Cal destacar la necessitat d'acotar l'estudi sobre tot pel que fa als coneixements. Per això, en la part que correspon als coneixements, ens centrarem només en els aspectes numèrics del currículum.

2.2. Objectius de la recerca

Per portar a terme el nostre propòsit considerem necessari concretar-lo en les següents **preguntes d'investigació**:

> *Quines són les creences i els coneixements dels professors i estudiants de professor de matemàtiques de primària i secundària sobre la Resolució de Problemes? Quines diferències trobem entre els professors de primària i secundària, i entre estudiants de professor i professors en actiu, en relació als factors anteriors? Hi ha alguna relació entre coneixements i creences?*

Amb la finalitat de respondre a aquestes preguntes, ens fixem els següents **objectius de recerca**:

1. *Caracteritzar i comparar les creences de professors i estudiants de professor de matemàtiques de primària i secundària sobre la Resolució de Problemes.*

2. *Caracteritzar i comparar els coneixements de professors i estudiants de professor de matemàtiques de primària i secundària sobre la Resolució de Problemes.*

3. *Establir possibles relacions entre les creences i els coneixements de professors i estudiants de professor sobre la Resolució de Problemes.*

3. Marc teòric

El present estudi pretén fer les seves aportacions a quatre grans marcs: la *Transició d'etapa*, la *Resolució de Problemes de Matemàtiques* (RP), els *Coneixements* dels professors de matemàtiques i les seves *Creences* entorn a la RP. La singularitat de la recerca es troba en la intenció de relacionar aquests quatre marcs: volem detectar similituds i diferències significatives entre els coneixements i les creences dels professors i estudiants de professor d'Educació Primària i Secundària, i fer-ho concretament en el marc general de la Resolució de Problemes.

Quant a la rellevància d'aquest marc general, volem insistir en l'èmfasi que la bibliografia ha posat en la resolució de problemes com a focus de les matemàtiques escolars en els processos de reforma a seguir. Paral·lelament, també s'ha fet esment de l'estreta relació entre la RP i la pròpia activitat matemàtica, sent identificades ambdues per molts autors.

En coherència amb el plantejament del treball, el nostre marc teòric constarà de quatre grans seccions:

1) *El fenomen de les Transicions:* Documentarem la rellevància que tenen les transicions d'etapa –concretament la d'educació primària a secundària– en la continuïtat de l'aprenentatge matemàtic dels estudiants, tot defensant la importància de que aquesta continuïtat sigui present també en l'ensenyament que imparteixen mestres i professors.
2) *La Resolució de Problemes en Educació Matemàtica:* En aquesta secció ens centrarem en aquells aspectes de la RP que ens puguin ser d'utilitat per al desenvolupament d'aquest treball: les línies de recerca que s'han dut i s'estan duent a terme, la definició de problema i RP, els objectius que persegueix, i la seva concreció en els currículums actuals de matemàtiques.
3) *Les creences i concepcions dels professors de matemàtiques:* Repassarem les principals línies de treball en les investigacions sobre creences en Resolució de Problemes, per a centrar-nos, després, en dues que ens afecten directament en el nostre estudi: les creences del professorat entorn a la RP i la identificació de creences puguin conduir-hi a errors.
4) *Els coneixements professionals dels professors de matemàtiques:* Farem un recull d'estudis que han tingut com a objectiu conceptualitzar el coneixement matemàtic dels professors i/o mesurar-lo.

3.1. El fenomen de les transicions

L'atenció a la continuïtat en l'aprenentatge i especialment en moments de **transició d'etapa** és un àmbit d'interès creixent de caràcter estatal i internacional en la recerca i en la pràctica en educació matemàtica, que ha estat impulsat per l'ús d'un llenguatge comú - el de les competències[1]- en la normativa que regula l'organització de l'educació matemàtica al llarg de

[1] Pel que fa a l'aprenentatge de l'alumne, assumim la noció de "competència matemàtica" en els mateixos termes en què apareix en l'informe Pisa 2003 el terme "Mathematical Literacy" (Rico, 2008). Per tant es refereix a les capacitats dels estudiants per analitzar, raonar i comunicar eficaçment quan s'enuncien, formulen i resolen problemes matemàtics en una varietat de dominis i situacions. D'acord

totes les etapes educatives. La transició de Primària a Secundària, de Secundària a Batxillerat o de Batxillerat a la Universitat han estat objecte d'investigacions que se centren en un o diversos elements característics i/o influents en el procés de transició, com el currículum (Coad and Jones, 1999), les diferències entre els centres de partida i arribada (Rice, 1997) o el *background* de l'alumne, el seu gènere i la mida de la institució d'acollida (Ferguson and Fraser, 1998). Altres estudis investiguen els efectes que la transició d'etapa produeix en l'alumne, tant en el seu rendiment acadèmic (Jourdan, Cretchley & Passmore, 2007; Kajander & Lovric, 2005; Rodríguez, Fita & Torrado, 2004; Sdrolias & Triandafillidis, 2008) com en la seva motivació (Zanobini & Usai, 2002). Guzmán et al. (1998) se centren en les dificultats que troba l'alumnat en el pas a la universitat, mentre que el New Zealand Ministry of Education (2008) realitza un estudi més ampli sobre la transició de Primària a Secundària. Les percepcions que sobre aquest procés tenen estudiants, professors i pares han estat investigades per Zeedyk et al. (2003). Finalment, McGee et al. (2003) han elaborat una revisió global de l'estat de la qüestió a nivell internacional.

La **transició Primària-Secundària** resulta ser la més investigada per la problemàtica que comporta a causa de l'obligatorietat de la mateixa, l'edat dels alumnes i la multitud d'alteracions que implica. En molts casos és necessari un canvi de centre; les possibles repercussions educatives han estat investigades per Ferguson i Fraser (1998), que observen un impacte més negatiu quant major és la diferència entre l'escola de Primària i la de Secundària. A més de la mida del centre, altres elements derivats d'aquest canvi, com la disminució en la seguretat que pogués percebre l'alumne o l'entorn acadèmic, afecten negativament en el seu rendiment acadèmic (Rice, 1997). És més, aquest canvi d'entorn pot arribar a menyscabar la pròpia percepció de l'alumne sobre la seva competència, que al seu torn influeix en la seva motivació i, en última instància, en els seus resultats acadèmics (Zanobini i Usai, 2002).

Rice (1997) observa com un descens en les expectatives del professor de Secundària durant la transició des de la Primària provoca un efecte positiu en el rendiment acadèmic d'alguns alumnes. Altres estudis esmentats per McGee et al. (2003) observen l'efecte contrari: les baixes expectatives del professor de Secundària desmotiven a molts alumnes que esperaven nous reptes en la transició. Observem, doncs, la complexitat d'aquest procés des del punt de vista de la tasca docent. Així mateix, Ferguson i Fraser (1998) afirmen que l'actuació del docent durant la transició pot causar un perjudici a llarg termini en la futura actitud de l'estudiant cap a les matemàtiques. Tot això fonamenta una necessitat d'investigar la pràctica docent des del punt de vista de la transició.

D'altra banda, el tipus de tasca a la classe de matemàtiques pateix també un canvi de la primària a la secundària: mentre que a la primera la presència d'activitats manipulatives és predominant, en l'educació secundària l'activitat matemàtica prescindeix en general de materials concrets (Howard, Perry i Tracy, 1997). Sorgeix així la necessitat de generalitzar i justificar proposicions matemàtiques, cosa que, per exemple, en un camp tan intuïtiu com la geometria, suposa als alumnes una dificultat cognitiva afegida (Sdrolias i Triandafillidis, 2008).

---

amb Niss (2002) considerem les competències matemàtiques classificades en: pensar i raonar, argumentar, comunicar, modelitzar, plantejar i resoldre problemes, representar, i utilitzar el llenguatge simbòlic, formal i tècnic i les seves operacions que són pròpies del procés de matematització.

3.2. La resolució de problemes en educació matemàtica

La Resolució de Problemes de matemàtiques ha arribat a ser qualificada pels matemàtics professionals com el cor d'aquestes (Halmos, 1980). Però resoldre problemes no és només una activitat científica; també constitueix un tipus de tasca educativa que ha d'ocupar una posició destacada en els processos d'ensenyament i aprenentatge de nens, adolescents i estudiants en general. Per això, la resolució de problemes és un contingut escolar que contribueix a la formació intel·lectual i científica dels estudiants. A la vegada, la consideració curricular de la resolució de problemes i els processos d'ensenyament i aprenentatge involucrats es configuren com un tema d'estudi i investigació per als especialistes en Ciències de l'Educació. D'aquí que la seva importància en Educació Matemàtica, tot i no ser nova, ha experimentat des de mitjans del segle vint un impuls creixent, fins arribar a constituir un camp d'investigació amb característiques ben diferenciades (Castro, 2008).

La seva importància s'ha reflectit també en gran part de les reformes curriculars que des de fa dues dècades s'estan emprenent en tot el món, i que aposten per orientar la matemàtica escolar de l'ensenyament obligatori des de la perspectiva de la resolució de problemes. De fet, entre els professors de matemàtiques, a gairebé ningú li resulta aliè el terme i, tot i així, sota aquesta aparent uniformitat s'amaga una gamma de significats diferents. Ens serà fàcil trobar a dos professor que ens aportin, en essència, una mateixa definició del terme; una mica menys fàcil que li atorguin el mateix paper en el currículum i bastant difícil que, de fet, utilitzin d'igual forma la resolució de problemes a les seves aules (Cotreras, 1999).

En aquest capítol començarem per situar la nostra recerca en les línies d'investigació en Resolució de Problemes, veurem després com la RP adquireix significats diferents i ocupa llocs diferents en la construcció del coneixement matemàtic escolar; a continuació reunirem algunes aportacions rellevants en relació amb el terme resolució de problemes i ens posicionarem al respecte. Posteriorment, analitzarem els diferents objectius que es poden perseguir amb la RP i, finalment, ens aproparem al tractament real que té a les aules.

3.2.1. Línies d'investigació en resolució de problemes

En l'àmbit de les Ciències de l'Educació, cada disciplina aborda l'estudi de la resolució de problemes amb una visió pròpia. Concretament, en Educació Matemàtica es poden distingir diverses aproximacions (Castro, 2008). La resolució de problemes ha sigut explícitament estudiada, entre d'altres, per filòsofs (Dewey, 1989), psicòlegs (Bell, Fischbein i Greer, 1984; Mayer, 1986; Newell i Simon, 1972; Stemberg, 1994; Vergnaud, 1983), matemàtics professionals (Hadamard, 1947; Poincaré, 1963; Polya, 1945), i especialistes en Educació i Didàctica de la Matemàtica (Carrillo, 1996; Climent i Carrillo, 2000; Cobo i Fortuny, 2000; Kilpatrick, 1967; Puig, 1996; Rico, 1988; Rico et al., 1994; Schoenfeld, 1985, 1987, 1994 ; Socas, 2001). Cada un d'aquests professionals ha donat un enfocament propi a la recerca en resolució de problemes, el que fa que avui dia ens trobem, com ja manifestava Silver (1985), amb una considerable massa de recerca en resolució de problemes, la sistematització de la qual està encara per concloure.

Una manera de descriure i situar una investigació en resolució de problemes és considerar els diferents agents que intervenen en la resolució d'un problema i els components que el desenvolupen. Des del punt de vista escolar en el qual estem interessats, cal tenir en compte que en tota situació de resolució dels problemes de matemàtiques es distingeixen o intervenen tres components (Kilpatrick, 1978): el problema, interrogant o qüestió que es planteja, l'alumne (o els alumnes) a qui es planteja el problema per a què el resolgui, i la situació en què resol el problema, que en l'àmbit educatiu és l'aula, utilitzada pel professor. La consideració de cadascun d'ells, per separat o conjuntament, en interacció amb els altres components, permet situar diferents línies de recerca de resolució de problemes en Educació Matemàtica. Els tres components constitueixen les dimensions d'un continu que permet emmarcar les investigacions sobre resolució de problemes escolars. En uns casos les investigacions se centren en una d'aquestes dimensions, o en més d'una, però sense perdre la perspectiva de les altres dimensions de manera individual o en conjunt.

Castro (2008), amb ànims de simplificar la situació i atenint-se als motius pràctics que ens condueixen en Educació Matemàtica a investigar en resolució de problemes de matemàtiques, considera que les investigacions realitzades es poden agrupar en dues grans línees:

a) Ensenyar a resoldre problemes
b) Estudis sobre com pensem quan resolem problemes

Donat que el nostre estudi s'emmarca en la primera de les línies considerades per Castro, ens centrarem només en aquesta i farem una revisió de les aportacions més destacades que hi ha hagut en aquest camp d'investigació. Tanmateix, l'objectiu d'ensenyar a resoldre problemes no és només el d'aconseguir que els alumnes siguin bons resolutors, sinó que aprenguin matemàtiques a través de la RP. Tenint en compte aquesta consideració (que hem aprofundit en l'apartat d'*objectius de la RP*) procedim a la revisió de l'esmentada línia d'investigació.

Ensenyar a resoldre problemes

Aprendre a resoldre problemes és la destresa més important que els estudiants poden aprendre en qualsevol lloc del món (Jonassen, 2004). Tot i aquesta importància, Jonassen posa de manifest que la resolució de problemes ha deixat de ser un centre d'atenció, i es pregunta per què ha deixat d'interessar la resolució de problemes en els àmbits de recerca i no es realitzen més esforços en ajudar als estudiants a que aprenguin a resoldre problemes. En les primeres etapes (Lester, 1982), l'èmfasi es va posar en si es pot ensenyar als alumnes a resoldre problemes i la millor estratègia metodològica per a fer-ho. Durant molt de temps els educadors han cregut que és possible ensenyar a resoldre problemes o, si més no, ensenyar a pensar matemàticament. Han justificat la seva creença en filòsofs de l'educació, com Dewey (1989), que va integrar la resolució de problemes en la seva teoria de com pensem els humans, o en educadors matemàtics com Polya (1945). Dewey, el 1910, va descriure etapes del pensament en la resolució de problemes que són un preludi, o almenys un antecedent, de les que va proposar Polya posteriorment el 1945 en el seu *How to solve it*, un compendi per al professor de com pot ajudar als seus alumnes de forma efectiva a resoldre problemes.

Les idees de Polya van ser prèviament difoses en conferències. George Polya va donar, el 1931, una conferència davant la Societat Suïssa de Professors de Matemàtiques sota el títol "Com trobar la solució d'un problema de Matemàtiques". Tres anys després, el 1934, va aparèixer una ressenya d'aquesta conferència en Matemàtica Elemental, òrgan dels cercles matemàtics d'estudiants, publicat sota els auspicis de la societat matemàtica argentina i de la societat matemàtica espanyola, en la qual se subratlla que el seu objectiu era presentar "un nou mètode d'ensenyament" i que es tracta "d'un vademècum que es conté en un sol full de paper". El vademècum és una versió preliminar que va aparèixer el 1945 (Polya, 1945) i conté les quatre fases de resolució d'un problema, acompanyada cadascuna d'elles per un llistat de suggeriments heurístics apropiats, adaptats al nivell mitjà de les escoles . Aquest va poder ser l'inici de la important influència que ha tingut l'obra de Polya a Espanya, sobretot en els professors de matemàtiques de l'Ensenyament Secundari, i que ha arribat fins a les últimes propostes curriculars de matemàtiques que s'han promulgat des del Ministeri d'Educació per a aquest nivell educatiu. Els grups de renovació pedagògica, en el seu moment, també van participar d'aquest "ideal" de la resolució de problemes, com és el cas del Grupo Cero València, que va proposar un disseny curricular per a alumnes de 12 a 16 anys (Grupo Cero, 1985) on s'emfatitza la importància de les estratègies de resolució de problemes i les capacitats bàsiques que es consoliden mitjançant l'activitat matemàtica: generalitzar, abstraure, fer hipòtesis i sotmetre-les a proves, explorar, prendre decisions, proposar idees noves, i fer front a situacions problemàtiques amb la confiança que poden ser compreses i resoltes. En aquest enfocament el paper del professor és d'ajuda en la consolidació de l'ús sistemàtic de les eines heurístiques, entre les quals destaquen les citades per Polya.

D'altra banda, en un estudi local sobre el desenvolupament del currículum i la resolució de problemes, Arcavi i Friedlander (2007) conclouen, amb suggeriments sobre alguns objectius generals, què necessita perseguir la investigació en l'ensenyament de la Resolució de Problemes:

- Seguir explorant el territori inexplorat de la resolució de problemes encara habitat per creences no enterament sustentades per estudis empírics.
- Ajudar els educadors en la presa de decisions ben informades, ja sigui amb punts de vista complementaris o oposats.
- Observar, documentar i discutir amb detall com s'hauria d'ensenyar Resolució de Problemes a l'aula (e.g., Arcavi et al., 1998) o com s'hauria d'implementar un currículum destinat a la RP (e.g., Arcavi et al., 2006).
- Ajudar els educadors a ser més conscients i responsables en la tria d'opcions i, sobretot, que siguin menys impulsius i tancats en les seves creences.

3.2.2. Idea de problema i de RP en educació matemàtica

Schoenfeld (1992) afirma que les idees de "problema" i "resolució de problemes" han tingut diferents significats, fins i tot de vegades contradictoris; cosa que fa que la literatura sobre resolució de problemes de matemàtiques sigui difícil d'interpretar.

El terme "problema" (sovint en contraposició a "exercici", dicotomia en la que entrarem a fons més endavant) s'ha definit considerant o no factors com el resolutor, el professorat, el context en el qual és proposat, l'existència d'un procediment que condueixi a la solució, l'aplicació, o el seu paper a l'aula. No és objectiu del present estudi entrar en aquestes consideracions a fons. Tot i així, cal posicionar-nos per a tenir una definició a la què atenir-nos.

Compartim i assumim, doncs, la següent definició de M.Luz Callejo (1994):

es reservarà el terme "problema" per a designar una situació que planteja una qüestió matemàtica el mètode de la qual no és immediatament accessible al que intenta resoldre-la perquè no disposa d'un algorisme que relacioni les dades i la incògnita o les dades i la conclusió, i ha de, per tant, buscar, investigar, establir relacions, implicar els seus afectes, etc... per fer front a una situació nova.

En quant a la caracterització de la resolució de problemes, Lesh i Zawojewski (2007, p.776) indiquen que "els patrons que formen una identitat en la RP són complexos, involucren patrons de motivació variats, de reaccions afectives, de desenvolupament cognitiu i social en diferents circumstàncies dins d'una tasca donada". Els mateixos autors defineixen la resolució de problemes com

el procés d'interpretar una situació matemàticament, la qual involucra diferents cicles interactius d'expressar, provar i revisar interpretacions – i d'ordenar, integrar, modificar, revisar o redefinir grups de conceptes matemàtics des de diversos tòpics dins i més enllà de les matemàtiques. (p. 782)

Un aspecte important en aquesta caracterització –que nosaltres compartim– és que la comprensió o el desenvolupament de les idees matemàtiques comporten un procés de reflexió on l'estudiant constantment refina o transforma les seves idees i formes de pensar com a resultat de participar activament en una comunitat de pràctica o aprenentatge. Santos i Trigo (2008) considera que el més rellevant d'aquesta visió és que l'estudiant desenvolupi recursos, estratègies i eines que li permetin recuperar-se de dificultats inicials i enrobustir les seves formes de pensar sobre el seu propi aprenentatge i la resolució de problemes.

Dicotomia exercici – problema

En la idea de problema, des de la perspectiva tradicional de l'educació matemàtica, sovint s'ha posat l'èmfasi en la dicotomia exercici – problema: caracterització que és molt interessant per al present treball, donat que en el qüestionari fem aquesta diferenciació i demanem que els professors defineixin el terme problema tenint-la en compte.

En la definició que donava Kantowski l'any 1980, una de les definicions considerades clàssiques i citades sovint per diferents autors,

"Un problema és una situació que difereix d'un exercici en què el resolutor no té un procediment o algorisme que el condueixi amb certesa a una solució" (p.1)

s'observa aquesta caracterització de la idea de problema com a contraposició a la idea d'exercici, pressuposant el caràcter mecànic i immediat d'aquest, i reservant la idea contrària al terme *problema.*

En aquesta mateixa línia, però aportant argumentacions més riques, Schoenfeld (1985) afirma que:

"Ser un problema no és un propietat inherent d'una tasca matemàtica. Més aviat és una relació entre l'individu i la tasca el que fa de la tasca un problema per a aquella persona. La paraula problema s'usa aquí en el seu sentit relatiu, com una tasca que és difícil per a l'individu

que està intentant resoldre-la. Més encara, aquesta dificultat ha de ser un "embolic" intel·lectual més que de càlcul (...). Per tal d'enunciar les coses més formalment, si un té accés a un esquema de solució per a una tasca matemàtica, aquesta tasca és un exercici i no un problema" (p. 74)

Aquesta dicotomia i aquestes identificacions no poden anar separades, però, de l'anàlisi del paper o els objectius de la resolució de problemes en l'educació matemàtica, aspectes que aprofundirem en el següent apartat.

3.2.3. Objectius de la resolució de problemes

Els problemes es poden proposar als alumnes perseguint, principalment, dos objectius diferents: o es pretén desenvolupar estratègies i processos del pensament matemàtic, o bé motivar i fer significativa la introducció d'un concepte. En el primer cas, la RP és objecte d'aprenentatge i parlem d' *aprendre a resoldre problemes* o a *pensar matemàticament*. En el segon cas, la RP és instrument o eina d'aprenentatge i parlem d'*aprendre matemàtiques resolent problemes*. (Vila i Callejo, 2004)

En quant a la primera de les perspectives, Schoenfeld (1985, p.12) estableix que en la resolució de problemes:

Aprendre a pensar matemàticament involucra més que tenir una gran quantitat de coneixement de la matèria. Inclou ser flexible i dominar els recursos dins de la disciplina, usar el coneixement propi eficientment, i comprendre i acceptar les regles "tàcites de joc".

En aquesta perspectiva es reconeix que un aspecte central en el desenvolupament del pensament matemàtic dels estudiants és que adquireixin els camins, estratègies, recursos i una disposició per a involucrar-se en activitats que reflecteixin el quefer matemàtic (Santos Trigo, 2008) . És a dir, es reconeix la importància de relacionar el procés de desenvolupar la disciplina amb l'aprenentatge o construcció del coneixement matemàtic.

Aprendre a pensar matemàticament significa: (a) desenvolupar un punt de vista matemàtic – que valori el procés de matematització i abstracció i tenir la predilecció d'aplicar-los, i (b) desenvolupar una competència amb les eines de treball, i utilitzar-les al servei de la meta d'aprendre estructures – desenvolupament del sentit matemàtic (Schoenfeld, 1994, p.60).

Així doncs, quan l'objectiu que perseguim és que els alumnes aprenguin a *pensar matemàticament*, el repte de la instrucció matemàtica serà crear condicions per a generar un ambient que reflecteixi el valors propis de la pràctica o activitat matemàtica.

L'altre objectiu que pot perseguir el professor és el d'*aprendre matemàtiques resolent problemes*. Quan és així, la selecció de problemes ha de fer-se amb cura, de tal manera que inicialment siguin assequibles per als alumnes, que els permetin aplicar els seus coneixements, però que els ajudin a prendre consciència de la insuficiència del seu saber per a poder donar una resposta completament satisfactòria. D'aquesta manera es manté l'interès pel problema i es crea el desequilibri que permetrà realitzar nous aprenentatges.

Darrera d'aquest plantejament està la concepció constructivista de l'aprenentatge, segons la qual el coneixement no es rep passivament, com si la ment fos un llibre en blanc en el que es van escrivint els nous coneixements, sinó que el subjecte construeix activament el coneixement, incorporant els nous coneixements a les estructures mentals que la seva experiència ha anat forjant. Això significa que la matemàtica no s'aprèn per transmissió directa del què s'explica a classe o del què es llegeix en els llibres de text, sinó que s'aprèn en interacció amb situacions problemàtiques i amb altres subjectes, que obliguen a l'alumne a anar modificant la seva estructura cognitiva mitjançant una sèrie d'accions: experimentant, fent-se preguntes, particularitzant situacions, generalitzant resultats, trobant contraexemples, etc (Vila i Callejo, 2004, Onrubia i altres, 2001). I aquestes situacions problemàtiques són les que hem de crear mitjançant els problemes que proposem a classe, que seran diferents segons el camp de coneixement volem treballar.

Per al nostre treball considerem que ambdós objectius són importants en la resolució de problemes, i no ens posicionarem en referència a quin considerem més important.

3.2.4. La resolució de problemes en el currículum

Els problemes van ser el tema de les matemàtiques des de la seva aparició, segons consta en els documents més antics existents de matemàtiques: el papir Rhind, les taules d'argila babilòniques, les *nou seccions* Xineses, i altres (Arcavi i Friedlander, 2007). D'alguna manera, aquests documents poden ser considerats com a "currículum'': textos amb l'objectiu principal d'ensenyar, o almenys documentar l'aplicació d'una tècnica específica de solució i comunicar-la a una minoria privilegiada. Així, es pot afirmar que "ensenyar" a resoldre problemes és tan antic com la matemàtica mateixa. La visió de la resolució de problemes matemàtics com un conjunt de tècniques per a resoldre diferents tipus de problemes sembla haver prevalgut durant molts segles. No obstant això, per primera vegada, en l'últim segle els debats de l'ensenyament de la resolució de problemes han passat de promoure que els estudiants simplement coneguin les normes per a la resolució de problemes particulars a desenvolupar enfocaments més generals per a resoldre problemes (Stanic i Kilpatrick, 1989).

Molts estudiosos que van estar treballant en diferents disciplines durant la primera meitat del segle XX poden ser esmentats com els precursors de la nova concepció més general sobre la resolució de problemes, el seu paper en l'ensenyament de la matemàtica i la seva importància en la investigació educativa, d'entre els quals destaquen les contribucions pioneres de John Dewey, Jean Piaget, George Polya i William A. Brownell, que van treballar en diversos camps com l'educació, la filosofia, l'epistemologia, la psicologia cognitiva, les matemàtiques i l'ensenyament de les matemàtiques.

Des de la dècada dels 60, la resolució de problemes matemàtics ha començat a jugar un paper central tant en l'ensenyament i com en la investigació. En el camp de l'ensenyament s'aprecia una preocupació creixent per incorporar la resolució de problemes en el currículum de les matemàtiques escolars, i un esforç per sustentar les innovacions curriculars sobre treballs de recerca educativa. Les traduccions de treballs de l'escola soviètica d'Educació Matemàtica (Kilpatrick i Wiszurp, 1969, 1972; Krutetskii, 1976) van posar de manifest l'enorme interès d'aquest focus de recerca i els considerables avenços que havien realitzat. Subratllem algunes referències que han estat documents claus (Castro, 2008):

• El NCTM nord-americà publica *An Agenda for Action*, 1980, i situa com a primer ítem en la seva llista de recomanacions per a la dècada dels 1980 la idea que la resolució de problemes ha de ser l'eix de la matemàtica escolar i el principal objectiu de l'ensenyament de les matemàtiques, i dedica el llibre de l'any 1980 íntegrament al tema: *Problem Solving in School Mathematics* (NCTM, 1980).

• L'informe Cockcroft (*Las matemáticas sí cuentan*, 1985), en el paràgraf 249, estableix que l'habilitat en resoldre problemes és el nucli central de les matemàtiques, i elabora un breu document en el qual s'afirma taxativament que la resolució de problemes podria i hauria de reemplaçar a l'aritmètica rutinària com el tema principal en les classes de primària.

• Els Estàndards Curriculars del NCTM (1989, 2000) inclouen la resolució de problemes com un dels estàndards que cal desenvolupar en el currículum escolar de matemàtiques.

A Espanya, s'inclouen recomanacions explícites en la proposta curricular que propugna el MEC en el Decret Curricular Base de 1989.

> "La resolució de problemes dins del currículum de Matemàtiques és un contingut prioritari, perquè és un mitjà d'aprenentatge i reforç de continguts, dóna sentit aplicatiu a l'àrea i permet la interrelació entre els diferents blocs i les restants àrees" (MEC, 1989).

Entre els múltiples suggeriments que aporta el DCB, destaquem:

> "En els plantejaments metodològics cal tenir en compte que l'alumne ha de desenvolupar i perfeccionar les seves pròpies estratègies, alhora que adquireix altres generals i específiques que li permetin enfrontar-se a les noves situacions amb probabilitat d'èxit. En aquest sentit, es brindarà als nens l'oportunitat de familiaritzar-se amb processos que faciliten l'exploració i resolució de problemes com: comprensió i expressió de la situació matemàtica (verbalització, dramatització, discussió en equip), extracció de dades i anàlisi de les mateixes, representació en forma gràfica del problema o situació, formulació de conjectures i verificació de la seva validesa o no, exploració mitjançant assaig i error, formulacions noves del problema, comprovació de resultats i comunicació dels mateixos. Es fa necessari, així mateix, desenvolupar la capacitat de persistir en l'exploració d'un problema" (MEC, 1989).

En els programes per a l'Educació Secundària Obligatòria, el MEC (2000) estableix en el Reial decret 3473/2000, per a la modificació dels Ensenyaments Mínims per a l'ESO, que

> "La resolució de problemes s'ha de contemplar com una pràctica habitual, que no pot tractar-se de forma aïllada, sinó integrada en totes i cadascuna de les facetes que conformen el procés d'ensenyament i aprenentatge" (p. 1843).

L'objectiu 5 d'aquest Reial Decret diu que s'han de resoldre problemes matemàtics utilitzant diferents estratègies, procediments i recursos, des de la intuïció fins als algoritmes.

Actualment, la modificació dels Ensenyaments Mínims realitzada pel MEC (2007) orientada al desenvolupament de competències, preveu la posada en pràctica de processos de raonament que porten a la solució dels problemes i a l'aplicació d'estratègies de resolució de problemes. En tots els cursos s'ha inclòs un bloc de "continguts comuns" que constitueix l'eix transversal vertebrador dels coneixements matemàtics que abasta. Aquest bloc fa referència expressa, entre d'altres, a un tema bàsic del currículum: la resolució de problemes, amb el qual es pretén:

- Utilització d'estratègies i tècniques simples en la resolució de problemes com ara l'anàlisi de l'enunciat, l'assaig i error o la resolució d'un problema més simple, i la comprovació de la solució obtinguda.
- Expressió verbal del procediment que s'ha seguit en la resolució de problemes.
- Confiança en les pròpies capacitats per afrontar problemes, comprendre les relacions matemàtiques i prendre decisions a partir d'elles.
- Perseverança i flexibilitat en la recerca de solucions als problemes.

Els continguts del currículum estan distribuïts en el que s'anomena "blocs de contingut", que són sis: Nombres, Àlgebra, Geometria, Funcions i Gràfics, Estadística i Probabilitat, i aquest bloc de "continguts comuns". No es parla però de la resolució de problemes fora d'aquest bloc de "contingut comuns" (de la manera que ja hem expressat), excepte en el bloc d'Àlgebra.

Segons Puig (2008), amb aquest fet es corre el perill de que, al col·locar la resolució de problemes a tot arreu però negar-li un lloc propi i específic, acabi no estant-ne en cap; per pretendre-la omnipresent, acabi estant absent de la pràctica de les aules. O acabi estant present només en el bloc d'Àlgebra, on la resolució de problemes ha quedat reduïda al món de l'heurística i al món de la resolució algebraica de problemes, i en el que amb els problemes s'ensenya el sistema de signes de l'àlgebra, perdent-se el paper fonamental de la resolució de problemes en la constitució dels conceptes ja sigui aritmètics, geomètrics, probabilístics o de qualsevol altra branca de les matemàtiques.

Pel que fa **a Catalunya**, podem ser més optimistes –en termes de currículum–. Tant a l'educació primària (DECRET 142/2007) com a la secundària obligatòria (DECRET 143/2007) es considera una finalitat d'aquests ensenyaments *adquirir les habilitats i les competències culturals i socials relatives a la resolució de problemes*.

En quant a la competència matemàtica, a l'educació primària es descriu que, en general, aquesta implica

> "l'habilitat per comprendre, utilitzar i relacionar els números, les seves operacions bàsiques, els símbols i les formes d'expressió i raonament matemàtic, tant per produir i interpretar distints tipus d'informació, com per ampliar el coneixement sobre aspectes quantitatius i espacials de la realitat, i per entendre i resoldre problemes i situacions relacionats amb la vida quotidiana i el coneixement científic i el món laboral i social."

I més concretament, en quant a la resolució de problemes, assolir aquesta competència implica

> "Plantejar-se i resoldre problemes. Llegir i entendre l'enunciat, generar preguntes relacionades amb una situació-problema, planificar i desenvolupar estratègies de resolució i verificar la validesa de les solucions."

En l'ordenament de secundària, a més, s'afegeix

> "Plantejar i resoldre problemes anàlegs, cercar altres resolucions, canviar les condicions del problema, sintetitzar els resultats i mètodes emprats, i estendre el problema, recollint els resultats que poden ser útils en situacions posteriors."

En ambdós ensenyaments es considera la resolució de problemes, "entesa en un sentit ampli", com el nucli d'ensenyament en les classes de matemàtiques. Tot i així, al igual que a l'Estat Español, no es considera la resolució de problemes com un bloc de contingut, sinó que s'inclou en els processos que es desenvolupen al treballar els continguts de tots els blocs, i en tots els cursos, considerant-la

> "el nucli del treball de matemàtiques, ja que facilita la construcció de nous coneixements, la transferència de conceptes, el desenvolupament d'estratègies de resolució i l'anàlisi del procés de resolució. Cal tenir en compte que els problemes, a més d'aplicar el coneixement adquirit en altres contextos, han de possibilitar la construcció del coneixement matemàtic i mostrar-ne la utilitat."

Finalment volem copsar el pes que té la resolució de problemes en cadascun dels cincs blocs de continguts en què estan estructurats tant el currículum de Matemàtiques de l'Educació Primària com el de l'Educació Secundària Obligatòria (desenvolupat en estreta relació amb el de Primària), comparant el cicle superior de primària i el primer curs de la ESO. Visualment veiem les diferències substancials del pes de la RP entre els diferents blocs de contingut:

	Cicle Superior Primària	**Primer curs ESO**
Processos específics a desenvolupar a través dels diferents continguts	*Resolució de problemes* (reconeixement, identificació, aproximació, estimació, predicció, anticipació, planificació, exploració, elaboració, creació, construcció, disseny, comprovació).	*Resolució de problemes* (recollida de dades, disseny, identificació, distinció, simulació, estimació, desenvolupament d'estratègies, comprovació)
BLOC 1: Numeració i càlcul		- Utilització de nombres enters per a expressar valors o variacions (quantitats, valor monetari, temps, temperatures, etc.) per resoldre problemes en diferents contextos. - Utilització de fraccions, decimals i percentatges per a resoldre problemes en diferents contextos . - Utilització de factoritzacions, múltiples i divisors en la resolució de problemes. - Utilització de models matemàtics per a la resolució de problemes recreatius i per a la determinació d'estratègies de resolució de jocs d'estratègia de tipus numèric
BLOC 2: Canvi i relacions		- Modelització i resolució de problemes utilitzant expressions verbals, taules i gràfiques
BLOC 3: Espai i forma	- Utilització de la visualització i de models geomètrics per resoldre problemes - Ús de representacions planes d'objectes tridimensionals per visualitzar i resoldre problemes	- Utilització de la visualització, el raonament matemàtic i la modelització geomètrica per a resoldre problemes - Representació plana d'objectes en la resolució de problemes d'àrees.

	d'àrees i volums. - Aplicació d'idees i conceptes geomètrics a problemes de la vida diària i de l'entorn. Representació i resolució de problemes geomètrics que comprenguin nocions de fraccions, d'àrea i de mesura.	- Utilització de models geomètrics per a la resolució de problemes recreatius i per a la determinació d'estratègies de resolució de jocs d'estratègia de tipus geomètric.
BLOC 4: Mesura	- Disseny de l'estratègia adequada per realitzar una mesura en un context significatiu. Crear i resoldre problemes	- Utilització de les diferents unitats de mesura en la resolució de problemes. - Utilització de la mesura del temps i de les seves unitats en la resolució de problemes.
BLOC 5: Estadística i atzar	- Determinació del tipus de representació més apropiada al resoldre problemes. - Utilització de la calculadora i de recursos TIC per elaborar taules de valors i calcular la mediana, la mitjana aritmètica i la moda. Aplicació a la resolució de problemes. - Utilització de diagrames de punts per analitzar la relació entre dues característiques en poblacions diferents. Aplicació a la resolució de problemes. - Ús dels recursos TIC per treballar amb mostres grans. Aplicació a la resolució de problemes.	
Criteris d'avaluació	- Formular problemes a partir de situacions conegudes. Comunicar oralment i per escrit, de forma coherent, clara i precisa, coneixements i processos matemàtics realitzats (càlculs, mesures, construccions geomètriques, resolució de problemes).	- Resoldre problemes de la vida quotidiana en els que calgui la utilització de les quatre operacions amb nombres enters, decimals, fraccions i percentatges, fent ús de la forma de càlcul més apropiada i valorant l'adequació del resultat al context. - Utilitzar nombres enters, fraccions, decimals i percentatges, les seves operacions i les seves propietats per a recollir, transformar i intercanviar informació i resoldre problemes relacionats amb la vida diària. - Estimar, mesurar i resoldre problemes de longituds, amplituds, superfícies i temps en contextos reals, així com determinar perímetres, àrees i mesura d'angles de figures planes utilitzant la unitat de mesura adequada.

Taula 1. La RP en els blocs de contingut de currículum

Per acabar aquest apartat, voldríem fer especial atenció a la problemàtica que suposa el fet que la presència de la resolució de problemes en el currículum es tradueixi sovint en la seva absència a la pràctica de les aules. Tot i així, remetent-nos a Puig (2008), defensem que això no es deu a la manca d'investigació, sinó, en tot cas, a la manca de relació entre la recerca i el disseny i desenvolupament curriculars, i sobretot en la ideologia que ha sustentat les decisions curriculars.

3.3. Les creences dels professors de matemàtiques

Les creences i les concepcions[2] que el professor posseeix sobre les matemàtiques i sobre el seu procés d'aprenentatge són factors essencials a l'hora de planificar, desenvolupar i avaluar els processos d'ensenyament/aprenentatge, determinant en gran part la seva actuació professional (Azcárate, 2001). Però, com diu Guimaraes (1988), el problema no està tant en l'elecció d'un determinat contingut matemàtic, sinó més aviat en els objectius que aquesta opció persegueix i els mitjans a través dels quals es pretenen assolir:

"Un mismo asunto matemático puede ser abordado de diversas maneras, integrado en diferentes secuencias programáticas... Un determinado abordaje de la Matemática puede hacerse con diferentes fines. ¿Qué justifica la opción del profesor?, ¿qué está detrás de sus opciones metodológicas?"

La visió que els alumnes tenen de les matemàtiques com a disciplina, la seva finalitat en l'ensenyament, la presa de consciència de les seves capacitats per a aprendre'n, els valors socioculturals que puguin arribar a atribuir-li, el significat i sentit dels problemes..., depenen en gran mesura dels missatges que reben del professor; missatges que són elaborats des de les seves creences (Contreras, 1999).

Un dels objectius de la nostra recerca és comparar les creences dels professors de matemàtiques de primària i secundària sobre la Resolució de Problemes i sobre la importància que li donen en l'ensenyament de les matemàtiques. És a dir, volem estudiar les creences que els professors d'aquestes dues etapes tenen sobre la RP i el seu paper a l'aula. La raó que motiva l'estudi de les creences en aquest treball és conèixer més sobre els factors del pensament dels professors de cada etapa que els fan prendre determinades opcions educatives en relació amb la RP, i analitzar la relació que aquestes creences tenen amb els coneixements sobre RP dels mateixos professors.

Per a portar a terme el nostre propòsit, ens sembla interessant distingir alguns marcs o contextos d'investigació on han aparegut les creences i concepcions dels professors de matemàtiques en relació amb la RP, per a poder així situar la part del nostre treball referida a aquest camp.

3.3.1. Línies d'investigació en creences sobre RP

Respecte a les creences sobre la resolució de problemes matemàtics, cal assenyalar dues línies de treball en les investigacions (Castro, 2008). Una d'elles es refereix a la presència de creences que condueixen a errors en la resolució de problemes de matemàtiques, i l'altra línia estudia les concepcions del professor i la seva relació amb la resolució de problemes.

Tot i que el nostre treball s'emmarca clarament en la segona línia esmentada, hem trobat investigacions d'ambdues línies que ens han estat d'utilitat a l'hora tant de plantejar la recerca com de dissenyar els instruments de recollida de dades i la seva anàlisi. Dividirem, doncs, els

[2]Les creences matemàtiques són una de les components del coneixement subjectiu implícit de l'individu sobre les matemàtiques i el seu ensenyament i aprenentatge. Aquest coneixement està basat en l'experiència. Les concepcions són les creences conscients (Gómez Chacón, 2000). En endavant utilitzarem només el terme creences sense fer distincions entre aquestes i les concepcions.

estudis que volem revisar en aquest apartat en dos grans blocs, que estan inclosos, cadascun, en una de les dues línies d'investigació citades per Castro:

- L'ús de la resolució de problemes a l'aula: creences del professorat entorn a la seva finalitat.
- Identificació de creences que tenen relació amb l'efectivitat en RP.

3.3.2. L'ús de la resolució de problemes a l'aula: creences del professorat entorn a la seva finalitat

En educació matemàtica i en investigació en educació matemàtica la resolució de problemes ocupa un lloc destacat; per altra banda, els nous currículums aposten per orientar la matemàtica escolar de l'ensenyament obligatori des de la perspectiva de la resolució de problemes (Departament d'Educació, 2007, 2009). Malgrat això, com veurem en aquesta revisió de recerques sobre el tema, molts dels estudis realitzats sobre l'ús de la resolució de problemes a l'aula ens indiquen que encara estem en el camí de la seva integració total en l'ensenyament de les matemàtiques.

Diverses investigacions han intentat establir quins factors poden actuar en les pràctiques dels professors de matemàtiques com a potenciadors o reductors en quant a l'ús de la resolució de problemes; moltes mantenen que són les creences dels professors les que determinen amb més força aquest i altres aspectes de les seves metodologies (Fernandes i Vale, 1994; Wilson i Cooney, 2002; Xenofontos i Andrews, 2010).

Tot i així, com senyala Cooney (1985), no n'hi ha prou amb mantenir unes creences "adequades"; portar a la pràctica una instrucció d'aquest tipus requereix no només una adequada preparació per a la gestió de l'aula, precisa també, i principalment, del paper que els professors donen als problemes en l'aprenentatge, dels objectius perseguits, del paper que atorguen als alumnes,... Aquestes situacions de conflicte són especialment fortes en els professors principiants.

Block, Dávila i Martínez (1990, 1991), en un estudi amb 48 mestres de primària, destaquen les següents característiques en l'ús dels problemes a l'aula:

- Estandarització a través de la resolució de problemes model (observació i repetició com a fonts d'aprenentatge).
- Suggerències sobre com llegir i què fer davant l'enunciat (doncs els errors es deuen a la falta d'atenció, lectura mal feta o desgana).
- Organitzar els passos: destacar les dades, fer les operacions i escriure el resultat, en la idea de que a cada problema li correspon una operació determinada.
- Donar pistes directes o indirectes i destacar les paraules clau de l'enunciat.
- La interacció es limita a l'oferta pública pel professor de respostes a preguntes específiques o assenyalar els errors per a la seva correcció; l'alumne ha de fer el que el mestre espera que faci.
- Normalment els treballs són recollits per a la seva posterior qualificació; en el millor dels casos es realitza una sessió de correcció que consisteix en mostrar la forma correcta.

- Els algoritmes tendeixen a perdre el seu caràcter d'eines adaptables, es tornen coneixements en sí (objectes culturals), l'adquisició dels quals orienta les accions de l'ensenyament, i encara més quan el professor coneix les regles però no el seu fonament.

En la mateixa línia, Parra (1990) assenyala que en el context escolar referit a primària, un problema és generalment un mitjà de control de l'adquisició de determinat tipus de coneixements. El més habitual és, segons l'autora, que un problema es plantegi per a presentar nous continguts, el professor intenti guanyar l'atenció dels alumnes i, després, sigui ell el que resol el problema posant de relleu la importància de recórrer a determinats algoritmes. Solen també plantejar-se vinculats a un determinat contingut matemàtic que es pretén reforçar o avaluar, i de manera que les operacions o les passos a seguir estiguin clarament suggerits en l'enunciat. Per aquesta raó, l'autora conclou que els problemes en aquesta etapa no reflecteixen en absolut l'activitat matemàtica real.

En un nivell equivalent a d'educació secundària obligatòria, Grouws, Good i Doughery (1990) van trobar quatre grans grups entre 25 professors, que van classificar sota els següents títols segons l'aspecte al que donaven més èmfasi en la resolució de problemes a l'aula:

- *RP és enunciar problemes (6 subjectes):* la forma d'enunciar un problema és un factor decisiu; aquests poden resoldre's mitjançant càlculs concrets, mitjançant la transformació de l'enunciat en una equació... Analitzar una estratègia, buscar un patró,... no forma part de les seves concepcions sobre RP.
- *RP és trobar solucions als problemes (10 subjectes):* emfatitzen la RP com a resolució, tot i que els processos eren entesos de diferents maneres.
- *RP és resoldre problemes pràctics (3 subjectes):* posen l'accent en els contextos. Els problemes, per a ells, han de tenir vincles amb la vida real tot i que per a la seva solució s'hagin de fer càlculs. La raó fonamental és que aquest tipus de problemes té més sentit per als estudiants.
- *RP és resoldre problemes de pensar (6 subjectes):* donen importància a la incorporació d'idees als processos; requereixen l'ús de coses noves i diferents a les conegudes, no incorporen rutines i exigeixen un alt nivell de pensament. Els professors expressaven el seu desig d'obtenir processos i solucions múltiples i creatives dels seus estudiants.

Bàsicament tots reconeixien la importància dels passos per a resoldre un problema, la qüestió era la importància concedida a cada pas i el significat atorgat. Així, els del quart grup entenien la resolució de problemes com un aprenentatge d'heurístics (fer una taula o dibuix, trobar-ne un de més simple...), mentre que altres emfatitzaven la capacitat d'escollir l'operació adequada, definir variables... Per a tots va resultar important trobar una resposta correcta. Ningú va atorgar importància a la generalització o extensió del problema.

En un altre estudi, Chapman (1997) va trobar tres tendències en professors amb experiència a primària i/o secundària:

- *Comunitat:* posava èmfasi a la dinàmica de grups i amb un interès especial en els problemes quotidians i d'aplicació a la vida.

- *Aventura:* en les seves frases es trobava amb freqüència el terme “curiositat”, associat a esforç, perseverança i assumpció de riscos, donant especial importància a la reflexió sobre els processos de resolució i la capacitat d’emetre idees.
- *Joc:* terme que incloïa diversió, gratificació i estratègies personals. El terme més usat va ser “desafiament”.

En relació als sistemes de creences[3] del professorat com a factor que influeix en la seva pràctica docent, Kuhs i Ball (1986) identifiquen quatre visions diferents entorn a com *han de ser ensenyades les matemàtiques*:

1) La que posa el centre d’atenció en la construcció del coneixement matemàtic per part del propi *aprenent*, el qual passa a ser el focus del procés.
2) La que posa el centre d’atenció en els continguts, però emfatitzant la comprensió conceptual.
3) La que posa el centre d’atenció en els continguts matemàtics però emfatitzant l’execució, els resultats.
4) La que posa el centre d’atenció en la classe, prioritzant els aspectes afectius.

Basant-se en aquesta conceptualització de Kuhs i Ball, Vila (1995) distingeix només dues tendències, derivades de dues de les quatre visions anteriors (la primera i la tercera), argumentant que uns figurats *eixos de coordenades* determinats per aquestes dues visions resulten suficients per a representar un rang prou ampli de sistemes de creences.

Així, en un dels eixos situa la visió que *posa el centre d’atenció en els continguts matemàtics, però emfatitzant l’execució*, on hi relaciona tot un conjunt de creences del professorat que tenen en comú el fet que consideren els problemes com a *subsidiaris d’aquests continguts matemàtics.* Aquí s’hi enquadren tant aquelles visions *instrumentalistes* de les matemàtiques (Thompson, 1984), com aquelles que redueixen el paper dels problemes al d’*eines que permeten aplicar els coneixements matemàtics*, entenent que aquesta aplicació no deixa de posar l’èmfasi en els coneixements algorísmics i per tant no és més que una *il·lustració* d’aquests. Aquestes visions, estretament lligades a una tradició conductista de l’aprenentatge (imitació de conductes, reproducció del saber,...), apareixen íntimament associades a un model observable de treball a l’aula, que Vila defineix com *reducció dels problemes a no-problemes.*

A l’altre eix, situa la visió que *posa el centre d’atenció en la construcció del coneixement matemàtic per part del propi aprenent*, amb el qual relaciona el conjunt de creences d’aquells professors que entenen que *el problema és una eina didàctica per afavorir el pensament matemàtic de l’alumne,* entenent el terme *pensament matemàtic* com el descriu Schoenfeld (1992). Un aspecte observable que caracteritza aquesta visió és que els problemes són tractats a l’aula alhora *com a objecte i com a instrument d’estudi.*

Sota aquest marc de referència, Vila (1995) identifica i descriu, en el seu estudi sobre professors d’Educació Secundària, dos perfils diferents en els quatre professors estudiats (als

[3] Assumirem per a aquest terme la definició històrica de Rokeach (1968), qui considera que un *sistema de creences* és quelcom que “representa dins d’ell, d’una forma organitzada psicològicament, malgrat no necessàriament lògica, totes i cadascuna de les incomptables creences personals entorn a la realitat física i social”.

que anomena A, B, C i D). D'una banda, en els professors A, B i C va observar una clara ubicació en el model anomenat *reducció dels problemes a no-problemes*, amb una visió de *subsidiarietat total de la RP en relació als coneixements matemàtics* (algorísmics). D'altra banda, el professor D va manifestar un conjunt de creences coherents internament entorn al que ell creia que hauria de ser el treball amb problemes a l'aula, creences que Vila considera en una certa tendència en molts punts a l'eix que considera els problemes *com a eina per afavorir el pensament matemàtic*; tanmateix, D fa continuades referències a limitacions de tipus pragmàtic entorn a la *classe d'avui*, la qual cosa li provoca inseguretat i un bon nombre de contradiccions.

Segons Vila, aquests sistemes de creences entorn a la idea *problema de matemàtiques* i el seu paper, condueixen al professorat a un conjunt de decisions (de vegades fins i tot inconscients) entorn a la tipologia d'enunciats de les qüestions que han de ser proposades a l'aula. Així, els professors A, B i C necessitaven d'una forta *estandarització* en les qüestions/problemes que proposaven als seus alumnes, per tal de poder centrar els esforços a aconseguir *reduir-los a no-problemes*.

Entendrem per *estandarització* (Vila, 1995) "la inclusió sistemàtica de referents [en els enunciats] que fàcilment puguin identificar diferents aspectes: els procediments matemàtics adequats per a la resolució, el nivell de resposta esperat, el contingut matemàtic al qual fa referència el problema...". Aquests referents poden venir donats per aspectes concrets de l'enunciat (dades, pistes, paraules-clau...) en certa manera "pactats", i als quals Vila anomena "*referents matemàtics identificables en l'enunciat"*, o bé per la situació (moment temporal o ubicació física) en la qual el problema/qüestió és proposat (una llista reiterativa, un determinat tema...) a la qual Vila es refereix amb el nom de *"contextualització matemàtica".* Vila afirma que aquesta estandarització és la que permet que els problemes/qüestions siguin realment d'*aplicació*, que l'alumnat només hagi de centrar els seus esforços en la identificació dels referents i en l'aplicació adequada del procediment matemàtic adequat o del patró de resolució esperat, i no hagin de pensar en quin procediment és aquest, donat que és *evident*.

Per tal d'aconseguir aquesta *estandarització*, els professors A, B i C reconeixen que cal prendre un conjunt de petites decisions (explícites o implícites) sobre els enunciats dels problemes: cal que siguin *precisos*, amb informació *concreta* sobre situacions *concretes*, sense informació *redundant* i proposant sempre *l'obtenció d'un resultat numèric.*

No és el cas del professor D, el qual planteja de forma significativa i rellevant (però no majoritària) problemes *no rutinaris i no estandaritzats*, i on el propòsit no és un càlcul d'un resultat numèric, sinó demostrar, explorar, exemplificar, buscar pautes, prendre decisions... Tanmateix, el propi D reconeix que el fet que proposi problemes d'aquest tipus al seu alumnat no implica que en sàpiga fer un bon ús; aquests dubtes provoquen que rarament proposi problemes d'aquestes característiques en les proves escrites.

En la mateixa línia, mitjançant estudi de casos, tant en el treball de Carrillo (1996) com en el de Contreras (1998), des d'un punt de vista de desenvolupament professional del professor de matemàtiques, s'investiguen la relació entre les concepcions sobre la matemàtica i el seu ensenyament que tenen professors de matemàtiques d'educació secundària i batxillerat i les seves maneres de resoldre problemes. En ambdós casos defineixen diverses tendències didàctiques que creuen que pot tenir un professor de matemàtiques, i, en concret, Contreras caracteritza aquestes tendències en el camp de la Resolució de Problemes; tendències que descrivim, breument, a continuació:

1) *Tendència tradicional:* Es conceben els problemes com a exercicis que solen ser proposats pel professor al finalitzar un període d'instrucció de caire teòric amb la intenció de que s'apliquin els coneixements impartits. Els problemes estan ben definits (amb procés i solució únics), requereixen uns coneixements concrets (els impartits) i es resolen per processos prioritàriament deductius. Es valora la capacitat de recordar fórmules i altres fets i l'aplicació mecànica dels conceptes impartits, obviant-se els estils i estratègies personals.
2) *Tendència tecnològica:* Els exercicis en què són convertits els problemes s'acostumen a plantejar com a qüestions teòriques, al final dels temes i com a aplicació de la teoria impartida. La resolució de problemes s'utilitza per a dotar d'un significat pràctic la teoria. Els problemes solen tenir procés i solució únics i, tot i que s'aborden formalment, mantenen una certa vinculació amb la realitat. Es valora la capacitat d'identificar les nocions i algoritmes a aplicar, obviant-se els estils i estratègies personals.
3) *Tendència espontaneïsta:* Els problemes es conceben com a vehicle per a potenciar el descobriment espontani de nocions. Els problemes, des d'aquesta perspectiva, serveixen per a adquirir procediments, fomentar actituds positives i per a implicar als alumnes en el seu aprenentatge. Es valoren l'esforç, la implicació, la dinàmica de grups, les estratègies personals i el significat de les nocions construïdes. S'analitza la qualitat dels processos i no preocupen els eventuals assoliments conceptuals.
4) *Tendència investigativa:* Els problemes tenen un caràcter d'instrument institucionalitzador dels aprenentatges en un marc de socialització. Es resolen problemes durant tot el procés d'aprenentatge dins d'un marc flexible d'adquisició de coneixement conceptual i procedimental. S'utilitzen per a l'aprenentatge d'heurístics i presa de consciència de processos que permeten construir i formalitzar conceptes. Es valoren les variables personals, l'adquisició d'heurístics, els significats construïts i la rellevància dels mateixos.

Els perfils obtinguts per als tres professors analitzats en l'estudi de casos realitzat per Contreras són (basats en les quatre tendències anteriorment descrites):

- *Tecnològic amb trets humanistes:* La confiança en la millora de l'actitud dels alumnes, la valoració de l'esforç, de les estratègies personals i l'ús que fa de l'error concorden amb el qualificatiu "humanista" que se li ha concedit.
- *Tecnològic amb trets tradicionals.*
- *Tecnològic amb reminiscències tradicionals i indicis humanistes.*

En definitiva, els treballs referenciats posen de manifest que, com argumenta Contreras (1999), junt a una tendència d'identificar els problemes amb situacions algorítmiques més o menys estandaritzades amb procés i solució únics, s'han identificat comportaments encaminats a aconseguir majors nivells de pensament en la línia de la investigació sobre problemes quotidians.

Com hem vist en aquest apartat, en el camp de treball de les concepcions dels professors en educació matemàtica, on la major part de les investigacions que es realitzen són estudis de casos, és freqüent trobar-se amb una àmplia gamma de termes relatius a les tendències didàctiques o sistemes de creences del professorat.

La nostra intenció no era descriure totes les tendències possibles, sinó fer una revisió dels treballs anteriors al nostre i dels models que s'hi han utilitzat per tal de poder elaborar un model propi que ens permeti interpretar la informació relativa a les creences del professors que obtinguem amb els instruments de recollida de dades.

L'opció classificatòria que volem prendre en aquest treball té els seus orígens en el treball exposat anteriorment de Vila (1995), que estudia, entre d'altres temes, les creences d'alguns professors sobre Resolució de Problemes. Usarem el seu model dualista on només usa dues tendències; d'una banda, la que ell anomena *reducció dels problemes a no-problemes*, on hi situa els professors amb una visió de *subsidiarietat total de la RP en relació als coneixements matemàtics*. A l'altra banda, hi situa els professors que consideren els problemes *com a eina per afavorir el pensament matemàtic*, en el sentit que li dóna Schoenfeld (1992).

3.3.3. Identificació de creences que tenen relació amb l'efectivitat en RP

Les creences que els alumnes tenen de les matemàtiques com a disciplina, la seva finalitat en l'ensenyament, el significat i sentit dels problemes, etc., depenen en gran mesura de les pròpies creences dels professors, que són transmeses insconscientment als alumnes mitjançant tot el que fan a l'aula.

Per això en aquest apartat pretenem fer un recull de treballs que tenen com a objectiu la identificació de creences -majoritàriament d'estudiants-, concretament la identificació d'aquelles creences que tenen relació amb la seva efectivitat en RP. Aquests treballs són un referent important per al disseny del present estudi, i seran font dels instruments de recerca.

Per qüestions històriques i de rellevància farem referència en primer lloc a Shoenfeld i en concret al seu treball *Mathematical Problem Solving* (1985), on sintetitza tres *típiques* creences de l'alumnat i les seves conseqüències en termes de conducta:

- *Les matemàtiques formals tenen poc o gens a veure amb el pensament real o la RP*. Conseqüència: en un problema que requereix descobriment, les matemàtiques formals no són invocades.
- *Els problemes de matemàtiques són sempre resolts en menys de 10 minuts, si és que es resolen*. Conseqüència: si els estudiants no poden resoldre un problema en 10 minuts, abandonen.
- *Només els genis són capaços de descobrir o crear matemàtiques.* Primera conseqüència: si un típic estudiant s'oblida de quelcom, molt malament. Segona conseqüència: els estudiants accepten procediments "a cegues", i no intenten comprendre perquè treballen. Després de tot, tals procediments provenen de coneixements transmesos "des de dalt".

En un posterior treball, Schoenfeld (1987) afegeix a les tres anteriors una quarta creença:

- *Les formes d'una argumentació matemàtica són més importants que el seu fons.*

En el marc d'un estudi de la relació entre les creences matemàtiques i la conducta de l'alumnat, Schoenfeld (1989) arriba a la següent conclusió: malgrat l'alumnat estava motivat per la matemàtica, considerant-la una disciplina interessant que els ajudava a raonar lògicament, i malgrat defensaven que es pot arribar a ser creatiu en matemàtiques, a la vegada consideraven que la matemàtica es pot aprendre millor per memorització i per pràctica de regles i procediments. Schoenfeld atribueix aquesta aparent contradicció a la distinció que fa l'alumnat entre les matemàtiques a l'escola i les matemàtiques com a disciplina "en abstracte".

En un treball posterior, Schoenfeld (1992, p.359), recolzant-se en treballs aliens, aporta una nova relació de creences entorn a la naturalesa de les matemàtiques:

- Els problemes matemàtics tenen una i només una resposta correcta.
- Només hi ha una manera de respondre correctament cada problema; normalment és el mètode que el professor acaba de mostrar recentment a classe.
- Els alumnes normals no poden esperar entendre les matemàtiques; confien simplement a memoritzar i aplicar el que han après mecànicament i sense comprensió.
- Les matemàtiques són una activitat solitària, feta per individus aïlladament.
- Els alumnes que han entès les matemàtiques seran capaços de resoldre qualsevol problema proposats en 5 minuts o menys.
- Les matemàtiques apreses a l'escola tenen poc o gens a veure amb el món real.
- Les demostracions formals són irrellevants en el procés de descobriment o invenció.

Un exhaustiu inventari de creences (de fet, ell les anomena *pre-concepcions errònies entorn a la resolució de problemes*) és el que trobem en el treball de Woods (1987):

- Si ets bo en matemàtiques, ets bo en RP.
- Si tens dificultats en matemàtiques, tindràs dificultats en RP.
- La gent que és bona en matemàtiques no necessita dedicar temps a pensar sobre com resoldre un problema.
- La primera vegada que llegeixes l'enunciat d'un problema hauries de ser capaç d'entendre immediatament què se't demana o què es pretén que calculis o decideixis.
- Has de tenir el problema completament elaborat en el teu cap abans de començar a anotar quelcom.
- Cada pas que consideris ha de ser correcte; no hi ha lloc per a l'elecció i l'error. No has de jugar amb les situacions problemàtiques.
- No et pots permetre usar la intuïció en la RP.
- No et pots permetre variar aspectes del problema en vistes a simplificar-lo.
- Només hi ha un únic camí per a resoldre el problema, i només hi ha una resposta correcta.
- Les tècniques de RP que utilitzes a l'escola no guarden cap relació amb les tècniques que necessites per resoldre els problemes reals de cada dia.
- Millorar en la utilització de les tècniques de RP és fàcil: només necessites memoritzar i utilitzar una estratègia organitzada.

- Tothom resol els problemes de la mateixa manera: per tant pot ser útil per al teu treball fixar-te en els exemples resolts pels demés.
- Per als experts, un model adequat emergeix de seguida que consideren la situació.
- La lògica, el raonament i la intel·ligència artificial tenen totes les respostes.
- Si una situació anomenada problema la resolc fàcilment aleshores és que sóc bo en RP.
- Si coneixes a fons la teva disciplina, aleshores pot resoldre-hi problemes.

Frank (1988), fent una síntesi d'un treball seu anterior (1985), relaciona un seguit de creences entorn a la matemàtica i al seu aprenentatge obtingudes a partir de tècniques d'entrevista i observació:

- *Les matemàtiques són computació.* Per tant, fer matemàtiques vol dir seguir regles; aprendre matemàtiques és principalment memorització.
- *Els problemes de matemàtiques són tasques per a aplicar les regles apreses.* Per tant, s'haurien de poder resoldre fàcilment en pocs passos.
- *L'objectiu de fer matemàtiques és l'obtenció de "respostes correctes".*
- *El paper de l'alumne de matemàtiques és rebre coneixements matemàtics i acreditar que han estat rebuts.* Per tant, cal prestar atenció a l'aula i fer "els deures" a casa.
- *El paper dels professors de matemàtiques és transmetre el coneixement matemàtic i verificar que els alumnes l'han rebut.* Per tant, cal que el professor "doni matèria".

En aquest marc de creences, Frank considera que l'alumnat està entenent que a classe de matemàtiques només es proposen exercicis, i quan es troba amb un "autèntic problema" tendeix a abordar-lo com si fos un exercici, la qual cosa en cap cas és efectiva, i pot passar que:

a) Abandoni el problema, bé perquè "no és possible resoldre'l", bé perquè no el considera de matemàtiques.
b) L'abordi com si fos un exercici i procuri aplicar directament les regles que ha après fa poc, sent molt probable que arribi a una resposta sense sentit o que acabi demanant al professor que li digui "com es fa".
c) Utilitzi una estratègia de RP, però si no obté una resposta en pocs minuts, abandoni pensant que es tracta d'un d'aquells problemes "que tenen truc".

En qualsevol cas, Frank considera que l'autonomia, la persistència i la flexibilitat que haurien d'anar associades al procés estan clarament absents.

Garofalo (1989) destaca també quatre creences en l'alumnat que considera d'especial rellevància en l'efectivitat en matemàtiques:

- *Gairebé tots els problemes de matemàtiques poden ser resolts directament per aplicació de fets, regles, fórmules i procediments mostrats pel professor o donats pel llibre.* Conseqüència: el pensament matemàtic consisteix a poder aprendre, memoritzar i aplicar fets, regles, fórmules i procediments. Aquesta creença provoca en l'alumnat un enfocament mecànic cap a les tasques matemàtiques.
- *Els exercicis dels llibres de matemàtiques poden ser resolts només pels mètodes presentats en el llibre; d'altra banda, aquests exercicis hauran de ser resolts pels mètodes presentats en l'apartat del llibre en el que són proposats.* Conseqüència: els

qui mantenen creences d'aquest tipus dediquen molt de temps a recordar la relació de mètodes ensenyats, a la vegada que tenen una visió de la matemàtica molt fragmentada.

- *Només les matemàtiques que seran preguntades són importants i dignes de saber-se.* Conseqüència: les fórmules són importants (cal acreditar-ne el coneixement i l'aplicació), però les seves derivacions no (no cal acreditar-ne la comprensió).
- *Les matemàtiques han estat creades només per a la gent llesta i creativa; la resta de gent només intenta aprendre el que se'ls transmet.* Conseqüència: els estudiants que mantenen aquesta creença, consideren el professor i els llibres com una autoritat i com una mena de "dispensadors de coneixement", i mai es qüestionen aquesta autoritat ni mai s'imaginen ells mateixos com a "productors" de matemàtiques.

Lester (1987) apunta una creença que ell ha identificat en l'alumnat de les escoles primàries, i que matisa altres ja anteriorment esmentades:

> *Tots els problemes matemàtics "d'història" poden ser resolts directament aplicant una o més operacions aritmètiques, operacions que són identificades per "paraules clau" en el problema.*

Puig (1996), en un estudi sobre alumnes en formació per al professorat, identifica la següent concepció:

> *Els problemes són concebuts com una tasca que cal realitzar per a donar resposta al professor, tasca que culmina amb l'obtenció de la resposta: no es jutja que una part del procés de resolució del problema consisteixi en qualsevol de les tasques que composen la fase de revisió-extensió, ni sembla per tant que es tingui present una altra funció per a la resolució del problema que la d'obtenir el resultat.*

En un treball al nostre país amb alumnat d'educació primària i secundària, Alsina i altres (1998) identifiquen que:

- L'alumnat més petit relaciona la idea de problema amb el càlcul i les operacions, i a mida que avança l'edat s'associa més amb el *procés de resolució*, *la descoberta.*
- Quant al focus de dificultat dels problemes, l'alumnat més petit tendeix a identificar-lo en els càlculs a efectuar, mentre que l'alumnat més gran introdueix el terme de *comprensió* del problema.
- S'identifica la utilitat dels problemes en els verbs aprendre (alumnat de primària) i pensar (alumnat de secundària).
- Els problemes que es plantegen a l'escola sempre tenen solució.

En el ja esmentat en l'apartat anterior treball de Vila (1995), es van identificar un conjunt de creences entorn a la RP de l'alumnat de secundària i van ser relacionades amb les creences del seu professorat, amb alguns indicadors de la pràctica escolar i amb la seva efectivitat en resoldre problemes no estàndard. A partir de la informació obtinguda de l'alumnat en quant a la caracterització que es feia de l'objecte *problema de matemàtiques*, es van formular tres conclusions generals en els següents termes:

- Un problema era considerat majoritàriament com una pregunta verbal, subsidiària dels coneixements matemàtics.
- La categoria de problema era considerada intrínseca, no depenent del resolutor.
- La idea que l'alumnat tenia entorn a què és un problema no era essencialment diferent de la idea que en tenien els seus professors de matemàtiques.

Quant a les creences entorn a la Resolució de Problemes que havien estat estudiades en l'alumnat, Vila formula quatre conclusions generals:

- L'alumnat creia que calia *reduir els problemes a no-problemes.*
- L'alumnat creia que la RP necessita només dels coneixement matemàtics.
- S'observava una certa associació entre aquestes creences i la *pràctica escolar* que es deduïa de les manifestacions del professorat.
- No s'observava una clara associació entre aquestes creences i les corresponents manifestades pel professorat.

Tot aquest seguit de creences entorn a la RP identificades durant dècades per diferents experts ens serà d'utilitat a l'hora d'identificar les creences que tenen els professors de primària i de secundària en quant a l'objecte *problema de matemàtiques,* la naturalesa de l'activitat de resolució de problemes, i el procés d'ensenyament-aprenentatge de la resolució de problemes. Ens serà útil, per tant, per al disseny de l'instrument de recollida de dades que utilitzarem per portar a terme aquesta part de la recerca.

3.4. Els coneixements professionals dels professors de matemàtiques

En el cas de l'Ensenyament a Primària, els mestres inicien la seva carrera professional sobre la base d'una formació inicial fonamentalment instructiva i imparteixen diverses matèries, si no totes, a la seva classe. L'estil didàctic predominant en Secundària, en què cada professor imparteix únicament la matèria en la qual és expert, sol ser menys pedagògic i més caracteritzat per l'èmfasi epistemològic en una assignatura concreta, en el nostre cas les matemàtiques.

D'altra banda, tot i que la resolució de problemes juga un paper prominent en els esforços de reforma de l'educació matemàtica (NCTM, 2000), molts docents se senten mal preparats a l'hora d'ensenyar a resoldre problemes, i han tingut poca experiència en resoldre, ells mateixos, problemes que requereixin més que simples aplicacions d'algoritmes i fórmules (Epperson, 2004). Els professors de matemàtiques han de ser els primers en esdevenir resolutors de problemes a la seva aula (Wilson, Fernandez, & Hadaway, 1993), però necessiten també tenir els recursos o l'habilitat de saber ensenyar matemàtiques mitjançant la resolució de problemes. Quins és, doncs, el coneixement matemàtic que cal que tingui un professor per a ensenyar les matemàtiques entorn a la resolució de problemes d'una manera satisfactòria?

Per adaptar-nos al nostre propòsit d'aconseguir una millor comprensió del coneixement del professor sobre RP en les etapes de primària a secundària, ens veiem amb la necessitat de buscar un marc teòric que ens pugui ser útil.

Començarem aquest apartat revisant alguns models que treballs anteriors han utilitzat per a classificar els diferents tipus de coneixement que un professor –i, concretament, un professor de matemàtiques– necessita tenir per tal de dur a terme la seva tasca docent. Seguidament, farem una revisió de diferents estudis que s'han fet per a mesurar el coneixement professional dels professors de matemàtiques, i entrarem a fons en l'últim d'aquests (TEDS-M 2008, les conclusions del qual s'han fet públiques el 2012), tot analitzant-ne el marc teòric i metodològic i exposant les conclusions de l'estudi.

El nostre objectiu serà adaptar un d'aquests models –o crear-ne un de nou– per tal que ens pugui ser útil per a analitzar els coneixements dels professors sobre Resolució de Problemes.

3.4.1. Conceptualització del coneixement matemàtic dels professors

Cada professió té la seva pròpia base de coneixements, és a dir, els coneixements que aquests professionals saben i que altres persones generalment no saben – ni necessiten saber. L'educació, però, es diferencia de les altres professions en tres aspectes (Hegarty, 2000):

- Es basa en un coneixement que té per objectiu generar un aprenentatge.
- Té una base de coneixements multidimensional (Shulman, 1986).
- Conté coneixement tàcit i explícit (situat vs proposicional).

De fet, "el coneixement és la clau de l'educació; és impossible concebre o planejar cap activitat educativa sense reconèixer el rol central que ha de jugar-hi alguna transacció basada en el coneixement" (Kelly, 1995). Però, quin és realment aquest coneixement professional que necessiten tenir els professors (de matemàtiques)?

En el famós exemple il·lustratiu de Plató a *El Meno* (Plató, 1956 ed), Sòcrates convida els espectadors a ser testimonis de com surt a la llum una idea errònia matemàtica clàssica, i fa servir un esclau de conillet d'índies. Es tracta de la falsa concepció de que l'àrea d'un quadrat és proporcional a la longitud del seu costat. Sòcrates fa caure al jove en un parany tot suposant que aquesta relació és certa, per a que després, tan sols responent les preguntes de Sòcrates, ell mateix descobreixi que és una idea errònia.

És d'especial importància assenyalar que l'èxit de Sòcrates en aquest intercanvi depèn del seu propi *coneixement* de les matemàtiques. Depèn, si més no, tant de la seva capacitat de veure les *implicacions* de les respostes del noi, com de la seva capacitat de reacció a l'hora de *corregir* aquestes respostes mitjançant més preguntes. Només algú amb un cert nivell de coneixements podria fer això. L'esclau aprèn una lliçó important per a si mateix, però aquest aprenentatge depèn tant del coneixement de Sòcrates d'una idea falsa típica com de la seva capacitat per a introduir el que ara anomenaríem "conflicte cognitiu". Així doncs, Sòcrates utilitza una base de coneixements que inclou el coneixement de les matemàtiques, però va més enllà d'aquest.

La complexitat i la multiplicitat de coneixements necessaris per a l'ensenyament és ara reconegut internacionalment (Huckstep et al., 2002). En altres temps, però, se suposava que per a ensenyar alguna cosa era suficient que el professor la sabés. En particular, es tenia la concepció de que el coneixement matemàtic dels professors consistia en el què els professors sabien de matemàtiques. Aquest enfocament no deixa de tenir, però, una base racional.

Aristòtil va escriure en l'antiguitat: "... aquest és el signe de l'home que sap: que pot ensenyar ..."(Barnes, 1984, p 1.553). A les universitats medievals no es feia distinció entre el coneixement del contingut i el coneixement de com ensenyar-lo. De fet, la forma moderna de l'examen doctoral (exposició i defensa de la tesi) és originària d'un *inceptio* medieval que es basava en la creença que "entendre" es *demostrava* ensenyant allò que s'entén (Shulman, 1986). Dewey (1904) sostenia que els coneixements d'una matèria incloïen els coneixements de la recerca en l'àrea determinada, i per tant els coneixements dels mètodes d'ensenyament tal com ell els concebia. Més recentment, John Wilson (1975) opinava, en la mateixa línia, que la comprensió de la lògica dels conceptes ofereix orientació sobre com ensenyar-los. No obstant això, estudis com els de Bègles (1968) i Eisenberg (1977) mostren que l'ensenyament efectiu en contextos institucionals requereix alguna cosa més que la competència matemàtica personal.

Com a resposta, en les últimes dècades, educadors i investigadors interessants en la didàctica de les matemàtiques han intentat definir els diferents tipus de coneixement que ha de tenir un professor de matemàtiques per tal de dur a terme la seva tasca docent.

La primera categorització a destacar la trobem en la distinció que es fa comunament entre "memorització" i "comprensió". Skemp (1978) va identificar dos tipus de comprensió matemàtica: *intrumental* i *relacional*. La *comprensió instrumental* es refereix al coneixement après per la rutina, que produeix idees totalment aïllades les unes de les altres. La *comprensió relacional*, en canvi, es refereix a desenvolupar xarxes amb significat dels diferents conceptes i procediments. Hiebert i Carpenter (1992), més tard, van introduir els termes *procedural knowledge* (coneixement procedimental) i *conceptual knowledge* (coneixement conceptual) per a descriure el coneixement matemàtic. Usant connexions com en el model de Skemp, Hiebert i Carpenter descriuen el *coneixement procedimental* com una seqüència d'accions amb les connexions mínimes necessàries per a crear les representacions internes d'un procediment entre accions consecutives. El *coneixement conceptual*, d'altra banda, és ric en relacions i està desenvolupat dins de marcs conceptuals ben connectats.

Un altre tipus de coneixement sorgeix d'usar aquests dos tipus anteriors en contextos nous i diferents (Brown, 2006). En aquest *higher-order knowledge* (coneixement d'ordre superior), les matemàtiques són utilitzades en altres contextos a través de la *resolució de problemes* (Polya, 1957; Schoenfeld, 1985). La resolució de problemes requereix desenvolupar o aplicar estratègies, dur-les a terme i reflexionar sobre elles –metacognició (Schoenfeld, 1992)–. Requereix, també, utilitzar els coneixements ja existents per raonar inductivament i deductivament amb les idees matemàtiques, i desenvolupar altres tipus de raonaments com l'espacial.

Una de les propostes que ha tingut més repercussió en quant a la concreció del contingut del coneixement professional que necessita el professor per a ensenyar una matèria (en el nostre cas les matemàtiques) és el treball de Lee Shulman (1986, 1987), que identifica set categories de coneixements del professor:

CONEIXEMENT GENÈRIC • Coneixement pedagògic general – principis generals sobre la gestió de la classe. • Coneixement dels alumnes. • Coneixement dels contextos educatius, comunitats i cultures. • Coneixement dels objectius i valors educatius. CONEIXEMENT DEL CONTINGUT • *Subject matter knowledge (SMK)* – coneixement de l'assignatura. • *Pedagogical content knowledge (PCK)* – coneixement pedagògic del contingut. • Coneixement de currículum – materials i programes.

Taula 2. Categories de coneixements del professor segons Shulman

Per a la nostra recerca ens interessa especialment el tractament de fa Shulman del coneixement del contingut. Analitzarem més a fons, doncs, els tres tipus de coneixement que identifica, posant especial èmfasi en els dos primers: el *subject matter knowledge* i el *pedagogical content knowledge.*

CONEIXEMENT DE CURRÍCULUM Abasta el coneixement de programes dissenyats per a ensenyar diferents tòpics i el conjunt de característiques *que serveixen com a indicacions i contraindicacions per a l'ús de determinats materials en particulars circumstàncies* (Shulman, 1986, p.10). SUBJECT MATTER KNOWLEDGE (SMK) És el coneixement del contingut de la disciplina en sí mateixa. Inclou el coneixement de fets i conceptes d'un domini, així com la comprensió de les estructures de la matèria. Shulman et al. (1988) sosté que les formes d'entendre el SMK seran diverses segon les àrees de coneixement, però afegeix a la seva teoria la classificació que fa Schwab (1978) sobre els següents dos tipus de coneixement: 1. *Substantive knowledge*: Els fets principals, conceptes, principis i estructures que formen una disciplina. 2. *Syntactic knowledge*: Les normes d'evidència i garantia de certesa dins de la disciplina, la naturalesa de la recerca en el camp, i com els nous coneixements es presenten i accepten a la comunitat. És a dir, la manera de descobrir la disciplina. PEDAGOGICAL CONTENT KNOWLEDGE (PCK) És la relació que hi ha entre saber un coneixement un mateix i ser capaç de fer que altres l'entenguin. El PCK inclou: • Maneres de representar i formular la matèria que fa que sigui comprensible per als demés. • Ús d'analogies, il·lustracions, exemples, explicacions i demostracions. • Comprensió del que fa que l'aprenentatge de continguts específics sigui fàcil o difícil (idees errònies més comuns, etc.).

Taula 3. Tipus de coneixement del contingut segons Shulman

El PCK és la contribució més important de Shulman pel fet de donar nom a aquell coneixement de la matèria que tot professor ha de tenir que va "més enllà" del coneixement del contingut en sí mateix. Ball (2008) remarca la importància de "desempaquetar" (*unpacking*) els coneixements, amb altres paraules, de reconèixer la complexitat d'un coneixement que està "comprimit".

Fenema i Franke (1992), parteixen del model de Shulman però emfatitzen quatre aspectes concrets sobre el coneixement dels professors:

- El coneixement del professors està "situat", és a dir, no pot separar-se del coneixement de la pedagogia i de la cognició dels estudiants.
- Els coneixements dels professors es combinen amb les seves creences a l'hora de determinar les pràctiques d'ensenyament i el comportament dels professors a l'aula.
- Ensenyar és un procés en el qual els professors poden *canviar* i *desenvolupar* el seu coneixement.

En l'actualitat, existeix un interès compartit en la comunitat d'investigadors de didàctica de les matemàtiques per clarificar el contingut del coneixement que els professors han de posseir per a exercir la seva labor docent, com posa de relleu el fet que, en el PME de 2009 celebrat a Tesalonica (Grècia), el primer dels cinc *Research Forum* tingués com a títol: *"Teacher knowledge and teaching: considering a complex relationship through three different perspectives"* (Ball, Charalambous, Thames y Lewis, 2009).

En aquest *Research Forum* es van presentar 3 perspectives diferents per a conceptualitzar el coneixement del professor i el seu rol en l'ensenyament. Aquestes perspectives són *Mathematics for Teaching* (MfT)[4] (Davis i Simmt, 2006), *the Knowledge Quartet* (KQ)[5] (Rowland, Huckstep i Thwaites, 2005) i *Mathematical knowledge for Teaching* (MKT)[6] (Ball, Thames i Phelps, 2008). Les últimes dues perspectives, que trobem més interessants per a l'enfocament del nostre estudi, les analitzarem més a fons a continuació.

Mathematical Knowledge for Teaching

Deborah L. Ball i els seus companys (Ball i Bass, 2003; Ball, Hill i Bass, 2005; Hill, Rowan i Ball, 2005; Ball, Thames i Phelps, 2008), partint del treball de Shulman, estan duent a terme en l'actualitat un programa d'investigació que pretén aprofundir en què significa que un professor comprengui el contingut matemàtic per a l'ensenyament, proposant per a tal fi el model al qual han denominat *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT). Aquest coneixement, en íntima connexió amb el seu paper en la pràctica, ve definit com: "El coneixement matemàtic utilitzat per dur a terme la tasca de l'ensenyament de les matemàtiques. Aquesta tasca inclou explicar termes i conceptes als estudiants, interpretar les seves afirmacions i solucions, jutjar i corregir el tractament que els llibres de text fan sobre determinats tòpics, utilitzar representacions amb exactitud a la classe, proporcionar als estudiants exemples de conceptes

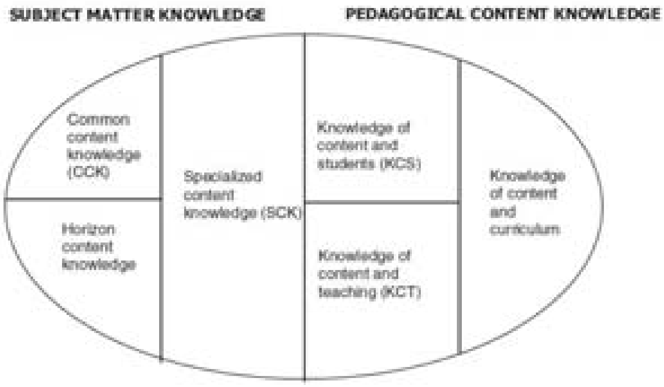
---

[4] Davis i Smitt (2006) fan servir la noció de *matemàtiques per a l'ensenyament* des d'un posicionament teòric que considera els professors com a sistemes, i el seu focus està en comprendre com aprenen. Situen Les *matemàtiques per a l'ensenyament* com una branca específica dins la disciplina de les matemàtiques, i organitzen les investigacions entorn a 'l'estudi de conceptes ', una estructura d'aprenentatge col·lectiva a través de la qual els educadors matemàtic s'identifiquen, interpreten, interroguen, inventen i elaboren imatges, metàfores, analogies, exemples, exercicis, gestos i aplicacions a les quals els professors recorren (explícitament i implícita) per donar suport a la comprensió dels estudiants.

[5] El Knowledge Quartet representa un marc teòric basat en la pràctica, desenvolupat de manera inductiva a partir de l'anàlisi de vídeos d'estudiants per mestre de primària. Abasta quatre categories de coneixement: *Foundations, Transformations, Connections i Contingency.*

[6] Deborah L. Ball i els seus companys centren la seva atenció en el treball d'ensenyament dels professors per tal de construir una "teoria per a l'ensenyament basada en la pràctica" (Ball i Bass, 2003). Aquesta perspectiva proposa un model multi-dimensional que pretén desembrollar les nocions de coneixement matemàtic (*SMK*) i didàctic (*PCK*) del contingut de Shulman (1986).

matemàtics, algoritmes i proves...“ (Hill, Rowan i Ball, 2005, p. 373). El MKT és un model mutidimensional, les dimensions del qual apareixen reflectides en el següent quadre:



Il·lustració 1. Mathematical Knowledge for Teaching

Descrivim breument, a continuació, el contingut de les components establertes per Ball:

SUBJECT MATTER KNOWLEDGE

- *Common content knowledge (CCK):* és definit com el coneixement i habilitats matemàtiques usades en altres situacions diferents a l'ensenyament.
- *Specialized content knowledge (SCK):* és el coneixement matemàtic únic per a l'educació, entenent que les demandes matemàtiques en l'àmbit educatiu requereixen un coneixement matemàtic especialitzat, no necessari en altres àmbits.
- *Horizon Content Knowledge (HCK):* és el coneixement de com els tòpics matemàtics estan relacionats al llarg del currículum.

PEDAGOGICAL CONTENT KNOWLEDGE

- *Knowledge of content and students (KCS):* és el coneixement que permet al professorat anticipar què estan probablement pensant seus estudiants i què els podria confondre.
- *Knowledge of content and teaching (KCT)*: combina el coneixement matemàtic i el d'aprenentatge en general. Moltes de les tasques matemàtiques d'ensenyament requereixen un coneixement matemàtic del disseny de la instrucció.
- *Knowledge of content and curriculum*: és el coneixement de les matemàtiques que s'ensenyen en els programes escolars.

Taula 4. Components del MKT

El treball d'aquests investigadors té el mèrit d'haver realitzat un esforç per concretar i especificar tasques procedents de la pràctica dels professors que posen de manifest els tipus de coneixement (matemàtic) que requereixen. L'esforç realitzat té el valor de servir d'indicadors per, des del punt de vista de la recerca, identificar aquests continguts en l'anàlisi de la pràctica dels professors (Muñoz, 2009). No obstant això, és un model que està en construcció i que ha rebut també algunes crítiques, com és el cas de Petrou i Goulding (2010) que consideren que el model:

- No reconeix la importància de les creences dels professors.
- No distingeix suficientment entre *Specialized content knowledge* i *Pedagogical content knowledge.*
- No posa de manifest el significat del SMK sintàctic (Schwab).

Crítiques que nosaltres també compartim i que tindrem en compte a l'hora de desenvolupar el model que utilitzarem per a la nostra recerca.

The Knowledge Quartet

Aquesta conceptualització del coneixement dels professors va ser creada en resposta a la crida de Fennema i Franke (1992) per estudiar el coneixement dels professors en el context de l'ensenyament. En concret, a Rowland et al. (2005) els cridaven l'atenció dues qüestions en relació als professors d'educació primària:

1. Els professors de primària amb un fort coneixement de la matèria tendeixen a ser més competents com a professors que els que no en tenen tant.
2. Els tutors de les pràctiques dels estudiants de Magisteri no donaven gaire importància, en la revisió, al contingut de la matèria que era impartit pels alumnes en pràctiques.

L'objectiu del seu estudi era, doncs, descobrir com el coneixement del professor pot ser vist a l'aula quan es porta a terme l'ensenyament de les matemàtiques (de primària).

Mitjançant l'anàlisi de les interaccions de professors de primària amb el contingut matemàtic, Rowland distingeix quatre categories de coneixement dels professors, que inclouen alguns coneixements com:

- *Foundation:* saber utilitzar els llibres de text, ser conscient del propòsit de l'ensenyament, conèixer els procediments, identificar errors, conèixer el tema que s'ha d'impartir, tenir clars els fonaments teòrics, usar correctament la terminologia...
- *Transformation:* triar exemples, triar representacions, fer demostracions...
- *Connection:* anticipar-se a les dificultats que es trobaran els alumnes, prendre decisions sobre la seqüenciació del programa, fer connexions, reconèixer oportunitats conceptuals...
- *Contingency:* desviar-se de la programació, respondre a les idees dels estudiants, fer bon ús de les oportunitats que es donen...

A continuació, descriurem més detalladament cadascuna d'aquestes categories de coneixement:

FOUNDATION
És la base dels altres tres coneixements, i es refereix al coneixement "teòric", és a dir, al què els professors aprenen en la seva educació personal i en les seves pràctiques. Les components principals són:

- Coneixement i comprensió de les matemàtiques per si mateixes.
- Coneixement dels tractats més importants de la literatura que ha resultat de la investigació sistemàtica en *l'ensenyament i aprenentatge de les matemàtiques*.
- Els sistemes de *creences* sobre les matemàtiques per si mateixes, i sobre *perquè* i *com* s'aprenen les matemàtiques.
- Els valors, els ideals.

TRANSFORMATION
El coneixement en l'acció d'ensenyar, que es demostra tant en la planificació de les classes com en l'acte d'ensenyar per si mateix. Les components principals són:

- "La capacitat d'un professor de transformar el contingut de la matèria que ell posseeix en formes que siguin potents pedagògicament" (Shulman, 1987).
- La *representació* de conceptes matemàtics abstractes.
- L'ús d'analogies, il·lustracions, exemples, explicacions i demostracions (Shulman, 1986).
- La tria d'*exemples*.

CONNECTION
Fa referència a la coherència de la planificació o de l'ensenyament al llarg d'un curs, lliçó o sèrie de lliçons. És l'*estructura* matemàtica (Askew et al., 1997). Les principals components són:

- La consciència de les demandes cognitives dels diferents temes i tasques.
- La *seqüenciació* dels temes que s'han d'instruir.
- L'*ordenació* dels "deures" i exercicis a realitzar.

CONTINGENCY
És el coneixement relatiu a les decisions que es prenen en el mateix moment de donar classe, l'habilitat de pensar i decidir en l'acció. Amb això entenem:

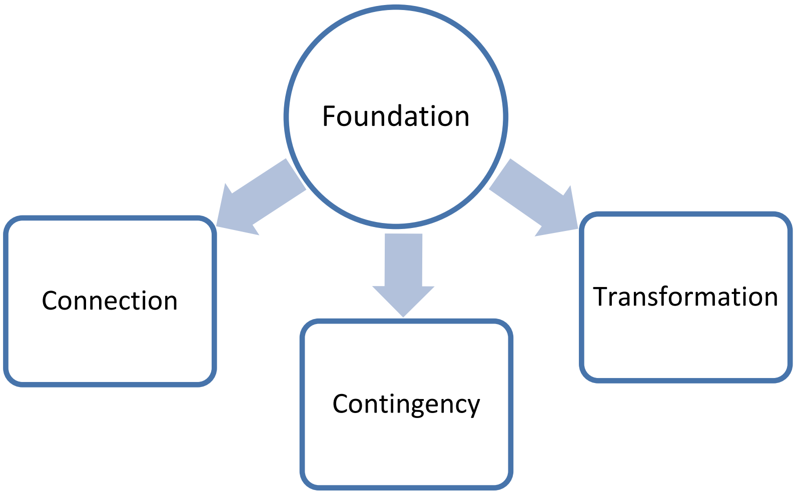
- Estar a punt per respondre a les idees dels alumnes.

I, en conseqüència,

- Estar preparat per *desviar-se de la programació* si es dóna una oportunitat d'aprenentatge.

Taula 5. Categories de coneixement de The Knowledge Quartet

El *Knowledge Quartet*, doncs, posa el focus en com el coneixement matemàtic del professor és mostrat a l'aula, i classifica els diferents coneixement utilitzats segons el següent esquema:



Il·lustració 2. The Knowledge Quartet

En el seu treball "the theoretical loop", Jeppe Skott (2005) argumenta que "és raonable suposar que les construccions teòriques basades en la pràctica són potencialment més útils per als professionals (en aquest cas els mestres) que les construccions desenvolupades sense aquest suport i sense reconèixer la complexitat del context de l'ensenyament". En aquest aspecte, els autors de *The knowledge Quartet* defensen que és una teoria desenvolupada en primera instància per descriure les observacions fetes a l'aula. Tot així, reconeixen que encara queda molt per investigar sobre el *Knowledge Quartet (KQ)*, i es marquen com a properes fites:

1. Major recerca en l'aplicació del KQ en altres etapes escolars, com en l'educació secundària, terciària.

2. Investigació en l'aplicació del KQ al treball de professors de matemàtiques experts.

3. Investigació longitudinal de l'ús del KQ com una eina per promoure el coneixement del professor i el desenvolupament del seu ensenyament en el temps (3 anys).

4. Investigació en l'aplicació del KQ en altres àrees de coneixement (per exemple ciències, llengües...).

3.4.2. Estudis que mesuren els coneixements dels professors

L'interès sobre els coneixements dels professors sobre els continguts de les assignatures escolars té una llarga història. Els funcionaris governamentals i els responsables polítics de molts països comparteixen la preocupació comuna de que massa professors estan mal preparats per a ensenyar matemàtiques. Des del treball de Shulman (1986, 1987), els investigadors i els formadors de professors de matemàtiques s'han preguntat sobre la naturalesa del coneixement de la matèria necessària per a l'ensenyament, i en quina mesura les idees com ara el coneixement didàctic del contingut (*pedagogical content knowledge)* interactuen amb el coneixement de la matèria (*subjecte matter knowledge*) en la pràctica d'ensenyar. Molts investigadors de tot el món, per exemple, Adler and Davis (2009), Ball and Bass (2000), Blum and Krause (2006), Even (1993), Fan and Cheong (2002), Hill and Ball (2004), Hill, Rowan and Ball (2005), Kunter et al. (2007), and Ma (1999) han estat estudiant els diversos aspectes del coneixement matemàtic per a l'ensenyament (*Mathematic Knowledge for Teaching - MKT*). Com els articles sobre l'estat de la recerca de Ball, Lubienski, and Mewborn (2001) i Hill, Sleep, Lewis and Ball (2007) indiquen, aquests estudis aborden aspectes de la definició (per exemple, què comprèn el MKT?), la mesura (per exemple, com podem quantificar el MKT?), i els efectes (per exemple, com es relaciona el MKT amb el rendiment de l'alumne?); aspectes que hem tractat més a fons en l'apartat anterior de *Conceptualització del coneixement matemàtic dels professors*.

Recentment, els investigadors han començat a estudiar el MKT a nivell transnacional. El projecte *Mathematics Teaching for the 21st Century* (MT21) (Schmidt et al., 2008) és un estudi internacional que ha analitzat la preparació matemàtica dels professors de secundària en 34 institucions de sis països. El MT21 també ens ha proveït d'una evidència preliminar sobre el grau en què la formació de professors i l'assoliment dels futurs docents varia entre Bulgària, Xina Taipei, Alemanya, Corea, Mèxic i els EUA. El marc teòric i el desenvolupament del ítems del MT21 es van tenir molt en compte a l'hora de desenvolupar un nou estudi que volem tractar més a fons en aquest treball: el TEDS-M.

En els últims anys, el *Teacher Education and Development Study* [TEDS M-2008] (Maria Teresa Tatto, John Schwille, Sharon L. Senk, Lawrence Ingvarson, Ray Peck, Glenn Rowley) ha estat construint el seu projecte de recerca a gran escala a partir d'aquesta obra anterior. Entre altres coses, TEDS-M es proposa examinar la naturalesa i abast del MKT dels futurs professors, tant de primària com de secundària, matriculats en el seu últim any de programes de formació docent, i també altres factors com les oportunitats per aprendre, la naturalesa de la ruta dels estudis i la durada del programa, que s'hipotetitza que estan associats amb aquest coneixement.

Degut a la temàtica del TEDS-M, el seu enfocament, la gran escala a la que es realitza i la seva actualitat, creiem que és molt interessant per a la nostra recerca analitzar aquest estudi profundament, comentant de pas també, però sense tant de detall, altres estudis de la mateixa índole.

TEDS-M 2008

TEDS-M 2008 és la primera investigació transnacional sobre la preparació dels futurs professors de matemàtiques de primària i secundària que analitza conjuntament les polítiques, les pràctiques i els resultats relatius a la formació d'aquests professionals. L'estudi recull i analitza dades representatives a nivell nacional dels països participants, amb l'objectiu de millorar la política i la pràctica en la formació docent.

Les dades per a l'estudi principal es van recollir entre l'octubre de 2007 (a l'hemisferi sud) i el juny del 2008 (a l'hemisferi nord) en els següents països: Botswana, Canadà, Xile, Xina Taipei, Geòrgia, Alemanya, Malàisia, Mèxic, Noruega, Oman, Filipines, Polònia, Rússia, Singapur, Espanya, Suïssa, Tailàndia, EUA. Els resultats finals s'han fet públics l'abril de 2012.

L'estudi global formula tres preguntes claus de recerca:

1) Quin tipus de polítiques ajuden a que els professors de primària i secundària aconsegueixin tenir un bon nivell i aprofundiment de les matemàtiques i la seva didàctica?
2) Quines oportunitats d'aprenentatge, que estiguin a disposició dels futurs professors de matemàtiques de primària i secundària, els permeten assolir aquests coneixements?
3) Quin nivell i aprofundiment de les matemàtiques i la seva didàctica tenen els futurs professors de primària i secundària al final dels seus estudis?

La qüestió comú a aquestes tres àrees de recerca és esbrinar quina és la variació transnacional i intra-nacional en aquests aspectes.

El nostre interès se centra en la tercera pregunta de recerca, la qual va conduir a l'exploració i la identificació dels següents ítems:

a) Els coneixements matemàtics que els futurs docents adquireixen com a resultat de la seva formació.
b) La profunditat en la comprensió de les matemàtiques que s'espera que tinguin.
c) El coneixement en l'ensenyament de les matemàtiques (és a dir, contingut, pedagogia, currículum...) que els futurs mestres tenen al final de la seva formació.
d) Altres característiques que poden ajudar a explicar la capacitat dels futurs professors per a adquirir el domini d'aquests coneixements.
e) Les creences sobre la naturalesa de les matemàtiques i sobre l'ensenyament i l'aprenentatge de les matemàtiques que els futurs docents tenen al final de la seva preparació.

En aquest apartat del treball ens interessen els ítems relacionats amb els coneixements de contingut matemàtic i de didàctica de les matemàtiques, per la qual cosa analitzarem amb més profunditat el marc teòric i la metodologia que s'han seguit en aquest estudi en relació a l'anàlisi dels coneixements professionals dels professors de matemàtiques, així com algunes de les conclusions a les que han arribat.

MARC TEÒRIC DEL TEDS-M

A l'estudi del TEDS-M 2008, el *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) es considera que té dues dimensions: el coneixement del contingut matemàtic (*Mathematics Content Knowledge - MCK)* i el coneixement pedagògic del contingut matemàtic (*Mathematics Pedagogical Content Knowledge - MPCK)*. S'hipotetitza que cadascuna d'aquestes està composta per diversos sub-dominis, que exposem a continuació.

Mathematics Content Knowledge segons TEDS-M

Degut a que una part de l'estudi TEDS-M examina les relacions entre el MCK dels professors de matemàtiques i el coneixement del currículum dels estudis que s'espera que ensenyin, el TEDS-M utilitza el marc teòric sobre coneixements matemàtics que s'havia utilitzat en els estudis TIMSS[7] de primària i primer cicle de secundària. En aquest marc, el MCK es subdivideix

[7] TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) és el nom donat a una sèrie d'estudis portats a terme pel International Association of the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

en quatre blocs de contingut: nombres, àlgebra, geometria i estadística. El TEDS-M també utilitza el mateix marc per als nivells d'exigència cognitiva (conèixer, aplicar i raonar) utilitzat pel TIMSS (Mullis et al., 2007), del qual mostrem esquematitzat i, a continuació, detallat:

CONÈIXER	APLICAR	RAONAR
Recordar	*Seleccionar*	*Analitzar*
Reconèixer	*Representar*	*Generalitzar*
Calcular	*Modelitzar*	*Sintetitzar/Integrar*
Interpretar	*Implementar*	*Justificar*
Mesurar	*Resoldre problemes rutinaris*	*Resoldre problemes no rutinaris*
Classificar/Ordenar		

Taula 6. Marc teòric TEDS – nivells d'exigència cognitiva del Mathematics Content Knowledge

- *Recordar*: Recordar les definicions, terminologia, propietats dels nombres, propietats geomètriques, notació.
- *Reconèixer:* Reconèixer objectes matemàtics, formes, números i expressions, reconèixer les entitats matemàtiques que són matemàticament equivalents.
- *Calcular:* Dur a terme els procediments algorísmics per l'addició, multiplicació, divisió, resta amb nombres naturals, fraccions, decimals i nombres enters; aproximació de nombres per estimar càlculs, dur a terme procediments algebraics rutinaris.
- *Interpretar:* Interpretar la informació de gràfiques, taules o altres fonts; llegir escales simples.
- *Mesurar:* Usar els instruments de mesura, unitats d'ús de la mesura adequada, mesures d'estimació.
- *Classificar/Ordenar:* Classificar / agrupar objectes, formes, números i expressions d'acord amb les propietats comuns, prendre decisions correctes sobre la pertinença de classe, números d'ordre i objectes pels seus atributs.
- *Seleccionar:* Seleccionar eficaçment/adequadament l'operació, el mètode o estratègia per a resoldre problemes on hi ha un algorisme o mètode de solució coneguts.
- *Representar:* Mostrar la informació matemàtica i les dades en els diagrames, taules, quadres o gràfics; generar representacions equivalents d'una determinada entitat o relació matemàtica.
- *Modelitzar:* Generar un model adequat, com una equació o un diagrama, per a resoldre un problema rutinari.
- *Implementar:* Seguir i executar un conjunt d'instruccions matemàtiques; dibuixar figures i formes d'acord amb les especificacions donades.
- *Resoldre problemes rutinaris:* Resoldre els tipus de problemes rutinaris (per exemple, utilitzar les propietats geomètriques per a resoldre problemes); comparar i combinar

---

Aquests estudis es van realitzar durant un període de 4 anys des de 1995, amb l'objectiu d'avaluar l'aprenentatge de les matemàtiques i de les ciències d'alumnes de 4t i 8è grau de molts països del món (per més detalls, veure http://timss.bc.edu/).

diferents representacions de dades; usar les dades dels gràfics, taules i mapes per a resoldre els problemes rutinaris.

- *Analitzar:* Determinar i descriure o usar relacions entre variables o objectes en situacions matemàtiques, usar el raonament proporcional; descompondre figures geomètriques per simplificar la solució d'un problema; dibuixar la descomposició d'un sòlid; visualitzar les transformacions de les figures en tres dimensions; comparar i combinar diferents representacions de les mateixes dades; fer inferències vàlides a partir d'informació donada.
- *Generalitzar:* Ampliar el domini al que el resultat del pensament matemàtic i la resolució de problemes s'aplica mitjançant la reformulació dels resultats en termes més generals.
- *Sintetitzar/Integrar:* Combinar (diversos) procediments matemàtics per establir resultats, i combinar els resultats per a produir més resultats; fer connexions entre diferents elements de coneixement i representacions relacionades, i establir vincles entre idees matemàtiques relacionades.
- *Justificar:* Elaborar una justificació de la veritat o falsedat d'una declaració en funció dels resultats matemàtics o propietats.
- *Resoldre problemes no rutinaris:* Resoldre problemes en contextos matemàtics establerts o en la vida real, i aplicar procediments matemàtics en contextos desconeguts o complexos; usar les propietats geomètriques per resoldre problemes no rutinaris.

En el TEDS-M, els continguts de matemàtiques avaluats són dels nivells que els futurs professors poden ensenyar, és a dir, els nivells de primària o primer cicle de secundària. No obstant això, algunes preguntes requereixen un coneixement de les matemàtiques que va més enllà del què els futurs professors ensenyaran. Per exemple, els ítems per avaluar el MCK dels futurs professors de matemàtiques de primer cicle de secundària inclouen algunes preguntes sobre càlcul i àlgebra lineal.

Mathematics Pedagogical Content Knowledge segons TEDS-M

Sobre la base de la literatura existent i les recomanacions de diversos experts, el marc teòric per al MPCK (*Mathematics Pedagogical Content Knowledge)* es considera que té tres sub-dominis anomenats *mathematics curricular knowledge* (coneixement curricular de les matemàtiques), *knowledge of planning for mathematics teaching and learning* (coneixement de la planificació per a l'ensenyament-aprenentatge de les matemàtiques), i *knowledge of enacting mathematics for teaching and learning* (coneixement de la transformació de les matemàtiques per al seu ensenyament-aprenentatge), que detallem a continuació. Aquest marc presta atenció a la *dimensió temporal de l'ensenyament*, que comporta saber quines matemàtiques ensenyar, planificar-se per a ensenyar-les, i dur a terme la instrucció.

CONEIXEMENT CURRICULAR DE LES MATEMÀTIQUES • Establir uns objectius d'aprenentatge adequats • Conèixer diferents formats d'avaluació • Seleccionar les vies possibles i veure les connexions dins del pla d'estudis • Identificar les idees clau en els programes d'aprenentatge • Conèixer el currículum de matemàtiques CONEIXEMENT DE LA PLANIFICACIÓ PER A L'ENSENYAMENT-APRENENTATGE DE LES MATEMÀTIQUES • Planificar o seleccionar activitats adequades • Elegir formats d'avaluació • Predir les respostes típiques dels estudiants, inclosos els malentesos o idees errònies • Planificar els mètodes adequats per a representar idees matemàtiques • Vincular els mètodes didàctics i dissenys per a la instrucció • Identificar els diferents enfocaments per a resoldre problemes matemàtics • Planificar les lliçons matemàtiques CONEIXEMENT DE LA TRANSFORMACIÓ DE LES MATEMÀTIQUES PER AL SEU ENSENYAMENT-APRENENTATGE • Analitzar o avaluar les solucions dels estudiants o els seus arguments matemàtics • Analitzar el contingut de les preguntes dels estudiants • Diagnosticar les respostes típiques dels estudiants típics, inclosos els malentesos o idees errònies • Explicar o representar conceptes matemàtics o procediments • Generar preguntes fructíferes • Donar resposta a problemes matemàtics inesperats • Proporcionar una retroalimentació adequada

Taula 7. Marc teòric TEDS - Mathematics Pedagogical Content Knowledge

És interessant donar un cop d'ull als marcs desenvolupats en els projectes MT21 (explicat breument en l'apartat anterior) i COACTIV[8], els quals divideixen el MPCK en tres subdominis diferents dels utilitzats pel TEDS-M.

En l'estudi MT21 (Schmidt et al., 2008) es realitza una subdivisió molt similar a la utilitzada en el TEDS-M, on el primer i segon punt són pràcticament equivalents, i la única diferència rau en

[8] El projecte COACTIV sobre "Competència Professional dels Professors, Activació Cognitiva de la Instrucció, i Desenvolupament de l'alfabetització matemàtica dels estudiants" es va iniciar amb l'objectiu de conceptualitzar i avaluar un ampli espectre de les competències dels professors, les variables de personalitat, i les variables relacionades amb el treball en el context de l'ensenyament de matemàtiques de secundària. El projecte (directors: Jürgen Baumert, Berlín, Werner Blum, Kassel, Michael Neubrand, Oldenburg) va ser finançat per la Fundació Alemanya de Recerca (DFG) del 2002 al 2006, i va ser enquestat el professorat de matemàtiques de les classes de secundària que van participar en el PISA 2003/2004 a Alemanya (Blum & Krauss, 2006).
Una troballa clau de l'estudi va ser que, quan el rendiment en matemàtiques en el grau 9 es mantenia constant, els alumnes ensenyats per professors amb major coneixement dels continguts pedagògics (PCK) van obtenir rendiments significativament millors en el grau 10. Aquesta troballa en confirma moltes d'altres als EUA i a altres llocs: que l'anomenat PCK ha de ser considerat un candidat principal per a la creació de potents entorns d'aprenentatge que segueixin donant suport a la construcció dels coneixements dels estudiants.

què en el tercer apartat, en el MT21 posen més èmfasi en l'aprenentatge del alumnes, mentre que el TEDS-M el posa en la tasca del professor. Els tres subdominis utilitzats pel MT21 són:

- Coneixement curricular
- Planificació de la instrucció
- Aprenentatge dels alumnes

El COACTIV (Blum i Krauss, 2006), en canvi, fa una subdivisió del MPCK ben diferent a la dels altres dos. Aquesta és:

- Tasques i solucions múltiples
- Idees errònies i dificultats
- Explicacions i representacions

CONCLUSIONS DEL TEDS-M

Mathematical Knowledge for Teaching

L'estudi (Tatoo et al., 2012) constata una diferència de coneixements entre països i dins dels mateixos, però no respon a com s'expliquen aquestes diferències, i els investigadors consideren que aquesta pregunta requereix una anàlisi addicional. També remarquen que els resultats del TEDS-M poden servir en un futur per a portar a terme noves investigacions sobre el MKT, i per a decidir quins canvis cal dur a terme en els programes per tenir un millor rendiment o quines polítiques es poden implementar per fomentar que els millors alumnes triïn la docència com a professió.

Relació entre coneixements i creences

L'evidència científica dels resultats obtinguts, encara que limitada, suggereix el següent (Tatoo et al., 2012):

1. Els resultats positius en els coneixements dels estudiants tenen més probabilitats d'estar associats amb els mestres que creuen que les matemàtiques són un procés d'investigació i que l'aprenentatge de les matemàtiques requereix una participació activa, i

2. És menys probable que estiguin associats amb els mestres que creuen que les matemàtiques són un conjunt de normes i procediments, que l'aprenentatge de les matemàtiques es centra en la direcció del mestre, i que les matemàtiques són una habilitat fixa.

Mentre que les dades recollides durant TEDS-M no van permetre posar a prova aquestes hipòtesis, han estat capaços d'examinar les relacions entre cadascuna d'aquestes creences i de relacionar-les amb el coneixement de matemàtiques dels futurs docents. A nivell nacional, els futurs professors de tots els països en general, van recolzar fermament la creença de que les matemàtiques són un procés d'investigació i que l'aprenentatge requereix una participació activa dels alumnes. Per tant, ha estat poca la variació per país. Hi va haver, però, una considerable diversitat entre els països en la mesura que els futurs docents creuen que les matemàtiques són un conjunt de normes i procediments, que l'aprenentatge de les matemàtiques es centra en la direcció del mestre, i que les matemàtiques són una habilitat fixa.

La literatura analitzada també va portar a esperar que les dues primeres creences tindrien una relació positiva amb les dues mesures de coneixement, mentre que les últimes tres creences tindrien una correlació negativa amb ells. A nivell nacional, les dades eren bastant coherents amb aquesta expectativa. Els països amb creences més fortament vinculades amb l'orientació conceptual van ser generalment aquells amb majors puntuacions mitjanes a la prova de coneixements, mentre que els països més fortament favorables a les creences en consonància amb l'orientació calculacional tenien en general puntuacions mitjanes més baixes en les proves de coneixements.

No obstant això, no seria prudent extreure conclusions definitives a partir d'aquests resultats, per dues raons. En primer lloc, la mostra TEDS-M dels països era bastant petita. En segon lloc, els participants dels països són molt diferents, tant cultural com històricament, i aquestes diferències poden influir en les creences i els coneixements de maneres desconegudes. És també important observar que de qualsevol cosa de la que puguin fer-se generalitzacions, hi ha excepcions. En el Taipei Xinès, per exemple, els patrons de resposta eren en general coherents amb l'orientació conceptual, a excepció de la visió de les matemàtiques com un conjunt de regles i procediments, creença per a la qual l'aprovació va ser moderadament forta. El Taipei Xinès és un país on els nivells de coneixement són excepcionalment alts, per tant no encaixa amb les hipòtesis explicades anteriorment.

Tot i les excepcions, després de l'estudi estadístic dels resultats es va concloure que, en els països on hi ha una tendència general d'avalar les creences de que les matemàtiques són un procés d'investigació i que l'aprenentatge de les matemàtiques requereix una participació activa de l'alumne, els estudiants de professor tenen uns coneixements relativament majors del contingut de les matemàtiques i la seva didàctica que els d'aquells països on es van rebutjar aquestes creences. De manera similar, hi va haver una tendència general dins dels països on els futurs mestres donen suport a la creença de que les matemàtiques són un conjunt de normes i procediments, que l'aprenentatge de les matemàtiques ha d'estar totalment en mans del professor, i que les matemàtiques són una capacitat fixa, de tenir relativament menor coneixement del contingut de les matemàtiques i de la seva didàctica que aquells que van rebutjar aquestes creences. Les relacions han estat febles, però consistents.

4. Metodologia de la investigació

4.1. Aproximació metodològica

En aquest apartat pretenem descriure i justificar les opcions metodològiques preses. Aquestes prendran en consideració antecedents en recerques on s'analitzen les creences o els coneixements dels professors, i s'establiran coherentment en relació al problema, al context i als nostres plantejaments.

4.1.1. Consideracions metodològiques generals

Seguint a Vila (2001, citant a Ferreres 1992) tenim en compte explícitament o implícitament un seguit d'elements contextuals que l'investigador pren en consideració a l'hora de prendre unes o altres opcions metodològiques, entre els quals podem esmentar:

- Els objectius proposats
- Les característiques del context en el què es va a realitzar la investigació
- Les creences o teories implícites de l'investigador sobre la validesa general de la tasca que es portarà a terme
- L'experiència personal de l'investigador
- El marc teòric en el qual es pretén emmarcar la recerca

Atenent a que les finalitats del present treball tenen a veure amb *caracteritzar* i *comparar* els coneixements i les creences de professors, cal abordar la disjuntiva *enfocament qualitatiu-quantitatiu*.

La *investigació quantitativa* posa l'èmfasi en la comprovació dels fets, la verificació de les teories, la mesura i la quantificació dels fenòmens; utilitza com a instruments preferentment l'enquesta, els qüestionaris, les proves objectives, l'observació sistemàtica... i per al tractament de dades, les tècniques estadístico-matemàtiques; investiga amb mostres de població amb la intenció de generalitzar els resultats. D'altra banda, la *investigació qualitativa* fa afermament en la comprensió i la interpretació dels fets des del punt de vista dels propis implicats, genera hipòtesis i teories explicatives, treballa amb dades qualitatives; utilitza preferentment instruments com són els diaris de camp, les entrevistes, els qüestionaris oberts, l'observador, els enregistraments, les dinàmiques de grup... i realitza investigacions d'estudi de casos. (González i Latorre, 1987; Goetz i Lecompte, 1988)

Tanmateix, en les darreres dècades, després d'una llarga prevalença de la investigació quantitativa, i una vegada acceptat el marc qualitatiu, trobem també una corrent d'*integració de les dues tradicions*, i és en aquesta voluntat d'integració on el present treball farà la seva aportació.

4.1.2. Característiques metodològiques d'antecedents

Antecedents d'estudis sobre creences

Per tal de poder dissenyar els criteris organitzatius de la informació que obtinguem amb el qüestionari de creences, és necessari estructurar les creences dels professors d'alguna manera. Molts investigadors s'han trobat amb el mateix dilema, i la fórmula més comú ha estat fer categories de creences. Aquestes es poden construir a partir de molts criteris; en el nostre cas, l'indicador de categoria que utilitzarem és l'objecte de creença, al igual que els nostres estudis de referència (Vila, 1995, 2001), i moltes anteriors recerques, de les quals en fem, a continuació, un breu repàs.

Schoenfeld (1985, p.15) parla, per exemple, de creences entorn a

a) un mateix
b) al context
c) al tema
d) a les matemàtiques

Més endavant, Pehkonen i Törner (1996, p.102) consideren també quatre grans categories principals:

a) creences entorn a les matemàtiques
b) creences entorn a un mateix dins les matemàtiques
c) creences entorn a l'ensenyament de les matemàtiques
d) creences entorn a l'aprenentatge de les matemàtiques

Tanmateix, els mateixos autors indiquen que aquestes categories poden ser dividides en elements més petits. Per exemple, la categoria *creences entorn a les matemàtiques* comprèn un ampli espectre de creences: *creences entorn a la naturalesa de les matemàtiques, creences sobre el subjecte de les matemàtiques, creences sobre la naturalesa de les tasques matemàtiques, creences sobre els orígens del coneixement matemàtic,* o *creences referents a les relacions entre matemàtiques i el món empíric*.

Remuntant-nos als antecedents, en primera instància McLeod (1989) distingia dues grans categories de creences en l'alumnat, utilitzant també, a l'igual que Schoenfeld i Pehkonen i Töner, com a indicador de categoria *l'objecte de creença*:

a) creences entorn a les matemàtiques com a disciplina
b) creences entorn a ells mateixos i a la seva relació amb la matemàtica

En la primera categoria, McLeod considera que el domini afectiu no hi és involucrat de forma rellevant, malgrat sí que forma una part important del context en el qual es desenvolupa aquest. Les recerques i treballs de Shoenfeld (1985) i de Silver (1985) se centren precisament en les creences entorn a les matemàtiques i la seva influència en la RP.

Tanmateix, en la segona gran categoria, McLeod hi considera una gran component afectiva i una estreta relació amb les nocions de metacognició, autoregulació i autoconsciència. Alhora hi inclou creences relacionades amb la confiança, l'interès per les matemàtiques, la motivació i el plaer associat amb les matemàtiques, l'eficiència en matemàtiques, i l'atribució causal de l'èxit o el fracàs.

Pocs anys després, McLeod (1992) afegeix dues categories més a les dues anteriors:

c) creences entorn a l'ensenyament de les matemàtiques

d) creences entorn al context social

Altres categories que s'han utilitzat (en les quals no aprofundirem perquè no són d'utilitat per al nostre estudi) fan referència a la pròpia naturalesa de la creença o al seu origen.

Centrant-nos ja en la metodologia concreta utilitzada per a la recollida i anàlisi de dades, Llinares (1992), citant a Bromme, fa una reflexió, en quant a que

"el coneixement que possiblement sigui rellevant per a explicar una acció pot no ser conscientment present ni ser verbalitzable" (p,69)

La qual cosa el porta a plantejar-se la dificultat de *com accedir als significats*, en el seu treball concret, dels professors o estudiants per a professors, dificultat que òbviament es planteja també en el nostre propòsit.

En aquest treball, Llinares (1992) presenta un quadre on compara diferents metodologies emprades en les recerques sobre creences en professors i estudiants per a professors. Sintetitzant, observem enfocaments essencialment quantitatius (cita a Ferrini-Mundi), enfocaments bàsicament qualitatius (Cooney, 1985; Llinares, 1989; Thompson, 1984) i enfocaments mixts qualitatiu-quantitatiu (cita a Peterson).

Entrant en una major concreció (tot i que en alguns casos es tractin d'estudis sobre creences de l'alumnat), i reprenent alguns dels treballs sobre identificació i estudi de l'origen dels sistemes de creences que tenen relació amb l'efectivitat en RP ressenyats anteriorment, per exemple Schoenfeld (1989) utilitza instruments de recerca i mètodes quantitatius per tal de relacionar algunes creences matemàtiques i la conducta de l'alumnat. Tècniques semblants, i aplicades sobre una àmplia població, són les utilitzades en el treball de Grigutsch citat per Pehkonen i Törner (1996). Alsina i altres (1998) utilitzen, per tal d'identificar un seguit de creences entorn a la RP, una metodologia mixta quantitativa-qualitativa, en qualsevol cas basada en passar un qüestionari.

Vila (2001) defensa que, tot i que en els marcs de recerques sobre creences sembla constatar-se una major preferència per la riquesa que pot aportar la metodologia qualitativa, és recomanable recórrer a una varietat de mètodes de recollida de dades, incloent alguns de naturalesa quantitativa, per tal de completar la informació i augmentar la seva validesa. Coherentment, en el seu estudi sobre les creences dels estudiants entorn a la RP combina una varietat d'enfocaments i d'instruments de recollida de dades. En la primera part del seu treball però –la que guarda característiques més afins a la nostra recerca-, centrada en el grup classe, opta per que els instruments de recollida de dades siguin qüestionaris i proves de problemes, i fa un tractament de les dades bàsicament quantitatiu, malgrat aquest tractament és essencialment descriptiu-interpretatiu i no de generalització.

Antecedents d'estudis sobre coneixements

En les últimes dues dècades, el fet que els professors tinguin els coneixements i habilitats necessaris per a l'ensenyament de les matemàtiques s'ha convertit en objecte de preocupació. Això ha portat al desenvolupament i ús d'exàmens de "llicència" per a professors, com el

PRAXIS[9] -test avaluatiu desenvolupat per l'*Educational Testing Service* i ara administrat en 38 estats americans-. Altres països i empreses d'investigació han desenvolupat i administrat tests similars (com ara el TEDS-M, MT21, COACTIV, ja explicats en l'apartat d'*estudis que mesuren els coneixements dels professors*) .

Donat el desenvolupament d'aquestes avaluacions, es podria conjecturar que hi ha un acord substancial al voltant dels coneixements necessaris per a ensenyar matemàtiques. Però una lectura a fons dels ítems alliberats d'aquests tests suggereix la falta d'acord sobre el què els professors realment necessiten saber per a ensenyar aquesta matèria. Alguns tests avaluen la capacitat de resoldre problemes del nivell de primària o secundària (CBEST de California; PRAXIS; Goulding, 2002), altres la capacitat de construir tasques matemàtiques per als estudiants (EXCET de Texas), o altres la capacitat d'entendre i aplicar les matemàtiques en altres àrees de coneixement (MTEL de Massachusetts). Aquest desacord implícit sobre el contingut i la naturalesa del coneixement professional dels professors de matemàtiques es pot remuntar enrere, a través de la literatura teòrica i empírica sobre l'ensenyament del coneixement, on diferents autors proposen diverses organitzacions d'aquests coneixements (com hem pogut veure en l'apartat de *contextualització del coneixements del professors*).

Malgrat l'argumentació anterior, potser més que un desacord sobre el coneixement que cal tenir per ensenyar matemàtiques el que succeeix és que aquests tests són parcials, en el sentit que cap d'ells va errat en el contingut que avalua, però només avalua una part del que seria el coneixement professional del professor. Cal, per tant, una estructura global que organitzi i especifiqui els diferents tipus de coneixement, com podria ser el MKT (Ball i Bass, 2003; Ball, Hill i Bass, 2005; Hill, Rowan i Ball, 2005; Ball, Thames i Phelps, 2008) o el marc teòric creat per a l'estudi TEDS-M (Tatto et al., 2008).

El primer test avaluatiu del coneixement dels professors que hem tingut en compte a l'hora d'elaborar el nostre protocol de problemes ha estat el de Hill, H.C., Schilling, S.G., & Ball, D.L. (2004). Amb l'anàlisi de les dades recollides mitjançant els seus ítems, aquests investigadors busquen donar resposta al debat sobre els tipus de coneixement necessaris per a l'ensenyament de les matemàtiques. En la construcció d'aquests ítems, es van utilitzar elements de les teories existents sobre els coneixements dels professors (per exemple, Ball & Bass, 2001; Grossman, 1990; Shulman et al., 1987) per plasmar en els ítems un conjunt de problemes de l'ensenyament, que representen els diversos components dels coneixements de matemàtiques necessaris per a l'ensenyament (descrits en el marc teòric del present treball: *conceptualització del coneixement*: MKT). A continuació, l'anàlisi de les respostes dels professors es van utilitzar per a determinar l'estructura del coneixement que s'intentava representar amb cada ítem. La raó per la qual van triar que l'instrument fos una enquesta amb ítems d'opció múltiple és que, tot i haver-hi mètodes molt potents per a mesurar els coneixements dels professors (i.e. entrevistes, observacions, tasques estructurades), aquest mètode s'adaptava més a un estudi on participen molts professors (Hill, 2008). Els investigadors de l'estudi defensen que els ítems creats poden ser útils en molts contextos diferents: com a resultats que permetin l'exploració del raonament dels professors sobre les matemàtiques i sobre com pensen els estudiants; com a materials per al desenvolupament

[9] Es pot trobar més informació sobre aquests tests a la pàgina web http://www.ets.org/praxis.

professional o per a l'educació del professorat; o com a exemples del tipus de matemàtiques que necessita un professor per a ensenyar. El que deixen clar és que els seus ítems no són apropiats per a usar-los com a mesura global, o escala, del coneixement del professor. Dit en altres paraules, opinen que no s'han d'usar per a calcular una puntuació de professor que indiqui de manera fiable el nivell de coneixement dels continguts o pedagògic.

L'altre estudi que ha estat de referència per a la nostra recerca ha estat el TEDS-M (Tatto et al., 2008). En el primer capítol del present treball hem explicat les finalitats de l'estudi, així com el marc teòric que utilitza el TEDS per a l'anàlisi de les dades pel que fa als coneixements dels professors; marc que, com veurem en el proper apartat, ens ha servit de base per a construir els nostres instruments d'anàlisi. A continuació veurem alguns aspectes de la seva metodologia (concretament del disseny dels ítems) però tenint en compte que, a diferència del nostre, el TEDS-M és un estudi a gran escala.

Com observen Hill, Sleep, Lewis and Ball (2007), hi ha avantatges i desavantatges en la utilització de diferents formats d'ítems a l'hora d'avaluar el MKT. Els ítems d'opció múltiple són fàcils de puntuar de manera fiable, i tenen un gran historial d'ús en les proves de tot el món (i.e. els ítems de Hill). No obstant això, el format pot, involuntàriament, donar suport la idea errònia de que "la competència matemàtica es demostra amb solucions ràpides a problemes matemàtics rutinaris." (p. 150). Per contra, els ítems de resposta oberta poden tenir aparentment una major validesa, però les respostes són sovint més difícils d'interpretar de forma fiable.

El TEDS-M utilitza tres formats d'ítems per a avaluar tant el MCK com el MPCK. Dos dels formats, anomenats de *selecció múltiple* i de *selecció múltiple complexa*, demanen a l'enquestat que triï entre dos o més opcions: són de resposta tancada. L'altre, d'altra banda, és el format de *resposta oberta.* Nosaltres també hem usat aquests tipus de formats, com especificarem en l'apartat del disseny del protocol.

4.1.3. Opcions metodològiques preses

En quant a la metodologia de l'estudi, hem assumit que la realitat de la transició d'etapa és una experiència complexa, socialment compartida i susceptible de ser analitzada amb èmfasis diferents tant per mètodes quantitatius com qualitatius. En el nostre cas, realitzarem una primera anàlisi quantitativa amb la qual pretenem obtenir una visió general dels resultats obtinguts. Posteriorment, portarem a terme una segona anàlisi mixta amb l'objectiu de donar una mirada específica a aquells aspectes que més ens interessin.

Per a l'obtenció de les dades, s'han elaborat els següents instruments: un qüestionari (determinació de creences) i un protocol (determinació de coneixements) sobre Resolució de Problemes. Els resultats que obtinguem mitjançant aquests instruments ens han de permetre caracteritzar i comparar les creences i els coneixements dels professors i estudiants de professor sobre la Resolució de Problemes, i posteriorment establir quina relació hi ha entre aquests dos factors.

Construïts el qüestionari i el protocol, se'n va fer una validació amb una mostra pilot amb vint estudiants de professor per tal de polir-ne els possibles errors, i, en segon lloc, una triangulació amb un expert, per tal de millorar-ne la qualitat i eficàcia. Posteriorment, s'han passat a la mostra.

4.2. Població

Per a l'elaboració de la mostra s'ha tingut en compte l'heterogeneïtat pel que fa a:

- L'etapa : Primària – Secundària
- L'experiència docent: Estudiants de professor – Professors en actiu

La nostra intenció era tenir una mostra de, com a mínim, 10 individus de cada tipus. Finalment, d'un total de 50, el nombre d'individus de cada mostra ha estat el següent:

	Primària	Secundària
Estudiants de professor	16	13
Professors	10	11

Taula 8. Nombre d'individus de cada mostra

4.3. Disseny dels instruments per a l'obtenció de dades

4.3.1. Disseny dels criteris organitzadors de la informació per al qüestionari de creences

El principal objectiu del qüestionari és caracteritzar les creences dels professors de matemàtiques de primària i secundària sobre la Resolució de Problemes. Per tal de dissenyar el qüestionari és important que tinguem un instrument per analitzar les dades obtingudes, ja que "*per a mirar no n'hi ha prou amb veure, cal intenció i discerniment"* (Carrillo, 1996, p.35). Aquests criteris organitzadors ens seran útils a l'hora de:

- Elaborar l'instrument de recollida de dades
- Interpretar i/o sintetitzar les dades recollides

Som conscients, però, que aquests criteris tenen un caràcter provisional, ja que el propi estudi pot millorar-los si es donés el fet que les dades en trenquessin parcialment l'estructura; aquest fet és inevitable però enriquidor a la vegada.

L'estructura dels criteris organitzadors del següent estudi estan basats en els treballs –ja comentats en el marc teòric– de Vila (1995, 2001), i adaptats tenint en compte les característiques de la nostra recerca. Un avantatge d'això és que els criteris han estat anteriorment validats, tot i que nosaltres ho farem amb unes altres dades amb característiques diferents.

Esquema general de la categorització

La categorització assumida està estructurada pels següents elements, cadascun dels quals serà explicitat en els posteriors apartats:

- Tres *grans categories* (A, B, C) que fan referència a l'objecte de creença[10].
- Una *subcategorització* (Ai, Bi, Ci) que fa referència a aspectes d'aquests objectes, i que ve concretada per:
  - Un *identificador*, definit pels termes clau i que sintetitza cada subcategoria.
  - Un parell de creences (de vegades més d'un parell), en certa manera contraposades, que caracteritzen amb més detall cada subcategoria i que desenvolupen l'identificador: aquestes frases les anomenarem *creences tipus*.
  - Per a cada parell de creences tipus s'expliciten dos *rangs* extrems que venen indicats pels signes (-) i (+), que indiquen el pol en el què es troben les esmentades creences.

Definim i concretem en detall aquests elements:

Identificadors de la categorització

A. Creences sobre l'objecte *problema de matemàtiques*
   1) Flux *entorn -> problema escolar*
   2) Presència de referents matemàtics identificables a l'enunciat
   3) Identificació "enunciat verbal" - problema
   4) Precisió de l'enunciat
   5) Caràcter tancat del propòsit

B. Creences sobre la naturalesa de l'activitat de resolució de problemes
   1) Caràcter instrumental / investigatiu de l'activitat matemàtica
   2) Caràcter rutinari / creatiu de l'activitat matemàtica escolar
   3) Contextualització matemàtica de l'activitat de RP
   4) Èmfasi sobre el producte o el procés
   5) Caràcter lineal de l'activitat de resolució de problemes
   6) Rellevància de la RP dins de l'activitat matemàtica

C. Creences sobre el procés d'ensenyament-aprenentatge de la resolució de problemes
   1) Subsidiarietat de la RP a l'aprenentatge d'eines matemàtiques
   2) Importància de l'aprenentatge d'estratègies
   3) Importància de la millora del control
   4) Importància de la conversió dels problemes en no-problemes

Rangs de les creences tipus

De forma anàloga a com ho defineix Vila (2001), en el present estudi s'han definit el que anomenarem *rangs de creences*, que vindran representats pels símbols (-) i (+), i estan referits a un imaginari continu "menys - més". Aquest continu "menys - més" està dissenyat i definit de forma pretesament coherent amb els següents termes:

> **(-) :** Creences properes a un sistema de creences relacionat amb allò que Shoenfeld (1991) anomena "pensar matemàticament" en el marc de la RP.

[10] Entès "objecte de creença" en els termes de Pehkonen i Töner (1996) i McLeod (1992)

(+): Creences properes a sistemes de creences definits per característiques de rigidesa, reducció a l'instrumentalisme, tradició conductista de l'aprenentatge, de "reducció dels problemes a no-problemes" (Vila 1995).

És evident que aquest rang està sotmès a judici de valor de l'investigador. El procés d'assignació de rangs a cada creença tipus consta a continuació.

Cal tenir en compte que en l'anàlisi de les dades hem pres el rang [-3, 3], on hem assignat -3 en les preguntes relatives a (-), 3 a les relatives a (+) –en algunes preguntes amb més d'un apartat hem assignat ±1,5 per ponderar–, i en aquelles preguntes amb quatre opcions d'escala hem assignat 3, 1, -1, -3 (l'ordre segons el cas). Finalment hem obtingut la mitjana per a cada subcategoria, que es troba òbviament també en l'interval [-3, 3].

Categorització detallada: creences tipus, assignació de rangs

A1) Flux *entorn -> problema escolar*
Que els problemes treballats a classe siguin situacions reals de l'entorn és...

- (-) Molt important.
- (+) Poc important.

A2) Presència de referents matemàtics identificables a l'enunciat
La presència o no de referents matemàtics (termes, nombres, paraules clau, expressions estàndard..) en l'enunciat que portin a identificar el problema com a "problema de matemàtiques" i dins de determinades tipologies...

- (-) No és un aspecte determinant en els problemes.
- (+) És un aspecte determinant en els problemes.

A3) Identificació "enunciat verbal" – problema
La identificació enunciat verbal – problema[11] és...

- (-) feble.
- (+) forta (tota qüestió donada per enunciat verbal és un problema; un problema "és" un text)

A4) Precisió de l'enunciat
Els enunciats dels problemes que es treballen a classe...

- (-) És important que a vegades siguin imprecisos (situacions poc concretes, faltin o sobrin dades).
- (+) És important que sempre siguin precisos.

A5) Caràcter tancat del propòsit
Propòsit tancat: Calcular un resultat numèric únic, calcular un conjunt perfectament delimitat de resultats numèrics, efectuar una construcció concreta, representar, amidar...
Propòsit obert: Obtenir pautes, optimitzar, prendre decisions, demostrar, relacionar, inferir, conjecturar...
Els propòsits rellevants dels problemes són...

[11] Per enunciat verbal entenem "text (pregunta o qüestió) on se'ns explica una situació", i reprenem la definició assumida al marc teòric de problema (M.Callejo, 1994)

- (-) Indistintament oberts o tancats.
- (+) Sempre tancats.

B1) Caràcter instrumental / investigatiu de l'activitat matemàtica

L'activitat matemàtica és...

- (-) Investigativa, malgrat pugui ser també instrumental.
- (+) Exclusivament instrumental.

Les matemàtiques són...

- (-) Un engranatge de procediments, estructures i processos.
- (+) Un conjunt de regles i tècniques.

La finalitat de les matemàtiques és...

- (-) Desenvolupar capacitats en les persones.
- (+) Aprendre a aplicar un seguit de tècniques.

B2) Caràcter rutinari / creatiu de l'activitat matemàtica escolar

Les classes de matemàtiques són principalment...

- (-) Creatives i participatives.
- (+) Rutinàries.

Les matemàtiques són essencialment...

- (-) Creatives i dinàmiques.
- (+) Pràctiques i rígides.

A classe, les matemàtiques...

- (-) Es discuteixen.
- (+) S'expliquen per a entendre-les.

Les preguntes a classe són per a...

- (-) Discutir i reflexionar.
- (+) Que algú les resolgui.

Les feines que es fan a classe de matemàtiques són...

- (-) Sempre diferents i imprevisibles.
- (+) Repetitives, per a aprendre tècniques.

B3) Contextualització matemàtica de l'activitat de RP

Contextualització matemàtica de l'activitat de RP: El fet que el propi context educatiu (o la situació/moment on és proposada la tasca/problema) determini les tècniques o estratègies a utilitzar en la RP.

La resolució de problemes com a activitat escolar...

- (-) Es pot desenvolupar de forma descontextualitzada matemàticament.
- (+) Cal que es desenvolupi de forma contextualitzada matemàticament.

Moment:

- (-) Els problemes són proposats en qualsevol moment (tema, principi/final tema) sense necessitat de relacionar-los amb algun coneixement matemàtic en especial.
- (+) Els problemes acostumen a ser proposats dins el tema (o relativament a prop) de les tècniques a utilitzar per a resoldre'ls.

Coneixements:

- (-) A classe es poden plantejar problemes que necessiten de coneixements matemàtics que els alumnes encara no tenen.
- (+) Els problemes matemàtics plantejats a classe han de fer referència a coneixements ja treballats.

B4) Èmfasi sobre el producte o el procés

Producte: Resultat i solució del problema.

Procés: Resolució manifesta, però no necessàriament recollida en la solució.

En l'activitat de resolució de problemes...

- (-) És tan important el procés com el producte.
- (+) És més important el producte que el procés.

L'aspecte clau és...

- (-) El procés global de resolució, amb les reflexions sobre el perquè del procés.
- (+) L'obtenció del resultat i l'explicació de la solució.

Final d'un problema:

- (-) El problema no té perquè donar-se per acabat quan s'ha obtingut una solució: es busquen altres camins, es reflexiona, es varia...
- (+) El problema acaba quan s'ha trobat i s'ha expressat la solució.

L'èxit en la resolució d'un problema...

- (-) No passa necessàriament per haver obtingut la solució.
- (+) Passa necessàriament per haver obtingut la solució.

B5) Caràcter lineal de l'activitat de resolució de problemes

El procés de resolució de problemes...

- (-) És inevitable que estigui ple d'entrebancs (intents fallits i camins equivocats, incorreccions i proves).
- (+) Cal aconseguir que sigui lineal (s'avanci directament fins el resultat).

Formes de resoldre un problema:

- (-) Hi ha moltes maneres de resoldre cada problema.
- (+) Hi ha una sola manera interessant de resoldre cada problema (on es poden utilitzar tècniques en principi diferents).

Anotacions:

- (-) Normalment s'anoten moltes coses en el paper abans de trobar un bon camí de resolució.
- (+) És important que normalment es tingui el problema completament elaborat al cap abans de començar a anotar quelcom.

Embussaments:

- (-) Els experts també es troben freqüentment embussats resolent un problema.
- (+) És important arribar a que normalment no t'embussis resolent un problema.

Temps:

- (-) És freqüent necessitar molt de temps per a resoldre un problema.
- (+) Resoldre un problema necessita poc temps per als experts.

B6) Rellevància de la RP dins de l'activitat matemàtica

La resolució de problemes...

- (-) És l'aspecte més rellevant dins de l'activitat matemàtica.
- (+) No és l'aspecte més rellevant dins de l'activitat matemàtica.

A classe de matemàtiques es resolen...

- (-) Molts problemes.
- (+) Pocs problemes.

C1) Subsidiarietat de la RP a l'aprenentatge d'eines matemàtiques

Eines / coneixements matemàtics: conceptes, fets, tècniques i algorismes, no processos de raonament matemàtic o procediments generals.

Aprendre coneixements de matemàtiques...

- (-) Només ajuda a l'èxit en resolució de problemes.
- (+) Garanteix l'èxit en resolució de problemes.

C2) Importància de l'aprenentatge d'estratègies

Aprendre estratègies (heurístics)...

- (-) Ajuda molt en l'èxit en resolució de problemes.
- (+) No té massa transcendència en l'èxit en resolució de problemes.

C3) Importància de la millora en el control

Control cognitiu: Conjunt dels coneixements sobre el propi coneixement i regulació i control de les accions cognitives (Garofalo i Lester, 1985).

Control dels estats d'ànim (Mason, Burton i Stacey, 1982; Lester, 1985).

En vistes a millorar en la RP, intentar millorar en el control dels coneixements i dels estats d'ànim, la paciència i la perseverança...

- (-) És important.
- (+) No té massa importància (bé perquè no influeix, bé perquè és un aspecte innat d'algunes persones, bé perquè és un aspecte intrínsec a saber matemàtiques).

Sentit comú (control cognitiu):

- (-) La RP necessita intuïció i sentit comú.
- (+) La RP necessita principalment de lògica i deducció enlloc d'intuïció i sentit comú.

C4) Importància de la conversió dels problemes en no-problemes

Mecanitzar els processos de resolució de problemes...

- (-) No és possible.
- (+) És necessari i cal ensenyar aquests mètodes-tipus.

Experts:

- (-) No hi ha experts que sàpiguen resoldre gairebé tots els problemes de matemàtiques d'un determinat camp.
- (+) Hi ha experts que saben resoldre gairebé tots els problemes de matemàtiques d'un determinat camp.

4.3.2. Qüestionari de creences

Per dur a terme el qüestionari hem pres com a punt de partida un qüestionari ja elaborat i validat (Vila, 2001). El qüestionari de Vila pretenia identificar les creences de l'alumnat entorn a la RP; nosaltres l'hem adaptat d'acord als nostres objectius (el nostre estudi és més concret: estudiem menys "tipus" de creences) i tenint en compte que ens adrecem a professors.

El qüestionari definitiu (que podeu trobar el l'annex 1) no resulta un qüestionari estructurat de forma habitual, sinó un conjunt de 9 blocs homogenis d'ítems que no estan organitzats –en la seva presentació– segons les categories de creences que intentem identificar.

Les preguntes del qüestionari atenen a tipologies de format diverses, en particular:

a) Preguntes directes obertes:

> *1. Si haguessis d'explicar QUÈ ÉS UN PROBLEMA DE MATEMÀTIQUES a algú que no ho sap, com li explicaries perquè t'entengués fàcilment?*

b) Preguntes indirectes obertes:

> *1a. Posa dos exemples de PROBLEMES DE MATEMÀTIQUES que consideris que no són exercicis (no cal que els resolguis).*

c) Preguntes indirectes d'opció tancada dicotòmica:

> *3. De cadascun dels següents exemples digues si CREUS QUE PER A TU ÉS UN PROBLEMA DE MATEMÀTIQUES O NO (ENCERCLA SÍ O NO).*
>
> *SÍ NO 1) En comprar un objecte has de pagar un percentatge d'impost i també et fan un altre percentatge de descompte. Amb quin ordre és millor que et facin els càlculs?*

d) Preguntes d'associació amb elecció múltiple:

> *4. De les sis paraules que tens a continuació, quines d'elles RELACIONES MÉS AMB LES MATEMÀTIQUES? (POSA NOMÉS TRES CREUS)*

☐ *regles*	☐ *mètodes*	☐ *imaginació*
☐ *exactitud*	☐ *raonament*	☐ *sentit comú*

e) Bateries d'ítems amb opció d'escala "poc - molt", "poc – sobretot" o "molt d'acord – molt en desacord":

> *2. Quina importància li dones a resoldre problemes de matemàtiques a classe on als enunciats els passi les coses que a continuació diem? (ENCERCLA EL NÚMERO QUE CONSIDERIS MÉS ADEQUAT)*

Poc important			Molt important	
1	2	3	4	a) A l'enunciat li falten dades que necessitem per a poder resoldre el problema.

Procés de validació del qüestionari

La versió inicial del qüestionari va passar un doble procés de validació separat en el temps.

a) En primer lloc, una validació per estudiants de professor: es va fer una *prova pilot* amb 20 estudiants del Màster de Secundària del curs 2009-2010.
b) En segon lloc, una triangulació amb un expert, sobretot pel que fa a l'assignació de rangs per a l'anàlisi de dades.

Arran de les modificacions generades per aquest procés de validació, es va elaborar el qüestionari definitiu, es va tancar la relació de les categories de creences a estudiar, i es va decidir l'assignació definitiva de rangs per a cada resposta.

Prova pilot

Vam realitzar la prova pilot amb aquesta primera versió del qüestionari a 20 estudiants del Màster de Secundària 2009-2010 (podeu trobar la primera versió del qüestionari i els resultats de la prova pilot en els annexos 2 i 3 respectivament). La raó per la que vam triar aquesta població és que, a més de tenir les mateixes característiques que una part de la mostra definitiva, hi teníem fàcil accés i ens permetia realitzar la prova pilot a un nombre alt de participants. Aquesta prova es va efectuar en les mateixes circumstàncies amb les quals estava pensat operar en la recollida de dades definitiva. Es van donar els qüestionaris als participants i, sense límit de temps, es va deixar que ho fessin a casa seva, per portar-lo a la propera sessió complementat. També es va demanar que, en el cas de no comprendre alguna pregunta, ho deixessin indicat i explicat en el qüestionari. Les finalitats d'aquesta validació eren:

- *Constatar la correcta comprensió del qüestionari:* Mitjançant els comentaris dels participants, vam veure que, en general, tots entenien el què s'havia de fer. Examinant les respostes de les preguntes 1 i 3 (en la primera es demana què s'entén per *problema de matemàtiques* i posar exemples, i en la segona s'ha de decidir si unes qüestions són problemes de matemàtiques o no), vam creure oportú especificar, a l'inici del qüestionari, que ens referim a *problema* (vs exercici) per als alumnes, no per al professor enquestat.
- *Comprovar la coherència ítems-categories:* És a dir, si els ítems associats a la subcategoria són útils per a obtenir informació precisa sobre les creences-tipus. Els problemes detectats van ser, d'una banda, relatius a l'anàlisi de les preguntes obertes (si realment donaven la informació relativa a les creences tipus i també amb quin pes), i de l'altra, el mateix tipus de problema d'anàlisi de les dades però amb la pregunta 3 (on els participants han de decidir si una qüestió és o no un problema). Es va creure oportú que, a l'hora d'afinar l'assignació de rangs pel que fa a aquestes dues preguntes del qüestionari, esperaríem a escoltar l'opinió d'un expert.
- *Detectar si les categories i subcategories de creences analitzades eren necessàries i suficients per donar resposta als nostres objectius:* Les categories i subcategories analitzades estan totes adaptades de les categories d'Antoni Vila (2001). Inicialment, de les quatre categories estudiades per Vila, per les característiques de la nostra recerca, vam decidir només estudiar-ne tres (A, B, C). Totes vam dividir-les en les mateixes subcategories que feia Vila, excepte la categoria A, d'on vam decidir prescindir de la subcategoria A3 (Identificació enunciat verbal – problema). Després de l'anàlisi de la prova pilot, vam creure oportú introduir aquesta subcategoria, ja que si no la categoria A (creences sobre l'objecte *problema de matemàtiques*) no quedava

prou ben definida. Aquest fet va fer que afegíssim alguns ítems en algunes preguntes del qüestionari.

- *Assignació de rangs a les respostes:* Inicialment vam decidir que els rangs assignats estiguessin en l'interval [-2, 2], i es van analitzar els resultats de tots els ítems de cada subcategoria tot donant a cadascuna un valor d'entre {-2, -1, 0, 1, 2}. Vam poder detectar que d'aquesta manera la informació obtinguda de cada individu era molt inexacta, ja que s'havien d'arrodonir massa les dades obtingudes. Per aquesta raó es va decidir que els valors enters s'assignarien a cada ítem, però que per a la subcategoria s'assignaria el valor –nombre racional entre -2 i 2, no necessàriament enter– de la mitjana dels ítems que tenia associats.

A partir de les reflexions generades per la validació amb la prova pilot es va generar el qüestionari i els instruments d'anàlisi gairebé definitius, preparats per a ser sotmesos a una última validació amb l'expert.

Triangulació

Aquest expert va ser escollit en funció de les següents característiques:

- Que conegués bé el tipus de població a la qual es passaria el qüestionari (professors i estudiants de professor de primària i secundària).
- Que estigués familiaritzat amb la resolució de problemes com a objecte d'estudi específic.

Es va considerar que aquestes característiques eren presents a la persona a qui es va encomanar la tasca: un professor universitari de l'àrea de didàctica de les matemàtiques amb experiència en formació del professorat tant d'educació primària com secundària.

Se li van facilitar el qüestionari, els criteris organitzadors (categorització), la relació d'ítems associada a cada subcategoria i l'assignació de rangs provisional. L'aspecte principal sobre el qual se li va demanar que es pronunciés feia referència a l'assignació de rangs per a cada resposta concreta.

Les observacions realitzades per l'expert van ser les següents:

- Seria preferible que els rangs estiguessin compresos en l'interval [-3, 3], ja que d'aquesta manera l'assignació en les preguntes de resposta múltiple (que en tots els casos són 4 respostes) seria més homogènia: {-3, -1, 1, 3} enlloc de {-2,-1, 1, 2}.
- L'única pregunta oberta que es qualificarà numèricament serà la 1 (no la 1a, 1b ni el "Per què?" de la pregunta 6), ja que resulta imprecís, i en tot cas d'aquestes preguntes en farem un anàlisi qualitatiu més endavant. En aquesta pregunta (la 1), on es demana que s'escrigui què és un problema de matemàtiques per a l'enquestat, només es designarà +3 o -3 en el cas que en la definició apareguin certes paraules fent referència al que s'analitza en la subcategoria pertinent –paraules i subcategories que concretarem en el següent apartat.
- En la pregunta 3, on es demana que l'enquestat decideixi si unes activitats són problemes o no, finalment s'ha decidit triar, per a cada subcategoria analitzada, un

parell de problemes "contraris" que, segons si es trien o no, es qualificarà +1,5 o -1,5. També detallarem aquesta categorització més endavant.

A partir d'aquests consells es va modificar l'instrument d'anàlisi fins a obtenir l'assignació detallada de rangs definitiva. El qüestionari no va ser modificat.

Categorització

En l'elaboració del qüestionari hem tingut en compte dos aspectes: el fet de tenir prou preguntes per caracteritzar cada subcategoria, i que les respostes ens permetessin identificar el rang de la creença tipus corresponent. En els següents apartats detallem aquests aspectes.

	A1	A2	A3	A4	A5	B1	B2	B3	B4	B5	B6	C1	C2	C3	C4
1	X	X	X		X										
2a				X											
2b				X											
2c				X											
2d				X											
2e					X										
2f					X										
2g					X										
2h					X										
2i			X												
3.1	X														
3.2		X		X											
3.3	X				X										
3.4															
3.5			X	X	X										
3.6		X													
3.7															
3.8			X												
4						X									
5							X								
6								X							
7											X				
8.1						X									
8.2							X								
8.3							X				X				
8.4							X				X				
8.5a												X			
8.5b													X		
8.5c													X		
8.5d														X	
8.5e														X	
8.5f														X	
8.6a												X			
8.6b												X			
8.6c														X	
8.6d														X	
8.6e														X	
8.6f														X	
8.7a									X						
8.7b								X							
8.7c									X						
8.7d									X						
8.7e									X						
8.7f									X						
8.7g										X					
8.7h										X					
8.7i										X					
8.7j										X					
9a								X							
9b								X							

9c								X							
9d								X							
9e										X					
9f										X					
9g										X					
9h										X					
9i										X					
9j										X					
9k												X			
9l												X			
9m												X			
9n												X			
9o														X	
9p														X	
9q														X	
9r														X	
9s															X
9t															X
9u															X
9v															X

Taula 9. Relació entre les preguntes del qüestionari i les subcategories

Categorització amb detall: assignació de rangs a les preguntes

A1. Flux entorn – problemes escolars

1. Si haguessis d'explicar QUÈ ÉS UN PROBLEMA DE MATEMÀTIQUES a algú que no ho sap, com li explicaries perquè t'entengués fàcilment?

(-3) Fa referència explícita a la importància de que siguin situacions reals.
(3) No en fa referència.

3. De cadascun dels següents exemples digues si CREUS QUE PER A TU ÉS UN PROBLEMA DE MATEMÀTIQUES O NO (POSA UNA CREU)

1) En comprar un objecte has de pagar un percentatge d'impost i també et fan un altre percentatge de descompte. Amb quin ordre és millor que et facin els càlculs?

(-1,5) SÍ // (1,5) NO

3) Tenim dos quadrats iguals. Com cal retallar-los i enganxar-los per tal de construir un sol quadrat ?

(1,5) SÍ // (-1,5) NO

A2. Presència de referents matemàtics identificables a l'enunciat

1. Si haguessis d'explicar QUÈ ÉS UN PROBLEMA DE MATEMÀTIQUES a algú que no ho sap, com li explicaries perquè t'entengués fàcilment?

(-3) No fa referència explícita a la presència de referents matemàtics identificables a l'enunciat.
(3) Sí en fa referència explícita.

3. De cadascun dels següents exemples digues si CREUS QUE PER A TU ÉS UN PROBLEMA DE MATEMÀTIQUES O NO (POSA UNA CREU)

2) Què costa més barat: anar de Reus a Tarragona en moto o en autobús?

(-1,5) SÍ // (1,5) NO

6) Resol 3x – 2 = 16.

(1,5) SÍ // (-1,5) NO

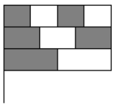
A3. Identificació "enunciat verbal" – problema

1. Si haguessis d'explicar QUÈ ÉS UN PROBLEMA DE MATEMÀTIQUES a algú que no ho sap, com li explicaries perquè t'entengués fàcilment?

(-3) No fa referència explícita a que sigui un enunciat verbal.

(+3) Sí en fa referència.

3. De cadascun dels següents exemples digues si CREUS QUE PER A TU ÉS UN PROBLEMA DE MATEMÀTIQUES O NO (POSA UNA CREU)

8)  *(-1,5) SÍ // (1,5) NO*

5) Si jo tinc 20 € i tu en tens 35, quants euros tens tu més que jo?

(1,5) SÍ // (-1,5) NO

2. Quina importància li dones a resoldre problemes de matemàtiques a classe on als enunciats els passi les coses que a continuació diem? (ENCERCLA EL NÚMERO QUE CONSIDERIS MÉS ADEQUAT: 1 poc important – 4 molt important)

i) L'enunciat no té cap paraula. *(3; 1,5; -1,5; -3)*

<u>A4. Precisió de l'enunciat</u>

3. De cadascun dels següents exemples digues si CREUS QUE PER A TU ÉS UN PROBLEMA DE MATEMÀTIQUES O NO (POSA UNA CREU).

2) En comprar un objecte has de pagar un percentatge d'impost i també et fan un altre percentatge de descompte. Amb quin ordre és millor que et facin els càlculs ?

(-1,5) SÍ // (1,5) NO

5) Si jo tinc 20 € i tu en tens 35, quants euros tens tu més que jo?

(1,5) SÍ // (-1,5) NO

2. Quina importància li dones a resoldre problemes de matemàtiques a classe on als enunciats els passi les coses que a continuació diem? (ENCERCLA EL NÚMERO QUE CONSIDERIS MÉS ADEQUAT: 1 poc important – 4 molt important)

a) A l'enunciat li falten dades que necessitem per a poder resoldre el problema. *(3; 1,5; -1,5; -3)*
b) A l'enunciat li sobren dades que no necessitem per a res. *(3; 1,5; -1,5; -3)*
c) L'enunciat és imprecís, no queda clar de què ens està parlant. *(3; 1,5; -1,5; -3)*
d) L'enunciat no té cap paraula o expressió que ens doni pistes sobre què cal fer per a resoldre'l. *(3; 1,5; -1,5; -3)*

<u>A5. Caràcter tancat del propòsit</u>

1. Si haguessis d'explicar QUÈ ÉS UN PROBLEMA DE MATEMÀTIQUES a algú que no ho sap, com li explicaries perquè t'entengués fàcilment ?

(-3) No fa referència explícita al caràcter tancat del propòsit.

(3) Sí en fa referència.

2. Quina importància li dones a resoldre problemes de matemàtiques a classe on als enunciats els passi les coses que a continuació diem? (ENCERCLA EL NÚMERO QUE CONSIDERIS MÉS ADEQUAT: 1 poc important – 4 molt important)

e) L'enunciat demana calcular un resultat numèric. *(-3; -1,5; 1,5; 3)*
f) L'enunciat demana construir una figura geomètrica. *(-3; -1,5; 1,5; 3)*
g) L'enunciat demana raonar sobre una propietat que no coneixíem. *(3; 1,5; -1,5; -3)*
h) L'enunciat demana treure algunes conclusions. *(3; 1,5; -1,5; -3)*

3. De cadascun dels següents exemples digues si CREUS QUE PER A TU ÉS UN PROBLEMA DE MATEMÀTIQUES O NO (POSA UNA CREU)

3) Tenim dos quadrats iguals. Com cal retallar-los i enganxar-los per tal de construir un sol quadrat ?
(-1,5) SÍ // (1,5) NO
5) Si jo tinc 20 € i tu en tens 35, quants euros tens tu més que jo?
(1,5) SÍ // (-1,5) NO

B1. Caràcter instrumental / investigatiu de l'activitat matemàtica

8. En cadascuna de les següents frases encercla un número de l'1 al 4 segons creguis convenient (1 poc - 4 sobretot).

1. Les matemàtiques serveixen per a...

a) saber un conjunt de regles i operacions. *(-3; -1,5; 1,5; 3)*
b) saber calcular i fer operacions. *(-3; -1,5; 1,5; 3)*
c) desenvolupar les nostres capacitats intel·lectuals. *(3; 1,5; -1,5; -3)*
d) poder enfrontar-se a situacions complicades de la realitat. *(3; 1,5; -1,5; -3)*
e) aplicar unes tècniques a la vida real. *(-3; -1,5; 1,5; 3)*

4. De les sis paraules que tens a continuació, quines d'elles RELACIONES MÉS AMB LES MATEMÀTIQUES?

(1) regles, *(1)* mètodes, *(-1)* imaginació, *(1)* exactitud, *(-1)* raonament, *(-1)* sentit comú

B2. Caràcter rutinari / creatiu de l'activitat matemàtica escolar

8. En cadascuna de les següents frases encercla un número de l'1 al 4 segons creguis convenient (1 poc - 4 sobretot).

2. Quan planteges una qüestió a classe de matemàtiques estàs esperant...

a) que algun alumne recordi la resposta correcta i respongui. *(-3; -1,5; 1,5; 3)*
b) que els alumnes discuteixin abans d'intentar donar una resposta. *(3; 1,5; -1,5; -3)*
c) veure quins alumnes han estudiat i treballat . *(-3; -1,5; 1,5; 3)*
d) que els alumnes reflexionin, pensin, perquè no estàs esperant que donin una resposta. *(3; 1,5; -1,5; -3)*

3. Les activitats que treballes a classe de matemàtiques són normalment...

a) explicacions. *(-3; -1,5; 1,5; 3)*
b) exercicis. *(-3; -1,5; 1,5; 3)*
c) problemes. *(3; 1,5; -1,5; -3)*
d) pràctica de les coses que s'expliquen. *(-3; -1,5; 1,5; 3)*
e) activitats repetitives. *(-3; -1,5; 1,5; 3)*
f) activitats de molta imaginació. *(3; 1,5; -1,5; -3)*

4. El que valores d'un alumne és que sigui capaç de...

a) efectuar càlculs. *(-3; -1,5; 1,5; 3)*
b) resoldre problemes. *(3; 1,5; -1,5; -3)*
c) aplicar regles i propietats. *(-3; -1,5; 1,5; 3)*
d) descobrir i inventar regles i propietats. *(3; 1,5; -1,5; -3)*
e) raonar i reflexionar. *(3; 1,5; -1,5; -3)*
f) entendre les explicacions. *(-3; -1,5; 1,5; 3)*

5. I d'aquestes altres sis paraules, quines RELACIONARIES MÉS AMB LES CLASSES DE MATEMÀTIQUES ? (POSA NOMÉS TRES CREUS)

(1) practicar, *(1)* memòria, *(-1)* pensar, *(1)* explicació, *(-1)* investigar, *(-1)* discussió

B3. Contextualització matemàtica de l'activitat de RP

6. En quin moment d'un tema proposes resoldre problemes? (POSA NOMÉS UNA CREU)

1. principalment en començar el tema *(-1)*
2. principalment ja acabant el tema *(3)*
3. en qualsevol moment del tema *(-3)*

8. En cadascuna de les següents frases encercla un número de l'1 al 4 segons creguis convenient (1 poc - 4 sobretot).

7. Quan els alumnes resolen problemes, dones importància a...

b) Utilitzar les coses que acabes d'explicar. *(-3; -1,5; 1,5; 3)*

9. En cadascuna de les següents frases digues si estàs molt d'acord (MA), d'acord (A), en desacord (D) o molt en desacord (MD) (ENCERCLA L'OPCIÓ QUE ESCULLIS)

a) Cal proposar els problemes en el moment en què s'està estudiant el que caldrà aplicar. *(3; 1,5; -1,5; -3)*
b) No té sentit posar problemes on calgui utilitzar coses que els alumnes encara no han après. *(3; 1,5; -1,5; -3)*
c) La raó principal per la que poses problemes és que els alumnes apliquin el que has explicat a classe. *(3; 1,5; -1,5; -3)*
d) La raó principal per la que poses problemes és comprovar si els alumnes van aprenent el que els expliques. *(3; 1,5; -1,5; -3)*

<u>B4. Èmfasi sobre el producte o el procés</u>

8. En cadascuna de les següents frases encercla un número de l'1 al 4 segons creguis convenient (1 poc - 4 sobretot).

7. Quan els alumnes resolen problemes, dones importància a...

a) Obtenir el resultat. *(-3; -1,5; 1,5; 3)*
c) Justificar tot el que s'ha fet. *(3; 1,5; -1,5; -3)*
d) Haver seguit el camí que pretenies que seguissin. *(-3; -1,5; 1,5; 3)*
e) En acabar, veure si hi havia altres camins. *(3; 1,5; -1,5; -3)*
f) Reflexionar sobre el que s'ha fet. *(3; 1,5; -1,5; -3)*

<u>B5. Caràcter lineal de l'activitat de resolució</u>

9. En cadascuna de les següents frases digues si estàs molt d'acord (MA), d'acord (A), en desacord (D) o molt en desacord (MD) (ENCERCLA L'OPCIÓ QUE ESCULLIS)

e) Els experts normalment resolen un problema de maneres molt diferents entre ells. *(-3; -1,5; 1,5; 3)*
f) Un bon alumne, un cop ha entès el que calia fer en un problema, normalment ja va avançant sense errors. *(3; 1,5; -1,5; -3)*
g) És bo que abans de començar a escriure, l'alumne intenti tenir el problema tot resolt al cap. *(3; 1,5; -1,5; -3)*
h) Els bons alumnes normalment no es queden bloquejats quan resolen un problema. *(3; 1,5; -1,5; -3)*
i) Els bons alumnes normalment necessiten poc temps per a resoldre un problema. *(3; 1,5; -1,5; -3)*
j) Si al cap d'un temps un alumne no ha resolt un problema, és millor que el deixi perquè ja no se'n sortirà sense ajuda. *(3; 1,5; -1,5; -3)*

8. En cadascuna de les següents frases encercla un número de l'1 al 4 segons creguis convenient (1 poc - 4 sobretot).

7. Quan els alumnes resolen problemes, dones importància a...

g) Anar per bon camí des del principi. *(-3; -1,5; 1,5; 3)*
h) Resoldre'l de cap abans d'escriure res. *(-3; -1,5; 1,5; 3)*
i) No quedar-se bloquejat en cap moment. *(-3; -1,5; 1,5; 3)*
j) Resoldre'l en poc temps. *(-3; -1,5; 1,5; 3)*

B6. Rellevància de la RP dins de l'activitat matemàtica

8. En cadascuna de les següents frases encercla un número de l'1 al 4 segons creguis convenient (1 poc - 4 sobretot).

3. Les activitats que treballes a classe de matemàtiques són normalment...

a) explicacions. *(-3; -1,5; 1,5; 3)*
b) exercicis. *(-3; -1,5; 1,5; 3)*
c) problemes. *(3; 1,5; -1,5; -3)*
d) pràctica de les coses que s'expliquen. *(-3; -1,5; 1,5; 3)*
e) activitats repetitives. *(-3; -1,5; 1,5; 3)*
f) activitats de molta imaginació. *(3; 1,5; -1,5; -3)*

4. El que valores d'un alumne és que sigui capaç de...

a) efectuar càlculs. *(-3; -1,5; 1,5; 3)*
b) resoldre problemes. *(3; 1,5; -1,5; -3)*
c) aplicar regles i propietats. *(-3; -1,5; 1,5; 3)*
d) descobrir i inventar regles i propietats. *(3; 1,5; -1,5; -3)*
e) raonar i reflexionar. *(3; 1,5; -1,5; -3)*
f) entendre les explicacions. *(-3; -1,5; 1,5; 3)*

7. Què consideres més important que els teus alumnes siguin capaços de fer?

1. que sigui capaç de resoldre un problema difícil *(-1,5) SÍ // (1,5) NO*
2. que sigui capaç d'efectuar molts càlculs en poc temps *(1,5) SÍ // (-1,5) NO*
3. que sigui capaç de mantenir una discussió sobre un problema amb el profe *(-1,5) SÍ // (1,5) NO*
4. que sigui capaç d'efectuar uns càlculs difícils mentalment *(1,5) SÍ // (-1,5) NO*

C1. Subsidiarietat de la RP a l'aprenentatge d'eines matemàtiques

8. En cadascuna de les següents frases encercla un número de l'1 al 4 segons creguis convenient (1 poc - 4 sobretot).

5. Per aprendre a resoldre problemes s'han d'aprendre...

a) moltes matemàtiques. *(-3; -1,5; 1,5; 3)*

6. Si un alumne no sap resoldre un problema de matemàtiques normalment és degut a que...

a) no sap prou matemàtiques. *(-3; -1,5; 1,5; 3)*
b) no ha entès prou bé les explicacions. *(-3; -1,5; 1,5; 3)*

9. En cadascuna de les següents frases digues si estàs molt d'acord (MA), d'acord (A), en desacord (D) o molt en desacord (MD) (ENCERCLA L'OPCIÓ QUE ESCULLIS)

k) Qui no sap resoldre problemes és perquè no sap prou matemàtiques. *(3; 1,5; -1,5; -3)*
l) Els experts en matemàtiques normalment troben fàcilment l'estratègia per resoldre qualsevol problema. *(3; 1,5; -1,5; -3)*
m) Si es domina un tema de matemàtiques, normalment se sap resoldre els problemes que fan referència a aquest tema. *(3; 1,5; -1,5; -3)*

n) Si un alumne no ha sabut resoldre un problema, ha d'estudiar més matemàtiques. *(3; 1,5; -1,5; -3)*

C2. Importància de l'aprenentatge d'estratègies

8. En cadascuna de les següents frases encercla un número de l'1 al 4 segons creguis convenient (1 poc - 4 sobretot).

5. Per aprendre a resoldre problemes s'han d'aprendre...

b) estratègies com per exemple fer esquemes, representacions,... *(3; 1,5; -1,5; -3)*

c) estratègies com per exemple provar amb casos més senzills, amb exemples... *(3; 1,5; -1,5; -3)*

C3. Importància de la millora en el control

8. En cadascuna de les següents frases encercla un número de l'1 al 4 segons creguis convenient (1 poc - 4 sobretot).

5. Per aprendre a resoldre problemes hem d'aprendre...

d) a ser intuïtius. *(3; 1,5; -1,5; -3)*

e) a utilitzar el sentit comú. *(3; 1,5; -1,5; -3)*

f) a dominar el nostre estat d'ànim. *(3; 1,5; -1,5; -3)*

6. Si un alumne no sap resoldre un problema de matemàtiques normalment és degut a que...

c) no té prou intuïció o sentit comú. *(3; 1,5; -1,5; -3)*

d) no està molt concentrat. *(3; 1,5; -1,5; -3)*

e) té por. *(3; 1,5; -1,5; -3)*

f) no ha tingut prou paciència. *(3; 1,5; -1,5; -3)*

9. En cadascuna de les següents frases digues si estàs molt d'acord (MA), d'acord (A), en desacord (D) o molt en desacord (MD) (ENCERCLA L'OPCIÓ QUE ESCULLIS)

o) És perfectament correcte utilitzar la intuïció per a resoldre problemes. *(-3; -1,5; 1,5; 3)*

p) Si es pot utilitzar una tècnica matemàtica «sèria», és millor això que resoldre un problema per «sentit comú». *(3; 1,5; -1,5; -3)*

q) Si els alumnes saben moltes matemàtiques, ja sabran quan i com han d'utilitzar-les. *(3; 1,5; -1,5; -3)*

r) Per a resoldre problemes és molt important la paciència i la perseverança. *(-3; -1,5; 1,5; 3)*

C4. Importància de la conversió dels problemes en no-problemes

9. En cadascuna de les següents frases digues si estàs molt d'acord (MA), d'acord (A), en desacord (D) o molt en desacord (MD) (ENCERCLA L'OPCIÓ QUE ESCULLIS)

s) No em sembla adequat donar mètodes per a resoldre cada tipus de problema. *(-3; -1,5; 1,5; 3)*

t) Els alumnes poden adquirir la capacitat de resoldre problemes sobretot observant com ho fa el professor de matemàtiques o altres persones a les quals els vagi bé les matemàtiques. *(3; 1,5; -1,5; -3)*

u) Si els alumnes han estat prou aplicats, sabran veure en els enunciats què és el que cal aplicar per a resoldre'ls. *(3; 1,5; -1,5; -3)*

v) És important que els alumnes llegeixin bé els enunciats per buscar-hi què és el que cal aplicar. *(3; 1,5; -1,5; -3)*

4.3.3. Disseny dels criteris organitzadors de la informació per al protocol de problemes

L'objectiu del protocol de Problemes és determinar els coneixements dels professors de primària i secundària a l'hora de desenvolupar la capacitat dels alumnes per a resoldre problemes. Per tal de portar a terme el disseny de l'instrument –tal com ja hem argumentat en el cas del qüestionari–, hem de tenir en compte què voldrem analitzar exactament: en aquest cas tenir clar quin coneixement volem analitzar (respecte tant al tema matemàtic com al tipus de coneixement) per tal que el nostre instrument ens permeti fer-ho correctament.

En quant al contingut matemàtic, vam decidir triar un tema d'entre els comuns dels currículums de matemàtiques de 6è i 1r d'ESO, ja que inicialment vam prendre'ls tots i la quantitat de problemes que havia de tenir el protocol era inviable per a les característiques de la recerca. Finalment vam triar el Càlcul, i vam dividir-lo en nombres enters (operacions i divisibilitat) i nombres racionals (fraccions, decimals i percentatges).

El marc a escollir respecte al tipus de coneixement del professor porta més controvèrsia (com hem vist al marc teòric en l'apartat del coneixement dels professors, n'hi ha molts de diferents). Després d'analitzar a fons antecedents de recerques similars, vam creure que l'estudi TEDS-M (Tatto et al., 2008) és el més semblant que s'ha fet al nostre, i ens vam basar en la seva categorització del coneixement per a crear-ne una de pròpia adaptada als objectius específics del present treball.

A partir d'ara, anomenarem en anglès (per tal de diferir el menys possible de les nostres fonts teòriques) el *coneixement matemàtic per ensenyar* (el coneixement que necessita un professor per a ensenyar matemàtiques): Mathematical Knowledge for Teaching (MKT).

Dominis del Mathematical Knowledge for Teaching

Igual que fa el TEDS-M, hem considerat que el MKT engloba dos constructes: el Mathematical Content Knowledge (MCK) i el Mathematics Pedagogical Content Knowledge (MPCK) (vegeu el marc teòric per consultar l'origen teòric d'aquests constructes). Adaptant els dominis utilitzats al TEDS al nostre cas (bàsicament eliminant algun domini que trobem innecessari, bé perquè hem tingut en compte que ens trobem en el marc de la resolució de problemes, o bé perquè considerem aquell domini inclòs en algun altre), hem dividit el MKT en els següents subdominis:

<u>MCK</u>

A. Conèixer

1. *Recordar:* Recordar definicions, terminologia, propietats,, notació, càlculs, procediments mecànics, ...
2. *Reconèixer:* Reconèixer objectes matemàtics o les seves propietats en un context matemàtic on no s'està habituat a utilitzar-los.

B. Raonar:

- *Analitzar:* Determinar les relacions entre variables o objectes en situacions matemàtiques; fer inferències a partir d'informació donada.

- *Integrar:* Combinar (diversos) procediments matemàtics per establir resultats, i combinar els resultats per a produir més resultats; fer connexions entre diferents elements de coneixement matemàtic.
- *Generalitzar:* Ampliar el domini al que el resultat del pensament matemàtic i la resolució de problemes s'aplica mitjançant la reformulació dels resultats en termes més generals.
- *Justificar:* Elaborar una justificació de la veritat o falsedat d'una declaració en funció dels resultats matemàtics o propietats.

<u>MPCK</u>

C. Curricular

1. Conèixer els continguts del currículum de matemàtiques.

D. Planificació

- Planificar problemes adequats al contingut matemàtic que es vol ensenyar.
- Adaptar problemes per a que siguin més fàcils / difícils per als estudiants.

E. Transformació

- Explicar o representar diferents enfocaments/procediments per a resoldre problemes matemàtics.
- Analitzar o avaluar les solucions dels estudiants.

F. Actuació (és l'equivalent a "contingency" del KQ de Rowling, però degut a les limitacions de la nostra recerca hem decidit no estudiar-lo)

4.3.4. Protocol de problemes

Per tal de no fer un protocol massa llarg i pesat per als professors, hem dividit el protocol en dos de més curts: el protocol 1 (P1), on hi ha els problemes relatius a nombres enters, i el protocol 2 (P2), on hi ha els relatius als nombres racionals.

Alguns problemes del protocol han estat íntegrament ideats per nosaltres, i en d'altres hem pres com a referència problemes de diversos estudis que mesuren coneixements (la majoria de professors de matemàtiques, però també n'hi ha que mesuren els coneixements dels alumnes sobre resolució de problemes). A continuació mostrem en quins ítems hem pres com a base altres estudis (posarem sense cursiva els que són exactament iguals, i en cursiva els que només ens han inspirat en la temàtica o en el tipus de qüestió):

- *Ítems del MKT (Hill et al., 2004) :* És el primer test que vam prendre com a base per a elaborar les primeres versions del protocol, i l'estudi que ha estat de referència per a nosaltres. Tot i això, les preguntes no eren específicament de resolució de problemes (raó per la qual molts dels ítems que analitzen contingut matemàtic finalment han estat elaborats a partir de les proves Cangur), i els ítems de Hill que analitzen el MPCK no ens han acabat de convèncer perquè eren tots tancats i creiem que per analitzar el contingut pedagògic és necessari posar alguns ítems oberts per tal que el professor no tingui "pistes" sobre com actuar en segons quins contextos educatius.
  -> P1.1a, *P1.2b, P1.5,* P2.2b, *P2.8*

- *TEDS-M alliberats de Primària i Secundària (Tatto et al., 2008):* Ens hem inspirat en aquesta prova sobretot pel que fa als ítems oberts que analitzen el MPCK (Mathematics Pedagogical Content Knowledge).
  -> *P1.1b, P1.3b, P1.6b, P2.1b, P2.3b, P2.5b.*
- *Problemes de les proves Cangur i l'Esprint (www.cangur.org):* Una bona part dels ítems que analitzen el MCK (Mathematics Content Knowledge) són problemes adaptats d'aquestes proves de resolució de problemes.
  -> P1.2a, P1.3a, P1.4, *P1.6a*, P1.7, P1.8, P2.1a, P2.3a, P2.4, P2.5a, P2.6, *P2.7*, P2.9.

Prova pilot

Realitzada la primera versió del protocol de problemes (que podem trobar en l'annex 4), vam decidir validar-la amb una prova pilot. Igual que en el cas del qüestionari de creences (les proves pilot d'ambdós instruments van ser realitzades simultàniament) la població van ser 20 estudiants del Màster de Secundària del curs 2009-1010, triats pel fet que representaven una part de la població que ens interessava i que hi teníem fàcil accés. La prova la van realitzar en les mateixes condicions en què es realitzarà la recollida de dades: vam demanar-los que fessin els dos protocols, sense mirar llibres ni consultar ningú, i utilitzant el temps que creguessin necessari. També vam suggerir que apuntessin qualsevol dificultat o comentari respecte les dificultats de comprensió (tant de redacció com de contingut matemàtic) dels ítems. En cas de no saber respondre a una pregunta, podien deixar-la en blanc, preferiblement explicant què era el que no entenien exactament.

Els objectius que perseguíem amb la prova pilot són els següents:

- Comprovar si l'enunciat dels ítems resultava prou clar.
- Identificar ítems redundants, massa difícils d'entendre matemàticament (si eren massa difícils per secundària encara ho serien més per primària) o incomplets.
- Validar l'instrument d'anàlisi: valorar si la relació entre els tipus de coneixement i els resultats de cada ítem era clara, i si realment donava informació sobre aquell coneixement.

En general, els ítems van resultar entenedors, a excepció dos que vam retocar lleugerament.

L'anàlisi dels ítems relatius al MCK també va resultar satisfactòria, ja que aquests eren fàcils d'avaluar (resposta tancada) i semblava que podien donar uns resultats interessants (no va haver cap pregunta que van fer tots bé ni cap pregunta que fessin tots malament).

El problema ens el vam trobar quan vam intentar analitzar els ítems relatius al MPCK. Resultaven relativament fàcils d'avaluar (ja que eren tots de resposta tancada) però les respostes eren gairebé totes molt semblants: el fet de donar opcions donava massa pistes sobre el que l'investigador "volia" que escollissin, i feia que les respostes no donessin massa informació sobre el nivell de coneixements pedagògics de l'enquestat. Es va decidir començar de zero pel que feia als ítems de contingut pedagògic, i fer-los gairebé tots (menys algun puntual que havia donat bons resultats) de resposta oberta. Per a crear els nous ítems, es va decidir que tots serien "segones parts" d'ítems que avaluaven MCK, per tal de relacionar d'una forma més directa els dos tipus de coneixements. Aquesta estructurava ser ideada prenent com a mostra l'estructura de l'instrument per mesurar MKT de l'estudi TEDS-M.

Un altre canvi que vam realitzar, tot i que es deu més a una reflexió posterior que als resultats obtinguts amb la prova pilot, és l'organització dels dos protocols en ítems relatius a nombres enters i ítems relatius a nombres racionals. La separació es va realitzar per tal de no tenir un protocol massa llarg (psicològicament per als professors pot ser més cansat) i no volíem separar-ho tampoc per tipus de coneixement (ja que fer totes les preguntes de contingut juntes podria resultar segons per a qui massa complicat, i fer totes les preguntes obertes juntes massa llarg / cansat). Així que una opció tan bona com una altra que complís aquests dos requisits és la triada finalment. També hem tingut en compte la dificultat i tipologia dels ítems a l'hora d'ordenar-los en cadascun dels protocols.

Aquests canvis ens van permetre obtenir el dos protocols de problemes definitius, que es troben en l'annex 5 del treball.

Categorització

En l'elaboració del qüestionari hem tingut en compte el fet de tenir prou problemes relatius a cada subdomini de coneixement i també a cada tema de contingut matemàtic. En els següents apartats mostrem amb més detall la categorització per a l'anàlisi del protocol.

	MCK						MPCK					
	Conèixer		Raonar				Curricular	Planificació		Transformació		
	Recordar	Reconèixer	Analitzar	Integrar	Generalitzar	Justificar	Conèixer continguts currículum	Planificar problemes adequats alcontingut	Adaptar problemes per variar dificultat	Explicar / representar diferents enfocaments	Analitzar / avaluar solucions dels estudiants	TOTAL
NOMBRES ENTERS												**8**
Operacions	8, 1a	8	7, 4	8	7			1b				**4**
Divisibilitat	3a		3a, 2a, 6a	2a, 6a	3a	5	2b		6b	3b		**4**
NOMBRES RACIONALS												**10**
Fraccions	6, 4, 1a, 3a, 2a	6, 4, 9, 3a	4	4, 9				2b	1b	3b		**6**
Decimals	10		5a					5b, 8			8	**3**
Percentatges	7										7	**1**
TOTAL	**10**	**5**	**7**	**5**	**2**	**1**	**1**	**4**	**2**	**2**	**2**	**18**

Taula 10. Relació entre els problemes del protocol, el contingut matemàtic i els dominis de coneixement

Categorització amb detall de cada problema

P1.1a

A. Conèixer

1. *Recordar:* Definicions i propietats de les operacions.

P1.1b

D. Planificació

1. Planificar problemes adequats al contingut matemàtic que es vol ensenyar (propietat).

P1.2a

B. Raonar:

1. *Analitzar:* Determinar la relació entre les dades del problema i el que ens demanen.
2. *Integrar:* Combinar diferents procediments matemàtics per establir el resultat (per exemple MCD i divisió, però es podria fer diferent).

P1.2b

C. Curricular

1. Conèixer el currículum de matemàtiques (divisibilitat).

P1.3a

A. Conèixer

1. Recordar: Definició i propietats dels múltiples.

B. Raonar:

1. Analitzar: Determinar la relació entre els nombres ratllats dues vegades.
3. Generalitzar: Ampliar les relacions trobades a un nombre qualsevol molt més gran.

P1.3b

E. Transformació

1. Explicar o representar diferents enfocaments/procediments per a resoldre problemes matemàtics (gràfic).

P1.4

B. Raonar:

1. Analitzar: Determinar la relació entre les dades que ens donen i la que demanen.

P1.5

B. Raonar:

4. Justificar: Identificar si les afirmacions són certes i si porten a la demostració de la regla.

P1.6a

B. Raonar:

1. *Analitzar:* Determinar el tipus de problema i el camí a seguir segons les dades que ens donen.
2. *Integrar:* Combinar el coneixement sobre fraccions i sobre divisibilitat per arribar a la conclusió que té una única solució.

P1.6b

D. Planificació

2. Adaptar problemes per a que siguin més fàcils / difícils per als estudiants (divisibilitat, resolució mitjançant estudi de casos).

P1.7

B. Raonar:

1. Analitzar: Determinar la relació entre els nombres i la fila que ocupen.
3. Generalitzar: Ampliar les relacions trobades amb els nombres de la figura a un nombre qualsevol molt més gran.

P1.8

A. Conèixer:

1. Recordar: Potències parells són positives. La divisió de dos nombres iguals és 1.
2. Reconèixer: x - y = 0 és una equació de solució x = -y ≠ 0.

B. Raonar:

2. Integrar: Combinar els coneixements anteriors per a arribar al resultat.

<u>P2.1a</u>

A. Conèixer

1. Recordar: Representació gràfica de fraccions.

<u>P2.1b</u>

D. Planificació: Adaptar problemes per a que siguin més fàcils / difícils per als estudiants (representació gràfica de fraccions).

<u>P2.2a</u>

A. Conèixer

1. Recordar: Operar amb fraccions analíticament.

<u>P2.2b</u>

D. Planificació

1. Planificar problemes adequats al contingut matemàtic que es vol ensenyar (operació).

<u>P2.3a</u>

A. Conèixer

1. Recordar: Operar amb fraccions, analíticament i/o gràficament.
2. Reconèixer: Reconèixer que s'han d'usar fraccions per a resoldre el problema.

B. Raonar:

1. Analitzar: Establir la relació entre la quantitat de suc de taronja i la quantitat d'aigua.

<u>P2.3b</u>

E. Transformació

1. Explicar o representar diferents enfocaments/procediments per a resoldre problemes matemàtics (gràfic).

<u>P2.4</u>

A. Conèixer:

1. Recordar: Propietats de les fraccions. Representació de fraccions en la recta numèrica.
2. Reconèixer: Interpretar el gràfic donat com una porció de recta numèrica que no comença pel 0.

B. Raonar:

1. Analitzar: Determinar la relació entre el gràfic donat, el valor de les fraccions que ens donen i la que ens demanen.
2. Integrar: Combinar els coneixements sobre fraccions amb la interpretació del gràfic per trobar el camí cap a la solució.

<u>P2.5a</u>

B. Raonar:

1. *Analitzar:* Trobar la relació entre les variables del problema, tenir en compte que la solució només pot tenir 2 decimals.

<u>P2.5b</u>

D. Planificació

1. Planificar problemes adequats al contingut matemàtic que es vol ensenyar (context real determinant).

P2.6

A. Conèixer:

1. Recordar: -/-=+, si |n|<|m| aleshores |n/m|< 1, terminologia.
2. Reconèixer: En nombres negatius, el que és més gran té el valor absolut més petit.

P2.7

A. Conèixer

1. Recordar: Treballar amb percentatges.

E. Transformació

2. Analitzar o avaluar les solucions dels estudiants.

P2.8

D. Planificació

1. Planificar problemes adequats al contingut matemàtic que es vol ensenyar (ordenació de decimals).

E. Transformació

2. Analitzar / avaluar solucions dels estudiants

Format dels ítems

Prenent com a referència els ítems alliberats del TEDS-M 2008, hem creat alguns ítems de resposta tancada i oberta. Per a decidir quin tipus format triar ens hem fixat amb el domini de coneixement a analitzar:

- MCK: Hem utilitzat ítems d'opció múltiple (resposta tancada), perquè són més fàcils d'analitzar i perquè la seva correcció és més objectiva (ja que es tracta de coneixement del contingut matemàtic).
- MPCK: Hem utilitzat ítems de resposta oberta (però guiada), ja que el coneixement pedagògic és més subjectiu i complex, i amb respostes tancades podria donar uns resultats poc fiables perquè sense voler donaríem pistes. Tot i així, tenim el handicap de la dificultat a l'hora d'analitzar-los. Hem creat un sistema amb diferents opcions: *a* = correcte, *0* = ho deixa en blanc, i *b, c*... són possibles opcions incorrectes o semi-incorrectes, les quals possiblement anirem modificant durant l'anàlisi de dades.

4.4. Recollida de les dades

La recollida de dades ha estat realitzada durant l'any 2011, en diferents moments i maneres segons les mostres.

Les mostres d'estudiants de professor de secundària han estat preses d'un grup classe de la Universitat Autònoma de Barcelona: els estudiants del Màster de Secundària de la promoció 2010-2011. En canvi, les mostres de professor de primària van estar preses el curs següent, 2011-2012, en un grup classe de la mateixa universitat del 3r curs d'Educació Primària (curs en el qual ja han cursat totes les assignatures de matemàtiques i de la seva didàctica de la carrera).

Les mostres de professors han estat preses d'una forma més heterogènia, havent-hi professors de diferents centres de tot Catalunya, que han accedit a omplir els protocols i el qüestionari de forma voluntària entre els cursos 2010-2011 i 2011-2012.

En tots els casos se'ls ha deixat un temps il·limitat per a realitzar el qüestionari i els protocols, puntualitzant que, per a fer els protocols, no es podien ajudar de cap recurs material (llibres de matemàtiques) ni demanar ajuda.

4.5. Anàlisi de dades

En aquest apartat explicarem els mètodes utilitzats a l'hora d'analitzar les dades obtingudes mitjançant el qüestionari de creences i el protocol de problemes. Aquesta anàlisi té com a finalitat caracteritzar i comparar els coneixements i les creences de les quatre mostres sobre la Resolució de Problemes, i per a fer-ho realitzarem primer una aproximació quantitativa de les dades, per després aprofundir en alguns dels aspectes mitjançant una mirada qualitativa.

L'anàlisi l'hem dividida en sis fases: en les dues primeres analitzem quantitativa i qualitativament el qüestionari de creences, en la tercera i quarta fem una anàlisi anàloga del protocol de problemes, en la cinquena fase pretenem establir relacions entre les creences i els coneixements de les mostres, i en la sisena i última fem una anàlisi de casos, tot prenent un prototipus de cada mostra per a poder aprofundir en aspectes qualitatius que l'anàlisi amb tota la mostra no ens ha permès.

En el cas del qüestionari de creences, en una primera anàlisi el tractament de les dades serà bàsicament quantitatiu: farem un buidat de les dades de les preguntes de resposta tancada i les analitzarem mitjançant l'instrument descrit en l'apartat 4.3. Aquesta primera fase ens donarà un estat general en relació a les respostes de les quatre mostres. Posteriorment, farem una aproximació mixta quantitativa-qualitativa de les dades obtingudes amb les preguntes de resposta oberta.

L'anàlisi de les dades del protocol de problemes, igual que la del qüestionari, constarà de dues fases diferenciades: la primera, amb l'objectiu de donar una visió general dels resultats, serà de caire essencialment quantitatiu, mentre que la segona, de caire més qualitatiu, ens permetrà realitzar una mirada especifica a les dades que més ens interessin; concretament a aquelles qüestions de resposta oberta que trobem més interessants.

A continuació exposem amb detall com es realitzaran les anàlisis de les dades en cadascuna de les sis fases descrites anteriorment.

4.5.1. Anàlisi quantitativa del qüestionari de creences

L'anàlisi quantitativa del qüestionari consta de dos parts: en la primera volem *caracteritzar* cadascuna de les quatre mostres en relació a les seves creences, i en la segona volem *comparar* les creences entre les quatre mostres (primer dos a dos i després en general). En l'anàlisi de la primera i la segona part hem utilitzat mètodes diferents, ja que els objectius i el que volem remarcar és diferent.

Caracterització de cadascuna de les mostres

Per tal de descriure les mostres, hem decidit classificar els diferents ítems de cada mostra per dos criteris: la concentració de les dades i la posició.

Pel que fa a la concentració de les dades, considerarem (IT=Q3-Q1, interval interquartílic):

- $0 \leq IT < 0,5$ Molt concentrades
- $0,5 \leq IT \leq 1$ Bastant concentrades
- $1 < IT \leq 6$ Disperses

Pel que fa a la posició, fixant-nos en la mitjana de cada ítem considerarem:

- $-3 \leq \mu < -1,5$ Posició clarament definida (-)
- $-1,5 \leq \mu \leq -0,5$ Posició definida (-)
- $-0,5 < \mu < 0,5$ Posició no definida (possible lleugera tendència)
- $0,5 \leq \mu \leq 1,5$ Posició definida (+)
- $1,5 < \mu \leq 3$ Posició clarament definida (+)

Finalment, amb aquests criteris i per a cadascuna de les mostres, omplirem dues taules d'aquest tipus:

Dades molt concentrades	Dades bastant concentrades	Dades disperses

Taula 11. Concentració de les dades sobre creences de la mostra x

$-3 \leq \mu < -1,5$	$-1,5 \leq \mu \leq -0,5$	$-0,5 < \mu < 0,5$	$0,5 \leq \mu \leq 1,5$	$1,5 < \mu \leq 3$

Taula 12. Posicionament sobre creences de la mostra x

Comparacions entre les mostres

Per tal de comparar les creences de les mostres, el mètode que ens sembla que respon més a la realitat és el que té en compte els quartils -enlloc de les mitjanes i la dispersió, com hem fet a l'hora de definir les mostres. La forma triada, en comparació amb d'altres, dóna més importància a les diferències i semblances en forma relativa i no absoluta.

D'acord amb les dades obtingudes en relació als quartils de cada ítem, explicitem les semblances i diferències entre cada parell de mostres. Per això, ens fixarem en cadascuna de les categories de creences (A, B, C), i notarem aquells ítems que són semblants, aquells que són diferents, i aquells dels quals no podem afirmar ni una cosa ni l'altra, tot segons el criteri de descrivim a continuació.

Considerarem *semblants* aquells ítems on la diferència entre els seus primers quartils i la diferència entre els seus tercers quartils sigui menor o igual a 0,5. És a dir: $|\mathit{Q1}\text{-}Q1|\leq 0,5$ i $|\mathit{Q3}\text{-}Q3|\leq 0,5$

Considerarem *diferents* aquells ítems que tenen intervals interquartílics (oberts) amb intersecció buida. És a dir: $(Q1, Q3) \cap (\mathit{Q1}, \mathit{Q3}) = \emptyset$

Tanmateix, pot haver-hi alguns ítems que, tot i ser indecidibles, trobem interessant destacar, perquè estan a prop de poder-se considerar semblants o diferents. Afortunadament això succeeix en molts pocs casos. Així mateix, pot aparèixer el cas extrem de que un ítem pugui ser semblant i diferent alhora perquè les dues caixes estan concentrades en un interval de 0,5 punts encara que no s'intersequeixen; en aquest cas els qualificarem de semblants perquè estan molt a prop.

L'ús d'aquest mètode d'anàlisi ens dóna com a resultat, per a cada parell de mostres, una taula del següent tipus:

	A. Creences sobre l'objecte *problema de matemàtiques*	B. Creences sobre la naturalesa de l'activitat de RP	C. Creences sobre el procés d'ensenyament-aprenentatge de la RP
Semblants			
Diferents			
No podem afirmar res			

Taula 13. Semblances i diferències sobre creences entre les mostres x i y

I, en la comparació general de les quatre mostres alhora, obtenim una taula com la següent (on observem en verd les semblances, en vermell les diferències, i on no queden plasmats els ítems indecidibles):

	A: est. Sec.	**B: prof. Sec.**	**C: est. Prim.**	**D: prof. Prim.**
A: est. Sec.		Semblances	Semblances	Semblances
B: prof. Sec.	Diferències		Semblances	Semblances
C: est. Prim.	Diferències	Diferències		Semblances
D: prof. Prim.	Diferències	Diferències	Diferències	

Taula 14. Comparació general de les creences de les quatre mostres

A partir dels resultats obtinguts en la taula anterior, farem una classificació de les creences tipus segons siguin comuns a les quatre mostres o no, i aquestes últimes, intentarem classificar-les segons quins aspectes determinen la diferència d'opinió.

4.5.2. Anàlisi qualitativa del qüestionari de creences

Després d'obtenir un estat general en relació a les creences de les quatre mostres mitjançant les preguntes del qüestionari de resposta tancada, volem fer una aproximació mixta quantitativa-qualitativa a les dades obtingudes per les preguntes de resposta oberta. Concretament, ens centrarem en la definició de problema que ens donen, i en els exemples que posen de problema i d'exercici.

En quant a la *definició de problema*, en general tots els individus estan d'acord en que és una *situació per a resoldre*, però donen diferents matisos en quant al tipus de situació i en quant a què cal aplicar per a resoldre-la. Segons aquests dos criteris, ens trobem individus que inclouen en la seva definició de problema:

- Tipus de situació

    - Context real
    - Nova, sense camí directe per a resoldre-la, que no sabem resoldre.
- La resolem aplicant:
    - Coneixements / procediments
    - Heurístiques / raonaments

En quant a la *formulació de problemes i d'exercicis*, ens centrarem en el contingut matemàtic d'aquests i en el tipus de context utilitzat:

- Contingut
    - Numeració i càlcul (dins d'aquest notarem si és un problema aritmètic o no)
    - Canvi i relacions
    - Espai i forma
    - Estadística i atzar
- Context
    - Real
    - Matemàtic

Després d'una primera aproximació quantitativa a les dades segons els criteris descrits anteriorment, en farem una mirada qualitativa tot exemplificant els resultats que siguin més interessants i concloents.

4.5.3. Anàlisi quantitativa del protocol de problemes

L'anàlisi quantitativa del protocol és anàloga a la del qüestionari, i com aquesta consta de dues parts: en la primera volem *caracteritzar* cadascuna de les quatre mostres en relació als seus coneixements, i en la segona volem *comparar* el nivell de coneixements de les quatre mostres (primer dos a dos i després en general). En l'anàlisi de la primera i la segona part hem utilitzat mètodes diferents, ja que els objectius i el que volem remarcar és diferent.

Caracterització de cadascuna de les mostres

Per tal de descriure les mostres, hem decidit classificar els diferents tipus de coneixement de cada mostra per dos criteris: la concentració de les dades i la posició.

Pel que fa a la concentració de les dades, considerarem:

- $0 \le IT < 0,5$ Molt concentrades
- $0,5 \le IT \le 1$ Bastant concentrades
- $1 < IT \le 6$ Disperses

Pel que fa a la posició, fixant-nos en la mitjana de cada tipus de coneixement considerarem:

- [2, 3] Nivell molt alt
- [1, 2) Nivell alt
- [0, 1) Nivell just
- [-1, 0) Nivell baix
- [-2, -1) Nivell molt baix

- [-3, -2) Nivell nul

Finalment, amb aquests criteris i per a cadascuna de les mostres, omplirem dues taules d'aquest tipus:

Dades molt concentrades	Dades bastant concentrades	Dades disperses

Taula 15. Concentració de les dades sobre coneixements de la mostra x

[-3, -2)	[-2, -1)	[-1, 0)	[0, 1)	[1, 2)	[2, 3]

Taula 16. Nivell de coneixements de la mostra x

Comparacions entre les mostres

Per tal de comparar els coneixements de les mostres, igual que en el cas de les creence, el mètode que ens sembla que reflexa millor la realitat és el que té en compte els quartils -enlloc de les mitjanes i la dispersió, com hem fet a l'hora de definir les mostres.

D'acord amb les dades obtingudes en relació als quartils de cada tipus de coneixement, explicitem les semblances i diferències entre cada parell de mostres segons el criteri de descrivim a continuació.

Considerarem *semblants* aquells coneixements on la diferència entre els seus primers quartils i la diferència entre els seus tercers quartils sigui menor o igual a 0,5. És a dir: $|\mathit{Q1}-Q1| \leq 0{,}5$ i $|\mathit{Q3}-Q3| \leq 0{,}5$

Considerarem *diferents* aquells coneixements que tenen intervals interquartílics (oberts) amb intersecció buida. És a dir: $(Q1, Q3) \cap (\mathit{Q1}, \mathit{Q3}) = \emptyset$

L'ús d'aquest mètode d'anàlisi ens dóna com a resultat, per a cada parell de mostres, una taula del següent tipus:

Semblants	
Diferents	
No podem afirmar res	

Taula 17. Semblances i diferències sobre coneixements de les mostres x i y

I, en la comparació general de les quatre mostres alhora, obtenim una taula com la obtinguda en l'anàlisi de les creences (on observem en verd les semblances, en vermell les diferències, i on no queden plasmats els ítems indecidibles):

	A: est. Sec.	B: prof. Sec.	C: est. Prim.	D: prof. Prim.
A: est. Sec.		semblances	Semblances	Semblances
B: prof. Sec.	diferències		Semblances	Semblances
C: est. Prim.	diferències	diferències		Semblances
D: prof. Prim.	diferències	diferències	Diferències	

Taula 18. Comparació general dels coneixements de les quatre mostres

A partir dels resultats obtinguts en la taula anterior, analitzarem a fons en quins tipus de coneixements són semblants totes les mostres i en quins són diferents; i en aquest últim cas intentarem establir quins aspectes determinen la diferència de nivells.

4.5.4. Anàlisi qualitativa del protocol de problemes

Per tal d'analitzar més a fons aspectes concrets de les dades que ens hagin pogut passar per alt en l'anàlisi quantitativa del protocol, hem triat les qüestions obertes dels protocols que ens semblaven més interessants i hem fet una anàlisi quantitativa-qualitativa dels resultats obtinguts per les quatre mostres.
En tots els casos, hem començat per enunciar la qüestió oberta i fer algun aclariment si calia. A continuació, hem fet una anàlisi quantitativa del nombre d'individus que ha respost i d'aquells que ho han fet correctament, que ens ha donat una taula com la següent:

	Fan el problema	Correctament	Incorrectament
Mostra A	%	%	%
Mostra B	%	%	%
Mostra C	%	%	%
Mostra D	%	%	%

Taula 19. Respostes de la qüestió oberta x

Finalment, hem analitzat quantitativa i/o qualitativament diferents aspectes (segons la qüestió) sobre els problemes obtinguts a les respostes de la mostra, aspectes com els contextos utilitzats, la manera de simplificar problemes, o els tipus d'error més comuns.

4.5.5. Relació entre creences i coneixements

Després d'haver analitzat a fons, però per separat, les creences i els coneixements de les quatre mostres, ens plantejarem si hi ha alguna relació entre aquestes dues característiques. Difícilment podrem dir que totes les creences sobre resolució de problemes depenguin dels coneixements que es tenen, ni a l'inrevés, però potser sí que podrem trobar una certa relació entre algunes creences concretes i alguns tipus de coneixement sobre RP. Per a fer-ho, ens basarem en les relacions establertes separadament en creences i en coneixements sobre els aspectes que determinen les diferències entre mostres (experiència docent i etapa educativa).

4.5.6. Estudi de casos: els quatre prototipus

Després d'analitzar tant quantitativament com qualitativa les creences i els coneixements de les quatre mostres, volem fer un estudi més aprofundit de casos reals. Amb aquest objectiu, determinarem un prototipus per a cada mostra, entenent prototipus com aquells subjectes reals que més s'acosten a la mitjana de la mostra. Així doncs, per a cadascun dels quatre prototipus triats pretenem descriure les característiques del conjunt de les seves respostes – tant de coneixements com de creences i tant de les preguntes obertes com tancades– i comparar els resultats dels prototipus entre sí.

5. Anàlisi de dades i resultats

En aquest capítol procedim a analitzar les dades de les quatre mostres i exposar els resultats obtinguts mitjançant els dos instruments. Aquesta anàlisi té com a finalitat caracteritzar i comparar els coneixements i les creences de les quatre mostres sobre la Resolució de Problemes, i per a fer-ho fem primer una aproximació quantitativa de les dades, per després aprofundir en alguns dels aspectes mitjançant una mirada qualitativa.

El capítol l'hem dividit en sis apartats: en el dos primers exposem les anàlisis quantitativa i qualitativa del qüestionari de creences, en el tercer i quart les corresponents anàlisis quantitativa i qualitativa del protocol de problemes, en el cinquè pretenem establir quina relació hi ha entre les creences i els coneixements de les diferents mostres, i en el sisè realitzem un estudi de casos amb quatre *prototipus* (un de cada mostra).

En el cas del qüestionari de creences, en una primera anàlisi el tractament de les dades serà bàsicament quantitatiu: farem un buidat de les dades de les preguntes de resposta tancada i les analitzarem mitjançant l'instrument descrit en el capítol de Metodologia. Aquesta primera fase ens donarà un estat general en relació a les respostes de les quatre mostres. Posteriorment, farem una aproximació mixta quantitativa-qualitativa a les dades obtingudes mitjançant les preguntes de resposta oberta. L'esquema serà el següent:

- Anàlisi quantitativa del qüestionari de creences
    - Caracterització de cadascuna de les mostres
    - Comparacions entre les mostres dos a dos
    - Comparació general de les creences de les quatre mostres
- Anàlisi qualitativa del qüestionari de creences

L'anàlisi de les dades del protocol de problemes, igual que la del qüestionari, constarà de dues fases diferenciades: la primera, amb l'objectiu de donar una visió general dels resultats, serà de caire essencialment quantitatiu, mentre que la segona, de caire més qualitatiu, ens permetrà realitzar una mirada específica a les dades que més ens interessin. L'esquema de l'anàlisi el resumim a continuació:

- Anàlisi quantitativa del protocol de problemes
    - Caracterització de cadascuna de les mostres
    - Comparacions entre les mostres dos a dos
    - Comparació general dels coneixements de les quatre mostres
    - Nivell de coneixement per als diferents continguts analitzats
- Anàlisi qualitativa del protocol de problemes

Després d'haver analitzat a fons, però per separat, les creences i els coneixements de les quatre mostres, ens plantejarem si hi ha alguna relació entre aquestes dues característiques.

Finalment, per tal de poder fixar-nos en aspectes concrets que l'estudi general de les mostres no ens hagi pogut permetre, farem un estudi més aprofundit de casos reals. Amb aquest objectiu, determinarem *prototipus* de cada mostra, entenent prototipus com aquells subjectes reals que més s'acostin a la mitjana de la mostra,i per a cadascun dels quatre prototipus triats descriurem les característiques del conjunt de les seves respostes i les compararem entre sí.

5.1. Anàlisi quantitativa del qüestionari de creences

Començarem l'anàlisi quantitativa de les creences caracteritzant les quatre mostres en relació a la seva posició respecte a cada creença-tipus i també segons la concentració de les dades. Posteriorment, compararem els resultats obtinguts per les mostres dos a dos, tot definint per a quins ítems aquests resultats són semblants o diferents. Finalment, farem una síntesi de les semblances i diferències de creences que hi ha entre les quatre mostres, i intentarem trobar relacions entre l'etapa educativa o l'experiència docent de les mostres i les creences-tipus que tenen sobre resolució de problemes.

5.1.1. Caracterització de cadascuna de les mostres

En aquest apartat explicarem les informacions més rellevants que podem extreure del gràfic de cada mostra pel que fa a cadascun dels ítems en relació amb la concentració/dispersió de les dades (això ens ho mostrarà l'interval interquartílic IT=Q3-Q1) i en relació a la seva posició.

Posteriorment, analitzarem com queden classificats els diferents ítems per a cadascun dels dos criteris: la concentració de les dades i la posició.

Pel que fa a la concentració de les dades, considerarem:

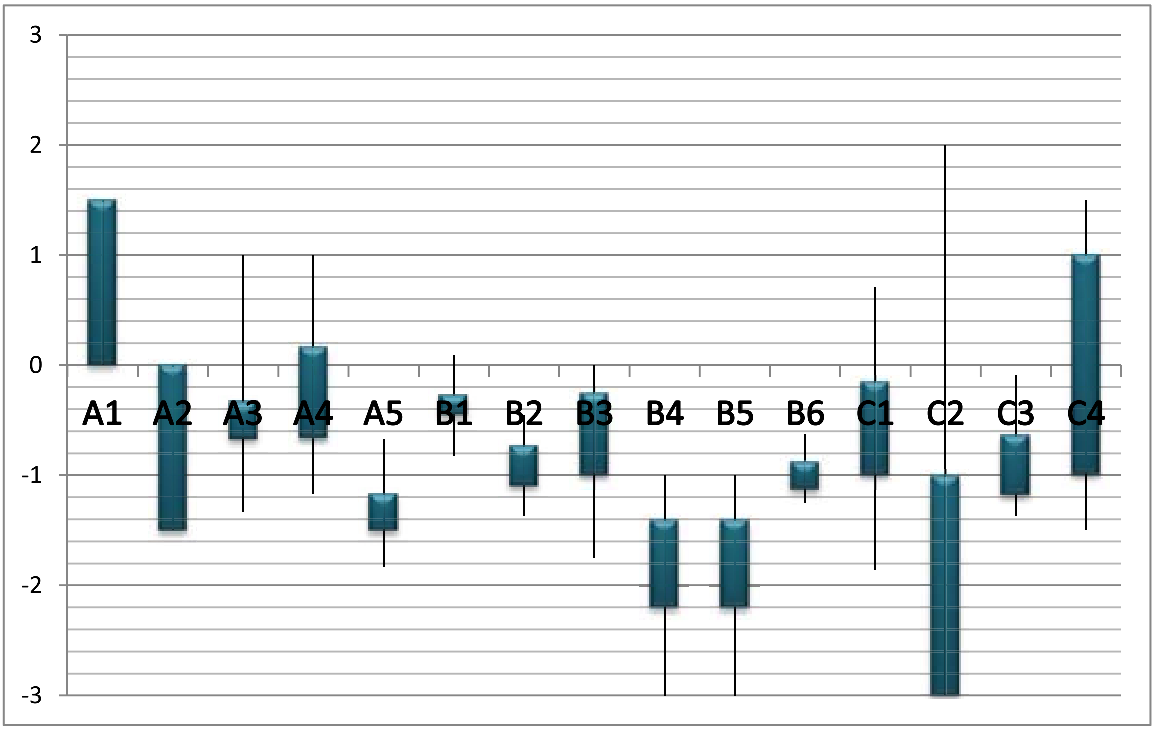
- $0 \le IT < 0{,}5$ Molt concentrades
- $0{,}5 \le IT \le 1$ Bastant concentrades
- $1 < IT \le 6$ Disperses

Pel que fa a la posició, fixant-nos en la mitjana de cada ítem considerarem:

- $-3 \le \mu < -1{,}5$ Posició clarament definida (-)
- $-1{,}5 \le \mu \le -0{,}5$ Posició definida (-)
- $-0{,}5 < \mu < 0{,}5$ Posició no definida (possible lleugera tendència)
- $0{,}5 \le \mu \le 1{,}5$ Posició definida (+)
- $1{,}5 < \mu \le 3$ Posició clarament definida (+)

MOSTRA A: Estudiants de professor de secundària

Estudiarem, en primer lloc, els resultats corresponents als estudiants de professor de secundària. Presentarem el diagrama de barres obtingut a partir dels resultats, així com les mitjanes de cada ítem. Posteriorment, farem una explicació de les creences de la mostra per a cadascun dels ítems.



Il·lustració 3. Creences dels estudiants de professor de secundària

A1	A2	A3	A4	A5	B1	B2	B3	B4	B5	B6	C1	C2	C3	C4
0,46	-0,63	-0,46	-0,19	-1,28	-0,4	-0,91	-0,62	-1,95	-1,76	-0,97	-0,6	-1,77	-0,78	-0,04

Taula 20. Mitjanes de creences de la mostra A

D. CREENCES SOBRE L'OBJECTE *PROBLEMA DE MATEMÀTIQUES*

1) Flux *entorn -> problema escolar*

Les dades són disperses. Malgrat el posicionament poc definit, hi ha una lleugera tendència a no donar importància a que els problemes treballats a classe siguin situacions reals de l'entorn.

2) Presència de referents matemàtics identificables a l'enunciat

Les dades són disperses. Hi ha la posició definida de no creure que la presència de referents matemàtics sigui un aspecte molt determinant.

3) Identificació "enunciat verbal" – problema

Les dades estan molt concentrades, i no hi ha una posició definida; sí una lleugera tendència a no identificar enunciat verbal amb problema.

4) Precisió de l'enunciat

Les dades estan bastant concentrades però no hi ha un posicionament determinat en quant a si els enunciats han de ser o no precisos.

5) Caràcter tancat del propòsit

Les dades estan molt concentrades, i hi ha la posició definida de creure que els propòsits dels problemes poden ser tant oberts com tancats.

E. CREENCES SOBRE LA NATURALESA DE L'ACTIVITAT DE RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

1) Caràcter instrumental / investigatiu de l'activitat matemàtica

Les dades estan molt concentrades. Hi ha una postura poc definida però amb una lleugera tendència a donar un caràcter investigatiu a les matemàtiques.

2) Caràcter rutinari / creatiu de l'activitat matemàtica escolar

Les dades estan molt concentrades. Hi ha un posicionament definit cap a unes classes de matemàtiques més creatives i participatives en contraposició a les rutinàries.

3) Contextualització matemàtica de l'activitat de RP

Les dades estan bastant concentrades. Hi ha un posicionament definit en creure que l'activitat de resolució de problemes pot estar descontextualitzada matemàticament (no cal treballar els problemes sempre en relació al tema que s'està treballant).

4) Èmfasi sobre el producte o el procés

Les dades estan bastant concentrades. Hi ha un clar posicionament en quant a que en la resolució de problemes és tan important el procés com el producte.

5) Caràcter lineal de l'activitat de resolució de problemes

Les dades estan bastant concentrades. Hi ha un clar posicionament en pensar que hi ha moltes maneres de resoldre un problema i que el procés està ple d'entrebancs.

6) Rellevància de la RP dins de l'activitat matemàtica

Les dades estan molt concentrades. Hi ha un posicionament definit en considerar la resolució de problemes un dels aspectes més rellevants de l'educació matemàtica.

F. CREENCES SOBRE EL PROCÉS D'ENSENYAMENT-APRENENTATGE DE LA RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

1) Subsidiarietat de la RP a l'aprenentatge d'eines matemàtiques

Les dades estan bastant concentrades. Hi ha un posicionament definit a creure que aprendre coneixements de matemàtiques només ajuda a l'èxit en resolució de problemes, però no el garanteix.

2) Importància de l'aprenentatge d'estratègies

Les dades són molt disperses; tot i així, hi ha un clar posicionament a creure que les estratègies ajuden.

3) Importància de la millora del control

Les dades estan bastant concentrades. Hi ha un posicionament definit a l'hora de donar importància al control cognitiu i dels estats d'ànim a l'hora de resoldre problemes.

4) Importància de la conversió dels problemes en no-problemes

Les dades són molt disperses i no hi ha cap posició definida sobre si s'han de mecanitzar o no els processos de resolució de problemes.

En síntesi, si classifiquem els diferents ítems segons la concentració de les dades i el posicionament de la mostra tenim les següents taules:

Dades molt concentrades	Dades bastant concentrades	Dades disperses
A3, A5, B1, B2, B6	A4, B3, B4, B5, C1, C3	A1, A2, C2, C4

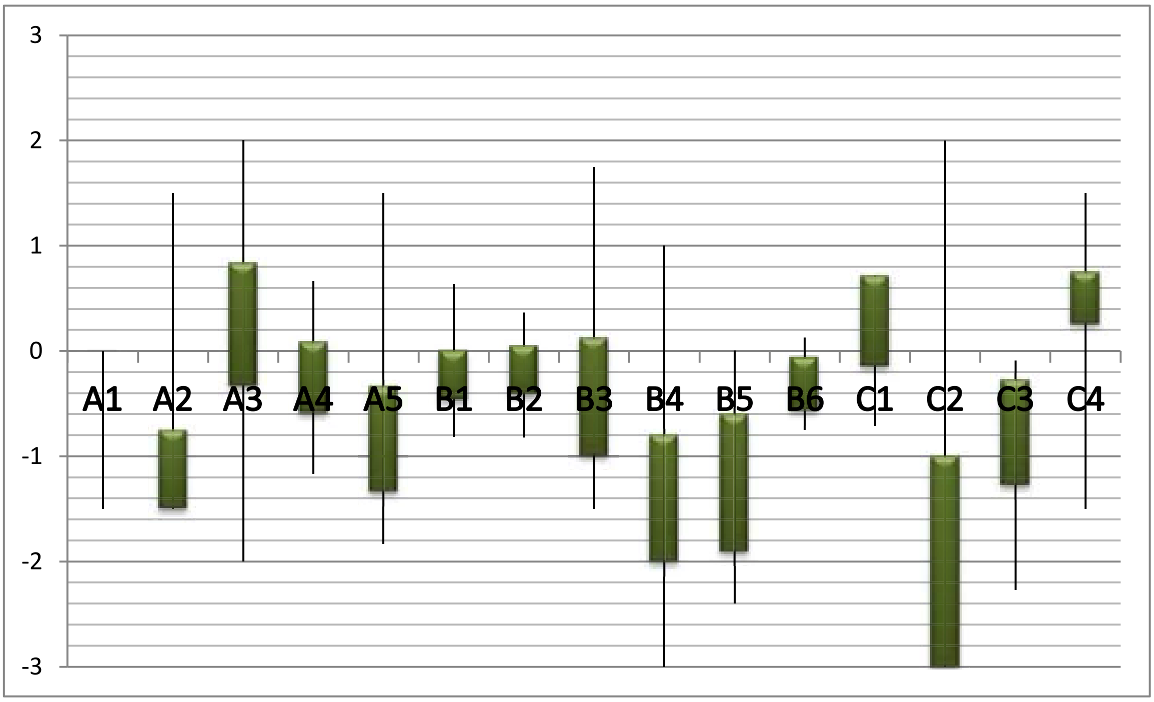
Taula 21. Concentració de les dades sobre creences de la mostra A

-3 ≤ μ < -1,5	-1,5 ≤ μ ≤ -0,5	-0,5 < μ < 0,5	0,5 ≤ μ ≤ 1,5	1,5 < μ ≤ 3
B4, B5, C2	A2, A5, B2, B3, B6, C1, C3	A1, A3, A4, B1, C4		

Taula 22. Posicionament sobre creences de la mostra A

MOSTRA B: Professors de secundària

A continuació, estudiarem els resultats corresponents als professors de secundària. Presentarem el diagrama de barres obtingut a partir dels resultats, així com les mitjanes de cada ítem. Posteriorment, farem una explicació de les creences de la mostra per cadascun dels ítems.



Il·lustració 4. Creences dels professors de secundària

A1	A2	A3	A4	A5	B1	B2	B3	B4	B5	B6	C1	C2	C3	C4
-0,14	-0,95	0,182	-0,21	-0,65	-0,22	-0,18	-0,32	-1,25	-1,17	-0,32	0,143	-1,82	-0,92	0,364

Taula 23. Mitjanes de creences de la mostra B

A. CREENCES SOBRE L'OBJECTE *PROBLEMA DE MATEMÀTIQUES*

1) Flux *entorn -> problema escolar*

Les dades són molt concentrades i no hi ha posicionament.

2) Presència de referents matemàtics identificables a l'enunciat

Les dades són bastant concentrades. Hi ha la posició definida de no creure que la presència de referents matemàtics sigui un aspecte molt determinant.

3) Identificació "enunciat verbal" – problema

Les dades són molt disperses i no hi ha cap posicionament determinat.

4) Precisió de l'enunciat

Les dades estan bastant concentrades però no hi ha un posicionament determinat en quant a si els enunciats han de ser o no precisos.

5) Caràcter tancat del propòsit

Les dades estan bastant concentrades, i hi ha la posició definida de creure que els propòsits dels problemes poden ser oberts o tancats.

B. CREENCES SOBRE LA NATURALESA DE L'ACTIVITAT DE RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

1) Caràcter instrumental / investigatiu de l'activitat matemàtica

Les dades estan molt concentrades. No hi ha un posicionament determinat.

2) Caràcter rutinari / creatiu de l'activitat matemàtica escolar

Les dades estan molt concentrades. No hi ha un posicionament determinat.

3) Contextualització matemàtica de l'activitat de RP

Les dades estan disperses i no es posicionen en cap sentit.

4) Èmfasi sobre el producte o el procés

Les dades estan disperses. Hi ha un posicionament definit en quant a que en la resolució de problemes és tan important en procés com el producte.

5) Caràcter lineal de l'activitat de resolució de problemes

Les dades estan disperses. Hi ha un posicionament definit en pensar que hi ha moltes maneres de resoldre un problema i que el procés està ple d'entrebancs.

6) Rellevància de la RP dins de l'activitat matemàtica

Les dades estan molt concentrades. No es posicionen en quant a si la resolució de problemes és o no un dels aspectes més rellevants de l'educació matemàtica.

C. CREENCES SOBRE EL PROCÉS D'ENSENYAMENT-APRENENTATGE DE LA RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

1) Subsidiarietat de la RP a l'aprenentatge d'eines matemàtiques

Les dades estan bastant concentrades. No hi ha un posicionament definit en quant a si aprendre coneixements de matemàtiques només ajuda o garanteix l'èxit en resolució de problemes.

2) Importància de l'aprenentatge d'estratègies

Les dades són molt disperses; tot i així, hi ha un clar posicionament a creure que les estratègies ajuden.

3) Importància de la millora del control

Les dades estan bastant concentrades. Hi ha un posicionament definit a l'hora de donar importància al control cognitiu i dels estats d'ànim a l'hora de resoldre problemes.

4) Importància de la conversió dels problemes en no-problemes

Les dades estan molt concentrades i, tot i no estar definida, hi ha una lleugera tendència a creure que s'han de mecanitzar els processos de resolució de problemes.

En síntesi, si classifiquem els diferents ítems segons la concentració de les dades i el posicionament de la mostra tenim les següents taules:

Dades molt concentrades	Dades bastant concentrades	Dades disperses
A1, B1, B2, B6, C4	A2, A4, A5, C1, C3	A3, B3, B4, B5, C2

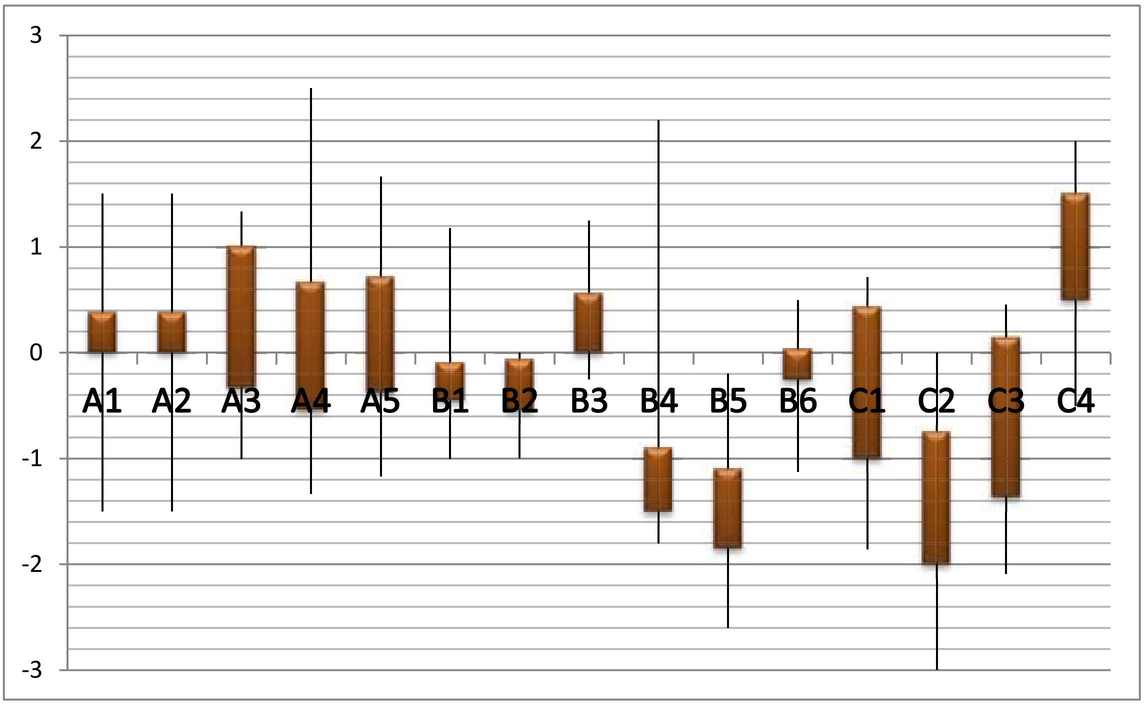
Taula 24. Concentració de les dades sobre creences de la mostra B

$-3 \leq \mu < -1{,}5$	$-1{,}5 \leq \mu \leq -0{,}5$	$-0{,}5 < \mu < 0{,}5$	$0{,}5 \leq \mu \leq 1{,}5$	$1{,}5 < \mu \leq 3$
C2	A2, A5, B4, B5, C3	A1, A3, A4, B1, B2, B3, B6, C1, C4		

Taula 25. Posicionament sobre creences de la mostra B

MOSTRA C: Estudiants de professor de primària

Estudiarem, a continuació, els resultats corresponents als estudiants de professor de primària. Presentarem el diagrama de barres obtingut a partir dels resultats, així com les mitjanes de cada ítem. Posteriorment, farem una explicació de les creences de la mostra per cadascun dels ítems.



Il·lustració 5. Creences dels estudiants de professors de primària

A1	A2	A3	A4	A5	B1	B2	B3	B4	B5	B6	C1	C2	C3	C4
0,14	0,14	0,27	0,07	0,05	-0,2	-0,3	0,3	-0,9	-1,44	-0,16	-0,39	-1,56	-0,64	0,95

Taula 26. Mitjanes de creences de la mostra C

A. CREENCES SOBRE L'OBJECTE *PROBLEMA DE MATEMÀTIQUES*

1) Flux *entorn -> problema escolar*

Les dades estan molt concentrades, i no es posicionen.

2) Presència de referents matemàtics identificables a l'enunciat

Les dades estan molt concentrades, i no es posicionen.

3) Identificació "enunciat verbal" – problema

Les dades són disperses, i no hi ha una posició definida; sí una lleugera tendència a identificar enunciat verbal amb problema.

4) Precisió de l'enunciat

Les dades són disperses, i no hi ha una posició definida.

5) Caràcter tancat del propòsit

Les dades són bastant disperses, i no hi ha una posició definida.

B. CREENCES SOBRE LA NATURALESA DE L'ACTIVITAT DE RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

1) Caràcter instrumental / investigatiu de l'activitat matemàtica

Les dades estan molt concentrades. Hi ha una postura poc definida però amb una lleugera tendència a donar un caràcter investigatiu a les matemàtiques.

2) Caràcter rutinari / creatiu de l'activitat matemàtica escolar

Les dades estan molt concentrades. Hi ha una postura poc definida però amb una lleugera tendència cap a unes classes de matemàtiques més creatives i participatives en contraposició a les rutinàries.

3) Contextualització matemàtica de l'activitat de RP

Les dades estan bastant concentrades. Hi ha una postura poc definida però amb una lleugera tendència a creure que els problemes han de ser proposats dins el tema (o relativament a prop) de les tècniques a utilitzar per a resoldre'ls.

4) Èmfasi sobre el producte o el procés

Les dades estan bastant concentrades. Hi ha un posicionament definit en quant a que en la resolució de problemes és tan important el procés com el producte.

5) Caràcter lineal de l'activitat de resolució de problemes

Les dades estan bastant concentrades. Hi ha un posicionament definit en pensar que hi ha moltes maneres de resoldre un problema i que el procés està ple d'entrebancs.

6) Rellevància de la RP dins de l'activitat matemàtica

Les dades estan molt concentrades. No es posicionen en si la resolució de problemes és o no un dels aspectes més rellevants de l'educació matemàtica.

C. CREENCES SOBRE EL PROCÉS D'ENSENYAMENT-APRENENTATGE DE LA RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

1) Subsidiarietat de la RP a l'aprenentatge d'eines matemàtiques

Les dades són disperses. No es posicionen a l'hora d'opinar si aprendre coneixements de matemàtiques només ajuda a l'èxit en resolució de problemes, o si el garanteix.

2) **Importància de l'aprenentatge d'estratègies**

Les dades són molt disperses; tot i així, hi ha un clar posicionament a creure que les estratègies ajuden.

3) **Importància de la millora del control**

Les dades són disperses. Hi ha un posicionament definit a l'hora de donar importància al control cognitiu i dels estats d'ànim a l'hora de resoldre problemes.

4) **Importància de la conversió dels problemes en no-problemes**

Les dades són bastant concentrades i hi ha la posició definida de creure que els processos de resolució de problemes s'han de mecanitzar.

En síntesi, si classifiquem els diferents ítems segons la concentració de les dades i el posicionament de la mostra tenim les següents taules:

Dades molt concentrades	Dades bastant concentrades	Dades disperses
A1, A2, B1, B2, B6	B3, B4, B5, C4	A3, A4, A5, C1, C2, C3

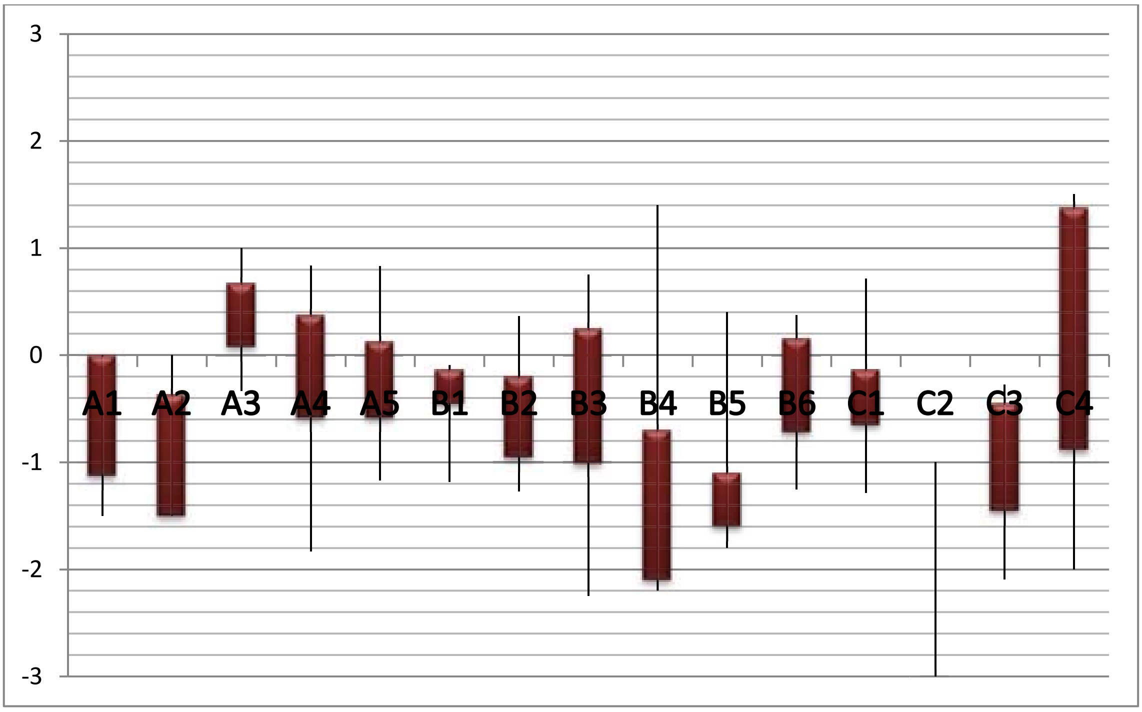
Taula 27. Concentració de les dades sobre creences de la mostra C

$-3 \leq \mu < -1{,}5$	$-1{,}5 \leq \mu \leq -0{,}5$	$-0{,}5 < \mu < 0{,}5$	$0{,}5 \leq \mu \leq 1{,}5$	$1{,}5 < \mu \leq 3$
C2	B4, B5, C3	A1, A2, A3, A4, A5, B1, B2, B3, B6, C1	C4	

Taula 28. Posicionament sobre creences de la mostra C

MOSTRA D: Professors de primària

Estudiarem, a continuació, els resultats corresponents als professors de primària. Presentarem el diagrama de barres obtingut a partir dels resultats, així com les mitjanes de cada ítem. Posteriorment, farem una explicació de les creences de la mostra per cadascun dels ítems.



Il·lustració 6. Creences dels professors de primària

A1	A2	A3	A4	A5	B1	B2	B3	B4	B5	B6	C1	C2	C3	C4
-0,45	-1,05	0,4	-0,22	-0,18	-0,38	-0,46	-0,43	-1,16	-1,2	-0,38	-0,34	-2,7	-0,88	0,05

Taula 29. Mitjanes de creences de la mostra D

A. CREENCES SOBRE L'OBJECTE *PROBLEMA DE MATEMÀTIQUES*

1) Flux *entorn -> problema escolar*

Les dades estan bastant disperses, i tot i considerar segons el nostre criteri que no es posicionen, la tendència és a establir aquesta identificació entre entorn i problema escolar.

2) Presència de referents matemàtics identificables a l'enunciat

Les dades estan bastant disperses, i es posicionen en el sentit de que no cal que hi hagi referents matemàtics a l'enunciat.

3) Identificació "enunciat verbal" – problema

Les dades estan bastant concentrades i no hi ha una posició definida; sí una lleugera tendència a identificar enunciat verbal amb problema.

4) Precisió de l'enunciat

Les dades estan bastant concentrades, i no hi ha una posició definida.

5) Caràcter tancat del propòsit

Les dades estan bastant concentrades, i no hi ha una posició definida.

B. CREENCES SOBRE LA NATURALESA DE L'ACTIVITAT DE RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

1) Caràcter instrumental / investigatiu de l'activitat matemàtica

Les dades estan molt concentrades i no es posicionen.

2) Caràcter rutinari / creatiu de l'activitat matemàtica escolar

Les dades bastant concentrades. Hi ha una postura poc definida però amb una lleugera tendència cap a unes classes de matemàtiques més creatives i participatives en contraposició a les rutinàries.

3) Contextualització matemàtica de l'activitat de RP

Les dades són disperses i no es posicionen.

4) Èmfasi sobre el producte o el procés

Les dades estan disperses. Hi ha un posicionament definit en quant a que en la resolució de problemes és tan important el procés com el producte.

5) Caràcter lineal de l'activitat de resolució de problemes

Les dades estan molt concentrades. Hi ha un posicionament definit en pensar que hi ha moltes maneres de resoldre un problema i que el procés està ple d'entrebancs.

6) Rellevància de la RP dins de l'activitat matemàtica

Les dades estan bastant concentrades. No es posicionen en si la resolució de problemes és o no un dels aspectes més rellevants de l'educació matemàtica.

C. CREENCES SOBRE EL PROCÉS D'ENSENYAMENT-APRENENTATGE DE LA RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

1) Subsidiarietat de la RP a l'aprenentatge d'eines matemàtiques

Les dades estan molt concentrades. No es posicionen a l'hora d'opinar si aprendre coneixements de matemàtiques només ajuda a l'èxit en resolució de problemes, o si el garanteix.

2) Importància de l'aprenentatge d'estratègies

Les dades estan molt concentrades i hi ha un clar posicionament a creure que les estratègies ajuden en la RP.

3) Importància de la millora del control

Les dades estan bastant concentrades. Hi ha un posicionament definit en quant a donar importància al control cognitiu i dels estats d'ànim a l'hora de resoldre problemes.

4) Importància de la conversió dels problemes en no-problemes

Les dades són molt disperses i no es posicionen en si els processos de resolució de problemes s'han de mecanitzar o no.

En síntesi, si classifiquem els diferents ítems segons la concentració de les dades i el posicionament de la mostra tenim les següents taules:

Dades molt concentrades	Dades bastant concentrades	Dades disperses
B1, B5, C1, C2	A3, A4, A5, B2, B6, C3	A1, A2, B3, B4, C4

Taula 30. Concentració de les dades sobre creences de la mostra D

-3 ≤ μ < -1,5	-1,5 ≤ μ ≤ -0,5	-0,5 < μ < 0,5	0,5 ≤ μ ≤ 1,5	1,5 < μ ≤ 3
C2	A2, B4, B5, C3	A1, A3, A4, A5, B1, B2, B3, B6, C1, C4		

Taula 31. Posicionament sobre creences de la mostra D

5.1.2. Comparacions entre les mostres dos a dos

En aquest apartat ens proposem, una vegada descrits els resultats que hem obtingut respecte a les creences de cadascuna de les mostres, a comparar-los. Les quatre mostres es poden comparar de maneres molt diferents. Hem assajat algunes d'aquestes maneres i, finalment, la que ens sembla que respon més a la realitat és la que té en compte els quartils -enlloc de les mitjanes i la dispersió, com hem fet a l'hora de definir les mostres.

D'acord amb les dades obtingudes en relació als quartils de cada ítem (que podrem observar en els gràfics i també en les taules que mostrarem), podem explicitar les semblances i diferències entre cada parell de mostres. Per això, ens fixarem en cadascuna de les categories de creences (A, B, C), i notarem aquells ítems que són semblants, aquells que són diferents, i aquells dels quals no podem afirmar ni una cosa ni l'altra, tot segons el criteri de descrivim a continuació.

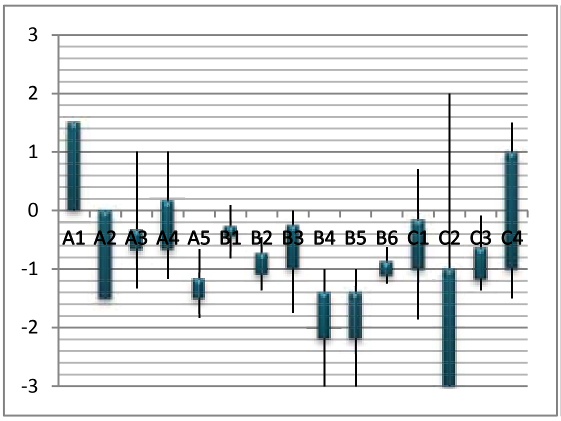
Considerarem *semblants* aquells ítems on la diferència entre els seus primers quartils i la diferència entre els seus tercers quartils sigui menor o igual a 0,5. És a dir: $|\mathit{Q1}\text{-Q1}| \leq 0{,}5$ i $|\mathit{Q3}\text{-Q3}| \leq 0{,}5$

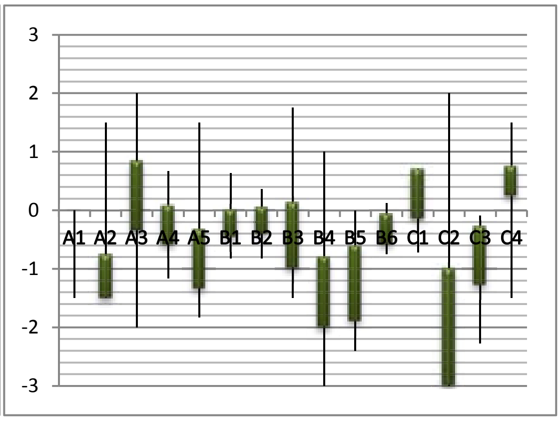
Considerarem *diferents* aquells ítems que tenen intervals interquartílics (oberts) amb intersecció buida. És a dir: $(\mathrm{Q1}, \mathrm{Q3}) \cap (\mathit{Q1}, \mathit{Q3}) = \emptyset$

Tanmateix, pot haver-hi alguns ítems que, tot i ser indecidibles, trobem interessant destacar, perquè estan a prop de poder-se considerar semblants o diferents. Afortunadament això succeeix en molts pocs casos, que es comentaran més endavant. Així mateix, pot aparèixer el cas extrem de que un ítem pugui ser semblant i diferent alhora perquè les dues caixes estan concentrades en un interval de 0,5 punts encara que no s'intersequen; en aquest cas els qualificarem de semblants perquè estan molt a prop.

Comparació entre la mostra A (estudiants de professor de secundària) i la mostra B (professors de secundària)

Per tal de comparar aquestes dues mostres, presentem primer els diagrames de barres de cadascuna i els primer i tercer quartil de cada ítem, amb els que hem obtingut quin ítems tenen semblants i diferents les mostres. A continuació comentem els resultats obtinguts.





	MOSTRA A			MOSTRA B	
	Q1	Q3		Q1	Q3
A1	1,5	0		0	0
A2	0	-1,5		-0,75	-1,5
A3	-0,33	-0,67		0,833	-0,33
A4	0,167	-0,67		0,083	-0,58
A5	-1,17	-1,5		-0,33	-1,33
B1	-0,27	-0,45		0	-0,45
B2	-0,73	-1,09		0,045	-0,41
B3	-0,25	-1		0,125	-1
B4	-1,4	-2,2		-0,8	-2
B5	-1,4	-2,2		-0,6	-1,9
B6	-0,88	-1,13		-0,06	-0,56
C1	-0,14	-1		0,714	-0,14
C2	-1	-3		-1	-3
C3	-0,64	-1,18		-0,27	-1,27
C4	1	-1		0,75	0,25

Taula 32. Primer i tercer quartil de les dades sobre creences de les mostres A i B

	A. Creences sobre l'objecte *problema de matemàtiques*	B. Creences sobre la naturalesa de l'activitat de RP	C. Creences sobre el procés d'ensenyament-aprenentatge de la RP
Semblants	A4	B1	C2, C3
Diferents	A1, A3	B2, B6	C1
No podem afirmar res	A2, A5	B3, B4, B5	C4

Taula 33. Semblances i diferències sobre creences entre les mostres A i B

Semblances entre les mostres A i B

A4) Precisió de l'enunciat: En ambdues mostres les dades estan bastant concentrades i no tenen un posicionament determinat en quant a si els enunciats han de ser o no precisos.

B1) Caràcter instrumental / investigatiu de l'activitat matemàtica: Les dades estan molt concentrades, és a dir, tots convergeixen en la idea de que les matemàtiques són tant instrumentals com investigatives: no es posicionen.

C2) Importància de l'aprenentatge d'estratègies: Les dades són molt disperses en ambdues mostres però amb un clar posicionament a creure que les estratègies ajuden en la RP.

C3) Importància de la millora del control: Les dades de les dues mostres estan bastant concentrades i hi ha un posicionament definit en donar importància al control cognitiu i dels estats d'ànim a l'hora de resoldre problemes.

Diferències entre les mostres A i B

A1) Flux entorn -> problema escolar: Mentre que entre els professors de secundària hi ha acord total en no posicionar-se sobre el tema, els estudiants de professor tenen respostes disperses, però tota la caixa està en els valors positius, així que, tot i que molts es posicionen poc, els que ho fan tenen tendència a creure poc important el fet que els problemes treballats a classe siguin situacions reals de l'entorn.

A3) Identificació "enunciat verbal" – problema: En aquest ítem, els estudiants de professor tenen unes opinions molt iguals :les dades estan molt concentrades en els nombres negatius propers a zero, amb el que deduïm que la tendència dels estudiants és a fer una identificació més aviat feble de "enunciat verbal" i problema. En canvi, les dades dels professors de secundària són més disperses al voltant del zero. Tot i la varietat d'opinions, però, predomina la tendència a pensar que un problema és un "text".

B2) Caràcter rutinari / creatiu de l'activitat matemàtica escolar: El fet d'estar les dades, en ambdós casos, molt concentrades, fa que trobem força significativa la divergència d'opinions en el caràcter de les classes de matemàtiques: mentre que els professors de secundària no es posicionen en si han de ser més rutinàries (explicacions, aprendre tècniques) o més creatives, els estudiants de professor es posicionen per unes classes de matemàtiques més creatives i participatives.

B6) Rellevància de la RP dins de l'activitat matemàtica: Com en el cas anterior, al estar les dades molt concentrades, trobem significativa la divergència d'opinions en la importància donada a la Resolució de Problemes: mentre que els professors de secundària no es posicionen gaire en quant a si la RP és l'aspecte més rellevant o no de les matemàtiques, els estudiants de professor tendeixen a creure que sí que ho és.

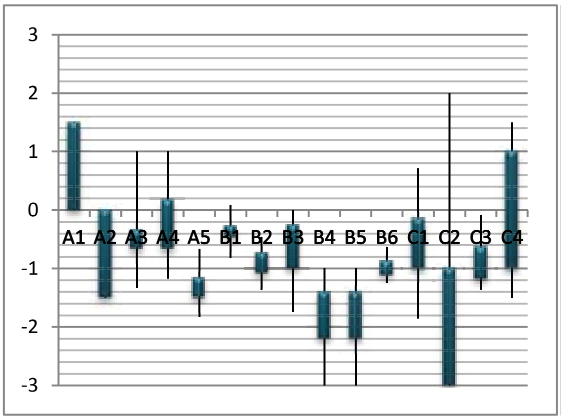
C1) Subsidiarietat de la RP a l'aprenentatge d'eines matemàtiques: En ambdós casos les dades estan bastant concentrades (interval interquartílic menor a 1), les dels estudiants de professor just per sota del zero i les dels professors per damunt. Per tant, els estudiants tendeixen a pensar que aprendre coneixements de matemàtiques només ajuda a l'èxit en resolució de problemes, mentre que els professors de secundària tendeixen a pensar que el garanteix.

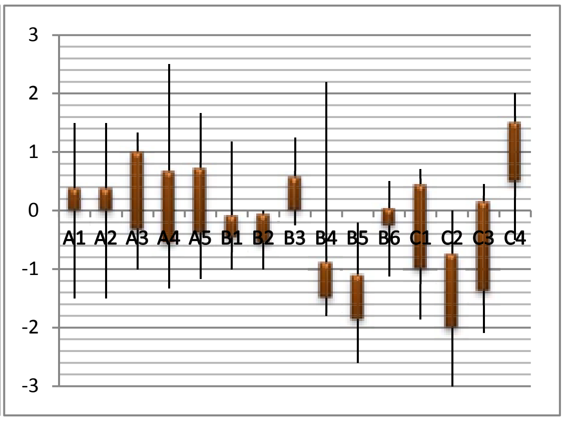
Altres ítems interessants:

C4) Importància de la conversió dels problemes en no-problemes: Aparentment la diferència més significativa en aquest ítem és la concentració de les dades: mentre que les dels estudiants estan molt disperses, les dels professors estan molt concentrades. Aparentment, cap dels dos col·lectius es posiciona a l'hora d'opinar si es pot o no mecanitzar el procés de resolució de problemes (i en cas que sí, ensenyar aquests mètodes-tipus). Observant més curosament els resultats, però, observem que, mentre que la dispersió de les dades dels estudiants està repartida de forma uniforme entre el (+) i el (-), els professors es posicionen en l'opinió de que cal mecanitzar el procés de resolució de problemes.

Comparació entre la mostra A (estudiants de professor de secundària) i la mostra C (estudiants de professor de primària)

Per tal de comparar aquestes dues mostres, presentem primer els diagrames de barres de cadascuna i els primer i tercer quartil de cada ítem, amb els que hem obtingut quin ítems tenen semblants i diferents les mostres. A continuació comentem els resultats obtinguts.





	MOSTRA A			MOSTRA C	
	Q1	Q3		Q1	Q3
A1	1,5	0		0,375	0
A2	0	-1,5		0,375	0
A3	-0,33	-0,67		1	-0,33
A4	0,167	-0,67		0,667	-0,54
A5	-1,17	-1,5		0,708	-0,33
B1	-0,27	-0,45		-0,09	-0,45
B2	-0,73	-1,09		-0,07	-0,55
B3	-0,25	-1		0,563	0
B4	-1,4	-2,2		-0,9	-1,5
B5	-1,4	-2,2		-1,1	-1,85
B6	-0,88	-1,13		0,031	-0,25

C1	-0,14	-1		0,429	-1
C2	-1	-3		-0,75	-2
C3	-0,64	-1,18		0,136	-1,36
C4	1	-1		1,5	0,5

Taula 34. Primer i tercer quartil de les dades sobre creences de les mostres A i C

	A. Creences sobre l'objecte *problema de matemàtiques*	B. Creences sobre la naturalesa de l'activitat de RP	C. Creences sobre el procés d'ensenyament-aprenentatge de la RP
Semblants	A4	B1, B5	
Diferents	A2, A3, A5	B2, B3, B6	
No podem afirmar res	A1	B4	C1, C2, C3, C4

Taula 35. Semblances i diferències sobre creences entre les mostres A i C

Semblances entre les mostres A i C

A4) Precisió de l'enunciat: En ambdues mostres les dades estan bastant concentrades i no tenen un posicionament determinat en quant a si els enunciats han de ser o no precisos.

B1) Caràcter instrumental / investigatiu de l'activitat matemàtica: Les dades estan molt concentrades, és a dir, tots convergeixen en la idea de que les matemàtiques són tant instrumentals com investigatives.

B5) Caràcter lineal de l'activitat de resolució de problemes: Tant els estudiants de professors de primària com de secundària estan d'acord en què el procés de resolució de problemes és inevitable que estigui ple d'entrebancs (intents fallits i camins equivocats, incorreccions i proves).

Diferències entre les mostres A i C

A2) Presència de referents matemàtics identificables a l'enunciat: Mentre que els estudiants de professor de secundària tenen una opinió més dispersa sobre el tema però es posicionen cap a que la presència de referents matemàtics en l'enunciat no és un aspecte determinant en els problemes, en els estudiants de professor de primària les dades estan molt concentrades i no es posicionen sobre el tema.

A3) Identificació "enunciat verbal" – problema: La diferència més significativa en aquest ítem és que, mentre que els estudiants de professor de secundària tenen unes opinions molt iguals (les dades estan molt concentrades), els estudiants de professor de primària tenen més varietat d'opinions. En ambdós casos no es posicionen massa, però la tendència dels estudiants de professor de secundària és a fer una identificació més aviat feble de "enunciat verbal" i problema, mentre que entre els professors de primària, tot i la varietat d'opinions, predomina la tendència a pensar que un problema és un "text".

A5) Caràcter tancat del propòsit: Mentre que els estudiants de professor de secundària tenen l'opinió comú (dades molt concentrades) de que el propòsit d'un problema pot ser obert o tancat, en els estudiants de professor de primària les dades són disperses i no posicionades en quant a si els propòsits han de ser sempre tancats o no.

B2) Caràcter rutinari / creatiu de l'activitat matemàtica escolar: El fet d'estar les dades, en ambdós casos, molt concentrades, fa que trobem significativa la divergència d'opinions en el caràcter de les classes de matemàtiques: mentre que els estudiants de professor de primària no es posicionen en si han de ser més rutinàries (explicacions, aprendre tècniques) o més creatives, els estudiants de professor de secundària es posicionen per unes classes de matemàtiques més creatives i participatives.

B3) Contextualització matemàtica de l'activitat de RP: Mentre que els estudiants d'educació primària tendeixen a creure que els problemes han de ser proposats dins el tema (o relativament a prop) de les tècniques a utilitzar per a resoldre'ls, els estudiants d'educació secundària no ho creuen tant necessari.

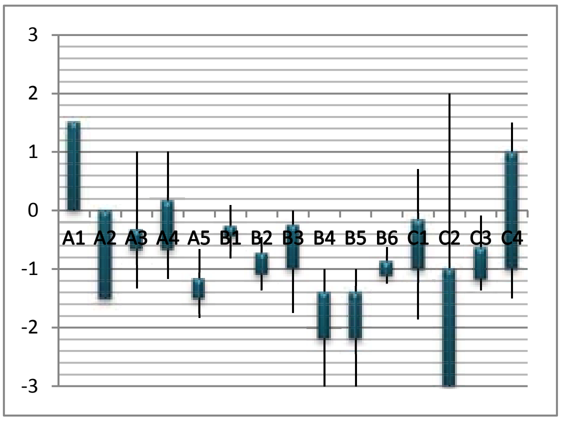
B6) Rellevància de la RP dins de l'activitat matemàtica: Al estar les dades molt concentrades, trobem més significativa la divergència d'opinions en la importància donada a la Resolució de Problemes: mentre que els estudiants de professor de primària no es posicionen gaire en quant a si la RP és l'aspecte més rellevant o no de les matemàtiques, els estudiants de professor de secundària tendeixen a creure que sí que ho és.

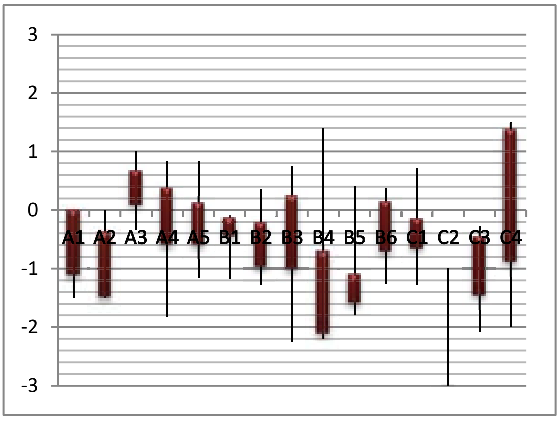
Altres ítems interessants:

C4) Importància de la conversió dels problemes en no-problemes: En aquest cas, tot i no sortir-nos aquest ítem com a diferent perquè la intersecció entre les dues caixes no és buida, la diferència existeix: mentre que la dispersió de les dades dels estudiants de professor de secundària està repartida de forma uniforme entre el (+) i el (-), els estudiants de professor de primària es posicionen en l'opinió de que cal mecanitzar el procés de resolució de problemes.

Comparació entre la mostra A (estudiants de professor de secundària) i la mostra D (professors de primària)

Per tal de comparar aquestes dues mostres, presentem primer els diagrames de barres de cadascuna i els primer i tercer quartil de cada ítem, amb els que hem obtingut quin ítems tenen semblants i diferents les mostres. A continuació comentem els resultats obtinguts.





	MOSTRA A			MOSTRA D	
	Q1	Q3		Q1	Q3
A1	1,5	0		0	-1,13
A2	0	-1,5		-0,38	-1,5
A3	-0,33	-0,67		0,667	0,083
A4	0,167	-0,67		0,375	-0,58
A5	-1,17	-1,5		0,125	-0,58
B1	-0,27	-0,45		-0,14	-0,45
B2	-0,73	-1,09		-0,2	-0,95
B3	-0,25	-1		0,25	-1
B4	-1,4	-2,2		-0,7	-2,1
B5	-1,4	-2,2		-1,1	-1,6
B6	-0,88	-1,13		0,156	-0,72
C1	-0,14	-1		-0,14	-0,64
C2	-1	-3		-3	-3
C3	-0,64	-1,18		-0,45	-1,45
C4	1	-1		1,375	-0,88

Taula 36. Primer i tercer quartil de les dades sobre creences de les mostres A i D

	A. Creences sobre l'objecte *problema de matemàtiques*	B. Creences sobre la naturalesa de l'activitat de RP	C. Creences sobre el procés d'ensenyament-aprenentatge de la RP
Semblants	A2, A4	B1, B3	C1, C4
Diferents	A1, A3, A5	B6	C2
No podem afirmar res		B2, B4, B5	C3

Taula 37. Semblances i diferències sobre creences entre les mostres A i D

Semblances entre les mostres A i D

A2) Presència de referents matemàtics identificables a l'enunciat: En ambdós casos les dades són força disperses però es posicionen en el sentit que no és determinant la presència de referents matemàtics identificables a l'enunciat.

A4) Precisió de l'enunciat: En ambdues mostres les dades estan bastant concentrades i no tenen un posicionament determinat en quant a si els enunciats han de ser o no precisos.

B1) Caràcter instrumental / investigatiu de l'activitat matemàtica: Les dades estan molt concentrades, és a dir, tots convergeixen en la idea de que les matemàtiques són tant instrumentals com investigatives: no es posicionen. Tot i així, hi ha una lleugera tendència en els dos casos cap a unes matemàtiques investigatives.

B3) Contextualització matemàtica de l'activitat de RP: Tot i que les dades estan més disperses en el cas dels professors de primària, l'amplitud de la caixa és d'aproximadament un punt en els dos casos, i tot i no posicionar-se en els termes que aquí considerem, hi ha certa tendència en ambdós casos a creure que els problemes no tenen perquè ser sempre proposats dins el tema (o relativament a prop) de les tècniques a utilitzar per a resoldre'ls.

C1) Subsidiarietat de la RP a l'aprenentatge d'eines matemàtiques: En ambdós casos les dades estan bastant concentrades (interval interquartílic menor a 1), no posicionar-se en els termes que aquí considerem, hi ha certa tendència en ambdós casos a pensar que aprendre coneixements de matemàtiques només ajuda a l'èxit en resolució de problemes.

C4) Importància de la conversió dels problemes en no-problemes: En ambdós casos les dades són molt disperses i no es posicionen en cap sentit.

Diferències entre les mostres A i D

A1) Flux entorn -> problema escolar: Tot i ser les dades en els dos casos força disperses, les posicions són diferents: mentre els estudiants de professor de secundària en general troben poc important el fet que els problemes treballats a classe siguin situacions reals de l'entorn, els professors de primària ho troben determinant.

A3) Identificació "enunciat verbal" – problema: En ambdós mostres, les dades estan concentrades (molt en els estudiants de secundària i bastant en els professors de primària), i tot i no posicionar-se gaire, les tendències en els dos casos són molt diferents: els estudiants de secundària no tendeixen a identificar "enunciat verbal" i problema, mentre que els professors de primària sí.

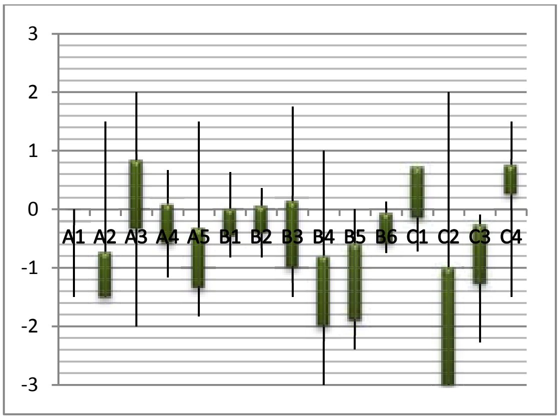
A5) Caràcter tancat del propòsit: En ambdós mostres, les dades estan concentrades (molt en els estudiants de secundària i bastant en els professors de primària). Però mentre que els estudiants de professor de secundària creuen que el propòsit d'un problema pot ser obert o tancat, els professors de primària no s'hi posicionen.

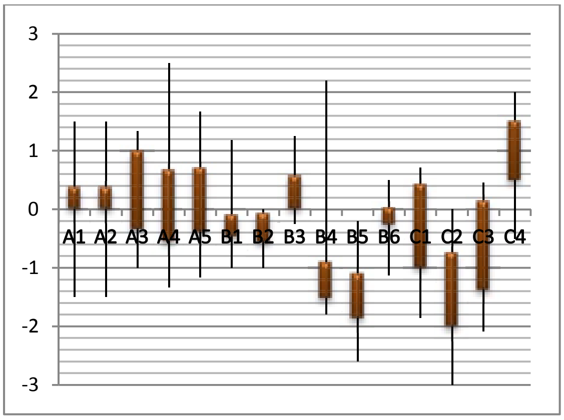
B6) Rellevància de la RP dins de l'activitat matemàtica: En ambdós mostres, les dades estan concentrades (molt en els estudiants de secundària i bastant en els professors de primària), però mentre que els estudiants de professor de secundària creuen que la RP és l'aspecte més rellevant de les matemàtiques, els professors de primària no s'hi posicionen.

C2) Importància de l'aprenentatge d'estratègies: En ambdós casos hi ha un clar posicionament a creure que les estratègies ajuden en la RP, però mentre que en els estudiants de professors de secundària les dades són molt disperses, en els professors de primària les dades estan molt concentrades.

Comparació entre la mostra B (professors de secundària) i la mostra C (estudiants de professor de primària)

Per tal de comparar aquestes dues mostres, presentem primer els diagrames de barres de cadascuna i els primer i tercer quartil de cada ítem, amb els que hem obtingut quin ítems tenen semblants i diferents les mostres. A continuació comentem els resultats obtinguts.





	MOSTRA B			MOSTRA C	
	Q1	Q3		Q1	Q3
A1	0	0		0,375	0
A2	-0,75	-1,5		0,375	0
A3	0,833	-0,33		1	-0,33
A4	0,083	-0,58		0,667	-0,54
A5	-0,33	-1,33		0,708	-0,33
B1	0	-0,45		-0,09	-0,45
B2	0,045	-0,41		-0,07	-0,55
B3	0,125	-1		0,563	0
B4	-0,8	-2		-0,9	-1,5
B5	-0,6	-1,9		-1,1	-1,85
B6	-0,06	-0,56		0,031	-0,25
C1	0,714	-0,14		0,429	-1
C2	-1	-3		-0,75	-2
C3	-0,27	-1,27		0,136	-1,36
C4	0,75	0,25		1,5	0,5

Taula 38. Primer i tercer quartil de les dades sobre creences de les mostres B i C

	A. Creences sobre l'objecte *problema de matemàtiques*	B. Creences sobre la naturalesa de l'activitat de RP	C. Creences sobre el procés d'ensenyament-aprenentatge de la RP
Semblants	A1, A3	B1, B2, B4, B5, B6	C3
Diferents	A2, A5		
No podem afirmar res	A4	B3	C1, C2, C4

Taula 39. Semblances i diferències sobre creences entre les mostres B i C

Semblances entre les mostres B i C

A1) Flux entorn -> problema escolar: En ambdós casos les dades estan molt concentrades i no es posicionen.

A3) Identificació "enunciat verbal" – problema: En ambdós casos les dades son una mica disperses al voltant del zero (per tant no es posicionen de forma clara), però tot i la varietat d'opinions, predomina la tendència a pensar que un problema és un "text".

B1) Caràcter instrumental / investigatiu de l'activitat matemàtica: Les dades estan molt concentrades, és a dir, tots convergeixen en la idea de que les matemàtiques són tant instrumentals com investigatives: no es posicionen.

B2) Caràcter rutinari / creatiu de l'activitat matemàtica escolar: Les dades estan molt concentrades i no es posicionen: tots convergeixen en la idea de que les matemàtiques escolars tenen un caràcter entre rutinari i creatiu.

B4) Èmfasi sobre el producte o el procés: Les dades estan , en el cas dels professors de secundària, disperses, i en el cas dels estudiants d'educació primària, bastant concentrades; això sí, en ambdós casos hi ha un posicionament definit de que en l'activitat de resolució de problemes és tan important el procés com el producte.

B5) Caràcter lineal de l'activitat de resolució de problemes: Les dades estan , en el cas dels professors de secundària, disperses, i en el cas dels estudiants d'educació primària, bastant concentrades; això sí, tots dos estan d'acord en què el procés de resolució de problemes és inevitable que estigui ple d'entrebancs (intents fallits i camins equivocats, incorreccions i proves).

B6) Rellevància de la RP dins de l'activitat matemàtica: En ambdues mostres les dades estan molt concentrades i no es posicionen en quant a si la resolució de problemes és o no l'aspecte més rellevant dins de l'activitat matemàtica.

C3) Importància de la millora del control: Les dades de les dues mostres no estan massa concentrades però hi ha un posicionament definit (tot i que no de forma clara) en donar importància al control cognitiu i dels estats d'ànim a l'hora de resoldre problemes.

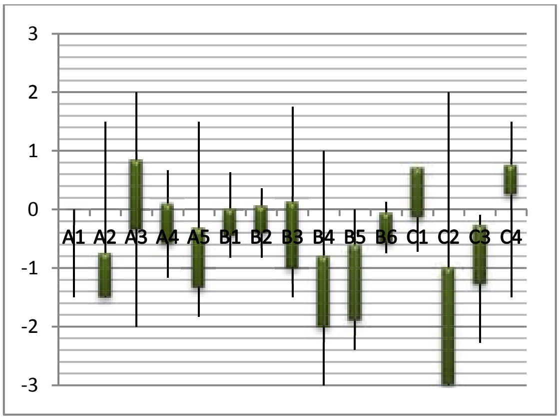
Diferències entre les mostres B i C

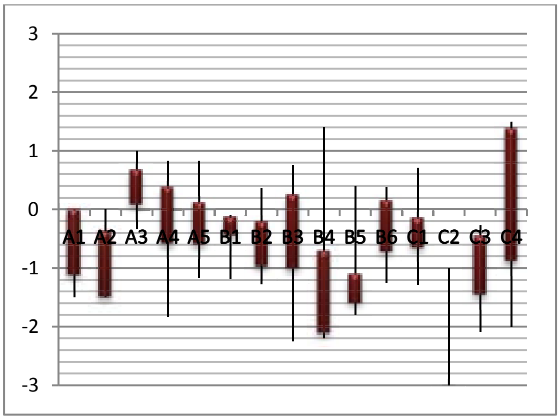
A2) Presència de referents matemàtics identificables a l'enunciat: Mentre que en els professors de secundària les dades estan bastant concentrades i es posicionen cap a que la presència de referents matemàtics en l'enunciat no és un aspecte determinant en els problemes, en els estudiants de professor de primària les dades estan molt concentrades i no es posicionen sobre el tema.

A5) Caràcter tancat del propòsit: En el cas dels professors de secundària, les dades estan bastant concentrades i es posicionen en l'opinió de que el propòsit d'un problema pot ser obert o tancat; en canvi, en els estudiants de professor de primària les dades són disperses i no posicionades en quant a si els propòsits han de ser sempre tancats o no.

Comparació entre la mostra B (professors de secundària) i la mostra D (professors de primària)

Per tal de comparar aquestes dues mostres, presentem primer els diagrames de barres de cadascuna i els primer i tercer quartil de cada ítem, amb els que hem obtingut quin ítems tenen semblants i diferents les mostres. A continuació comentem els resultats obtinguts.





	MOSTRA B			MOSTRA D	
	Q1	Q3		Q1	Q3
A1	0	0		0	-1,13
A2	-0,75	-1,5		-0,38	-1,5
A3	0,833	-0,33		0,667	0,083
A4	0,083	-0,58		0,375	-0,58
A5	-0,33	-1,33		0,125	-0,58
B1	0	-0,45		-0,14	-0,45
B2	0,045	-0,41		-0,2	-0,95
B3	0,125	-1		0,25	-1
B4	-0,8	-2		-0,7	-2,1
B5	-0,6	-1,9		-1,1	-1,6
B6	-0,06	-0,56		0,156	-0,72
C1	0,714	-0,14		-0,14	-0,64

C2	-1	-3		-3	-3
C3	-0,27	-1,27		-0,45	-1,45
C4	0,75	0,25		1,375	-0,88

Taula 40. Primer i tercer quartil de les dades sobre creences de les mostres B i C

	A. Creences sobre l'objecte *problema de matemàtiques*	B. Creences sobre la naturalesa de l'activitat de RP	C. Creences sobre el procés d'ensenyament-aprenentatge de la RP
Semblants	A2, A3, A4	B1, B3, B4, B5, B6	C3
Diferents	A1		C1, C2
No podem afirmar res	A5	B2	C4

Taula 41. Semblances i diferències sobre creences entre les mostres B i D

Semblances entre les mostres B i D

A2) Presència de referents matemàtics identificables a l'enunciat: Les dades no estan ni molt concentrades ni molt disperses, i es posicionen cap a que la presència de referents matemàtics en l'enunciat no és un aspecte determinant en els problemes.

A3) Identificació "enunciat verbal" – problema: Les dades no estan ni molt concentrades ni molt disperses, i tot i no posicionar-se segons el nostre criteri, predomina la tendència a pensar que un problema és un "text".

A4) Precisió de l'enunciat: Cap de les dues mostres té un posicionament determinat en quant a si els enunciats han de ser o no precisos.

B1) Caràcter instrumental / investigatiu de l'activitat matemàtica: Les dades estan molt concentrades, és a dir, tots convergeixen en la idea de que les matemàtiques són tant instrumentals com investigatives: no es posicionen.

B3) Contextualització matemàtica de l'activitat de RP: En els dos casos, les dades són força disperses i no es posicionen.

B4) Èmfasi sobre el producte o el procés: Les dades de les dues mostres són força disperses, i hi ha un posicionament definit de que en l'activitat de resolució de problemes és tan important el procés com el producte.

B5) Caràcter lineal de l'activitat de resolució de problemes: Les dades estan, en el cas dels professors de secundària, disperses, i en el cas dels professors de primària, molt concentrades; això sí, tots dos estan d'acord en què el procés de resolució de problemes és inevitable que estigui ple d'entrebancs (intents fallits i camins equivocats, incorreccions i proves).

B6) Rellevància de la RP dins de l'activitat matemàtica: En ambdós mostres les dades estan força concentrades i no es posicionen en quant a si la resolució de problemes és o no l'aspecte més rellevant dins de l'activitat matemàtica.

C3) Importància de la millora del control: Les dades de les dues mostres no estan massa concentrades però hi ha un posicionament definit (tot i que no de forma clara) en donar importància al control cognitiu i dels estats d'ànim a l'hora de resoldre problemes.

Diferències entre les mostres B i D

A1) Flux entorn -> problema escolar: En el cas dels professors de secundària les dades estan concentrades en el punt 0 (i per tant no es posicionen). En canvi, les dades dels professors de primària són molt disperses i fan la identificació de problema amb context real.

C1) Subsidiarietat de la RP a l'aprenentatge d'eines matemàtiques: Les dades de les dues mostres estan força concentrades (sobretot les dels professors de primària), i tot i no posicionar-se cap dels dos en els termes que aquí considerem, les tendències són divergents: els professors de primària tendeixen a pensar que aprendre coneixements de matemàtiques només ajuda a l'èxit en resolució de problemes, els de secundària que el garantitzen.

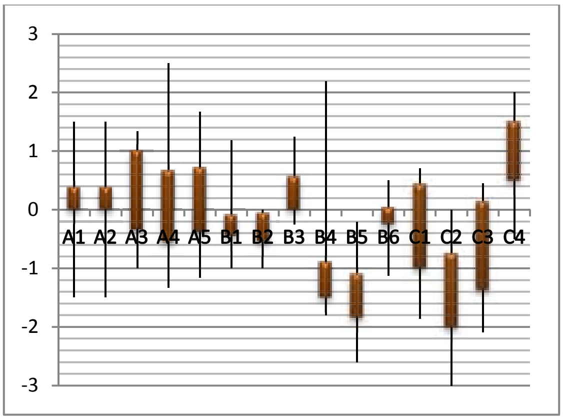
C2) Importància de l'aprenentatge d'estratègies: En ambdós casos hi ha un clar posicionament a creure que les estratègies ajuden en la RP, però mentre que en els professors de secundària les dades són molt disperses, en els professors de primària les dades estan molt concentrades.

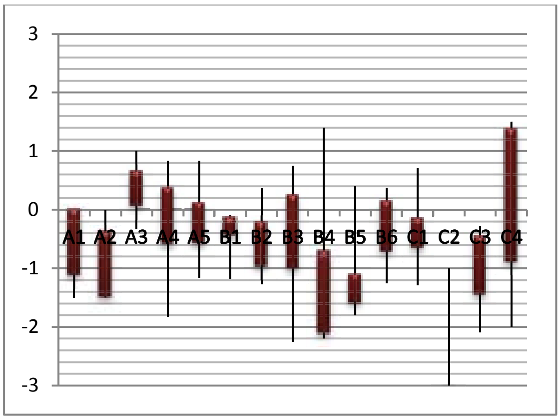
Altres ítems interessants:

C4) Importància de la conversió dels problemes en no-problemes: En aquest cas, tots dos tendeixen a opinar que cal mecanitzar el procés de resolució de problemes, amb la diferència que entre els professors de secundària és una opinió comú (dades molt concentrades) i entre els professors de primària no es posen d'acord (dades molt disperses).

Comparació entre la mostra C (estudiants de professor de primària) i la mostra D (professors de primària)

Per tal de comparar aquestes dues mostres, presentem primer els diagrames de barres de cadascuna i els primer i tercer quartil de cada ítem, amb els que hem obtingut quin ítems tenen semblants i diferents les mostres. A continuació comentem els resultats obtinguts.





	MOSTRA C			MOSTRA D	
	Q1	Q3		Q1	Q3
A1	0,375	0		0	-1,13
A2	0,375	0		-0,38	-1,5
A3	1	-0,33		0,667	0,083
A4	0,667	-0,54		0,375	-0,58
A5	0,708	-0,33		0,125	-0,58
B1	-0,09	-0,45		-0,14	-0,45
B2	-0,07	-0,55		-0,2	-0,95
B3	0,563	0		0,25	-1
B4	-0,9	-1,5		-0,7	-2,1
B5	-1,1	-1,85		-1,1	-1,6
B6	0,031	-0,25		0,156	-0,72
C1	0,429	-1		-0,14	-0,64
C2	-0,75	-2		-3	-3
C3	0,136	-1,36		-0,45	-1,45
C4	1,5	0,5		1,375	-0,88

Taula 42. Primer i tercer quartil de les dades sobre creences de les mostres C i D

	A. Creences sobre l'objecte *problema de matemàtiques*	B. Creences sobre la naturalesa de l'activitat de RP	C. Creences sobre el procés d'ensenyament-aprenentatge de la RP
Semblants	A3, A4	B1, B2, B5, B6	
Diferents	A1, A2		C2
No podem afirmar res	A5	B3, B4	C1, C3, C4

Taula 43. Semblances i diferències sobre creences entre les mostres C i D

Semblances entre les mostres C i D

A3) Identificació "enunciat verbal" – problema: En ambdós casos les dades són una mica disperses al voltant del zero (per tant no es posicionen de forma clara), però tot i la varietat d'opinions, predomina la tendència a pensar que un problema és un "text".

A4) Precisió de l'enunciat: Cap de les dues mostres té un posicionament determinat en quant a si els enunciats han de ser o no precisos, i les dades no estan ni molt concentrades ni molt disperses.

B1) Caràcter instrumental / investigatiu de l'activitat matemàtica: Les dades estan molt concentrades, és a dir, tots convergeixen en la idea de que les matemàtiques són tant instrumentals com investigatives: no es posicionen.

B2) Caràcter rutinari / creatiu de l'activitat matemàtica escolar: Les dades estan concentrades (molt en el cas dels estudiants) i no es posicionen: tots convergeixen en la idea de que les matemàtiques escolars tenen un caràcter entre rutinari i creatiu. Tot i així, hi ha una lleugera tendència, sobretot en el cas dels professors, cap a un caràcter creatiu de les classes.

B5) Caràcter lineal de l'activitat de resolució de problemes: Les dades estan bastant concentrades en ambdós casos i amb l'opinió comú de que el procés de resolució de problemes és inevitable que estigui ple d'entrebancs (intents fallits i camins equivocats, incorreccions i proves).

B6) Rellevància de la RP dins de l'activitat matemàtica: En ambdós mostres les dades estan concentrades (sobretot en el cas dels estudiants) i no es posicionen en quant a si la resolució de problemes és o no l'aspecte més rellevant dins de l'activitat matemàtica.

Diferències entre les mostres C i D

A1) Flux entorn -> problema escolar: Mentre que les dades dels estudiants de professor de primària estan molt concentrades i no es posicionen, les dades dels professors de primària són disperses però es posicionen cap a una relació directa entre problema escolar i context real.

A2) Presència de referents matemàtics identificables a l'enunciat: Mentre que les dades dels estudiants de professor de primària estan molt concentrades i no es posicionen, les dades dels professors de primària són disperses però es posicionen en el sentit de que la presència de referents matemàtics a l'enunciat no és determinant.

C2) Importància de l'aprenentatge d'estratègies: En ambdós casos hi ha un posicionament a creure que les estratègies ajuden en la RP, però en el cas dels professors és una posició més clara i més comú a tots (dades molt més concentrades).

Altres ítems interessants:

C4) Importància de la conversió dels problemes en no-problemes: Mentre que en els estudiants de professor de primària hi ha un posicionament en quant a la necessitat de mecanitzar el procés de resolució de problemes (amb dades bastant concentrades), en els professors de primària les dades estan molt disperses i la posició no està definida.

5.1.3. Comparació general de les creences de les quatre mostres

En aquest apartat pretenem, a partir de les comparacions realitzades entre les mostres dos a dos, fer una síntesi de les semblances i diferències de creences que hi ha entre les quatre mostres, i intentar trobar relacions entre l'etapa educativa o l'experiència docent de la mostra i el tipus de creences que tenen.

A continuació mostrem la taula-resum dels ítems en els quals les mostres, dos a dos, tenen semblances (verd) i diferències (vermell) segons el criteri que hem establert anteriorment.

	Mostra A	Mostra B	Mostra C	Mostra D
Mostra A: Estudiant Prof. Secundària		A4 B1 C2, C3	A4 B1, B5	A2, A4 B1, B3 C1, C4
Mostra B: Professor Secundària	A1, A3 B2, B6 C1		A1, A3 B1, B2, B4, B5, B6 C3	A2, A3, A4 B1, B3, B4, B5, B6 C3
Mostra C: Estudiant Prof. Primària	A2, A3, A5 B2, B3, B6	A2, A5		A3, A4 B1, B2, B5, B6
Mostra D: Professor Primària	A1, A3, A5 B6 C2	A1 C1, C2	A1, A2 C2	

Taula 44. Comparació general de les creences de les quatre mostres

En la taula observem, primerament, que és possible (degut a les característiques dels criteris emprats) que *a* sigui semblant a *b* i a *c* però que *b* i *c* no siguin semblants entre ells (és a dir, que no es compleix la propietat transitiva). Tot i així, si una mostra té un ítem semblant a les altres tres considerarem que aquest ítem és molt comú a les quatre mostres, ja que si en algunes de les relacions no ho és serà per poc, i en tot cas, explicarem el cas amb detall per entendre les sotileses que es puguin donar. En el cas de les diferències aquest raonament no seria vàlid, ja que per lògica no es compleix la propietat transitiva, i cal estudiar amb més detall entre quines mostres es troben les diferències de cada ítem. Resumidament, extraiem de la taula:

- Ítems molt comuns a les quatre mostres: A4, B1, B5, C3.
- Ítems molt diferents entre les quatre mostres: A1, A2, A3, A5, B2, B3, B6, C1, C2.
- Ítems ni molt comuns, ni molt diferents: B4, C4.

Fixant-nos detalladament en els ítems que no ens han sortit ni comuns ni diferents, observem que B4 encaixa millor en ítems comuns (ja que no ha sortit comú per poc) i C4 en diferents. En el cas de l'ítem C2 (importància d'estratègies), tot i sortir que és molt diferent a les quatre mostres, això es deu a que en la mostra D la caixa té amplitud 0, però en realitat les quatre mostres han tret resultats molt per sota del 0. Per tant, considerarem que l'ítem C2 és comú a les quatre mostres.

Quan en fem l'anàlisi més exhaustiva, validarem si tot aquest etiquetatge ha estat encertat. Ens queda, doncs:

- Ítems comuns a les quatre mostres: A4, B1, B4, B5, C2, C3.
- Ítems diferents entre les quatre mostres: A1, A2, A3, A5, B2, B3, B6, C1, C4.

En el cas dels ítems semblants entre les quatre mostres, serà interessant descriure aquelles creences que tots tenen en comú, independentment de l'etapa educativa i de l'experiència docent. En el cas dels ítems que són diferents, serà interessant analitzar quins factors (etapa educativa i/o experiència docent) influeixen en la divergència de creences.

Estudiant amb deteniment els resultats exposats en la taula anterior, hem decidit finalment fer una subdivisió dels ítems diferents entre les quatre mostres, tenint en compte entre quines mostres la diferència resulta més significativa. Finalment, ens queden els següents quatre grups:

- Creences comuns a les quatre mostres: A4, B1, B4, B5, C2, C3.
- Creences A *versus* D: A1, A3, A5, B6.
- Creences A *versus* B: B2, C1, C4.
- Creences C *versus* tots els altres: A2, B3.

Creences comuns a les quatre mostres

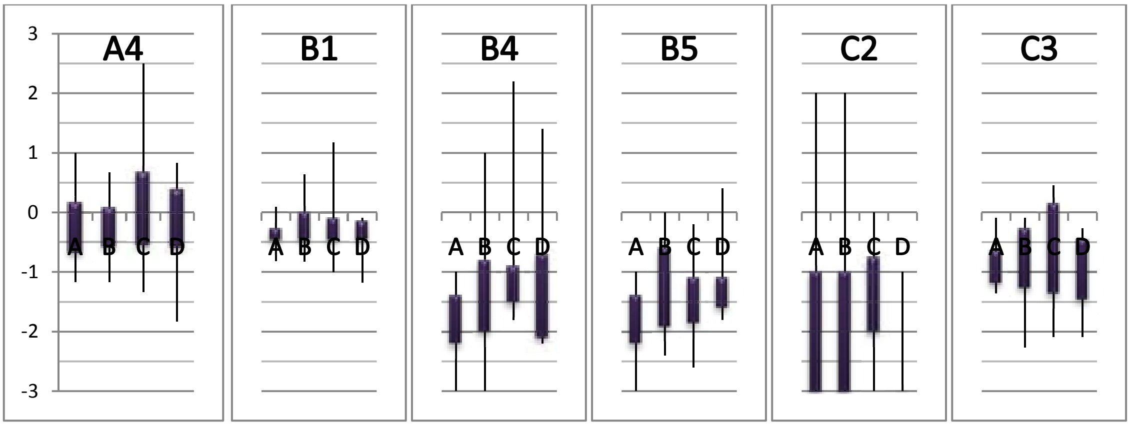
Les creences que, segons els resultats obtinguts, són força comuns a les quatre mostres, són les següents:

A. Creences sobre l'objecte *problema de matemàtiques*
4) Precisió de l'enunciat: Les mostres no es posicionen sobre si és important o no.

B. Creences sobre la naturalesa de l'activitat de resolució de problemes
1) Caràcter instrumental / investigatiu de l'activitat matemàtica: Les mostres no es posicionen ni cap a un caràcter totalment instrumental de les matemàtiques ni cap a un de totalment investigatiu.
4) Èmfasi sobre el producte o el procés: Les quatre mostres estan d'acord en què és tan important el procés com el producte.
5) Caràcter lineal de l'activitat de resolució de problemes: Tenen l'opinió comú de que el procés de resolució de problemes és inevitable que estigui ple d'entrebancs (intents fallits i camins equivocats, incorreccions i proves).

C. Creences sobre el procés d'ensenyament-aprenentatge de la resolució de problemes
2) Importància de l'aprenentatge d'estratègies: Tot i que les dades d'algunes de les mostres són molt disperses, totes es posicionen clarament en que les estratègies són importants.
3) Importància de la millora del control: Hi ha un posicionament comú a l'hora de donar importància al control cognitiu i dels estats d'ànim quan es resolen problemes.

A continuació mostrem els gràfics dels quatre ítems anteriorment comentats, on podem observar els resultats semblants de les quatre mostres:



Il·lustració 7. Creences comuns a les quatre mostres

En general, observem que estan d'acord en la meitat dels aspectes referents a la naturalesa de l'activitat de RP, tot i que en un dels aspectes més rellevants (caràcter de l'activitat matemàtica) no es posicionen. En els altres dos ítems d'aquesta categoria (importància del procés / producte i caràcter lineal de la RP) tenen opinions afins a Schoenfeld. Els tres ítems restants (precisió de l'enunciat, importància de les heurístiques i importància de la millora del control), es posicionen de forma més o menys ferma però sempre en consonància a *pensar matemàticament*.

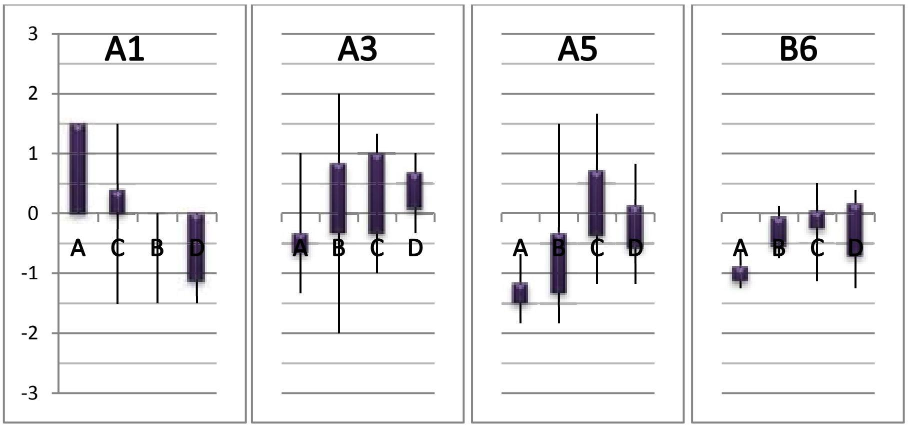
Creences Mostra A (Estudiants de Professor de Secundària) versus Mostra D (Professors de Primària)

Les creences en les quals, segons els resultats obtinguts, la màxima divergència d'opinions es troba entre els individus de la mostra A i els individus de la mostra D (generalment secundària – primària), són les següents:

A. Creences sobre l'objecte *problema de matemàtiques*
1) Flux entorn -> problema escolar: Els que més fan la identificació de problema amb context real són els professors de primària, els professors de secundària no es posicionen, els estudiants de professor de primària tendeixen a no fer-la i els estudiants de professor de secundària no fan aquesta identificació.
3) Identificació "enunciat verbal" – problema: Tot i que les posicions no són extremes, els estudiants de professor de secundària no fan tant aquesta identificació, mentre que els professors de primària són els que la fan de forma més clara. Els professors de secundària i els estudiants de professor de primària tendeixen a fer-la, però les opinions dins de cada mostra són més diverses.
5) Caràcter tancat del propòsit: El canvi d'opinió més marcat en aquest ítem es troba entre les mostres de secundària i les de primària, sent els estudiants de professor els que tenen opinions més extremes, i on.

B. Creences sobre la naturalesa de l'activitat de resolució de problemes
6) Rellevància de la RP dins de l'activitat matemàtica: Els únics que troben que els problemes són l'aspecte més rellevant de les matemàtiques són els estudiants de professor de

secundària; les altres tres mostres, tot i no obtenir exactament els mateixos resultats, tendeixen totes a no posicionar-se sobre la qüestió.



Il·lustració 8. Creences A *versus* D

Notem primer, que el fet que la divergència més gran d'opinions estigui entre la mostra A i la mostra D a priori sembla el més natural, ja que no tenen en comú ni l'etapa educativa ni l'experiència. Tot i així, només són quatre els ítems on aquesta divergència és significativa, i tres d'aquests estan relacionats amb la concepció que tenen sobre què és un problema de matemàtiques. Per tant, sembla que és en aquest aspecte on més influencia el fet de ser de l'etapa primària o secundària, matisat amb el fet de tenir experiència docent o no tenir-la. L'altre ítem que hem col·locat en aquest conjunt és el que ens parla de la rellevància de la RP en les matemàtiques, però en aquest ítem la diferència no és tant primària - secundària o experiència docent - no experiència docent, sinó estudiant de professor de secundària *versus* tots els altres. Malgrat no deduir-se de les dades, una explicació podria ser que l'experiència docent del professor de secundària ha afectat les seves creences sobre la rellevància de la RP, o simplement que aquest mai l'ha considerada molt rellevant.

Creences Mostra A (Estudiants de Professor de Secundària) versus Mostra B (Professors de Secundària)

Les creences en les quals, segons els resultats obtinguts, la màxima divergència d'opinions es troba entre els individus de la mostra A i els individus de la mostra B (generalment A-D *versus* B-C), són les següents:

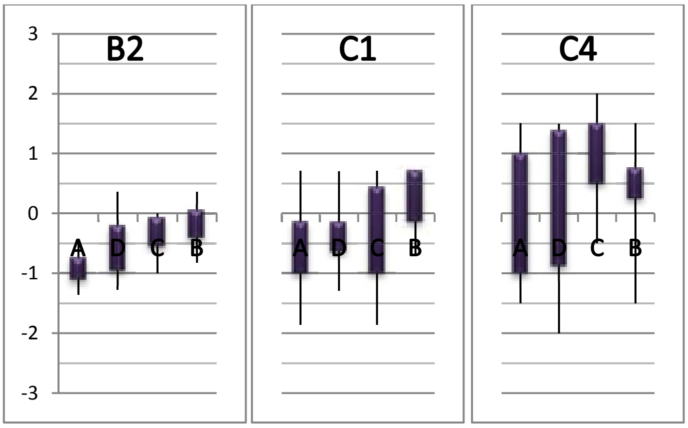
B. Creences sobre la naturalesa de l'activitat de resolució de problemes

2) Caràcter rutinari / creatiu de l'activitat matemàtica escolar: Des dels estudiants de professor de secundària, que es posicionen envers unes matemàtiques escolars creatives, fins als professors de secundària, que no es posicionen, hi ha una escala gairebé lineal de les mostres A – D – C – B.

C. Creences sobre el procés d'ensenyament-aprenentatge de la resolució de problemes

1) Subsidiarietat de la RP a l'aprenentatge d'eines matemàtiques: Els estudiants de professor de secundària tendeixen a pensar aprendre coneixements de matemàtiques només ajuda a l'èxit en resolució de problemes, mentre que els professors de secundària tendeixen a pensar que el garanteix. Les mostres de primària es posicionen de forma menys clara, mostrant una lleu tendència a no creure que els coneixements garanteixin l'èxit en RP (tot i que els estudiants de professor de primària tenen opinions molt diferents entre ells).

4) Importància de la conversió dels problemes en no-problemes: En aquest cas, tot i tenir en els extrems les dues mostres de secundària, es creen clarament dos subgrups: els estudiants de professor de secundària i els professors de primària tenen, cada mostra, opinions divergents, però en mitjana no es posicionen al respecte; en canvi, els estudiants de professor de primària i els professors de secundària no divergeixen tant en les seves opinions i ambdós creuen que és important ensenyar mètodes-tipus de resolució de problemes.



Il·lustració 9. Creences A *versus* B

En aquestes tres creences-tipus, molt claus a l'hora de posar en pràctica la RP a classe (classes rutinàries/creatives, importància d'ensenyar coneixements matemàtics i mètodes-tipus de resolució de problemes), veiem que apareixen dues "aliances" aparentment estranyes: d'una banda, entre els estudiants de professor de secundària i els professors de primària, i de l'altra, entre els estudiants de professor de primària i els professors de secundària. En tots els casos, la primera parella té unes creences més afins a Schoenfeld, mentre que l'altra se n'allunya més. D'aquests resultats se'n poden fer moltes lectures diferents, però en totes el que queda clar és que, tant en primària com en secundària, l'experiència docent està relacionada amb les creences respecte al paper de la RP a la classe de matemàtiques.

Creences Mostra C (Estudiants de Professor de Primària) *versus* les altres mostres

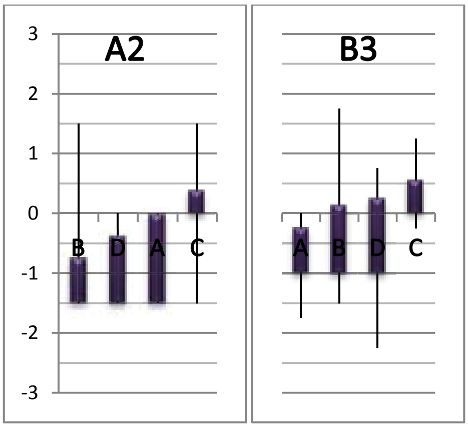
En els següents dos ítems, hi ha una opinió força comú entre les mostres A, B i D, i en canvi la mostra C (estudiants de professor de primària) divergeix amb aquesta opinió:

A. Creences sobre l'objecte *problema de matemàtiques*

2) Presència de referents matemàtics identificables a l'enunciat: Mentre que la majoria de mostres pensen que la presència de referents matemàtics en l'enunciat que portin a identificar el problema com a "problema de matemàtiques" i dins de determinades tipologies no és un aspecte determinant, els estudiants de professor de primària no es posicionen gaire, però tendeixen a pensar que sí que ho és.

B. Creences sobre la naturalesa de l'activitat de resolució de problemes

3) Contextualització matemàtica de l'activitat de RP: De forma anàloga a l'ítem anterior, mentre que les tres altres mostres creuen que el context educatiu (o la situació/moment on és proposada la tasca/problema) no sempre ha de determinar les tècniques o estratègies a utilitzar en la RP, els estudiants de professor de primària tendeixen a pensar que sí.



Il·lustració 10. Creences C *versus* les altres mostres

En aquests dos ítems es dóna el mateix esquema: mentre que les mostres A, B i D tenen creences properes al *pensar matemàticament* de Schoenfeld, la mostra C (estudiants de professor de primària) les té contràries. Tots dos ítems estan relacionats amb l'opinió (en aquest cas dels estudiants de professor de primària) que els problemes proposats a classe siguin fàcils de classificar en un tipus de problemes concrets i en un tema concret, per tal de facilitar les tècniques a utilitzar per resoldre el problema.

Visió global de les comparacions de les creences

Després d'aquesta anàlisi exhaustiva de les semblances i diferències entre les creences de les quatre mostres, podem donar la visió global que n'hem extret.

Entre les creences més comuns a les quatre mostres predominen les relatives a la naturalesa de l'activitat de resolució de problemes, tot i que no les més claus. Les creences sobre l'objecte *problema de matemàtiques* generalment depenen de l'etapa educativa, sent les mostres de secundària més afins al sistema de creences de Schoenfeld. En canvi, en les creences més relacionades amb el paper de la RP a l'aula, són els estudiants de professor de secundària juntament amb els professors de primària els que tenen unes creences més properes a *pensar matemàticament*, mentre que les altres dos mostres se n'allunyen. D'altra banda, constatem un allunyament de la mostra dels estudiants de professor de primària respecte les altres tres mostres en relació a la creença que aquests tenen en quant a la necessitat de que els problemes siguin fàcils de classificar per tal de facilitar la tria de tècniques de resolució.

5.2. Anàlisi qualitativa del qüestionari de creences

Després d'obtenir un estat general en relació a les creences de les quatre mostres mitjançant les preguntes del qüestionari de resposta tancada, volem fer una aproximació mixta quantitativa-qualitativa a les dades obtingudes per les preguntes de resposta oberta.

Concretament, ens centrarem en la definició de problema que ens donen, i en els exemples que posen de problema i d'exercici.

En quant a la *definició de problema*, en general tothom està d'acord en que és una *situació per a resoldre*, però alguns individus donen diferents matisos en quant al tipus de situació i en quant a què cal aplicar per a resoldre-la. Respecte a la *formulació de problemes i d'exercicis*, ens centrarem en el contingut matemàtic d'aquests i en el tipus de context utilitzat. Segons aquests criteris, hem fet un estudi quantitatiu de les respostes de les quatre mostres que ha donat com a resultat:

	Total A N = 13		Total B N = 11		Total C N = 16		Total D N = 10		Total N = 50	
DEFINICIÓ DE PROBLEMA		*%*		*%*		*%*		*%*		*%*
Tipus de situació:										
Context real	0	*0*	0	*0*	2	*12,5*	5	*50*	7	*14*
Nova, sense camí directe, no la sabem resoldre	8	*61,5*	4	*36,4*	5	*31,3*	2	*20*	19	*38*
Es resol aplicant:										
Coneixements / Procediments	10	*77*	4	*36,4*	6	*37,5*	5	*50*	25	*50*
Heurístiques / Raonaments	8	*61,5*	7	*63,7*	1	*6,3*	3	*30*	19	*38*
FORMULACIÓ DE PROBLEMES		*100*		*90,9*		*43,7*		*100*		*80*
Contingut										
1. Numeració i càlcul	10	*38,5*	9	*45*	13	*93*	12	*60*	44	*55*
1.1. Aritmètics	0	*0*	0	*0*	12	*86*	8	*40*	20	*25*
1.2. Altres	10	*38,5*	9	*45*	1	*7*	4	*20*	24	*30*
2. Canvi i relacions	2	*7,7*	4	*20*	0	*0*	2	*10*	8	*10*
3. Espai i forma	14	*53,8*	7	*35*	1	*7*	6	*30*	28	*35*
Context										
Real	7	*26,9*	13	*65*	14	*100*	17	*85*	51	*64*
Matemàtic	19	*73,1*	7	*35*	0	*0*	3	*15*	29	*36*
FORMULACIÓ D'EXERCICIS		*100*		*90,9*		*25*		*90*		*72*
Contingut										
1. Numeració i càlcul	5	*19,2*	5	*25*	7	*87,6*	7	*39*	24	*33*
2. Canvi i relacions	8	*30,8*	7	*35*	0	*0*	1	*5,5*	16	*22*
3. Espai i forma	13	*50*	6	*30*	1	*12,4*	10	*55,5*	30	*42*
5. Estadística i atzar	0	*0*	2	*10*	0	*0*	0	*0*	2	*3*
Context										
Real	5	*19,2*	8	*40*	7	*87,6*	2	*11*	22	*30,5*
Matemàtic	21	*80,8*	12	*60*	1	*12,4*	16	*89*	50	*69,5*

Taula 45. Estudi de la definició de problema i la formulació de problemes i exercicis

Abans de començar l'anàlisi farem alguns comentaris per a entendre millor els resultats mostrats en la taula anterior. En tots els casos, la primera columna és la freqüència absoluta. Cal tenir en compte, però, que en el cas de la formulació de problemes i exercicis a cada individu se li demanaven dos exemples de cada, per tant la freqüència es refereix al nombre d'activitats i no al nombre d'individus. La segona columna és el percentatge: en el cas de la definició de problema sobre el total de la mostra, en el cas de la formulació d'activitats sobre el nombre total d'activitats proposades, i no sobre el nombre d'activitats que s'haurien d'haver proposat si tots els individus haguessin contestat. El percentatge de la mostra que ha formulat problemes / exercicis, el podem trobar en la fila *formulació de problemes* i *formulació d'exercicis.* A primer cop d'ull, podem observar que la participació ha estat molt alta (entre el 90 i el 100 %), a excepció de la mostra C (43,7 i 25 %), fet que cal tenir en compte quan s'interpreta l'anàlisi dels resultats (tot i així al ser la mostra la més nombrosa, el nombre absolut d'individus que han contestat no és tan baix en comparació).

5.2.1. Definició de problema

Prenent com a denominador comú la consideració de que un problema és una *situació que cal resoldre*, ens hem fixat, d'una banda, en dos dels aspectes que caracteritzen aquesta situació que més han usat estudiants i professors (situació de context real, i situació que no té camí directe de resolució), i de l'altra, en les eines aplicades per a resoldre-la (coneixements/procediments o heurístiques/raonaments).

La definició de problema com a *situació quotidiana* és una creença bàsicament de l'educació primària: ni estudiants de professor ni professors de secundària l'han esmentada, mentre que aproximadament la meitat dels professors de primària i un quart dels estudiants de professor de primària han considerat que els problemes són, per definició, situacions de context real. Una definició que ho exemplifica és la següent (extreta d'un professor de primària):

D4: *Un problema és resoldre qualsevol situació de la vida quotidiana en la què necessitem fer un càlcul matemàtic.*

Ens fixem, a més del context real, en què el mètode per a resoldre el problema considera que és sempre un *càlcul* matemàtic, i per tant exclou, per exemple, tot problema geomètric que es pugui resoldre sense nombres (i que no sigui de context real, per suposat). La idea que aquest professor de primària té de l'objecte *problema de matemàtiques* es cenyeix a unes creences molt concretes i molt tancades.

Respecte al fet de considerar que un problema és sempre una situació nova, de la qual no en sabem un camí directe de resolució, és una concepció que tenen sobretot els estudiants per a professor de secundària (2/3 d'aquests), mentre que la proporció baixa a 1/3 en professors de secundària i estudiants de professor de primària, i 1/5 part en el cas dels professors de primària. Dades de les quals podem extreure'n que, per una banda, aquesta creença pren més força en persones amb educació universitària científica (estudiants de professor i professors de secundària), i per l'altra, que la creença va desapareixent a mesura que es té més pràctica docent (el que explicaria que la proporció de professors és sempre menor a la dels estudiants de professor del mateix nivell).

En quant a les eines utilitzades per a resoldre problemes (cal dir que no tots els individus ho han especificat en la definició perquè no es demanava explícitament), en general es dóna més importància als coneixements i procediments matemàtics que als raonaments o heurístiques però no hi ha una gran diferència (50-40%). Els casos excepcionals són els estudiants de professor de primària, on la diferència entre coneixements-raonaments és més acusada (37,5-6%), i l'excepció dels professors de secundària, on la proporció és 30%-60% aproximadament a favor dels raonaments. Cal assenyalar també que, amb diferència, els que més han comentat en la definició els mètodes de resolució han estat els estudiants de professor de secundària, i els que menys els estudiants de professor de primària.

Un exemple tant de l'esment de les tècniques utilitzades com de la concepció de problema com a situació sense resolució directa, el tenim a continuació (d'un estudiant de professor de secundària):

A6: *Un problema és una qüestió que no es pot resoldre fàcilment, ni aplicant tècniques mecàniques, sinó que cal reflexionar i connectar els coneixements adquirits per resoldre-la. Ha d'estar adaptat al nivell del que l'ha de resoldre, perquè no sigui ni molt fàcil ni impossible.*

El contrast amb la definició del professor de primària mostrada anteriorment és molt gran: no estan parlant del mateix concepte.

5.2.2. Formulació de problemes

La diferència de concepcions de l'objecte *problema de matemàtiques* observada en les definicions la copsem també en els exemples posats per les quatre mostres.

Respecte a la creença de que els problemes tenen sempre context real observada en les definicions de les mostres de primària, podem corroborar que també es dóna en els exemples que en donen: el 100% dels problemes proposats pels estudiants de professor de primària i gairebé el 90% dels proposats pels professors de primària són de context real. Per part de les mostres de secundària, no es veu tal identificació: els estudiants han posat més exemples de problema de context matemàtic i els professors més de context real, però en proporcions no significatives.

Pel que fa als continguts, cal destacar gairebé el 90% (estudiants) i 40% (professors) de les mostres de primària que han posat com a exemple problemes aritmètics, enfront al 0% de la mostra de secundària.

A continuació, mostrem dos exemples contraposats de problemes: un problema aritmètic de context real proposat per un estudiant de professor de primària i un problema geomètric de context matemàtic proposat per un estudiant de professor de secundària.

C6: *La mare m'ha donat 3,40 € per anar a comprar. Si m'han tornat 1,10 €, quant m'ha costat la compra?*

A2: *Per què els angles d'un triangle sumen 180º?*

5.2.3. Formulació d'exercicis

En quant al context utilitzat, majoritàriament és matemàtic (excepte la mostra C, que no trobem significativa perquè només ha posat exemples un 25% de la mostra). Les mostres on la proporció d'exercicis de context matemàtic és més alta són la d'estudiants de professor de secundària (al voltant del 80%) i els professors de primària (al voltant del 90%). Les raons, però, les considerem molt diferents, ja que en els estudiants de professor la dada no denota cap creença concreta (en la formulació de problemes també han posat molts més exemples de context matemàtic), sinó més aviat es deu al costum de resoldre ells mateixos problemes de context matemàtic en els últims estudis cursats. En canvi, considerem que en el cas dels professors de primària sí que podem extreure dels resultats una tendència a identificar exercicis amb context matemàtic, recolzada per la seva identificació de problema amb context real. En quant als continguts utilitzats, no trobem que hi hagi cap dada significativa, més enllà d'una certa tendència general al càlcul d'àrees geomètriques (possiblement motivada pel fet que no podien posar com a exemple cap càlcul numèric).

A continuació mostrem dos exemples contraposats d'exercicis formulats per professors de primària i secundària. El primer, un càlcul d'àrees (exemple proposat per molts), i el segon, un exercici de context real que potser per a alguns podria semblar un problema (és el típic *problema* de sistemes d'equacions).

D8: *Calcular la superfície d'unes figures geomètriques.*

B5: *Si em prenc 2 cafès i un entrepà em cobren 3,75 €. Si em prenc 1 cafè i 3 entrepans em cobren 6,25 €. Quant costa 1 cafè? I un entrepà?*

5.2.4. Dicotomia problema-exercici

Mostra A: Els estudiants de professor de secundària no diferencien els problemes i els exercicis segons el seu context o contingut matemàtic: en ambdós tipus d'activitats mostren una tendència clara al context matemàtic (entre el 70 i 80% d'activitats de cada tipus) i pel contingut geomètric (al voltant del 50% d'activitats en els dos casos). L'única cosa que, en general, diferencia els problemes dels els exercicis per a ells, és l'existència o no d'un camí directe de resolució.

A3.

Problema: *Dibuixa 2 quadrats la suma dels quals doni un quadrat de costat 6.*

Exercici: *Si tenim un triangle rectangle de costats 8 cm i 7 cm, quant mesura la seva hipotenusa?*

Mostra B: Els professors de secundària no tenen unes creences unificades en quant a la diferència entre problema i exercici. No hi ha diferència en quant als continguts, molt homogenis en ambdós casos, i poques en quant al context real o matemàtic (en el cas dels problemes 60-40%, en el cas dels exercicis, 40-60%). Hi ha una certa tendència a considerar que per a resoldre problemes es fa més ús de raonament i per a resoldre exercicis més ús de procediments.

B3.

Problema: *El cap d'un drac amida 9 cm. La cua amida tant com el cap més la meitat del cos, i el cos amida la suma de les mides del cap i la cua. Quant amida el drac?*

Exercici: *Quina probabilitat hi ha que al tirar un dau hem surti un 3?*

Mostra C: Tenint en compte els pocs problemes i exercicis formulats pels estudiants de professor de primària, ens basarem en aquests per comentar els resultats. En general, no es detecta que diferenciïn de forma uniforme entre ells problema d'exercici, almenys en els termes que hem analitzat. En els dos casos, al voltant del 90% dels continguts són de càlcul (en el cas dels problemes, la gran majoria aritmètics), i la resta de geometria (no tenen gaire varietat). En el context, tant en problemes com en exercicis predomina amb diferència el context real, en els problemes el 100% i en els exercicis el 88%.

C10.

Problema: *En Marc té 14 anys i el seu pare 42, amb quina edat el pare del Marc va tenir el seu fill?*

Exercici: *En Marc té 14 anys i el seu pare 42, quants anys és més gran el pare que el fill?*

Mostra D: En els professors de primària la dicotomia entre problema i exercici és molt marcada, i bàsicament es basa en el tipus de context: real per als problemes (gairebé el 90 %), i matemàtic per als exercicis (gairebé el 90 % també). En quant als continguts, queden repartits de forma força equitativa entre càlcul i geometria, i no hi ha diferències destacables ja que influeix el fet de no deixar que els exercicis siguin càlcul d'operacions.

D4.

Problema: *En un dipòsit hi ha 3591 litres d'oli per envasar en garrafes de 3,5 litres cadascuna. Quantes garrafes necessitaran?*

Exercici: *Classifica figures geomètriques en paral·lelograms i no paral·lelograms.*

5.3. Anàlisi quantitativa del protocol de problemes

Començarem l'anàlisi caracteritzant cadascuna de les mostres segons els seus coneixements, tant en relació a la concentració/dispersió de les dades com al nivell obtingut. Posteriorment, explicitarem les semblances i diferències en els nivells de coneixements entre cada parell de mostres, per a fer, finalment, una síntesi comparativa de les quatre mostres, que ens permetrà establir si hi ha alguna relació entre l'etapa educativa o l'experiència docent de les mostres i els nivells obtinguts per als diferents tipus de coneixement. Acabarem l'apartat amb un anàlisi dels nivells de coneixement de les mostres en relació als cinc continguts estudiats, anàlisi que hem fet comparant els resultats de les quatre mostres per a que no influenciï la diferència de dificultat entre les preguntes de cada tipus de contingut.

5.3.1. Caracterització de cadascuna de les mostres

A continuació explicarem les informacions més rellevants que podem extreure del gràfic de cada mostra pel que fa a cada tipus de coneixement, tant en relació a la concentració/dispersió de les dades (això ens ho mostrarà l'interval interquartílic IT=Q3-Q1) com a la posició obtinguda.

Pel que fa a la concentració de les dades, considerarem:

- $0 \leq IT < 0,5$ Molt concentrades
- $0,5 \leq IT \leq 1$ Bastant concentrades

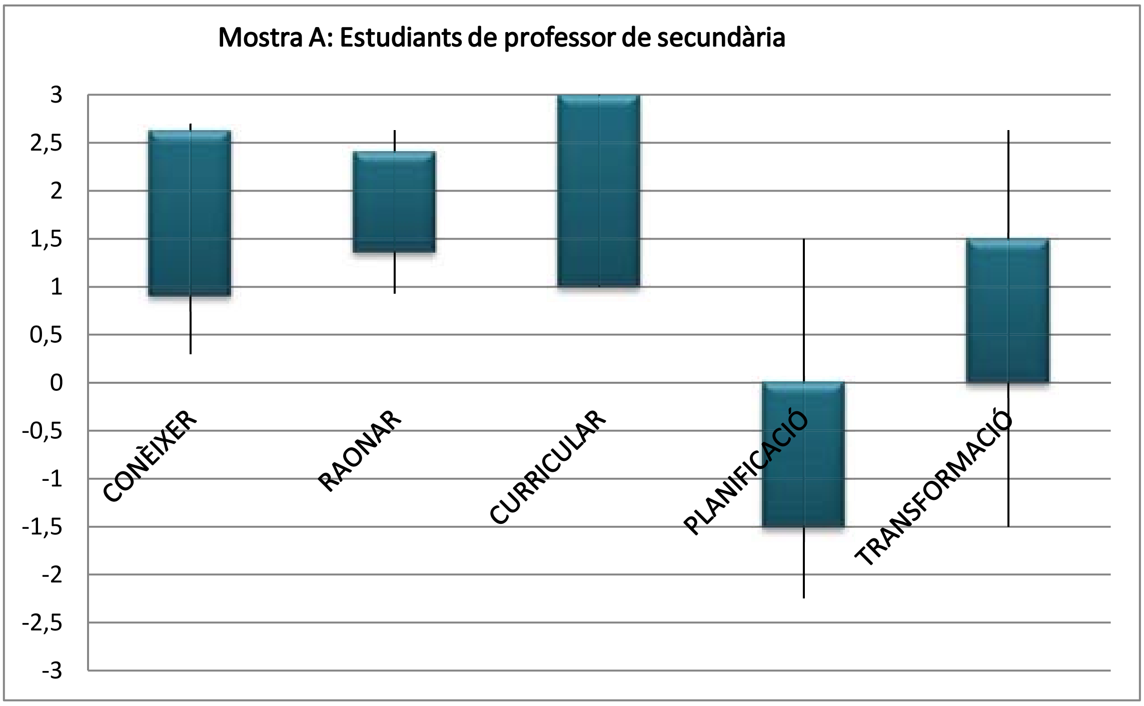
- 1 < IT ≤ 6 Disperses

Pel que fa a la posició, fixant-nos en la mitjana de cada tipus de coneixement, considerarem:

- [2, 3] Nivell molt alt
- [1, 2) Nivell alt
- [0, 1) Nivell just
- [-1, 0) Nivell baix
- [-2, -1) Nivell molt baix
- [-3, -2) Nivell nul

MOSTRA A: Estudiants de professor de secundària

Estudiarem, en primer lloc, els resultats corresponents als estudiants de professor de secundària. Aquí presentem el diagrama de caixes que hem fet a partir dels resultats obtinguts i també les mitjanes de cada tipus de coneixement. Posteriorment fem l'explicació dels resultats a partir de l'anàlisi del diagrama i les mitjanes.



Il·lustració 11. Coneixements dels estudiants de professor de secundària

CONÈIXER 1,72	Recordar	1,64
	Reconèixer	1,8
RAONAR 2	Analitzar	2,47
	Integrar	2,63
	Generalitzar	2,54
	Justificar	0,35
CURRICULAR 2,23		
PLANIFICACIÓ	Planificar	-1,04

	-0,87	Adaptar	-0,69
TRANSFORMACIÓ	0,63	Representar	0
		Avaluar	1,27

Taula 46. Mitjanes dels coneixements de la mostra A

Conèixer: Les dades són molt disperses. El nivell de coneixements dels estudiants de professor de secundària és alt. Tendeixen a reconèixer amb més facilitat que no pas recordar.

Raonar: Les dades estan bastant concentrades. La nivell de raonament de la mostra és molt alt. Hi ha un molt alt nivell a l'hora tant d'analitzar, d'integrar i de generalitzar; sent l'excepció el nivell de justificar, sent només just.

Curricular: Les dades són molt disperses, i el coneixement mitjà molt alt.

Planificació: Les dades són disperses, i els resultats són baixos, sent molt baixos en planificar problemes i baixos en adaptar-los.

Transformació: Les dades són disperses. El nivell del coneixement de transformació és just, tot i que concretament en avaluar les respostes dels estudiants tinguin un nivell alt.

En síntesi, si classifiquem els diferents tipus de coneixements segons la concentració de les dades i el nivell de la mostra tenim les següents taules:

Dades molt concentrades	Dades bastant concentrades	Dades disperses
	Raonar	Conèixer, Curricular, Planificació, Transformació

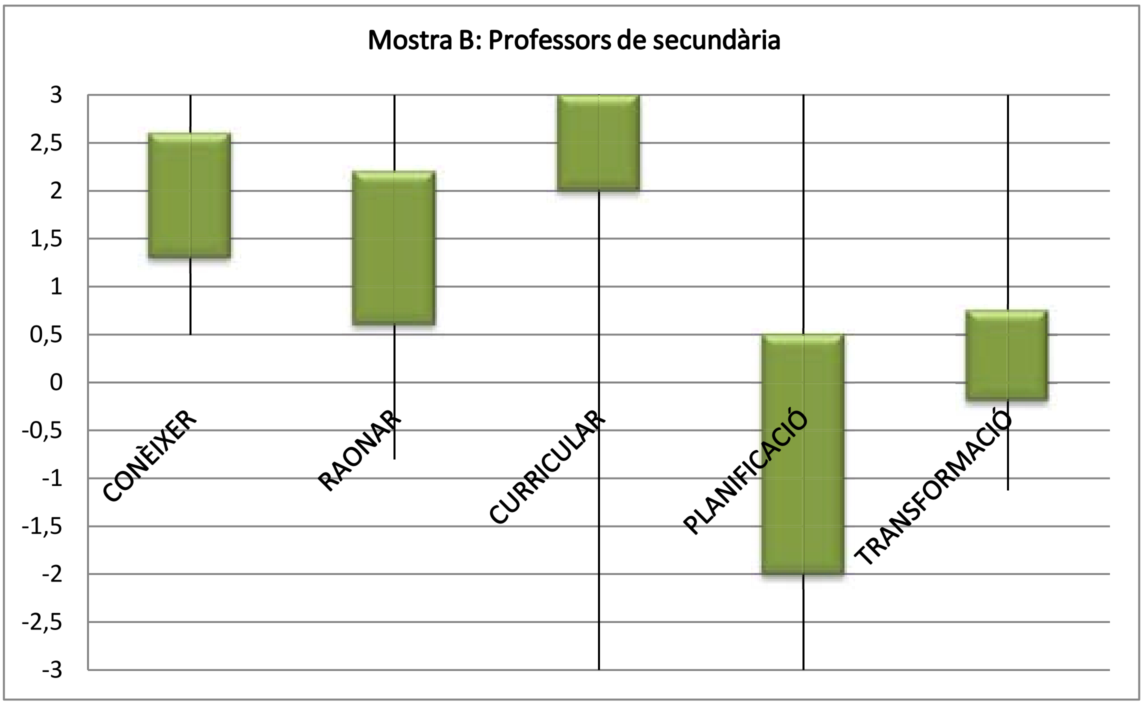
Taula 47. Concentració de les dades sobre coneixements de la mostra A

[-3, -2)	[-2, -1)	[-1, 0)	[0, 1)	[1, 2)	[2, 3]
		Planificació	Transformació	Conèixer	Raonar, Curricular

Taula 48. Nivell de coneixements de la mostra A

MOSTRA B: Professors de secundària

A continuació, estudiarem els resultats corresponents als professors de secundària. Presentem el diagrama de caixes que hem fet a partir dels resultats obtinguts i també les mitjanes de cada tipus de coneixement. Posteriorment fem l'explicació dels resultats a partir de l'anàlisi del diagrama i les mitjanes.



Il·lustració 12. Coneixements dels professors de secundària

CONÈIXER 1,99	Recordar	2,03
	Reconèixer	1,91
RAONAR 1,4	Analitzar	1,4
	Integrar	1,47
	Generalitzar	1,91
	Justificar	0
CURRICULAR 1,73		
PLANIFICACIÓ -0,64	Planificar	-1,09
	Adaptar	0,27
TRANSFORMACIÓ 0,44	Representar	0,55
	Avaluar	0,34

Taula 49. Mitjanes de coneixements de la mostra B

Conèixer: Les dades són disperses. El nivell de conèixer dels professors de secundària és alt, però podríem considerar-lo molt alt ja que només si falta una dècima. Sobretot és molt alt en recordar els conceptes.

Raonar: Les dades són disperses. El nivell de raonament de la mostra és alt. Hi ha un nivell alt a l'hora tant d'analitzar, integrar i generalitzar; sent l'excepció el nivell de justificar, sent només just.

Curricular: Les dades estan bastant concentrades, i el coneixement mitjà és alt.

Planificació: Les dades són disperses, i el nivell baix, sobretot en planificar problemes, on el nivell és molt baix, i no tant en adaptar, on el nivell és just.

Transformació: Les dades estan bastant concentrades. El nivell de coneixements és just, tant a l'hora de representar els enfocament d'un problema com a l'hora d'avaluar.

En síntesi, si classifiquem els diferents tipus de coneixements segons la concentració de les dades i el nivell de la mostra tenim les següents taules:

Dades molt concentrades	Dades bastant concentrades	Dades disperses
	Curricular, Transformar	Conèixer, Raonar, Planificació

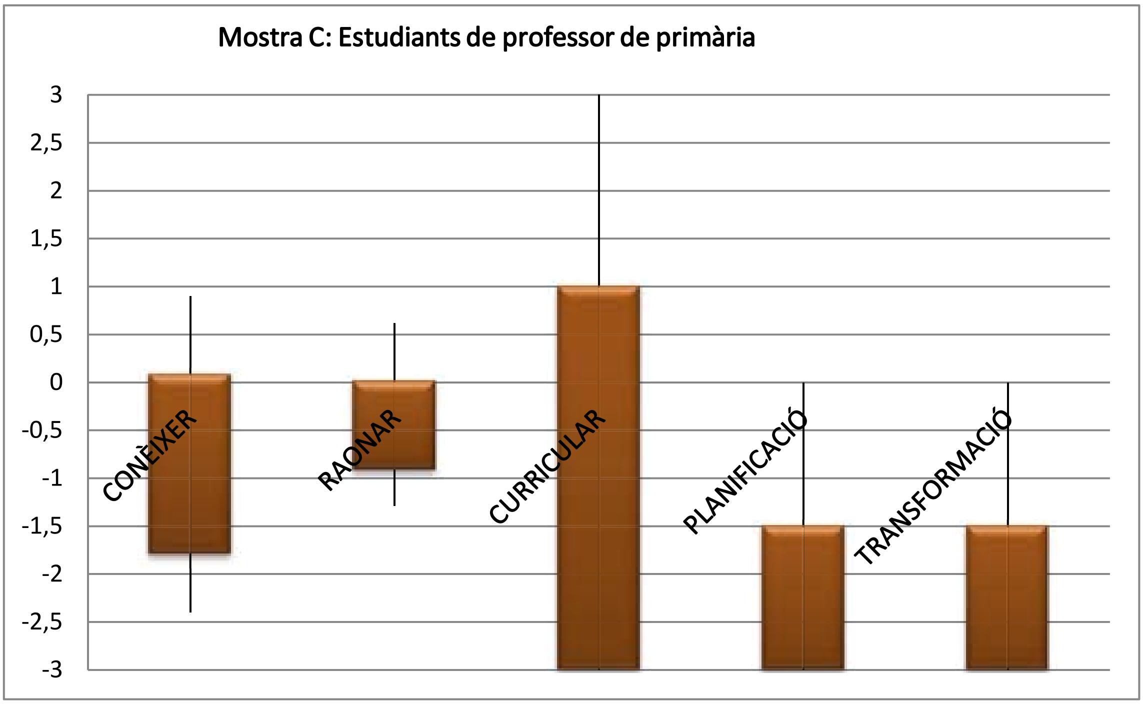
Taula 50. Concentració de les dades sobre coneixements de la mostra B

[-3, -2)	[-2, -1)	[-1, 0)	[0, 1)	[1, 2)	[2, 3]
		Planificació	Transformació	Raonar, Curricular	Conèixer

Taula 51. Nivell de coneixements de la mostra B

MOSTRA C: Estudiants de professor de primària

A continuació, estudiarem els resultats corresponents als estudiants de professor de primària. Presentem el diagrama de caixes que hem fet a partir dels resultats obtinguts i també les mitjanes de cada tipus de coneixement. Posteriorment fem l'explicació dels resultats a partir de l'anàlisi del diagrama i les mitjanes.



Il·lustració 13. Coneixements de la mostra C

CONÈIXER -0,89	Recordar	-0,43
	Reconèixer	-1,35
RAONAR -0,43	Analitzar	-0,75
	Integrar	-1,73
	Generalitzar	1,5

		Justificar	-0,75
CURRICULAR	-1,13		
PLANIFICACIÓ	-2,2	Planificar	-2,53
		Adaptar	-1,88
TRANSFORMACIÓ	-2,39	Representar	-2,25
		Avaluar	-2,53

Taula 52. Mitjanes de coneixements de la mostra C

Conèixer: Les dades són molt disperses. El nivell de coneixements dels estudiants de professor de primària és baix, i en especial en reconèixer el nivell és molt baix.

Raonar: Les dades estan bastant concentrades. El nivell de raonament de la mostra és baix, i desigual segons el tipus de raonament: en generalitzar tenen un nivell alt, baix en analitzar i justificar, i molt baix en integrar.

Curricular: Les dades són molt disperses (8 punts), i el coneixement mitjà molt baix.

Planificació: Les dades són disperses, i els resultats indiquen un nivell mitjà nul, sent nul en planificar problemes i molt baix en adaptar-los.

Transformació: Les dades són disperses, i els resultats indiquen un nivell nul, tant en representar com en avaluar.

En síntesi, si classifiquem els diferents tipus de coneixements segons la concentració de les dades i el nivell de la mostra tenim les següents taules:

Dades molt concentrades	Dades bastant concentrades	Dades disperses
	Raonar	Conèixer, Curricular, Planificació, Transformació

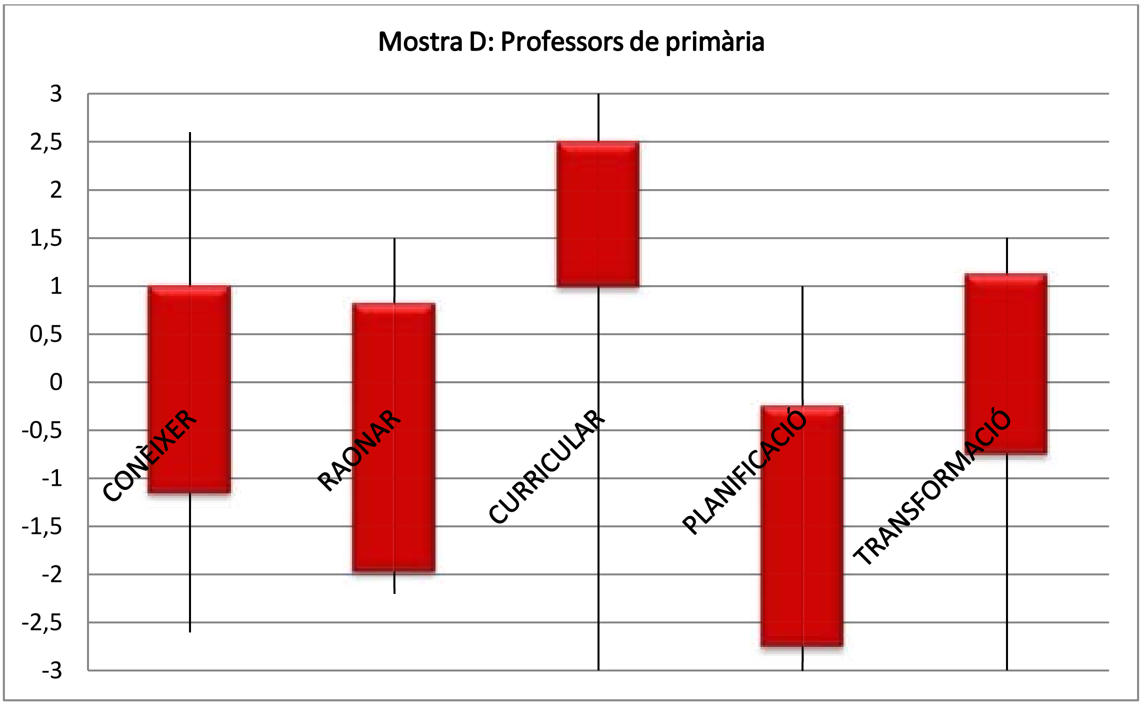
Taula 53. Concentració de les dades sobre coneixements de la mostra C

[-3, -2)	[-2, -1)	[-1, 0)	[0, 1)	[1, 2)	[2, 3]
Planificació Transformació	Curricular	Conèixer Raonar			

Taula 54. Nivell de coneixements de la mostra C

MOSTRA D: Professors de primària

A continuació, estudiarem els resultats corresponents als professors de primària. Presentem el diagrama de caixes que hem fet a partir dels resultats obtinguts i també les mitjanes de cada tipus de coneixement. Posteriorment fem l'explicació dels resultats a partir de l'anàlisi del diagrama i les mitjanes.



Il·lustració 14. Coneixements de la mostra D

CONÈIXER	0,07	Recordar	0,14
		Reconèixer	-0,06
RAONAR	-0,5	Analitzar	-0,47
		Integrar	-0,66
		Generalitzar	0
		Justificar	-0.9
CURRICULAR	0,8		
PLANIFICACIÓ	-1,5	Planificar	-2,1
		Adaptar	-0,3
TRANSFORMACIÓ	-0,19	Representar	-0,6
		Avaluar	0,23

Taula 55. Mitjanes de coneixements de la mostra D

Conèixer: Les dades són molt disperses. El nivell de coneixements dels professors de primària és just, i recorden millor que no pas reconeixen.

Raonar: Les dades són molt disperses. La nivell de raonament de la mostra és baix en tots els aspectes analitzats.

Curricular: Les dades són disperses, i el coneixement de la mostra just (tot i així, és el tipus de coneixement amb nivell més alt).

Planificació: Les dades són molt disperses, i els resultats indiquen un nivell mitjà molt baix, sent-ho molt més en planificar problemes que no pas en adaptar-los.

Transformació: Les dades són molt disperses, i els resultats indiquen un nivell baix. Té força millors resultats en avaluar que en representar.

En síntesi, si classifiquem els diferents tipus de coneixements segons la concentració de les dades i el nivell de la mostra tenim les següents taules:

Dades molt concentrades	Dades bastant concentrades	Dades disperses
		Conèixer, Raonar, Curricular, Planificació, Transformació

Taula 56. Concentració de les dades sobre coneixements de la mostra D

[-3, -2)	[-2, -1)	[-1, 0)	[0, 1)	[1, 2)	[2, 3]
	Planificació	Raonar Transformació	Conèixer Curricular		

Taula 57. Nivell de coneixements de la mostra D

5.3.2. Comparacions entre les mostres dos a dos

En aquest apartat ens proposem, una vegada descrits els resultats dels coneixements de cadascuna de les mostres, comparar-los entre si. Les quatre mostres es poden comparar de maneres molt diferents. Hem assajat algunes d'aquestes maneres i, finalment, com en el cas de les creences, la que ens sembla que s'ajusta més a la realitat és la que té en compte els quartils -enlloc de les mitjanes i la dispersió, com hem fet a l'hora de definir les mostres.

D'acord amb les dades obtingudes en relació als quartils de cada ítem (que podrem observar en els gràfics i també en les taules que mostrarem), podem explicitar les semblances i diferències entre cada parell de mostres. Per a fer-ho, ens fixarem en cada tipus de coneixement, i notarem aquells tipus que són semblants, aquells que són diferents, i aquells dels quals no podem afirmar ni una cosa ni l'altra, tot segons el criteri que descrivim a continuació.

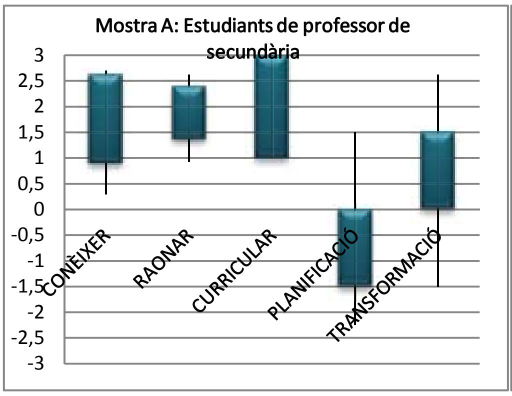
Considerarem *semblants* aquells coneixements on la diferència entre el seus primers quartils i la diferència entre els seus tercers quartils sigui menor o igual a 0,5. És a dir: $|\mathit{Q1}\text{-Q1}|\leq 0{,}5$ i $|\mathit{Q3}\text{-Q3}|\leq 0{,}5$

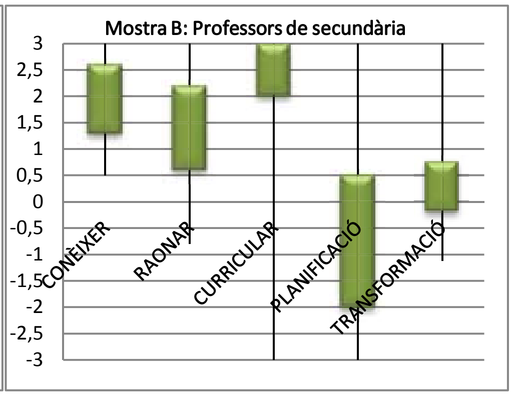
Considerarem *diferents* aquells coneixements que tenen intervals interquartílics (oberts) amb intersecció buida. És a dir: $(\text{Q1, Q3}) \cap (\mathit{Q1, Q3}) = \emptyset$

Tanmateix, pot haver-hi alguns tipus de coneixement que, tot i ser indecidibles, trobem interessant destacar, perquè estan a prop de poder-se considerar semblants o diferents. Afortunadament això succeeix en molts pocs casos, que es comentaran més endavant.

Comparació entre la mostra A (estudiants de professor de secundària) i la mostra B (professors de secundària)

Per tal de comparar aquestes dues mostres, presentem els diagrames de barres de cadascuna i el primer i tercer quartil de cada coneixement, amb els que hem decidit quins coneixements tenen semblants i diferents les mostres. A continuació comentem els resultats obtinguts.





	Mostra A		Mostra B	
	Q1	Q3	Q1	Q3
CONÈIXER	2,63	0,9	2,6	1,3
RAONAR	2,41	1,36	2,2	0,6
CURRICULAR	3	1	3	2
PLANIFICACIÓ	0	-1,5	0,5	-2
TRANSFORMACIÓ	1,5	0	0,75	-0,188

Taula 58. Primer i tercer quartil de les dades sobre coneixements de les mostres A i B

Semblants	Conèixer, Planificació
Diferents	
No podem afirmar res	Raonar, Curricular, Transformació

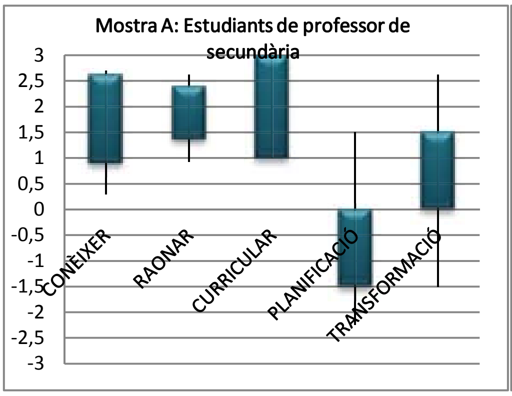
Taula 59. Semblances i diferències sobre coneixements de les mostres A i B

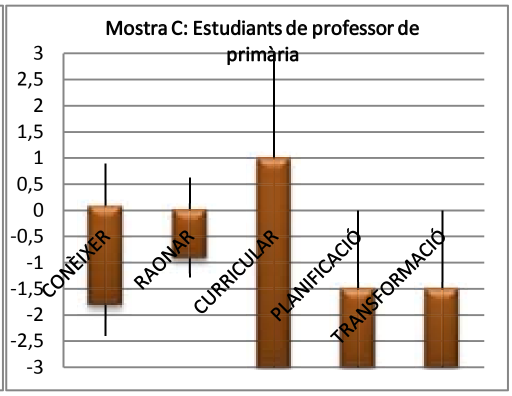
El primer que podem constatar és que no trobem diferències clares entre el nivell de coneixements general dels professors de secundària i els estudiants de professor.

En quant a semblances clares, tenim el nivell alt (però dispers) en *conèixer*, i el nivell baix (i també dispers) a l'hora de planificar problemes que s'adeqüin als objectius proposats.

Comparació entre la mostra A (estudiants de professor de secundària) i la mostra C (estudiants de professor de primària)

Per tal de comparar aquestes dues mostres, presentem primer els diagrames de barres de cadascuna i els primer i tercer quartil de cada coneixement, amb els que hem obtingut quins coneixements tenen semblants i diferents les mostres. A continuació comentem els resultats obtinguts.





	Mostra A		Mostra C	
	Q1	Q3	Q1	Q3
CONÈIXER	2,63	0,9	0,08	-1,8
RAONAR	2,41	1,36	0,01	-0,916
CURRICULAR	3	1	1	-3
PLANIFICACIÓ	0	-1,5	-1,5	-3
TRANSFORMACIÓ	1,5	0	-1,5	-3

Taula 60. Primer i tercer quartil de les dades sobre coneixements de les mostres A i C

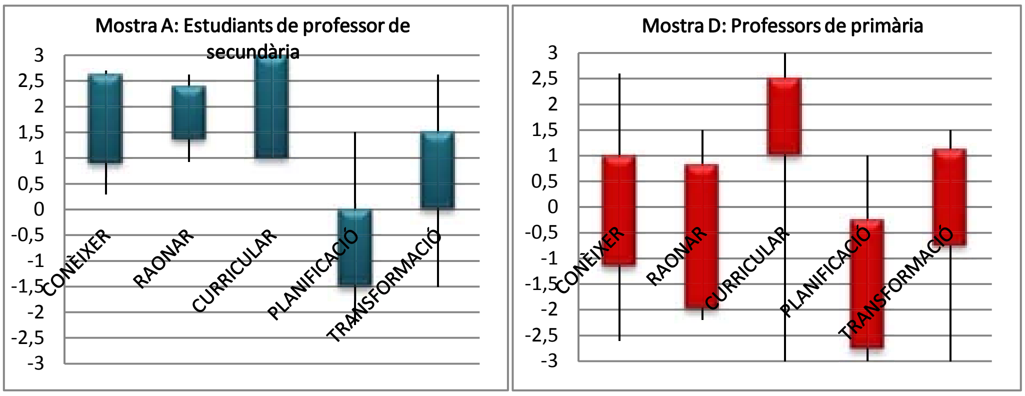
Semblants	
Diferents	Conèixer, Raonar, Curricular, Planificació, Transformació
No podem afirmar res	

Taula 61. Semblances i diferències sobre coneixements de les mostres A i C

En aquesta taula constatem el que ja intuíem observant el diagrama de barres: en tots els tipus de coneixements els estudiants de professor de primària tenen un nivell de coneixements més baix que els de secundària. La menor diferència la trobem en el coneixement sobre planificació de problemes, on la distància de mitjanes és aproximadament de 1,5 punts, ja que en totes les altres, els estudiants de secundària tenen aproximadament 2,5 punts més de nivell de coneixements que els de primària. També observem que la dispersió de les dades en tots els tipus de coneixement és semblant, a excepció del coneixement curricular, on tot i que les dues mostres tenen les dades molt disperses, en el cas dels estudiants d'educació primària la dispersió és del doble d'amplitud.

Comparació entre la mostra A (estudiants de professor de secundària) i la mostra D (professors de primària)

Per tal de comparar aquestes dues mostres, presentem primer els diagrames de barres de cadascuna i els primer i tercer quartil de cada coneixement, amb els que hem obtingut quins coneixements tenen semblants i diferents les mostres. A continuació comentem els resultats obtinguts.



	Mostra A		Mostra D	
	Q1	Q3	Q1	Q3
CONÈIXER	2,63	0,9	1	-1,15
RAONAR	2,41	1,36	0,825	-1,98
CURRICULAR	3	1	2,5	1
PLANIFICACIÓ	0	-1,5	-0,25	-2,75
TRANSFORMACIÓ	1,5	0	1,125	-0,75

Taula 62. Primer i tercer quartil de les dades sobre coneixements de les mostres A i D

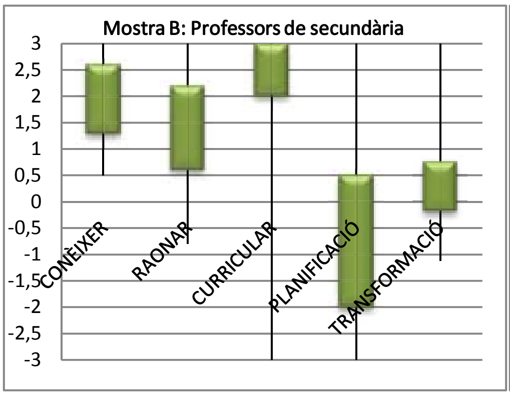
Semblants	Curricular
Diferents	Raonar
No podem afirmar res	Conèixer, Planificar, Transformació

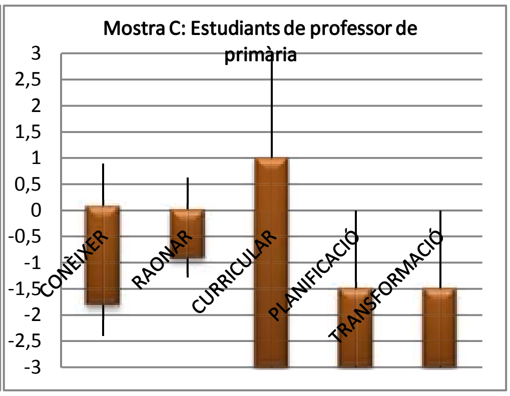
Taula 63. Semblances i diferències sobre coneixements de les mostres A i D

Observant els gràfics i la taula anterior podem dir que, tot i que en alguns ítems ens ha sortit que no en podem afirmar res, les tendències són clares, i que passen coses diferents en els coneixements del contingut i en els coneixements didàctics. En els Coneixements del Contingut Matemàtic (MCK) els estudiants de professor de secundària tenen un nivell molt més alt que els professors de primària, especialment en raonar (on es produeix la major concentració de dades en els primers i la major dispersió de dades en els segons). En canvi, en els Coneixements Didàctics del Contingut (MPCK) els resultats són força semblants, i tot i ser una mica més bons en la mostra A; el fet que no ens hagin sortit els tres ítems *semblants* es deu sobretot a la gran dispersió de dades que hi ha en ambdues mostres.

Comparació entre la mostra B (professors de secundària) i la mostra C (estudiants de professor de primària)

Per tal de comparar aquestes dues mostres, presentem primer els diagrames de barres de cadascuna i els primer i tercer quartil de cada coneixement, amb els que hem obtingut quins coneixements tenen semblants i diferents les mostres. A continuació comentem els resultats obtinguts.





	Mostra B		Mostra C	
	Q1	Q3	Q1	Q3
CONÈIXER	2,6	1,3	0,08	-1,8
RAONAR	2,2	0,6	0,01	-0,916
CURRICULAR	3	2	1	-3
PLANIFICACIÓ	0,5	-2	-1,5	-3
TRANSFORMACIÓ	0,75	-0,188	-1,5	-3

Taula 64. Primer i tercer quartil de les dades sobre coneixements de les mostres B i C

Semblants	
Diferents	Conèixer, Raonar, Curricular, Transformació
No podem afirmar res	Planificació

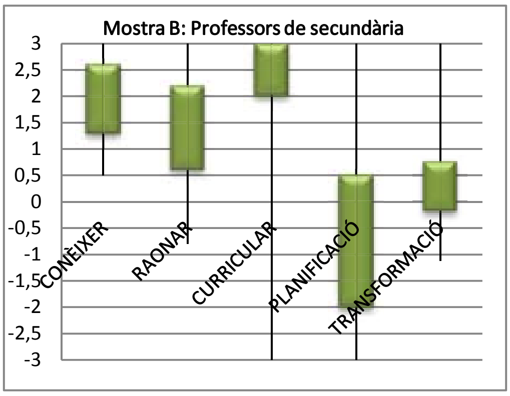
Taula 65. Semblances i diferències sobre coneixements de les mostres B i C

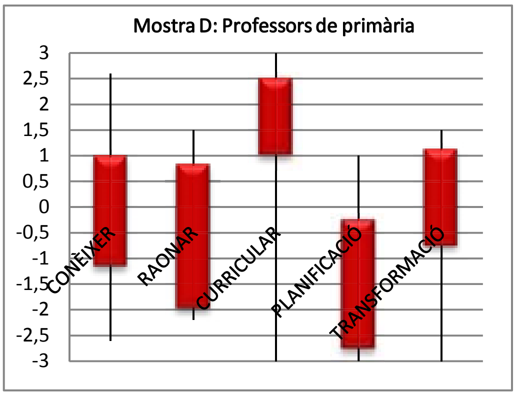
Com en el cas anterior, en tots els tipus de coneixements els estudiants de professor de primària tenen un nivell de coneixements més baix que els professors de secundària (tot i que en planificació no es pot afirmar segons el nostre criteri perquè la intersecció entre les caixes no és buida, el nivell dels professors, tot i ser molt dispers, és superior).

La diferència més acusada la trobem en el coneixement curricular, on les dades dels professors de secundària estan molt concentrades i el nivell és molt alt, i en canvi les dades dels estudiants d'educació primària són molt disperses i el nivell és entre baix i molt baix. En els altres tipus de coneixement, la diferència és d'aproximadament 2,5 punts més pels professors de secundària i no hi ha grans diferències de dispersió de les dades.

Comparació entre la mostra B (professors de secundària) i la mostra D (professors de primària)

Per tal de comparar aquestes dues mostres, presentem primer els diagrames de barres de cadascuna i els primer i tercer quartil de cada coneixement, amb els que hem obtingut quins coneixements tenen semblants i diferents les mostres. A continuació comentem els resultats obtinguts.





	Mostra B		Mostra D	
	Q1	Q3	Q1	Q3
CONÈIXER	2,6	1,3	1	-1,15
RAONAR	2,2	0,6	0,825	-1,98
CURRICULAR	3	2	2,5	1
PLANIFICACIÓ	0,5	-2	-0,25	-2,75
TRANSFORMACIÓ	0,75	-0,188	1,125	-0,75

Taula 66. Primer i tercer quartil de les dades sobre coneixements de les mostres B i D

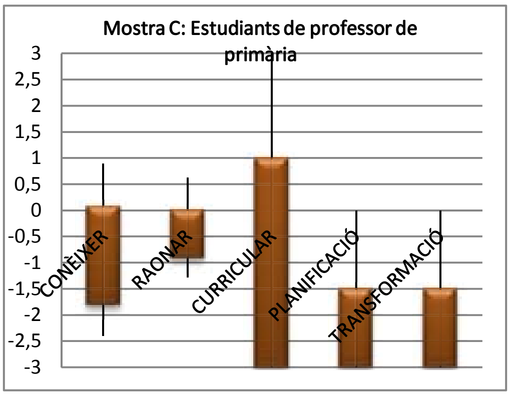
Semblants	
Diferents	Conèixer
No podem afirmar res	Raonar, Curricular, Planificació, Transformació

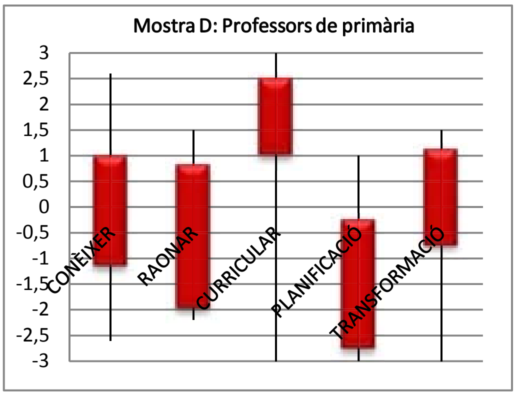
Taula 67. Semblances i diferències sobre coneixements de les mostres B i D

En el que hi ha una diferència més clara és en els Coneixements del Contingut Matemàtic (MCK) i en el coneixement curricular, en favor del professor de secundària, especialment en conèixer els conceptes. A més, en aquests coneixements, les dades estan molt més concentrades en els professors de secundària que en els de primària. En els altres dos coneixements, el de planificació i transformació, els professors de secundària tenen també un nivell més alt, però no de forma tan acusada.

Comparació entre la mostra C (estudiants de professor de primària) i la mostra D (professors de primària)

Per tal de comparar aquestes dues mostres, presentem primer els diagrames de barres de cadascuna i els primer i tercer quartil de cada coneixement, amb els que hem obtingut quins coneixements tenen semblants i diferents les mostres. A continuació comentem els resultats obtinguts.





	Mostra C		Mostra D	
	Q1	Q3	Q1	Q3
CONÈIXER	0,08	-1,8	1	-1,15
RAONAR	0,01	-0,916	0,825	-1,98
CURRICULAR	1	-3	2,5	1
PLANIFICACIÓ	-1,5	-3	-0,25	-2,75
TRANSFORMACIÓ	-1,5	-3	1,125	-0,75

Taula 68. Primer i tercer quartil de les dades sobre coneixements de les mostres C i D

Semblants	
Diferents	Curricular, Transformació
No podem afirmar res	Conèixer, Raonar, Planificació

Taula 69. Semblances i diferències sobre coneixements de les mostres C i D

En conèixer, els professors de primària estan aproximadament un punt per sobre dels estudiants de professor: no hi ha una gran diferència ni de nivell ni tampoc de concentració de les dades (bastant disperses en ambdues mostres). En raonar, en canvi, el nivell és similar, però la diferència es troba en la concentració de les dades, molt més alta en el cas dels estudiants de professor. Tot i les petites diferències, però, en ambdós casos el nivell de Coneixement del Contingut Matemàtic és força baix.

En el que sí hi ha una diferència clara en favor dels professors és en el coneixement curricular: el nivell és molt més alt i la concentració de dades major. En la resta de Coneixements Didàctics del Contingut el professor també està per sobre de l'estudiant de professor, especialment en el de transformació.

5.3.3. Comparació general dels coneixements de les quatre mostres

En aquest apartat pretenem, a partir de les comparacions realitzades entre les mostres dos a dos, fer una síntesi de les semblances i diferències en els nivells de coneixements que hi ha entre les quatre mostres, intentant també establir si hi ha alguna relació entre l'etapa educativa o l'experiència docent de les mostres i els nivells obtinguts per als diferents tipus de coneixement.

Aquí mostrem la taula-resum dels tipus de coneixements en els quals tenen semblances (verd) i diferències (vermell) més clares les quatre mostres.

	Mostra A	Mostra B	Mostra C	Mostra D
Mostra A		Conèixer, Planificació	----	Curricular
Mostra B	----		----	----
Mostra C	Conèixer, Raonar, Curricular, Planificació, Transformació	Conèixer, Raonar, Curricular, Transformació		----
Mostra D	Raonar	Conèixer	Curricular, Transformació	

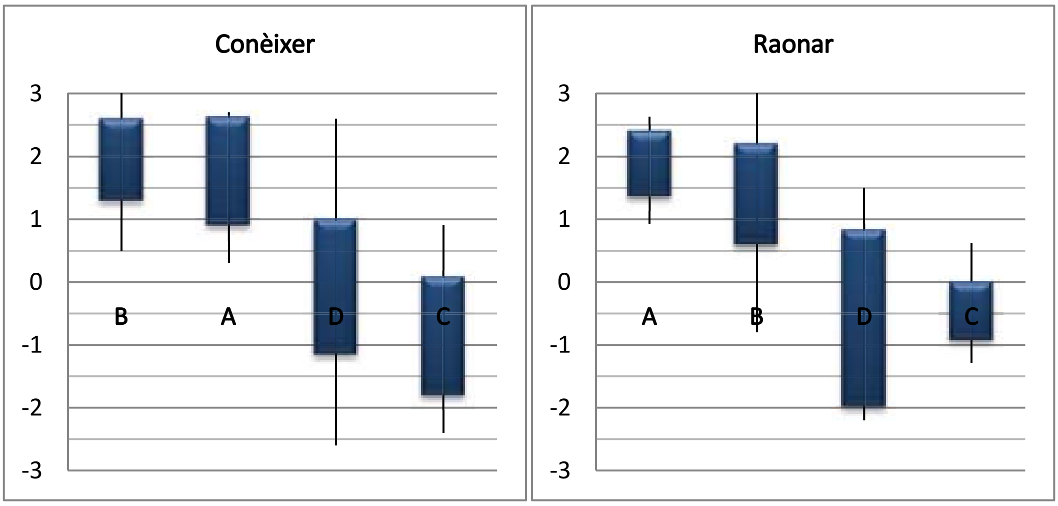
Taula 70. Comparació general dels coneixements de les quatre mostres

En la taula anterior podem observar que els que tenen més coneixements en comú són les dues mostres de secundària, i que la mostra que té més diferències amb les altres és clarament la mostra C (estudiants de professor de primària).

Per a comparar amb més profunditat els nivells de les mostres per als diferents tipus de coneixements i establir quins factors (etapa i/o experiència docent) són més determinants en les semblances o diferències entre coneixements, analitzarem què passa en cada tipus concret de coneixement.

Coneixement del Contingut Matemàtic (MCK)

Començarem per mostrar les gràfiques referents als dos tipus de Coneixement del Contingut Matemàtic que hem analitzat:



Il·lustració 15. Resultats del MCK de les quatre mostres

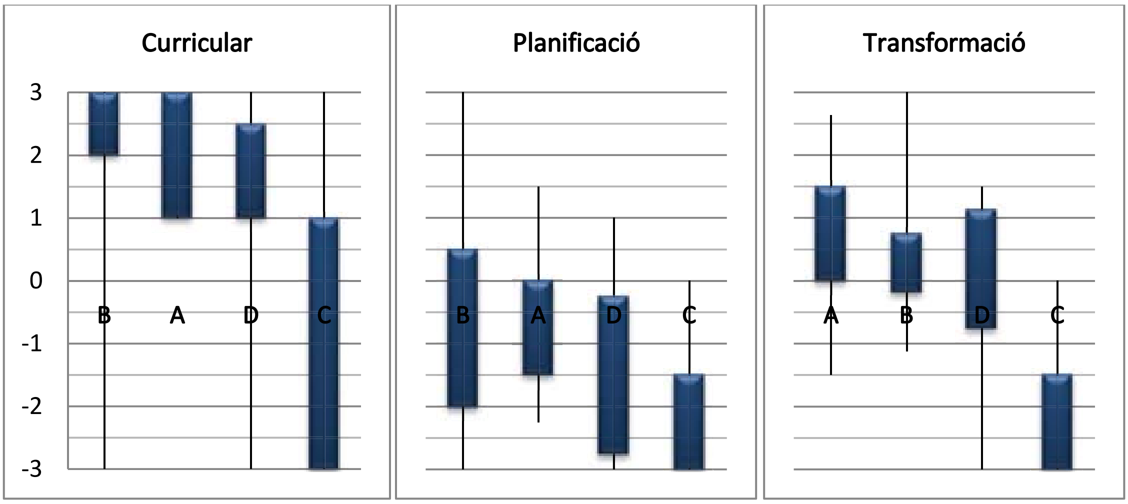
El primer que observem és que hi ha una gran diferència entre les dues mostres de secundària i les dues mostres de primària, ja que en els dos tipus de coneixements les mostres de secundària obtenen nivells alts i les de primària justos o baixos. Fixem-nos ara en què passa dins de cada etapa educativa.

En el cas de secundària, les diferències entre els estudiants de professor i els professors no són molt significatives: en conèixer obtenen gairebé els mateixos resultats, i en raonar l'estudiant de professor està aproximadament mig punt per sobre. Una possible lectura d'aquests resultats és que, tot i que els coneixements matemàtics de la formació inicial són els mateixos (pel que fa a conèixer i raonar), en la pràctica docent a secundària s'utilitzen més els coneixements conceptuals que no pas el raonament matemàtic.

En el cas de primària, sí que hi ha una diferència significativa entre els estudiants de professor i els professors. Pel que fa a conèixer, clarament el nivell dels professors és superior (gairebé un punt). En canvi, pel que fa a raonar, tot i que el nivell mitjà és semblant (just en ambdós casos), les dades dels estudiants de professor de primària estan bastant concentrades mentre que les dels professors de primària estan molt disperses. Una possible raó de la gran dispersió de les dades relatives als professors, en aquest cas, podria ser que la mostra de professors és molt heterogènia (centres, fins i tot ciutats diferents, i diferents anys d'experiència docent), mentre que els estudiants de professor eren tots alumnes d'un mateix grup-classe.

Coneixement Didàctic del Contingut Matemàtic (MPCK)

A continuació, mostrarem les gràfiques relatives als coneixements Curricular, de Planificació i de Transformació:



Il·lustració 16. Resultats del MPCK de les quatre mostres

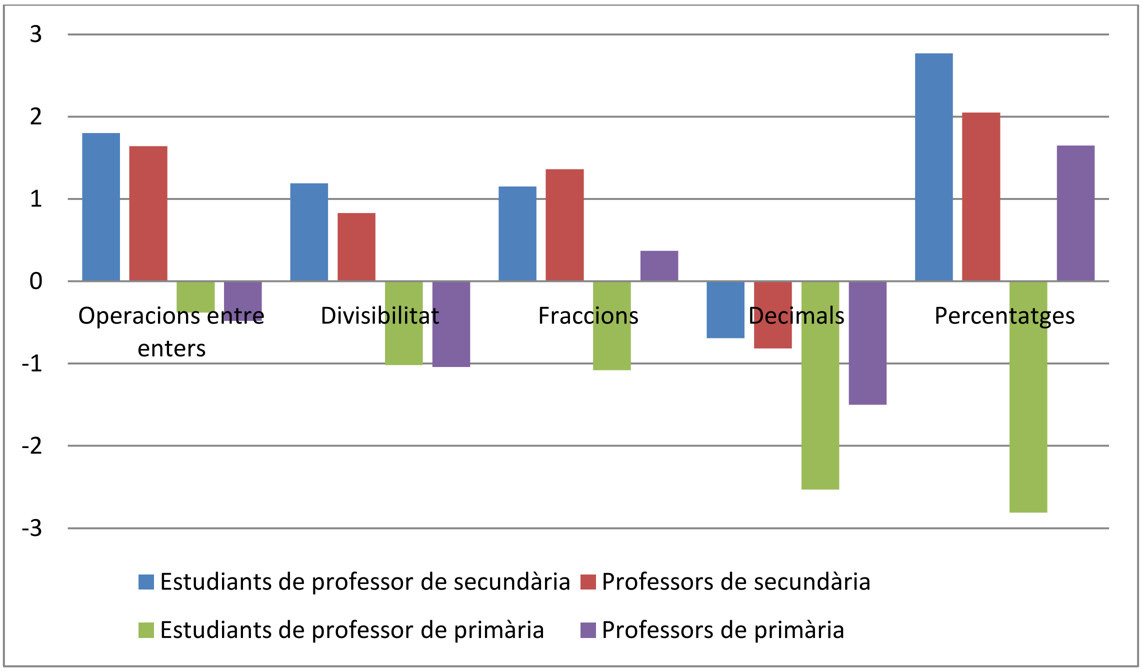
En aquest cas, malgrat que les mostres de secundària també obtenen nivells més alts en els tres coneixements, no podríem dir que es creen dos subgrups primària – secundària com en el cas del MCK, sinó que qui es despenja de les altres tres mostres, obtenint resultats molt més baixos, és la mostra C (estudiants de professor de primària).

Entre les altres tres mostres no trobem gaires diferències, les més significatives serien: els alts resultats dels professors de secundària en coneixement curricular, més de mig punt per sobre de les mostres A i D i amb les dades bastant concentrades; els baixos resultats dels professors de primària en planificació (en comparació a les mostres de secundària, que els obtenen justos); i els resultats una mica millors dels estudiants de professor de secundària en el coneixement de transformació.

5.3.4. Nivell de coneixement en els diferents continguts de Numeració i Càlcul

De forma complementària a l'anàlisi realitzat sobre els diferents tipus de coneixement inclosos en el MKT, i donat que els continguts matemàtics del nostre estudi han estat tots del bloc 1 del currículum (Numeració i Càlcul), analitzarem també els nivells de coneixement que tenen les quatre mostres en relació als cinc continguts estudiats: operacions entre enters, divisibilitat, fraccions, nombres decimals i percentatges. Per tal de tenir una visió dels resultats el més realista possible, compararem els nivells de les mostres entre si per a que no influenciï la dificultat objectiva de preguntes concretes.

El següent gràfic mostra les mitjanes dels resultats obtinguts per cadascuna de les mostres en els cinc continguts analitzats:



Il·lustració 17. Nivell de coneixement dels continguts matemàtics de Numeració i Càlcul

El primer que podem observar és que, coherentment amb els resultats obtinguts en l'anàlisi dels diferents tipus de coneixement, les mostres de secundària tenen, en tots els continguts analitzats, un nivell de coneixement més alt de les de primària.

Les diferències entre els estudiants de professors de secundària i els professor de secundària no són significatives: tots dos tenen pitjors resultats en nombres decimals, però donat que totes les mostres els obtenen baixos, no ho trobem significatiu, ja que pot ser que les preguntes fossin d'una dificultat més elevada que altres.

En canvi entre les dues mostres de primària sí que hi ha diferències significatives: mentre que en els continguts relatius als nombres enters (operacions i divisibilitat) tant professors com estudiants de professor de primària tenen resultats baixos però molt semblants entre ambdós, en els altres tres continguts, relatius als nombres racionals (fraccions, decimals i percentatges), els professors de primària tenen un nivell significativament més alt que els estudiants de professor de primària, i fins i tot s'apropen més al nivell de les mostres de secundària.

5.4. Anàlisi qualitativa del protocol de problemes

Les dades obtingudes ens permeten analitzar aspectes concrets dels protocols que tenen relació amb les qüestions obertes dels mateixos: els contextos utilitzats, la manera de simplificar problemes, els tipus d'error més comuns...
Així doncs, hem triat aquelles qüestions obertes dels protocols que ens semblaven més interessants i hem fet una anàlisi mixta quantitativa-qualitativa dels resultats obtinguts per les quatre mostres. En tots els casos, hem començat per enunciar la qüestió i fer algun aclariment si calia; a continuació, hem fet una anàlisi quantitativa del nombre de respostes obtingudes i d'aquelles correctes, i finalment hem analitzat qualitativament –i en alguns casos també quantitativament– diferents aspectes (segons la qüestió) sobre de les respostes dels professors i estudiants de professor.

5.4.1. Anàlisi del problema 1b del protocol 1

Escriu un problema que utilitzi un context real que podries posar a la teva classe per tal d'exemplificar en el cas de la resta que "dos negatius fan un positiu".

Abans de començar amb l'anàlisi de les respostes, farem un aclariment sobre què entenem per una resta de nombres enters. Partint de la base de que la resta és l'operació inversa de la suma, tindrem una resta sempre que en la situació plantejada pel problema hi hagi una suma de la qual coneixem un dels sumands i el resultat.

D'acord amb Vergnaud al seu article "Structures additives et complexité psycho-génétique" (1976), podem tenir dues situacions de suma diferents:

1) *Estat inicial + Variació = Estat Final.*
   D'aquí es deriva l'existència de dues restes possibles:
   a) *E. final – E. Inicial = Variació*
      Exemple: La temperatura ahir era de (-3) i avui és de -2. Quina ha estat la variació?
   b) *E. Final – Variació = E. Inicial*
      Exemple: La temperatura avui és de -2 i la variació des d'ahir ha estat de -1. Quina era la temperatura ahir?
2) *Variació 1 + Variació 2 = Variació 3 (o variació total)*
   D'on es deriven dues restes possibles:
   a) *Variació 3 – Variació 2 = Variació 1*
   b) *Variació 3 – Variació 2 = Variació 1*

Així doncs, per decidir la validesa de cada problema ho hem fet seguint aquest patró.

A continuació analitzarem les respostes des de tres punts de vista: el primer quantitatiu, mirant quants professors han respost la pregunta, quants ho fan correctament, i quants incorrectament; i dos de qualitatius, un fixant-nos en el context que s'utilitza en el problema proposat, i l'altre en el tipus de resta (dels descrits anteriorment) que es fa servir.

Els resultats de l'estudi quantitatiu són els següents:

	Fan el problema	Correctament	Incorrectament
Mostra A	100 %	8 %	92 %
Mostra B	91 %	55 %	36 %
Mostra C	63 %	6 %	57 %
Mostra D	40 %	0 %	40 %

Taula 71. Respostes de la qüestió P1.1b

La mostra que amb diferència té un percentatge més elevat de respostes correctes són els professors de secundària, on més de la meitat dels individus de la mostra han sabut plantejar un problema que complís les característiques demanades, de més del 90 % que ho han intentat. En les mostres dels estudiants de professor, tot i ser molt més alta la participació dels de secundària (100 versos 63), el percentatge de respostes correctes sobre els que han fet el problema són semblants (no arriba al 10 %). Dels professors de primària, han respost menys de la meitat (40 %), i cap ha donat una resposta correcta.

Estudi sobre el context utilitzat

En quant als contextos triats per professors i estudiants de professor a l'hora de crear els problemes, majoritàriament n'utilitzen tres, com exemplifiquem mitjançant les respostes analitzades a continuació (tindrem en compte tant les respostes considerades correctes com les considerades incorrectes):

1. *Temperatura*

> B9. Un termòmetre passa de -8º a -3º. Quin canvi ha experimentat?
> Resolució: (-3) – (-8) = +5

2. *Pisos*

> B3. En un ascensor estem a la planta 2a soterrani (planta -2). A quina planta estàvem si hem baixat cinc plantes?
> Resolució: (-2) – (-5) = +3

3. *Deutes:* En els problemes amb aquest context ens hem trobat que, d'acord amb l'esquema de Vergnaud sobre la resta, no n'hi ha cap que correspongui conceptualment a una resta, sinó que corresponen a una suma. L'exemple següent, per tant, el considerem incorrecte.

> B6. Tinc un deute amb tu de 5 unitats, i tu tens un deute amb mi de 7 unitats. Si al meu deute li trec el teu deute, com quedaré?
> Resolució: (-5) + [-(-7)] = (-5) + (+7) = +2

4. *Altres:* Aquest exemple també el considerem incorrecte per la mateixa raó que l'anterior.

> D1. T'has portat malament i el professor et dóna dos punts negatius (-2). Al pati et baralles i te'n dóna 3 negatius més (-3). Com que has fet bé els deures et perdona set punts negatius (-7). Quants punts tens ara?
> Resolució: (-2) + (-3) + [-(-7)] = (-2) + (-3) + (+7) = +2

Un cop exemplificats els diferents tipus de contextos utilitzats, analitzarem quantitativament quins han estat les més comuns en cadascuna de les mostres:

	A	B	C	D	Total
1	4	4	2		10
2	1	1	1		3
3	2	4	4	3	13
4			1	1	2

Taula 72. Contextos de la qüestió P1.1b

El context més utilitzat, en general, per a exemplificar en un problema una resta d'enters en la qual "dos negatius donen un positiu", és el relacionat amb deutes. Tot i així, recordem que cap dels problemes amb aquest context l'hem considerat correcte, com hem explicat anteriorment. El següent context més utilitzat (en especial per les mostres de secundària), és el de la temperatura, en el qual sí hem trobat alguns problemes correctes.

Estudi sobre el tipus de resta utilitzat

A continuació farem l'anàlisi qualitativa en funció del tipus de resta utilitzat en els problemes. Primerament ens fixarem només en els problemes que hem considerat correctes, i exemplificarem el tipus de resta trobats:

1a) E. final – E. Inicial = Variació

> B9. Un termòmetre passa de -8º a -3º. Quin canvi ha experimentat?
> Resolució: (-3) – (-8) = +5

1b) E. Final – Variació = E. Inicial

> B3. En un ascensor estem a la planta 2a soterrani (planta -2). A quina planta estàvem si hem baixat cinc plantes?
> Resolució: (-2) – (-5) = +3

Del tipus 2 no n'hem trobat cap exemple.

En aquest problema, com hem pogut veure anteriorment, hi ha una proporció molt gran de respostes incorrectes. És raonable, doncs, preguntar-nos quins han estat els errors més comuns i perquè hi ha tants errors. Deixarem de banda els errors de càlcul (per exemple, la resta els dóna un nombre negatiu enlloc de positiu), ja que ens semblen molt més interessants els errors conceptuals. D'aquests, principalment n'hem identificat dos:

1) La resta dels dos nombres negatius té com a resultat un nombre en valor absolut, que no és el mateix que un nombre positiu: Aquest error és molt comú sobretot a l'hora de parlar de variacions, ja que al passar d'un estat inicial a un estat final (és a dir, E. final – E. Inicial) es pot créixer (variació = +n) o decréixer (variació = -n), però en ambdós casos l'amplitud de la variació és de |n|=|E. Final – E. Inicial|. En molts problemes es pregunta l'amplitud de la variació sense tenir en compte el creixement o el decreixement:

> A7. Quant varia la temperatura si passem de -2 graus a -7 graus?
> Resolució: (-7) – (-2) = -5 -> |-5| = 5 -> Resposta: 5 graus

2) Confondre conceptualment resta i suma, considerant la suma de l'invers d'un nombre negatiu com una resta: Entenent que nosaltres considerem el concepte de resta com ho fa Vergnaud, tal com hem explicat a l'inici de l'apartat.

> A10. Un missatger es troba a la planta -1 d'un edifici. El seu cap l'envia 5 pisos més avall a recollir una documentació. Tanmateix el missatger es confon i es mou 5 pisos, però en la direcció contrària. A quin pis arriba?
> Resolució: (-1) + [- (-5)] = +4

> B6. Tinc un deute amb tu de 5 unitats, i tu tens un deute amb mi de 7 unitats. Si al meu deute li trec el teu deute, com quedaré?
> Resolució: (-5) + [-(-7)] = (-5) + (+7) = +2

Anem ara a quantificar quants errors de cada tipus ha tingut cadascuna de les mostres:

	A	B	C	D	Total
1	2	1	1		4
2	3	3	4	2	12
Errors de càlcul	2	2	2	1	7

Taula 73. Tipus d'error de la qüestió P1.1b

En totes les mostres, l'error més comú a l'hora d'intentar crear un problema que exemplifiqui una resta amb un nombre negatiu com a subtrahend, és el de confondre conceptualment resta i suma, considerant la suma de l'invers d'un nombre negatiu com una resta.

5.4.2. Anàlisi del problema 6b del protocol 1

La Sandra i en Martí han anat a buscar bolets. N'han trobat 70 (només rovellons i llenegues). Els 5/9 dels bolets trobats per la Sandra eren rovellons, mentre que els 2/17 dels trobats per en Martí eren llenegues. Quants bolets ha trobat la Sandra?

Crea un problema diferent però del mateix tipus del problema 6a (mateixos processos o operacions) que sigui més fàcil de resoldre per als teus alumnes.

Resolució: $\dot{9} + \dot{17} = 70 \quad \rightarrow \quad 36 + 34 \quad \rightarrow \textit{La Sandra ha trobat } 36 \textit{ bolets}$

Primerament hem realitzat un estudi quantitatiu on analitzem quants professors han respost la pregunta, quants ho fan correctament, i quants incorrectament. Els resultats són els següents:

	Fan el problema	Correctament	Incorrectament
Mostra A	83 %	38 %	45 %
Mostra B	82 %	55 %	27 %
Mostra C	63 %	6 %	57 %
Mostra D	70 %	20 %	50 %

Taula 74. Respostes de la qüestió P1.6b

En aquest problema, a diferència de l'anterior, els percentatges d'intent són més regulars entre les quatre mostres, d'entre un 63 i un 83 %, tenint les mostres de secundària un percentatge superior que les de primària en quant a participació i també correcció de les respostes donades.

En quant als encerts, una altra vegada els professors de secundària són els que tenen un percentatge més elevat de respostes correctes (més del 50 % dels individus de la mostra i gairebé el 70 % dels que ho ha intentat), seguits pels estudiants de professor de secundària (el 45 % dels que ho han intentat), els professors de primària (el 30 % dels que ho han provat) i finalment els de primària (gairebé un 10 % dels intents).

A continuació ens proposem fer una anàlisi qualitativa per a respondre'ns la següent pregunta: què entenen el professors i estudiants de professor per un problema *més fàcil*?

Per crear un problema més fàcil de resoldre per als alumnes, haurem de preguntar-nos on rau la dificultat del problema plantejat.

La primera dificultat és esbrinar *com abordar el problema*, ja que podria semblar un problema de fraccions, o un problema en el qual s'ha de formular i resoldre un sistema d'equacions: però en realitat es tracta d'un problema de divisibilitat. Per tant, algunes propostes per a crear un problema *més fàcil* poden anar enfocades a facilitar l'abordatge del problema, com per exemple guiar el problema, o fer desaparèixer les fraccions per a no confondre i que es vegi més clarament que parlem de divisibilitat. Una altra dificultat podria ser el càlcul dels múltiples dels nombres, amb el que intentaríem posar nombres més petits.

Anàlisi de les respostes correctes

En l'anàlisi de les respostes correctes de la mostra hem identificat cinc maneres de simplificar el problema; en alguns casos n'utilitzen més d'una.

1. Posar nombres més petits per facilitar així el càlcul dels múltiples i de la solució.

    B11. La Sandra i en Martí han anat a buscar bolets. N'han trobat 10 (només rovellons i llenegues). 1/2 dels bolets trobats per la Sandra eren rovellons, mentre que 1/3 dels trobats per en Martí eren llenegues. Quants bolets ha trobat la Sandra?

2. Afegir el complementari de les fraccions per a facilitar la comprensió del problema (ja que per a resoldre'l en realitat no fa falta calcular-lo).

    A2. La Marta i la Joana recullen patates d'un patater. Hi ha patates bones i patates grillades. Del total de patates recollides per la Marta, n'hi ha ¼ part de bones i ¾ parts de grillades. Del total de patates recollides per la Joana n'hi ha 3/5 parts de bones i 2/5 de grillades. Entre les dues han recollit 22 patates. Quantes patates ha recollit cada una?

3. Fer desaparèixer les fraccions per tal que els alumnes identifiquin més fàcilment que es tracta d'un problema de divisibilitat, mitjançant un canvi en el context del problema.

    A4. En una botiga de llaminadures venen caramels només de maduixa i de llimona. Els de maduixa venen en bosses de 17 caramels en cadascuna, els de llimona en bosses que contenen 9 caramels. Quantes bosses de cada sabor he de comprar per ferir en total 70 caramels?

4. Guiar el problema. S'entén que d'aquesta manera es redueix la dificultat.

    A7. Entre Messi i CR7 porten aquesta lliga 25 gols. Messi ha marcat la meitat dels gols a casa i l'altra meitat fora. CR7 marca 2/3 parts dels seus gols a casa i 1/3 fora. Quants gols porta

Messi? Hi ha només una possible solució o n'hi ha més d'una? En cas que n'hi hagi més d'una, quines són?

5. Fer que la suma dels denominadors sigui el total de bolets, per tal que no faci falta calcular múltiples. D'aquesta manera el problema passa de ser un problema de divisibilitat a un problema de fraccions.

   A13. L'Anna i el Marc han anat a pescar. Han pescat 60 peixos (truites i lluços). 18/24 dels peixos de l'Anna eren truites, i pel Marc, 4/36 eren lluços. Quants peixos ha pescat l'Anna?

Un cop explicades les diferents estratègies utilitzades per la mostra, analitzarem quantitativament quines han estat les més comuns*:

	A	B	C	D
1	3	6	1	2
2	2			
3	1			
4	1			
5	1			
n. problemes	5	6	1	2

Taula 75. Formes de simplificar el problema de la qüestió P1.6b

*El nombre de respostes comptabilitzades a la taula és superior al nombre de respostes rebudes perquè hi ha individus que han utilitzat més d'una estratègia. Concretament, de tota la mostra, 1 individu ha utilitzat dues estratègies i 1 individu n'ha utilitzat 3.

Com podem observar, l'estratègia més utilitzada és posar nombres més petits. Aquesta és l'estratègia que menys altera el problema, ja que només es centra en la magnitud de les dades. A més, l'única mostra que utilitza estratègies diferents a l'anomenada és la dels estudiants de professor de secundària. Aquest fet ens mostra que aquests segur que han entès bé el problema, ja que han sigut capaços de crear-ne un de diferent estructura per al qual fan falta els mateixos processos per a resoldre'l. Això no vol dir que les altres mostres no l'hagin entès, tot i que es donen alguns casos en els quals no han respost bé la pregunta anterior sobre les formes de resoldre el problema i el nombre de solucions que té.

Anàlisi de les respostes incorrectes

Tot seguit volem fer un estudi d'aquells problemes que hem considerat incorrectes, bé perquè simplifiquen tant el problema que el desvirtuen, o bé perquè no el simplifiquen. Hem identificat diferents tipus d'error, que expliquem a continuació tot exemplificant-los amb una resposta de la mostra:

1. Convertir el problema en un problema de fraccions

D3. Entre la Sandra i en Martí han recollit 50 bolets, rovellons i llanegues. Si 2/5 són rovellons,

a) Quantes llanegues han recollit?
b) Quants rovellons?
c) Quants rovellons ha recollit la Sandra sola? Encercla la resposta:
   1. Té moltes solucions.
   2. No ho podem saber.

3. Té una solució i la podem calcular.

2. Convertir el problema en un problema d'equacions

A5. El Lluís ha anat al a botiga i ha comprat 2 Kg de pomes i 4 Kg de taronges per 10 €. El Marc ha comprat 3 kg de pomes i 5 kg de taronges, i per tant ha pagat 14 €. Quin és el preu del Kg de pomes? I el de taronges?

3. Proposar un problema que es resol també per un estudi de casos però amb diferents processos

B10. Una mare reparteix les seves perles entre les seves filles de la següent manera: a la filla gran li dóna una perla i la setena part de les perles restants. A la segona filla li dóna dues perles i la setena part de les perles restants. A la 3a filla li dóna 3 perles i la setena part de les perles restants. I així successivament fins a arribar a la filla petita que rep les perles que han quedat. La filla petita protesta, però la mare li diu en justícia que totes han rebut el mateix nº de perles. Quantes perles els ha repartit la mare i quantes filles són?

4. Proposar un problema del mateix tipus però més difícil

A1. El Pere i la Laia han comprat entre els dos 40 Kg de fruita pel restaurant que tenen. Han comprat peres i pomes. El Pere ha comprat la meitat de cada un dels tipus de fruita, i la Laia només ha comprat ¼ part de peres i la resta són pomes. Quants Kg de peres i de pomes tenen?

5. Altres interpretacions errònies

C12. La Sara i en Quim han recollit 30 bolets de dos tipus (A i B). La Sara ha recollit 1/6 del tipus A. En Quim 1/6 del tipus A també i 4/15 del tipus B. Representa el que han recollit tots junts per saber quants bolets ha recollit la Sara.

No té gaire sentit perquè el total de bolets del tipus A dóna 2/6 enlloc de 6/6! Sembla que el que vulgui que es faci és sumar totes les fraccions, com si es referissin totes les fraccions a la part dels 30 bolets i no dels de cada tipus.

Un cop explicats els diferents tipus d'errors comesos, analitzarem quantitativament quins han estat les més comuns:

	A	B	C	D	Total
1	3	1	6	5	15
2	2	1	0	0	3
3	0	1	0	0	1
4	1	0	0	0	1
5	0	0	2	0	2

Taula 76. Tipus d'error comesos en la qüestió P1.6b

En la taula anterior observem que, clarament, l'error més comú ha estat canviar el problema per un problema de fraccions, en molts dels casos perquè han considerat l'exemple també com un problema de fraccions. Veiem que el fet de confondre'l amb un problema d'equacions només ha succeït en les mostres de secundària (i en aquestes mostres gairebé tant com confondre'l amb un de fraccions), possiblement degut a que a primària no es treballen gaires problemes d'equacions.

5.4.3. Anàlisi del problema 5b del protocol 2

Nou pastissets costen menys de 10 € i deu pastissets costen més d'11 €. Quant val un d'aquests pastissets?

Crea un problema de temàtica diferent a l'anterior (que no parli de diners) on el context real del problema en determini el nombre de solucions.

Resolució: $9x < 10\ i\ 10x > 11;\ \frac{11}{10} < x < \frac{10}{9}\ ; 1{,}1 < x <\ 1{,}\hat{1}\ \rightarrow x = 1{,}11$ €

Primerament hem realitzat un estudi quantitatiu on analitzem quants professors han respost la pregunta, quants ho fan correctament, i quants incorrectament. Els resultats són els següents:

	Fan el problema	Correctament	Incorrectament
Mostra A	69 %	38 %	31 %
Mostra B	72 %	36 %	36 %
Mostra C	0 %	0 %	0 %
Mostra D	40 %	10 %	30 %

Taula 77. Respostes de la qüestió P2.5b

Les dues mostres de secundària han obtingut resultats molt similars: al voltant del 70 % de la mostra han fet el problema, i d'aquests, al voltat del 50 % l'han fet correctament. En les mostres de primària no passa el mateix: cap dels estudiants de professor ha creat un problema, i dels professors de primària, d'entre els que ho han fet (menys de la meitat de la mostra), només ¼ ha respost correctament (és a dir, una persona).

Anàlisi dels contextos utilitzats

A continuació ens proposem fer una anàlisi qualitativa on ens fixarem en quin tipus de contextos han triat els professors i estudiants de professor a l'hora de crear els problemes. Majoritàriament utilitzen tres contextos, que expliquem i exemplifiquem a continuació:

1. *Mesura / instrument de mesura:* Tot i que en general podem expressar les mesures en forma de nombres reals, els instruments de mesura fan que a l'hora de mesurar haguem de fer aproximacions que poden ser a un nombre enter, un decimal, dos decimals...

> A6. Tenim unes fitxes quadrades d'un joc, que les posem unes al costat de les altres i les mesurem amb un regle amb graduació mínima de mm. Si nou fitxes mesuren menys de 10 cm i deu fitxes mesuren més de 10,5, quant mesura el costat d'una d'aquestes fitxes?
>
> Resolució: 1,05<x<1,1111; x=1,1cm=11mm

2. *Edats:* Les edats són sempre nombres naturals; per tant, a l'hora de resoldre equacions o inequacions, només podrem prendre com a bones aquelles solucions enteres positives.

> A8. La mare de l'Arnau té 50 anys i el seu pare 53. Si el triple de l'edat de l'Arnau supera la de la mare, i el triple de l'edat de l'Arnau és menor que la del seu pare. Quants anys té l'Arnau?
>
> Resolució: 50<3x<53; 3x=51; x=17

3. *Col·leccions discretes:* Sempre que la nostra incògnita sigui un objecte no divisible, la solució haurà de ser un nombre natural. Sovint aquest tipus de problemes porta a una resolució mitjançant equacions diofàntiques.

> A4. Vaig al supermercat a comprar caramels, n'hi ha de dos tipus, de maduixa i de llimona. Els de maduixa venen en una bossa que conté 12 caramels i els de llimona en bosses que contenen 7. Quantes bosses he de comprar de cada gust per a que en total tingui 26 caramels?
>
> 12x + 7y = 26; x=1, y=2

4. *Altres.*

> B7. Per anar de l'ajuntament a l'escola, quants camins diferents pots seguir amb el mínim de canvi de direccions possible?
>
> El nombre de solucions depèn dels carrers del poble: si no fos un poble la solució seria una: una recta.

Un cop vistos els diferents contextos utilitzats per la mostra, analitzarem quantitativament quins han estat les més comuns:

	A	B	C	D	Total
1	2			1	3
2	2	1			3
3	1				1
4		1			1

Taula 78. Contextos de la qüestió P2.5b

Els contextos més utilitzats han estat les edats (restricció de les solucions a nombres naturals) i les unitats de mesura (restricció de les solucions a un nombre concret de xifres decimals).

Anàlisi dels errors més comuns

En general observem que en gairebé tots els problemes no hi ha canvi de model matemàtic (inequació), només canvien les magnituds: dissenyen dos inequacions per tal que doni un interval, i el context fa que al restringir aquest interval a un tipus de nombres concret, canviï el nombre solucions.

De fet, un dels errors ha estat que, un cop dissenyades les inequacions, no s'han fixat en què el context del problema no restringia l'interval. Un exemple d'això el veiem tot seguit:

> B1. Con 20 l de agua lleno más de 6 garrafas y con 23 l de agua lleno menos de 8 garrafas iguales. ¿Cuánto cabe en cada garrafa?
>
> 20>6x, 23<8x; 23/8<x<20/6; 2,875<x<3,33...

Els errors que no són del tipus exposat (és a dir, no dissenyen cap inequació) són de tipologia molt diversa, molt difícil de classificar. En posem alguns exemples tot seguit:

> B3. Dels tres tubs d'aigua que omplen un dipòsit, un pot omplir-lo en 36 hores, un altre en 30 i el tercer en 20 h. Quant de temps tardaran en omplir el dipòsit tots tres tubs?

A1. El professor de matemàtiques ha comprat 200 g de llaminadures per repartir entre els 10 alumnes de classe. El professor de ciències ha comprat 220 g pels seus 11 alumnes. A quants grams toca cada un dels alumnes?

5.5. Relació entre creences i coneixements

Després d'haver analitzat a fons, però per separat, les creences i els coneixements de les quatre mostres, ens plantegem si hi ha alguna relació entre aquestes dues característiques. En general, no podem dir que totes les creences sobre resolució de problemes depenguin dels coneixements que es tenen, ni a l'inrevés, però potser sí que podrem trobar una certa relació entre algunes creences concretes i alguns tipus de coneixement sobre RP.

Abans d'establir aquesta relació, recordem, tant en el cas de les creences com dels coneixements, quins subgrups d'ítems hem creat en la síntesi final de les comparacions segons els resultats de les mostres:

Creences:

1) Creences comuns a les quatre mostres: A4, B1, B4, B5, C3.
2) Creences mostra A *versus* mostra D: A1, A3, A5, B6.
3) Creences mostra A *versus* mostra B: B2, C1, C4.
4) Creences mostra C *versus* totes les altres: A2, B3.

Coneixements:

a) Primària *versus* secundària: MCK
b) Mostra C *versus* tots els altres: MPCK

Donat que en tots els tipus de coneixements s'estableixen diferències molt marcades entre les mostres, podem dir llavors que els ítems de creences comuns a totes les mostres no estan directament relacionats amb els coneixements, i donat també que entre la mostra A i la mostra B els nivells de coneixements són bastant semblants (en tot cas entre les que són més semblants), també podem dir que les creences en les quals aquestes dos mostres són les que més difereixen d'opinió (A *versus* B) tampoc tenen relació directa amb els coneixements. Així doncs, un primer resultat serà establir les creences tipus que no tenen relació directa amb els coneixements sobre RP:

- Creences sense relació amb coneixements: A4, B1, B2, B4, B5, C1, C2, C3, C4.

Intentarem analitzar si entre les altres sí que n'hi ha que tenen relació amb els coneixements. Vist que en el cas dels coneixements hi ha dos grups molt diferenciats, que a més coincideixen amb el MCK i el MPCK, intentarem establir alguna relació amb els subgrups d'ítems que s'han creat segons les afinitats de les mostres en les seves creences. Observant els resultats, la relació que es pot establir a priori sembla que podria ser:

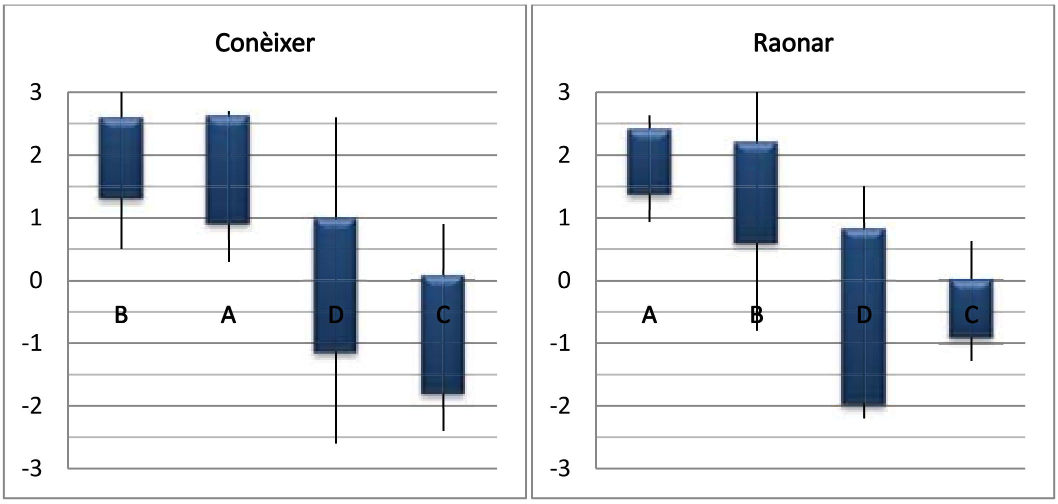
- Primària *versus* secundària (D *versus* A): coneixements (MCK) i creences (A1, A3, A5, B6)
- Mostra C *versus* totes les altres: coneixements (MPCK) i creences (A2, B3)

Una vegada formulades les nostres conjectures sobre les possibles relacions existents entre els coneixements i les creences sobre RP, analitzarem cadascuna d'elles amb més detall.

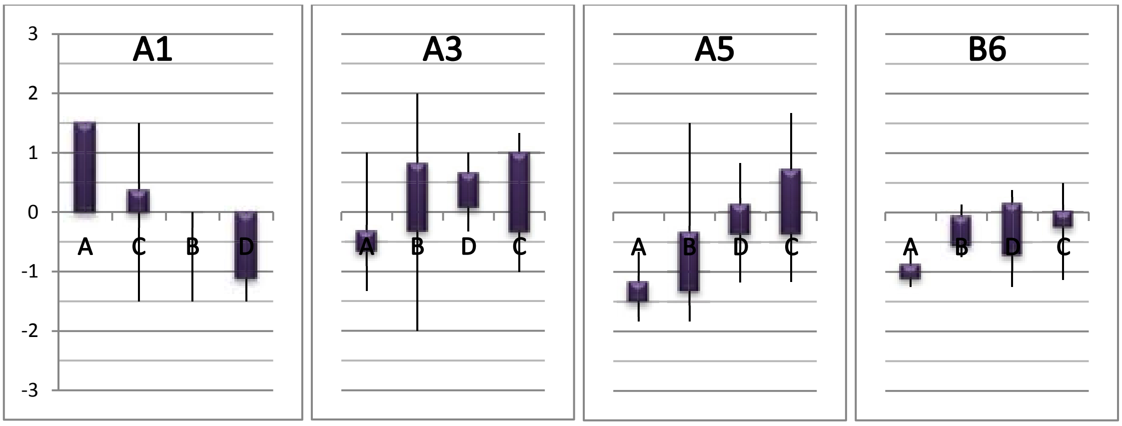
5.5.1. Creences i coneixements influenciats principalment per l'etapa educativa

A partir dels gràfics de les quatre mostres d'aquestes creences i coneixements, intentarem començar a establir quines relacions hi ha. Els gràfics els tornem a mostrar a continuació (hem ordenat les mostres en ordre de resultats posant sempre A el més a l'esquerra possible):

Coneixements (MCK):



Creences:



Només mirant els gràfics, podem concloure que A1 no té relació directa amb els coneixements sobre RP, ja que no hi ha una diferència entre primària – secundària. En els altres tres ítems, la diferència més clara és en A5, en els altres potser la mostra A es separa més i entre B-D-C la diferència és lineal (però continua sent la mostra B la més propera a A).

Així doncs, a més de concloure que el Coneixement del Contingut Matemàtic està directament relacionat amb l'etapa educativa del professor o l'estudiant del professor, els ítems de creences tipus que també hi estan relacionats són:

A3) Identificació "enunciat verbal" – problema: És més forta en les mostres de primària.

A5) Caràcter tancat del propòsit: Les mostres de secundària pensen que el propòsit d'un problema pot ser tan tancat com obert, mentre que les de primària tendeixen a pensar que és sempre tancat.

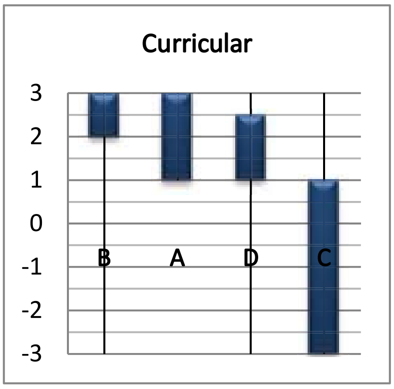
B6) Rellevància de la RP dins de l'activitat matemàtica: Les mostres de secundària troben la RP més rellevant que les de primària.

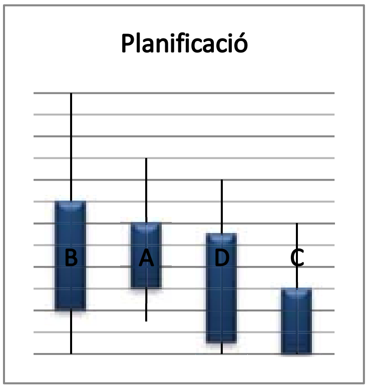
Observem que els ítems relacionats amb els coneixements del contingut tenen relació amb les creences de com/què és un problema de matemàtiques (A3, A5) i la seva importància en la disciplina matemàtica (B6), i no tenen, en canvi, una relació directa (probablement sí indirecta) amb el paper que desenvolupa la RP a l'aula. Del gràfic n'extraiem també la relació directa entre nivell de coneixement més alt i més afinitat a les creences proposades per Schoenfeld.

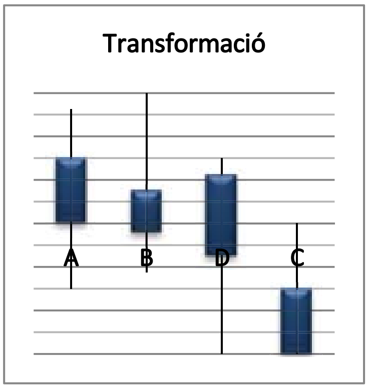
5.5.2. Creences i coneixements on l'estudiant de professor de primària es desmarca

A partir dels gràfics de les quatre mostres d'aquestes creences i coneixements, intentarem començar a establir quines relacions hi ha. Els gràfics els mostrem a continuació:

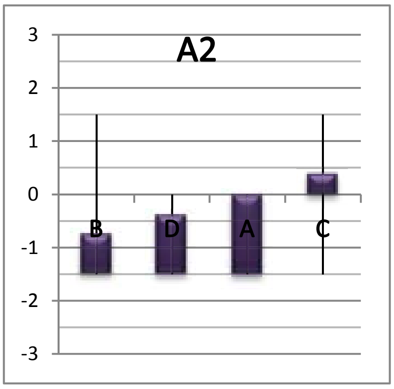
Coneixements (MPCK):

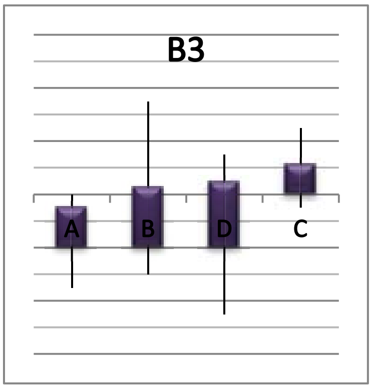






Creences:





L'opinió de la mostra C en aquests dos ítems (*A2. Presència de referents matemàtics identificables a l'enunciat* i *B3. Contextualització matemàtica de l'activitat de RP*) dóna suport a la idea de que els problemes proposats a classe han de ser fàcils de classificar en un tipus de problemes concrets i en un tema concret, per tal de facilitar la tria de les tècniques a utilitzar per a resoldre el problema. Sembla lògic que aquesta forma de pensar vagi lligada a una manca de coneixements o de recursos didàctics per a l'ensenyament-aprenentatge de la resolució de problemes (MPCK), com mostren els resultats.

5.5.3. Síntesi de la relació entre creences i coneixements

Els resultats obtinguts en l'analisi realitzada són els següents:

Creences que no estan directament relacionades amb els coneixements sobre RP:

A. CREENCES SOBRE L'OBJECTE *PROBLEMA DE MATEMÀTIQUES*

1) Flux *entorn -> problema escolar*

4) Precisió de l'enunciat

B. CREENCES SOBRE LA NATURALESA DE L'ACTIVITAT DE RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

1) Caràcter instrumental / investigatiu de l'activitat matemàtica

2) Caràcter rutinari / creatiu de l'activitat matemàtica escolar

4) Èmfasi sobre el producte o el procés

5) Caràcter lineal de l'activitat de resolució de problemes

C. CREENCES SOBRE EL PROCÉS D'ENSENYAMENT-APRENENTATGE DE LA RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

1) Subsidiarietat de la RP a l'aprenentatge d'eines matemàtiques

2) Importància de l'aprenentatge d'estratègies

3) Importància de la millora del control

4) Importància de la conversió dels problemes en no-problemes

Creences relacionades amb els coneixements sobre RP:

A. CREENCES SOBRE L'OBJECTE *PROBLEMA DE MATEMÀTIQUES*

2) Presència de referents matemàtics identificables a l'enunciat

3) Identificació "enunciat verbal" – problema

5) Caràcter tancat del propòsit

B. CREENCES SOBRE LA NATURALESA DE L'ACTIVITAT DE RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

3) Contextualització matemàtica de l'activitat de RP

6) Rellevància de la RP dins de l'activitat matemàtica

El primer que observem, és que cap de les **creences sobre el procés d'ensenyament-aprenentatge de la RP** està relacionada amb els coneixements que tenen professors o estudiants de professor sobre RP. Segons els nostres resultats, aquestes creences funcionen de forma inversa en el cas de la primària i en el cas de la secundària: en el cas de la primària, quanta més experiència docent, més s'apropa la mostra a un sistema de creences proper a Schoenfeld, on l'ensenyament mitjançant la RP és clau; en canvi, en el cas de la secundària, l'experiència docent allunya a la mostra d'aquesta manera de *pensar matemàticament* en aquesta categoria de creences.

També observem que la majoria de **creences sobre l'objecte *problema de matemàtiques*** estan relacionades amb dels coneixements sobre RP que es tenen: quant més alt és el nivell de coneixements, més afí és la idea dels individus de les mostres a la definició de problema adoptada per Schoenfeld (i també per nosaltres en el present treball).

En les **creences sobre la naturalesa de l'activitat de resolució de problemes** hi ha alguns ítems (però pocs) que estan relacionats amb els coneixements sobre RP. Aquesta és la categoria en la que l'opinió de les quatre mostres més convergeix, així que és normal que la majoria d'ítems no estiguin directament relacionats amb els coneixements que es tenen sobre RP. Tot i així, veiem que els ítems que estan relacionats amb els coneixements són els que més tenen a veure amb la idea de problema de matemàtiques, i els que no ho estan tenen més relació amb la pràctica docent, tal com succeeix en les altres dues categories (ja que, segons els resultats obtinguts, les creences sobre l'objecte *problema de matemàtiques* estan molt relacionades amb els coneixements i les creences sobre l'ensenyament-aprenentatge de la RP no).

5.6. Determinació, anàlisi i comparació de prototipus

Després de l'anàlisi de les creences i dels coneixements de les quatre mostres, volem fer un estudi més aprofundit de casos reals. Amb aquest objectiu, hem determinat prototipus de cada mostra, entenent prototipus com aquells subjectes reals que més s'acosten a la mitjana de la mostra. Així doncs, per a cadascun dels quatre prototipus triats pretenem descriure les característiques del conjunt de les seves respostes –tant de coneixements com de creences–, analitzar-ne les respostes obertes, i comparar els prototipus entre sí.

En el cas de les creences, estructurarem l'anàlisi de manera que començarem per definir les creences que tenen els prototipus per categories (sobre l'objecte *problema de matemàtiques*, sobre la naturalesa de l'activitat de RP i sobre el procés d'ensenyament-aprenentatge de la RP) i conclourem fent una síntesi de les creences de cada prototipus.

En el cas dels coneixements, farem el contrari: començarem fent la síntesi dels coneixements sobre RP que té cada prototipus, basant-nos sobretot en els resultats quantitatius, i tenint en compte aquesta visió general, posteriorment analitzarem què han fet els quatre prototipus en preguntes concretes dels protocols.

Finalment, conclourem aquest apartat posant nom a cada prototipus i fent una síntesi de quines creences i quins coneixements té sobre RP, i valorarem quins factors han pogut influir en aquests.

5.6.1. Determinació dels prototipus de cada mostra

Per tal de determinar el subjecte que serà el prototipus d'una mostra concreta, el que hem fet és calcular el coeficient de correlació de Pearson entre les dades de cada subjecte i la mitjana de les dades de tota la mostra, tant en el cas de les creences com en els coneixements.

El coeficient de correlació de Pearson r és un índex adimensional afitat entre -1 i 1 que reflexa el grau de dependència lineal entre dos conjunts de dades, de manera que:

- Si r = 1, hi ha una correlació positiva perfecta. L'índex indica una dependència total entre les dues variables anomenada *relació directa* : quan una d'elles augmenta, l'altra també ho fa en proporció constant.
- Si 0 <r <1, hi ha una correlació positiva.

- Si r = 0, no existeix relació lineal.
- Si -1 <r <0, hi ha una correlació negativa.
- Si r = -1, hi ha una correlació negativa perfecta. L'índex indica una dependència total entre les dues variables anomenada *relació inversa* : quan una d'elles augmenta, l'altra disminueix en proporció constant.

D'aquesta forma, quant més s'apropi el coeficient de correlació de Pearson a 1, més s'aproparan les dades de l'individu de la mostra a la mitjana de la mostra. Per tant, l'individu que tingui un coeficient de correlació de Pearson més alt, serà el nostre prototipus. Com que ens interessa que sigui el mateix prototipus en l'estudi de les creences que en l'estudi dels coneixements, agafarem l'individu que tingui la suma dels coeficients de correlació de Pearson de les creences i dels coneixements més alta, però tenint en compte que en tots dos casos l'índex sigui superior a 0,5.

A continuació, per a cadascuna de les mostres, explicarem el procés de determinació del prototipus i presentarem el prototipus trobat. En cada cas, mostrarem els coeficients de correlació de Pearson de cadascun dels individus de la mostra amb la mitjana de la mostra (amb els quals determinarem el prototipus escollit), els gràfics de creences i de coneixements del prototipus i de la mitjana de la mostra, i una petita presentació del prototipus (les dades personals que en sabem).

Mostra A: l'Estudiant de Professor de Secundària (EPS)

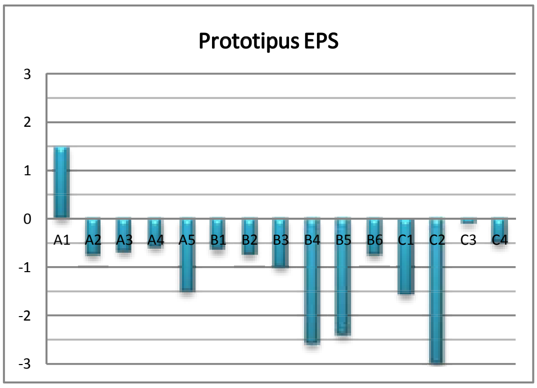
En aquesta taula mostrem els coeficients de correlació de Pearson de cadascun dels individus de la mostra amb la mitjana: en la primera fila en relació a les creences, en la segona en relació als coneixements, i la tercera fila és la suma de les dues primeres.

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13
Creences	0,651	0,788	0,615	0,891	0,692	0,778	0,156	0,852	0,84	0,761	0,86	0,804	0,729
Coneixem.	0,88	0,678	0,832	0,93	0,852	0,648	0,717	0,801	0,712	0,383	0,933	0,785	0,759
Suma	1,531	1,466	1,447	1,821	1,544	1,426	0,873	1,653	1,552	1,144	1,793	1,589	1,488

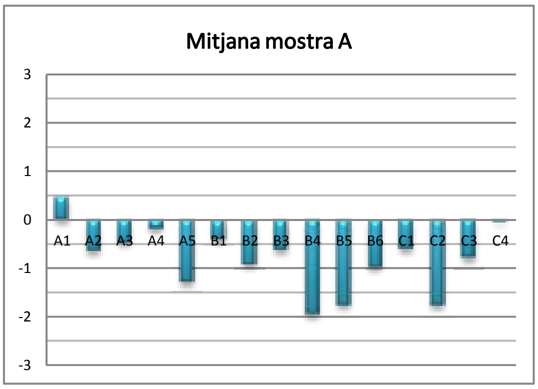
Taula 79. Coeficients de correlació de Pearson de la mostra A

Així doncs, el nostre prototipus serà l'individu A4, al que d'ara en endavant anomenarem EPS (Estudiant de Professor de Secundària). El que sabem de l'individu en qüestió és que és una alumna del Màster de Formació del Professorat de l'especialitat de Matemàtiques de la promoció 2010-2011.

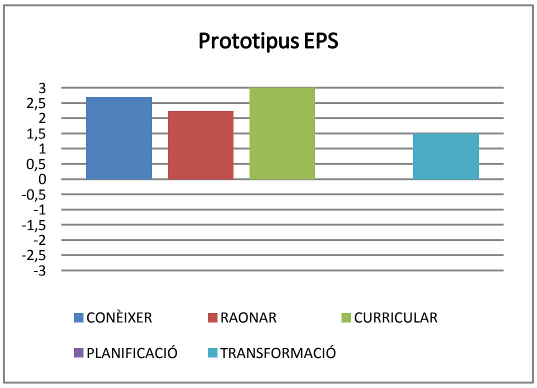
A continuació mostrem els seus gràfics en relació a les creences i als coneixements, mostra A.



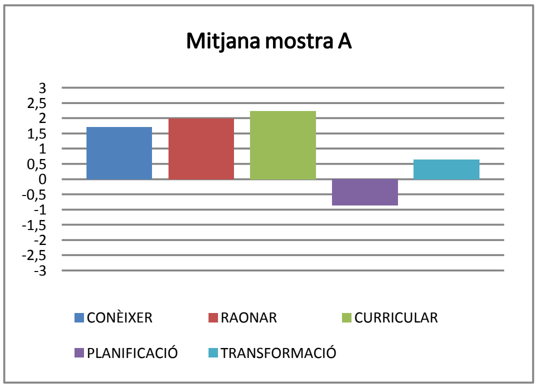
Il·lustració 19. Creences prototipus EPS



Il·lustració 20. Creences mitjana mostra A



Il·lustració 21. Coneixements prototipus EPS



Il·lustració 18. Coneixements mitjana mostra A

Mostra B: el Professor de Secundària (PS)

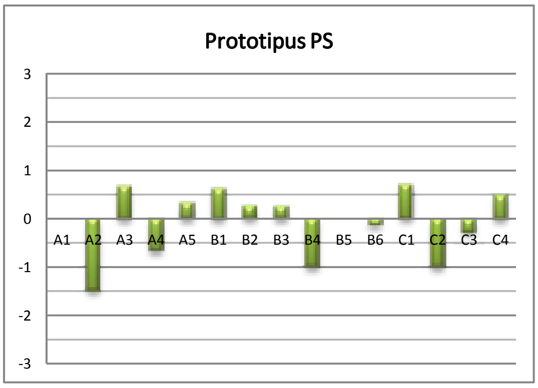
En aquesta taula mostrem els coeficients de correlació de Pearson de cadascun dels individus de la mostra amb la mitjana: en la primera fila en relació a les creences, en la segona en relació als coneixements, i la tercera fila és la suma de les dues primeres.

	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11
Creences	-0,13	0,748	0,824	0,688	0,93	0,777	0,686	0,616	0,727	0,82	0,715
Coneixem.	0,324	0,644	0,73	0,784	0,291	0,669	0,662	0,922	0,936	0,585	0,115
Suma	0,194	1,392	1,554	1,472	1,221	1,446	1,348	1,538	1,663	1,405	0,83

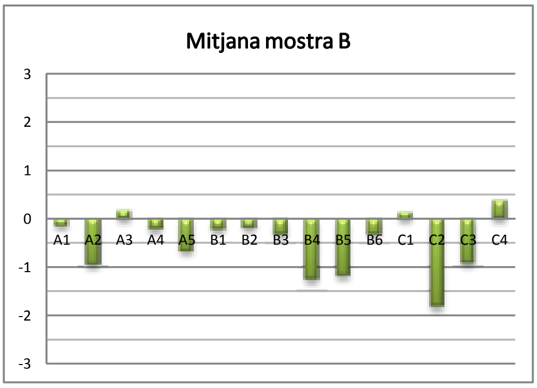
Taula 80. Coeficients de correlació de Pearson de la mostra B

Així doncs, el nostre prototipus serà l'individu B9, al que d'ara en endavant anomenarem PS (Professor de Secundària). El que sabem de l'individu en qüestió és que és un/a professor/a d'educació secundària amb 28 anys d'experiència docent, el/la qual actualment ensenya matemàtiques a secundària a l'aula oberta (diversitat). Tot i ser professor/a de secundària, ha donat classes de matemàtiques tant al cicle superior de primària (5 anys) com al primer cicle de secundària (3 anys).

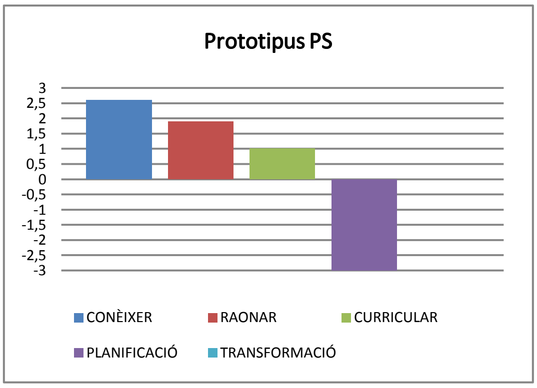
A continuació mostrem els seus gràfics en relació a les creences i als coneixements, al costat dels gràfics de la mitjana de la mostra B.



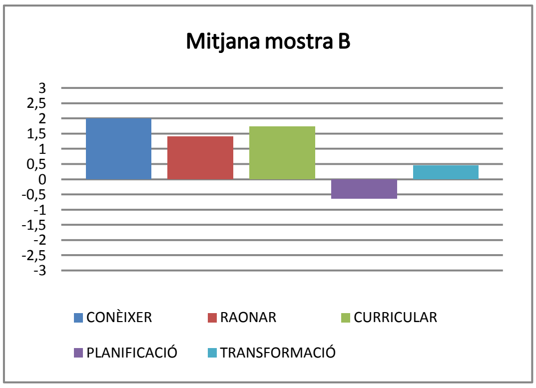
Il·lustració 25. Creences prototipus PS



Il·lustració 24. Creences mitjana mostra B



Il·lustració 23. Coneixements prototipus PS



Il·lustració 22. Coneixements mitjana mostra B

Mostra C: l'Estudiant de Professor de Primària (EPP)

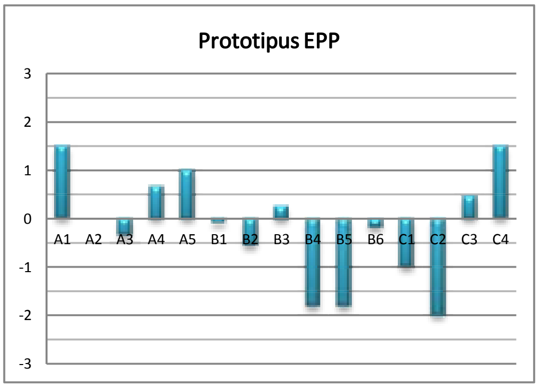
En aquesta taula mostrem els coeficients de correlació de Pearson de cadascun dels individus de la mostra amb la mitjana: en la primera fila en relació a les creences, en la segona en relació als coneixements, i la tercera fila és la suma de les dues primeres.

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11	C12	C13	C14	C15	C16
Creences	0,232	0,801	0,76	0,686	0,789	0,845	0,454	0,772	0,327	0,221	0,833	0,836	0,195	0,883	0,711	0,833
Coneixem.	0,562	0,597	0,224	0,871	0,848	0,755	0,309	0,317	0,88	0,694	0,899	0,594	0,787	0,686	0,374	0,68
Suma	0,794	1,398	0,984	1,557	1,637	1,59	0,763	1,089	1,207	0,915	1,732	1,43	0,982	1,569	1,085	1,513

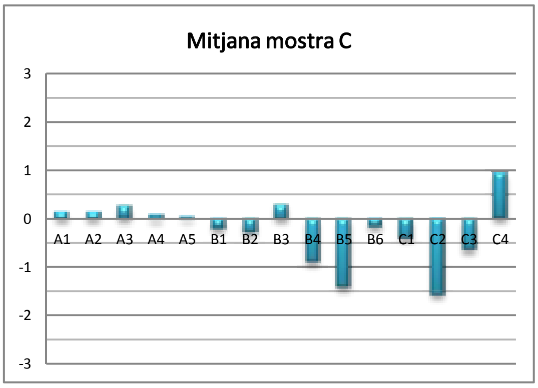
Taula 81. Coeficients de correlació de Pearson de la mostra C

Així doncs, el nostre prototipus serà l'individu C11, al que d'ara en endavant anomenarem EPP (Estudiant de Professor de Primària). El que sabem de l'individu en qüestió és que és un/a estudiant de 3r any d'Educació Primària de la UAB en el curs 2011-2012.

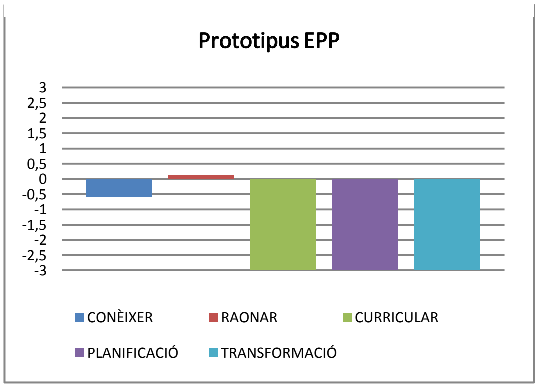
A continuació mostrem els seus gràfics en relació a les creences i als coneixements, al costat dels gràfics de la mitjana de la mostra C.



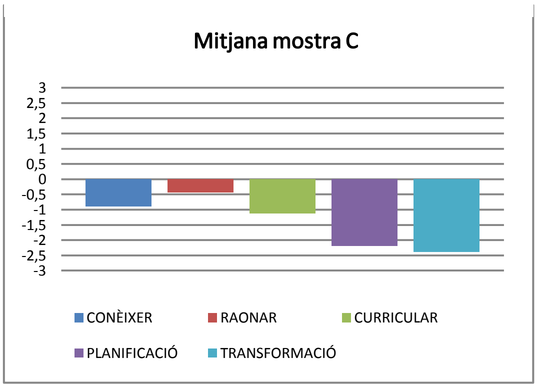
Il·lustració 28. Creences prototipus EPP



Il·lustració 29. Creences mitjana mostra C



Il·lustració 27. Coneixements prototipus EPP



Il·lustració 26. Coneixements mitjana mostra C

Mostra D: el Professor de Primària (PP)

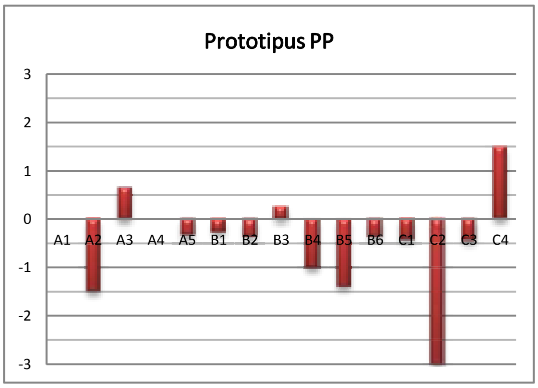
En aquesta taula mostrem els coeficients de correlació de Pearson de cadascun dels individus de la mostra amb la mitjana: en la primera fila en relació a les creences, en la segona en relació als coneixements, i la tercera fila és la suma de les dues primeres.

	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	D10
Creences	0,76	0,74	0,85	0,72	0,49	0,16	0,92	0,92	0,85	0,69
Coneixem.	0,006	-0,05	0,7	0,761	0,357	0,546	0,741	0,403	0,467	0,343
Suma	0,766	0,69	1,55	1,481	0,847	0,706	1,661	1,323	1,317	1,033

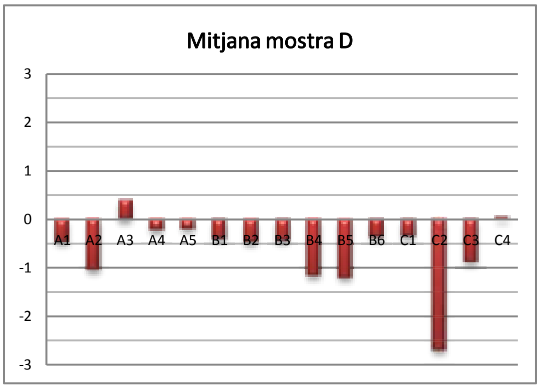
Taula 82. Coeficients de correlació de Pearson de la mostra D

Així doncs, el nostre prototipus serà l'individu D7, al que d'ara en endavant anomenarem PP (Professor de Primària). El que sabem de l'individu en qüestió és que és un/a professor/a d'Educació Primària amb 5 anys d'experiència docent, 3 dels quals en el Cicle Superior de Primària.

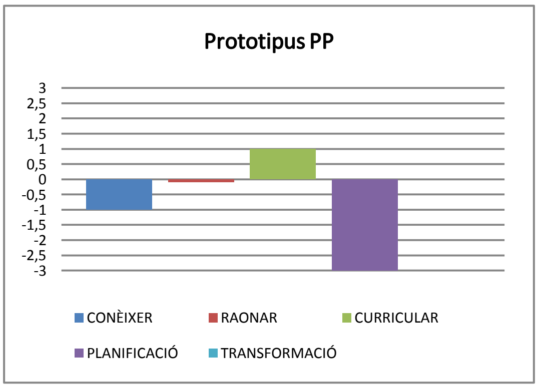
A continuació mostrem els seus gràfics en relació a les creences i als coneixements, al costat dels gràfics de la mitjana de la mostra D.



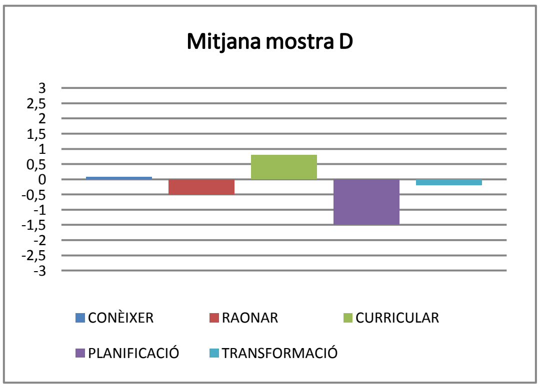
Il·lustració 32. Creences prototipus PP



Il·lustració 33. Creences mitjana mostra D



Il·lustració 30. Coneixements prototipus PP



Il·lustració 31. Coneixements mitjana mostra D

5.6.2. Caracterització i comparació de les creences dels prototipus

En aquest apartat volem caracteritzar les creences que tenen els nostres quatre prototipus sobre la resolució de problemes, i igual que hem fet en l'anàlisi de la mostra sencera, estructurarem les creences en les tres categories amb les que hem treballat:

A. Creences sobre l'objecte *problema de matemàtiques*
B. Creences sobre la naturalesa de l'activitat de resolució de problemes
C. Creences sobre el procés d'ensenyament-aprenentatge de la resolució de problemes

En aquest cas, però, enlloc de subdividir aquestes categories en ítems, treballarem directament amb les diferents creences tipus que es poden despendre de cada categoria de creences, analitzant si els prototipus les comparteixen o no (i en quin grau), i posant de manifest els trets comuns que té cada subjecte tant amb els altres tres prototipus, com amb el sistema de creences relacionat amb allò que Shoenfeld (1991) anomena "pensar matemàticament" en el marc de la RP.

Creences sobre l'objecte problema de matemàtiques

Estructurarem l'anàlisi de les creences sobre l'objecte *problema de matemàtiques* en dues parts:

- Anàlisi de les respostes obertes del qüestionari de creences
    - Definició de *problema de matemàtiques*

- Exemples de problema i d'exercici

➢ Anàlisi de les respostes tancades del qüestionari de creences

En tots dos casos, en realitzar l'anàlisi ens fixarem en els següents ítems (són els mateixos que en l'estudi de tota la mostra) :

1) Flux *entorn -> problema escolar*
2) Presència de referents matemàtics identificables a l'enunciat
3) Identificació "enunciat verbal" - problema
4) Precisió de l'enunciat
5) Caràcter tancat del propòsit

Tot i així, no estructurarem l'anàlisi segons aquests ítems, sinó que les diferents creences tipus que analitzarem estan totes relacionades amb algun/s d'aquests cinc ítems.

Anàlisi de les respostes obertes del qüestionari de creences: definició de problema de matemàtiques

La primera pregunta del qüestionari de creences que hem passat als individus de les quatre mostres demana el següent:

Si haguessis d'explicar QUÈ ÉS UN PROBLEMA DE MATEMÀTIQUES a algú que no ho sap, com li explicaries perquè t'entengués fàcilment?

Per copsar la idea que tenen els prototipus sobre l'objecte *problema de matemàtiques*, no en tindrem prou amb la definició que en donin, però sí que serà un bon inici per començar a entendre les seves creences sobre aquesta qüestió. Aquestes són les definicions que han donat els quatre prototipus sobre què és un problema de matemàtiques:

EPS: *Un enunciat del qual entens perfectament què se't dóna però <u>no tens un camí directe</u> per fer-ho, les eines que utilitzes per resoldre-ho són les matemàtiques.*

PS: *Un dubte o qüestió que volem resoldre utilitzant el llenguatge dels nombres.*

EPP: *Un problema que consisteix en <u>aplicar els coneixements adquirits</u> per tal de donar-li solució.*

PP: *A partir d'unes dades resoldre una situació que se'ns planteja per obtenir un resultat.*

Com hem observat en l'anàlisi qualitatiu del qüestionari, en el que totes les mostres estan d'acord és en el fet que un problema de matemàtiques és una situació matemàtica (enunciat, dubte, qüestió...) que cal resoldre (donar solució). El matís està en si afegeixen algun aspecte més a la definició, com per exemple si la situació és nova o té context real, o quines eines s'utilitzen per a resoldre-la. Ens volem fixar en aquests matisos i també comparar-los amb la definició de problema que hem adoptat en el present treball, que és la següent (M.Luz Callejo, 1994):

Una situació que planteja una qüestió matemàtica el <u>mètode de la qual no és immediatament accessible</u> al que intenta resoldre-la perquè no disposa d'un algorisme que relacioni les dades i *la incògnita o les dades i la conclusió, i ha de, per tant, buscar, investigar, establir relacions, implicar els seus afectes, etc... per fer front a una situació nova.*

La definició de Callejo afegeix dos idees importants: la primera, que la situació és nova, i per tant el mètode per a resoldre-la no és directe; la segona, que per a resoldre-la no basta amb aplicar directament els coneixements que es tenen, sinó que cal buscar, investigar, establir relacions, implicar els afectes...

En el nostre cas, dos dels prototipus afegeixen aspectes interessants: l'EPS, com Callejo, fa referència a la no existència d'un camí directe per a resoldre el problema; l'EPP, en canvi, especifica que les eines mitjançant les quals es resol el problema són els coneixements adquirits, creença contraposada a la nostra definició. Els altres dos prototipus no concreten cap d'aquests aspectes.

Anàlisi de les respostes obertes del qüestionari de creences: exemples de problema i d'exercici

Una altra pregunta del qüestionari que ens pot ajudar a copsar les creences sobre l'objecte *problema de matemàtiques* són els exemples que han posat els prototipus de problema i d'exercici. N'han posat tots menys l'EPP: és un aspecte a tenir en compte, comú en molts individus de la mostra C.

A partir dels exemples proposats, farem una aproximació a la creença que té cada prototipus sobre la dicotomia problema-exercici (menys de l'EPP que no ha posat exemples), fixant-nos en si tenen en compte en la seva caracterització els següents aspectes (molts dels quals han estat esmentats anteriorment en el marc teòric del treball):

- Context real – Context matemàtic
- Caràcter mecànic – No té algorisme directe a la solució
- Tenir en compte que el fet de ser un exercici o un problema depèn de a qui va adreçat (en el nostre cas nens del cicle superior de Primària o del 1r cicle de secundària)
- Contingut

EPS:

Problema 1: Quins nombres naturals es poden expressar com la suma de naturals consecutius?

Problema 2: Donada una circumferència, quin és el triangle circumscrit de major àrea.

Exercici 1: Trobar màxims i mínims d'una funció polinòmica.

Exercici 2: Trobar l'equació d'una recta, sabent dos punts que hi pertanyen.

Tant els problemes com els exercicis tenen un context matemàtic, fet que demostra que per a l'EPS el context real no és un tret diferencial dels problemes. En canvi (com defensa també en la seva definició de problema), sí que posa de manifest en els seus exemples que els problemes no tenen un mètode directe de resolució, mentre que els exercicis sí en tenen. El que no ha tingut en compte en els seus exemples és a qui anaven adreçats, ja que els exercicis i problemes proposats són d'un nivell de batxillerat. El contingut matemàtic és variat: càlcul i àlgebra.

PS:

Problema 1: Un amic té el doble d'anys que tu. Quants anys sumeu entre els dos.

Problema 2: Per anar al zoo a Barcelona des del teu poble, calcula les despeses aproximades que pots arribar a fer en un dia.

Exercici 1: En dos hores una moto fa 150 km. Si va a la mateixa velocitat, quants km haurà fet en 3 hores?

Exercici 2: La base d'un triangle és de 4 cm i la seva altura en fa 2. Sabries dir-nos quina àrea té?

És possible que el PS estableixi una relació entre problema i context real, degut a que els dos exemples que ha posat en tenen; en tot cas no opina que aquest sigui un tret distintiu dels problemes respecte als exercicis, ja que un dels exercicis també té context real. També sembla que tingui el compte el fet de que els problemes no tenen un camí directe de resolució, i a més a més ha proposat problemes oberts (el primer respecte les dades, i el segon respecte les dades i opcions a triar). Els exercicis, en canvi, són mecànics i es resolen tots dos amb una sola operació. Els exemples són adequats a l'edat, i els continguts el càlcul i la geometria.

PP:

Problema 1: En Pau té 25 anys, el seu germà en té el triple. Quants anys té el seu germà?

Problema 2: Uns patins valen 539 €, si paguem amb 3 bitllets de 200 €, quants euros ens tornaran?

Exercici 1: Dibuixa un hexàgon de 2 cm de costat.

Exercici 2: Dibuixa un polígon a partir d'un eix de simetria.

Aparentment el PP estableix una relació directa entre problema i context real, i exercici i context matemàtic, ja que tots els exemples ho mostren. En canvi, tant els problemes que proposa com els exercicis tenen resolució mecànica, i estan adaptats a l'edat. Respecte al contingut hi ha un fet curiós: els dos problemes són problemes aritmètics (d'una o dos operacions), i els dos exercicis són de geometria, concretament de dibuixar polígons.

Segons els exemples proposats, doncs, tenim que les creences respecte a la dicotomia problema-exercici dels prototipus són:

Creences sobre la dicotomia problema-exercici	**EPS**	**PS**	**EPP**	**PP**
Els problemes tenen context real, els exercicis context matemàtic.	NO	NO	-	SÍ
Els problemes no tenen algorisme directe per a resoldre'ls, els exercicis sí.	SÍ	SÍ	-	NO
Alguns continguts són més adequats per a proposar problemes, altres per a proposar exercicis.	NO	NO	-	SÍ

Taula 83. Creences dels prototipus sobre la dicotomia problema-exercici

Els colors que hem posat al fons d'algunes de les cel·les fan referència a si són creences properes a un sistema de creences relacionat amb allò que Shoenfeld (1991) anomena "pensar matemàticament" en el marc de la RP (verd), o si, per contra, són creences properes a sistemes de creences (no homogenis entre ells) que vindrien definits per característiques de rigidesa, reducció a l'instrumentalisme, tradició conductista de l'aprenentatge, de "reducció dels problemes a no-problemes" (rosat). Quan les dades obtingudes no ens permeten decidir si un prototipus té o no una creença determinada, deixarem la casella en blanc amb el signe "-". D'ara en endavant, en l'anàlisi que estem fent de les creences dels prototipus, utilitzarem aquests colors en el mateix sentit que aquí fem.

Cal destacar que, malgrat que aquestes creences no són les creences tipus establertes a priori en l'estructura del nostre treball, estan directament relacionades amb aquestes.

Fixant-nos ja en la taula, podem observar clarament que, d'entre els nostres prototipus, els que estan en l'educació secundària tenen una creença força compartida sobre l'objecte *problema de matemàtiques* (més propera al sistema de creences proposat per Schoenfeld), mentre que el professor de primària en té una altra (per a saber si l'estudiant també la té, haurem d'observar els resultats de tot el qüestionari). La diferència bàsica entre el PS i el EPS ha estat que el primer ha sabut proposar problemes i exercicis adequats a l'edat que nosaltres demanàvem, mentre que el segon no.

Anàlisi de les respostes tancades del qüestionari de creences

En aquesta segona part de l'anàlisi mostrarem en una taula els resultats obtinguts en les preguntes de resposta tancada del qüestionari per cadascun dels prototipus sobre les seves creences entorn a l'objecte *problema de matemàtiques*. Per a fer-ho, de cada creença tipus dels ítems opinarem si el prototipus hi està d'acord o no segons el següent varem obtingut en les respostes (anàleg a l'utilitzat en l'anàlisi quantitativa):

- $-3 \leq \mu < -1{,}5$ Posició clarament definida (-) -> SÍ / NO
- $-1{,}5 \leq \mu \leq -0{,}5$ Posició definida (-) -> sí / no
- $-0{,}5 < \mu < 0{,}5$ Posició no definida (possible lleugera tendència) -> -
- $0{,}5 \leq \mu \leq 1{,}5$ Posició definida (+) -> sí / no
- $1{,}5 < \mu \leq 3$ Posició clarament definida (+) -> SÍ / NO

A. Creences sobre l'objecte *problema de matemàtiques*	**EPS**	**PS**	**EPP**	**PP**
1. És molt important que els problemes treballats a classe siguin situacions reals de l'entorn.	no	-	no	-
2. La presència de referents matemàtics en l'enunciat que portin a identificar el problema com a "problema de matemàtiques" i dins de determinades tipologies és un aspecte determinant en els problemes.	no	no	-	no
3. Tota qüestió donada per enunciat verbal és un problema; un problema "és" un text.	no	sí	-	sí
4. Els enunciats dels problemes que es treballen a classe és important que sempre siguin precisos.	no	no	sí	-
5. Els propòsits rellevants dels problemes són sempre tancats.	no	-	sí	-

Taula 84. Creences dels prototipus sobre l'objecte problema de matemàtiques

El primer que observem és que els quatre prototipus tenen idees força diferents sobre l'objecte *problema de matemàtiques*. En el que més coincideixen és en què la presència d'elements matemàtics en l'enunciat que portin a identificar el problema no és un aspecte determinant, tot i que l'EPP no ho té clar. Els dos estudiants coincideixen en què el context d'un problema no ha de ser necessàriament real, mentre que els altres no es posicionen. Anàlogament, els dos professors coincideixen en la seva forta identificació entre *enunciat verbal* i *problema*, mentre que l'EPP no es posiciona i l'EPS ho nega. Sobre la precisió dels problemes, en canvi, els que estan d'acord són els de secundària (creuen que no han de ser necessàriament precisos), mentre que l'EPP creu que sí i l'EP no es posiciona. Finalment, sobre els propòsits rellevants del problemes (tancat-obert), els professors no es posicionen i els estudiants tenen opinions contraposades: l'EPP creu que són sempre tancats i l'EPS creu que no.

Respecte al sistema de creences, observem que aquell que més s'apropa al sistema de creences relacionat amb "pensar matemàticament" en el marc de la RP és l'EPS, mentre que el que més se n'allunya és l'EPP.

Creences sobre la naturalesa de l'activitat de resolució de problemes

De forma anàloga analitzarem quines creences-tipus tenen els prototipus sobre la naturalesa de l'activitat de resolució de problemes, i ho sintetitzem primerament en la següent taula:

B. Creences sobre la naturalesa de l'activitat de RP	**EPS**	**PS**	**EPP**	**PP**
1. L'activitat matemàtica és exclusivament instrumental.	no	sí	-	-
2. Les classes de matemàtiques són principalment rutinàries.	no	-	no	-
3. Els problemes són proposats dins el tema de les tècniques a utilitzar per a resoldre'ls, i han de fer referència a coneixements ja treballats.	no	-	-	-
4. En l'activitat de RP és més important el producte que el procés.	NO	no	NO	no
5. Cal aconseguir que el procés de resolució de problemes sigui lineal (s'avanci directament fins al resultat).	NO	-	NO	No
6. La RP és l'aspecte més rellevant dins de l'activitat matemàtica.	sí	-	-	-

Taula 85. Creences dels prototipus sobre la naturalesa de l'activitat de RP

En general, podem observar que el que té posicions més extremes és l'EPS, mentre que els altres en la meitat d'aspectes no es posicionen. D'altra banda, també veiem una certa semblança entre les creences dels dos prototipus de primària , i potser el que té opinions més diferents a tots és el PS. Vegem-ho, tot seguit, mentre analitzem creença a creença.

L'únic que pensa que l'activitat matemàtica és exclusivament instrumental és el PS, mentre que l'EPS pensa que és també investigativa, i els de primària no ho tenen clar. En el moment de transportar les matemàtiques les aules, els estudiants de professor pensen que les classes de matemàtiques no són (o no han de ser) rutinàries, mentre que els dos professors no es posicionen. Respecte a la contextualització matemàtica (tant temporal com per temes) dels problemes, l'únic que té clar que no cal és l'EPS, mentre que els altres no es posicionen. En el que tots coincideixen és en què en la RP és tan important el producte com el procés, tot i que el que hi posa menys èmfasi és el PS. Igual que en la necessitat de que el procés de resolució sigui lineal: mentre que els altres tres s'hi oposen, el PS no té clara la seva posició. Finalment, l'únic que atorga a la RP la màxima rellevància dins l'activitat matemàtica és l'EPS; els altres no ho veuen clar.

Respecte al sistema de creences, observem que una altra vegada aquell que més s'apropa al sistema de creences relacionat amb "pensar matemàticament" en el marc de la RP és l'EPS, mentre que el que més se n'allunya en aquest cas és el PS.

Creences sobre el procés d'ensenyament-aprenentatge de la resolució de problemes

En la següent taula mostrem, com en els casos anteriors, les creences-tipus dels quatre prototipus, en aquest darrer cas sobre el procés d'ensenyament-aprenentatge de la resolució de problemes:

C. Creences sobre el procés d'ensenyament-aprenentatge de la RP	**EPS**	**PS**	**EPP**	**PP**
1. Aprendre coneixements de matemàtiques garanteix l'èxit en RP.	NO	sí	no	-
2. Aprendre estratègies (heurístics) ajuda molt en l'èxit en RP.	SÍ	sí	SÍ	SÍ
3. En vistes a millorar en la RP, és important intentar millorar en el control dels coneixements i dels estats d'ànim, la paciència i la perseverança. La RP necessita intuïció i sentit comú.	-	-	-	-
4. Mecanitzar els processos de resolució de problemes és necessari, i cal ensenyar aquests mètodes-tipus.	no	sí	sí	sí

Taula 86. Creences dels prototipus sobre el procés d'ensenyament-aprenentatge de la RP

Els sistemes de creences dels quatre prototipus són diferents, però segueixen una mena d'escala lineal de més a menys proper al sistema proposat per Schoenfeld en el següent ordre: EPS – EPP – PP – PS.

En particular, podem dir que tots quatre consideren que aprendre estratègies ajuda en l'èxit en RP; i sobre els coneixements, mentre que els dos estudiants consideren que aprendre'n no garanteix l'èxit, el PS creu que sí, i el PP no es posiciona. Sobre la conversió de problemes a no problemes, l'EPS és l'únic que no creu que s'hagin de mecanitzar els processos de RP. Finalment, en quant a la importància del control dels estats d'ànim i el control cognitiu (intuïció), cap dels quatre es posiciona.

Síntesi de les creences dels prototipus

En aquest últim apartat de l'anàlisi de les creences dels quatre prototipus volem donar una visió global del sistema de creences que té cadascun dels prototipus sobre la Resolució de Problemes, i ho volem fer des del punt de vista de quines creences dels prototipus són més properes al sistema proposat per Schoenfeld i quines més allunyades.

Estudiant de Professor de Secundària (EPS):

- *Creences sobre l'objecte problema de matemàtiques:* La seva concepció de problema és afí a la que té Schoenfeld: té una idea àmplia de problema (els enunciats no tenen perquè ser ni precisos, ni sempre tancats, ni sempre tenir referents matemàtics, ni ser un enunciat verbal...) i a més inclou la idea essencial de que un problema no té un mètode directe de resolució. En l'únic que difereix és en que no troba important que es tracti d'una situació d'entorn real, probablement en concordança, d'una banda, amb la seva visió àmplia de problema, i de l'altra, a la seva formació secundària post-obligatòria i universitària científica (on els problemes no solen tenir context real).

- *Creences sobre la naturalesa de l'activitat de resolució de problemes:* En aquest cas les seves creences són també afins al sistema de Schoenfeld, sense excepcions: considera la RP l'aspecte més rellevant de l'activitat matemàtica, i conseqüentment la seva visió de les matemàtiques és de caràcter investigatiu i creatiu, tant com a disciplina científica com en l'àmbit acadèmic.
- *Creences sobre el procés d'ensenyament-aprenentatge de la resolució de problemes:* Igual que en l'anterior, aquí –sense excepcions– també es mostra d'acord amb el sistema afí a Schoenfeld: creu en la resolució de problemes basada en l'ús d'heurístics i no en l'aplicació de mètodes tipus i la subsidiarietat a l'aprenentatge de coneixements matemàtics.

➢ *Síntesi:* Podem dir que l'EPS té un sistema de creences totalment afí al definit per Schoenfeld com a *pensar matemàticament*. Les creences referides a les matemàtiques com a disciplina (i els problemes com a part essencial d'aquestes), possiblement les ha adquirit en la seva formació universitària científica, on les matemàtiques es treballen de forma molt diferent de l'escola, i de forma més propera a la realitat de la disciplina. Les creences relatives a l'ensenyament-aprenentatge de les matemàtiques poden haver-se vist influenciades per la formació pedagògica que estava rebent l'EPS al Màster de Formació del Professorat en el moment de realitzar el qüestionari.

Professor de Secundària (PS)

- *Creences sobre l'objecte problema de matemàtiques:* En aquest aspecte les creences del PS són força afins a Schoenfeld: creu que un problema no té un algorisme directe per a resoldre'l, i en general té una idea àmplia de problema (exceptuant la relació directa que imposa entre problema i "enunciat verbal").
- *Creences sobre la naturalesa de l'activitat de resolució de problemes:* Paradoxalment a la seva idea del que és un problema, les seves creences en quant a la naturalesa de la RP són més properes a sistemes de creences definits per una reducció a l'instrumentalisme: en la majoria dels aspectes (classes de matemàtiques rutinàries, problemes contextualitzats matemàticament, rellevància de la RP) no es posiciona, i quan es posiciona ho fa afirmant que l'activitat matemàtica és essencialment instrumental.
- *Creences sobre el procés d'ensenyament-aprenentatge de la resolució de problemes:* En aquest cas també s'apropa més a un sistema de creences contrari al proposat per Schoenfeld, que podríem considerar d'acord amb una tradició conductista de l'aprenentatge: opina que aprendre coneixements de matemàtiques garanteix l'èxit en RP i que cal ensenyar mètodes-tipus per a resoldre problemes de matemàtiques.

➢ *Síntesi:* Exceptuant les creences sobre l'objecte *problema de matemàtiques*, adquirides probablement en la seva formació científica i que tenen a veure només amb la concepció general de què és un problema, les creences del PS respecte a la Resolució de Problemes i el seu ensenyament-aprenentatge s'allunyen molt de les relacionades amb *pensar matemàticament*; més aviat es caracteritzen per una reducció a l'instrumentalisme de l'activitat matemàtica i a una tradició de caràcter conductista de l'aprenentatge. Per tant, per molt que el PS tingui clar què és la RP, no troba que sigui un dels aspectes més importants ni de les matemàtiques ni de l'educació matemàtica. Potser un factor d’influència sobre aquest sistema de creences podria ser la gairebé nul·la formació en didàctica de les matemàtiques que sol tenir un professor de secundària.

Estudiant de Professor de Primària (EPP):

- *Creences sobre l’objecte problema de matemàtiques:* Les creences de l’EPP sobre què és un problema de matemàtiques són totalment contràries a les proposades per Schoenfeld. Té una concepció molt concreta de com ha de ser un problema: un text precís de propòsit tancat.
- *Creences sobre la naturalesa de l’activitat de resolució de problemes:* En aquest cas les seves creences són més properes a *pensar matemàticament*: tot i no tenir clara la naturalesa de l’activitat matemàtica (instrumental o investigativa) ni la rellevància de la RP en aquesta, creu en unes classes de matemàtiques creatives, i en la RP dóna més importància al procés (que no cal que sigui lineal) que al producte.
- *Creences sobre el procés d’ensenyament-aprenentatge de la resolució de problemes:* En aquest cas les seves creences s’allunyen de les proposades per Schoenfeld, ja que opina que cal mecanitzar els processos de resolució de problemes (tot i pensar que els coneixements matemàtics no en garanteixen l’èxit).

➢ *Síntesi:* Té unes creences molt obertes en quant a l’ensenyament-aprenentatge d’una disciplina en general (classes poc rutinàries, importància del procés per davant del producte...). Tanmateix, en el cas de les matemàtiques, el poc domini de la disciplina (constatat en l’anàlisi dels coneixements) fa que les seves creences dotin les matemàtiques d’un caràcter marcadament instrumental, on la RP no hi juga un paper rellevant (o no hi juga cap paper). El fet de no entendre el terme *problema* en el sentit que li donem nosaltres, concorda amb la seva creença sobre la necessitat de reduir els problemes a “no-problemes”, ja que el que per a l’EPP són problemes per a nosaltres són exercicis, i el que per a nosaltres són problemes l’EPP ho veu, com a mínim, allunyat de la matemàtica escolar que ha de dominar i ensenyar en un futur.

Professor de Primària (PP):

- *Creences sobre l’objecte problema de matemàtiques:* Els resultats que em obtingut del PP mitjançant les respostes tancades ens indiquen que no es posiciona de forma clara respecte a la seva idea de problema: no té clar si han de ser o no situacions reals de l’entorn, precisos, o de propòsit tancat. Sí té clar, però, que un problema és un “text”. Tot i així, els exemples que ha posat de problema i exercici deixen entreveure unes creences força marcades respecte a la dicotomia problema-exercici: els problemes tenen context real i generalment són problemes aritmètics; els exercicis tenen context matemàtic i generalment són operacions (si treballem el càlcul) o construcció de figures (si treballem la geometria). En tots els casos l’algorisme de resolució és directe. El PP té, doncs, en aquest tema, creences força contraposades al sistema de creences de Schoenfeld.
- *Creences sobre la naturalesa de l’activitat de resolució de problemes:* No es posiciona en gairebé cap aspecte de la naturalesa de l’activitat de RP: no té clar si la RP és rellevant en les matemàtiques, ni si aquestes són instrumentals o investigatives, ni si les classes de matemàtiques han de ser rutinàries o creatives. Per tant, no podem concloure ni que sigui afí a Schoenfeld ni que se n’allunyi molt.

- *Creences sobre el procés d'ensenyament-aprenentatge de la resolució de problemes:* En aquest cas podem dir que, tot i no posicionar-se de forma radical, les seves creences no concorden amb el que entenem per *pensar matemàticament*: veu necessari l'aprenentatge de mètodes tipus de resolució de problemes, i no té clar si els coneixements de matemàtiques només ajuden o si garanteixen l'èxit en RP.

➢ *Síntesi:* En general, el PP no es posiciona de forma clara ni cap a un sistema de creences proper a *pensar matemàticament* ni cap a un sistema contrari. En el que menys es posiciona és en la seva idea de l'activitat matemàtica escolar o com a disciplina (creativa/rutinària), i en el que més es posiciona és en la seva visió dels problemes: en té una idea molt concreta i tancada (generalment són problemes aritmètics en forma de text), i tenen un mètode concret de resolució que cal ensenyar per a cada tipus de problema.

Observant de forma global els resultats obtinguts en l'anàlisi dels quatre prototipus, podríem establir una escala en funció de si tenen un sistema de creences més o menys afí al *pensar matemàticament* de Schoenfeld en les creences sobre el paper de la RP a l'aula. L'esquema que oferim a continuació ens dóna una idea global que permet fer-nos una idea del sistema de creences de cada prototipus, i al mateix temps ens possibilita comparar de manera general els diferents sistemes de creences. Cal tenir en compte però que només hem seleccionat algunes creences concretes relatives a la naturalesa de la RP i al seu procés d'ensenyament-aprenentatge on la divergència d'opinions era clara; no hem inclòs creences sobre l'objecte *problema de matemàtiques*, on sembla ser que juga un paper molt important el fet de ser de primària o secundària.

EPS	EPP	PP	PS
–			+
Els problemes no tenen un mètode-tipus de resolució			Sí el tenen, i cal ensenyar-los
Classes creatives			Classes rutinàries
Els coneixements només ajuden en la RP			Els coneixements garanteixen l'èxit en RP

Taula 87. Síntesi d'algunes creences dels prototipus

El primer que observem, d'acord amb la mostra, és que els professors tenen unes creences més rígides que els estudiants. Una possible lectura d'aquests resultats és que l'ideal de classes creatives on la resolució de problemes pot jugar un paper important perd força quan la tasca docent és posada en pràctica.

D'altra banda, veiem que hi ha una *distància* molt més gran entre l'EPS i el PS (la màxima possible) que entre l'EPP i el PP. Això pot tenir, almenys, dues lectures: la primera, que a secundària és on la tasca docent modifica més les creences que es porten de la formació prèvia; la segona, que el nostre PS no ha tingut formació pedagògica prèvia (no considerem el CAP[12] com a formació prèvia, pel seu caràcter i la seva durada, com tampoc es considerava

[12] Certificat d'Aptitud Pedagògica: requisit indispensable per als Llicenciats, Enginyers Superiors, Arquitectes, o equivalents per poder exercir l'ensenyament a l'Educació Secundària a Espanya segons la Llei orgànica 1/1990, del 3 d'octubre, d'Ordenació General del Sistema Educatiu (LOGSE). Tenia una durada de 120 hores, i va ser vigent en el nostre país fins al 2010 (quan va entrar en vigor el Màster de Formació del professorat, d'un any de durada a temps complet, 1500 hores).

internacionalment[13]), mentre que l'EPS està cursant actualment el nou Màster de Formació del Professorat, on justament s'intenta que els futurs professors de matemàtiques aprenguin a *pensar matemàticament*.

5.6.3. Caracterització i comparació dels coneixements dels prototipus

El nostre objectiu és donar una mirada qualitativa a les semblances i diferències que tenen els quatre prototipus en el seus coneixements sobre resolució de problemes. Per a fer-ho, analitzarem què fan aquests individus en algunes preguntes concretes dels protocols.

Abans, però, donarem un cop d'ull general als resultats quantitatius obtinguts en els protocols, tant pel que fa als diferents tipus de coneixement com pel que fa als tipus de contingut. Això ens proporcionarà, d'una banda, elements per a triar posteriorment aquelles preguntes dels protocols que ens interessarà analitzar amb detall, i d'altra banda, també resulta una síntesi comparativa dels coneixements dels quatre protocols.

Síntesi dels coneixements dels prototipus

La síntesi dels resultats quantitatius la trobem en la taula 88. Recordem que, segons les puntuacions obtingudes en els protocols, considerarem els nivell de coneixements dels quatre prototipus:

- [2, 3] Nivell molt alt
- [1, 2) Nivell alt
- [0, 1) Nivell just
- [-1, 0) Nivell baix
- [-2, -1) Nivell molt baix
- [-3, -2) Nivell nul

TIPUS DE CONEIXEMENT		EPS	PS	EPP	PP
MCK: CONÈIXER	Recordar	2,4	2,4	-0,6	-0,6
	Reconèixer	3	3	-0,6	-1,8
MCK: RAONAR	Analitzar	3	2,14	-0,43	0,43
	Integrar	3	1,8	-0,6	-0,6
	Generalitzar	3	3	3	0
	Justificar	0	-1,5	-1,5	-1,5
MPCK: CURRICULAR		3	1	-3	1
MPCK: PLANIFICACIÓ	Planificar problemes	0	-3	-3	-3
	Adaptar problemes	0	-3	-3	-3
MPCK: TRANSFORMACIÓ	Representar resolucions	0	0	-3	0
	Avaluar resolucions	3	0	-3	0

[13] Espanya no va poder participar en el TEDS (estudi mundial sobre els estudiants de professor, explicat àmpliament en el nostre Marc Teòric) perquè s'estaven avaluant les formacions per a ser docent, i es va considerar que a secundària Espanya "no en tenia".

CONTINGUTS				
Operacions amb enters	1,8	1,8	1,8	0,6
Divisibilitat	1,71	-0,5	-1,93	-0,5
Fraccions	1,67	1,67	-1,67	-1
Decimals	1,5	-1,5	-3	-1,5
Percentatges	3	3	-3	3

Taula 88. Resultats quantitatius dels coneixements dels prototipus

En els resultats del **coneixement del contingut matemàtic** ens trobem els mateixos resultats que en l'estudi quantitatiu de totes les mostres. En recordar i reconèixer, els prototipus de secundària tenen un nivell molt alt, en contraposició als prototipus de primària, que tenen un nivell baix (fins i tot el PP més baix que l'EPP). En raonar passa una cosa semblant, però, tot i que també podríem establir aquests dos subgrups primària-secundària, on els primers tenen un nivell molt més baix que els segons, el que té clarament un nivell més alt de raonament és l'EPS.

En quant al **coneixement didàctic del contingut**, no tenim tants matisos com en l'anterior, també degut a que hi ha menys preguntes i els prototipus no les han contestades totes (els resultats també són força negatius perquè una pregunta no resposta es compta com incorrecta). L'EPS és el que té un nivell més alt, tot i tenir nivell just en tot menys en coneixement curricular i d'avaluar, on el té molt alt. Els dos professors tenen exactament els mateixos resultats: coneixement curricular alt, just de transformació i molt baix de planificació. L'EPP té un nivell molt baix en tots els tipus de coneixements, degut majoritàriament a que no ha respost moltes preguntes obertes de planificació o representació de problemes o resolucions, i les que ha respost ho ha fet incorrectament.

Respecte als **continguts**, els resultats són clars i contundents, ja que observem una escala de més nivell de coneixement a menys nivell de coneixement en tots els continguts: EPS – PS – PP – EPP. Tot i així, trobem matisos segons els continguts. En el que tots tenen un nivell força alt és en operacions amb enters. En divisibilitat i decimals passa una cosa semblant: l'EPS té un nivell alt, els dos professors tenen el mateix nivell (baix/molt baix en ambdós casos), i l'EPP té un nivell gairebé nul. En fraccions podem dir que els prototipus de secundària tenen un nivell alt, i els de primària baix, tot i ser un altre cop pitjor el de l'EPP. En percentatges tots tenen un nivell molt alt menys l'EPP, el nivell del qual és nul.

Un cop fet l'anàlisi general dels coneixements, mirarem pregunta a pregunta (aquelles més interessants) què han fet els prototipus. Ens fixarem sobretot en aquelles preguntes on tots quatre no hagin respost el mateix, ja que en les altres el factor determinant possiblement hagi estat la dificultat/facilitat objectiva de la pregunta. Les preguntes les estructurarem segons els seus continguts matemàtics i, cadascun d'aquests, segons els tipus de coneixement que avalua la pregunta.

OPERACIONS AMB ENTERS: Conèixer i Planificar

P1.1a. Els estudiants de vegades només recorden part d'una regla. Solen dir, parlant de nombres enters per exemple, "dos negatius fan un positiu". Per a cadascuna de les següents operacions (suma, resta, multiplicació, divisió), decideix si aquesta afirmació funciona sempre (S) , mai (M) o de vegades (V).

P1.1b. Escriu un problema que utilitzi un context real que podries posar a la teva classe per tal d'exemplificar en el cas de la resta que "dos negatius fan un positiu".

La pregunta 1a, on se'ls demana identificar quan és cert en cada operació que "dos negatius fa un positiu", l'han resposta bé tots quatre prototipus. Ara, l'apartat b l'han contestat de forma molt diferent, vegem-ho:

EPS: *No hi ha cap raó/context real que justifiqui aquesta regla. La raó és algebraica o intramatemàtica.*

PS: *1. Algú t'acaba de treure un deute de 80 € que tenies amb ell. Com ho representes? 2. Un termòmetre passa de -8º a -3º. Quin canvi ha experimentat?*

EPP: *Al vostre compte de la caixa devem uns 300 €, és a dir, estem en números vermells (-300). Però resulta que cobrem 200 € per realitzar un treball. Ara el nostre compte es redueix a 100 € (-100).*

PP: No ha escrit cap exemple.

És interessant veure que, per diverses raons, als quatre prototipus els ha resultat molt difícil trobar un problema que exemplifiqui correctament la resta de dos nombres negatius amb resultat positiu, i l'únic que ho ha aconseguit ha estat el PS. L'EPS i el PP no ho han intentat, el primer perquè creu que no és possible i l'altre no sabem perquè. El PS i l'EPP han formulat tres exemples, dels quals només un és correcte. En el cas del PS, el primer problema proposat no suposa cap resta, mentre que el segon sí, i a més és correcte: *(-3)-(-8)=(+5).* L'EPP no proposa un problema sinó una situació, que tal com està redactada, no correspon a l'exemple sol·licitat.

DIVISIBILITAT: Raonar i Coneixement Curricular

P1.2a. Imagina que tens 108 boles vermelles i 180 de verdes. Les vols repartir, totes, en sacs (sense que en sobri ni en falti cap) de manera que en tots els sacs hi hagi el mateix nombre de boles, i que totes les boles de cada sac siguin del mateix color. Quin és el mínim nombre de sacs que necessites? (a.288, b.36, c.18, d.8, e.1)

P1.2b. Quins dels següents continguts del curs són necessaris per a resoldre el problema? (a.Probabilitat, b.Mínim comú múltiple, c.Màxim comú divisor, d.Divisió d'enters)

Per a resoldre el problema, cal fer primer el MCD(108,180)=36, que són la quantitat màxima de boles que pots posar el cada sac, però com et pregunta pel nombre de sacs (que no el nombre de boles), després cal fer la divisió del nombre de boles que tenim entre les que posem en cada sac per tal d'obtenir el nombre total de sacs necessaris, és a dir, (108+180):36=8. Per tant, els continguts del currículum necessaris per a resoldre el problema són el MCD i la divisió d'enters.

Els prototipus que han resolt correctament el problema han estat l'EPS i el PP; a més també han dit correctament quins continguts s'utilitzaven per a la resolució (el PP s'ha deixat la divisió d'enters –tot i utilitzar-la – però sí que ha posat el MCD). El PS ha utilitzat només el MCD (i també ha posat en la 2b que era el contingut necessari), amb el que el resultat del problema li ha donat, incorrectament, 36 (podríem dir que ha caigut a la "trampa" del problema). L'EPP ha fet una cosa molt estranya: igual que el PS, ha contestat 36, però ha dit que el contingut utilitzat era la probabilitat. Això ens fa pensar que potser no sabia resoldre el problema, i ens fa dubtar sobre els procediments realitzats per a trobar que la resposta era 36.

En definitiva, podríem dir que, en general, per als prototipus, la dificultat del problema ha estat en els raonaments necessaris per a resoldre'l, ja que els continguts curriculars els tenen clars. En el cas dels prototipus de secundària, l'EPS ha resolt correctament el problema, mentre que el PS, aparentment, s'ha deixat endur per la creença de que era "el típic problema de MCD" i no ha analitzat a fons el problema. En els prototipus de primària es dóna una realitat molt diferent: mentre que l'EPP ni ha resolt correctament el problema ni ha identificat els continguts matemàtics d'aquest, el PP ha respost correctament les dues coses.

DIVISIBILITAT: Justificar

P1.5. La professora Joana està estudiant amb la seva classe les regles de divisibilitat. Els explica que un nombre és divisible per 4 si i només si els dos últims dígits del nombre són divisibles per 4. Un dels seus alumnes pregunta perquè funciona aquesta regla. Aleshores la professora els demana que intentin trobar la raó, i els alumnes proposen diferents possibles raons. Marca, de les afirmacions següents, totes aquelles que consideris que poden portar a la demostració de la regla.

a) Els nombres senars no són divisibles per nombres parells, i dels que són parells, només la meitat són divisibles per 4: 4, 6, 8, 10, 12...

-> No: tot i que això és cert, no porta a cap justificació.

b) El nombre 100 és divisible per 4 (i també 1000, 10000, etc.).

-> Sí: si escrivim qualsevol nombre de més dues xifres, com per exemple 12344 = 44 + 3*100 + 2*1000 + 1*10000, el primer sumand és el nombre format per les dues últimes xifres (que hem dit que era divisible per 4), i els següents sumands són tots múltiples de 4 també, ja que tenen com a factors una potència de 10 superior o igual a 100, i la suma de múltiples de 4 és múltiple de 4.

c) Per veure si un nombre és divisible per $2=2^1$ cal mirar que sigui divisible per 2 l'última xifra, per veure si és divisible per $4=2^2$ les dues últimes xifres, per veure si és divisible per $8=2^3$ les 3 últimes xifres... i així successivament.

-> Sí: el raonament és anàleg a l'exemple anterior, basat en si el nombre en qüestió és divisor de les potències de 10. A partir de 10=2*5 totes les potències de 10 són múltiples de 2; a partir de $100=2^2*5^2$ totes les potències de 10 són múltiples de 4; a partir de $1000=2^3*5^3$ totes les potències de 10 són múltiples de 8... i així successivament.

d) Si la regla funciona per a 100, 104, 108, ..., 140, aleshores funcionarà per a tots els nombres.

-> No: aquesta afirmació és un intent d'inducció incorrecta, entre d'altres raons perquè s'atura en el nombre 140.

Primer de tot, cal destacar que cap dels protocols ha encertat les dues respostes correctes, fet que evidencia un baix nivell a l'hora de justificar/demostrar per part de tots quatre.

Els dos protocols de secundària han marcat correctament la *b*, però després tots dos han marcat també la *d* (possiblement perquè coneixen el mètode d'inducció), i el PS ha marcat també la *a*. Els dos protocols de primària no han marcat cap resposta correcta, en canvi sí que n'han marcat d'incorrectes: l'EPP la *d* i el PP la *a*.

DIVISIBILITAT: Raonar i Planificar

P1. 6a. La Sandra i en Martí han anat a buscar bolets. N'han trobat 70 (només rovellons i llenegues). Els 5/9 dels bolets trobats per la Sandra eren rovellons, mentre que els 2/17 dels trobats per en Martí eren llenegues. Quants bolets ha trobat la Sandra? El problema...

Resolució:

$\dot{9} + \dot{17} = 70 \quad \rightarrow$

$Mitjançant\ un\ estudi\ de\ casos\ trobem\ que\ el\ \text{únics}\ enters\ que\ ho\ compleixen\ \text{són}$

$$36 + 34 \quad \rightarrow La\ Sandra\ ha\ trobat\ 36\ bolets$$

a) Té múltiples solucions: està bé per a que els nens i nenes vegin que alguns problemes no tenen solució única.

-> Fals: el problema té solució única.

b) Té solució única. La forma més entenedora i eficient de resoldre'l és amb un sistema d'equacions: si encara no s'han estudiat els sistemes no és adequat proposar el problema a classe.

-> Fals: amb un sistema d'equacions no es pot resoldre, hi ha massa incògnites (que a més han de ser enteres) i no hi ha prou equacions. En tot cas es pot resoldre amb una equació diofàntica (9x + 17y = 70)

c) Té solució única, i la forma més entenedora i eficient de resoldre'l és fent un estudi de casos.

-> Cert.

d) La forma més entenedora de resoldre'l és emprant un rectangle, per exemple, per a representar el total dels bolets. Partint-lo i pintant les parts adequades, és possible resoldre el problema i trobar-ne la solució.

-> Fals: falten dades per a poder resoldre'l així; el fet que hi hagi fraccions en l'enunciat pot fer creure que es pot utilitzar aquest mètode.

e) No té solució.

-> Fals: l'hem trobada.

P1.6b. Crea un problema diferent però del mateix tipus del problema 6a (mateixos processos o operacions) que sigui més fàcil de resoldre per als teus alumnes.

Si utilitzen els mateixos processos ha de ser un problema on tenim que un total A = N + M, on A, N, M són enters, i sabem que i/x de N és enter, i que j/y de M és enter. Per tant, sabem que N = $\dot{x}$ i M = $\dot{y}$, amb el que el problema es resol amb un estudi de casos per trobar N i M que compleixin tot l'anterior. En el cas d'utilitzar les mateixes operacions, només cal que el problema sigui de divisibilitat i calgui resoldre $\dot{9} + \dot{17} = 70$.

Abans d'analitzar les respostes dels prototipus, vegem els exemples que han posat de problemes del mateix tipus:

EPS: *En una botiga de llaminadures venen caramels només de maduixa i de llimona. Els de maduixa venen den bosses de 17 caramels en cadascuna, els de llimona en bosses que contenen 9 caramels. Quantes bosses de cada sabor he de comprar per tenir en total 70 caramels?*

En la pregunta *6a*, sobre el mètode de resolució, l'EPS ha donat la resposta correcta, i l'exemple proposat també és correcte: és un problema amb les mateixes operacions, ja que tot i no contenir fraccions, és un problema de divisibilitat que es resol igual que l'original mitjançant l'equació diofàntica 17x+9y=70, i té les mateixes solucions.

PS: *En Joan, l'Ariadna i en Hadi han comprat verdures i fruita a la plaça. Si s'han gastat entre els tres 30 €, podries dir quants diners s'han gastat cada un tenint en compte que en Joan ha gastat la meitat, l'Ariadna una tercera part i en Hadi una sisena part del total?*

El PS, tot i haver respost bé la primera pregunta referent al mètode de resolució del problema, ha creat un problema incorrecte: al simplificar-lo, ha convertit un problema que era de divisibilitat en un problema de fraccions.

EPP: *La Carla regala 70 caramels a la Maria i en Joan. La Maria es queda 6/10 caramels i en Joan 4/10 caramels. Qui en té més, la Maria o en Joan? Quants en té cadascú?*

Respecte al problema inicial, l'EPP ha cregut que no tenia solució, i a l'hora de crear un problema amb els mateixos processos ha creat un problema de fraccions. És possible que hagi intentat resoldre el problema inicial com un problema de fraccions i no n'hagi trobat la solució (ja que no es pot resoldre amb fraccions).

PP: *12 boles vermelles i blanques, ¼ part són vermelles. Quantes n'hi ha de blanques?*

El PP ha considerat que el problema es podia resoldre geomètricament com un problema de fraccions, i conseqüentment l'exemple proposat és de fraccions (incorrectes les dues respostes).

En resum: en el mètode per resoldre el problema (*6a*), ens trobem que els prototipus de secundària han donat la resposta correcta (estudi de casos), i els de primària no: l'EPP ha cregut que no tenia solució, i el PP que es podia resoldre geomètricament amb fraccions. Està clar que cap dels dos l'ha sabut resoldre. I a l'hora de crear un problema més fàcil però amb els mateixos processos o operacions per a resoldre'l, l'únic que ho ha fet bé és l'EPS, tots els altres (en el cas del PS, tot i haver respost bé la primera pregunta), han creat un problema de fraccions.

FRACCIONS: Conèixer i Planificar

P2.2a. Quin és el resultat de dividir 1 ¼ entre ½? (a.1/8, b.1/2, c.1/4, d.5/2, e.5/8, f.2)

-> La resposta correcta és 5/2.

P2.2b. Quins dels següents problemes podria ser utilitzat per il·lustrar 1 ¼ dividit entre ½?

a) Volem repartir 1 ¼ pastissos entre dues famílies. Quant de pastís tindrà cada família?

-> No: l'operació per a resoldre aquest problema seria 5/2 : 2.

b) Tenim 1,25 € i aviat en tindrem el doble. Quants diners tindrem llavors?

-> No: tot i que el resultat sigui el mateix, l'operació en aquest problema és una multiplicació per 2 i no una divisió entre 1/2: 1,25 *2.

c) Estem fent un coc i la recepta diu que posem 1 ¼ tasses de mantega. Quantes cullerades de mantega (cada cullerada = ½ tassa) necessitarem?

-> En aquest cas sí.

En el primer apartat tres dels quatre prototipus responen correctament; l'EPS contesta que el resultat és 5/8: el que fa és multiplicar enlloc de dividir.

En el segon apartat cap dels quatre prototipus respon correctament els tres problemes: l'únic que s'adona que el primer problema no es resol mitjançant aquesta operació és l'EPS. En el segon problema, els prototipus de secundària responen incorrectament que sí es resol amb l'operació (probablement perquè només es fixen en el resultat), i l'EPP i el PP responen que no i no respon respectivament. En l'últim cas, que és el que es resol amb l'operació citada amb anterioritat, tots responen correctament que sí.

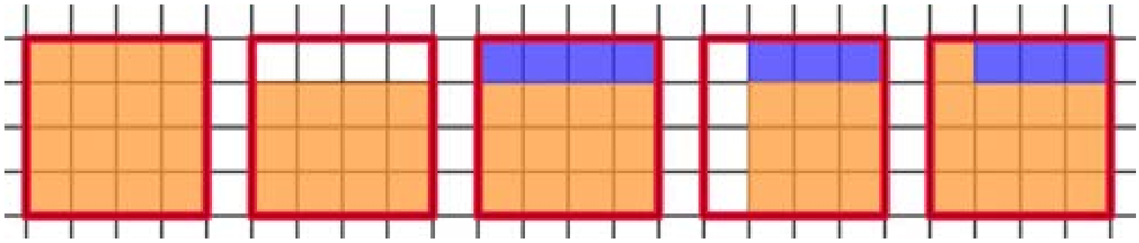
FRACCIONS: Conèixer, Raonar i Transformar

En aquest apartat, analitzaré conjuntament les preguntes 3a, 3b, 4 i 6 del 2n protocol, ja que els resultats dels protocols són iguals en totes aquestes. Vegem primer els enunciats de les preguntes i les solucions:

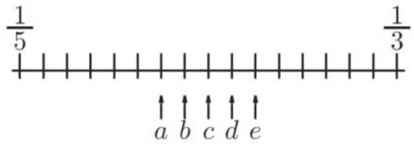
P2.3a. La mare de l'Oleguer ha preparat una gerra de suc de taronja, un litre en total. L'Oleguer tenia set i ha begut un vas gros de suc de taronja (la capacitat del vas és d'un quart de litre). Perquè no es noti, substitueix en la gerra el que ha begut per aigua. Poc després l'Oleguer té més set i beu un altre vas de la barreja (amb el mateix vas de quart de litre, ben ple). Però com que ja la troba una mica aigualida pensa que si reomple la gerra amb aigua es notarà molt i per això fa un quart de litre de suc de taronja i l'aboca a la gerra. Després d'això, quina part del líquid de la gerra és aigua? (Resposta correcta: 3/16)

P2.3b. L'Eugeni no ha sabut resoldre el problema per sí mateix. Dibuixa una representació visual que pugui ajudar a l'Eugeni a entendre perquè la solució correcta és la que és.

Possible (i probable) representació:



P2.4. L'Elisabet dibuixa a la pissarra la següent recta numèrica, i hi situa les fraccions 1/3 i 1/5 de la següent manera:



Demana als alumnes que situïn la fracció ¼, i 5 alumnes surten a la pissarra a donar la seva solució. La Marta situa ¼ en el punt *a*, el Joaquim en el *b*, la Raquel en el *c*, la Sara en el *d* i l'Eugeni en el *e*. Quin dels 5 alumnes ha situat ¼ correctament?

-> El raonament es pot fer de diverses maneres, en tot cas la resposta correcta és la *a*.

P2. 6. Un cert dia de classe els proposes als teus alumnes un joc. Han d'escriure a la llibreta una fracció amb les següents característiques:

- **El numerador i el denominador han de ser nombres negatius.**
- **El numerador ha de ser més gran que el denominador en una unitat.**

Els dius que endevinaràs com és la fracció que han escrit. Quina d'aquestes característiques de la fracció "encertaràs"? (Encercla'n UNA)

a) La fracció és un nombre més petit que -1.
b) La fracció és un nombre entre -1 i 0.
c) La fracció és un nombre positiu menor que 1.
d) La fracció és un nombre més gran que 1.

-> La resposta correcta és la *c*.

L'anàlisi de les respostes dels prototipus en les preguntes de coneixement del contingut (en aquest cas fraccions) 3a, 4 i 6 és simple: els dos prototipus de secundària les han respost correctament i els dos prototipus de primària o bé han respost incorrectament o bé no han respost. El tipus de coneixement implicat en aquestes preguntes era tant de conèixer com de raonar al voltant de les fraccions. En conseqüència, en la pregunta 3b hem obtingut el mateix resultat: donat que no han resolt correctament el problema, els prototipus de primària no l'han representat gràficament. Els de secundària sí ho han fet, de la mateixa manera que hem mostrat més amunt.

DECIMALS: Raonar i Planificar

P2.5a. Nou pastissets costen menys de 10 € i deu pastissets costen més d'11 €. Quant val un d'aquests pastissets?

a) **El problema no té solució.**
b) **El problema té infinites solucions.**
c) **El problema té solució única = _____ € (en aquest cas calcula-la)** -> Correcta: 1,11 €

P2.5b. Crea un problema de temàtica diferent a l'anterior (que no parli de diners) on el context real del problema en determini el nombre de solucions.

En l'apartat *5a* tots quatre prototipus assenyalen la resposta correcta *c*, tot i que l'EPP no escriu el preu correctament, posa 1,1 € (resposta incorrecta, ja que aleshores deu pastissets no costarien més de 11 €, sinó exactament 11). L'apartat *5b* només el responen els dos prototipus de secundària; vegem els exemples proposats:

EPS: *Vaig al supermercat a comprar caramels, n'hi ha de dos tipus: de maduixa i de llimona. Els de maduixa venen en una bossa que conté 12 caramels i els de llimona en bosses que en contenen 7. Quantes bosses he de comprar de cada gust per a que en total tingui 26 caramels?*

L'exemple és correcte, donat que per a resoldre el problema, si anomenem x al nombre de bosses de caramels de maduixa i y al nombre de bosses de caramels de llimona, hem de resoldre l'equació $12x + 7y = 26$. Aquesta equació, si no tenim en compte el context del problema, té infinites solucions (tots els punts de la recta corresponent), però donat que x i y han de ser nombres naturals, només en té una: $x = 1$ i $y = 2$.

PS: *Un mosquit surt de Girona i va cap a Barcelona. La distància entre les dues ciutats és de 100 km. Quan arriba a Barcelona torna fins a mig camí i torna a Barcelona. Torna en direcció a Girona però ara fa fins la meitat de la meitat (1/4) i torna a Barcelona. De nou torna cap a Girona però fent aquesta vegada la meitat de ¼ (1/8) i torna a Barcelona. Quants km farà en total si cada vegada que torna cap a Girona fa la meitat del trajecte que havia fet abans?*

Resolució: 100 * (1 + ½ + ½ + ¼ + ¼ $+100*\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\cdots\right) = 100*\left(2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\right) = 100*(2+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}) = 100*(2+1) = 300\ km$

El problema és interessant però no compleix amb el que es demanava: el context real no fa variar el nombre de solucions, hi ha una solució. Potser es podria defensar que, com que el mosquit no té una vida infinita, segons quan mori el trajecte s'apropará més o menys a 300 km, però aquesta mena de raonament és una mica enrevessat i tampoc sabem si és el que el prototipus ha pensat.

En síntesi: tots menys l'EPP han resolt correctament el problema *5a* i només l'EPS ha creat un altre problema on el context també fos decisiu per al nombre de solucions.

DECIMALS: Conèixer

P2.10. La Laia està explicant a la seva classe els decimals periòdics, i un alumne li pregunta la diferència que hi ha entre $0,\widehat{9}$ i 1. Què li podrà afirmar?

a) **Són exactament el mateix nombre.**
   Cert, ja que, passant-ho a fracció, $\mathbf{0,\widehat{9} = \frac{9}{9} = 1.}$
b) **No són el mateix nombre, però són molt pròxims.**
   Fals.
c) **No hi ha cap nombre racional entre ells.**
   Cert, ja que són el mateix nombre.
d) **Entre dos nombres racionals sempre hi ha un altre nombre racional.**
   Cert: si els nombres són x i y, per exemple el nombre racional $\frac{x+y}{2}$ sempre estarà entre ells.

Cap dels prototipus ha respost correctament les quatre afirmacions. Només l'EPS ha contestat que són el mateix nombre: els altres tres han considerat que no ho són. Els dos prototipus de secundària han marcat correctament que no hi ha cap nombre racional entre ells: els de primària han posat que no n'estan segurs. L'última afirmació només l'ha encertada el PS: l'EPS ha escrit que no és certa i els prototipus de primària que no n'estaven segurs.

En aquest sentit, l'EPS, tot i haver fallat l'última pregunta, no s'ha contradit amb les tres respostes anteriors, ja que si els nombres són el mateix el fet que entre dos nombres racionals hi hagi un altre nombre racional o no, no afecta. En canvi, el PS es contradiu amb les seves respostes, ja que si no són el mateix nombre (b), com pot ser que no hi hagi cap nombre racional entre ells (c) si entre dos nombres racionals sempre hi ha un altre nombre racional (d)? Els prototipus de primària no s'han contradit perquè en les dues últimes afirmacions han posat que no n'estaven segurs, tot i així s'han equivocat en afirmar que són nombres diferents.

Els resultats en aquesta pregunta evidencien que el contingut dels nombres decimals, conceptualment, no està clar en cap de les dues etapes (tot i que molt menys de primària).

5.6.4. Síntesi dels prototipus

En aquest apartat, hem volgut posar nom a cadascun dels quatre prototipus i caracteritzar-los segons les creences i coneixements que hem obtingut d'ells mitjançant l'anàlisi realitzada. A més de sintetitzar els resultats obtinguts en aquest capítol, també hem afegit, per a cada prototipus, quins factors (de formació i/o experiència professional) creiem que poden haver influenciat en els seus coneixements i les seves creences sobre Resolució de Problemes.

L'**Andrea** és una estudiant del Màster de Formació del Professorat de l'especialitat de Matemàtiques de la promoció 2010-2011 a la Universitat Autònoma de Barcelona. Ha acabat fa poc la seva formació universitària científica, i té un nivell molt alt de coneixements del contingut matemàtic (tant pel que fa a conèixer com pel que fa a raonar, i sense diferència de nivell en continguts concrets) i també de coneixement curricular. Tot i així, pel que fa als coneixements didàctics del contingut, té algunes dificultats a l'hora de planificar o adaptar problemes que s'adeqüin als seus objectius pedagògics o de representar diferents enfocaments o resolucions de problemes. Té més facilitat, en canvi, per avaluar les solucions dels alumnes.

Pel que fa a les seves creences sobre l'ensenyament-aprenentatge de la Resolució de Problemes, podríem sintetitzar que considera els problemes *com a eina per afavorir el pensament matemàtic*, en el sentit que li dóna Schoenfeld (1992).

Després de tot l'estudi realitzat, creiem que els resultats de l'Andrea estan influenciats principalment per tres factors:

1) *La seva educació universitària científica recent*: els coneixements i la visió de les matemàtiques i la resolució de problemes que aquesta li ha aportat.
2) *El Màster de Formació del Professorat que està cursant actualment*: la visió que aquests estudis li estan aportant sobre l'ensenyament-aprenentatge de les matemàtiques.
3) *La manca d'experiència docent*: la manca dels recursos didàctics que s'aprenen a l'aula, i el canvi de creences que li podrien generar, per una banda, l'impacte que sol resultar trobar-se cara a cara amb l'alumne real, i per l'altra, l'acomodament que la rutina pot generar en un professor.

En **Bernat** és un professor d'educació secundària amb 28 anys d'experiència docent, que actualment ensenya matemàtiques a secundària a l'aula oberta (diversitat). Tot i ser professor de secundària, ha donat classes de matemàtiques tant al cicle superior de primària (5 anys) com al primer cicle de secundària (3 anys).

El seu nivell de coneixements del contingut matemàtic és molt alt, en especial a l'hora de conèixer, i una mica menys a l'hora de raonar. En quant als diferents continguts, el seu nivell és molt alt en operacions amb enters, fraccions i percentatges, i fluixeja més en divisibilitat i decimals. Pel que fa al coneixement didàctic del contingut, té un nivell del coneixement curricular alt, just de transformació i molt baix de planificació.

Exceptuant les creences sobre l'objecte *problema de matemàtiques* (molt afins a la definició que adoptem en aquest treball), les creences d'en Bernat respecte a la Resolució de Problemes i el seu ensenyament-aprenentatge es caracteritzen per una visió de subsidiarietat de la RP en relació als coneixements matemàtics, visió que afavoreix la *reducció dels problemes a no-problemes* i el desenvolupament d'unes classes rutinàries.

Després de l'anàlisi realitzada, intentem descobrir com han pogut influenciar diferents factors en els resultats d'en Bernat:

1) *La seva educació universitària científica fa 30 anys*: per una banda, els coneixements del contingut i de què és la resolució de problemes que aquesta li ha aportat; de l'altra, la distància en el temps de l'ús de raonaments per a resoldre problemes reals per a ell.
2) *El CAP*: la gairebé nul·la formació pedagògica rebuda pot afectar a la manca de recursos especialment metodològics, i a les seves creences sobre aquest aspecte.
3) *Molts anys d'experiència docent*: la reducció a l'instrumentalisme de l'activitat matemàtica i la tradició conductista de l'aprenentatge són característiques comuns a

una forma tradicional d'ensenyar les matemàtiques; sovint la continuïtat del quefer en una escola, o l'acomodament en la forma de fer durant els anys, o la manca de recursos o coneixements pedagògics fa que aquestes creences sobre l'ensenyament-aprenentatge de les matemàtiques es perpetuïn.

En **Carles** és un estudiant de 3r curs del grau d'Educació Primària de la UAB del curs 2011-2012. El seu nivell de coneixements tant del contingut matemàtic com didàctic és baix; en quant al tipus de contingut, l'únic en el qual el seu nivell no és molt baix (sinó alt) són les operacions amb enters. Concep l'objecte *problema de matemàtiques* com un exercici (en els termes definits en aquest treball), amb la qual cosa la RP no és present en la seva idea de classe de matemàtiques. Tot i així, creu en unes classes poc rutinàries, i en la resolució de problemes dóna importància al procés per davant del producte.

Entre d'altres, els següents factors poden haver afectat als resultats obtinguts per en Carles en el nostre estudi:

1) *La poca educació científica*: A part de les dues assignatures de matemàtiques existents en el grau, en Carles no ha estudiat matemàtiques des de la ESO. Això explica la dificultat mostrada a l'hora de conèixer el contingut matemàtic, i la seva visió de les matemàtiques com a disciplina (ja que, sovint, en l'educació obligatòria se les dota d'un caràcter bàsicament instrumental, sobretot de cara als alumnes que hi tenen dificultats).
2) *El Grau d'Educació Primària que cursa actualment*: Li pot haver aportat la visió oberta sobre l'ensenyament-aprenentatge de qualsevol disciplina (classes no rutinàries).
3) *La manca d'experiència docent*: Fa, per una banda, que encara mantingui intactes les seves creences *idealistes* sobre l'ensenyament-aprenentatge en general, i de l'altra, que li manquin molts recursos didàctics que s'aprenen amb la pràctica, i que no li hagi sorgit la necessitat d'aprendre més matemàtiques perquè hagués d'ensenyar-les.

La **Diana** és una professora d'Educació Primària amb 5 anys d'experiència docent, 3 dels quals en el Cicle Superior de Primària. Té un nivell baix de coneixement matemàtic del contingut pel que fa a conèixer, tot i que el té més alt (però just) en raonar. Pel que fa al coneixement didàctic del contingut, té un nivell del coneixement curricular alt, just de transformació i molt baix de planificació. Dels diferents continguts matemàtics, destaca el seu baix nivell en decimals.

Té una concepció del que és un problema molt concreta (i molt diferent de la que adoptem en el present treball): problema generalment aritmètic, en forma de text, de context real, i amb un mètode de resolució per a cada tipologia. Respecte a l'ensenyament-aprenentatge de les matemàtiques i de la RP no es posiciona ni per unes matemàtiques investigatives, ni instrumentals; ni per unes classes creatives, ni rutinàries.

Els factors que s'exposen a continuació podrien haver afectat el nivell de coneixements de la Diana i les seves creences sobre la Resolució de Problemes:

1) *La poca educació científica*: La Diana només ha estudiat matemàtiques en l'educació obligatòria i en les assignatures de didàctica de les matemàtiques de la diplomatura (1

o 2 com a molt), el que explicaria el seu nivell baix en continguts matemàtics, especialment en els que s'ensenyen després de l'educació primària.

2) *La Diplomatura d'Educació Primària finalitzada fa 6 anys*: Li ha aportat coneixements didàctics i unes creences obertes sobre l'ensenyament-aprenentatge de les matemàtiques i de qualsevol disciplina.
3) *L'experiència docent*: Per una banda, li ha aportat coneixement curricular del contingut matemàtic (però només en aquells continguts que ha impartit) i recursos didàctics i metodològics; per l'altra, ha modelat les seves creences sobre l'estil de classes a impartir (no descarta el model de classes rutinàries) i sobre les classes de matemàtiques en concret (en particular, la seva concepció sobre què són exercicis i què són problemes).

6. Conclusions i prospectiva

6.1. Conclusions

L'enfocament i les opcions metodològiques preses en el present treball i el marc teòric en el qual s'ha volgut emmarcar, així com les limitacions de la recerca, condicionen la naturalesa de les conclusions. En aquestes realitzarem una discussió dels resultats obtinguts, i posarem de manifest les aportacions rellevants del nostre estudi.

Recordem els tres objectius que ens havíem proposat a l'inici de la nostra recerca:

1. *Caracteritzar i comparar les creences de professors i estudiants de professor de matemàtiques de primària i secundària sobre la Resolució de Problemes.*

2. *Caracteritzar i comparar els coneixements de professors i estudiants de professor de matemàtiques de primària i secundària sobre la Resolució de Problemes.*

3. *Establir possibles relacions entre les creences i els coneixements de professors i estudiants de professor sobre la Resolució de Problemes.*

Per tal de mostrar que s'han assolit els objectius proposats, estructurarem les conclusions en base a aquests, tenint en compte que el primer i el segon objectiu els dividirem en dos apartats cadascun, un de caracterització i l'altre de comparació de les creences i dels coneixements respectivament.

6.1.1. Caracterització de les creences sobre RP

Per tal de fer més entenedores les conclusions extretes en relació a les creences sobre RP, farem abans un recordatori de la categorització usada en l'anàlisi.

Hem creat tres grans categories de creences sobre la Resolució de Problemes, i en cadascuna d'aquestes hem establert alguns identificadors o ítems, que són els aspectes que volem analitzar:

A. Creences sobre l'objecte *problema de matemàtiques*
   1) Flux *entorn -> problema escolar*
   2) Presència de referents matemàtics identificables a l'enunciat
   3) Identificació "enunciat verbal" - problema
   4) Precisió de l'enunciat
   5) Caràcter tancat del propòsit
B. Creences sobre la naturalesa de l'activitat de resolució de problemes
   1) Caràcter instrumental / investigatiu de l'activitat matemàtica
   2) Caràcter rutinari / creatiu de l'activitat matemàtica escolar
   3) Contextualització matemàtica de l'activitat de RP
   4) Èmfasi sobre el producte o el procés
   5) Caràcter lineal de l'activitat de resolució de problemes
   6) Rellevància de la RP dins de l'activitat matemàtica
C. Creences sobre el procés d'ensenyament-aprenentatge de la resolució de problemes

1) Subsidiarietat de la RP a l'aprenentatge d'eines matemàtiques
2) Importància de l'aprenentatge d'estratègies
3) Importància de la millora del control
4) Importància de la conversió dels problemes en no-problemes

Per a cada ítem s'han concretat un parell de *creences tipus* contraposades, per a les quals s'expliciten dos *rangs* extrems que venen indicats pels signes (-) i (+), i que estan referits a un imaginari continu "menys - més" dissenyat i definit de forma pretesament coherent amb els següents termes:

> **(-) :** Creences properes a un sistema de creences relacionat amb allò que Shoenfeld (1991) anomena "pensar matemàticament" en el marc de la RP.
>
> **(+):** Creences properes a sistemes de creences definits per característiques de rigidesa, reducció a l'instrumentalisme, tradició conductista de l'aprenentatge, de "reducció dels problemes a no-problemes" (Vila 1995).

Les creences-tipus definides per a cada ítem es troben en l'apartat de metodologia del present treball.

En base a aquesta categorització, hem caracteritzat les quatre mostres en relació a la seva posició respecte a cada *creença-tipus,* i també segons la concentració de les dades. Els resultats obtinguts ens permeten extreure les següents conclusions:

- **Els estudiants de professor de secundària tenen un sistema de creences sobre RP essencialment afí al definit per Schoenfeld com a *pensar matemàticament*.**

Els estudiants de professor de secundària de la mostra tenen una idea àmplia de problema (els enunciats no tenen perquè ser ni precisos, ni sempre tancats, ni sempre tenir referents matemàtics, ni ser un enunciat verbal...) i la majoria inclou la idea essencial de que un problema no té un mètode directe de resolució. En l'únic que difereixen del sistema que hem anomenat *pensar matemàticament* és en que no troben important que es tracti d'una situació d'entorn real, probablement en concordança, d'una banda, amb la seva visió àmplia de problema, i de l'altra, a la seva formació secundària post-obligatòria i universitària científica (on els problemes no solen tenir context real).

Les seves creences sobre la naturalesa de l'activitat de resolució de problemes són també afins al sistema de Schoenfeld, sense excepcions: consideren la RP l'aspecte més rellevant de l'activitat matemàtica, i conseqüentment la seva visió de les matemàtiques és de caràcter investigatiu i creatiu, tant com a disciplina científica com en l'àmbit acadèmic.

En les creences sobre el procés d'ensenyament-aprenentatge de la resolució de problemes també es mostren d'acord amb el sistema afí a Schoenfeld: creuen en la resolució de problemes basada en l'ús d'heurístics i no en la necessitat d'aplicar sempre mètodes tipus ni en la subsidiarietat a l'aprenentatge de coneixements matemàtics.

Les creences referides a les matemàtiques com a disciplina (i els problemes com a part essencial d'aquestes), possiblement les han adquirit en la seva formació universitària matemàtica, tecnològica o científica, on les matemàtiques es treballen de forma molt diferent de l'escola, i de forma més propera a la realitat de la disciplina. Les creences relatives a l'ensenyament-aprenentatge de les matemàtiques poden haver-se vist influenciades per la formació pedagògica que estaven rebent en el Màster de Formació del Professorat en el moment de realitzar el qüestionari.

- **Els <u>professors de secundària</u> tenen una concepció oberta de què és un problema de matemàtiques, però algunes de les seves creences respecte a la naturalesa de la RP i el seu ensenyament-aprenentatge es caracteritzen per una reducció a l'instrumentalisme de l'activitat matemàtica i a una tradició de caràcter conductista de l'aprenentatge. Tenen clar què és la RP, però no la consideren un dels aspectes més rellevants ni de les matemàtiques ni de l'educació matemàtica.**

Els professors de secundària de la mostra no es posicionen en general ni cap a un sistema de creences totalment afí a Schoenfeld ni cap a un sistema contrari.

La seva idea de problema és àmplia (exceptuant la relació directa que imposen entre problema i "enunciat verbal"), però paradoxalment a aquesta idea, moltes de les seves creences en quant a la naturalesa de la RP i el seu ensenyament-aprenentatge no són afins a *pensar matemàticament*. En la majoria dels aspectes sobre la naturalsesa de la RP (caràcter instrumental/investigatiu de l'activitat matemàtica, classes de matemàtiques rutinàries/creatives, contextualització matemàtica de l'activitat de RP, rellevància de la RP...) no es posicionen, mentre que sí ho fan en dos dels aspectes claus de l'ensenyament-aprenentatge de la RP, mostrant una tendència a creure que ensenyar coneixements matemàtics garanteix l'èxit en RP i que cal ensenyar mètodes-tipus de resolució de problemes. Tot i així, també tenen algunes creences sobre la naturalesa de la RP i el seu ensenyament-aprenentatge afins a Schoenfeld, que no hem destacat perquè les quatre mostres tenen la mateixa opinió: donen importància a aprendre estratègies i a la millora del control, i també al procés de RP, trobant inevitable que aquest estigui ple d'entrebancs.

- **Els <u>estudiants de professor de primària</u> tendeixen a veure un problema com un text de propòsit tancat, el qual es resol principalment mitjançant coneixements o procediments matemàtics (i no raonaments). En les creences sobre la naturalesa de la RP i el seu ensenyament-aprenentatge, destaquen les opinions de que els problemes proposats a classe han de ser fàcils de classificar en un tipus de problemes concrets i en un tema concret, i de que els processos de resolució de problemes s'han de mecanitzar. Les seves creences doten les matemàtiques d'un caràcter marcadament instrumental, on la RP no hi juga un paper rellevant.**

Les creences dels estudiants de professor de primària de la mostra sobre què és un problema de matemàtiques són essencialment contràries a les proposades per Schoenfeld.

En les seves creences sobre la naturalesa de l'activitat de resolució de problemes generalment no es posicionen, a excepció del fet que en la RP donen més importància al procés –que opinen que no cal que sigui lineal– que al producte (creences comuns amb la resta de mostres), i a la comentada anteriorment sobre la necessitat de contextualitzar matemàticament l'activitat de RP.

Les seves creences sobre el procés d'ensenyament-aprenentatge de la resolució de problemes s'allunyen de les proposades per Schoenfeld, ja que opinen que cal mecanitzar els processos de resolució de problemes (tot i no afirmar que els coneixements matemàtics en garanteixin l'èxit).

- **Els <u>professors de primària</u> conceben els problemes com un text amb entorn real. Les seves creences sobre la naturalesa de l'activitat de RP i sobre l'ensenyament-aprenentatge d'aquesta estan poc posicionades, però s'apropen al sistema de creences de Schoenfeld.**

En els professors de primària la dicotomia entre problema i exercici és molt marcada, i bàsicament es basa en el tipus de context: real per als problemes, i matemàtic per als exercicis.

En molts dels aspectes de la naturalesa de l'activitat de RP no es posicionen: no tenen clar si la RP és rellevant en les matemàtiques, ni si aquestes són instrumentals o investigatives. Sí que es posicionen, en canvi, a favor d'unes classes de matemàtiques més creatives que rutinàries.

En les creences sobre l'ensenyament-aprenentatge de la RP, tot i ser els ítems en què menys es posicionen *versus* les creences afins a Schoenfeld, destaca el fet de que no afirmin que els coneixements matemàtics garanteixen l'èxit en RP, i de que hi hagi molta divergència d'opinions a l'hora de decidir si s'han d'ensenyar o no mètodes-tipus de resolució de problemes.

6.1.2. Comparació de les creences sobre RP

Després de caracteritzar cada mostra, hem comparat els resultats obtinguts per les mostres en cadascun dels ítems, tot identificant quines creences són més comuns a les quatre mostres i quines més diferents. Aquests resultats ens han permès trobar relacions entre l'etapa educativa o l'experiència docent de les mostres i les creences que tenen sobre resolució de problemes. Les conclusions que n'hem extret les mostrem a continuació:

- **Les <u>creences comuns</u> a les quatre mostres són totes elles afins al *pensar matemàticament* de Schoenfeld, llevat dels casos on no es posicionen. Aquestes creences estan relacionades amb la precisió de l'enunciat, el caràcter instrumental / investigatiu de l'activitat matemàtica, l'èmfasi sobre el producte o el procés, el caràcter lineal de la RP, la importància de l'aprenentatge d'estratègies i la importància de la millora del control.**

Les quatre mostres estan d'acord en 6 dels 15 ítems analitzats, i en general la tendència és afí al sistema de creences descrit per Schoenfeld (1991). Tres dels ítems són aspectes referents a la naturalesa de l'activitat de RP (caràcter instrumental / investigatiu de l'activitat matemàtica, èmfasi sobre el producte o el procés, caràcter lineal de la RP), un a la concepció de *problema de matemàtiques* (precisió de l'enunciat) i els dos restants a l'ensenyament-aprenentatge de la RP (importància de l'aprenentatge d'estratègies i de la millora del control). Així doncs, tot i ser majoritaris els ítems comuns relacionats amb la naturalesa de l'activitat de RP, no són els únics.

En quant al posicionament, cap de les mostres es posiciona en si l'activitat matemàtica té un caràcter més instrumental o investigatiu, ni tampoc en si l'enunciat dels problemes ha de ser o no precís. Sí ho fan a l'hora de donar importància a aprendre estratègies i a la millora del control, com també donen importància al procés de RP i troben inevitable que aquest estigui ple d'entrebancs.

- **<u>Les creences sobre l'objecte *problema de matemàtiques* estan relacionades amb l'etapa educativa</u>, sent les dues mostres de secundària més afins al sistema de creences de Schoenfeld.**

En 4 dels 15 ítems de creences analitzats, la divergència més gran es troba entre els estudiants de professor de secundària i els professors de primària. A excepció d'un dels ítems que està relacionat amb la importància de que els problemes tinguin context real (fet que ha resultat molt important per als professors de primària, gens per als estudiants de professor de secundària, i on les altres dues mostres gairebé no s'han posicionat), en els altres aspectes sempre han estat els estudiants de professor de secundària els que tenen creences més afins al *pensar matemàticament* de Schoenfeld. Tres d'aquests quatre ítems estan relacionats amb la concepció que tenen les mostres sobre *què és un problema de matemàtiques*, i l'altre valora la rellevància que es dóna a la RP dins de l'activitat matemàtica. Notem que cap d'aquests ítems està directament relacionat amb l'ús dels problemes a l'aula.

En un dels ítems, es creen clarament els dos subgrups primària-secundària: les dues mostres de secundària creuen que els propòsits dels problemes poden ser tant oberts com tancats, mentre que les de primària no es posicionen. En els altres ítems, tot i tenir sempre les dues mostres de secundària opinions més afins a Schoenfeld que les dues de primària, són els estudiants de secundària els que es desmarquen i tenen unes opinions més fortes: són els únics que consideren la RP l'aspecte més important de les matemàtiques i els únics que no identifiquen enunciat verbal amb problema.

Per tant, és en la concepció que es té de l'objecte *problema de matemàtiques* i la seva importància en les matemàtiques on més influencia té el fet de pertànyer a l'etapa primària o secundària, matisat amb el fet de tenir experiència docent o no tenir-la.

- **<u>Les creences relacionades amb el paper de la RP a l'aula estan relacionades amb l'experiència docent tant a primària com a secundària</u>: són els estudiants de professor de secundària juntament amb els professors de primària els que tenen unes creences més properes a *pensar matemàticament*, mentre que les altres dues mostres se n'allunyen.**

En les 3 de les 15 creences-tipus, poques però significatives a l'hora de posar en pràctica la RP a l'aula (classes rutinàries/creatives, importància d'ensenyar coneixements matemàtics i importància d'ensenyar mètodes-tipus de resolució de problemes), apareixen dues "aliances" aparentment estranyes: d'una banda, entre els estudiants de professor de secundària i els professors de primària, i de l'altra, entre els estudiants de professor de primària i els professors de secundària. En tots els casos, la primera parella té unes creences més afins a Schoenfeld (classes creatives, els coneixements no garanteixen l'èxit en RP), mentre que l'altra se n'allunya més (s'han d'ensenyar mètodes-tipus de resolució de problemes). D'aquests resultats se'n poden fer moltes lectures diferents, però en totes el que queda clar és que, tant a primària com a secundària, l'experiència docent influencia les creences dels professors sobre el paper que ha de tenir la RP a la classe de matemàtiques.

- **La mostra dels estudiants de professor de primària es diferencia de les altres posicionant-se en la necessitat de que els problemes siguin fàcils de classificar per tal de facilitar la tria de tècniques de resolució.**

En 2 dels 15 ítems es dóna el mateix esquema: mentre que les mostres A, B i D tenen creences properes al *pensar matemàticament* de Schoenfeld, la mostra C (estudiants de professor de primària) les té contràries. Tots dos ítems estan relacionats amb l'opinió (en aquest cas dels estudiants de professor de primària) que els problemes proposats a classe han de ser fàcils de classificar en un tipus de problemes concrets i en un tema concret, per tal de poder trobar el mètode-tipus a utilitzar per a resoldre el problema.

6.1.3. Caracterització dels coneixements sobre RP

Per a l'estudi dels coneixements dels professors hem adaptat el marc del *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) adoptat en l'estudi TEDS-M (Tatto et al., 2008), classificant els coneixements dels professors sobre Resolució de Problemes de la següent manera:

- Mathematical Content Knowledge / Coneixement del contingut matemàtic (MCK)
    - Conèixer
        - *Recordar:* Recordar definicions, terminologia, propietats, notació, càlculs, procediments mecànics, ...
        - *Reconèixer:* Reconèixer objectes matemàtics o les seves propietats en un context matemàtic on no s'està habituat a utilitzar-los.
    - Raonar:
        - *Analitzar:* Determinar les relacions entre variables o objectes en situacions matemàtiques; fer inferències a partir d'informació donada.
        - *Integrar:* Combinar (diversos) procediments matemàtics per establir resultats, i combinar els resultats per a produir més resultats; fer connexions entre diferents elements de coneixement matemàtic.
        - *Generalitzar:* Ampliar el domini al que el resultat del pensament matemàtic i la resolució de problemes s'aplica mitjançant la reformulació dels resultats en termes més generals.
        - *Justificar:* Elaborar una justificació de la veritat o falsedat d'una declaració en funció dels resultats matemàtics o propietats.
- Mathematics Pedagogical Content Knowledge / Coneixement didàctic del contingut matemàtic (MPCK)
    - Curricular
        - Conèixer els continguts del currículum de matemàtiques.
    - Planificació
        - Planificar problemes adequats al contingut matemàtic que es vol ensenyar.
        - Adaptar problemes per a que siguin més fàcils / difícils per als estudiants.
    - Transformació
        - Explicar o representar diferents enfocaments/procediments per a resoldre problemes matemàtics.
        - Analitzar o avaluar les solucions dels estudiants.

En base a aquest marc teòric, hem caracteritzat cadascuna de les mostres segons els seus coneixements, tant en relació amb la concentració/dispersió de les dades com amb el nivell obtingut en cada tipus de coneixement, extraient aquestes conclusions:

- **El nivell de coneixement del contingut matemàtic dels estudiants de professor de secundària és molt alt, tant en conèixer com en raonar. El nivell de coneixement didàctic del contingut és divers: el curricular és molt alt, el de transformació just i el de planificació baix.**

Els estudiants de professor de secundària tenen un nivell molt alt de coneixements del contingut matemàtic, tant pel que fa a conèixer com pel que fa a raonar (essent l'excepció el nivell just en justificar), i també de coneixement curricular. Tot i així, pel que fa als coneixements didàctics del contingut, tenen dificultats a l'hora de planificar o adaptar problemes que s'adeqüin als seus objectius pedagògics, o de representar diferents enfocaments o resolucions de problemes. Tenen més facilitat, en canvi, per avaluar les solucions dels alumnes.

- **Els professors de secundària tenen un nivell de coneixement del contingut matemàtic alt (sobretot en conèixer). El nivell de coneixement didàctic del contingut és divers: el curricular és alt, el de transformació just i el de planificació baix.**

El nivell de coneixements dels professors de secundària sobre el contingut matemàtic és alt, en especial a l'hora de conèixer, i una mica menys a l'hora de raonar (sent l'excepció el nivell just en justificar). Pel que fa al coneixement didàctic del contingut, tenen un nivell de coneixement curricular alt, just de transformació i baix de planificació (sobretot en planificar problemes, i no tant en adaptar).

- **El nivell de coneixements dels estudiants de professor de primària és baix, tant en coneixements del contingut matemàtic, com especialment en coneixements del contingut didàctic.**

El nivell de conèixer dels estudiants de professor de primària és baix, i en especial en reconèixer el nivell és molt baix. El nivell de raonament de la mostra és baix, i desigual segons el tipus de raonament: en generalitzar tenen un nivell alt, baix en analitzar i justificar, i molt baix en integrar. El nivell mitjà de coneixement curricular és molt baix i molt desigual entre els diferents individus de la mostra; en la resta de coneixements didàctics del contingut (planificar i transformar) el nivell és gairebé nul. Respecte als continguts, els seu nivell és especialment baix, en comparació amb les altres mostres, en fraccions, nombres decimals i percentatges (mentre que en nombres enters és just i semblant al nivell dels professors de primària).

- **Els professors de primària tenen un nivell baix de coneixement matemàtic del contingut, i recorden millor que no pas reconeixen o raonen. El seu nivell de coneixement didàctic del contingut és just, obtenint els millors resultats en coneixement curricular i en avaluar les respostes dels estudiants, i els pitjors en planificar problemes que s'adaptin als objectius didàctics.**

El nivell de coneixements conceptuals dels professors de primària és just, i recorden millor que no pas reconeixen. El nivell de raonament de la mostra és baix en tots els aspectes analitzats.

En coneixement curricular, el nivell és just (tot i així, és el tipus de coneixement amb nivell més alt). En planificació els resultats indiquen un nivell molt baix, tot i que adapten millor els problemes que no els planifiquen, mentre que en transformació el nivell és baix, tenint força millors resultats en avaluar que en representar.

6.1.4. Comparació dels coneixements sobre RP

L'anàlisi comparativa dels nivells de coneixement de les quatre mostres ens ha permès establir les relacions existents entre l'etapa educativa o l'experiència docent de les mostres i els nivells obtinguts per als diferents tipus de coneixement, i aquestes són les conclusions a les quals ens han portat els resultats:

- **En el Coneixement del Contingut Matemàtic (MCK), tant en conèixer com en raonar, les dues mostres de secundària tenen un nivell molt més elevat que les dues mostres de primària.**

En els dos coneixements del MCK les mostres de secundària obtenen nivells alts i les de primària justos o baixos.

En el cas de la secundària, les diferències entre els estudiants de professor i els professors no són molt significatives: en conèixer obtenen gairebé els mateixos resultats, i en raonar l'estudiant de professor està lleugerament per sobre. Una possible lectura d'aquests resultats és que, tot i que els coneixements matemàtics de la formació inicial són els mateixos (pel que fa a conèixer i raonar), en la pràctica docent a secundària generalment s'utilitzen més els coneixements conceptuals que no pas el raonament matemàtic.

En el cas de la primària hi ha una diferència significativa entre els estudiants de professor i els professors. Pel que fa a conèixer, el nivell dels professors és clarament superior. En canvi, pel que fa a raonar, tot i que el nivell mitjà és semblant, les dades dels estudiants de professor de primària estan bastant concentrades mentre que les dels professors de primària estan molt disperses. Una possible raó de la gran dispersió de les dades relatives als professors de primària pot ser que la mostra és molt heterogènia (diferents centres, diferents anys d'experiència docent), mentre que els estudiants de professor eren tots alumnes d'un mateix grup-classe.

- **En el Coneixement Didàctic del Contingut Matemàtic (MPCK), tant en coneixement curricular com de planificació i de transformació, els estudiants de professor de primària es diferencien de les altres tres mostres, obtenint resultats significativament més baixos.**

En coneixement curricular, a excepció dels estudiants de professor de primària, totes les mostres obtenen resultats molt alts, especialment els professors de secundària. En planificació en canvi, les altres mostres també tenen un nivell baix, les de secundària lleugerament per sobre del professor de primària. En transformació els resultats de les tres mostres (exceptuant els estudiants de professor de primària) són millors, de nivell just, i en particular, els estudiants de professor de secundària són els que millors resultats obtenen.

6.1.5. Relació entre creences i coneixements sobre RP

Després d'haver analitzat a fons, però per separat, les creences i els coneixements de les quatre mostres, ens vam plantejar si era possible establir alguna relació entre aquestes dues característiques. Segons els nostres resultats, no podem definir una relació causa-efecte en cap dels dos sentits, però sí que hem pogut constatar que hi ha relació entre algunes creences i alguns tipus de coneixement sobre RP.

Aquesta relació l'hem mirada des de dos punts de vista: partint de les creences (determinant quins coneixements estan relacionats amb cada categoria de creences) i partint dels coneixements (determinant quines creences estan relacionades amb cada tipus de coneixement). El punt de vista de les creences ens ha permès descobrir quines categories de creences estan més relacionades (o estan simplement relacionades) amb els coneixements que es tenen sobre RP, mentre que el punt de vista dels coneixements ens ha permès estructurar les relacions trobades segons l'etapa educativa i/o l'experiència docent de les mostres.

Relació segons les categories de creences

- **Cap de les creences sobre el procés d'ensenyament-aprenentatge de la RP està relacionada amb els coneixements que tenen els professors o estudiants de professor sobre RP.**

Segons els nostres resultats, aquestes creences tenen un comportament invers en el cas de la primària i en el cas de la secundària: en el cas de la primària, quanta més experiència docent, més s'apropa la mostra a un sistema de creences proper a Schoenfeld, on l'ensenyament mitjançant la RP és clau; en canvi, en el cas de la secundària, l'experiència docent allunya a la mostra d'aquesta manera de *pensar matemàticament* en aquesta categoria de creences. Donat que en els nivells dels dos tipus de coneixement analitzats (MCK i MPCK) no s'observa aquest comportament, podem concloure que aquesta categoria de creences no està relacionada amb els coneixements sobre RP.

- **La majoria de creences sobre l'objecte *problema de matemàtiques* estan relacionades amb els coneixements sobre RP que es tenen.**

Les creences-tipus directament relacionades amb els coneixements sobre RP són: la presència de referents matemàtics identificables a l'enunciat, la identificació "enunciat verbal" – problema, i el caràcter tancat del propòsit. En tots els casos, quant més alt és el nivell de coneixements, més afí és la idea dels individus de les mostres a la definició de problema adoptada en el present treball.

- **En les creences sobre la naturalesa de l'activitat de RP, les creences que estan relacionades amb els coneixements són les que més tenen a veure amb la idea de problema de matemàtiques, i les que no ho estan tenen més relació amb la pràctica docent.**

En les creences sobre la naturalesa de l'activitat de resolució de problemes hi ha dos ítems (dels sis) que estan relacionats amb els coneixements sobre RP: la contextualització matemàtica de l'activitat de RP i la rellevància de la RP dins de l'activitat matemàtica. Els quatre ítems restants, que no estan relacionats amb els coneixements, són: el caràcter instrumental / investigatiu de l'activitat matemàtica, el caràcter rutinari / creatiu de l'activitat

matemàtica escolar, l'èmfasi sobre el producte o el procés, i el caràcter lineal de l'activitat de resolució de problemes.
Aquesta és la categoria en la que l'opinió de les quatre mostres més convergeix, així que és normal que la majoria d'ítems no estiguin directament relacionats amb els coneixements que es tenen sobre RP (donat que en el nivell de coneixements les mostres no convergeixen). Tot i així, veiem que els ítems que estan relacionats amb els coneixements són els que més tenen a veure amb la idea de problema de matemàtiques, i els que no ho estan tenen més relació amb la pràtica docent, tal com succeeix en les altres dues categories (ja que, segons els resultats obtinguts, les creences sobre l'objecte *problema de matemàtiques* estan molt relacionades amb els coneixements i les creences sobre l'ensenyament-aprenentatge de la RP no ho estan). Així doncs, podem concloure que, en general:

- **Les creences sobre la idea que es té de problema de matemàtiques estan més relacionades amb els coneixements sobre RP que no pas les que tenen més a veure amb la pràctica docent.**

Relació segons els tipus de coneixement

- **El Coneixement del Contingut Matemàtic i algunes creences sobre què és un problema de matemàtiques i la seva rellevància dins de l'activitat matemàtica estan relacionats amb l'etapa educativa del professor o l'estudiant de professor, havent-hi una relació directa entre nivell de coneixement del contingut més alt i més tendència a *pensar matemàticament*.**

A més de concloure que el Coneixement del Contingut Matemàtic està directament relacionat amb l'etapa educativa del professor o l'estudiant del professor (com hem explicat en l'apartat anterior), els ítems de creences tipus que també hi estan relacionats són:

A3) Identificació "enunciat verbal" – problema: És més forta en les mostres de primària.

A5) Caràcter tancat del propòsit: Les mostres de secundària pensen que el propòsit d'un problema pot ser tan tancat com obert, mentre que les de primària tendeixen a pensar que és sempre tancat.

B6) Rellevància de la RP dins de l'activitat matemàtica: Les mostres de secundària troben la RP més rellevant que les de primària.

Els ítems relacionats amb els coneixements del contingut tenen relació amb les creences de com (o què) és un problema de matemàtiques (A3, A5) i la seva importància en la disciplina matemàtica (B6), i no tenen, en canvi, una relació directa (possiblement sí indirecta) amb el paper que desenvolupa la RP a l'aula. Dels resultats n'extraiem també la relació directa entre nivell de coneixement més alt i major afinitat a les creences proposades per Schoenfeld.

- **La creença de que els problemes proposats a classe han de ser fàcils de classificar en un tipus de problemes concrets i en un tema concret, per tal de facilitar la tria de les tècniques a utilitzar per a resoldre el problema, està directament relacionada amb una manca de coneixements didàctics del contingut sobre resolució de problemes (MPCK).**

Els estudiants de professor de primària difereixen molt de les altres mostres en dos ítems de creences:

A2) Presència de referents matemàtics identificables a l'enunciat: Mentre que les altres mostres pensen que la presència de referents matemàtics en l'enunciat que portin a identificar el problema com a "problema de matemàtiques" i dins de determinades tipologies no és un aspecte determinant, els estudiants de professor de primària tendeixen a pensar que sí que ho és.
B3) Contextualització matemàtica de l'activitat de RP: De forma anàloga a l'ítem anterior, mentre que les tres altres mostres creuen que el context educatiu (o la situació/moment on és proposada la tasca/problema) no sempre ha de determinar les tècniques o estratègies a utilitzar en la RP, els estudiants de professor de primària tendeixen a pensar que sí.

En el cas dels coneixements, en Coneixement Didàctic del Contingut Matemàtic (MPCK) els estudiants de professor de primària obtenen resultats molt més baixos que la resta de mostres, que obtenen resultats molt semblants entre elles.

Així doncs, els resultats obtinguts indiquen que la forma de pensar definida per aquestes dues creences va lligada a una manca de coneixements o de recursos didàctics per l'ensenyament-aprenentatge de la resolució de problemes.

De les dues conclusions extretes sobre la relació entre el nivell de coneixements del MKT i les creences sobre RP, en podem inferir una darrera conclusió:

- **Els nostres resultats coincideixen amb els resultat obtinguts en el TEDS-M (Tatoo et al., 2012): els resultats positius en els coneixements de professors o estudiants de professor tenen més probabilitats d'estar associats amb aquells que creuen que les matemàtiques són un procés d'investigació i que l'aprenentatge de les matemàtiques requereix una participació activa (creences properes a *pensar matemàticament* en el marc de la RP); mentre que és menys probable que estiguin associats amb aquells professors o estudiants de professor que creuen que les matemàtiques són un conjunt de normes i procediments, que l'aprenentatge de les matemàtiques es centra en el professor, i que les matemàtiques són una habilitat innata (creences properes a sistemes de creences definits per característiques de rigidesa, reducció a l'instrumentalisme, tradició conductista de l'aprenentatge, de "reducció dels problemes a no-problemes").**

Tot i les excepcions, l'estudi TEDS-M va concloure que, en els països on hi ha una tendència general d'avalar les creences de que les matemàtiques són un procés d'investigació i que l'aprenentatge de les matemàtiques requereix la participació activa, els estudiants de professor tenen uns coneixements relativament majors del contingut de les matemàtiques i la seva didàctica que els d'aquells països on es rebutgen aquestes creences. De manera similar, hi va haver una tendència general dins dels països on els futurs mestres donen suport a la creença de que les matemàtiques són un conjunt de normes i procediments, que l'aprenentatge de les matemàtiques ha d'estar totalment en mans del professor, i que les matemàtiques són una habilitat innata, de tenir relativament menor coneixement del contingut de les matemàtiques i de la seva didàctica que aquells que van rebutjar aquestes creences.

En el nostre cas, hem trobat que hi ha algunes creences sobre RP que estan relacionades amb els coneixements i algunes que no ho estan, i a més hem concretat amb quins coneixements (MCK o MPCK) estan relacionades. Les creences relacionades amb els coneixements són un terç de les creences estudiades, i en tots els casos –sense excepció–, es compleix una relació directa entre més nivell de coneixement i creences més properes a *pensar matemàticament* en el marc de la RP.

6.2. Prospectiva

En el decurs de la nostra investigació ens hem trobat amb limitacions de tipus metodològic, hem pres decisions que deixaven de banda uns enfocaments a favor d'uns altres, hem obtingut uns resultats que il·luminaven aspectes rellevants però que deixaven amb resposta insuficient d'altres, i se'ns han obert nous interrogants alhora que n'abordàvem d'altres de forma satisfactòria. Tots aquests aspectes ens suggereixen, per un o altre motiu, noves possibles recerques, que ens permetem proposar.

Una de les limitacions de la recerca ha estat la dificultat a l'hora d'obtenir les dades de la mostra de professors (especialment d'educació primària). Suposant que pal·liem aquesta limitació, dins el marc teòric i metodològic del present estudi plantegem la possibilitat de:

a) Plantejar el mateix estudi amb mostres de professorat de perfils més concrets que els del present treball; concretament creiem que seria interessant tenir en compte els anys d'experiència dels professors, així com la formació prèvia (tant científica com didàctica) que aquests han cursat.

b) Plantejar un estudi quantitatiu sobre una mostra àmplia i representativa dels quatre grups de població estudiats, amb la finalitat de generalitzar resultats.

Malgrat haver manifestat el convenciment de l'adequació dels instruments de recerca a les finalitats i enfocaments de l'estudi, les limitacions pròpies de la seva naturalesa ens porten a pensar que és possible plantejar-se la millora d'alguns instruments, o sí més no, complementar-los amb d'altres. Així, plantegem la possibilitat de:

c) Plantejar un estudi, en el mateix marc que el present, en el qual s'accedeixi als significats (també) a través de nous instruments; proposem, entre d'altres possibilitats, l'observació directa i continuada de la manera habitual de procedir a classe del professor, o la realització d'entrevistes personals.

d) En tant que s'ha constatat que una prova de problemes esdevé un bon instrument d'anàlisi de coneixements, dissenyar una nova prova de problemes que inclogui tot el currículum de secundària, i en conseqüència obtenir una major riquesa de dades, a més d'obrir la possibilitat de comparar els coneixements de les mostres en els diferents continguts del currículum.

Mantenint-nos encara dins del mateix marc metodològic i teòric, i en particular mitjançant la utilització d'una part dels instruments de recerca i l'adaptació de l'altra, plantegem també la possibilitat d'efectuar estudis entorn a la modificació/evolució de les creences i els coneixements dels professors i/o dels estudiants de professor, en particular:

e) Repetint l'estudi a la mateixa mostra d'estudiants de professor al principi i al final de la seva formació professional o d'una matèria concreta d'aquesta, per tal d'analitzar l'efecte que la implementació de determinades intervencions didàctiques té sobre la modificació de les creences dels estudiants de professor i sobre el seu coneixement sobre resolució de problemes.

f) Repetint l'estudi a la mateixa mostra de professors en diferents moments de la seva vida laboral (a l'inici, quan encara és novell, i al cap d'uns anys, quan ja ha adquirit certa experiència docent), per tal d'analitzar l'efecte que l'experiència té sobre la modificació de determinades creences dels professors i sobre el seu coneixement sobre resolució de problemes.

g) Repetint l'estudi a la mateixa mostra de professors abans i després d'una determinada intervenció didàctica en un curs de formació continuada, per tal d'analitzar l'efecte que la implementació d'aquesta té sobre la modificació d'algunes creences dels professors i sobre el seu coneixement sobre resolució de problemes.

Plantegem també un enfocament essencialment qualitatiu dels diferents aspectes analitzats en la nostra recerca mitjançant estudis de casos, enfocament que hem encetat amb l'anàlisi dels prototipus però que ha estat poc extens degut a les limitacions temporals i les opcions metodològiques preses; aquests estudis podrien consistir en:

h) Ampliar i aprofundir en l'estudi dels prototipus de cada mostra, introduint altres instruments d'obtenció de dades com per exemple entrevistes personals o l'observació de classes.

i) A partir dels resultats obtinguts en la present recerca, realitzar un estudi de casos *extrems* de cada mostra, tant de nivells de coneixement com de creences, per tal d'identificar diferents perfils extrems de professors o d'estudiants de professor.

Per acabar, proposem una investigació que, enriquits els instruments de recerca, ens permetria obtenir una visió "panoràmica" de la transició d'etapa primària a secundària, molt més àmplia i profunda:

j) Plantejar un estudi, amb finalitats paral·leles a les del present estudi, sobre un grup-classe i els seus professors en el procés de canvi d'etapa, considerant els tres protagonistes: l'alumnat, el professorat i les activitats didàctiques sobre resolució de problemes en el sentit ampli del terme, incloent, entre altres, el desenvolupament i la gestió de la classe.

7. Bibliografia

Adler, J., & Davis, Z. (2009). Opening another black box: Researching mathematics for teaching in mathematics teacher education. *Journal for Research in Mathematics Education* .

Alsina, A. (1998). Ep Mestres! Sabem què en pensem els alumnes de la resolució de problemes? *Perspectiva Escolar , 223*, 51-54.

Arcavi, A., Kessel, C., Meira, L., & Smith, J. (1998). Teaching mathematical problem solving: An analysis of an emergent classroom community. *Research in Collegiate Mathematics Education , III* (7), 1-70.

Arcavi, A., Kessel, C., Meira, L., & Smith, J. (2006). Evaluation of six mathematics curriculum projects for first and second grade classes. *Reportatge (en Hebreu) presentat al Cap Científic del Ministeri d'Educació.* Rehovot: The Weizmann Institute of Science.

Arcavi, A., & Friedlander, A. (2007). Curriculum developers and problem solving: the case of Israeli elementary school projects. *ZDM Mathematics Education , 39*, 355-364.

Askew, Brown, Rhodes, William, & Johnson. (1997). *Effective Teachers of Numeracy.* London: Teacher Training Agency.

Azcárate, P. (2001). *El conocimiento profesional didáctico-matemático en la formación inicial de los maestros: Una propuesta de intervención para su organización y su elaboración.* Cádiz: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz.

Ball, D. L., & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. A J. Boaler, *Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics* (p. 83-104). Westport, CT: Ablex.

Ball, D. L., Lubienski, S., & Mewborn, D. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. A V. Richardson, *Handbook of research on teaching (4th ed.).* New York: Macmillan.

Ball, D. L., & Bass, H. (2001). Making mathematics reasonable in school. A G. Martin, *Research compendium for the Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Ball, D., & Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. A B. Davis, & E. Simmt, *Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group.* Edmonton, AB: CMESG/GCEDM.

Ball, D. L., Hill, H. C., & Bass, H. (2005). Knowing Mathematics for Teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator* , 14-46.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowlegde for Teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education , 59* (5), 389-407.

Ball, D. (2009). With an eye on the mathematical horizon: Knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures. *National Council of Teachers of Mathematics Annual Meeting.* Washington D.C.

Ball, D. L., Charambous, C., Thames, M., & Lewis, J. M. (2009). RF1: Teacher knowledge and teaching: viewing a complex relationship from three perspectives. A M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonis, *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1)* (p. 121-125). Thessaloniki (Grecia): PME.

Barnes, J. (1984). *The Complete Works of Aristotle.* Princeton: Princeton University .

Begle, E. G. (1968). Curriculum research in mathematics. A H. Klausmeier, & G. O'Hearm, *Research and development toward the improvement of education.* Madison, WI: Dembar Educational Research Services.

Bell, A., Fischbein, E., & Greer, B. (1984). Choice of operation in verbal arithmetic problems: the effects of number size, problem structure and context. *Educational Studies in Mathematics , 15* (2), 129-147.

Block, D., Dávila, M., & Martínez, N. (1990). Procedimientos de resolución de problemas y expectativas de los maestros. A *Capítulo II del informe final del proyecto "Formación de profesores sobre áreas fundamentales de la educación básica".* Cinvestav. México.

Block, D., Dávila, M., & Martínez, F. (1991). Los algoritmos en la resolución de problemas: concepciones de los maestros. *Epsilon , 21*, 129-18.

Blum, W., & Krauss, S. (2006). *The professional knowledge of German secondary mathematics teachers: Investigations in the context of the COACTIV project.* Recollit de http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/WG2/Papers/BLUMKR.pdf

Brown, E., McGatta, M., & Karp, K. (2006). Assessing teachers' knowledge: diagnostic mathematics assessments for elementary and middle school teachers. *New England Mathematics journal* , 37-48.

Callejo, M. L. (1994). *Un Club Matemático para la diversidad.* Madrid: Narcea.

Carlson, M., & Bloom, I. (2005). The cyclic nature of problem solving: an emergent multidimensional problem-solving framework. *Educational Studies in Mathematics , 58*, 45-75.

Carrillo, J. (1996). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemàtica y su enseñanza de profesores de matemáticas de alumnos de más de 14 años. Algunas aportaciones a la metodología de la investigación y estudio de posibles relaciones.* Tesi Doctoral. Universitat de Sevilla.

Castro Martínez, E. (2008). Resolución de Problemas. Ideas, tendencias e influencias en España. *XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.* Badajoz: SEIEM.

Chapman, O. (1997). Metaphors in the teaching of mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics , 32*, 301-228.

Climent, N., & Carrillo, J. (2000). Creencias y conocimiento de los estudianes para maestro a través de la resolución de problemas. *Actas de EMA, Sevilla,* 227-235.

Climent, N., & Carrillo, J. (2003). El dominio compartido de la investigación y el desarrollo profesional: una experiencia en matemáticas con maestras. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas , 21* (3), 387-404.

Coad, J., & Jones, K. (1999). *Curriculum continuity in mathematics: a case study of the transition from primary to secondary school.* University of Southampton, Southampton: Center for Research in Mathematics Education.

Cobo, P., & Fortuny, J. (2000). Social interactions and cognitive effects in contexts of area-comparison problem solving. *Educational Studies in Mathematics , 42* (2), 115-140.

Cockcroft, W. (1985). *Las matemáticas sí cuentan.* Madrid: Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia.

Contreras, L. C. (1999). *Concepciones de los profesores sobre la resolución de problemas.* Huelva: Universidad de Huelva.

Cooney, T. (1985). A begining teacher's view of problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education , 16* (5), 324-336.

Davis, B., & Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teahing: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics , 1* (66), 293-319.

Departament d'Educació. (2007). DECRET 142/2007, de 26 de juny, pel qual s'estableix l'ordenació dels ensenyaments de l'educació primària. *DOGC , 4915*.

Departament d'Educació. (2007). DECRET 143/2007, de 26 de juny, pel qual s'estableix l'ordenació dels ensenyaments de l'educació secundaria obligatòria. *DOGC , 4915*.

Dewey, J. (1989). *Cómo pensamos.* Barcelona: Paidós. (Versión original 1933).

Dewey, J. (1904). The relation of theory to practice in education. A National_Society_for_the_Study_of_Education, *The Relation of Theory to Practice in the Education of Teachers. Third Yearbook. Part I.* Bloomington, IL: Public School Publishing Co.

Eisenberg, T. (1977). Begle revisited: teacher knowledge and student achievement in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education , 8*, 216-222.

Epperson, J. (2004). Strengthening Inservice Secondary Mathematics Teachers' Understanding and Strategies in Mathematical Problem Solving. *Paper presented at the annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Delta Chelsea Hotel* . Toronto, Ontario, Canada.

Even, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education , 24* (2), 94-116.

Fan, L., & Cheong, N. P. (2002). Investigating the sources of Singaporean mathematics teachers' pedagogical knowledge. A Edge, & B. H. Yap, *Mathematics education for a knowledge-based era* (p. 224–231). Singapore: AME.

Fennema, E., & Franke, L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. A D. Grouws, *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 147-164). New York: MacMillan.

Ferguson, P., & Fraser, B. (1999). Changes in learning environment during the transition from primary to secondary school. *Learning Environments Research , 1*, 369–383.

Fernández, C., Giné, C., & Martínez, M. (2010). Transition to secondary school: the perspective of expert mathematics teachers. *7th British Congress of Mathematics Education. British Mathematics Education Society.* Manchester.

Fernández, L., & Figueiras, L. (2011). Re-defining HCK to approach transition. *Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 7).* Polonia.

Figueiras, L., & Fernández, S. (2008). Transition from primary to secondary: creating professional mathematical knowledge through collaboration of teachers at all levels of education. *For the Learning of Mathematics* .

Figueiras, L., Deulofeu, J., & Edo, M. (2008). Mathematics from ages 0 to 18: a collaborative teacher training. *ICME 11 (international Congress of Mathematics Education).* Monterrey (México): Universidad Autónoma de Nuevo León.

Goetz, J., & Lecompte, M. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa.* Madrid: Ediciones Morata.

Gómez-Chacón, I. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático.* Madrid: Narcea.

González, R., & Latorre, A. (1987). *El mestre investigador. La investigació a l'aula.* Barcelona: Graó.

Goulding, M. (2002). Primary teacher trainees' self assessment of their mathematical subject knowledge . *Annual Conference of the British Educational Research Association.* University of Exeter.

Grossman, P. (1990). *The making of a teacher : Teacher knowledge and teacher education.* New York: Teachers College Press.

Grouws, D., Good, T., & Dougherty, B. (1990). Teacher conceptions about problem solving and problem solving instruction. *Proceedings of 14th PME Conference , I*, 135-142.

Guimaraes, H. (1988). Ensinar Matemática. Concepçoes e prácticas. A L. C. Contreras, *Concepciones de los profesores sobre la resolución de problemas* (p. 23). Huelva: Universidad de Huelva.

Guzmán, M., Hodgson, B., Robert, A., & Villani, V. (1998). Difficulties in the passage from secondary to tertiary education. *Documenta Mathematica Journal , 3*, 747-762.

Hadamard, J. (1947). *Psicología de la invención en el campo matemático.* Buenos Aires: Espasa Calpe. (Versión original de 1945).

Halmos, P. (1980). The heart of mathematics. *American Mathematical Monthly , 87*, 519-524.

Hegarty, S. (2000). Teaching as a Knowledge-based activity. *Oxford Review of Education , 26* (3/4).

Hiebert, J., & Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. A D. Grouws, *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (p. 65-97). New York: MacMillan.

Hill, H., Schilling, S., & Ball, D. (2004). Developing measures of teachers' mathematical knowledge for teaching. *Elementary School Journal , 105*, 11–30.

Hill, H., & Ball, D. (2004). Learning mathematics for teaching: Results from California's mathematics professional development institutes. *Journal for Research in Mathematics Education , 35* (5), 330-351.

Hill, H., Rowan, B., & Ball, D. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Education Research Journal , 42* (2), 371-406.

Hill, H., Sleep, L., Lewis, J., & Ball, D. (2007). Assessing teachers' mathematical knowledge: What knowledge matters and what evidence counts? A F. Lester, *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (p. 111-155). Charlotte, NC: Information Age.

Howard, P., Perry, B., & Stacey, D. (1997). *Mathematics and manipulatives: Comparing primary and secondary mathematics teacher's views.* Recollit de http://www.aare.edu.au/97pap/howap045.htm

Huckstep, P., Rowland, T., & Thwaites, A. (2002). Primary teachers' mathematics content knowledge: what does it look like in the classroom? . *Paper presented at the Annual Conference of the British Educational Research Association.* University of Exeter.

Jonassen, D. (2004). *Learning to solve problems. An instructional design guide.* San Francisco, CA: Pfeiffer.

Jourdan, N., Cretchley, P., & Passmore, T. (2007). Secondary-Terciary transition: what Mathematics skills can and should we expect this decade? *30th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA30).* Hobart, Australia.

Kajander, A., & Lovric, M. (2005). Transition from secondary to terciary mathematics: McMaster University experience. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology , 36* (2-3), 149-160.

Kantowski, M. (1980). Some Thoughts on Teaching for Problem Solving. A S. Krulik, & R. Reys, *Problem Solving in School Mathematics.* Reston: NCTM.

Kelly, A. (1995). *Education and Democracy: Principles and Practices.* London: Paul Chapman.

Kilpatrick, J. (1967). Analysing the solution of word problems in mathematics: An exploratory study. *Unpublished doctoral dissertation, Stanford University* .

Kilpatrick, J., & Wirszup, I. (1969). *Soviet studies in the psycology of learning and teaching mathematics. Volume III: Problem Solving in Arithmetic and Algebra.* Reston (VA): National Council of Teachers of Mathematics.

Kilpatrick, J., & Wirszup, I. (1972). *Soviet studies in the psycology of learning and teaching mathematics. Volume IV: Instruction in Problem Solving.* Reston (VA): National Council of Teachers of Mathematics.

Kilpatrick, J. (1978). Variables and methodologies in research on problem solving. A L. Hatfield, & D. Bradbard, *Mathematical problem solving: papers from a research workshop.* Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC.

Krutetskii, V. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children.* Chicago: University of Chicago Press.

Kuhs, T., & Ball, D. (1986). *Approaches to teaching mathematics: Mapping the domains of knowledge, skills and dispositions.* East Leasing: Michigan State University, Center on Teacher Education.

Kunter, M., Klusmann, U., Dubberke, T., Baumert, J., Blum, W., M., B., et al. (2007). Linking aspects of teacher competence to their instruction. Results from the COACTIV Project. A M. Prenzel, *Studies on the educational quality of schools. The final report on the DFG Priority Programme* (p. 32-52). Münster: Waxmann.

Lesh, R., & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. A F. Lester, *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (p. 763-804). National Council of Teachers of Mathematics. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Lester, F. (1982). Building bridges between psycological and mathematics education research on problem solving. A F. Lester, & J. Garofalo, *Mathematical problem solving: Issues in research.* Philadelphia, Pensylvania: The Franklin Institute Press.

Lester, F. (1987). *Why is problem solving such a problem? Reactions to a set of Research Papers.* PME: Montreal 1987.

Llinares, S. (1989). Las creencias sobre la naturaleza de las Matemáticas y su enseñanza en estudiantes para profesores de primaria: dos estudios de casos. *Tesis doctoral* . Universidad de Sevilla.

Llinares, S. (1992). Los mapas cognitivos como instrumento para investigar las creencias epistemológicas de los profesores. A Marcelo, *La investigación sobre la formación del profesorado: métodos de investigación y análisis de datos* (p. 57-95). Buenos Aires: Cincel.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States.* Mahwah, NJ: Erlbaum.

Martínez, M., Giné, C., Fernández, L., Figueiras, L., & Deulofeu, J. (2011). El conocimiento del horizonte matemático: más allá de conectar el presente con el pasado y el futuro. *XV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM XV).* Ciudad Real.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking Mathematically.* London: Addison-Wesley.

Mayer, R. (1986). *Pensamiento, resolución de problemas y cognición.* Barcelona: Paidós.

McGee, C., Ward, J., Gibbons, & Harlow, A. (2003). *Transition on secondary school: A literature review.* The Ministry of Education. Hamilton: University of Waikato.

McLeod, D. (1989). Beliefs, Attitudes and Emotions: New Views of Affect in Mathematics Education. A D. McLeod, & V. Adams, *Affect and Mathematical Problem Solving* (p. 245-258). New York: Springer-Verlag.

McLeod, D. (1992). Research on Affect in Mathematics Education: A reconceptualization. A D. Grows, *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning* (p. 575-596). NewYork: MacMillan.

Ministerio de Educación y Ciencia (MEC). (1989). *Diseño curricular base. Educación Secundaria Obligatoria.* Madrid: L'autor.

Ministerio de Educación y Ciencia (MEC). (2000). REAL DECRETO 3473/2000, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la educación secundaria obligatoria. *BOE , 14*, 1810-1858.

Ministerio de Educación y Ciencia (MEC). (2007). REAL DECRETO 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la educación secundaria obligatoria. *BOE , 5*, 677-773.

Mullis, I. V., Martin, M. O., Ruddock, G. J., O'Sullivan, C. Y., Arora, A., & Erberber, E. (2007). *TIMSS 2007 assessment frameworks.* Chestnut Hill, MA: Boston College.

Muñoz, C. (2009). El desarrollo profesional en un entorno colaborativo centrado en la enseñanza de las matemáticas: el caso de una maestra novel. *Tesis doctoral publicada en línia.* Universidad de Huelva: Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía.

National Council of Teachers of Mathematics (NTCM). (1980). *An agenda for action: Recommendations for school mathematics of the 1980's.* Reston, VA: L'autor.

National Council of Teachers of Mathematics (NTCM). (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: L'autor.

National Council of Teachers of Mathematics (NTCM). (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: L'autor.

New Zealand Ministry of Education. (2008). *Students' Transition from Primary to Secondary Schooling.*

Newel, A., & Simon, H. (1972). *Human problem solving.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Niss, M. (2002). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: the Danish Kom Project.* Roskilde: Roskilde University.

OCDE. (2003). *Marcos teóricos de PISA 2003.* Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Onrubia, J., Rochera, M., & Barberà, E. (2001). La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva psicológica. A C. Coll, J. Palacios, & A. Marchesi, *Dessarrollo psicológico y educación 2* (p. 487-508). Madrid: Alianza.

Parra, B. (1990). Dos concepciones de resolución de problemas de matemáticas. A *Capítulo I del informe final del proyecto "Formación de profesores sobre áreas fundamentales de la educación básica".* Cinvestav. México.

Pehkonen, E., & Törner, G. (1996). Mathematical beliefs and different aspects of their meaning. *ZDM , 96* (4), 101-108.

Petrou, M., & Goulding, M. (2010). Conceptualising teachers' mathematical knowledge in teaching. A T. Rowland, & K. Ruthven, *Mathematical Knowledge in Teaching.* New York: Springer.

Plato. (1956 edn). *Protagoras and Meno.* Harmondsworth: Penguin.

Poincaré, H. (1963). *Ciencia y método.* Madrid: Espasa Calpe. (Versión original 1908).

Polya, G. (1945). *Cómo plantear y resolver problemas.* Mexico: Trillas.

Polya, G. (1957). *How to solve it.* Garden City, NY: Doubleday and Co., Inc.

Polya, G. (1962). *Mathematical Discovery.* New York: John Wiley and Sons.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas.* Granada: Comares.

Puig, L. (2008). Presencia y ausencia de la resolución de problemas en la investigación i en el currículo. *XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.* Badajoz: SEIEM.

Rice, J. (1997). The disruptive transition from middle to high school: Opportunities for linking policy and practice. *Journal of Education Policy , 12* (5), 403-417.

Rico, L. (1988). *Didáctica activa para la resolución de problemas.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Rico, L., Castro, E., González, E., & Castro, E. (1994). Two-step addition problems with duplicated semantic structure. A J. Da Ponte, & J. Matos, *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psycology of Mathematics Education* (p. 121-128). Lisboa, Portugal: University of Lisboa.

Rico, L., & Rupiáñez, J. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular.* Madrid: Alianza.

Rodríguez, S., Fita, E., & Torrado, M. (2004). El rendimiento académico en la transición Secundaria-Universidad. *Revista de Educación , 334*, 391-414.

Rokeach, M. (1968). *Beliefs, attitudes and values.* San Francisco: Jassey-Bass.

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education , 8*, 255-281.

Santos Trigo, M. (2008). La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en la Construcción de una Agenda de Investigación y Práctica. *XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.* Badajoz.

Schmidt, W., Tatto, M., Bankov, K., Blomeke, S., Cedillo, T., Cogan, L., et al. (2008). *The preparation gap: Teacher education for middle school mathematics in six countries. (MT21).* Recollit de http://usteds.msu.edu/MT21Report.pdf

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving.* Orlando: Academical Press.

Schoenfeld, A. (1987). *Cognitive science and mathematics education.* Hillsdale, NJ: LEA.

Schoenfeld, A. (1989). Explorations of students' mathematical beliefs and behavior. *Journal for Research in Mathematics Education , 20* (4), 338-355.

Schoenfeld, A. (1991). What's all the fuss about Problem Solving? *ZDM , 9* (91).

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense-Making in Mathematics. A Grouws, *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning* (p. 334-389). New York: MacMillan.

Schoenfeld, A. (1994). A Discourse on Methods. *Journal for Research in Mathematics Education* , 697-710.

Schoenfeld, A. (1994). *Mathematical thinking and problem solving.* Hillsdale, NJ: LEA.

Schwab, J. (1978). Education and the structure of the disciplines. A I. Westbury, & N. Wilkof, *InScience, curriculum and liberal education* (p. 229-272). Chicago: University of Chicago Press.

Sdrolias, K., & Triandafillidis, T. (2008). The transition to secondary school geometry: can there be a "chain of school mathematics"? *Educational Studies in Mathematics , 67* (2), 159-169.

Shulman, L. (1986). Those who understand, knowledge growth in teaching. *Educational Researcher , 15* (2), 4-14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review , 57* (1), 1-22.

Shulman, L., & Grossman, P. (1988). *Knowledge growth in teaching: a final report to the Spencer Foundation.* Stanford, CA: Stanford University.

Silver, E. (1985). *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives.* Hillsdale, NJ: LEA.

Skemp, R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic teacher , 26* (3), 9-15.

Skott, J. (2005). The role of the practice of theorising practice. A M. Bosch, *Proceedings of the Fourth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (p. 1598-1608). Barcelona: FUNDEMI IQS, Universitat Ramon Llull (Compack Disk).

Socas, M. (2001). *Investigación en Didáctica de la Matemática vía Modelos de Competencia. Un estudio en relación con el Lenguaje Algebraico.* Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna.

Stanic, G., & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. A R. Charles, & E. Silver, *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (p. 1-22). Reston: The National Council of Teachers of Mathematics and Lawrence Erlbaum Associates.

Stemberg, R. (1994). *Thinking and Problem Solving.* San Diego, CA: Academic Press.

Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S., Ingvarson, L., Peck, R., & Rowley, G. (2008). *Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M): Conceptual framework.* East Lansing, MI: Teacher Education and Development International Study Center, College of Education, Michigan State University.

Tatoo, M. T., Schwille, J., Senk, S. L., Ingvarson, L., Rowley, G., Peck, R., et al. (2012). *Policy, Practice and Readiness to Teach Primary and Secondary Mathematics in 17 Countries. Findings from the IEA Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M).* Christchurch, New Zealand: Paula Wagemaker Editorial Services.

Thompson, A. (1984). The relationship of teacher's conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics , 15*, 105-127.

Vergnaud, G., & Durand, C. (1976). Structures additives et complexité psycho-génétique. *Revue Française de Pédagogie , 36*, 28-43.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. A R. Lesh, & M. Landau, *Acquisition of Mathemtics Concepts and Processes* (p. 127-174). New York: Academic Press Inc.

Vila, A. (1995). *Els problemes estandaritzats a la classe de matemàtiques. Una contribució a l'estudi de les seves causes i conseqüències.* Treball inèdit de Recerca del Programa de Doctorat en Didàctica de les Matemàtiques, UAB.

Vila, A. (2001). *Resolució de problemes de matemàtiques: Identificació, origen i formació dels sistemes de creences en l'alumnat. Alguns efectes sobre l'abordatge dels problemes.* Tesi Doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Vila, A., & Callejo, M. L. (2004). *Matemáticas para aprender a pensar : el papel de las creencias en la resolución de problemas.* Madrid: Narcea.

Voskoglou, M. (2008). Problem solving mathematics education: recent trends and development. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Sciencie Matematiche) , 18*, 22-28.

Wilson, J. (1975). *Education Theory and the Preparation of Teachers.* Windsor: NFER.

Wilson, J., Fernandez, M., & Hadaway, N. (1993). Mathematical Problem Solving. A P. Wilson, *Research Ideas for the Classroom: High School Mathematics* (p. 57-78). New York: MacMillan.

Wilson, M., & Cooney, T. (2002). Mathematics teacher change and development. A G. Leder, E. Pehkonen, & G. Torner, *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (p. 127-147). Dordrecht: Kluwer Academic.

Woods, D. (1987). Misconceptions about Problem Solving. *Teaching Thinking and Problem Solving , 9* (4).

Xenofontos, C., & Andrews, P. (2010). *Teachers' beliefs about mathematical problem solving,their problem solving competence and the impact on instruction:A case study of three Cypriot primary teachers.* ICME.

Zanobini, M., & Usai, C. (2002). Domain-specific Self-concept and Achievement Motivation in the Transition from Primary to Low Middle School. *Educational Psychology , 22* (2), 203-217.

Zeedyk, M., Gallacher, J., Henderson, M., Hope, G., Husband, B., & Lindsay, K. (2003). Negotiating the Transition from Primary to Secondary School: Perceptions of Pupils, Parents and Teachers. *School Psychology International , 24* (1), 67-79.

Índex de taules

Índex d'il·lustracions

Annexos

Índex d'annexos

ANNEX 1: Qüestionari de creences definitiu

Imparteix classes en: ☐ Educació Primària ☐ Educació Secundària
Anys de docència:
Anys de docència al Cicle Superior de Primària / 1r Cicle Secundària :

Respon el més clarament i sincerament possible a les següents preguntes. Per tal de poder-ho fer tingues en compte que quan parlem de *problema de matemàtiques* ens referim a un problema per als teus alumnes d'últim cicle de primària o primer cicle de la ESO.
Moltes gràcies per col·laborar amb nosaltres.

---

1. Si haguessis d'explicar QUÈ ÉS UN PROBLEMA DE MATEMÀTIQUES a algú que no ho sap, com li explicaries perquè t'entengués fàcilment?

1a. Posa dos exemples de PROBLEMES DE MATEMÀTIQUES que consideris que no són exercicis (no cal que els resolguis).

1b. Posa dos exemples d'EXERCICIS DE MATEMÀTIQUES que no siguin el càlcul d'unes operacions i que consideris que no són problemes (no cal que els resolguis).

2. Quina importància li dones a resoldre problemes de matemàtiques a classe on als enunciats els passi les coses que a continuació diem? (ENCERCLA EL NÚMERO QUE CONSIDERIS MÉS ADEQUAT)

Poc important			Molt important	
1	2	3	4	a) A l'enunciat li falten dades que necessitem per a poder resoldre el problema
1	2	3	4	b) A l'enunciat li sobren dades que no necessitem per a res
1	2	3	4	c) L'enunciat és imprecís, no queda clar de què ens està parlant
1	2	3	4	d) L'enunciat no té cap paraula o expressió que ens doni pistes sobre què cal fer per a resoldre'l
1	2	3	4	e) L'enunciat demana calcular un resultat numèric
1	2	3	4	f) L'enunciat demana construir una figura geomètrica
1	2	3	4	g) L'enunciat demana raonar sobre una propietat que no coneixíem
1	2	3	4	h) L'enunciat demana treure algunes conclusions
1	2	3	4	i) L'enunciat no té cap paraula

3. De cadascun dels següents exemples digues si CREUS QUE PER A TU ÉS UN PROBLEMA DE MATEMÀTIQUES O NO (ENCERCLA SÍ O NO).

SÍ NO 1) En comprar un objecte has de pagar un percentatge d'impost i també et fan un altre percentatge de descompte. Amb quin ordre és millor que et facin els càlculs?

SÍ NO 2) Què costa més barat: anar de Reus a Tarragona en moto o en autobús?

SÍ NO 3) Tenim dos quadrats iguals. Com cal retallar-los i enganxar-los per tal de construir un sol quadrat ?

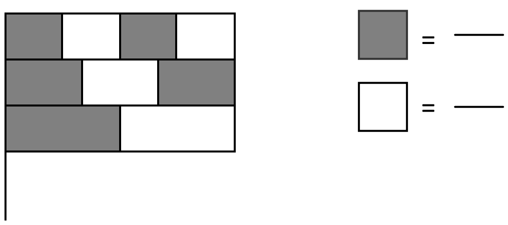
SÍ NO 4) Quins són els diferents tipus de triangles que coneixes? Explica-ho clarament.

SÍ NO 5) Si jo tinc 20 € i tu en tens 35, quants euros tens tu més que jo?

SÍ NO 6) Resol $3x - 2 = 16$.

SÍ NO 7) $4/21 + 3/7 - 5/6$

SÍ NO 8)



4. De les sis paraules que tens a continuació, quines d'elles RELACIONES MÉS AMB LES MATEMÀTIQUES? (POSA NOMÉS TRES CREUS)

☐ regles ☐ mètodes ☐ imaginació

☐ exactitud ☐ raonament ☐ sentit comú

5. I d'aquestes altres sis paraules, quines RELACIONARIES MÉS AMB LES CLASSES DE MATEMÀTIQUES? (POSA NOMÉS TRES CREUS)

☐ practicar ☐ pensar ☐ investigar

☐ memòria ☐ explicació ☐ discussió

6. En quin moment d'un tema proposes resoldre problemes? (POSA NOMÉS UNA CREU)

☐ Principalment en començar el tema.
☐ Principalment ja acabant el tema.
☐ En qualsevol moment del tema.

Per què ?

7. Què consideres més important que els teus alumnes siguin capaços de fer? (MARCA DUES CREUS)

☐ Que sigui capaç de resoldre un problema difícil.
☐ Que sigui capaç d'efectuar molts càlculs en poc temps.
☐ Que sigui capaç de mantenir una discussió sobre un problema amb el professor.
☐ Que sigui capaç d'efectuar uns càlculs difícils mentalment.

8. En cadascuna de les següents frases encercla un número de l'1 al 4 segons creguis convenient.

Poc			Sobretot	
				1. Les matemàtiques serveixen per a...
1	2	3	4	a) saber un conjunt de regles i operacions.
1	2	3	4	b) saber calcular i fer operacions.
1	2	3	4	c) desenvolupar les nostres capacitats intel·lectuals.
1	2	3	4	d) poder enfrontar-se a situacions complicades de la realitat.
1	2	3	4	e) aplicar unes tècniques a la vida real.
				2. Quan planteges una qüestió a classe de matemàtiques estàs esperant...
1	2	3	4	a) que algun alumne recordi la resposta correcta i respongui.
1	2	3	4	b) que els alumnes discuteixin abans d'intentar donar una resposta.
1	2	3	4	c) veure quins alumnes han estudiat i treballat.
1	2	3	4	d) que els alumnes reflexionin, pensin,... perquè no estàs esperant que donin una resposta.
				3. Les activitats que treballes a classe de matemàtiques són normalment...
1	2	3	4	a) explicacions.
1	2	3	4	b) exercicis.
1	2	3	4	c) problemes.
1	2	3	4	d) pràctica de les coses que s'expliquen.
1	2	3	4	e) activitats repetitives.
1	2	3	4	f) activitats de molta imaginació.
				4. El que valores d'un alumne és que sigui capaç de...
1	2	3	4	a) efectuar càlculs
1	2	3	4	b) resoldre problemes
1	2	3	4	c) aplicar regles i propietats
1	2	3	4	d) descobrir i inventar regles i propietats
1	2	3	4	e) raonar i reflexionar
1	2	3	4	f) entendre les explicacions

Poc			Sobretot	*5. Per aprendre a resoldre problemes s'han d'aprendre...*
1	2	3	4	a) moltes matemàtiques.
1	2	3	4	b) estratègies com per exemple fer esquemes, representacions...
1	2	3	4	c) estratègies com per exemple provar amb casos més senzills, amb exemples...
1	2	3	4	d) a ser intuïtius.
1	2	3	4	e) a utilitzar el sentit comú.
1	2	3	4	f) a dominar el nostre estat d'ànim.
				6. Si un alumne no sap resoldre un problema de matemàtiques normalment és degut a que...
1	2	3	4	a) no sap prou matemàtiques.
1	2	3	4	b) no ha entès prou bé les explicacions.
1	2	3	4	c) no té prou intuïció o sentit comú.
1	2	3	4	d) no està molt concentrat.
1	2	3	4	e) té por.
1	2	3	4	f) no ha tingut prou paciència.
				7. Quan els alumnes resolen problemes, dones importància a...
1	2	3	4	a) obtenir el resultat.
1	2	3	4	b) utilitzar les coses que els acabes d'explicar.
1	2	3	4	c) justificar tot el que s'ha fet.
1	2	3	4	d) haver seguit el camí que pretenies que seguissin.
1	2	3	4	e) en acabar, veure si hi havia altres camins.
1	2	3	4	f) reflexionar sobre el que s'ha fet.
1	2	3	4	g) anar per bon camí des del principi.
1	2	3	4	h) resoldre'l de cap abans d'escriure res.
1	2	3	4	i) no quedar-se bloquejat en cap moment.
1	2	3	4	j) resoldre'l en poc temps.

9. En cadascuna de les següents frases digues si estàs molt d'acord (MA), d'acord (A), en desacord (D) o molt en desacord (MD) (ENCERCLA L'OPCIÓ QUE ESCULLIS).

MA	A	D	MD	a) Cal proposar els problemes en el moment en què s'està estudiant el que caldrà aplicar.
MA	A	D	MD	b) No té sentit posar problemes on calgui utilitzar coses que els alumnes encara no han après.
MA	A	D	MD	c) La raó principal per la que poses problemes és que els alumnes apliquin el que has explicat a classe.
MA	A	D	MD	d) La raó principal per la que poses problemes és comprovar si els alumnes van aprenent el que els expliques.
MA	A	D	MD	e) Els experts normalment resolen un problema de maneres molt diferents entre ells.
MA	A	D	MD	f) Un bon alumne, un cop ha entès el que calia fer en un problema, normalment ja va avançant sense errors.
MA	A	D	MD	g) És bo que abans de començar a escriure, l'alumne intenti tenir el problema tot resolt al cap.
MA	A	D	MD	h) Els bons alumnes normalment no es queden bloquejats quan resolen un problema.
MA	A	D	MD	i) Els bons alumnes normalment necessiten poc temps per a resoldre un problema.
MA	A	D	MD	j) Si al cap d'un temps un alumne no ha resolt un problema, és millor que el deixi perquè ja no se'n sortirà sense ajuda.
MA	A	D	MD	k) Qui no sap resoldre problemes és perquè no sap prou matemàtiques.
MA	A	D	MD	l) Els experts en matemàtiques normalment troben fàcilment l'estratègia per resoldre qualsevol problema.
MA	A	D	MD	m) Si es domina un tema de matemàtiques, normalment se sap resoldre els problemes que fan referència a aquest tema.
MA	A	D	MD	n) Si un alumne no ha sabut resoldre un problema, ha d'estudiar més matemàtiques.
MA	A	D	MD	o) És perfectament correcte utilitzar la intuïció per a resoldre problemes.

MA	A	D	MD	p) Si es pot utilitzar una tècnica matemàtica «sèria», és millor això que resoldre un problema per «sentit comú».
MA	A	D	MD	q) Si els alumnes saben moltes matemàtiques, ja sabran quan i com han d'utilitzar-les.
MA	A	D	MD	r) Per a resoldre problemes és molt important la paciència i la perseverança.
MA	A	D	MD	s) No em sembla adequat donar mètodes per a resoldre cada tipus de problema.
MA	A	D	MD	t) Els alumnes poden adquirir la capacitat de resoldre problemes sobretot observant com ho fa el professor de matemàtiques o altres persones a les quals els vagin bé les matemàtiques.
MA	A	D	MD	u) Si els alumnes han estat prou aplicats, sabran veure en els enunciats què és el que cal aplicar per a resoldre'ls.
MA	A	D	MD	v) És important que els alumnes llegeixin bé els enunciats per buscar-hi què és el que cal aplicar.

ANNEX 2: Primera versió del qüestionari de creences

Imparteix classes en: ☐ Educació Primària ☐ Educació Secundària

Centre:

Anys de docència: Edat:

Respon el més clarament i sincerament possible a les següents preguntes. Moltes gràcies per col·laborar amb nosaltres.

---

1. Si haguessis d'explicar QUÈ ÉS UN PROBLEMA DE MATEMÀTIQUES a algú que no ho sap, com li explicaries perquè t'entengués fàcilment?

1a. Posa dos exemples de PROBLEMES DE MATEMÀTIQUES que consideris que no són exercicis (no cal que els resolguis).

1b. Posa dos exemples d'EXERCICIS DE MATEMÀTIQUES que no siguin el càlcul d'unes operacions i que consideris que no són problemes (no cal que els resolguis).

2. Quina importància li dones a resoldre problemes de matemàtiques a classe on als enunciats els passi les coses que a continuació diem? (ENCERCLA EL NÚMERO QUE CONSIDERIS MÉS ADEQUAT)

Poc important			Molt important	
1	2	3	4	a) A l'enunciat li falten dades que necessitem per a poder resoldre el problema
1	2	3	4	b) A l'enunciat li sobren dades que no necessitem per a res
1	2	3	4	c) L'enunciat és imprecís, no queda clar de què ens està parlant
1	2	3	4	d) L'enunciat no té cap paraula o expressió que ens doni pistes sobre què cal fer per a resoldre'l
1	2	3	4	e) L'enunciat demana calcular un resultat numèric
1	2	3	4	f) L'enunciat demana construir una figura geomètrica
1	2	3	4	g) L'enunciat demana raonar sobre una propietat que no coneixíem
1	2	3	4	h) L'enunciat demana treure algunes conclusions

3. De cadascun dels següents exemples digues si CREUS QUE PER A TU ÉS UN PROBLEMA DE MATEMÀTIQUES O NO (ENCERCLA SÍ O NO).

SÍ NO 1) En comprar un objecte has de pagar un percentatge d'impost i també et fan un altre percentatge de descompte. Amb quin ordre és millor que et facin els càlculs?

SÍ NO 2) Què costa més barat: anar de Reus a Tarragona en moto o en autobús?

SÍ NO 3) Tenim dos quadrats iguals. Com cal retallar-los i enganxar-los per tal de construir un sol quadrat ?

SÍ NO 4) Quins són els diferents tipus de triangles que coneixes? Explica-ho clarament.

SÍ NO 5) Si jo tinc 20 € i tu en tens 35, quants euros tens tu més que jo?

SÍ NO 6) Resol $3x – 2 = 16$.

SÍ NO 7) $4/21 + 3/7 – 5/6$

4. De les sis paraules que tens a continuació, quines d'elles RELACIONES MÉS AMB LES MATEMÀTIQUES? (POSA NOMÉS TRES CREUS)

☐ regles	☐ mètodes	☐ imaginació
☐ exactitud	☐ raonament	☐ sentit comú

5. I d'aquestes altres sis paraules, quines RELACIONARIES MÉS AMB LES CLASSES DE MATEMÀTIQUES? (POSA NOMÉS TRES CREUS)

☐ practicar	☐ pensar	☐ investigar
☐ memòria	☐ explicació	☐ discussió

6. En quin moment d'un tema proposes resoldre problemes? (POSA NOMÉS UNA CREU)

☐ Principalment en començar el tema.
☐ Principalment ja acabant el tema.
☐ En qualsevol moment del tema.

Per què ?

7. Què consideres més important que els teus alumnes siguin capaços de fer? (MARCA DUES CREUS)

☐ Que sigui capaç de resoldre un problema difícil.
☐ Que sigui capaç d’efectuar molts càlculs en poc temps.
☐ Que sigui capaç de mantenir una discussió sobre un problema amb el professor.
☐ Que sigui capaç d’efectuar uns càlculs difícils mentalment.

8. En cadascuna de les següents frases encercla un número de l'1 al 4 segons creguis convenient.

Poc			Sobretot	
				1. Les matemàtiques serveixen per a...
1	2	3	4	a) saber un conjunt de regles i operacions.
1	2	3	4	b) saber calcular i fer operacions.
1	2	3	4	c) desenvolupar les nostres capacitats intel·lectuals.
1	2	3	4	d) poder enfrontar-se a situacions complicades de la realitat.
1	2	3	4	e) aplicar unes tècniques a la vida real.
				2. Quan planteges una qüestió a classe de matemàtiques estàs esperant...
1	2	3	4	a) que algun alumne recordi la resposta correcta i respongui.
1	2	3	4	b) que els alumnes discuteixin abans d'intentar donar una resposta.
1	2	3	4	c) veure quins alumnes han estudiat i treballat.
1	2	3	4	d) que els alumnes reflexionin, pensin,... perquè no estàs esperant que donin una resposta.
				3. Les activitats que treballes a classe de matemàtiques són normalment...
1	2	3	4	a) explicacions.
1	2	3	4	b) exercicis.
1	2	3	4	c) problemes.
1	2	3	4	d) pràctica de les coses que s'expliquen.
1	2	3	4	e) activitats repetitives.
1	2	3	4	f) activitats de molta imaginació.
				4. El que valores d'un alumne és que sigui capaç de...
1	2	3	4	a) efectuar càlculs
1	2	3	4	b) resoldre problemes
1	2	3	4	c) aplicar regles i propietats
1	2	3	4	d) descobrir i inventar regles i propietats
1	2	3	4	e) raonar i reflexionar
1	2	3	4	f) entendre les explicacions

Poc			Sobretot	*5. Per aprendre a resoldre problemes s’han d'aprendre...*
1	2	3	4	a) moltes matemàtiques.
1	2	3	4	b) estratègies com per exemple fer esquemes, representacions...
1	2	3	4	c) estratègies com per exemple provar amb casos més senzills, amb exemples...
1	2	3	4	d) a ser intuïtius.
1	2	3	4	e) a utilitzar el sentit comú.
1	2	3	4	f) a dominar el nostre estat d'ànim.
				6. Si un alumne no sap resoldre un problema de matemàtiques normalment és degut a que...
1	2	3	4	a) no sap prou matemàtiques.
1	2	3	4	b) no ha entès prou bé les explicacions.
1	2	3	4	c) no té prou intuïció o sentit comú.
1	2	3	4	d) no està molt concentrat.
1	2	3	4	e) té por.
1	2	3	4	f) no ha tingut prou paciència.
				7. Quan els alumnes resolen problemes, dones importància a...
1	2	3	4	a) obtenir el resultat.
1	2	3	4	b) utilitzar les coses que els acabes d’explicar.
1	2	3	4	c) justificar tot el que s’ha fet.
1	2	3	4	d) haver seguit el camí que pretenies que seguissin.
1	2	3	4	e) en acabar, veure si hi havia altres camins.
1	2	3	4	f) reflexionar sobre el que s’ha fet.
1	2	3	4	g) anar per bon camí des del principi.
1	2	3	4	h) resoldre’l de cap abans d'escriure res.
1	2	3	4	i) no quedar-se bloquejat en cap moment.
1	2	3	4	j) resoldre’l en poc temps.

9. En cadascuna de les següents frases digues si estàs molt d’acord (MA), d’acord (A), en desacord (D) o molt en desacord (MD) (ENCERCLA L’OPCIÓ QUE ESCULLIS).

MA A D MD	a) Cal proposar els problemes en el moment en què s’està estudiant el que caldrà aplicar.
MA A D MD	b) No té sentit posar problemes on calgui utilitzar coses que els alumnes encara no han après.
MA A D MD	c) La raó principal per la que poses problemes és que els alumnes apliquin el que has explicat a classe.
MA A D MD	d) La raó principal per la que poses problemes és comprovar si els alumnes van aprenent el que els expliques.
MA A D MD	e) Els experts normalment resolen un problema de maneres molt diferents entre ells.
MA A D MD	f) Un bon alumne, un cop ha entès el que calia fer en un problema, normalment ja va avançant sense errors.
MA A D MD	g) És bo que abans de començar a escriure, l’alumne intenti tenir el problema tot resolt al cap.
MA A D MD	h) Els bons alumnes normalment no es queden bloquejats quan resolen un problema.
MA A D MD	i) Els bons alumnes normalment necessiten poc temps per a resoldre un problema.
MA A D MD	j) Si al cap d'un temps un alumne no ha resolt un problema, és millor que el deixi perquè ja no se'n sortirà sense ajuda.
MA A D MD	k) Qui no sap resoldre problemes és perquè no sap prou matemàtiques.
MA A D MD	l) Els experts en matemàtiques normalment troben fàcilment l’estratègia per resoldre qualsevol problema.
MA A D MD	m) Si es domina un tema de matemàtiques, normalment se sap resoldre els problemes que fan referència a aquest tema.
MA A D MD	n) Si un alumne no ha sabut resoldre un problema, ha d’estudiar més matemàtiques.
MA A D MD	o) És perfectament correcte utilitzar la intuïció per a resoldre problemes.

MA	A	D	MD	p) Si es pot utilitzar una tècnica matemàtica «sèria», és millor això que resoldre un problema per «sentit comú».
MA	A	D	MD	q) Si els alumnes saben moltes matemàtiques, ja sabran quan i com han d'utilitzar-les.
MA	A	D	MD	r) Per a resoldre problemes és molt important la paciència i la perseverança.
MA	A	D	MD	s) No em sembla adequat donar mètodes per a resoldre cada tipus de problema.
MA	A	D	MD	t) Els alumnes poden adquirir la capacitat de resoldre problemes sobretot observant com ho fa el professor de matemàtiques o altres persones a les quals els vagin bé les matemàtiques.
MA	A	D	MD	u) Si els alumnes han estat prou aplicats, sabran veure en els enunciats què és el que cal aplicar per a resoldre'ls.
MA	A	D	MD	v) És important que els alumnes llegeixin bé els enunciats per buscar-hi què és el que cal aplicar.

ANNEX 3: Resultats de les creences de la prova pilot

A continuació mostrarem els resultats obtinguts per la prova pilot (20 estudiants del Màster de Secundària del curs 2009-2010) pel que fa a l'estudi de les creences sobre RP.

En la prova pilot, els ítems analitzats van ser:

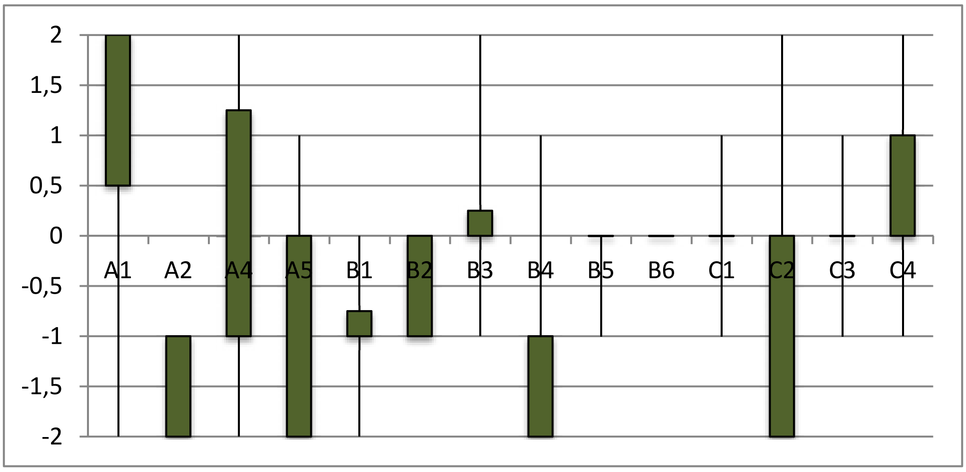
A. Creences sobre l'objecte *problema de matemàtiques*
   1) Flux *entorn -> problema escolar*
   2) Presència de referents matemàtics identificables a l'enunciat
   4) Precisió de l'enunciat
   5) Caràcter tancat del propòsit
B. Creences sobre la naturalesa de l'activitat de resolució de problemes
   1) Caràcter instrumental / investigatiu de l'activitat matemàtica
   2) Caràcter rutinari / creatiu de l'activitat matemàtica escolar
   3) Contextualització matemàtica de l'activitat de RP
   4) Èmfasi sobre el producte o el procés
   5) Caràcter lineal de l'activitat de resolució de problemes
   6) Rellevància de la RP dins de l'activitat matemàtica
C. Creences sobre el procés d'ensenyament-aprenentatge de la resolució de problemes
   1) Subsidiarietat de la RP a l'aprenentatge d'eines matemàtiques
   2) Importància de l'aprenentatge d'estratègies
   3) Importància de la millora del control
   4) Importància de la conversió dels problemes en no-problemes

I l'assignació de rangs, en els extrems es refereixen a:

(-2) : Creences properes a un sistema de creences relacionat amb allò que Shoendfeld (1991) anomena "pensar matemàticament" en el marc de la RP.

(+2): Creences properes a sistemes de creences definits per característiques de rigidesa, reducció a l'instrumentalisme, tradició conductista de l'aprenentatge, de "reducció dels problemes a no-problemes" (Vila 1995).

Vegem els resultats obtinguts en el següent diagrama de caixes:



ANNEX 4: Primera versió del protocol de problemes

1. Els estudiants de vegades només recorden part d'una regla. Solen dir, parlant de nombres enters per exemple, "dos negatius fan un positiu". Per a cadascuna de les següents operacions, decideix si aquesta afirmació funciona sempre (S) , mai (M) o de vegades (V).

S	M	V	
			a) Suma.
			b) Resta.
			c) Multiplicació.
			d) Divisió.

2. Un alumne que li agraden molt les matemàtiques ha trobat, en un llibre de problemes del seu pare, el següent problema:

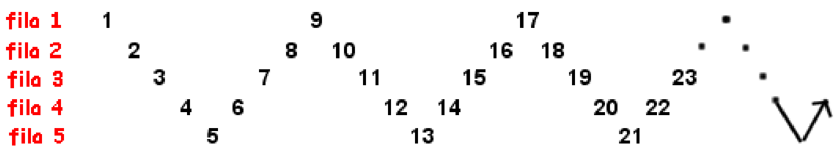
Si $x + y = 0$ i $x \neq 0$, aleshores quin és el valor de la fracció x^{2010}/y^{2010} ?

Com que ets el seu professor de matemàtiques i no se'n surt, et demana la solució del problema. Quina resposta li donaràs? (Encercla-la)

a) -1
b) 0
c) 1
d) x/y
e) Falten dades per a poder determinar-ho.

3. Els últims dies de classe t'agrada dedicar-los a la resolució de problemes recreatius. Un cert dimarts de juny, els planteges als teus alumnes aquest problema:

Els nombres naturals es col·loquen formant una sanefa com es mostra a la figura. En quina fila quedarà el número 2010?



Quina de les següents estratègies els portarà a trobar al solució correcta? (Encercla'n UNA)

a) Dividir 2010 entre 4.
b) Dividir 2010 entre 5.
c) Dividir 2010 entre 8.
d) Dividir 2010 entre 9.
e) Fixar-se només en les dues últimes xifres de 2010.

4. Abans de donar les notes d'un examen (que constava de 4 problemes) als teus alumnes, el Julià els planteja la següent qüestió sobre el nombre de deus:

Entre les tres classes sou 100 alumnes. Puc assegurar-vos que 90 alumnes han resolt correctament el primer problema, 85 han resolt correctament el segon problema, 80 han *resolt correctament el tercer problema i 70 han resolt correctament el quart problema. Quin és el mínim nombre d'alumnes que han tret un 10 a l'examen?*

Quants deus hi ha com a mínim, doncs, entre les tres classes?

a) 10
b) 15
c) 20
d) 25
e) 30

5. Per tal de treballar la divisibilitat dels nombres naturals grans, el mestre Joan porta un cert dia a classe una llista amb tots els nombres naturals de l'1 al 2006. Demana a la Clara que ratlli tots els nombres parells; al Robert, tots els nombres múltiples de 3, i a l'Eulàlia, tots els nombres divisibles per 4. Quants nombres han quedat ratllats exactament dues vegades?

a) 1003
b) 1002
c) 501
d) 334
e) 167

6. La professora Joana està estudiant amb la seva classe les regles de divisibilitat. Els explica que un nombre és divisible per 4 si i només si els dos últims dígits del nombre són divisibles per 4. Un dels seus alumnes pregunta perquè funciona aquesta regla. Aleshores la professora els demana que intentin trobar la raó, i els alumnes proposen diferents possibles raons. Marca, de les afirmacions següents, <u>totes</u> aquelles que consideris que poden portar a la demostració de la regla.

☐ a) Els nombres senars no són divisibles per nombres parells, i dels que són parells, només la meitat són divisibles per 4: **4**, 6, **8**, 10, **12**...
☐ b) El nombre 100 és divisible per 4 (i també 1000, 10000, etc.).
☐ c) Per veure si un nombre és divisible per $2=2^1$ cal mirar que sigui divisible per 2 l'última xifra, per veure si és divisible per $4=2^2$ les dues últimes xifres, per veure si és divisible per $8=2^3$ les 3 últimes xifres... i així successivament.
☐ d) Si la regla funciona per a 100, 104, 108, ..., 140, aleshores funcionarà per a tots els nombres.

7. En un llistat de problemes del teu curs, et trobes el següent problema:

Imagina que tens 108 boles vermelles i 180 de verdes. Les vols repartir, totes, en sacs (sense que en sobri ni en falti cap) de manera que en tots els sacs hi hagi el mateix nombre de boles, i que totes les boles de cada sac siguin del mateix color. Quin és el mínim nombre de sacs que necessites?

Quina és la resposta correcta?

a) 288
b) 36
c) 18

d) 8
e) 1

8. Després de l'explicació de quin dels següents continguts del curs creus que seria més adient proposar-lo als alumnes? (Encercla'n UN)

a) Probabilitat.
b) Mínim comú múltiple.
c) Màxim comú divisor.
d) Divisió d'enters.

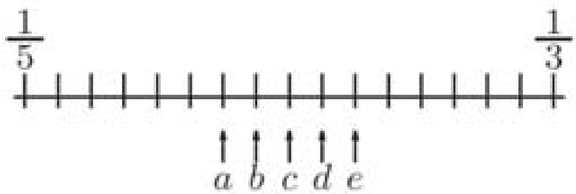
9. Un cert dia de classe els proposes als teus alumnes un joc. Han d'escriure a la llibreta una fracció amb les següents característiques:

- El numerador i el denominador han de ser nombres negatius.
- El numerador ha de ser més gran que el denominador en una unitat.

Els dius que endevinaràs com és la fracció que han escrit. Quina d'aquestes característiques de la fracció "encertaràs"? (Encercla'n UNA)

a) La fracció és un nombre més petit que -1.
b) La fracció és un nombre entre -1 i 0.
c) La fracció és un nombre positiu menor que 1.
d) La fracció és un nombre més gran que 1.
e) La fracció no és un nombre negatiu.

10. L'Elisabet dibuixa a la pissarra la següent recta numèrica, i hi situa les fraccions 1/3 i 1/5 de la següent manera:



Demana als alumnes que situïn la fracció ¼, i 5 alumnes surten a la pissarra a donar la seva solució. La Marta situa ¼ en el punt *a*, el Joaquim en el *b*, la Raquel en el *c*, la Sara en el *d* i l'Eugeni en el *e*. Quin dels 5 alumnes ha situat ¼ correctament? (Marca UNA resposta)

a) La Marta.
b) El Joaquim.
c) La Raquel.
d) La Sara.
e) L'Eugeni.

11. El Ricard diu als seus alumnes que dibuixin banderes inventades i les pintin de dos colors. L'Amadeu dibuixa una bandera formada per tres bandes de la mateixa amplària, dividides respectivament en dues, tres i quatre parts iguals i acolorides com es veu a la figura.

El Ricard demana als seus alumnes que indiquin quina part de la superfície de les seves banderes han pintat del color més fosc. Què ha de respondre l'Amadeu? (Encercla la resposta correcta)

a) 1/2
b) 2/3
c) 3/5
d) 4/7
e) 5/9

12. En un llistat de problemes de fraccions et trobes el següent:

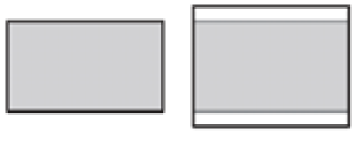
La Sandra i en Martí han anat a buscar bolets. N'han trobat 70 (només rovellons i llenegues). Els 5/9 dels bolets trobats per la Sandra eren rovellons, mentre que els 2/17 dels trobats per en Martí eren llenegues. Quants bolets ha trobat la Sandra?

Què opines del problema?

a) Té múltiples solucions: està bé per a que els nens i nenes vegin que alguns problemes no tenen solució única.
b) Té solució única. La forma més entenedora i eficient de resoldre'l és amb un sistema d'equacions: si encara no s'han estudiat els sistemes no és adequat proposar el problema a classe.
c) Té solució única, i la forma més entenedora i eficient de resoldre'l és fent un estudi de casos.
d) La forma més entenedora de resoldre'l és emprant un rectangle, per exemple, per a representar el total dels bolets. Partint-lo i pintant les parts adequades, és possible resoldre el problema i trobar-ne la solució.

13. L'últim dia de classe de matemàtiques del trimestre decideixes posar als alumnes el DVD de la pel·lícula *La habitación de Fermat*, per motivar als alumnes en la resolució de problemes. Abans de veure la pel·lícula, però, els planteges un interrogant.

La pantalla de la televisió que teniu al centre és antiga, i per tant té els costats en raó 4 : 3. Les noves, en canvi, tenen raó 16 : 9. Donat que les pel·lícules de DVD omplen exactament les pantalles noves, quina part de l'àrea de la pantalla antiga quedarà sense omplir?



Després de treballar-hi 5 minuts intensament (ja que volen veure la pel·lícula), els alumnes donen vàries respostes. Quina dónes com a bona? (Encercla'n UNA)

a) 1/4
b) 1/5
c) 1/6
d) 1/3
e) Depèn de la mida de la pantalla.

14. Quan estàveu treballant a classe el tema de fraccions, has posat als teus alumnes el següent problema:

La mare de l'Oleguer ha preparat una gerra de suc de taronja, un litre en total.

L'Oleguer tenia set i ha begut un vas gros de suc de taronja (la capacitat del vas és d'un quart de litre). Perquè no es noti, substitueix en la gerra el que ha begut per aigua.

Poc després l'Oleguer té més set i beu un altre vas de la barreja (amb el mateix vas de quart de litre, ben ple). Però com que ja la troba una mica aigualida pensa que si reomple la gerra amb aigua es notarà molt i per això fa un quart de litre de suc de taronja i l'aboca a la gerra.

Després d'això, ***quina part*** *del líquid de la gerra* ***és aigua****?*

Quin dels següents alumnes reflexa, amb els càlculs realitzats, que ha entès el problema? (Marca SÍ, NO, o NO N'ESTIC SEGUR (?) per cada possibilitat)

Sí	no	?	
			a) $1-(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}*\frac{3}{4})$
			b) $1-(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}*\frac{3}{4}+\frac{1}{4})$
			c) $\frac{1}{4}-\frac{1}{4}*\frac{3}{4}$
			d) $\frac{1}{4}-\frac{1}{4}*\frac{1}{4}$
			e) $\frac{1}{4}*\frac{3}{4}$

15. La professora Magda proposa a la seva classe el problema de com determinar el nombre de trucades de 3 minuts que podem fer amb una targeta de telèfon que permet 10 trucades de 6 minuts. Un alumne respon "5 trucades", i un altre "20 trucades". Quina de les següents reaccions de la Magda et semblaria més apropiada? (Encercla UNA resposta)

a) Mostrar a la pissarra la manera de resoldre aquests problemes amb proporcions inverses:

6 min - 10 trucades
:2↓ ↓x2
3 min - 20 trucades

Després explicar que el primer alumne ha utilitzat el mètode apropiat per a les proporcions directes.

b) En primer lloc, explicar als alumnes que es pot utilitzar aquesta targeta per a trucades de 6x10 = 60 minuts, i remarcar que 60 = 3X20. Per tant, la mateixa targeta telefònica permet 20 trucades de 3 minuts cadascuna i no 5 trucades.

c) Deixar que un alumne expliqui acuradament la forma de resoldre els problemes de proporció inversa i que el resultat aquí és de 20. Després deixar que un altre alumne expliqui que 5 hauria estat la solució correcta per a un problema de proporció directa.

d) Preguntar als alumnes quants minuts, en total, podem trucar amb aquesta targeta de telèfon. Després demanar-los que expliquin per què es pot utilitzar aquesta targeta per a 20 trucades de 3 minuts cadascuna i què deu haver causat l'error de l'alumne que ha respost 5 trucades.

16. Quins dels següents problemes podria ser utilitzat per il·lustrar 1 ¼ dividit per ½? (Marca SÍ, NO, o NO N'ESTIC SEGUR (?) per cada possibilitat)

Sí	No	?	
			a) Volem repartir 1 ¼ pastissos entre dues famílies. Quant de pastís tindrà cada família?
			b) Tenim 1,25 € i aviat en tindrem el doble. Quants diners tindrem llavors?
			c) Estem fent un coc i la recepta diu que posem 1 ¼ tasses de mantega. Quantes cullerades de mantega (cada cullerada = ½ tassa) necessitarem?

17. La Laia està explicant a la seva classe els decimals periòdics, i un alumne li pregunta la diferència que hi ha entre $0,\widehat{9}$ i 1. Què li podrà afirmar? (Marca SÍ, NO o NO N'ESTIC SEGUR (?) per cada opció)

Sí	no	?	
			a) Són exactament el mateix nombre.
			b) No són el mateix nombre, però són molt pròxims.
			c) No hi ha cap nombre racional entre ells.
			d) Entre dos nombres racionals sempre hi ha un altre nombre racional.

18. L'Octavi planteja als seus alumnes el següent problema:

Nou pastissets costen menys de 10 € i deu pastissets costen més d'11 €. Quant val un d'aquests pastissets?

Amb quins dels següents objectius creus que l'ha proposat? (Marca SÍ, NO o NO N'ESTIC SEGUR (?))

Sí	no	?	
			a) Entendre el significat de la divisió amb decimals i practicar-la.
			b) Entendre el significat de la multiplicació amb decimals i practicar-la.
			c) Adonar-se de la rellevància del context d'un problema.
			d) Resoldre problemes amb solucions múltiples.
			e) Resoldre problemes mitjançant l'estudi de casos.

19. Els estudiants d'en Ricard han estat treballant en l'ordenació de decimals. Tres estudiants – l'Andreu, la Clara i la Keisha – consideren que els decimals 0.5, 0.15, 1.26, 2.32, 2.68, 2.124 estan ordenats de menor a major. Quin error creus que és més probable que estiguin cometent? (Marca SÍ, NO o NO N'ESTIC SEGUR (?))

Sí	no	?	
			a) Ignorar el valor de la posició de les xifres.
			b) Ignorar el punt decimal.
			c) Provar una ordenació a sorts.
			d) No tenir en compte la part decimal del nombre.
			e) Només tenir en compte la part decimal del nombre.

20. En un llistat de problemes sobre percentatges, la Mercè es troba els següents problemes:

1. En una botiga de música dos CD tenien el mateix preu, però un l'han rebaixat un 5%, mentre que l'altre l'han apujat un 15%. Després d'aquestes variacions, la diferència de preu entre els dos és de 6 €. Quin és el preu que tenien els CD al principi?
2. Durant una cursa s'observa que, després d'un cert nombre de voltes, els corredors han recorregut el 20% del total de la distància prevista, i que, després d'una altra volta, ja n'hauran recorregut el 25%. Quantes voltes s'han de donar a la pista en aquesta cursa?
3. L'Àlex, l'Helena i la Sofia han recollit diners per poder comprar-se una tenda de càmping. La Sofia aporta el 60% del preu total. La quantitat que té l'Àlex representa el 40 % de la resta. D'aquesta manera, a l'Helena li queden per pagar 30 €. Quant costa la tenda?
4. Una persona té un pati rectangular al seu jardí. Decideix fer-lo més gran tot augmentant-ne tant la llargada com l'amplada en un 10%. Quin serà el percentatge d'increment de l'àrea del pati?

Què poden treballar els alumnes amb aquests problemes? (Marca tantes creus com creguis)

1	2	3	4	
				a) La resolució gràfica.
				b) Proporcionalitat directa.
				c) Equacions amb una incògnita.
				d) Sistemes d'equacions.
				e) Composició de percentatges.

21. Quines de les següents resolucions dels problemes són correctes? (Encercla les que ho siguin)

a) 0,1 x 0,1 = 0,01 -> 1 %
b) 100 : (25 – 20) = 20 voltes
c) 1 – (0,6 + 0,24) = 0,16; (30 x 100) : 16 = 187,50 €
d) (6 x 100) : (15 + 5) = 20 €

ANNEX 5: Protocol de problemes definitiu

Imparteix classes en: ☐ Educació Primària ☐ Educació Secundària

Anys de docència:

Anys de docència al Cicle Superior de Primària / 1r Cicle Secundària :

Si us plau, contesti el més clarament possible les següents qüestions. Li recordem que les respostes són totalment anònimes.

Moltes gràcies per col·laborar amb nosaltres.

PROTOCOL 1

1a. Els estudiants de vegades només recorden part d'una regla. Solen dir, parlant de nombres enters per exemple, "dos negatius fan un positiu". Per a cadascuna de les següents operacions, decideix si aquesta afirmació funciona sempre (S) , mai (M) o de vegades (V).

S	M	V	
			a) Suma.
			b) Resta.
			c) Multiplicació.
			d) Divisió.

1b. Escriu un problema que utilitzi un context real que podries posar a la teva classe per tal d'exemplificar en el cas de la resta que "dos negatius fan un positiu".

2a. En un llistat de problemes del teu curs, et trobes el següent problema:

Imagina que tens 108 boles vermelles i 180 de verdes. Les vols repartir, totes, en sacs (sense que en sobri ni en falti cap) de manera que en tots els sacs hi hagi el mateix nombre de boles, i que totes les boles de cada sac siguin del mateix color. Quin és el mínim nombre de sacs que necessites?

Quina és la resposta correcta?

a) 288
b) 36
c) 18
d) 8
e) 1

2b. Quins dels següents continguts del curs són necessaris per a resoldre el problema? (Marca tots els que creguis necessaris)

a) Probabilitat.
b) Mínim comú múltiple.
c) Màxim comú divisor.
d) Divisió d'enters.

3a. Per tal de treballar la divisibilitat dels nombres naturals grans, el mestre Joan porta un cert dia a classe una llista amb tots els nombres naturals de l'1 al 2006. Demana a la Clara que ratlli tots els nombres parells; al Robert, tots els nombres múltiples de 3, i a l'Eulàlia, tots els nombres divisibles per 4. Quants nombres han quedat ratllats exactament dues vegades?

a) 1003
b) 1002
c) 501
d) 334
e) 167

3b. Una alumna d'en Joan, la Laura, no sap com abordar el problema i no entén la resolució analítica que un altre alumne ha fet a la pissarra. Proposa una representació visual que el professor Joan podria fer servir per tal d'ajudar a la Laura a entendre el problema.

4. Abans de donar les notes d'un examen (que constava de 4 problemes) als seus alumnes, el Julià els planteja la següent qüestió sobre el nombre de deus:

Entre les tres classes sou 100 alumnes. Puc assegurar-vos que 90 alumnes han resolt correctament el primer problema, 85 han resolt correctament el segon problema, 80 han resolt correctament el tercer problema i 70 han resolt correctament el quart problema. Quin és el mínim nombre d'alumnes que han tret un 10 a l'examen?

Quants deus hi ha com a mínim, doncs, entre les tres classes?

a) 10
b) 15
c) 20
d) 25
e) 30

5. La professora Joana està estudiant amb la seva classe les regles de divisibilitat. Els explica que un nombre és divisible per 4 si i només si els dos últims dígits del nombre són divisibles per 4. Un dels seus alumnes pregunta perquè funciona aquesta regla. Aleshores la professora els demana que intentin trobar la raó, i els alumnes proposen diferents possibles raons. Marca, de les afirmacions següents, <u>totes</u> aquelles que consideris que poden portar a la demostració de la regla.

- [ ] a) Els nombres senars no són divisibles per nombres parells, i dels que són parells, només la meitat són divisibles per 4: **4**, 6, **8**, 10, **12**...
- [ ] b) El nombre 100 és divisible per 4 (i també 1000, 10000, etc.).
- [ ] c) Per veure si un nombre és divisible per $2=2^1$ cal mirar que sigui divisible per 2 l'última xifra, per veure si és divisible per $4=2^2$ les dues últimes xifres, per veure si és divisible per $8=2^3$ les 3 últimes xifres... i així successivament.
- [ ] d) Si la regla funciona per a 100, 104, 108, ..., 140, aleshores funcionarà per a tots els nombres.

6a. En un llistat de problemes et trobes el següent:

La Sandra i en Martí han anat a buscar bolets. N'han trobat 70 (només rovellons i llenegues). Els 5/9 dels bolets trobats per la Sandra eren rovellons, mentre que els 2/17 dels trobats per en Martí eren llenegues. Quants bolets ha trobat la Sandra?

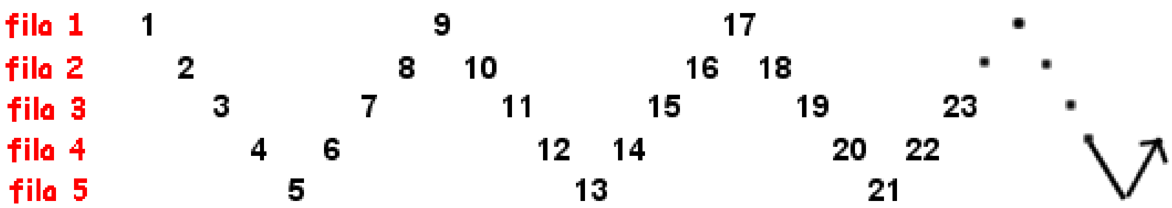
Què opines del problema? (Encercla només UNA resposta)

a) Té múltiples solucions: està bé per a que els nens i nenes vegin que alguns problemes no tenen solució única.
b) Té solució única. La forma més entenedora i eficient de resoldre'l és amb un sistema d'equacions: si encara no s'han estudiat els sistemes no és adequat proposar el problema a classe.
c) Té solució única, i la forma més entenedora i eficient de resoldre'l és fent un estudi de casos.
d) La forma més entenedora de resoldre'l és emprant un rectangle, per exemple, per a representar el total dels bolets. Partint-lo i pintant les parts adequades, és possible resoldre el problema i trobar-ne la solució.
e) No té solució.

6b. Crea un problema diferent però del mateix tipus del problema 6a (mateixos processos o operacions) que sigui més fàcil de resoldre per als teus alumnes.

7. Els últims dies de classe t'agrada dedicar-los a la resolució de problemes recreatius. Un cert dimarts de juny, els planteges als teus alumnes aquest problema:

Els nombres naturals es col·loquen formant una sanefa com es mostra a la figura. En quina fila quedarà el número 2010?



a) Fila 1.
b) Fila 2.
c) Fila 3.
d) Fila 4.
e) Fila 5.

8. Un alumne que li agraden molt les matemàtiques ha trobat, en un llibre de problemes del seu pare, el següent problema:

Si $x + y = 0$ i $x \neq 0$, aleshores quin és el valor de la fracció x^{2010}/y^{2010} ?

Com que ets el seu professor de matemàtiques i no se'n surt, et demana la solució del problema. Quina resposta li donaràs? (Encercla-la)

a) -1
b) 0
c) 1
d) x/y
e) Falten dades per a poder determinar-ho.

Imparteix classes en: ☐ Educació Primària ☐ Educació Secundària
Anys de docència:
Anys de docència al Cicle Superior de Primària / 1r Cicle Secundària :

Si us plau, contesti el més clarament possible les següents qüestions. Li recordem que les respostes són totalment anònimes.
Moltes gràcies per col·laborar amb nosaltres.

PROTOCOL 2

1a. El Ricard diu als seus alumnes que dibuixin banderes inventades i les pintin de dos colors. L'Amadeu dibuixa una bandera formada per tres bandes de la mateixa amplària, dividides respectivament en dues, tres i quatre parts iguals i acolorides com es veu a la figura.

El Ricard demana als seus alumnes que indiquin quina part de la superfície de les seves banderes han pintat del color més fosc. Què ha de respondre l'Amadeu? (Encercla la resposta correcta)

a) 1/2
b) 2/3
c) 3/5
d) 4/7
e) 5/9

1b. Crea un problema diferent però del mateix tipus del problema 1a (mateixos processos o operacions) que sigui més fàcil de resoldre per als teus alumnes.

2a. Quin és el resultat de dividir 1 ¼ entre ½?

a) 1/8
b) 1/2
c) 1/4
d) 5/2
e) 5/8
f) 2

2b. Quins dels següents problemes podria ser utilitzat per il·lustrar 1 ¼ dividit entre ½? (Marca SÍ, NO, o NO N'ESTIC SEGUR (?) per cada possibilitat)

Sí	No	?	
			a) Volem repartir 1 ¼ pastissos entre dues famílies. Quant de pastís tindrà cada família?
			b) Tenim 1,25 € i aviat en tindrem el doble. Quants diners tindrem llavors?
			c) Estem fent un coc i la recepta diu que posem 1 ¼ tasses de mantega. Quantes cullerades de mantega (cada cullerada = ½ tassa) necessitarem?

3a. Quan estàveu treballant a classe el tema de fraccions, has posat als teus alumnes el següent problema:

La mare de l'Oleguer ha preparat una gerra de suc de taronja, un litre en total.

L'Oleguer tenia set i ha begut un vas gros de suc de taronja (la capacitat del vas és d'un quart de litre). Perquè no es noti, substitueix en la gerra el que ha begut per aigua.

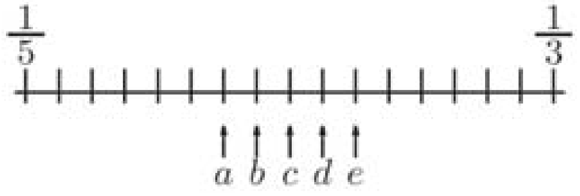
Poc després l'Oleguer té més set i beu un altre vas de la barreja (amb el mateix vas de quart de litre, ben ple). Però com que ja la troba una mica aigualida pensa que si reomple la gerra amb aigua es notarà molt i per això fa un quart de litre de suc de taronja i l'aboca a la gerra.

Després d'això, ***quina part*** *del líquid de la gerra* ***és aigua****?*

a) $\frac{1}{4}$
b) $\frac{3}{4}$
c) $\frac{1}{16}$
d) $\frac{3}{16}$
e) $\frac{1}{8}$

3b. L'Eugeni no ha sabut resoldre el problema per sí mateix. Dibuixa una representació visual que pugui ajudar a l'Eugeni a entendre perquè la solució correcta és la que és.

4. L'Elisabet dibuixa a la pissarra la següent recta numèrica, i hi situa les fraccions 1/3 i 1/5 de la següent manera:



Demana als alumnes que situïn la fracció ¼, i 5 alumnes surten a la pissarra a donar la seva solució. La Marta situa ¼ en el punt *a*, el Joaquim en el *b*, la Raquel en el *c*, la Sara en el *d* i l'Eugeni en el *e*. Quin dels 5 alumnes ha situat ¼ correctament? (Marca UNA resposta)

a) La Marta.
b) El Joaquim.
c) La Raquel.
d) La Sara.
e) L'Eugeni.

5a. L'Octavi planteja als seus alumnes el següent problema:

Nou pastissets costen menys de 10 € i deu pastissets costen més d'11 €. Quant val un d'aquests pastissets?

a) El problema no té solució.
b) El problema té infinites solucions.
c) El problema té solució única = _____ € (en aquest cas calcula-la)

5b. Crea un problema de temàtica diferent a l'anterior (que no parli de diners) on el context real del problema en determini el nombre de solucions.

6. Un cert dia de classe els proposes als teus alumnes un joc. Han d'escriure a la llibreta una fracció amb les següents característiques:

- El numerador i el denominador han de ser nombres negatius.
- El numerador ha de ser més gran que el denominador en una unitat.

Els dius que endevinaràs com és la fracció que han escrit. Quina d'aquestes característiques de la fracció "encertaràs"? (Encercla'n UNA)

a) La fracció és un nombre més petit que -1.
b) La fracció és un nombre entre -1 i 0.
c) La fracció és un nombre positiu menor que 1.
d) La fracció és un nombre més gran que 1.

7. En un llistat de problemes sobre percentatges, la Mercè es troba els següents problemes:

1. En una botiga de música dos CD tenien el mateix preu, però un l'han rebaixat un 5%, mentre que l'altre l'han apujat un 15%. Després d'aquestes variacions, la diferència de preu entre els dos és de 6 €. Quin és el preu que tenien els CD al principi?

2. Durant una cursa s'observa que, després d'un cert nombre de voltes, els corredors han recorregut el 20% del total de la distància prevista, i que, després d'una altra volta, ja n'hauran recorregut el 25%. Quantes voltes s'han de donar a la pista en aquesta cursa?

3. L'Àlex, l'Helena i la Sofia han recollit diners per poder comprar-se una tenda de càmping. La Sofia aporta el 60% del preu total. La quantitat que té l'Àlex representa el 40 % de la resta. D'aquesta manera, a l'Helena li queden per pagar 30 €. Quant costa la tenda?

4. Una persona té un pati rectangular al seu jardí. Decideix fer-lo més gran tot augmentant-ne tant la llargada com l'amplada en un 10%. Quin serà el percentatge d'increment de l'àrea del pati?

Per a cadascuna d'aquestes resolucions, indica de quin dels problemes de la pregunta anterior és (1, 2, 3, 4) i si és correcta o no (SÍ / NO).

Problema	Correcta	
		a) Si les dimensions lineals augmenten un 10%, l'àrea també.
		b) Solució = 100 : (25 – 20)
		c) 1 – (0,6 + 0,24) = 0,16; Solució = (30 x 100) : 16
		d) Solució = (6 x 100) : (15 + 5)

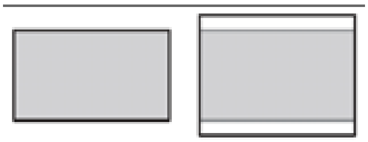
8. Els estudiants d'en Ricard han estat treballant en l'ordenació de decimals. Tres estudiants – l'Andreu, la Clara i la Keisha – consideren que els decimals 0.5, 0.15, 1.26, 2.32, 2.68, 2.124 estan ordenats de menor a major. El Ricard se n'adona que aquesta llista de nombres no li permet identificar si els alumnes:

a) han ignorat el valor de la posició de les xifres decimals, o bé
b) han ignorat el punt decimal.

Proposa UNA llista de tres nombres decimals que permetin identificar (és a dir, que s'obtinguin solucions diferents) si els alumnes *ordenen correctament els nombres*, *utilitzen el criteri d'ordenació (a)* o bé *utilitzen el criteri d'ordenació (b)*.

9. L'últim dia de classe de matemàtiques del trimestre decideixes posar als alumnes el DVD de la pel·lícula *La habitación de Fermat*, per motivar als alumnes en la resolució de problemes. Abans de veure la pel·lícula, però, els planteges un interrogant.

La pantalla de la televisió que teniu al centre és antiga, i per tant té els costats en raó 4 : 3. Les noves, en canvi, tenen raó 16 : 9. Donat que les pel·lícules de DVD omplen exactament les pantalles noves, quina part de l'àrea de la pantalla antiga quedarà sense omplir?



Després de treballar-hi 5 minuts intensament (ja que volen veure la pel·lícula), els alumnes donen vàries respostes. Quina dónes com a bona? (Encercla'n UNA)

a) 1/4
b) 1/5
c) 1/6
d) 1/3
e) Depèn de la mida de la pantalla.

10. La Laia està explicant a la seva classe els decimals periòdics, i un alumne li pregunta la diferència que hi ha entre $0,\widehat{9}$ i 1. Què li podrà afirmar? (Marca SÍ, NO o NO N'ESTIC SEGUR (?) per cada opció)

Sí	No	?	
			a) Són exactament el mateix nombre.
			b) No són el mateix nombre, però són molt pròxims.
			c) No hi ha cap nombre racional entre ells.
			d) Entre dos nombres racionals sempre hi ha un altre nombre racional.