Contribución al estudio de la enseñanza y del aprendizaje de las isometrías mediante discusiones en gran grupo con el uso de tecnología

Autora

Laura Morera Úbeda

Directores de tesis:

Josep Maria Fortuny Aymemí **Núria Planas Raig**

Coordinador dels Estudis de Doctorat en Didàctica de les Matemàtiques
i de les Ciències

Josep Maria Fortuny Aymemí

Director del Departament de Didàctica de la Matemàtica
i de les Ciències Experimentals

Jordi Deulofeu Piquet

Bellaterra, marzo de 2013

Contribución al estudio de la enseñanza y del aprendizaje de las isometrías mediante discusiones en gran grupo con el uso de tecnología

Autora:

Laura Morera Úbeda

Directores de tesis:

Josep Maria Fortuny Aymemí

Núria Planas Raig

Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals

Facultat d'Educació

Universitat Autònoma de Barcelona

Tesis presentada para obtener el título de Doctor Europeo por la Universitat Autònoma de Barcelona

Marzo de 2013

Diseño de la portada por
Francesc Morera (a.bís)

Prefacio

Este trabajo de tesis doctoral se ha realizado en el marco del Programa de Doctorado del Departament de Didàctica de la Matemàtica i les Ciències Experimentals de la Universidat Autònoma de Barcelona. Los estudios de Máster y posteriormente de Doctorado se han llevado a cabo durante el periodo comprendido entre septiembre de 2008 y febrero de 2013. La autora se ha acogido a la beca doctoral (BES2009-022687), financiada por el Ministerio de Economía y Competitividad de España. Además, la investigación se ha ubicado principalmente dentro de dos proyectos de investigación, "Contribución al análisis y mejora de las competencias matemáticas en la enseñanza secundaria con un nuevo entorno tecnológico" (EDU 2008-01963) comprendido entre los años 2008 y 2011, y "Momentos clave en el aprendizaje de la geometría en un entorno colaborativo y tecnológico" (EDU2011-23240), concedido a finales de 2011. La colaboración con el proyecto "Estudio del desarrollo de competencias discursivas en el aula de matemáticas" (EDU2009-07113) ha sido también importante.

Una parte del periodo de formación investigadora se ha realizado durante dos estancias breves de doctorado, de nuevo financiadas por el Ministerio de Economía y Competitividad. En la primera, la autora tuvo la oportunidad de trabajar, tutorizada por el Prof. Paul Drijvers, en el Freudenthal Institute durante el periodo de septiembre a diciembre de 2011. En esta estancia, entre otras actividades de investigación, desarrolló el instrumento de análisis 'Detector de oportunidades de aprendizaje'. La segunda estancia, fue llevada a cabo entre septiembre y diciembre de 2012 en el IREM –Institut de Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques– de Toulouse y estuvo tutorizada por el Prof. Xavier Buff. Fundamentalmente se trabajó en la redacción de la memoria final y se ahondó en la reflexión de los resultados más relevantes para formalizar implicaciones didácticas.

Junto con las estancias, la participación en diversos Seminarios y Congresos ha contribuido a construir y revisar sistemáticamente el proceso de investigación para incorporar comentarios y revisiones. Por ejemplo, la participación en un curso intensivo asociado a la Universidad de Adger (Noruega), en el seminario de investigación organizado por el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valencia, en los "Divendres de recerca" de la Universitat Autònoma de Barcelona, en los Encuentros de Estudiantes de la UAB, en los encuentros del Grupo AprenGeom en Castro Urdiales, en los congresos del PME internacional en Brasil y Taiwan, en los congresos del ERME europeo en Polonia y Turquía, o bien en el Simposio de la SEIEM de Lleida representan todos ellos momentos cruciales. En relación a las implicaciones didácticas del estudio, la autora ha tenido la oportunidad de presentar resultados parciales en diversos acontecimientos enfocados a profesores en activo como la participación al ICME de Corea, las JAEM de Gijón, las Jornadas de GeoGebra, las Jornadas del ABEAM, entre otras.

Esperamos haber conseguido, como mínimo, la adquisición de las competencias básicas que según el RD 1393/2007, en el caso del Doctorado, son fundamentales para mostrar capacidad investigadora. Entre estas competencias señalamos las siguientes: comprender un campo de estudio y dominar las habilidades y métodos de investigación relacionados con dicho campo; concebir, diseñar, poner en práctica y adoptar un proceso sustancial de investigación con seriedad académica; realizar una contribución a través de una investigación original que amplíe las fronteras del conocimiento, desarrollando un corpus sustancial, del que parte merezca la publicación referenciada, a nivel nacional o internacional; realizar un análisis crítico, evaluación y síntesis de ideas nuevas y complejas; comunicarse con sus colegas, con la comunidad académica en su conjunto, y con la sociedad en general, acerca de sus áreas de conocimiento; fomentar, en contextos académicos y profesionales, el avance tecnológico, social o cultural, dentro de una sociedad basada en el conocimiento.

Además de todas las ayudas institucionales procedentes del Ministerio, esta investigación ha sido posible gracias al esfuerzo y compromiso de muchas personas que paso a mencionar.

Mis más sinceros agradecimientos a mis directores Josep Maria Fortuny y Núria Planas, que siempre han estado ahí y me han dado los ánimos, consejos, ayudas, recursos, contactos y recomendaciones necesarios para seguir. Presencialmente y virtualmente, en horario laboral y en horas intempestivas, en el despacho, en países remotos o en trayectos de avión, siempre aprovechando para definir mejor el concepto de oportunidades de aprendizaje. Ellos me han concedido oportunidades de aprender en muchos ámbitos y espero haberlas aprovechado.

También quiero mencionar mis tutores de las estancias, Paul Drijvers y Xavier Buff, por haberme aceptado en sus equipos de investigación e integrarme en ellos. Es un honor haber tenido la posibilidad de ver las formas de trabajo en el Freudenthal Institute. Debo agradecer la invitación a todos los actos, seminarios, reuniones, visitas a escuelas, sesiones con profesores y cenas que se organizaron en el Instituto. Ha sido igualmente un honor participar de las dinámicas de trabajo en el IREM.

Otros investigadores me han dedicado tiempo y esfuerzos en tutorías que se han traducido en mejoras de mi investigación. Las diversas tutorías con Ángel Gutiérrez fueron un punto de partida y una guía importante. Los consejos de Pedro Cobo me han hecho reflexionar y modificar aspectos importantes del trabajo. La primera tutoría en inglés con Claire V. Berg fue crucial en el mundo de los congresos internacionales. Las sesiones con Abraham Arcavi, quien particularizó en aspectos de mi trabajo, fueron de gran ayuda. Los encuentros formales e informales con Matías Camacho han sido muy provechosos y me han llevado a nuevos aprendizajes, que le agradezco.

Por las características de la investigación, no hubiese sido posible sin la colaboración de alumnos, profesores y el equipo directivo de la

escuela donde se han recogido los datos. Doy gracias enérgicas a la promoción “Àrtic”. Su implicación permitió que las clases de matemáticas se convirtieran en estudios cinematográficos, con varias cámaras de video, magnetófonos de audio… La implicación de los profesores de la escuela ha sido fundamental, en especial la de Laura Ansorena, que ha confiado en mis ideas, a veces un tanto locas, y siempre ha estado dispuesta a colaborar en todo lo que se le ha propuesto. También gracias a Rosa Flos, por haberme permitido compaginar las tareas de investigación con una participación activa en la escuela.

La realización de esta tesis me ha llevado a conocer y entablar amistad con personas muy interesantes, de gran valor humano y académico. Aunque la relación sea a distancia, hemos establecido un fructífero triángulo entre Madrid, Granada y Barcelona con ya algunas pequeñas colaboraciones y grandes proyectos por delante. Gracias por todo a Blanca Souto y a Pedro Arteaga.

Aún gracias a quienes me han distraído de mi trabajo de investigadora. A los que me han propuesto clandestinamente problemas de geometría para disfrutar y aprender (Jordi, Xavier y Lluís), a quienes me han enseñado mucho sobre recursos didácticos (David, Cecilia y Anna), a quienes me han ayudado a preparar materiales y a divertirme con juegos matemáticos (Miquel, Andoni y Lourdes). A Edelmira, que me ha cuidado en momentos de *repánico*, me ha hecho reír y con quien he compartido clases de geometría y otros menesteres docentes muy interesantes. A todos los compañeros del departamento, incluidos Àngels y Benja, por su paciencia y sus consejos burocráticos.

A todos los compañeros del Doctorado que siempre han estado allí. A Marta, Marisa, Carol, Natasha, Víctor, Miquel, Judit, Manuel, Alba, Gisela… Disculpas de antemano por los nombres que olvido.

A tots els del Movi, que heu hagut d’aguantar les meves idees sobre didàctica de les matemàtiques a les converses de bar. Per la vostra amistat i pel vostre acompanyament.

Als “naranjitos” de la Facultat de Matemàtiques i Estadística, que durant tot el procés d’escriptura sempre estaveu on-line compartint reflexions, comentaris, experiències… Moltes gràcies.

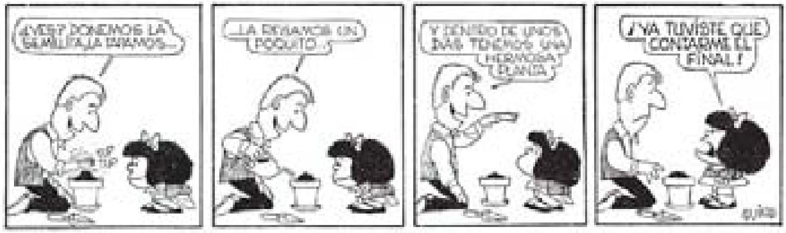
Pero sobre todo agradezco a mis padres, Francesc y Cristina, todo lo que han hecho por mí, ahora y siempre. Sin su apoyo diario, el largo camino a recorrer para la realización de un estudio de estas características no hubiera resultado tan llevadero. El amor, las cenas, los ánimos, las cenas, los consejos, las cenas, los diseños, las cenas…

Finalmente, dedico este trabajo a Txema, que durante más de nueve años siempre me ha apoyado en mi forma de ver la vida y el trabajo. Indirectamente, él me guió a involucrarme en el mundo de la investigación. Su forma sincera y peculiar de ayudar desde la distancia me ha reforzado. ¡Gracias!

Tabla de contenido

Lista de Figuras

Lista de Tablas


¡YA TUVISTE QUE CONTARME EL FINAL!

1 Introducción

El presente trabajo de tesis doctoral se ubica en el área de investigación en Educación Matemática y se ha realizado dentro del Programa de Doctorado en Didáctica de las Ciencias Experimentales y la Matemática de la Universidad Autónoma de Barcelona. La participación en este Programa surge para dar respuesta a inquietudes inicialmente experimentadas durante la práctica educativa en el aula de matemáticas de secundaria.

El primer encuentro con el *software* de geometría dinámica fue en unos cursos de postgrado para profesores en activo. Rápidamente empecé a usar este recurso didáctico en mis clases de geometría, pero en poco tiempo me di cuenta de que la planificación, la implementación y la gestión de las clases con tecnología son complicadas. Por otro lado, siempre había deseado poder discutir matemáticamente con los alumnos en relación a los problemas de clase, en concreto los de geometría. Muchas veces era difícil que conjeturaran soluciones de los problemas más complejos y las discusiones resultaban a menudo pobres.

En el marco del Proyecto "Contribución al análisis y mejora de las competencias matemáticas en la enseñanza secundaria con un nuevo entorno tecnológico" (EDU 2008-01963) comprendido entre los años 2008 y 2011 tuve la oportunidad de acogerme a una beca doctoral (BES2009-022687), financiada por el Ministerio de Economía y Competitividad de España. Esto me permitió realizar un estudio detallado orientado a investigar relaciones entre enseñanza y aprendizaje geométrico a través de discusiones en gran grupo con un entorno tecnológico de geometría dinámica. A finales de 2011, el Proyecto tuvo continuidad con la concesión del Proyecto actual, "Momentos clave en el aprendizaje de la geometría en un entorno colaborativo y tecnológico" (EDU2011-23240), y pasó a centrarse sobre todo en el estudio de las oportunidades de aprendizaje documentadas a partir de los resultados obtenidos en la investigación del equipo hasta ese momento.

En este capítulo introductorio presentamos la problemática actual en relación a aspectos de trabajo colaborativo y uso de tecnología en el aula de matemáticas (1.1). Seguimos con el establecimiento de la pregunta de investigación y de los objetivos planteados en este estudio (1.2). Finalmente, resumimos la estructura del manuscrito para facilitar su lectura (1.3).

1.1 Problemática y justificación

Las discusiones en gran grupo de la resolución de problemas matemáticos en clase son un recurso muy potente para crear oportunidades de aprendizaje a los estudiantes. Diversos estudios plantean su potencialidad y muestran ejemplos sobre cómo mediante puestas en común se potencian diversos aspectos del aprendizaje de los alumnos (Yackel, 2001). Estudios como el de Smith y Stein (2011) plantean, además, prácticas que se deben cumplir para el diseño de discusiones en gran grupo matemáticamente productivas. Por tanto, es razonable pensar que no todas las discusiones en gran grupo de resolución de problemas matemáticos son ricas por sí mismas. Parece conveniente que vayan acompañadas de una preparación, gestión y reflexión posterior del profesor.

Por otro lado, hay investigaciones en el área que se centran en cómo el profesor puede orquestar sesiones de clase que incluyan el uso de tecnología (Drijvers, Doorman, Boon, Reed y Gravemeijer, 2010; Trouche y Drijvers, 2010). Estas investigaciones plantean la necesidad de una preparación previa por parte del profesor enfocada a la gestión de los instrumentos que entran en juego en cada situación de aula.

Sin embargo, son todavía pocas las investigaciones que se han centrado en el estudio conjunto de estas dos perspectivas (la discursiva y la instrumental) a fin de desarrollar acciones y propuestas prácticas para gestionar discusiones en gran grupo que involucren tecnología. Consideramos fundamental que estas propuestas vayan siempre acompañadas de un interés por fomentar el aprendizaje de los alumnos, es decir, que las discusiones en gran grupo con tecnología tengan por objetivo ser matemáticamente productivas.

Para que las discusiones en gran grupo con tecnología se puedan considerar productivas, es imprescindible que desde el punto de vista del aprendizaje del alumno, éste realice progresos a partir de oportunidades de aprendizaje que se hayan generado en el aula. Por este motivo, una parte esencial de esta investigación se centra en el estudio de las oportunidades de aprendizaje que se hayan podido generar en la situación de enseñanza, junto con el análisis del aprovechamiento de estas oportunidades por parte de los alumnos. Como se verá a lo largo del posicionamiento teórico y metodológico, un supuesto básico de este trabajo es considerar el aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje como una evidencia misma de aprendizaje.

1.2 Pregunta y objetivos de la investigación

En la presente sección, definimos la pregunta de investigación que emerge de la problemática presentada. También detallamos los objetivos que servirán para aproximar una respuesta a la pregunta planteada.

1.2.1 Pregunta de investigación

Para contribuir al estudio conjunto de sesiones de clase con discusiones en gran grupo y tecnología, planteamos la siguiente pregunta de investigación:

> *¿Cómo se pueden potenciar las relaciones entre la enseñanza y el aprendizaje de las isometrías mediante la gestión de discusiones en gran grupo con el uso de tecnología?*

Pasamos a discutir el significado que damos a las palabras clave que intervienen en la formulación de nuestra pregunta. En primer lugar, utilizamos el término *relaciones entre enseñanza y aprendizaje* para remarcar que aunque las acciones para potenciar el aprendizaje estén centradas en el profesor y por lo tanto en la enseñanza, la atención a las prácticas de enseñanza viene en última instancia justificada como modo de acceder al aprendizaje de los alumnos. Así, tomamos una combinación de ambos conceptos –enseñanza y aprendizaje–, porque consideramos que son altamente dependientes. En particular, con esto nos referimos a la estrecha vinculación, que existe en el mundo de la investigación educativa, entre crear un entorno de enseñanza rico y facilitar la generación y detección de aprendizaje en dicho entorno.

Otra palabra clave es la de *isometrías*. El hecho de centrarnos en las isometrías se debe a que geometría es un dominio demasiado extenso para establecer relaciones de enseñanza y aprendizaje detalladas en un único trabajo de investigación. Así, centrarse en el contenido curricular de las isometrías es una forma de acotar el estudio y garantizar la obtención de resultados más minuciosos. Hay otros motivos que explican esta elección. Tal como se desarrolla más adelante, las isometrías son un tema crucial dentro de la historia de la geometría. Además, admiten un tratamiento con software de geometría dinámica, dado su dinamismo y las posibilidades de visualización de transformaciones en el plano. No es menos importante la ubicación de este tema en los currículos de secundaria obligatoria.

El uso del término *gestión* es genérico a propósito, para no entrar de antemano en constructos que después se presentarán en el marco teórico, tales como los de orquestación y andamiaje. En tanto que pregunta abierta de investigación, consideramos la gestión de una forma global, para acabar tratando posibles formas de gestionar la enseñanza y el aprendizaje a lo largo del diseño experimental y su análisis. Hasta aquí, tenemos referencias a las prácticas de enseñanza y aprendizaje, a los contenidos matemático, incluyendo ahora aspectos de regulación mediante la gestión de unas y otras prácticas.

Por último, las palabras clave *discusiones en gran grupo* y *uso de tecnología* constituyen la base de este estudio. Puede decirse que éstas indican el contexto pedagógico y didáctico en el que se desarrolla la investigación. Como hemos comentado, el estudio tiene por finalidad ofrecer resultados científicos de enseñanza y aprendizaje donde coexisten ambas situaciones de aula.

1.2.2 Objetivos de la investigación

Planteamos aproximar respuestas a la cuestión de investigación por medio de la consecución de dos objetivos más concretos, que son los siguientes:

> *Objetivo 1.- Analizar una sistemática de planificación, implementación y evaluación de una secuencia didáctica con discusiones en gran grupo bajo el soporte de un software de geometría dinámica.*
>
> *Objetivo 2.- Detectar oportunidades de aprendizaje de las isometrías y su aprovechamiento en el contexto de la secuencia didáctica creada a partir de la sistemática anterior.*

El primer objetivo del estudio está centrado en las prácticas de enseñanza del profesor. Se examina la aplicación de las fases de una sistemática que pretende generar discusiones matemáticamente productivas con la particularidad del uso y las referencias a la tecnología. Para este primer objetivo, no obstante, el énfasis está en el análisis de la sistemática y de su carácter práctico y eficiente.

El segundo objetivo está centrado en el aprendizaje de los alumnos. Para comprobar la operatividad de la sistemática, nos centramos en los datos de puestas en común con los alumnos. Tratamos de detectar qué situaciones ricas se han producido, lo cual para nosotros equivale a documentar qué oportunidades de aprendizaje se han creado y cómo han sido aprovechadas por los alumnos. En este punto exploramos cuán fructíferas son las oportunidades de aprendizaje que detectamos. Las oportunidades aprovechadas son las que contribuyen a valorar la operatividad y la eficiencia de la sistemática elaborada.

Para acabar y tal como hemos procedido con la pregunta de investigación, señalamos las palabras clave utilizadas en la redacción de los objetivos. En primer lugar, hemos introducido el constructo de *sistemática* para referirnos a la integración de fases teóricas propuestas por diversos autores, que se detallan más adelante y que se adecúan para conseguir la mirada conjunta a las discusiones en gran grupo y el uso de la tecnología.

Continuando con la formulación del primer objetivo, encontramos la palabra clave *software de geometría dinámica*. Con el propósito de concretar el uso de la tecnología en esta investigación, mencionamos el entorno de geometría dinámica por el cual se optó a raíz del conocimiento didáctico que se tenía de él. La idoneidad de esta opción también se justifica en base al contenido matemático seleccionado, el de las isometrías.

Por otro lado, en la formulación del segundo objetivo, incorporamos el concepto de *oportunidades de aprendizaje*, que toma mucha importancia en el sentido general de este trabajo. Aunque dejamos la fundamentación de esta noción para el capítulo de marco teórico, insistimos desde ahora en la potencialidad de las oportunidades ya que éstas apuntan a escenarios ricos respecto al aprendizaje que se puede estar facilitando a los alumnos.

La consideración anterior lleva a otra palabra clave en el enunciado del segundo objetivo, la de *aprovechamiento*, entendido como aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje. En síntesis, nuestra interpretación de aprendizaje a lo largo de toda la investigación vendrá mediada por la detección de oportunidades de aprendizaje y el posterior aprovechamiento de algunas de ellas. A grandes rasgos, este aprovechamiento será una evidencia fuerte de que la aplicación de la sistemática ha resultado ser efectiva y productiva.

1.3 Estructura de la memoria

Este manuscrito se estructura en varios capítulos que pasamos a comentar. Empezamos por esta introducción al estudio (Capítulo 1), donde presentamos la problemática detectada, la pregunta de investigación y los objetivos.

Sigue el marco teórico (Capítulo 2), donde detallamos nuestro punto de partida en referencia a lo que consideramos aprendizaje y a la noción misma de aprendizaje. También detallamos aspectos esenciales sobre el conocimiento del alumno y el del profesor.

El siguiente capítulo, el de metodología (Capítulo 3), está estructurado siguiendo las líneas abiertas indirectamente por los objetivos de la investigación. La primera parte del capítulo está centrada en la enseñanza y el diseño metodológico de la sistemática. En cambio, la segunda parte del capítulo, está centrada en el diseño metodológico para poder evidenciar oportunidades de aprendizaje y su aprovechamiento por parte de los alumnos.

A partir de este momento, todos los capítulos tienen el doble enfoque desde el punto de vista de la enseñanza y desde el punto de vista del aprendizaje, pero en el caso del análisis se ha separado en dos capítulos.

En el capítulo de análisis de la aplicación de la sistemática (Capítulo 4) se presenta el análisis detallado de la sistemática y su aplicación. En el capítulo de análisis de las oportunidades de aprendizaje (Capítulo 5) se incluye la detección de éstas y el estudio de su aprovechamiento.

Se ha escogido una sesión completa de discusión en gran grupo para mostrar el análisis minucioso y el análisis de los otros datos está incluido en los anexos. Finalmente, en el Capítulo 5, también se incluye el análisis del aprovechamiento de algunos de los estudiantes.

Posteriormente, en el capítulo de resultados (Capítulo 6) presentamos los resultados metodológicos y teóricos relativos a los objetivos del estudio. Además también se muestran otros resultados relevantes que se han desprendido del análisis de los datos.

Finalmente, en el capítulo de conclusiones (Capítulo 7) retomamos la pregunta de investigación para dar una visión global de los fines y logros de la investigación. También se hace una revisión del marco teórico y la metodología escogida. El capítulo termina con una serie de recomendaciones didácticas que pretenden ayudar a futuras implementaciones e investigaciones.

2 Marco teórico

En el presente capítulo presentamos el marco teórico de referencia en este estudio. Primero hacemos una revisión de la noción de aprendizaje (2.1) y en concreto de nuestra visión de las oportunidades de aprendizaje y del aprendizaje matemático en sí mismo (2.1.1).

A continuación, hacemos una revisión del conocimiento del alumno (2.2), centrándonos en el conocimiento escolar (2.2.1) y el conocimiento instrumental (2.2.2).

Finalmente, presentamos nuestra visión sobre el conocimiento del profesor (2.3), particularmente en el conocimiento del contenido matemático (2.3.1) y en el conocimiento del contenido pedagógico (2.3.2).

2.1 Noción de aprendizaje

En los últimos años, muchas investigaciones se han focalizado en el papel de la interacción social en el aprendizaje de las matemáticas (e.g. Hoyles y Forman, 1995; Kieran, 2001; Sfard, 2000; Sfard y Kieran, 2001). También se han establecido investigaciones sobre actividades en grupo en las clases, desde el punto de vista de su valor para favorecer el aprendizaje de los alumnos. Algunos trabajos como el de Kieran (2001), el de Lavy y Leron (2004) o el de Sfard y Kieran (2001), se han centrado en el estudio de las interacciones para construir aprendizaje durante el trabajo en parejas o grupos reducidos, mientras que solo unos pocos (e.g. Saxe y otros, 2009), han prestado atención a la construcción de conocimiento matemático durante discusiones en gran grupo.

Se ve crucial el trabajo colaborativo entre alumnos (tanto el trabajo por parejas como las discusiones en gran grupo) para llegar a construir conocimiento. La literatura existente sobre aprendizaje colaborativo ha identificado condiciones para producir interacción efectiva. Un rasgo común de estas condiciones es que los alumnos trabajen conjuntamente con autonomía respecto a la interacción con el profesor (Taneva, Alterman y Hickey, 2005). También hay consenso en torno a la condición de distribuir la tarea a realizar, de modo que así se reduzca en parte la complejidad de dicha tarea e incluso aumente la productividad matemática del grupo. En este sentido, sin embargo, Stevens (2000) menciona los riesgos asociados a la comprensión parcial que cada estudiante obtiene si a la distribución de la tarea no le sigue un momento final de colaboración. Así, es importante entender el trabajo colaborativo como la unión de esfuerzos de diferentes estudiantes con el objetivo de trabajar sobre la misma actividad, en lugar del trabajo individual sobre una sub-tarea de la actividad que tiene que realizar un grupo.

Como Taneva, Alterman y Hickey (2005) apuntan, son diversas las características que pueden constituir el trabajo colaborativo en la resolución de problemas: que los estudiantes se ayuden dando explicaciones en lugar de las respuestas, que regulen el trabajo de los compañeros o que las actividades de resolución de problemas estén gestionadas explícitamente mediante discusiones. Por otra parte, aunque muchos estudios presentan el trabajo colaborativo en la resolución de problemas como un recurso positivo para que se construya aprendizaje, también hay estudios que replantean esta idea. Sfard y Kieran (2001) presentan un contraejemplo basado en una situación donde la comunicación en el aula conlleva un obstáculo al aprendizaje matemático. A pesar de ilustrar un contraejemplo de este tipo, la valoración que hacen de la comunicación y la interacción en el aula no es negativa. Estas autoras plantean la riqueza científica derivada del dicho contraejemplo, el cual les sirve para replantear lo importante de considerar la comunicación como objeto de estudio. Se señala la *Zona de Desarrollo Próximo* (ZDP) vygotskiana como buen argumento para defender las ventajas de las interacciones entre alumnos con diferentes conocimientos y habilidades. Además, se propone que la comunicación sea objeto de enseñanza ya que se interpreta como un requisito esencial para que las discusiones sean productivas. En particular y para el caso de las matemáticas, hay el obstáculo relativo a que la mayoría de los conceptos de los que se habla son abstractos. Al respecto, una posible solución para minimizar la dificultad de la comunicación en la clase de matemáticas es el uso de artefactos simbólicos como software de geometría dinámica.

Retomando la idea de Sfard y Kieran (2001), como en nuestro estudio las interacciones son en gran grupo con la presencia del profesor, cabe tener en cuenta la mediación del profesor durante la discusión con el objetivo de facilitar el aprendizaje de las matemáticas y de la interacción. Anghileri (2006) señala el concepto de andamiaje para referirse a una mediación del profesor flexible, que facilita la actividad de matematización que se les supone a los alumnos a lo largo de una secuencia didáctica. Los procesos de filtraje ("filtering approach", en Sherin, 2002) son de hecho un tipo de andamiaje con tres componentes: a) generación de ideas, b) comparación y evaluación, y c) filtrado. En la generación de ideas se solicitan múltiples explicaciones de los alumnos para facilitar el debate matemático; en la comparación y evaluación se les anima a elaborar su pensamiento y a comparar y evaluar sus ideas con otras sugeridas; mientras que en el filtrado el profesor focaliza la atención en un subconjunto de ideas planteadas. En síntesis, los componentes del proceso de filtraje son recursos del profesor para facilitar el aprendizaje de forma más o menos indirecta.

Junto con la mediación del profesor, en toda situación de clase se da la mediación más amplia del resto de participantes por el hecho de tratarse de un entorno colectivo. Ellis (2011) sugiere que el papel del mediador no tiene por qué estar restringido a la figura del profesor, sino que otros alumnos que trabajan colaborativamente pueden compartir este papel. En otras palabras, durante la interacción en el aula, uno aprende progresivamente a comunicar y comunicarse. Krummheuer (2007, 2012) asocia el interés científico por la mediación social a la caracterización teórica del aprendizaje como forma de participación en un discurso específico ("learning as participation"). Bajo esta interpretación, Planas e Iranzo (2009) destacan la influencia de la interacción social entre participantes de un aula durante la implicación en la tarea matemática. Se argumenta que esta interacción tiene una auténtica función de mediación o influencia de unos participantes sobre otros. Se dice que el alumnado –y más en general todos los participantes de un aula– actúa como un sistema de estímulos externos con incidencia real en el desarrollo de estados internos y comportamientos individuales.

2.1.1 Oportunidades de aprendizaje y aprendizaje matemático

En este trabajo de investigación, el *aprendizaje matemático* es visto como un proceso de autoorganización conceptual y de enculturación (Cobb y Whitenack, 1996). Así, consideramos *oportunidades de aprendizaje* todas las situaciones, que se dan en los procesos de resolución, en las que a los alumnos se les presente la posibilidad de reorganizar sus estructuras conceptuales, es decir, de aumentar sus conexiones o de relacionarlas con el aprendizaje de nuevas formas de proceder en la resolución de los problemas que estén trabajando. A la anterior delimitación sugerida por Cobo (1998), tenemos además que añadir la reorganización de otras estructuras que no sean necesariamente conceptuales, tales como las procedimentales o las más amplias de gestión del conocimiento y de la participación en el entorno de enseñanza y aprendizaje.

Como expone el Informe Vermont (2000), hay una serie de buenas prácticas que pueden favorecer la emergencia de oportunidades de aprendizaje matemático. Algunos ejemplos de buenas prácticas, según este Informe, son el uso de herramientas tecnológicas o manipulativas, la frecuente implicación de los alumnos en investigaciones, experimentaciones y actividades de resolución de problemas, la creación de situaciones de interacción entre estudiantes y con el profesor para desarrollar habilidades de pensamiento matemático más extensas, el planteamiento de actividades abiertas para que los alumnos planteen, exploren y analicen cuestiones matemáticas, la creación de situaciones para que presenten y compartan trabajos con sus compañeros, etc.

En este estudio, además de tener en cuenta las prácticas presentadas en el diseño metodológico de la experiencia didáctica, nos interesa detectar oportunidades de aprendizaje durante las discusiones en gran grupo. Por eso, es importante clarificar cómo se pueden presentar las oportunidades de aprendizaje para su posterior identificación.

Una de las primeras referencias que encontramos del concepto de oportunidades de aprendizaje, es de Yackel, Cobb y Wood (1991), donde se expone que el mero hecho de promover el trabajo colaborativo entre alumnos genera oportunidades de aprendizaje. Estos autores defienden la postura de que, al colaborar, las oportunidades afloran de manera natural porque los estudiantes deben verbalizar sus pensamientos, explicaciones y argumentaciones. Apoyan la idea de que los errores de otros compañeros pueden jugar un papel esencial en el aprendizaje matemático. Así, el hecho de colaborar entre ellos y de tener que llegar a consensos, se ve como una oportunidad de aprendizaje en sí misma.

Según Cobb y Whitenack (1996), las oportunidades de aprendizaje se presentan en los momentos en que un alumno interpreta las acciones de su compañero. Para la conceptualización de oportunidad de aprendizaje, también tenemos en cuenta las situaciones planteadas por Cobo (1998), donde se documentan oportunidades de aprendizaje durante la interacción en parejas. En nuestra investigación, generalizamos estas situaciones a interacciones entre participantes de una discusión en gran grupo. Algunas de estas situaciones podrían ser momentos de desacuerdo sobre alguna cuestión concreta, es decir, situaciones en que alguno de los alumnos se ve obligado a explicar su razonamiento ante los desafíos de otro participante. Hay todavía otras situaciones con indicaciones explícitas por parte de un participante sobre la comprensión de un determinado aspecto del proceso de resolución.

Por último, otras situaciones serían cuando un participante plantea una pregunta y la respuesta de otro participante contiene algún elemento nuevo.

Se considerará aprendizaje matemático cuando se tengan evidencias explícitas de que alguna de las oportunidades de aprendizaje matemático ha sido, efectivamente, aprovechada en relación con los contenidos y procesos que intervienen en la actividad desarrollada. En este sentido nos apoyamos en la opinión de Sfard y Kieran (2001), quienes establecen diferencias entre lo que es la efectividad de la comunicación y la productividad del discurso. Para que la comunicación sea efectiva, las diferentes intervenciones de los interlocutores deben evocar respuestas que estén en la línea de lo que se está hablando. Si ampliamos la visión a discusiones en gran grupo, mientras haya discusión conjunta coherente con preguntas y respuestas que mantengan una misma temática, la comunicación está siendo efectiva.

En cambio, para Sfard y Kieran (2001) el concepto de productividad del discurso tiene rasgos diferenciales que suponen una mayor exigencia en relación con la efectividad de la comunicación. Estas autoras entienden el discurso como las instancias específicas de comunicarse por parte de cada interlocutor y que sea productivo solo se puede detectar si se tienen evidencias del efecto a posteriori. También hay que tener en cuenta, como apunta Kieran (2001), que las interacciones pueden ser productivas para todos los participantes o solo para algunos. Según este criterio, lo importante es encontrar ejemplos de estudiantes que evidencien cambios en sus producciones. Se puede dar el caso de que se produzca aprendizaje sin que se hayan detectado oportunidades explícitas. Como Cobo (1998), consideramos que estos aprendizajes son debidos a la reestructuración cognitiva producida como consecuencia de reflexiones no explícitas durante los procesos de resolución de los problemas o de reflexiones individuales posteriores a los procesos de resolución.

2.2 Conocimiento del alumno

Consideramos que en un entorno de trabajo colaborativo con el uso de tecnología, el conocimiento de los alumnos se debe trabajar en dos direcciones, el conocimiento escolar y el conocimiento instrumental.

2.2.1 Conocimiento escolar

Para centrarnos en la temática propuesta de transformaciones en el plano, hemos tomado como referencia los denominados estándares norteamericanos (NCTM, 2000). Estos estándares aportan directrices específicas sobre cómo trabajar en el ámbito escolar contenidos curriculares, que en nuestro caso son las isometrías. El currículo vigente está basado en los estándares.

El currículo de matemáticas en la educación secundaria obligatoria (Departament d'Educació, 2007) pretende contribuir a la formación integral del alumnado. Las capacidades que potencia el currículo quieren ayudar al alumno a establecer razonamientos sobre situaciones de la vida real y el mundo, organizar el espacio y el plano a partir de establecer relaciones de comparación, equivalencia e identificación o bien modelizar situaciones reales. Siguiendo estas consideraciones, el currículo está organizado por competencias. La competencia matemática es una de las competencias básicas que los alumnos deben conseguir en esta etapa educativa y ello implica trabajar para alcanzar unas determinadas capacidades: pensar matemáticamente, razonar matemáticamente, plantearse y resolver problemas, utilizar técnicas básicas e instrumentos para hacer matemáticas y comunicar a los demás su trabajo.

Para avanzar en la adquisición de la competencia matemática, se puede trabajar a partir de contextos que tengan sentido tanto para el alumnado como para el conocimiento matemático a desarrollar. La resolución de problemas, entendida en un sentido amplio, puede convertirse en el núcleo de la enseñanza proporcionando en las clases oportunidades para que el alumnado aprenda a razonar matemáticamente.

La formación en matemáticas, además de incidir en la competencia matemática, contribuye a lograr otras competencias básicas: el conocimiento e interacción con el mundo físico, el tratamiento de la información y competencia digital, la autonomía e iniciativa personal, aprender a aprender, la comunicación lingüística, la expresión cultural y artística y la competencia social y ciudadana. Estas capacidades no son propias de los contenidos matemáticos pero son importantes bajo la perspectiva del trabajo por competencias.

Los contenidos del área de matemáticas, que integran el uso de las TIC (Tecnologías de la información y de la comunicación) y de los medios tecnológicos, expresan los aspectos fundamentales de los conocimientos y procesos matemáticos que hay que ir desarrollando a medida que se progresa en el aprendizaje. Así, se plantea un estilo de enseñanza como modo de hacer matemáticas en el aula en lugar de enseñar determinados contenidos. Esto incluye una serie de procesos que serán los que vertebrarán todos los contenidos del currículo, en particular el de las transformaciones en el plano. Estos procesos están estrechamente ligados a los estándares para la matemática escolar (NCTM, 2000). A continuación presentamos de manera literal los procesos que se plantean desde los estándares con la descripción de los objetivos que hay que trabajar para alcanzar las competencias planteadas anteriormente.

El primer proceso fundamental que se debe desarrollar es la *resolución de problemas*, aprender a involucrarse en una tarea para la que el método de resolución no se conoce de antemano. El alumno debe recurrir a sus conocimientos para encontrar una solución y a través de este proceso, muchas veces se adquieren nociones matemáticas nuevas. Los programas de enseñanza tratan de capacitar a los estudiantes para construir nuevos conocimientos a través de la resolución de problemas que surjan de las matemáticas y de otros contextos, aplicar y adaptar diversas estrategias para resolver problemas y controlar el proceso de resolución y reflexionar sobre él. Hay que tener en cuenta que los problemas planteados, además de aplicar los conocimientos adquiridos en otros contextos, tienen que hacer posible la construcción de conocimiento matemático.

Otro proceso importante es *el razonamiento y la demostración como formas de desarrollar conocimiento*. Al final de la etapa de educación secundaria los alumnos deberían estar capacitados para reconocer el razonamiento y la demostración como aspectos fundamentales de las matemáticas, para formular e investigar conjeturas matemáticas, para desarrollar y evaluar argumentos matemáticos y demostraciones y para elegir y utilizar varios tipos de razonamiento y métodos de demostración. En las clases en las que se anima a los alumnos a exponer lo que piensan y en las que cada uno contribuye a evaluar el pensamiento de otros, se proporciona un ambiente rico para el aprendizaje del razonamiento matemático.

La comunicación y la representación de la información, es otro proceso fundamental de las matemáticas y de la educación matemática. A través de la comunicación y del hecho de representar la información de diferentes formas, las ideas pueden llegar a ser objeto de reflexión, perfeccionamiento, discusión y rectificación. El proceso de comunicación ayuda también a dar significado y permanencia a las ideas y a hacerlas públicas. Tanto el hecho de expresar a los demás sus ideas como el hecho de escuchar las de sus compañeros, aportan a los alumnos, oportunidades de desarrollar su comprensión. Así, los alumnos necesitan trabajar en tareas matemáticas que constituyan temas útiles de discusión. Por otra parte, las nuevas formas de representar asociadas a la tecnología crean la necesidad de prestar una especial atención a la representación. Se debería capacitar a todos los estudiantes para organizar y consolidar su pensamiento matemático a través de la comunicación, con coherencia y claridad a los compañeros, profesores y otras personas, para analizar y evaluar las estrategias y el pensamiento matemático de los demás y para usar el lenguaje matemático con precisión al expresar ideas matemáticas. También sería necesario que se trabajara para que el alumno creara y utilizara representaciones para organizar, registrar y comunicar ideas matemáticas, seleccionar, aplicar y traducir representaciones matemáticas para resolver problemas, y usar representaciones para modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos.

Para finalizar, el proceso de *conexión entre diferentes contenidos de las matemáticas e incluso de otras materias*, ayuda a que la comprensión de los estudiantes sea más profunda y duradera. La conexión entre conceptos matemáticos debería impregnar las experiencias matemáticas escolares de todos los niveles. Los programas de enseñanza secundaria deberían capacitar a todos los estudiantes para reconocer y usar las conexiones entre ideas matemáticas, comprender cómo las ideas matemáticas se interconectan y construyen unas sobre otras para producir un todo coherente y también deberían capacitarlos para aplicar las matemáticas en contextos extra-matemáticos.

A continuación nos centramos en el contenido de las isometrías, que está incluido en el estándar específico de geometría *Aplicar las transformaciones y utilizar la simetría para analizar situaciones matemáticas*.

De modo general en el nivel de secundaria, los alumnos deberían entender los efectos de las transformaciones y saber describirlos en términos matemáticos. Mediante programas de ordenador de geometría dinámica pueden aprender qué atributos se necesitan para definir una transformación, tales como el principio de conservación de las distancias. Es igualmente importante que, por ejemplo, se empiecen a comprender los efectos de la composición de transformaciones o bien que se establezcan conexiones entre transformaciones y funciones.

Si centramos la atención en los anteriores conceptos y en el nivel educativo que concierne a este estudio, obtenemos algunas consideraciones clave. En un primer nivel, los alumnos pueden investigar e interpretar los objetos geométricos mediante las transformaciones. La utilización de objetos físicos o programas de geometría dinámica pueden servir al alumno como ayuda para obtener las imágenes de las figuras a través de diferentes transformaciones, entender el concepto de figuras congruentes y ver que la igualdad de los lados y de la amplitud de los ángulos es una condición necesaria y suficiente, mientras que la congruencia no depende de la posición y orientación de las figuras.

En un nivel intermedio, se deberían explorar las características de reflexiones, giros y translaciones, encontrando relaciones entre sus elementos. Por ejemplo, en las figuras simétricas esto supondría llegar a la relación de equidistancia de puntos homólogos al eje de simetría. En las rotaciones también se debería ver la equidistancia de vértices correspondientes del centro de giro y la igualdad de los ángulos al unir puntos homólogos con el centro. En relación con estos objetivos, se deberían identificar transformaciones dados pares de figuras correspondientes. Una vez exploradas las características, se deberían describir las transformaciones de una manera precisa y formal entendiendo que para describir un giro, por ejemplo, hay que dar su centro y su ángulo de giro.

En un nivel más elevado, se deberían investigar relaciones entre la composición de transformaciones. Para ello, se tiene que dominar el significado de la transformación como función y el concepto de composición en sí mismo. En los tres niveles de complejidad, es necesario hacer referencia a las posibles conexiones con otros conceptos matemáticos que pueden estar directamente relacionados con otros contenidos específicos, como ocurre con la conexión entre isometrías y homotecias.

2.2.2 Conocimiento instrumental

La mediación es una noción derivada de la psicología sociocultural vygotskiana. Se corresponde con sistemas de signos y acciones que inciden sobre los comportamientos de uno mismo y de los demás y que, por tanto, orientan la actividad humana y el aprendizaje. En concreto, la mediación tecnológica se asienta en la relación entre la herramienta o artefacto físico y el sujeto, pudiendo ocurrir que ciertos usos de la herramienta transformen completamente la comprensión –la cognición– del sujeto. Rabardel (1995) conceptualiza la mediación que produce un entorno de geometría dinámica en el aprendizaje, en particular en la *génesis instrumental* del alumnado.

La noción de génesis instrumental se refiere al paso que va desde considerar el software como artefacto a considerarlo como instrumento, que a su vez supone la conjunción del artefacto y de las habilidades cognitivas necesarias para su uso. Durante la génesis instrumental el alumno construye esquemas mentales, asimilando algunos que ya tenía o creando nuevos esquemas hasta conseguir el objetivo cognitivo. White (2008) apunta que la génesis instrumental hace que el artefacto cobre sentido en el contexto de la actividad y proporciona a los alumnos un significado para dar sentido al instrumento dentro de la actividad.

Dicha génesis tiene dos dimensiones, *instrumentación* e *instrumentalización* (Verillon y Rabardel, 1995), que se definen respectivamente como el proceso mediante el cual el artefacto influye al alumno y el proceso de interiorización del uso de dicho artefacto. En relación a la instrumentación, las potencialidades y debilidades del software pueden tener una influencia en las estrategias de resolución de problemas de los alumnos y en las concepciones emergentes derivadas de su uso. Por otro lado, el proceso de instrumentalización depende de cada alumno y conduce a una internalización de los usos del artefacto. El artefacto permanece invariante aunque pueda ser instrumentalizado de distintas formas por diferentes usuarios.

2.3 Conocimiento del profesor

Según Shulman (1986), la noción del conocimiento matemático que debe tener el profesor para enseñar comprende dos categorías: el *conocimiento del contenido matemático* y el *conocimiento del contenido pedagógico*.

2.3.1 Conocimiento del contenido matemático

Ball y Bass (2009), basándose en las dos categorías de Shulman, refinan el conocimiento del contenido matemático. En su refinamiento, consideran tres subcategorías: el *conocimiento del contenido común*, el *conocimiento matemático específico* y el *conocimiento del horizonte matemático*. Llaman conocimiento del contenido común al conocimiento que está en sintonía con los profesionales de otros ámbitos de las matemáticas. En este trabajo el contenido matemático común involucrado es el de las isometrías. Presentamos de forma breve el contenido común que consideramos relevante de este tema.

Conocimiento del contenido común

Históricamente, las transformaciones han tenido un papel clave en el ámbito de la Geometría ya que han servido para unificar todos los tipos de geometrías surgidas a partir del siglo XVI. Hasta entonces solo se conocía la geometría euclidiana y era considerada la única posible. Más tarde, como consecuencia de la evolución artística, la cuestión de cómo plasmar la realidad del mundo en los cuadros, llevó a pensar en otros tipos de geometría, en las que no se mantuvieran las mismas propiedades que en la geometría euclidiana, como por ejemplo la geometría proyectiva, que no conserva el paralelismo entre rectas.

Otra cuestión fundamental que llevó a la introducción de geometrías no euclidianas fue el pensamiento sobre la forma del universo. Ni siquiera se sabía si era finito o infinito, y eso llevó a considerar formas distintas en las que se crearon diferentes geometrías. Dependiendo de la curvatura de las superficies, se creó la geometría hiperbólica (sobre superficies de curvatura negativa, como el paraboloide hiperbólico) y la geometría elíptica (sobre superficies de curvatura positiva, como la esfera). Junto con estas geometrías, se crearon otras como la descriptiva, con fines de elaboración de planos en arquitectura, o la analítica, con la que se unía el álgebra con la geometría.

Tras la definición de esta variedad de geometrías, en 1872, Félix Klein en su Programa de Erlangen consiguió unificar el concepto de Geometría. Así, todas las geometrías existentes hasta el momento podrían considerarse casos particulares de la geometría general. Su definición de Geometría es *la ciencia que estudia los invariantes de un grupo de transformaciones.*

Con esta definición entendemos que las geometrías quedan definidas por unos elementos y un grupo de transformaciones y que el objetivo de cada geometría es estudiar las propiedades de sus figuras. Estas figuras están construidas por los elementos de la geometría en cuestión, que en la geometría euclidiana serían puntos y rectas. Otra consideración es que hay que considerar la congruencia entre figuras como la posibilidad de aplicar una transformación a una figura para obtener la otra. Para ello se deben cumplir las tres propiedades de congruencia:

Reflexiva: Cada figura es igual a sí misma. $F{\sim}F$. Se necesita que la familia de transformaciones contenga la transformación identidad.

Simétrica: Si la figura F es igual a la figura F′, entonces, la figura F′ debe ser igual que la figura F. $F{\sim}F' \Rightarrow F'{\sim}F$. Se necesita que cada transformación tenga su transformación inversa.

Transitiva: Si la figura F es igual a la figura F′ y la figura F′ es igual a la figura F′′, entonces F es igual a F′′. $F{\sim}F' y\ F'{\sim}F'' \Rightarrow F{\sim}F''$. Se considera que si F y F′ son iguales, existe una transformación f que manda F sobre F′ y una transformación g que hace lo mismo de F′ a F′′, así se necesita una transformación $g \circ f$ que transforme directamente F sobre F′′.

El hecho de considerar estas propiedades de congruencia, en el caso de las transformaciones geométricas, lleva a considerar el conjunto de las transformaciones como un grupo.

Se ha mostrado que el conocimiento de las transformaciones ha sido un concepto clave en la historia de las matemáticas y en concreto de la geometría. A continuación, presentamos como ejemplo las isometrías vistas desde el punto de vista de la geometría euclidiana, que es el que nos ocupa en el presente estudio.

Las isometrías en la geometría euclidiana

Según la caracterización de las geometrías que emplea Klein en el Proyecto de Erlangen, podríamos decir que esta geometría queda determinada por el grupo de isometrías actuando sobre el plano. Primero empezamos definiendo las isometrías en un espacio euclidiano:

Una isometría o un movimiento rígido del espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ es una aplicación $\mathcal{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que conserva las distancias, es decir,

$$\|\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(y)\| = \|x - y\|$$

para cualquier x, y de $\mathbb{R}^n$.

Como consecuencia de esta definición, se tienen las propiedades siguientes:

a) Si $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ son dos isometrías, entonces $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ es una isometría.

b) Si $\mathcal{F}$ es una isometría, $\mathcal{F}^{-1}$ también es una isometría.

Con estas propiedades, vemos efectivamente que las isometrías en $\mathbb{R}^n$ constituyen un grupo. El siguiente teorema presenta los elementos del grupo.

Teorema: Las únicas isometrías de $\mathbb{R}^n$ son:

a) Las transformaciones ortogonales.

b) Las translaciones.

c) Las composiciones de transformaciones ortogonales y translaciones.

Las únicas transformaciones ortogonales de $\mathbb{R}^2$ son los giros con centro en el origen de coordenadas y las simetrías axiales con una recta que pasa por el origen como eje. Cuando se hacen todas las composiciones posibles entre estas transformaciones y las translaciones, las isometrías que pueden aparecer son:

a) Giros con centro un punto cualquiera del plano.
b) Simetrías axiales con eje una recta cualquiera del plano.
c) Translaciones.
d) Simetría con deslizamiento: simetría seguida de una translación de vector paralelo al eje de simetría.

En el presente trabajo, nos centramos en el estudio de las isometrías –translaciones, giros y simetrías– en $\mathbb{R}^2$ en particular, por lo que a continuación hacemos referencia a las isometrías de este espacio.

Giros

Los giros son los movimientos del plano que solo tienen un punto fijo, que es el centro de giro. Si $\mathcal{G}_P^\alpha$ es el giro de centro el punto $P = (p_1, p_2)$ y ángulo α, se tiene $\mathcal{G}_P^\alpha = \mathcal{T}_v \circ g_\alpha$ donde g_α es el giro de centro en el origen y ángulo α y $\mathcal{T}_v$ la translación de vector $\boldsymbol{v} = \mathcal{G}_P^\alpha(\mathbf{0})$, por lo tanto,

$$\mathcal{G}_P^\alpha(\boldsymbol{x}) = g_\alpha(\boldsymbol{x}) + \mathcal{G}_P^\alpha(\mathbf{0})$$

para todo $x \in \mathbb{R}^2$.

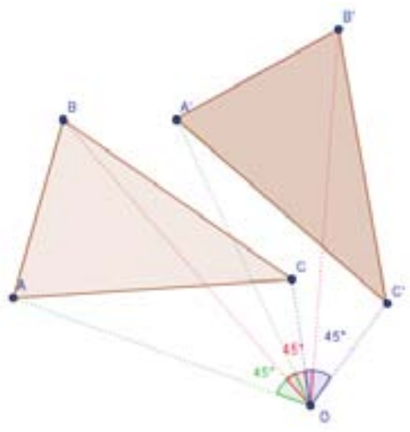


Figura 1. Representación de un giro en el plano

Simetrías axiales

Una simetría axial, o simplemente simetría, es el movimiento del plano que tiene una recta de puntos fijos llamada eje de simetría. También tiene infinitas rectas fijas, que son las infinitas perpendiculares al eje de simetría. Si $\mathcal{S}_r$ es la simetría de eje la recta r, entonces $\mathcal{S}_r = \mathcal{T}_u \circ s_{r_0}$ donde s_{r_0} es la simetría axial de eje la recta r_0, paralela a r y que pasa por el origen de coordenadas, O, y $\mathcal{T}_u$ la translación de vector $\boldsymbol{u} = \mathcal{S}_r(\boldsymbol{0})$. Por lo tanto,

$$\mathcal{S}_r(\boldsymbol{x}) = s_{r_0}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{S}_r(\boldsymbol{0})$$

para todo $x \in \mathbb{R}^2$.

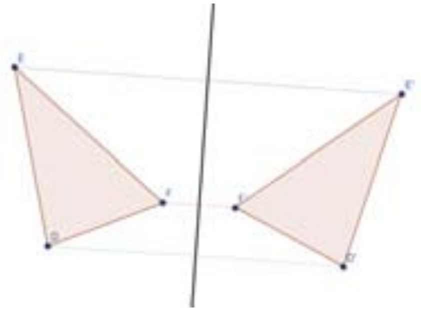


Figura 2. Representación de una simetría axial en el plano

Translaciones

Las translaciones son los movimientos del plano que no tienen ningún punto fijo pero que tienen infinitas rectas fijas, todas las paralelas al vector de translación.

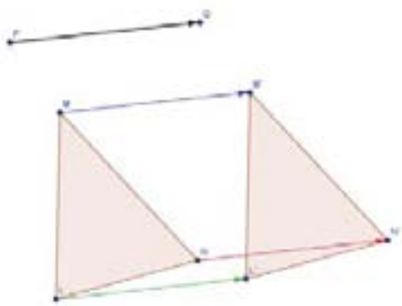


Figura 3. Representación de una translación en el plano

Conocimiento matemático específico

Como complemento al concepto del contenido común, Ball y Bass (2009) definen el conocimiento matemático específico, como un conocimiento especializado en el trabajo de enseñar. Se trata de las habilidades del profesor para hacer diagnosis no solo del pensamiento del alumno cuando éste comete errores, sino también cuando propone soluciones correctas usando métodos no estándares o inesperados.

Otras habilidades del profesor que tiene conocimiento matemático específico son, por ejemplo, seleccionar y diseñar actividades instructivas, identificar y trabajar el objetivo de una lección, escuchar e interpretar las respuestas de los alumnos, analizar el trabajo de los alumnos, enseñar lo que se puede considerar prácticas matemáticas, considerar el error una situación rica para el trabajo matemático, atender al vocabulario matemático y sus posibles ambigüedades, decidir cuándo clarificar, cuándo precisar, cuándo dejar un concepto en el lenguaje del alumno…

Conocimiento del horizonte matemático

Además del conocimiento matemático común y del específico, Ball y Bass (2009) señalan la existencia de otro conocimiento distinto a los anteriores que tiene en cuenta otros aspectos como la sensibilidad y la orientación que hay que dar a las lecciones de matemáticas.

Es un tercer tipo de conocimiento que ayuda a llevar a cabo prácticas de enseñanza como hacer juicios de la importancia de las matemáticas, escuchar matemáticas significativas en lo que los estudiantes dicen, subrayar y remarcar los puntos clave, hacer anticipaciones y conexiones, detectar y evaluar oportunidades matemáticas o detectar distorsiones matemáticas que puedan ser precursores de futuros errores o falsas ideas.

Los autores lo llaman horizonte matemático y lo definen como una consciencia que el profesor debe tener del enorme panorama matemático en el que se sitúa la experiencia matemática que se está llevando a cabo. Esto puede potenciar diversos aspectos de la matemática que no están específicamente contenidos en el currículo pero que pueden ser útiles para el aprendizaje de los alumnos, ya que pueden dar una visión de la significatividad de actividades específicas.

En el caso de las isometrías, como complemento al conocimiento común, el horizonte matemático tiene que ver con la aplicación de los conceptos presentados. Las competencias para resolver problemas de niveles superiores en el tema de las isometrías, también forman parte del horizonte matemático del profesor. Junto con estas competencias avanzadas, se debe ser conocedor de las competencias requeridas en el nivel educativo donde se lleva a cabo el experimento de enseñanza.

La Tabla 1 presenta de forma esquemática los principales procedimientos que forman parte del horizonte matemático para el tema de las isometrías. Acompañamos cada uno de un problema a modo de ejemplificación.

Procedimientos	**Ejemplo de problema**
Conocer las definiciones de isometrías.	*Construir la simetría axial de una figura dada.*
Identificar elementos clave de las isometrías, dadas dos figuras homólogas.	*Encontrar el eje de simetría, el centro de giro o el vector de translación de dos figuras homólogas.*
Estudiar las composiciones de isometrías.	*Estudiar la equivalencia de la composición de dos simetrías axiales.*
Describir composiciones de isometrías dadas.	*Encontrar el producto de tres giros de ángulo 60º que tienen por centro los tres vértices de un triángulo equilátero.*

Aplicar el concepto de composición a la resolución de problemas.	*Construir gráficamente un pentágono dados los puntos medios de sus lados.*
Encontrar invariantes de las isometrías.	*Estudiar los desplazamientos del plano que dejan fijo: a) un cuadrado, b) un rombo, c) un punto y una recta que no pase por él.*
Aplicar el concepto de invariantes para resolver problemas de geometría sintética.	*Encontrar dos puntos P y P', uno en cada una de dos circunferencias dadas tales que $\overrightarrow{PP'} = \vec{v}$, donde $\vec{v}$ es un vector dado.*

Tabla 1. Procedimientos del horizonte matemático de las isometrías

2.3.2 Conocimiento del contenido pedagógico

Jaworski (1992) desarrolló el concepto de tríada de enseñanza como síntesis de tres elementos que había identificado como esenciales en la enseñanza de las matemáticas: proporcionar un entorno de aprendizaje adecuado, ofrecer buenos retos matemáticos y trabajar procesos y estrategias potenciadores del aprendizaje.

La tríada consiste en tres dominios: la *administración del aprendizaje* ("management of learning"), los *retos matemáticos* ("mathematical challenge") y la *sensibilidad hacia los alumnos* ("sensitivity to students").

La administración del aprendizaje incluye la organización de la clase y también los valores y maneras de trabajar. Consiste en cómo el profesor crea y modifica el entorno para favorecer el aprendizaje. Nosotros tomamos este dominio entendido como la capacidad del profesor de llevar a cabo la orquestación de las discusiones en gran grupo.

El segundo dominio presentado por Jaworski son los retos matemáticos. Los profesores plantean retos a sus alumnos mediante problemas matemáticos interesantes que formen parte del currículo del nivel educativo que se esté cursando. De ese modo, en nuestro caso particular, el profesor debe tener un dominio sobre el currículo del tema de isometrías que se ha presentado en el apartado del conocimiento del alumno.

Por último, el tercer dominio de la tríada consiste en saber qué conocen los alumnos y en ser conocedor de sus características particulares y de sus necesidades. Conviene trabajar de un modo que tenga en cuenta estas necesidades y en particular usar los instrumentos adecuados para satisfacer sus necesidades. En este estudio, el dominio de la orquestación instrumental es considerado crucial para atender a las diferentes características de los alumnos.

En este apartado nos centramos en fundamentar los dos tipos de orquestaciones que hemos mencionado como administración del aprendizaje y sensibilidad hacia los alumnos. Antes presentamos qué entendemos por *orquestación*. Nuestra idea de orquestación se refiere a la forma que tiene un profesor de gestionar los elementos singulares de una discusión, en nuestro caso los alumnos, los instrumentos y el mismo profesor, para producir resultados compartidos. Siguiendo la metáfora de la orquesta, entendemos que la producción final tiene que tener sentido en sí misma. Así, todos los elementos de la clase deber interactuar para conseguir una producción común. Como ponen de relieve Trouche y Drijvers (2010), vemos más una banda de jazz que una orquesta sinfónica, ya que el punto de improvisación es esencial en la gestión de una clase.

Una vez dada nuestra visión sobre orquestación, presentamos lo que entendemos por orquestación de discusiones en gran grupo. Nos basamos en las ideas presentadas por Smith y Stein (2011) en torno a las cinco prácticas (1. Anticipación, 2. Monitorización, 3. Selección, 4. Secuenciación y 5. Conexión) que deberían llevarse a cabo para orquestar discusiones matemáticas productivas. El marco de estas autoras consiste en una serie de acciones que ayudan a preparar y gestionar la discusión en gran grupo de un problema.

La primera práctica es la *anticipación*, que consiste en hacer un estudio previo sobre cómo los alumnos pueden abordar el problema planteado. Anticipar las posibles respuestas de los alumnos incluye pensar cómo pueden interpretar el problema y tener un amplio estudio de todas las posibles respuestas, tanto correctas como incorrectas. Además, hay que pensar cómo sus posibles respuestas se relacionan con representaciones, procedimientos y prácticas que el profesor querría que se aprendieran.

La segunda, la *monitorización*, se basa en el seguimiento de los pensamientos matemáticos y las estrategias de resolución de los alumnos mientras trabajan en el problema. La monitorización es más que observar y escuchar a los estudiantes. Durante este tiempo, el profesor debe hacer preguntas para conseguir centrar la atención en los aspectos importantes del problema, para ayudar a clarificar ideas y para cerciorarse de que todos los participantes del grupo están implicados en la resolución.

La siguiente práctica que se plantea es la *selección*. Después de haber monitorizado a los estudiantes y habiendo obtenido las distintas estrategias generadas, el profesor puede seleccionar estudiantes de forma particular para que compartan su trabajo con el resto del grupo, y así tener control sobre la discusión.

La penúltima práctica es la *secuenciación*, donde el profesor debe tomar decisiones sobre cómo secuenciar las presentaciones de estudiantes seleccionados previamente. Eligiendo determinados órdenes de presentación, el profesor puede maximizar las oportunidades de conseguir sus propósitos matemáticos en la discusión.

Finalmente, la práctica de *conexión* se basa en la importancia, por parte del profesor, de ayudar a los alumnos a conectar sus soluciones con las de otros compañeros. Más que mostrar diferentes presentaciones de cómo resolver un problema, el objetivo es tener discusiones matemáticas centradas en el desarrollo sucesivo de potentes ideas matemáticas.

En nuestro estudio utilizamos este modelo de cinco prácticas como soporte para preparar y gestionar las discusiones en gran grupo. En el apartado de metodología se concreta el uso en el presente estudio. Ahora presentamos la orquestación instrumental. Consideramos que el uso de la tecnología en clase y, en particular, en las discusiones en gran grupo es una herramienta potente que puede contribuir a generar oportunidades de aprendizaje. Esta consideración lleva a incorporar como segundo marco la *orquestación instrumental* (Trouche, 2004). Dentro de los aspectos relativos a la intervención del profesor, utilizamos el concepto de orquestación instrumental inicialmente desarrollado por Trouche (2004) y revisado por Drijvers y otros (2010). Trouche conceptualiza la orquestación instrumental como la organización intencional y sistemática del profesor y el uso de los artefactos disponibles en un entorno de enseñanza a fin de orientar la génesis instrumental del alumnado. Las dos fases de Trouche (*configuración didáctica y modo de explotación*) se centran en la planificación de la clase por parte del profesor. Drijvers y sus colegas completan la estructura de la orquestación instrumental propuesta por Trouche con una tercera fase: *implementación didáctica*. La configuración didáctica es el conjunto de objetos (artefactos o instrumentos) orientados a la enseñanza; el modo de explotación es la forma en que el profesor interpreta una configuración para atender a sus intenciones didácticas; mientras que la implementación didáctica se refiere a las decisiones que hacen efectivo el diseño instructivo dado por la configuración y el modo de explotación.

Utilizamos la orquestación instrumental como base para preparar y gestionar una discusión en clase que incluya tecnología, tal como se explica en el capítulo de metodología.

Aplicando la mirada conjunta a los dos marcos presentados, parece posible unir las cinco prácticas de Smith y Stein (2011) y las tres fases de la orquestación instrumental de Trouche y Drijvers (2010) en una sistemática para preparar y gestionar puestas en común de resolución de problemas con tecnología, basada por tanto en un total de ocho fases. Esto supondría una unión directa de los dos marcos sin intervenir en la estructura ni en cómo entendemos o completamos cada fase. Se trataría de una unión basada en la suma de prácticas y fases, fijándonos únicamente en el aspecto temporal.

Todas las fases pueden contribuir a la creación de oportunidades de aprendizaje de los estudiantes, ya que potencian la adquisición de habilidades matemáticas de alta riqueza cognitiva y procedimental. Por otro lado, una mirada conjunta de las fases produce un enriquecimiento global de la preparación y gestión de las discusiones de problemas de matemáticas en el aula. En este estudio, este enriquecimiento se materializa en la construcción de instrumentos metodológicos que ayudan a ampliar y desarrollar cada fase. La presentación de dichos instrumentos se realiza en el capítulo de metodología.

3 Metodología

En este capítulo describimos y justificamos el enfoque metodológico de la investigación y damos cuenta de los principales métodos elaborados para la consecución de los objetivos. A grandes rasgos, nuestra investigación se ubica dentro del paradigma denominado "design research" con métodos cualitativos e interpretativos aplicados al análisis de datos de clase.

En lo que sigue, resumimos, en primer lugar, el contexto del estudio y el experimento de enseñanza (3.1) y, a continuación, explicamos los instrumentos construidos en relación con los objetivos científicos.

En primer lugar, la metodología usada para el diseño de los problemas de la secuencia didáctica (3.2), su planificación e implementación (3.3) y su evaluación (3.4).

3.1 Contexto y experimento de enseñanza

En este apartado se detallan el contexto del estudio y los aspectos que se han tenido en cuenta para completar el diseño de la secuencia didáctica. Para llevar a cabo la secuencia y la correspondiente recogida de datos, se ha elegido un grupo de tercer curso de Enseñanza Secundaria Obligatoria (14 años) de una escuela de Barcelona. El grupo clase estaba formado por 22 alumnos acostumbrados a trabajar a partir de la exploración y el descubrimiento de conceptos matemáticos. En este estudio, la profesora es a su vez la investigadora. Con el propósito de mantener un registro académico lo más neutro posible, a lo largo del manuscrito hacemos referencia al profesor del aula.

Sfard y Kieran (2001) plantean que las ventajas de la interacción no se pueden dar por sentadas, y que hay que tener en cuenta dos factores importantes, la actitud y motivación de los participantes ante la comunicación para aprender matemáticas, y las habilidades que, en este sentido, cada uno pueda tener. Los alumnos seleccionados cumplen ambas características: buena actitud y motivación hacia las matemáticas. Además y puesto que pretendemos que las discusiones en gran grupo sean matemáticamente productivas, es necesario que, como requisito previo, los alumnos estén familiarizados con dinámicas de participación e interacción explícita en la clase de matemáticas. Asimismo, podemos justificar la elección del centro de acuerdo con su línea pedagógica, orientada del mismo modo que la secuencia didáctica que proponemos.

Antes de realizar el experimento en la escuela, todas las familias de los alumnos participantes firmaron una autorización de grabación (Anexo I). Por otra parte, en la presentación del estudio, hemos utilizado nombres ficticios para los alumnos a fin de garantizar su anonimato. Cuando esto es pertinente, hemos mantenido los mismos nombres ficticios que se usaron en la redacción de artículos publicados con anterioridad a este manuscrito.

Dado este contexto de escuela, de aula y de participantes, se ha diseñado un experimento de enseñanza bajo los principios teóricos del constructivismo en general y de la resolución de problemas en particular. Desde esta doble perspectiva, el alumno se ve como alguien con capacidad para descubrir los conceptos matemáticos involucrados en la secuencia didáctica a través de la resolución de problemas y la confrontación de ideas.

Si bien el objetivo principal es la resolución de problemas, en este estudio también centramos nuestra atención en la incorporación de la tecnología en el aula con fines didácticos y la interacción social entre participantes, ya sea entre alumnos o bien entre alumno y profesor. En particular, la tecnología introducida es el *software* de geometría dinámica GeoGebra[1]. Hemos elegido esta aplicación puesto que se trata de un programa específico de matemáticas, el cual está relacionado con el contenido curricular que se pretende trabajar y su idoneidad a priori es objeto de consenso en el área. Es importante diferenciar las situaciones en las cuales la tecnología se integra en el aula *per se*, de aquellas otras en las que se introduce pensando que favorecerá el proceso de enseñanza y aprendizaje de la clase de matemáticas, como pensamos que ocurre con nuestro diseño.

Por otra parte, puesto que la interacción social entre los participantes es otro factor esencial del estudio, en el diseño de las sesiones de clase se han incluido dinámicas de trabajo individual, en parejas y en gran grupo, que nuevamente son parecidas a las que los alumnos han experimentado a lo largo del curso en clase de matemáticas.

En relación con aspectos de carácter ético acerca de la oportunidad de nuestro trabajo en el contexto concreto del grupo elegido, cabe decir que el experimento de enseñanza está integrado en el calendario escolar del grupo clase y se ha diseñado para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de las transformaciones en el plano. No se trata, en ningún caso, de un experimento que solo pretenda favorecer los fines de la investigación, ni se ha utilizado un entorno artificial de laboratorio para crear o bien acelerar las situaciones deseadas.

[1] Disponible en *http://www.geogebra.org*.

3.2 Metodología para el diseño de los problemas de la secuencia didáctica

En el Capítulo 2, 'Marco teórico', se ha justificado la relevancia del tema de las transformaciones en el plano. En particular, el eje vertebrador de los tres problemas de la secuencia elegidos para el estudio viene dado por el concepto geométrico de giro, y por lo tanto, es un concepto presente a lo largo de todo el diseño de la secuencia didáctica. En los tres problemas, ya sea de forma explícita o implícita, también están involucrados los conceptos de simetría y translación.

Además de por su riqueza, el tema se ha elegido por un factor de congruencia con el *software* GeoGebra, ya que las isometrías forman parte del programa y están tratadas de forma intuitiva. En relación con este aspecto, en principio no deberían aparecer problemas específicos con el uso del programa de geometría dinámica. Por el contrario, el de las isometrías es un tema donde la geometría dinámica puede tener un papel crucial en la generación de procesos de visualización de los alumnos y en su aprendizaje.

Si miramos el tema matemático escogido desde el punto de vista de la interacción, podemos decir que por sus características es suficientemente abierto y abstracto como para crear discusión en el grupo y que no se generen situaciones de acuerdo fácilmente. Otro factor que ha influido de alguna forma en la elección del tema de las transformaciones en el plano es, paradójicamente, la escasa literatura que existe al respecto en el ámbito de la investigación en educación matemática.

Tras justificar el tema en el que se ha centrado el experimento, presentamos a continuación los problemas que se han escogido y los criterios que se han seguido.

Tal y como plantean Smith y Stein (2011), dados los objetivos didácticos que quieren lograrse a lo largo de las sesiones de clase, es imprescindible escoger unos problemas suficientemente ricos. Como Jaworski (1992), interpretamos que en el dominio del reto matemático debe darse importancia a la elección de los problemas que se van a llevar a cabo en un experimento de enseñanza que será investigado. Tal y como veremos y como se pondrá en evidencia en el análisis de los datos de las discusiones en gran grupo, los tres problemas son ricos desde el punto de vista de Smith y Stein (2011). Los tres problemas fueron objeto de una prueba piloto con unos resultados que refuerzan la idoneidad de su elección. En el estudio previo se obtuvieron indicios de que dichos problemas ayudan a generar oportunidades de aprendizaje y progreso en los alumnos (Morera, Fortuny y Planas, 2012).

Presentamos los enunciados de los tres problemas (los textos originales se elaboraron en catalán) y la justificación correspondiente:

Problema 1

Dado el barco de color negro, hemos aplicado distintos movimientos obteniendo las figuras B1, B2, B3 y B4.

Pintad de color azul las figuras que sean simetrías del barco negro; de verde las que sean giros, y de rojo las que sean translaciones.

Escribid los argumentos en los cuales os habéis basado para hacer la elección en un cuadro de texto de GeoGebra.

Para los que sean simetrías, construid los ejes de simetría que transportan el barco negro a los barcos *azules. Escribid detalladamente los pasos de la construcción que habéis hecho en un cuadro de texto de GeoGebra.*

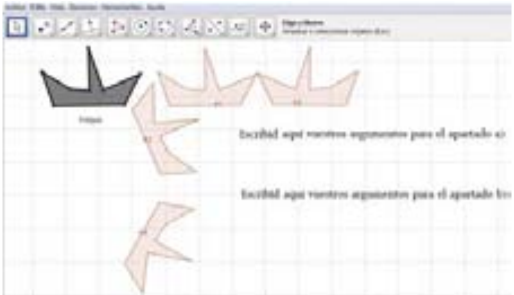


Figura 4. Enunciado del Problema 1 en GeoGebra

Este primer problema tiene como objetivo trabajar la identificación visual de las isometrías y la identificación y construcción de los elementos esenciales de las transformaciones en el plano dadas dos figuras homólogas. En concreto, se centra en la construcción de los ejes de simetría, aunque finalmente se trata de que el gran grupo discuta posibles estrategias para la construcción de los vectores de translación y de los centros de giro.

Otro objetivo importante del problema, que si bien no se pide explícitamente en el enunciado, está implícito debido al uso de la tecnología que se requiere, es trabajar la precisión y la justificación de las identificaciones realizadas de forma visual. Con la introducción de la tecnología se pretende que los alumnos presten más atención a la elección de estas isometrías.

Si miramos este problema desde el punto de vista de las rotaciones, que es el nexo de unión entre los tres problemas, apreciamos que además de saber identificarlas, se crea una necesidad a los alumnos, puesto que cuando quieren comprobar que realmente la figura B4 es un giro del barco negro, no saben dónde colocar el centro de giro para confirmarlo. De este modo se espera que basen sus razonamientos en justificaciones de tipo visual. Por este motivo, el problema incluye otras transformaciones de las cuales los estudiantes sí saben encontrar las características definitorias, es decir, el eje de simetría y el vector de translación. Se espera que esta comparación entre las diferentes transformaciones les lleve a preguntarse de forma natural cómo podrían encontrar el centro de giro dadas dos figuras que, presuntamente, son homólogas por un giro. Eso nos conduce a plantear el segundo problema como continuación especialmente recomendable.

Queremos remarcar esta idea: la elección del orden de los dos problemas se podría entender como un error, en el sentido de que estamos planteando un problema que incluye la identificación de una rotación con una precisión que es imposible conseguir con los conocimientos que tienen los alumnos. Nosotros, en cambio, defendemos la idea de que el hecho de plantear un problema para el cual necesitan ese concepto, hará que durante la resolución del segundo problema el aprendizaje cobre sentido para ellos y se convierta en un reto matemático, y no únicamente en un ejercicio de aplicación de un concepto ya estudiado.

En relación con la gestión del profesor, mantenemos una postura abierta para las situaciones en que los alumnos preguntan sobre determinadas acciones. Defendemos que el profesor sugiera que sean los alumnos quienes piensen estas acciones por ellos mismos para la siguiente sesión. Aun así, trataremos detalladamente en otros apartados de este documento el papel que debe ejercer el profesor. Incluso si, por las características de la discusión, se plantease el problema de tener que encontrar el centro de giro entre las dos figuras homólogas, esto no sería un inconveniente porque el siguiente problema, como veremos a continuación, es suficientemente rico y la generalización del modo de encontrar un centro de giro sin darse cuenta de las especificidades no es el principal reto.

A continuación, presentamos el enunciado del segundo problema de la secuencia diseñada:

Problema 2

Imaginad que nos contratan en una fábrica, para ayudar a resolver un problema.

Figura 5. Animación del giro del enunciado del Problema 2

Tenían una máquina que giraba las piezas de un sitio a otro, como se muestra en la animación anterior, pero la llevaron a arreglar. Ahora que ya funciona perfectamente, no saben dónde la tienen que colocar para que siga transportando las piezas como lo hacía antes.

Ayudad a los técnicos a colocar la máquina de giro en su sitio. Escribid argumentos para convencer a los técnicos de vuestra solución. Tenéis la ventana de GeoGebra para ayudaros a resolver la situación.

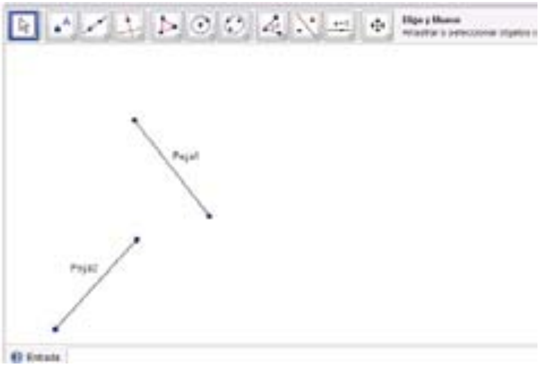


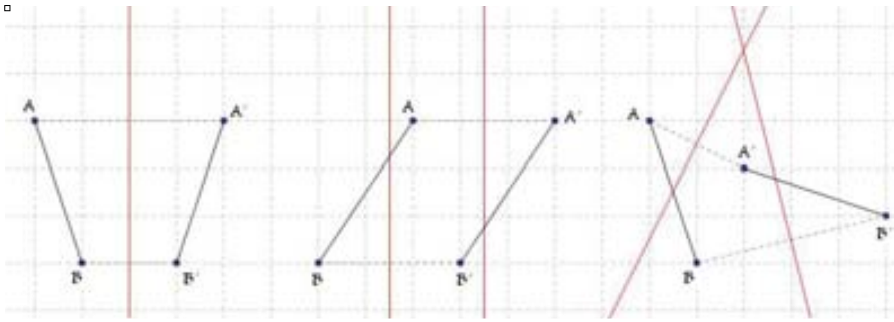
Figura 6. Representación esquemática con GeoGebra de la situación inicial del Problema 2

Después de la necesidad generada a partir del primer problema, se plantea a los alumnos este nuevo problema con la intención de que trabajen la construcción del centro de giro. El problema no se presenta solamente para que encuentren la construcción geométrica del centro, sino que se plantea con la idea de elaborar un estudio extensivo de todas las consideraciones que hay que tener en cuenta durante la resolución del mismo. En Planas y Morera (2012), se comentan varios aspectos sobre la riqueza argumentativa que ofrece este problema.

La identificación visual de la isometría no es un objetivo del problema. El propio enunciado pone de manifiesto que se trata de un giro; y con la ayuda de la imagen dinámica los alumnos pueden hacerse una idea del trazado de la transformación. De todos modos, la disposición de los segmentos de la pantalla de GeoGebra con la que se tiene que construir el centro de giro, hace que el trazado de la rotación no se visualice de forma evidente. Así, una primera competencia que el problema requiere para proseguir con la resolución es la visualización del giro a partir de sus propiedades.

Tras esta identificación, el objetivo del problema es que, prestando atención a las propiedades de los puntos homólogos de figuras que han sido rotadas, los alumnos descubran maneras de construir de forma general mediante figuras (Laborde y Capponi, 1994) ese centro de giro. Los segmentos esquemáticos no están orientados, a diferencia de los tornillos de la imagen dinámica, con lo cual se espera que los alumnos encuentren la doble solución, ya que el enunciado no determina en qué dirección debe hacerse el giro.

Además de la doble solución, es decir, del estudio exhaustivo de las soluciones a la hora de resolver un problema, otro de los objetivos es trabajar el estudio de casos particulares y extremos para que los alumnos aprendan a incorporarlo en sus prácticas matemáticas habituales. Como se ve en la Figura 7, la posición relativa de las mediatrices entre puntos homólogos puede variar. Se espera que los alumnos sean capaces de resolver el problema para cualquiera de los casos, aunque el enunciado esté basado únicamente en el de las mediatrices secantes.



Mediatrices coincidentes *Mediatrices paralelas* *Mediatrices secantes*

Figura 7. Posibles posiciones relativas de las mediatrices

Puede verse también que aunque el segundo problema está totalmente centrado en el estudio del giro, también se trabajan implícitamente las otras isometrías. En el mismo problema se estudian estos casos en posiciones especiales, lo cual permite que los alumnos vean la conexión entre uno y otro problema.

Presentamos el enunciado del tercer problema de la secuencia:

Problema 3

¡Al jefe de la sección de la fábrica le ha gustado mucho vuestro trabajo! Ahora ha tenido la idea de sustituir dos máquinas por una sola para ahorrarse mucho dinero.
Os propone un nuevo reto.
Tiene dos máquinas que mueven las piezas realizando una simetría axial tras otra como muestra la animación:

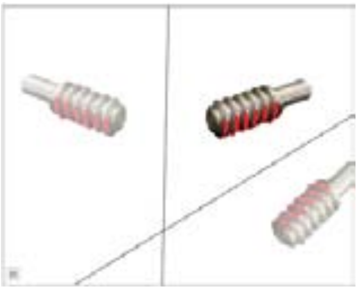


Figura 8. Animación de la composición de simetrías del enunciado del Problema 3

En este caso, ¿podríais realizar el movimiento final solo con una máquina de hacer giros, simetrías o translaciones?
Si vuestra respuesta es no, debéis dar un buen argumento al respecto. Si la respuesta es sí, debéis dar las características de la máquina: de qué tipo debe ser, de qué medida, dónde deberá colocarla…

> *En este caso, abrid un archivo de GeoGebra y cread vosotros mismos la situación para ayudar al jefe a encontrar la solución.*
> *Indicación: Inventaros figuras lo más simples posibles para realizar las pruebas..*

Después de haber trabajado la identificación de giros y sus propiedades con los Problemas 1 y 2, presentamos este tercer problema como ampliación del concepto de giro. Para ello, se incluye el concepto de composición y se aplica a la composición de simetrías axiales, que conecta directamente con el giro, que sigue siendo el eje vertebrador de los tres problemas.

El objetivo principal del problema es estudiar y entender las propiedades del concepto de composición, a partir del trabajo de la competencia visual y la formalización en su construcción. En este caso, para realizar la construcción no es esencial tener en cuenta las propiedades específicas de las simetrías axiales y de las composiciones. Por este motivo, otro objetivo del problema es trabajar la elaboración de argumentaciones en torno a la solución.

Siguiendo en la línea del problema anterior, éste pretende que los alumnos hagan el estudio exhaustivo de las diferentes posiciones relativas de los ejes de simetría. Del mismo modo, también en este caso se trabajan de manera implícita todas las isometrías, dando a la secuencia de tres problemas un sentido completo acerca del tema de las transformaciones en el plano.

Hasta este punto, hemos realizado una justificación de los tres problemas de la secuencia didáctica que se ha diseñado para nuestra investigación. No presentamos esta breve secuencia como una unidad didáctica para trabajar de forma completa las isometrías en clase de matemáticas. De hecho, en la propia aplicación de estos problemas, la secuencia estaba integrada entre unos problemas de introducción y otros de ampliación, como puede verse en la guía didáctica del profesor que se adjunta en los anexos de este trabajo (Anexo II).

La justificación realizada hasta aquí se basa en el potencial conceptual y argumentativo de los problemas. También se ha justificado el orden de los tres problemas dentro de la secuencia. Además, queremos hacer referencia al estilo en el planteamiento de los problemas.

Si consideramos las características tecnológicas, los problemas están presentados en orden creciente desde el punto de vista de la instrumentalización. En el Problema 1, la ventana de GeoGebra está totalmente construida, y los alumnos solo tienen que completar algunos aspectos, como la construcción de ejes de simetría. En el Problema 2, vemos cómo a partir de un enunciado más elaborado, la ventana de GeoGebra solo contiene una representación esquematizada de lo que se pide. Y finalmente, en el Problema 3, se puede observar cómo directamente no se proporciona ninguna ventana de trabajo, ya que tienen que crearla los alumnos, quienes además tienen que crear la estructura del enunciado del problema.

Desde el punto de vista discursivo y argumentativo, los problemas han sido planteados dentro de un contexto realista para que los alumnos tuvieran un motivo por el que tener que argumentar. Sirve de ejemplo el problema en el cual se pide escribir argumentos para convencer a los técnicos; esto puede suponer una motivación adicional para esforzarse en la verbalización de argumentaciones.

3.3 Metodología para la planificación e implementación de la secuencia didáctica

En este apartado hacemos referencia a la metodología utilizada para trabajar hacia la consecución del primer objetivo de la investigación. Recordemos que dicho objetivo consiste en analizar una sistemática de planificación, implementación y evaluación de una secuencia didáctica mediante discusiones en gran grupo para la resolución de problemas de geometría que incluyan el uso de tecnología.

Por un lado, en relación a la parte de planificación, se ha creado la secuencia de problemas que hemos presentado en el apartado anterior. Este diseño se ha basado en algunas de las ideas introducidas por Jaworski (1992), donde se defiende que los retos matemáticos para los alumnos deben ser interesantes desde el punto de vista del currículo que se está considerando. El diseño de la secuencia de problemas también se ha visto influenciado por la atención a la noción de conocimiento matemático del profesor (Shulman, 1986), especialmente la noción de conocimiento matemático específico (Ball y Bass, 2009), que ha permitido diseñar las actividades e identificar los objetivos didácticos para cada una de ellas.

En relación a la segunda parte del objetivo, que consiste en la implementación de la secuencia diseñada, consideramos la implementación de los problemas como algo más que su mera ejecución en clase con los alumnos. Como proponen Smith y Stein (2011), para llevar un problema al aula, hace falta un trabajo previo de planificación para que su ejecución sea lo más efectiva posible. En esta línea, Drijvers y otros (2010) proponen una preparación previa a las intervenciones en clase en lo que concierne a la tecnología. Así, consideramos esencial adoptar un modelo de implementación de actividades de resolución de problemas en el aula de matemáticas. Presentamos a continuación los instrumentos metodológicos principales que se han elaborado.

3.3.1 Instrumento principal para la planificación e implementación de la secuencia didáctica

Basándonos en la mirada conjunta introducida en el marco teórico de las fases de orquestación de discusiones en gran grupo propuestas por Smith y Stein (2011) y las fases de la orquestación instrumental propuestas por Drijvers y otros (2010), presentamos una adaptación metodológica de estos conceptos teóricos. Llamamos *sistemática* a una serie de acciones que el profesor puede aplicar en la planificación e implementación de las discusiones de problemas en gran grupo que involucren el uso de la tecnología. Las fases útiles para ayudar al profesor a que implemente la secuencia de un modo eficiente son ocho y las presentamos en el orden que hemos considerado natural desde el punto de vista cronológico de su realización. Estas fases provienen de la literatura mencionada, pero en este apartado damos ejemplos de cómo las hemos usado en combinación con los conceptos sobre el conocimiento del profesor. Asimismo, ha sido necesario profundizar en algunos de los puntos creando instrumentos metodológicos complementarios para facilitar la realización práctica de algunas de las ideas teóricas.

Anticipación

Consideramos la práctica de anticipación propuesta por Smith y Stein (2011), interesante en sí misma por la contribución, quizá a medio y largo plazo, a la generación de oportunidades de aprendizaje matemático. El hecho de que el profesor tenga presentes la finalidad del problema y sus posibilidades antes de llevarlo al aula, ayuda en la preparación y la gestión de la clase ofreciendo una visión panorámica de la situación. Como veremos, esta visión panorámica podrá ayudar en fases posteriores.

Aunque de manera teórica el concepto de anticipación es potente, no nos parece trivial la forma de llevarlo a cabo. Para contribuir a hacer más sencilla la realización de una buena anticipación de un problema, hemos desarrollado un instrumento metodológico complementario que denominamos *árbol del problema* (Morera, Souto y Arteaga, 2011). Aunque dejamos para más adelante su presentación detallada, a continuación introducimos brevemente el concepto. Con este término nos referimos a una estructura en forma de árbol, las ramas del cual muestran diferentes estrategias que un alumno podría seguir para abordar el problema, ya sean correctas o incorrectas. Para las incorrectas, el árbol incluye posibles preguntas o comentarios del profesor orientadas a redirigir el proceso de resolución del problema por parte del alumno. Para las correctas, el árbol propone varias preguntas orientadas a que el estudiante se plantee nuevos retos o cuestiones de ampliación, como el estudio de casos extremos o la generalización de propiedades.

Como especificamos en la sección de 'Árbol del problema' dentro del apartado (3.3.2) donde profundizamos en el concepto de árbol del problema, no se pretende proporcionar un instrumento algorítmico que represente la instrucción como sucesión de eventos totalmente determinados. Siguiendo con la idea de Trouche y Drijvers (2010) sobre la fase de implementación didáctica como espacio de improvisación atendiendo a la metáfora de la banda de jazz en lugar de la de música clásica, pensamos que tener representado esquemáticamente el trabajo realizado en la fase de anticipación facilita su aplicación dada su complejidad.

Para la realización del árbol de un problema, hay que tener en cuenta todas las posibles respuestas, tanto las correctas como las incorrectas. Para ello, es importante el conocimiento del contenido matemático del profesor (Ball y Bass, 2009), sobre todo el conocimiento específico y el denominado horizonte matemático. Esto tiene que ayudar al profesor a imaginar cómo los alumnos pueden aplicar los diferentes conceptos involucrados en los problemas. También puede ayudar a intuir de algún modo las posibles actuaciones de los alumnos y prever posibles cuestiones y contribuir, así, al andamiaje (Anghileri, 2006) de su actividad de matematización.

Configuración didáctica

Hemos incluido esta fase como parte del instrumento metodológico. Consideramos que decidir previamente qué instrumentos van a entrar en juego en la clase ayuda a su gestión posterior y revierte en la riqueza de la puesta en común. Cuando presenta este concepto teórico, Trouche (2004) lo ve desde un punto de vista descriptivo de una situación a posteriori, para caracterizar las prácticas con tecnología. En el actual estudio, hemos querido ubicarlo en esta posición temprana para reforzar la idea de que con la decisión de los artefactos que van a entrar en juego se está haciendo una elección importante, basada en cómo entiende el profesor la gestión del aprendizaje (Jaworski, 1992).

Tal y como se observará en el análisis, nuestra interpretación de la configuración didáctica no solo se centra en los artefactos o instrumentos tecnológicos, sino también en los que podríamos considerar artefactos tradicionales (i.e. tecnología no digital) como la pizarra o incluso los materiales manipulativos. Esto nos lleva a pensar que aunque la puesta en común que se plantea no incluya tecnología, podría ser una fase útil a añadir en las prácticas propuestas por Smith y Stein (2011), que se refieren a puestas en común sin concretar acerca del uso de tecnología. El hecho de planificar si se va a hacer uso de un material requiere una preparación importante.

Modo de explotación

En el marco teórico se ha argumentado la relevancia del trabajo colaborativo y de la interacción entre los participantes y la tecnología. Por eso hemos realizado la adaptación metodológica del concepto de modo de explotación de Trouche (2004). Pensar de antemano cómo se podrá atender a las intenciones didácticas del profesor con la configuración didáctica dada, puede contribuir a la riqueza de las discusiones en gran grupo con tecnología.

En el eje temporal, esta fase sigue a la realización del árbol del problema. Para llevarla a la práctica, nos ayudamos del árbol del problema previamente diseñado. El hecho de haber realizado el árbol del problema en la fase de anticipación, nos ayuda a plantear el modo de explotación de la discusión en gran grupo, ya que debemos recordar que el objetivo de esta discusión es guiar a todos los alumnos a través de diferentes procesos de filtraje (Sherin, 2002) para que lleguen lo más lejos posible en el itinerario del árbol. Así, reforzamos la operatividad del instrumento creado en el marco de esta investigación, ya que vemos su utilidad no solo en la anticipación, sino también en la fase del diseño del modo de explotación.

Monitorización

Hemos situado esta fase en cuarta posición puesto que con ella se inicia la ejecución del trabajo con alumnos, aunque sin entrar en la ejecución de la discusión en gran grupo. El hecho de que los alumnos tengan que trabajar el problema sobre el que más adelante se va a hacer la puesta en común, no está formalmente estipulado. Sin embargo, si atendemos a las fases de Smith y Stein (2011), en las que plantean una monitorización de los alumnos previa a la discusión en gran grupo, se deduce que lo consideran una práctica común. Estamos de acuerdo con esta línea de trabajo ya que en el proceso de aprendizaje del alumno a través de la resolución de problemas, consideramos que tiene que ser el alumno quien se enfrente al problema y construya conocimiento matemático.

De acuerdo con los aspectos del marco teórico sobre trabajo colaborativo, conviene realizar una buena monitorización del trabajo previo de los alumnos, para fomentar la interacción entre los estudiantes y para que las indicaciones del profesor no limiten las producciones originales que podrían hacer los alumnos, sino que ayuden a potenciarlas y completarlas. Para ello el profesor necesita un guión claro de los comentarios y ayudas que pueden tener sentido en el contexto del trabajo por parejas. Hay que tener en cuenta que el profesor normalmente está pendiente de 10 o 12 parejas aproximadamente y que cada una avanza a su ritmo. Por ello, no es sencillo situarse en cada ocasión y dar la información o la ayuda necesaria.

De nuevo, nos remitimos al árbol del problema. Aunque en primera instancia ha sido creado como instrumento metodológico para simplificar y organizar la anticipación, tiene implicaciones en otras fases de la sistemática. Es un instrumento que permite tener un esquema visual de la globalidad de posibles enfoques de la solución del problema, o de posibles grados de profundización. El profesor puede situar con agilidad el punto del árbol en el que se encuentra cada pareja y disponer de propuestas de mensajes a utilizar para acompañar a los alumnos en la elección de una buena estrategia de resolución o en la profundización de aspectos no considerados anteriormente.

Selección

En este apartado, se concreta cómo se ha llevado a cabo la selección de los alumnos en cada uno de los problemas de la secuencia. Dependiendo del problema y de las estrategias trabajadas por los alumnos durante la fase de monitorización, puede ser más interesante seleccionar a alumnos que no hayan profundizado tanto en la solución, para que las intervenciones sucesivas consistan en completar la solución presentada. En cambio, en otras ocasiones, puede interesar seleccionar a alumnos que hayan trabajado de forma correcta la solución del problema, para quienes las intervenciones sucesivas se dirijan a profundizar en otros aspectos o en la comparación de heurísticas.

Para seleccionar a los alumnos que van a intervenir en el principio de la discusión en gran grupo, se tiene que ser consciente del trabajo realizado previamente por parejas. Durante la monitorización, el profesor puede tener una idea del proceso que han seguido las parejas, pero muchas veces es difícil estar pendiente de todas ellas con el mismo grado de atención, o simplemente se puede seguir el proceso hasta el final. Así, se recomienda que el profesor tenga acceso al trabajo realizado por los alumnos para revisarlo antes de realizar la discusión en gran grupo. Esto no solo servirá para realizar la selección sino también para fases posteriores como la de secuenciación.

Las tres fases restantes son de una naturaleza distinta a las anteriores, ya que se llevan a cabo durante la sesión de discusión en gran grupo. De acuerdo con la metáfora de la orquestación instrumental expuesta por Drijvers y otros (2010), las siguientes tres fases tienen el punto de improvisación que ofrece una banda de jazz en lugar de una orquesta sinfónica. Al respecto, nuestra posición es clara: cuanto más se haya preparado previamente la sesión mediante las cinco primeras fases, más control se tendrá sobre el desarrollo de la sesión de discusión en gran grupo con tecnología.

Implementación didáctica

Esta fase de implementación didáctica que originariamente se refiere a aspectos relacionados con la tecnología, se puede extender a la gestión de la clase en general, con lo cual queda relacionada con las fases de secuenciación y conexión que más adelante detallamos. Evidentemente, difiere de la planificación que se había hecho en la fase del modo de explotación. De todas formas, los tipos de orquestación instrumental presentados por Drijvers y sus colegas (2010) (*demostración técnica, explicar la pantalla, conectar pantalla pizarra, discutir la pantalla, descubrir y mostrar* y *trabajo del sherpa*) son útiles a la hora de organizar y analizar lo sucedido durante las discusiones en gran grupo.

A priori, no se puede hacer una planificación exacta de esta fase por sus características intrínsecas, aunque sí puede hacerse una planificación con los aspectos más importantes a tener en cuenta, aunque a menudo no se traten como se había pensado. En cambio, con una visión a posteriori sí que podríamos querer mostrar cuál ha sido la implementación didáctica llevada a cabo en cada caso. Para ello, nos ayudamos de la herramienta de análisis creada para la posterior detección de situaciones ricas generadoras de oportunidades de aprendizaje matemático.

Esta herramienta, que se detalla en el apartado 'Instrumento principal para la planificación e implementación de la secuencia didáctica' (3.3.1), contiene un primer elemento de organización de los sucesos de la puesta en común según los tipos de orquestación instrumental y los estadios del problema que se tratan en cada momento. En el Capítulo 5, 'Análisis de las oportunidades de aprendizaje' se puede ver la operatividad de este instrumento.

Secuenciación

Este punto también requiere una ampliación. La práctica tal y como la proponen Smith y Stein (2011) es demasiado general y no concreta herramientas para ayudar al profesor a gestionar la complejidad de una discusión en gran grupo, con lo cual se incrementa el nivel de improvisación. Proponemos unos estadios que el profesor puede tener en cuenta a la hora de secuenciar las puestas en común de problemas. Estos estadios surgen al crear el instrumento de análisis, pero se pueden utilizar como herramienta para la secuenciación. Nuestra aportación es la creación de este instrumento, que es un guión genérico sobre cómo discutir problemas en gran grupo, que llamamos *Estadios de la discusión en gran grupo de un problema*.

En esta fase juega un papel importante la improvisación, ya que se lleva a cabo durante la sesión de clase en la que intervienen muchos participantes. Quizás diferirá del planteamiento propuesto en el modo de explotación o de las previsiones hechas de la implementación didáctica, pero a posteriori podremos esquematizar la situación, gracias a la sistematización de los estadios de la discusión.

Conexión

Esta última fase es un estadio particular dentro de la secuenciación de la puesta en común de un problema, tanto si nos referimos a la conexión entre diferentes estrategias planteadas por los alumnos, como si nos referimos a conexiones con otros aspectos matemáticos e incluso de otras materias. Se ha incluido como uno de los estadios de las discusiones en gran grupo.

En realidad, las tres últimas fases las vemos como un conjunto que será el reflejo de la preparación previa de la sesión de discusión en gran grupo. Las cinco primeras fases de la sistemática formarían parte de la planificación, y las tres últimas, de la implementación.

Dejamos para el siguiente apartado la explicación detallada en relación a la evaluación de la secuencia didáctica.

3.3.2 Instrumentos complementarios para la planificación e implementación de la secuencia didáctica

Para la consecución de algunas de las fases de la sistemática, se han creado instrumentos didácticos complementarios al instrumento principal. Estos son el 'Árbol del problema' y los 'Estadios de la discusión'.

Árbol del problema

Este instrumento se creó para llevar a cabo de una forma sistemática la anticipación de los problemas planteados. Ya se ha definido brevemente: consiste en una estructura en forma de árbol, las ramas del cual muestran diferentes estrategias que un alumno podría seguir para abordar el problema, ya sean correctas o incorrectas. Para las incorrectas, el árbol incluye posibles preguntas o comentarios del profesor orientadas a redirigir el proceso de resolución del problema del alumno. Para las correctas, el árbol propone varias preguntas al estudiante orientadas a que plantee nuevos retos o cuestiones de ampliación, como el estudio de casos extremos o la generalización de propiedades.

Antes de presentar como ejemplo uno de los árboles creados para este trabajo, queremos remarcar la idea de que el árbol no es un camino dirigido de tipo algorítmico con el cual el profesor no tiene libertad de acción. De hecho, la mejor anticipación de un problema es crear su árbol. En una situación en la que encontremos el árbol diseñado por otra persona, este instrumento no tendrá la misma capacidad de impacto y profundización. Además, el árbol de un problema es un sistema dinámico que debe actualizarse tras cada intervención en clase. Es decir, la práctica con los alumnos debe aportar nuevas ramas, comentarios, preguntas y cuestiones de ampliación. Cabe preguntarse sobre su posible estabilización. No tenemos respuesta para ello, aunque sí consideramos necesarias muchas iteraciones en clase y revisiones conjuntas con otros profesores.

Es en este sentido que se observa que la propia sistemática también puede contribuir a la evaluación de la secuencia didáctica, porque el hecho de tener en cuenta una revisión constante, lleva implícita la noción de evaluación.

El instrumento fue creado en un principio para uso específico en esta tesis. Sin embargo, pronto se convirtió en un instrumento de uso generalizado que, como puede observarse en Morera, Souto y Arteaga (2011), puede aplicarse a diferentes tipos de problemas de distintos niveles y de varios contenidos matemáticos, no solo de geometría.

Mostramos un ejemplo de árbol que corresponde al del segundo problema presentado en este trabajo (Figura 9). Lo presentamos de forma detallada a modo de ejemplo, pero hay que tener en cuenta que se han realizado árboles para cada uno de los problemas.

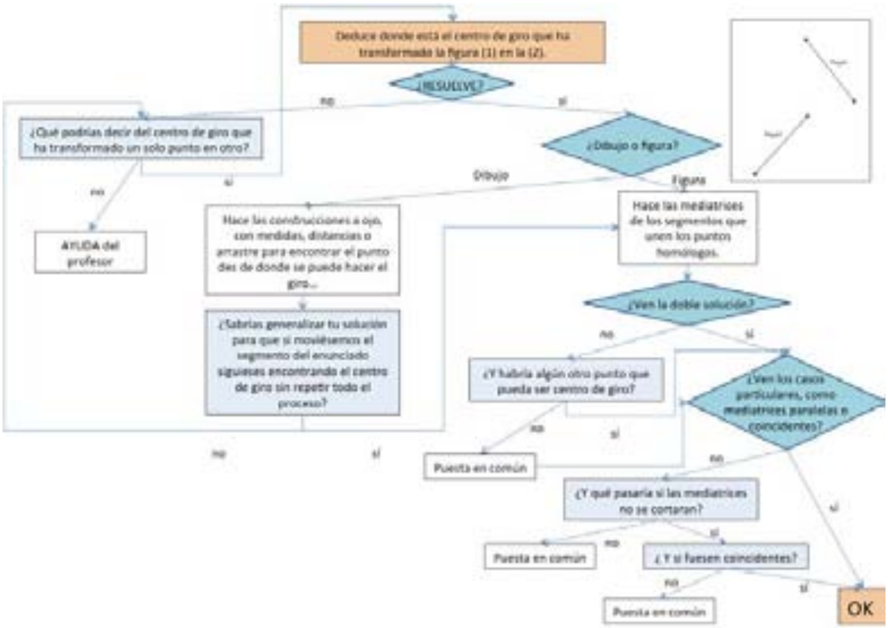
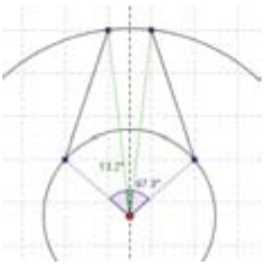


Figura 9. Árbol del Problema 2

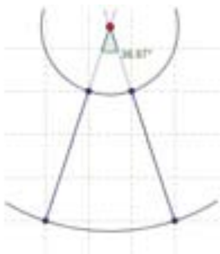
Tenemos en cuenta que los alumnos pueden bloquearse inicialmente, así que proponemos pensar en una simplificación del problema reduciéndolo a tratar de girar un único punto. Dentro de la ruta en la que sí se encuentra el centro de giro, consideramos las diferentes tipologías de resolución de problemas con *software* de geometría dinámica. Así, se impulsa a los estudiantes que lo han resuelto mediante dibujos a realizar construcciones generales en forma de figuras, con la intención de que consideren casos particulares en los que la conjetura inicial puede fallar. Al respecto, conviene clarificar que consideramos dibujo a toda representación gráfica en la que no hay dependencia entre los objetos, mientras que en la figura sí. De este modo, cuando los objetos independientes de la figura se manipulan, los objetos dependientes permanecen relacionados mediante las propiedades de la construcción.

Primero, animamos los alumnos a que se fijen en la doble solución del problema, puesto que los segmentos iniciales no están orientados en el enunciado y, seguidamente, a plantearse si la conjetura de que el centro de giro está donde se cortan las mediatrices funciona para todas las posiciones de los segmentos. Al plantear la posibilidad de que no se encuentre un punto de corte entre las mediatrices, favorecemos el paso a la generalización. Hay que empezar preguntando qué posición deben tener los segmentos homólogos para que las mediatrices estén en las diferentes posiciones relativas posibles, para luego preguntar cómo aplicar la conjetura en cada uno de los casos.

Después de la experiencia de clase, hemos observado que uno de los puntos críticos del problema es el de tener que añadir a la conjetura la condición de que los ángulos de giro deben ser iguales. Esto se descubre al plantear qué sucede si las mediatrices son coincidentes. Normalmente, los alumnos empiezan diciendo que se podrá poner el centro de giro en cualquier punto de las mediatrices coincidentes, dando así infinitas soluciones, y finalmente amplían la conjetura incorporando la condición de la igualdad de los ángulos de giro entre parejas de puntos homólogos (Figura 10).



Conjetura inicial de los alumnos, que suponen que se puede poner el centro de giro en cualquier punto de los que se "cortan" las mediatrices.



Incorporación a la conjetura la necesidad de la igualdad de ángulos de giro, llegando a la prolongación de los segmentos.

Figura 10. Consideración de mediatrices coincidentes

Estadios de la discusión en gran grupo de un problema

Aunque hay investigaciones centradas en el estudio de las discusiones en gran grupo que aportan sus potencialidades y debilidades, no hemos encontrado ningún instrumento de análisis que se adaptara a nuestras necesidades. Por este motivo, primero hemos creado un instrumento que caracterizase las puestas en común. El instrumento de análisis que planteamos está detallado en el informe realizado por Morera y Fortuny (2012) y será presentado en este documento en el apartado 3.4.2 'Detector de oportunidades de aprendizaje en una discusión en gran grupo'.

Para completar el estudio de este instrumento de análisis, hemos generalizado las fases de puesta en común, a las cuales nos referimos como *pasos del problema*. En Morera y Fortuny (2012), este concepto se ha presentado como una sucesión del proceso de realización de la discusión en gran grupo (los pasos seguidos) que se está analizando. Si se analiza otra discusión en gran grupo, tal y como está planteado, se deberían crear de nuevo los títulos de la variable *pasos del problema*. En revisiones posteriores en colaboración con los directores de tesis y el tutor de la estancia predoctoral (Profesor P. Drijvers), pensamos que sería adecuado intentar generalizar estos pasos del problema, para presentar un instrumento válido para distintas puestas en común, además de una herramienta potente para profesores que lleven a la práctica discusiones en gran grupo. Así, los *pasos del problema* se han convertido en los *estadios de la discusión en gran grupo de un problema*.

Tras analizar algunas discusiones en gran grupo, hemos observado algunas pautas de actuación potencialmente interesantes para toda puesta en común de un problema. Presentamos estos estadios en este apartado, dentro de la metodología para la implementación de la secuencia didáctica. Al haber generalizado el concepto de estadios, esta parte concreta del instrumento de análisis, junto con tener su función dentro de la herramienta de análisis, puede usarse de forma sistemática en la secuenciación de la discusión de un problema.

Presentamos cada uno de los estadios y los ejemplificamos con situaciones de la implementación de la secuencia didáctica. Hemos escogido ejemplos del Problema 1. Sin perder generalidad, se podría presentar cualquier otro. Estos estadios son:

a) Situación del problema.

b) Presentación de una solución (argumentada).

c) Estudio de diferentes estrategias para resolver o argumentar.

d) Estudio de casos particulares o extremos.

e) Contraste entre diferentes soluciones.

f) Conexiones con otras situaciones.

g) Generalización y conceptualización.

h) Reflexión sobre el progreso matemático.

***a)* Situación del problema.** Una presentación o recordatorio del enunciado o los objetivos del problema antes de empezar la discusión puede ser importante para situar a los alumnos en la actividad que realizarán. Un ejemplo de la situación del Problema 1 es el siguiente:

> *Prof.: A veure, mireu aquest. Teniu el vaixell aquest de color negre, vale? I hem d'aconseguir els altres amb les transformacions que coneixem.*
> *[Al mismo tiempo, el profesor proyecta el enunciado gráfico en el proyector (*Figura 11*).]*

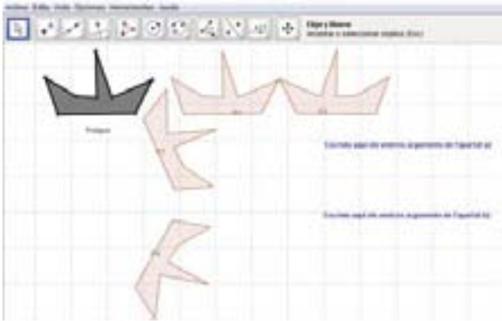


Figura 11. Imagen proyectada por el profesor

Vemos cómo el profesor recuerda el objetivo del problema a la vez que abre el documento de GeoGebra para empezar la discusión.

***b)* Presentación de una solución (en ocasiones argumentada).** Dependiendo de las variables que se hayan presentado, el profesor puede querer presentar una solución correcta, una correcta pero incompleta o incluso una incorrecta. Por otro lado, si es un problema con más de una solución, conviene empezar por una de ellas, que sería la selección inicial en Smith y Stein (2011), y luego seguir secuenciando otras. También dependiendo de la situación, se puede planificar que sea algún alumno o grupo de alumnos quienes la presenten, o que incluso sea el profesor, quien presente soluciones reales o ficticias de alumnos. En algunas ocasiones, la solución correcta del problema no se dará hasta el final de la discusión. Un ejemplo de la presentación de la solución del primer apartado del Problema 1 es el siguiente:

> *Prof.: A veure, Víctor, el... el B1, per exemple, comencem pel principi, de quin color l'heu pintat i què és?*
> *Víctor: De... d'una translació, però no sé de quin color era.*
> *Prof.: Bueno, és igual.*
> *Sara: Blau.*
> *Alumnes (diversos alhora): Vermell.*

Prof.: Vale, la translació. Tothom veu clar que això és una translació?
Alumnes (diversos alhora): Sí.

Un alumno dice que la solución del barco 1 es pintarlo de rojo porque se trata de una traslación, pero como no da razones, se pasan a presentar distintas estrategias para argumentar la solución que todo el grupo parece aceptar como correcta.

***c)* Estudio de las diferentes estrategias para resolver o argumentar.** En este punto destaca la importancia de prestar atención a las diferentes estrategias de resolución que pueden haber pensado los alumnos; para aquellas que no se hayan pensado, el profesor puede intervenir y plantearlas. Un ejemplo de estrategias de los alumnos en el primer apartado del Problema 1 es el siguiente:

Presentación de la primera estrategia para comprobar que es una traslación:

Prof.: I per comprovar això què hauríem de fer? Adrià.
Adrià: Un vector. De... de dos punts, o sigui d'aquest punt, per exemple..., amb el mateix punt de l'altra figura.
Prof.: Vale. A aquest vector què li passa? Només per haver fet això ja sé que és una translació?
Alumnes (diversos alhora): No.

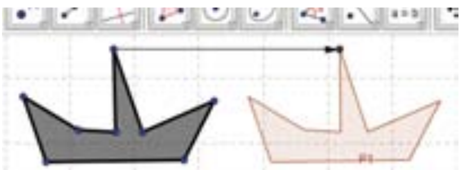


Figura 12. Representación gráfica de la primera estrategia

Sara: Podríem moure-la (transformar-la amb el vector) i veure si coincideix?

Prof.: També. Puc fer, ara ho puc fer: translació d'aquesta figura respecte aquest vector a veure si cau a sobre. L'únic que aquí hi ha un problema: que si t'he mogut la figura, si jo t'ho he fet com amb trampa, expressament, i l'he mogut tan poc que les ratlles aquestes són tan gruixudes que no ho vegis, o sigui, ara si et posessis a fer zoom, per exemple, sí que veuries que realment encaixa.

Presentación de la segunda estrategia para comprobar que es una traslación:

Inés: O, sinó, si fem un vector, ehm..., igual, des d'un altre punt fins al seu punt homòleg. I després fem servir l'eina que els compara tots dos.
Prof.: Li dic "compara'm aquest vector amb aquest altre vector" i em diu: "el vector k i el z són iguals". Vale, ja ho tinc comprovat. Però... per tant, ja està, ja és una translació això? (...) Ei, però un moment, seguim amb aquesta pregunta: ja puc afirmar, havent comparat aquests dos vectors, que això és una translació, aquest vaixell? José Manuel.

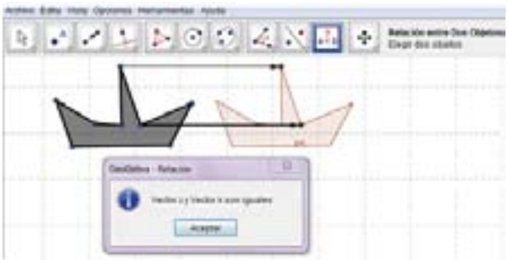


Figura 13. Representación gráfica de la segunda estrategia

Se han presentado dos estrategias. La primera consiste en construir un vector entre un par de puntos homólogos y aplicar la traslación al barco inicial para ver si coincide con su imagen. La segunda consiste en construir dos vectores entre dos pares de puntos homólogos y comprobar mediante la herramienta de comparación que efectivamente son iguales. Sin embargo, aún no se ha llegado a la argumentación completa de la solución aceptada. Sigue el estudio de casos particulares.

***d)* Estudio de casos particulares o extremos.** Si el problema tiene casos particulares o extremos, conviene hacer un estudio de ellos, pero cuando no sea así, es importante que los estudiantes sean conscientes de ello. Un ejemplo de caso particular del primer apartado del Problema 1 es el siguiente:

> *José Manuel: No, perquè si per exemple un qualsevol dels dos punts estigués una miqueta diferent, la figura no seria la mateixa.*
> *Anna: Com passa amb el B3...*
> *Prof.: Si aquest punt, per exemple, l'hagués mogut aquí expressament, vale? Aquí no estaríeu donant-vos compte, m'estaríeu dient que sí que és una translació.*

Se está pensando qué posibles casos particulares (previamente preparados por el profesor) no funcionarían siguiendo las estrategias de comprobación que se han planteado.

***e)* Contraste entre diferentes soluciones.** En este punto nos referimos a las diferentes soluciones que puede tener el mismo problema por el hecho de tener grados de libertad. Esto no debe confundirse con buscar la misma solución mediante diferentes estrategias de resolución, ya que esto tendría que tratarse con el estudio de las diferentes estrategias para resolver o argumentar.

Para ejemplificar este estadio, vamos a presentar una situación ocurrida en la discusión del Problema 2, ya que el primero tiene solución única y no admite dicho contraste. Un ejemplo de contraste de diferentes soluciones en el Problema 2 como se muestra a continuación.

El problema pide encontrar el centro de giro entre dos segmentos de igual longitud. En el enunciado, los segmentos no están orientados de modo que hay dos posibles soluciones, la que hace coincidir los extremos en un orden y la que los hace coincidir de forma invertida como muestra la Figura 14.

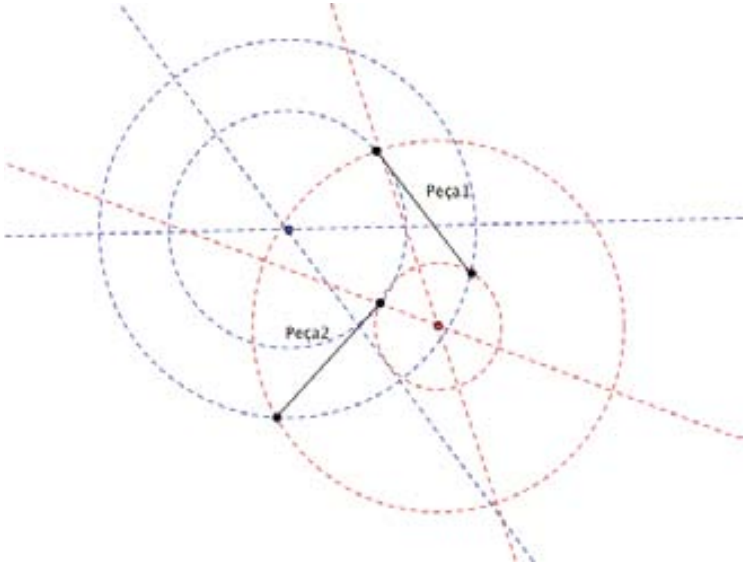


Figura 14. Representación de las dos posibles soluciones

***f)* Conexiones con otras situaciones.** Volviendo a Smith y Stein (2011), las conexiones durante la puesta en común son importantes por la relación que generan entre las distintas soluciones o las diferentes estrategias. Además de estar de acuerdo con esta idea, añadimos otro sentido. Consideramos que, debido a la naturaleza del problema, no siempre se podrán establecer conexiones de este tipo. En cambio pueden ser también necesarias las conexiones con otros conceptos matemáticos que ya se han estudiado, o que aún se tienen que introducir. Son igualmente interesantes las posibles conexiones con otras áreas del conocimiento o con contextos cercanos a los alumnos. Un ejemplo de conexión durante el primer apartado del Problema 1 es el siguiente:

> *Prof.: Però, si estem aquí que vull comparar tots els vectors, fa falta que els compari tots amb tots amb l'eina de l'interrogant vermell?*

Clara: O sigui, si n'agafem un i veiem que va, agafem per exemple el de dalt de tot i el comparem amb tots. I aleshores, com que ja ens dóna que tots són iguals, no cal fer, per exemple, el segon amb l'últim.
Prof.: La Clara diu "per comparar-los tots, per veure que tots són iguals", diu, "agafo el primer", bé, n'agafo un, que ella diu el primer, i el compara amb tots. El primer amb tots. Amb això ja està afirmant que tots entre ells són iguals?
Alumnes (diversos alhora): Sí.
Prof.: O fa falta fer el primer amb el segon, el segon amb el tercer, el primer amb el tercer, tots amb tots?
Alumnes (diversos alhora): No.
Prof.: Només fent-ne un amb tots ja val, eh! Que si no, és ineficient!

Aunque no se especifica el nombre de la propiedad que se está tratando, se aplica la propiedad transitiva para hacer el razonamiento más eficiente y evitar la repetición de todas las comparaciones entre pares de vectores. De este modo, se establece una conexión directa con la noción de la propiedad transitiva.

g) **Generalización y conceptualización.** La discusión en gran grupo puede generar un ambiente idóneo para la posible generalización del resultado encontrado, que en muchas ocasiones puede llevar a un nuevo problema. Un ejemplo de generalización y conceptualización durante el primer apartado del Problema 1 es el siguiente:

Prof.: Per tant, per poder afirmar que realment és una translació, què hauríeu de fer?
Inés: Mirar tots els vectors i comparar-los.
Prof.: Tots els vectors. Hauríem de fer-los tots.

Se generaliza la forma de comprobar que realmente la solución dada al inicio es correcta y se genera un razonamiento para demostrar si dadas dos figuras cualesquiera, una es translación de la otra.

***h)* Reflexión sobre el progreso matemático.** Es importante hacer un balance o una clausura de la puesta en común que sirva para que los alumnos reflexionen sobre todos los aspectos matemáticos trabajados. Tanto los conceptos como los procesos aparecidos en la puesta en común, son aspectos latentes que pueden pasar de ser oportunidades de aprendizaje a evidencias de aprendizaje de los estudiantes después de una reflexión y una maduración posterior a la puesta en común. Enfocamos este punto de la sesión bajo una dinámica abierta, en la que imaginamos tanto verbalizaciones de los aspectos matemáticos al finalizar la puesta en común como reflexiones y redacciones de sus aprendizajes a posteriori, como trabajo personal en casa.

En el diseño instructivo de este trabajo, se consideró que la reflexión fuese posterior a la discusión en gran grupo, la hicieron de manera individual en casa y entregaron sus conclusiones por escrito. En los tres ejemplos siguientes se observa cómo cada alumno pone por escrito lo aprendido durante la puesta en común:

Ejemplo 1 (José Manuel):

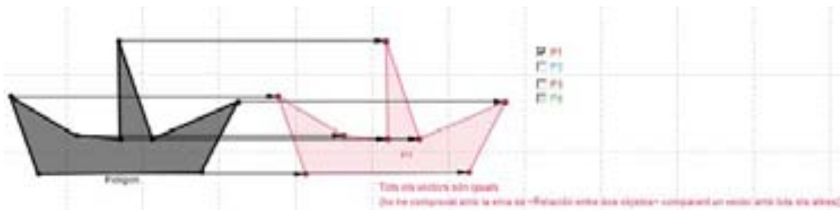


Figura 15. Imagen de la corrección de José Manuel

José Manuel: [Pinta de rojo el barco para decir que es una traslación] Todos los vectores son iguales (lo he comprobado con la herramienta

<Relación entre dos objetos> comparando un vector con todos los otros).

Este alumno demuestra haber incorporado la generalización que se ha trabajado durante la discusión en gran grupo.

Ejemplo 2 (Inés):

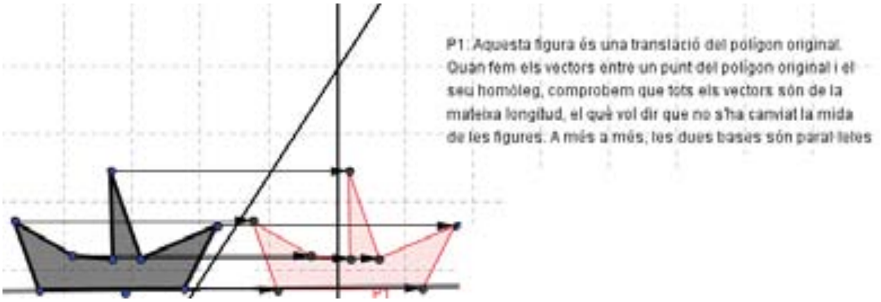


Figura 16. Imagen de la corrección de Inés

Inés: [Pinta de rojo el barco para decir que es una traslación] Esta figura es una traslación del polígono original. Cuando hacemos los vectores entre un punto del polígono original y su homólogo, comprobamos que todos los vectores son de la misma longitud, lo que quiere decir que no ha cambiado la medida de las figuras. Además, las dos bases son paralelas.

Esta alumna no entiende bien qué quiere decir que dos vectores sean iguales. Solo considera importante la longitud, aunque incorpora la generalización que se ha tratado en la discusión en gran grupo.

Ejemplo 3 (Víctor):

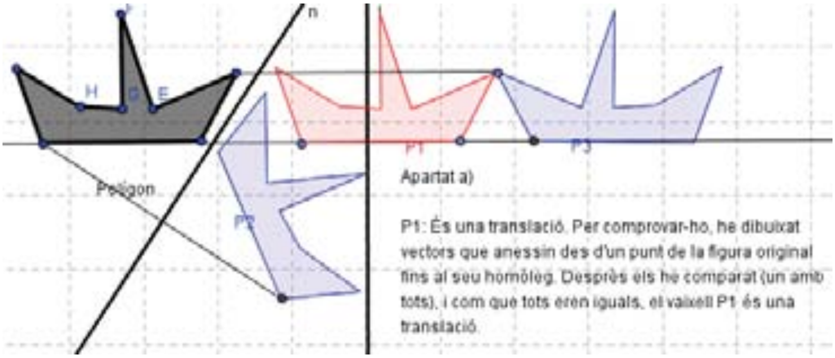


Figura 17. Imagen de la corrección de Víctor

> *Víctor: [Pinta de rojo el barco para decir que es una traslación] Es una traslación. Para comprobar-lo, he dibujado vectores que fuesen desde un punto de la figura original hasta su homólogo. Después los he comparado (uno con todos) y como todos eran iguales, el barco B1 es una traslación.*

Este alumno explica de forma teórica lo que debería hacer para comprobar la solución, pero no hace la representación gráfica; aunque puede saber lo que debería hacer, no lo hace.

Antes de dar paso al siguiente apartado, recordemos que todos estos estadios han emergido del análisis de los datos. Los presentamos en esta sección después de haber hecho una generalización y de haber pensado en la posibilidad de usarlos para la fase de secuenciación durante la implementación de una secuencia didáctica.

3.4 Metodología para la evaluación de la secuencia didáctica

Una vez creada e implementada la secuencia didáctica a partir de la sistemática propuesta, podemos evaluar la efectividad de la instrucción para ver si se ha implementado con éxito. No obstante, hay que recordar que el segundo objetivo de nuestra investigación es detectar oportunidades de aprendizaje y progreso de los alumnos. Así es como consideramos que realmente se obtendrán indicios de productividad en la discusión matemática.

Aunque nuestro foco de estudio es la discusión en gran grupo, es interesante metodológicamente evaluar la efectividad de la secuencia implementada desde un punto de vista más amplio y con un instrumento externo que no haya sido creado a la medida de los datos que se van a analizar. Para ello usamos el instrumento de análisis TRU-Math (Teaching for Robust Understanding of Mathematics), desarrollado por el Grupo MAT de la Universidad de California en Berkeley (UC), liderado por Alan H. Schoenfeld (2013), con un sistema de rúbricas que permite medir, mediante tres niveles, la efectividad de la instrucción en una clase de matemáticas.

En este estudio es interesante aplicar este instrumento para poder asumir la premisa de que en general la instrucción se ha realizado de forma efectiva. Si imaginamos que no se generaran oportunidades de aprendizaje durante las discusiones en gran grupo o que se generaran pero en cantidades más pequeñas de lo esperado, saber si ha sido una instrucción productiva desde un punto de vista general ayudaría a detectar las posibles causas.

Por otra parte, la aplicación del instrumento puede dar indicaciones sobre qué aspectos relacionados (o no) con la discusión en gran grupo se podrían mejorar para que la secuencia didáctica llegara a ser más productiva, que es, al fin y al cabo, el objetivo final de esta investigación.

Aunque el sistema de rúbricas propuesto en el instrumento TRU-Math es conciso y operativo, sus propios autores añaden la necesidad de realizar un estudio más profundo si se quiere mirar en detalle alguno de los aspectos. Por este motivo, en relación a las discusiones en gran grupo, una vez aplicado el instrumento TRU-Math, se aplica un instrumento diseñado a tal efecto. Este segundo instrumento es el que va a ayudar a detectar las oportunidades de aprendizaje que se hayan generado durante las discusiones en gran grupo.

Metodológicamente, el hecho de mostrar que en las discusiones en gran grupo se han detectado numerosas oportunidades de aprendizaje, da una base fuerte para afirmar el potencial matemático e instructivo de la discusión.

Sin embargo, para mostrar que la discusión en gran grupo haya sido realmente productiva, faltará comprobar que las oportunidades de aprendizaje matemático detectadas hayan sido efectivamente aprovechadas por diferentes alumnos. Para ello, se ha seguido una estrategia orientada al análisis sistemático del progreso de los estudiantes en relación con las oportunidades de aprendizaje detectadas.

Tras esta introducción, se detallan las tres metodologías para analizar la implementación de la secuencia didáctica (3.4.1), las discusiones en gran grupo (3.4.2) y las producciones de los alumnos (3.4.3).

3.4.1 Esquema de enseñanza para un entendimiento de las matemáticas robusto (TRU-Math)

El instrumento de análisis que utilizamos, presentado por Schoenfeld (2013), aplica el sistema de rúbricas a cada una de las parcelas de una matriz creada por dos variables: la estructura de las actividades realizadas en clase y las cinco dimensiones que se proponen como necesarias y suficientes para observar una clase.

Las diferentes estructuras de clase que se tienen en cuenta son:

a) Planteamiento: el profesor propone o modifica la tarea o estructura de clase.
b) Exposición: el profesor expone mediante un estilo magistral de lección; tanto para realizar alguna introducción como para resumir.
c) Discusiones en gran grupo: entre todos los participantes se discute una tarea.
d) Trabajo en grupos reducidos: los alumnos trabajan en grupos reducidos.
e) Presentaciones de los estudiantes: los alumnos exponen delante del resto de participantes.
f) Presentación de confusiones o ideas erróneas de los estudiantes: tanto el profesor como los alumnos tratan ideas erróneas.

En nuestra investigación, estas estructuras no están consideradas de forma independiente. En ocasiones, dentro de lo que consideramos discusión en gran grupo, hay momentos en los que el profesor hace una exposición, o los estudiantes presentan delante del grupo. Así, cuando apliquemos este instrumento a nuestros datos, consideraremos que las discusiones en gran grupo solo serán los momentos en que los alumnos están discutiendo. De este modo analizaremos por separado las otras intervenciones que se dan en una clase de discusión en gran grupo entendida como hasta ahora en este manuscrito.

En la versión final del documento de Schoenfeld (2013), las diferentes estructuras de clase que se tienen en cuenta se han reducido a cuatro, como se muestra a continuación, pero para nuestro propósito, que consiste en una visión detallada pero amplia a la vez de las diferentes actividades que se dan en una clase de resolución de problemas matemáticos, hemos preferido usar la clasificación precedente.

a) Actividades en gran grupo, incluyendo los planteamientos del profesor, sus exposiciones delante de todo el grupo y las discusiones en gran grupo.
b) Trabajo en grupos reducidos.
c) Presentaciones de los estudiantes.
d) Trabajo individual de los alumnos.

La segunda variable de la matriz son las diferentes dimensiones de Schoenfeld (2013). Este autor interpreta que estas dimensiones son necesarias y suficientes para hacer observaciones de clases y poder ver si las discusiones son productivas.

Se supone que si una clase tiene una buena puntuación en estas dimensiones, entonces los estudiantes serán potentes pensadores matemáticamente hablando.

En nuestro estudio utilizamos el instrumento pero para confirmar la productividad de las discusiones en gran grupo usamos otros instrumentos que se presentan más adelante (3.4.2 y 3.4.3).

A continuación presentamos las cinco dimensiones:

1. *Matemáticas.* ¿Hasta qué punto las discusiones de clase se focalizan y en ellas se destacan los conceptos y prácticas matemáticas y las conexiones entre ellos?

La puntuación en la dimensión matemática refleja las oportunidades para los alumnos de motivarse con contenidos y prácticas matemáticas importantes.

2. ***Demanda cognitiva.*** ¿Hasta qué punto las interacciones de clase crean y mantienen un entorno de constante reto intelectual?

La puntuación en esta dimensión muestra si las matemáticas han sido consideradas un procedimiento, hasta el punto de que casi no hay implicación de los estudiantes, o, por el contrario, si los estudiantes tienen que implicarse en “luchas productivas” mientras trabajan en matemáticas.

3. ***Acceso.*** ¿Hasta qué punto las estructuras de clase invitan y dan soporte a una participación activa por parte de la diversidad de estudiantes de la clase? ¿Todos los estudiantes tienen la oportunidad de discutir sus ideas matemáticas con frecuencia? ¿Cada uno tiene la oportunidad de desarrollar sus propias competencias en relación al conocimiento que cada uno de ellos trae consigo desde fuera de la clase?

La puntuación en esta dimensión muestra si todos los alumnos han tenido acceso a la participación activa en clase.

4. ***Organismo: autoridad y responsabilidad.*** ¿Hasta qué punto los estudiantes tienen la oportunidad de hacer conjeturas, explicaciones y argumentaciones, desarrollando su “voz” (organismo y autoridad) mientras se ciñen a las normas de clase (responsabilidad)?

La puntuación en esta dimensión muestra si el entorno de clase brinda la oportunidad a los alumnos de que puedan desarrollar su autoridad, adecuándose responsablemente a las normas de la clase.

5. ***Uso de la evaluación.*** ¿Hasta qué punto los razonamientos de los estudiantes son recibidos, retados y refinados?

La puntuación en esta dimensión muestra el grado de productividad de la evaluación.

En la Tabla 2 se muestran los diferentes niveles del sistema de rúbricas para poder realizar el análisis de cada una de las estructuras de clase consideradas.

Nivel	Matemáticas	Demanda cognitiva	Acceso	Organismo: autoridad y responsabilidad	Uso de la evaluación
1	Foco en las capacidades; poca atención en hacer notar los conceptos, conexiones o prácticas matemáticas.	La memorización es el procedimiento básico para aprender los contenidos.	No hay un esfuerzo aparente para mejorar el acceso y hay claros patrones desiguales de participación de los estudiantes.	El profesor presenta la información y valora el trabajo de los estudiantes.	No hay evidencias de recoger o usar los razonamientos de los alumnos.
2	Se pone más atención en los conceptos y a las conexiones matemáticas pero sigue dándose una mínima importancia a las prácticas matemáticas.	Los estudiantes tienen oportunidades para hacer conexiones o para involucrarse en prácticas, pero mucha parte del reto está acompañado por una guía estricta.	Se ven algunos esfuerzos para invitar a otros estudiantes a participar.	Los estudiantes tienen un tiempo para explicar, pero en general tienen un rol reactivo. El profesor sigue siendo la autoridad.	Se obtienen los razonamientos de los estudiantes o se hace referencia a ellos y se corrigen cuando cometen errores.
3	Se pone más atención en los conceptos y conexiones, con la oportunidad de desarrollar prácticas matemáticas.	Las pistas o el andamiaje del profesor promueven una lucha productiva por parte de los estudiantes para construir el aprendizaje y participar en prácticas matemáticas.	Hay claros esfuerzos para invitar y ayudar a participar a todos los estudiantes.	Se anima a los alumnos a explicar y responder a las ideas matemáticas. Se puede oír la voz de los estudiantes.	Se tienen en cuenta los razonamientos de los estudiantes y se discuten, a veces afectando la estructura de la clase preparada de antemano.

Tabla 2. Niveles del instrumento TRU-Math

En la Tabla 3 puede observarse la estructura final del instrumento, que será completado en cada caso con las puntuaciones pertinentes de la tabla anterior. Así, en una tabla de doble entrada nos quedan representados todos los valores entre 1 y 3 de cada uno de los apartados. Esta representación esquemática es muy útil para saber a grandes rasgos si se puede valorar positivamente la clase que se está analizando y además, permite ver sus puntos débiles.

	Matemáticas	Demanda cognitiva	Acceso	Organismo: autoridad y responsabilidad	Uso de la evaluación
Planteamiento	Puntuado sobre 3 en el sistema de rúbricas.	Puntuado sobre 3 en el sistema de rúbricas.	Puntuado sobre 3 en el sistema de rúbricas.	Puntuado sobre 3 en el sistema de rúbricas.	Puntuado sobre 3 en el sistema de rúbricas.
Exposición del profesor	Puntuado sobre 3 en el sistema de rúbricas.	Puntuado sobre 3 en el sistema de rúbricas.	Puntuado sobre 3 en el sistema de rúbricas.	Puntuado sobre 3 en el sistema de rúbricas.	Puntuado sobre 3 en el sistema de rúbricas.
Discusiones en gran grupo	Puntuado sobre 3 en el sistema de rúbricas.	Puntuado sobre 3 en el sistema de rúbricas.	Puntuado sobre 3 en el sistema de rúbricas.	Puntuado sobre 3 en el sistema de rúbricas.	Puntuado sobre 3 en el sistema de rúbricas.
Trabajo en grupos reducidos	Puntuado sobre 3 en el sistema de rúbricas.	Puntuado sobre 3 en el sistema de rúbricas.	Puntuado sobre 3 en el sistema de rúbricas.	Puntuado sobre 3 en el sistema de rúbricas.	Puntuado sobre 3 en el sistema de rúbricas.
Presentaciones de los estudiantes	Puntuado sobre 3 en el sistema de rúbricas.	Puntuado sobre 3 en el sistema de rúbricas.	Puntuado sobre 3 en el sistema de rúbricas.	Puntuado sobre 3 en el sistema de rúbricas.	Puntuado sobre 3 en el sistema de rúbricas.
Presentación de confusiones o ideas equivocadas	Puntuado sobre 3 en el sistema de rúbricas.	Puntuado sobre 3 en el sistema de rúbricas.	Puntuado sobre 3 en el sistema de rúbricas.	Puntuado sobre 3 en el sistema de rúbricas.	Puntuado sobre 3 en el sistema de rúbricas.

Tabla 3. Esquema final del instrumento TRU-Math

Según Schoenfeld (2013), esta estructura analítica es un instrumento general que puede usarse para el análisis de las clases, pero él mismo comenta que se necesitan examinar con más detalle los aspectos a analizar, ya sea por un tema específico o por el estudio en profundidad de una dimensión. Este autor propone una subdivisión de aspectos a examinar siguiendo con el sistema de rúbricas.

En nuestro caso, es preciso hacer un estudio más detallado de las puestas en común. Únicamente con el sistema de rúbricas aplicado a las dos dimensiones, no podemos detectar oportunidades de aprendizaje de los alumnos. Además, si nos fijamos en los descriptores de cada nivel, entendemos que el instrumento TRU-Math está centrado mayoritariamente en la instrucción del profesor, aunque también intervienen los alumnos. En cambio, nuestro análisis de la discusión en gran grupo tiene que estar más centrado en el aprendizaje de los alumnos.

Hemos creado otro instrumento de análisis adecuado para nuestro propósito. Éste se ha creado para esta investigación (Morera y Fortuny, 2012) pero se ha observado que su operatividad podría ser aplicable al análisis de otras discusiones en gran grupo, de las cuales hay relativamente pocas investigaciones al respecto, razón por la cual se ha realizado una generalización posterior (Morera, Planas y Fortuny, 2013).

3.4.2 Detector de oportunidades de aprendizaje en una discusión en gran grupo con tecnología

El propósito principal del instrumento 'Detector de oportunidades de aprendizaje' es analizar en profundidad las discusiones en gran grupo que se incorporan en el diseño instructivo de la secuencia didáctica. En estas discusiones en gran grupo queremos detectar oportunidades de aprendizaje experimentadas por los alumnos y comprobar a posteriori si ha habido aprovechamiento de estas oportunidades.

Presentamos la versión final sin generalizar del instrumento, que será la que se aplique en el apartado de análisis de datos. De todas formas, cabe añadir que este instrumento ha sido objeto de numerosas revisiones, que aquí no detallamos.

Atendiendo a las discusiones en gran grupo, es evidente la complejidad de los datos: las puestas en común de esta investigación suelen durar entre 30 y 60 minutos e intervienen muchas variables: el profesor, los participantes, los alumnos que participan activamente desde su asiento, los alumnos que salen a presentar sus ideas al resto de compañeros, el tipo de problema de geometría que se está tratando, el entorno tecnológico que se usa, el proyector, el ordenador, la pizarra... Todos estos elementos hacen que el análisis de las discusiones sea una tarea minuciosa y complicada.

Figura 18. Elementos de una discusión en gran grupo

Antes de definir los objetivos específicos del instrumento, hay que hacer notar que algunas de sus finalidades antes de crearlo eran, a la vez que detectar oportunidades de aprendizaje, organizar los datos y toda la información que se desprendía de ellos y, al mismo tiempo, obtener información detallada sobre qué sucedía durante la discusión que se quería caracterizar. Para ello, se ha dividido el instrumento en tres fases: para identificar y caracterizar episodios; para identificar y caracterizar acciones de los participantes; para detectar y caracterizar oportunidades de aprendizaje.

Identificando y caracterizando episodios

De entre todos los elementos presentes en una discusión en gran grupo, nos centramos en aquellos susceptibles de influir en el aprendizaje de los estudiantes promoviendo progreso conceptual y procedimental. Vemos el progreso de los estudiantes basado en cambios cualitativos del pensamiento matemático en el transcurso de la participación en una discusión en gran grupo, como apuntan Saxe y sus colegas (2009) con el concepto de *viaje de las ideas*. De este modo, damos importancia a la interacción entre los participantes, tal como se verá en la caracterización de los episodios. Por otro lado, damos importancia a la influencia de la tecnología en el aula de matemáticas; así la orquestación instrumental del profesor en la discusión será también clave en la caracterización de los episodios.

Todas las acciones llevadas a cabo dentro de la discusión serán objeto de estudio, y por lo tanto pertenecerán a un episodio, excepto aquellas que sean ajenas al posible aprendizaje matemático de los alumnos, como por ejemplo una interrupción por parte de algún profesor para hablar de temas no propios de la discusión.

La naturaleza de los episodios está caracterizada por dos elementos: los tipos de orquestación y los estadios de la discusión. El primer elemento está basado en los tipos de orquestación presentados por Drijvers y sus colegas (2010) llamados: *Demostración técnica*, con demostraciones de técnicas de la herramienta realizadas por el profesor; *Explicación de la pantalla*, con explicaciones por parte del profesor guiadas por lo que sucede en la pantalla; *Conexión pantalla-pizarra*, donde el profesor enfatiza la relación entre lo que ocurre en el entorno tecnológico y cómo se representa en un entorno convencional; *Discusión de la pantalla*, con una discusión conjunta sobre lo que está ocurriendo en la pantalla; *Descubrir y mostrar*, con el razonamiento de un estudiante a través de la identificación del trabajo realizado durante la preparación de la discusión y usado deliberadamente en la discusión de clase, y *Trabajo del sherpa*, con uno o varios alumnos, llamados *sherpa*, usando la tecnología para presentar su trabajo delante del resto de participantes o para responder a cuestiones del profesor. Así, usamos esta tipología para codificar la naturaleza de los episodios desde el punto de vista de la implementación didáctica de la discusión.

El otro elemento de la caracterización de los episodios en el que está basado el instrumento de análisis, es la secuencia de estadios de la discusión por la que va avanzando una clase. Estos estadios de la discusión han sido presentados en el apartado anterior ya que son a la vez utilizados para llevar a cabo la secuenciación de la discusión dentro de la sistemática presentada. Recordemos que estos estadios son:

a) Situación del problema.
b) Presentación de una solución (argumentada).
c) Estudio de diferentes estrategias para resolver o argumentar.
d) Estudio de casos particulares o extremos.
e) Contraste entre diferentes soluciones.
f) Conexiones con otras situaciones.
g) Generalización y conceptualización.
h) Reflexión sobre el progreso matemático.

Una vez diferenciados los elementos que caracterizan cada episodio, procedemos a identificar los episodios a partir de los datos de la discusión en gran grupo. El procedimiento para la identificación y caracterización es dividir en segmentos la clase mirando solo una dimensión, por ejemplo la orquestación, y luego repetir el procedimiento fijándonos en la otra dimensión. Posteriormente, la intersección de estas particiones identifican episodios que estarán caracterizados por un solo elemento de cada componente.

Una vez identificados y caracterizados los episodios, se representan en una matriz 6×8. Para esta representación, los episodios van acompañados de un subíndice, que conserva el orden cronológico en que se sucedieron. En la Tabla 4 observamos un ejemplo de representación de los episodios de una puesta en común.

Discusión en gran grupo (Problema 1, barco B1)	Situación del problema	Presentación de una solución (argumentada)	Estudio de las estrategias para resolver o argumentar	Estudio de casos particulares o extremos	Contraste entre diferentes soluciones	Conexiones con otras situaciones	Generalización y conceptualización	Reflexión sobre el progreso matemático	*(Tipos de estadio)*
Demostración técnica									
Explicación de la pantalla	(e_1)								
Conexión pantalla-pizarra									
Discusión de la pantalla			(e_4), (e_6), (e_9)	(e_7)		(e_{10})	(e_8)		
Descubrir y mostrar									
Trabajo del Sherpa		(e_2)	(e_3), (e_5)						
(Tipos de orquestación)									

Tabla 4. Ejemplo de representación de los episodios de un problema

Esta representación da la situación de este problema en concreto, donde se puede tener una idea de cómo se ha llevado a cabo la orquestación según el estadio en que se encontraba la discusión. Esta forma de representar los datos, junto con ordenar la información, aporta características tanto de la clase como del profesor. El hecho de que los episodios conserven su orden cronológico mediante los subíndices, permite ver si la clase ha seguido el orden de los estadios, o si se ha permitido que los alumnos avanzaran y retrocedieran en sus aportaciones. Aunque la clase esté preparada, en la implementación didáctica hay lugar para la improvisación, y este esquema indica cómo se ha secuenciado la discusión.

Por otro lado, si nos fijamos en los tipos de orquestación definidos por Drijvers y sus colegas (2010), ellos mismos señalan que los tres primeros tipos están más centrados en el profesor y los tres últimos en los estudiantes. Así, con la representación en forma de matriz vemos rápidamente si la discusión ha estado centrada en el habla y las acciones de los estudiantes o del profesor.

Una vez se ha estructurado la discusión en gran grupo a partir de los episodios, se requiere un análisis en profundidad de cada uno de ellos.

Identificando y caracterizando acciones de los episodios

Los episodios se han caracterizado mediante elementos discursivos e instrumentales, pero esta es solo una clasificación general. Dentro de cada episodio, se dan muchas acciones que tienen sus propias características y que se van a relacionar entre sí.

Consideramos que el conocimiento se construye de forma social incluyendo diferentes medios, como pueden ser los instrumentos tecnológicos, ya que los participantes colaboran en reorganizar el pensamiento desde un punto de vista distinto al que se desarrolla con el lenguaje oral y escrito. La relación entre las acciones de un episodio puede dar oportunidades para realzar el aprendizaje de los estudiantes (Hershkowitz y Schwarz, 1999). Por eso, clasificamos las acciones dentro de los episodios de la siguiente forma: *Intervenciones de Pensamiento Matemático* (IPM), realizadas por los participantes; *Intervenciones Didácticas* (ID), mayoritariamente realizadas por el profesor, y *Usos del Software de Geometría Dinámica* (U-SGD), realizadas por los participantes en su uso del *software*.

Después de esta caracterización general, cada acción dentro de un episodio se codifica mediante las categorías IPM, ID y U-SGD. Luego se describe la acción con una codificación emergente que aglutina la información esencial del significado de la acción. En algunas situaciones, aunque sea emergente, esta codificación está inspirada en resultados de otras investigaciones. Un ejemplo es la caracterización de las justificaciones empíricas y deductivas, que surge de la interpretación de los tipos de justificación de Marrades y Gutiérrez (2000). Representamos esta información mediante una estructura de tabla (Tabla 5), donde se puede ver, por columnas, el identificador del turno, el participante que realiza cada acción, el tipo de acción que se ha interpretado y el descriptor que define la naturaleza de cada acción. El tipo de acción se representa mediante un código de color, amarillo para las intervenciones de pensamiento matemático (IPM); rosa para las intervenciones didácticas (ID), y azul para los usos del *software* de geometría dinámica (U-SGD).

#	Participante	Intervención	Interpretación
35	*Inés:*	*O, si no, si fem un vector, ehm, igual, des d'un altre punt fins al seu punt homòleg.*	Búsqueda de alternativas
36	*Profesor:*	*Per exemple: aquest aquí.*	
37	*Inés:*	*Sí, després fem l'eina que compara els dos.*	Exposición sin argumentación
38	*Profesor:*	*[a] L'eina que compara, [b] no sé si tothom la coneix, eh. L'eina que compara, amb aquest interrogant, [c] li dic "compara'm aquest vector amb aquest altre vector", i em diu: " el vector k i el z són iguals". [d] Vale, ja ho tinc comprovat. Però... per tant, ja està, ja és una translació això.*	*a*. Demostración técnica *b*. Establecimiento de consenso *c*. Complemento de la explicación *d*. Validación
39	*Sergio:*	*Quina eina és?*	Petición técnica
40	*Profesor:*	*L'interrogant.*	Aclaración técnica

Tabla 5. Ejemplo del análisis de la transcripción de un episodio

Una vez representadas las acciones de cada episodio mediante la estructura de tabla, observamos que las acciones están dispuestas en un orden cronológico, pero las relaciones entre ellas son importantes para detectar posibles oportunidades de aprendizaje. Incorporamos unos conectores de influencia que son representados con segmentos orientados, que informan sobre la relación que se interpreta entre las diferentes acciones. Finalmente, se requiere de otra estructura para representar influencias y relaciones entre acciones. Así, se crea una estructura en forma de red (Figura 19) que permite observar relaciones entre acciones, y donde no se pierde la información del tipo de acción, gracias al color, ni del participante que la realiza ni de la esencia de su naturaleza. Lo único que se pierde es la transcripción concreta de los participantes, que se puede recuperar en la representación precedente en forma de tabla.

Con esta última representación se enfatiza la relación de influencia que tienen las diferentes acciones entre sí, lo que aporta una visión más global de lo que sucede en el episodio. Esta focalización en la interacción entre las acciones permite detectar posibles oportunidades de aprendizaje que luego serán caracterizadas.

Figura 19. Ejemplo de la representación esquemática de un episodio

Identificando y caracterizando oportunidades de aprendizaje matemático

Consideramos que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se llevan a cabo en entornos donde se generan oportunidades de aprendizaje, y dependiendo del número de oportunidades y de la calidad de éstas, se verán modificadas las experiencias de aprendizaje de los alumnos. Por eso es importante poder detectar oportunidades de aprendizaje en un entorno colaborativo de discusión en gran grupo en el que interviene la tecnología. Si lo logramos, estamos más cerca de detectar aprendizaje de los estudiantes.

Para hacer operativa la noción de oportunidad de aprendizaje, la situamos dentro de las oportunidades de participación en la discusión de clase en las que ciertas acciones se orientan a *contenidos matemáticos* específicos, a diferentes *estrategias* o a *actividades de auto-regulación*. Por eso, caracterizamos las oportunidades de aprendizaje detectadas según estos tres tipos. Una oportunidad de aprendizaje de un contenido matemático sería la de aprender un concepto matemático, como por ejemplo el de *homotecia*; una oportunidad de aprendizaje de estrategia sería, por ejemplo, la de aprender a conjeturar; por último, una oportunidad de aprendizaje de actividades de auto-regulación podría ser la de aprender que es importante justificar las afirmaciones que se hacen en la clase.

Esta caracterización no define las oportunidades de aprendizaje completamente, solo permite ver de qué estilo son. Lo que define una oportunidad de aprendizaje son las acciones que han intervenido en su creación, y la explicación en cada caso de cómo la interacción entre los participantes que han llevado a cabo las acciones ha generado dicha oportunidad. Así, una oportunidad de aprendizaje matemático se debe entender como una combinación entre los contenidos del aprendizaje potencial y las acciones que propician la emergencia de estos contenidos.

Una vez identificadas y caracterizadas las oportunidades de aprendizaje dentro de un episodio, hay que repetir el mismo procedimiento para cada uno de los episodios que forman parte de una discusión en gran grupo. Así, se pueden detectar distintas oportunidades de aprendizaje matemático en cada discusión.

Este instrumento se va a aplicar en el análisis de los datos en el siguiente capítulo, donde se podrá observar su operatividad. Ha sido generalizado para entornos de clase sin uso de medios tecnológicos. En Morera, Planas y Fortuny (2013) se puede consultar una versión posterior del instrumento. En este manuscrito hemos preferido aplicar la versión anterior ya que respeta en mayor medida la presencia del *software* de geometría dinámica. En Morera, Planas y Fortuny (2013) se uso un acrónimo para las *oportunidades de aprendizaje matemático (Mathematics Learning Opportunities –MLO)*, que aquí usaremos.

3.4.3 Metodología para evidenciar progreso matemático de los estudiantes

Tras la detección de MLOs, es importante considerar si efectivamente las oportunidades de aprendizaje detectadas han sido aprovechadas por los alumnos. A tal efecto, ha habido una preparación en la recogida de datos.

Como las MLOs son generadas durante las discusiones en gran grupo, se hizo que los alumnos entregaran a través del soporte informático Moodle el trabajo realizado en parejas. Posteriormente, tras la reflexión individual al finalizar la discusión en gran grupo, se hizo que entregaran una versión modificada incluyendo todo lo que creían haber aprendido.

Durante la puesta en común muchos alumnos pueden haber entendido nuevos conceptos, o pueden haber mejorado en su proceso de aprendizaje de nuevos procesos matemáticos. Sin embargo, puesto que para el presente estudio necesitamos evidencias de este progreso, nos fijamos solo en la comparación de los documentos escritos por los alumnos antes y después de las discusiones en gran grupo. Así, para considerar que una oportunidad de aprendizaje ha sido aprovechada por un alumno, se deben cumplir los siguientes dos requisitos:

a) El alumno tiene que haber evidenciado durante el trabajo por parejas que no tenía ese aprendizaje.
b) El alumno tiene que haber evidenciado en su documento escrito final que ha hecho un progreso respecto a la oportunidad de aprendizaje en cuestión.

Se han analizado los trabajos de los alumnos haciendo una comparación entre los dos documentos que entregaban a fin de detectar progreso matemático. En la redacción de este manuscrito, se han seleccionado las oportunidades de aprendizaje detectadas más interesantes. En el Capítulo 5, 'Análisis de las oportunidades de aprendizaje' se ilustrarán casos de alumnos que para los cuales disponemos de evidencias de que se han aprovechado ciertas oportunidades, que habrán sido previamente identificadas con el instrumento 'Detector de oportunidades'.

Aunque no vamos a mostrar el análisis del progreso con esta estructura, sino una selección para justificar que las oportunidades de aprendizaje matemático han sido aprovechadas, a continuación resumimos un ejemplo de la metodología seguida para detectar evidencias de progreso. Como ejemplo, hemos escogido una de las parejas, formada por Laia y José Manuel. En la Figura 20 se observa la imagen del documento de GeoGebra que han entregado los alumnos, con el que analizamos su trabajo para compararlo más tarde con los documentos individuales que entregaron tras la discusión en gran grupo.

Algunos de los elementos característicos a observar son que no se ha añadido ninguna construcción a la del enunciado, simplemente se colorean las figuras como se pedía. Pintan el barco B3 (que en la imagen se señala como P3 en referencia a la inicial para Polígono) de azul como si fuese una simetría, por lo que no detectan la falta de precisión. Por otra parte, aunque el problema tiene dos preguntas, solo se responde a la primera, dejando la argumentación sin contestar. Otro detalle es que el enunciado pide la construcción de los ejes de simetría de las figuras que consideraran simétricas; a pesar de que se colorean dos barcos de azul, no se construyen sus ejes de simetría. Si nos centramos en la elección de la transformación de cada figura vemos que las justificaciones son ingenuas y no hacen referencia a propiedades matemáticas. Por ejemplo, de B1 solo se dice que cambia la posición y no la dirección para justificar que es una traslación (como se verá, no está claro qué entienden estos alumnos por dirección). En referencia a B2, intuitivamente se ha visto que el barco es simétrico y que el eje sería inclinado, pero no se construye. Con B3 sucede lo mismo; no se intenta construir y solo se responde de forma intuitiva, por lo que dicen que es una simetría respecto a un eje vertical. De B4 se dice que es un giro porque los lados no tienen la misma dirección que los del barco inicial.

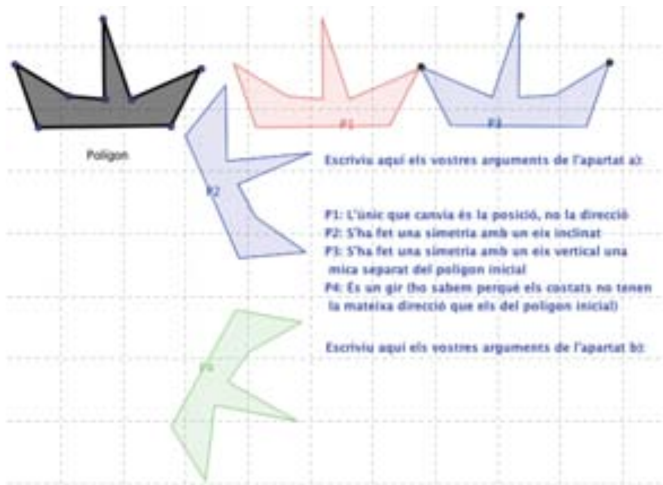


Figura 20. Resolución del Problema 1 por la pareja Laia y José Manuel

Tras la discusión en gran grupo, cada uno de los dos alumnos entrega un segundo documento con sus reflexiones personales. Si nos fijamos en las reflexiones individuales de Laia (Figura 21) observamos que tanto por lo visual como por el contenido matemático, el documento es sustancialmente diferente. A continuación describimos los cambios que podemos evidenciar.

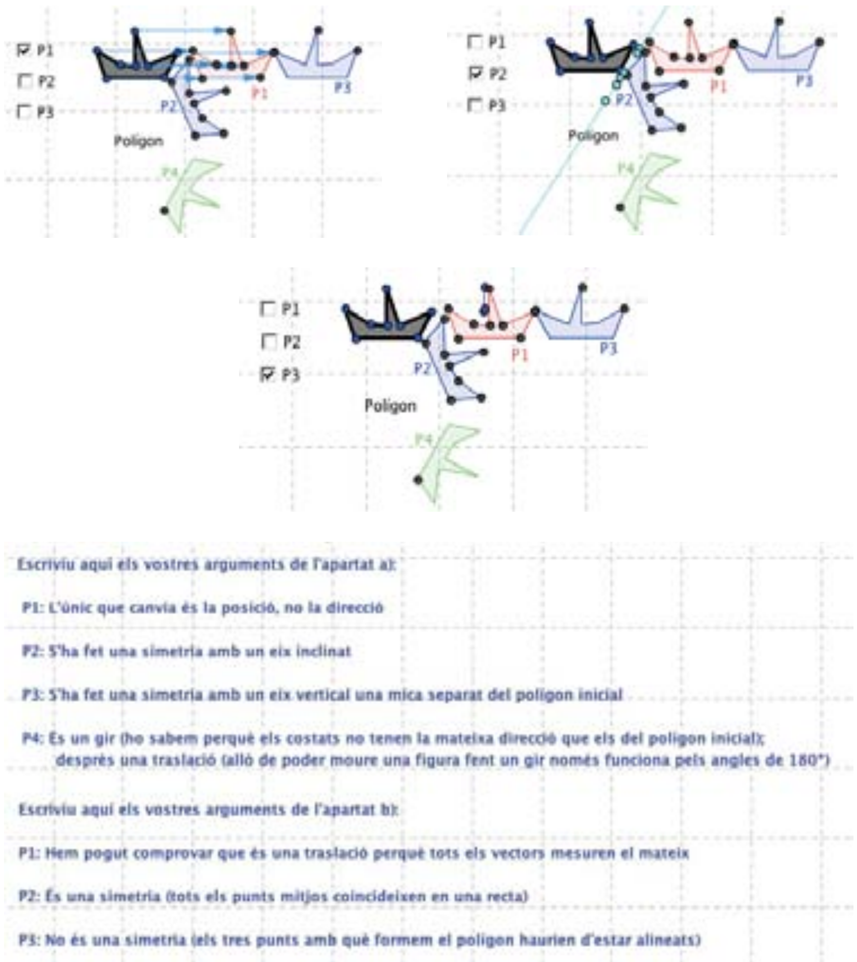


Figura 21. Resolución del Problema 1 por Laia tras la discusión en gran grupo

Laia ha seguido una estructura. Para cada apartado dentro del Problema 1 ha creado diferentes pantallas con la herramienta "Casilla de control para ocultar/mostrar objetos". En cada una de estas pantallas, añade elementos matemáticos que en el documento del trabajo por parejas no aparecían. Por ejemplo, en B1, añade todos los vectores formados entre parejas de puntos homólogos; en B2, añade todos los puntos medios entre parejas de puntos homólogos y luego el eje de simetría; en B3, añade tres puntos medios entre tres parejas de puntos homólogos y el segmento entre dos de ellos, y de B4 no crea ninguna pantalla específica. Estos son los cambios en relación a la construcción.

En cuanto a la argumentación, Laia ha considerado correcta la primera parte y no la ha modificado. En cambio, la segunda parte, que había quedado vacía, Laia la rellena explicando sus argumentos para cada uno de los tres primeros barcos.

Para justificar su elección de B1, menciona que ha comparado los vectores y ha visto que efectivamente todos son iguales. No sabemos si ha hecho una comparación entre vectores como se ha comentado en clase, es decir, comparando uno con el resto. Laia no menciona su procedimiento, y en el protocolo de la construcción de su archivo de GeoGebra no quedan registradas las comparaciones. De todos modos, en B3 muestra evidencias de haber aprendido el proceso eficiente de comparación.

Si en B1 ha comparado todos los vectores, en B2 y B3 ha comprobado que los puntos medios de pares de puntos homólogos estuvieran alineados. En B2, tampoco sabemos cómo ha hecho la comparación, pero finalmente ha construido la recta. En B3 no ha construido todos los puntos medios, sino que al construir el tercero y ver que no estaba alineado con los dos primeros, afirma que no estarán todos alineados formando el eje de simetría, y que por tanto las figuras no son simétricas.

De B4 no hace ninguna modificación respecto al trabajo entregado por parejas, ni en la construcción ni en la argumentación. Esto puede deberse a que en clase es la parte que se ha tratado más rápidamente y que se ha dejado como problema abierto para el día siguiente.

En el apartado 'Análisis del progreso matemático en las discusiones en gran grupo' (5.2), veremos cómo estas comparaciones que ahora aparecen como progresos matemáticos de los alumnos, se concretan como evidencias de aprovechamiento de algunas de las MLOs detectadas durante las puestas en común.

A continuación presentamos las imágenes del documento de GeoGebra entregado por José Manuel tras su reflexión personal (Figura 22). Observamos que visualmente José Manuel también ha utilizado distintas pantallas como Laia, para separar los distintos apartados que en la discusión en gran grupo quedaron señalados. A diferencia de Laia este alumno incluye toda la construcción asociada a cada barco en la casilla de ocultar/mostrar, y hace la correspondencia de color, lo que da mayor estructura a su presentación.

En B1, añade todos los vectores y comenta, con una nota al lado de la construcción, que todos son iguales. En su razonamiento, se esfuerza por explicar qué es lo que se mantiene y ahora comenta que la dirección de los vectores no cambia, pero que la posición (las coordenadas), sí.

Notamos que aún falta precisión en el vocabulario, pero interpretamos que este alumno ha tomado consciencia de la importancia de expresar bien sus argumentos.

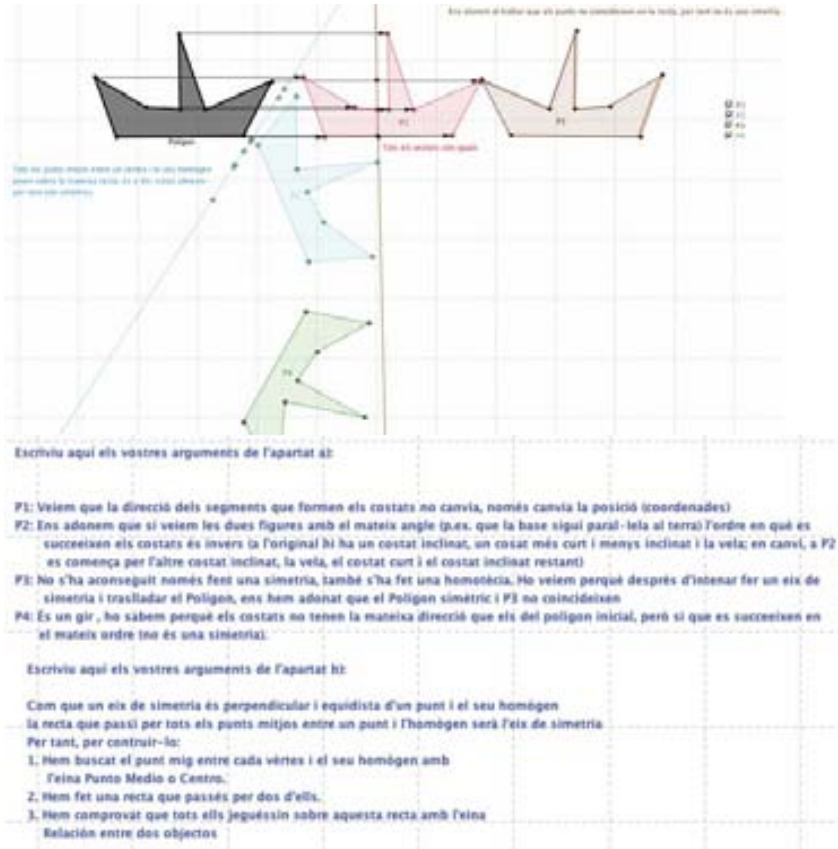


Figura 22. Resolución del Problema 1 por José Manuel tras la discusión en gran grupo

Respecto a B2, José Manuel formaliza mejor sus argumentaciones. Presta más atención a detallar los procedimientos seguidos para construir el eje de simetría, y explica brevemente incluso qué herramientas del programa GeoGebra ha utilizado. Igual que Laia, aunque comenta que utiliza la herramienta "Comparación entre dos objetos" para comprobar que todos los puntos pertenecen al eje de simetría, no explicita el procedimiento seguido.

En su documento individual, José Manuel sí modifica el color de B3 al razonar que no es una simetría: ha visto que algunos puntos medios no coinciden con la recta que ha construido con dos de ellos. Comenta que para comprobar que no son figuras simétricas, aplica una simetría axial respecto del supuesto eje de simetría, y como no coincide, concluye que no se trata de una simetría. En el análisis de datos veremos que esta estrategia se trabaja durante la discusión en gran grupo.

Finalmente en relación a B4 y como Laia, José Manuel no se entretiene en argumentar demasiado, posiblemente por el trato que se le ha dado a este apartado del problema en la discusión en gran grupo, como veremos en el análisis de datos.

Con estos ejemplos, hemos mostrado parte de nuestra metodología para encontrar evidencias de aprovechamiento de MLOs. El diseño instructivo, que incluía la recogida de estos datos, tenía una doble finalidad: desde el punto de vista del profesor, da un uso tanto para gestión de clase como para evaluación de los alumnos, y desde el punto de vista del investigador, sirve para detectar progreso de los alumnos con base en la comparación de documentos.

4 Análisis de la aplicación de la sistemática

A partir del análisis de datos –y siguiendo los dos objetivos entrelazados que se plantean en este trabajo–, queremos estudiar, por un lado, cómo la sistemática introducida en el marco teórico y completada durante este estudio, se ha aplicado durante la planificación e implementación de la secuencia didáctica diseñada (4.1). También se considera importante evidenciar hasta qué punto la implementación de la secuencia didáctica es adecuada desde el punto de vista de Schoenfeld (2013); de acuerdo con este autor, conviene indicar que es un instrumento externo que puede ofrecer información externa sobre cómo se ha llevado a cabo la implementación de la secuencia didáctica (4.2).

Para todo ello, estructuramos este capítulo en dos apartados que se presentarán sucesivamente; cada uno tiene por objetivo cumplir con la consecución de uno de los propósitos que se han recordado en el párrafo anterior.

4.1 Aplicación de la sistemática a la implementación de la secuencia didáctica

Tras la presentación de la dimensión teórica de la sistemática en los capítulos precedentes, ahora se exponen los procesos de diseño e implementación.

Presentamos el estudio previo que se hizo de cada una de las partes que constituyen la sistemática. En muchas ocasiones, fue el mismo estudio para cada uno de los problemas de la secuencia; para ilustrar estas ocasiones presentamos, a modo de ejemplo, los detalles de cómo se aplicó a uno de los problemas. Para el resto de ocasiones, detallamos cómo se aplicó a cada uno de los problemas solo si consideramos que las diferencias complementan la comprensión del análisis.

Todas las fases de esta sistemática se aplicaron durante la realización de la unidad didáctica de isometrías en un curso de tercero de secundaria obligatoria. Las tres clases del curso, gestionadas por tres profesoras distintas, llevaron a cabo la misma secuencia didáctica. La aplicación de la sistemática fue aceptada por las tres profesoras y se elaboró una guía para el profesorado que las tres tuvieron presente al implementar la secuencia. Se puede consultar la Guía para el profesorado en los anexos del trabajo (Anexo II).

4.1.1 Anticipación

Para realizar la anticipación de cada problema, se utilizó el instrumento 'Árbol del problema' y se creó dicho árbol para cada uno de ellos. En el capítulo donde se explica la metodología, hemos presentado el Árbol del Problema 2 para ejemplificar la creación del instrumento (Figura 9). Para no repetir este mismo contenido, ahora presentamos únicamente los Árboles de los Problemas 1 y 3.

El árbol creado para hacer la anticipación del Problema 1 se muestra en la Figura 23. Podemos ver que la importancia del problema se focalizó de antemano en los apartados referentes a las simetrías, dejando de lado los apartados de la translación y del giro. Como explicaremos más adelante, esto repercutió en la gestión de la discusión del problema, que finalmente se centró en la discusión de estas dos últimas transformaciones.

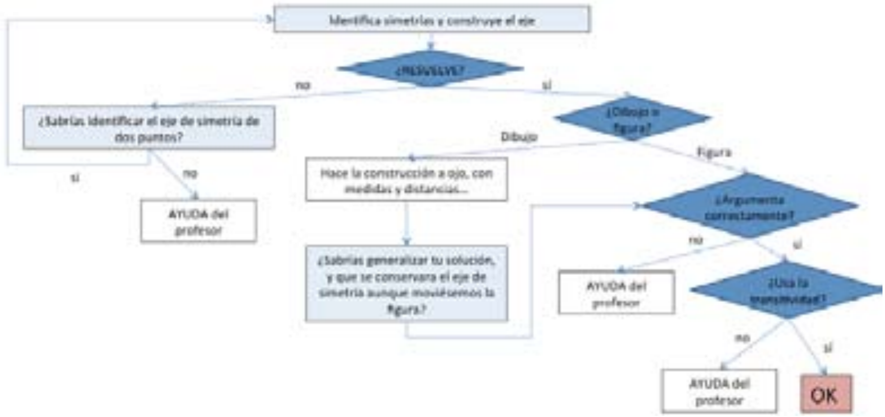


Figura 23. Árbol del Problema 1

En la anticipación se tuvo en cuenta que algún alumno podría quedarse bloqueado, por lo que se buscó una alternativa que consistiera en reducir el problema a encontrar el eje de simetría únicamente entre dos puntos. La importancia entre hacer dibujos o figuras también estaba presente en el árbol, para ayudar a los alumnos a generalizar sus construcciones. Por otro lado, el hecho de tener que construir figuras en lugar de dibujos, fomentaba para este problema en concreto darse cuenta de la trampa en el tercer apartado.

En relación con las argumentaciones, ya se había estudiado la posibilidad de tener que usar la propiedad transitiva para no tener que comparar todas las posibles mediatrices de puntos homólogos. Como se explicará en la presentación de resultados, esta anticipación fue clave para fomentar una formalización de las argumentaciones a cargo de los alumnos.

Como hemos comentado al presentar este instrumento de forma teórica, tras cada implementación, es probable que tengan que hacerse modificaciones en el árbol y que así tienda a ser más completo. Para este problema y tras haber seguido toda la implementación de la secuencia didáctica, concluimos que el árbol debería completarse añadiendo importancia a los apartados de translaciones y giros, que en principio eran secundarios. Por ejemplo, en el primero, ya se trabaja la importancia de argumentar y comprobar la decisión del alumno; además, es probable que se haga la conexión con la propiedad transitiva para la comparación de todos los vectores.

Por otro lado, aunque el cuarto apartado, referente a un giro, estaba incluido en el problema para crear la necesidad de saber cómo encontrar un centro de giro dadas dos figuras con el fin de dar un sentido de continuidad con el siguiente problema, se ha visto en la discusión en gran grupo que también hay que hacer una anticipación antes de la clase para ver cómo tratar el tema sin dar demasiada información.

Centrándonos en los apartados de las simetrías, que sí estaban contemplados, después de una iteración de la secuencia, se podrían incluir las diferentes estrategias aportadas por los alumnos para comprobar si dos figuras dadas son simétricas.

En relación al Problema 3, se creó el árbol de la Figura 24. Al estar formado por un único apartado, este problema no tenía la dificultad de sintetizar en un solo árbol información variada. Puesto que se trata de deducir y conjeturar qué ocurre con la composición de dos simetrías axiales en lugar de hacer una construcción, la propuesta si hay bloqueo inicial no consiste en simplificar el problema, sino en incitar a la observación aprovechando las propiedades visuales de la geometría dinámica. Por el contrario, para los alumnos que han identificado el giro, las propuestas de trabajo posteriores se focalizan en la formalización de los elementos que lo definen. Es importante que finalmente se dé el tratamiento de la posición relativa de las rectas, aspecto que está entrelazado con el Problema 2, donde se realiza el tratamiento apropiado para las posiciones relativas de los segmentos.

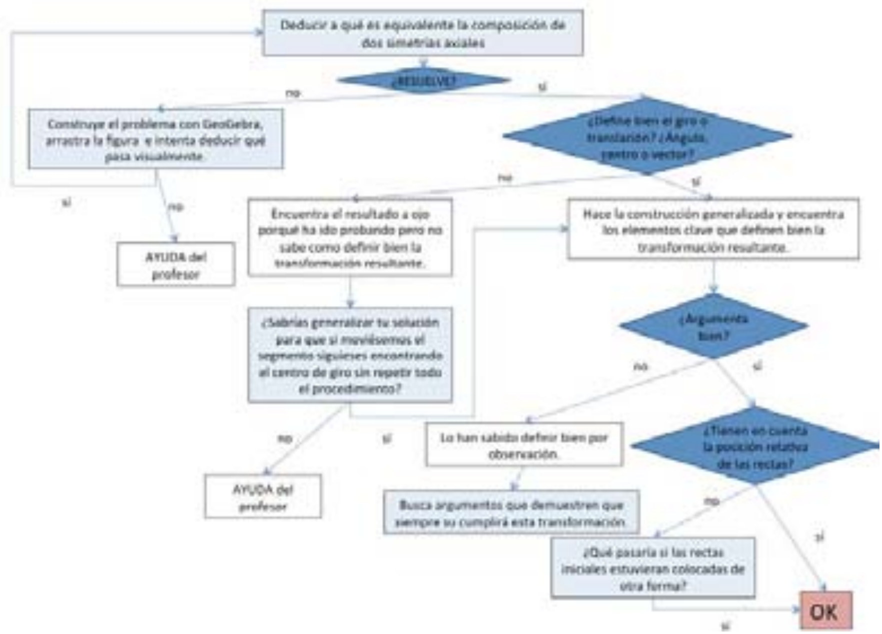


Figura 24. Árbol del Problema 3

Tras la implementación de la secuencia, se observa que la anticipación ha sido adecuada para el tratamiento del problema, tanto durante el trabajo en parejas como en la discusión en gran grupo. Sin embargo, habría que mejorar la parte de gestión relativa al descubrimiento por parte de los alumnos de las propiedades del giro; en concreto, en lo que concierne a que el ángulo de giro dobla el ángulo que forman las dos rectas, puesto que los alumnos lo ven por observación y no, como estaba previsto, tras razonar sobre las propiedades de las simetrías.

4.1.2 Configuración didáctica

En lo que respecta a la configuración didáctica, se elaboró una misma configuración para cada uno de los tres problemas, ya que formaban parte de una secuencia corta que se quería trabajar de un modo concreto para poder analizarlos, posteriormente, de manera análoga.

Basándonos en los referentes del marco teórico, hemos expuesto que consideramos importante el uso de la tecnología, en particular de GeoGebra, para realizar los problemas planteados por su riqueza en la exploración. Por esta razón hemos seleccionado como configuración didáctica el uso de un ordenador por pareja en el laboratorio de informática, con la posibilidad de usar un proyector para todo el grupo. También se dispone de proyector y ordenador en la mesa del profesor en la clase ordinaria donde se llevan a cabo las discusiones en gran grupo.

Todos los ordenadores están provistos de conexión a Internet y contienen el programa específico GeoGebra. La pizarra, presente en ambas clases, también se considera como un artefacto que forma parte de la configuración didáctica.

Figura 25. Situación de trabajo por parejas en el laboratorio de informática

4.1.3 Modo de explotación

En primer lugar, proponemos que se trabaje brevemente de manera individual, para que cada alumno se sitúe en el contexto del problema. A continuación, en un espacio de trabajo por parejas compartiendo un ordenador con el programa GeoGebra. Se pretende que los alumnos experimenten, conjeturen y hagan una propuesta de solución, y finalmente, en otra sesión ordinaria de clase, participen en la discusión en gran grupo usando el proyector con el ordenador de la mesa del profesor, para poner en común el trabajo realizado en parejas y para tratar aquellos temas que no se han explorado.

Para ejemplificar cómo se elaboró el diseño del modo de explotación, mostramos la guía de actuación para gestionar la puesta en común del segundo problema, que se diseñó conjuntamente por las tres profesoras. Los modos de explotación de los otros dos problemas se pueden consultar en la Guía para el profesorado que adjuntamos en el Anexo II.

> Haremos que uno de los alumnos –o una pareja– salga a exponer su solución. Será una orquestación del tipo *Trabajo del sherpa* (Drijvers y otros, 2010). El alumno utilizará la tecnología para explicar cómo ha resuelto el problema y el profesor irá haciendo preguntas tanto al sherpa como a los demás compañeros de clase para que formalicen toda la casuística de casos particulares.
>
> Normalmente, trabajando por parejas habrán observado que el centro de giro se encuentra donde se cortan las mediatrices de los segmentos que unen puntos homólogos. Pero hay que estar atentos, ya que se tiene que llegar a deducir qué ocurre cuando las mediatrices son paralelas o coincidentes.
>
> También es importante tener en cuenta que, puesto que los segmentos no están orientados, existen dos soluciones para cada par de segmentos, excepto cuando estén sobre rectas paralelas. Es posible que solo algunos alumnos hayan llegado a este punto durante el trabajo por parejas.
>
> Cuando no se cortan (porque son paralelas), no hay ningún giro que sitúe el segmento encima del otro. Cuando son coincidentes, el centro de giro se encontrará donde se corten las prolongaciones de los segmentos, porque será el único punto que mantendrá los ángulos de giro de cada punto del segmento por separado.

> Hay que considerar que la generalización de los segmentos que tengan las mediatrices de los homólogos paralelos, son los segmentos que han sido transformados mediante una translación, por tanto son los que se encuentran sobre rectas paralelas o coincidentes. Los segmentos cuyas mediatrices de puntos homólogos son coincidentes, son todos aquellos simétricos respecto a un eje (que coincide con las mediatrices). Este ejercicio de generalización sobre cómo deben estar situados los segmentos para que las mediatrices cumplan cierta propiedad, normalmente se les hace difícil, por eso es fundamental guiar bien a los alumnos. En esta fase de la corrección, la orquestación será del tipo *Discutir la pantalla* (Drijvers y otros, 2010).
>
> Podemos relacionar la solución final del problema con problemas anteriores. Ahora sí que se puede pensar cómo buscar el centro de giro del barco del Problema 1. También se puede tratar el caso concreto de que el giro sea de 180°, relacionándolo con la simetría central. Esto también se puede posponer para la discusión en gran grupo del Problema 3 en el caso particular de que las rectas sean perpendiculares.

Observamos en la redacción de este modo de explotación que los investigadores, junto con los profesores, han seguido el guión del árbol del problema para pensar la secuenciación teórica sobre cómo gestionar la discusión en gran grupo. Así, tenemos otro ejemplo de la utilidad y la potencia del instrumento diseñado para elaborar la anticipación.

Otra característica importante es que se hace referencia a los tipos de orquestación planteados por Drijvers y sus colegas, es decir, que gracias al trabajo conjunto de los investigadores con los profesores, estos últimos incorporan conceptos teóricos en la preparación de sus clases. Se trata de un aspecto positivo y, aunque no es el objetivo de este trabajo, podría conducir a un estudio posterior sobre el trabajo conjunto entre investigadores y profesores orientado a la planificación e implementación de una secuencia didáctica.

4.1.4 Monitorización

De la fase de monitorización no hay ningún registro escrito que podamos adjuntar. No obstante, si analizamos los videos de los trabajos por parejas en los que el profesor ha realizado la monitorización, vemos cómo se ha seguido el guión del árbol del problema, sobre todo en aquellos momentos en que los alumnos decían que habían finalizado la tarea, puesto que era cuando el profesor debía motivarlos para que siguieran profundizando en el problema mediante las cuestiones diseñadas a tal efecto.

Además, hemos observado que el profesor tenía que monitorizar el trabajo de doce parejas al mismo tiempo. Puesto que podía situar rápidamente en qué momento de la resolución se encontraban los alumnos, no tenía que destinar mucho tiempo en interpretarlo y sí, en cambio, a escoger minuciosamente qué tipo de mensajes dar en cada momento.

4.1.5 Selección

La fase de selección ha sido distinta para cada uno de los problemas, dependiendo de sus características y de cómo los trabajan los alumnos.

En el Problema 1, hubo que hacer la selección para cada uno de los cuatro apartados. En el primer apartado se seleccionó a Víctor, que trabajó previamente con Inés. El profesor sabía que la elección de la isometría era correcta, pero que no habían argumentado su respuesta, como la mayoría de alumnos. Así, esta selección se hizo con la intención de fomentar la creación de la argumentación conjuntamente entre todos los participantes.

En el segundo apartado del Problema 1, la selección es improvisada, ya que mientras el profesor presenta el nuevo apartado, Maurici se ofrece efusivamente como voluntario. Más adelante, con el análisis detallado de las acciones de los participantes, veremos que la estrategia de Maurici es poco común. Aunque finalmente se toma como un potencial ya que se trata con los alumnos la importancia de escoger estrategias óptimas, se podría haber tomado como una elección equivocada al empezar a explicar estrategias complicadas. El profesor, en el caso de haber seleccionado a un alumno, seguramente no hubiese escogido a Maurici, pero tras ver la implementación, nos damos cuenta de que no escogerlo podría haber sido un inconveniente.

En el tercer apartado del Problema 1, se escoge a Inés porque, junto con Víctor, forman una de las parejas que no ha notado la trampa de la simetría. Puesto que se trata de una pareja con un gran potencial y que habitualmente argumenta bien sus resoluciones, el profesor quiso que fueran ellos quienes empezaran a exponer su solución. Así se buscaba tratar el tema de manera global en el gran grupo, y que fuesen otros participantes quienes corrigieran los errores.

En el último apartado del Problema 1, se seleccionó a Sara. El profesor había visto que esta alumna, junto con Rafael, tenía la isometría correcta. Además, la pareja tenía un comentario en su resolución que hacía referencia a la composición de isometrías. Planteaban que el último apartado también podía ser un giro con el centro sobre la figura inicial y después una translación. Más adelante veremos que, cuando Sara contesta, solo menciona la isometría, y cuando se le pide más detalle, no contesta rápidamente y Víctor pide participar. Finalmente no se trata la cuestión de la composición, que el profesor volverá a introducir más tarde durante la secuenciación.

Esta selección hecha previamente teniendo en cuenta las características del grupo y la participación de los estudiantes, sirve como ejemplo para poner de manifiesto que el factor de improvisación aumenta con facilidad y no siempre puede tratarse todo lo que se había planeado.

Para el Problema 2, se escogió una pareja que había conseguido encontrar la solución general y la doble solución. Los alumnos de esta pareja se habían dado cuenta de que algunos casos extremos no seguían la regla general, aunque no habían resuelto la situación. Con esta selección se pretendía pasar rápidamente por la parte de la solución general a la que habían llegado más parejas y estructurar la casuística de todas las posibles posiciones de los segmentos iniciales, y por lo tanto de las mediatrices de puntos homólogos, que es lo que normalmente los alumnos no han llegado a estudiar bien durante el trabajo por parejas.

En el Problema 3, también se hizo la selección pensando en una pareja que hubiese llegado a encontrar el caso general, es decir, que la composición de dos simetrías axiales (donde las rectas son secantes) es equivalente a un giro de centro el punto de intersección de los ejes de simetría y de ángulo el doble del que forman los dos ejes. Una vez dada la respuesta, que muchos habían conjeturado tras observar patrones e invariantes con el dinamismo del programa informático, se quería dirigir la discusión en gran grupo en la parte final del árbol. En esta situación nos referimos a trabajar la argumentación de estas conjeturas y a estudiar de forma exhaustiva las isometrías involucradas dependiendo de las posiciones relativas de los ejes de simetría iniciales.

4.1.6 Implementación didáctica

A menudo, se consideró la implementación didáctica como una fase que venía caracterizada por la improvisación tanto por parte del profesor como por parte de los participantes durante la discusión en gran grupo. De algún modo, por tanto, la implementación puede entenderse como el resultado de la preparación del modo de explotación.

Puesto que el apartado de modo de implementación se ha ejemplificado con el detalle del Problema 2 que habían preparado los investigadores y profesores conjuntamente, ahora analizamos la implementación de este mismo problema.

En el planteamiento inicial se había decidido tratar el caso general del problema de forma rápida ya que se consideraba que la mayoría de alumnos habrían llegado a ese resultado durante el trabajo en parejas; y, efectivamente, así fue. Otro de los puntos en los que se quería incidir en la discusión en gran grupo era el estudio exhaustivo de las soluciones en función de la posición relativa de las mediatrices de puntos homólogos. Como veremos en el apartado de secuenciación, este estudio se llevó a cabo, pero de forma un tanto desorganizada.

Otro objetivo de la discusión era el tratamiento de la doble solución del problema por el hecho de no estar orientado el segmento del enunciado. Aunque esto se hizo antes que el estudio exhaustivo de las posiciones relativas de las mediatrices, también se llevó a cabo.

Por último, en el modo de explotación del Problema 2 se planteaban un par de conexiones interesantes a tratar. La primera conexión, que se realizó con éxito, era aplicar la solución del problema al cuarto apartado del Problema 1, en el que se pedía identificar un giro aunque los alumnos no tuviesen herramientas para formalizarlo. La otra conexión que se proponía era tratar el caso concreto del giro de 180°, donde el centro también puede encontrarse haciendo la intersección de los segmentos resultantes de unir puntos homólogos, y conectarlo con las simetrías centrales. Esta última conexión no se realizó durante la discusión del problema.

En cambio, se trató un tema que no se había tenido en cuenta en la preparación del modo de explotación. Una pareja de alumnos conjeturó que en relación con la doble solución dados dos segmentos cualesquiera, la suma de los ángulos de giro de las dos soluciones siempre sería 180°. De cara a otras implementaciones del problema, la discusión de esta conjetura se podría tomar en consideración.

4.1.7 Secuenciación

Si hacemos un análisis de la preparación de la secuenciación realizada antes de llevar a cabo la implementación de la secuencia didáctica, observamos que no se había preparado de una forma estructurada y precisa. Como hemos comentado en el capítulo de metodología, un instrumento válido para la planificación de la secuenciación podrían ser los estadios de discusión de un problema; no obstante, como este instrumento ha surgido del análisis de datos, no pudo aplicarse. Para un análisis a posteriori de la secuenciación en cada uno de los tres problemas, podemos consultar los resúmenes esquematizados de las sesiones de discusión en las tablas estructuradas realizadas en el análisis de datos que se muestran más adelante.

La única idea del profesor para guiar la secuenciación era la estructura del árbol de los problemas, pero aquí no siempre se señala la forma natural en la que los alumnos van construyendo el conocimiento. Por ello, si observamos a posteriori la secuenciación de los estadios de la discusión que se ha seguido en cada problema, notamos que es bastante desorganizada. Por una parte, consideramos que se trata de un aspecto positivo al indicar que se ha dejado a los alumnos que sean los dinamizadores de la discusión y se han ido tratando los temas de forma improvisada a medida que han ido surgiendo. Aún así, con una secuenciación más organizada de antemano, o si el profesor hubiera anticipado los diferentes estadios por los que debía orquestar la discusión, se podría haber mejorado la estructura y no hubiesen sido necesarias tantas recapitulaciones para conseguir que los alumnos siguieran el hilo de la discusión.

4.1.8 Conexión

En relación con el análisis de las conexiones, del mismo modo que en las dos fases anteriores de la sistemática, tenemos una doble visión. Por un lado, apuntamos al análisis sobre cómo se hizo la previsión de las conexiones, o más concretamente, qué conexiones se pensaron hacer en cada problema; mientras que por otro, señalamos el análisis de las conexiones que finalmente se hicieron durante las discusiones en gran grupo. Esta última parte, el análisis de la visión a posteriori, se detalla en el análisis detallado de las discusiones, en el Capítulo 5, pero entendemos que también es importante ver de una forma global la riqueza de las conexiones que se realizaron. Aunque no se ha presentado la notación de los episodios y de las acciones, las incluimos por si el lector quiere ver las referencias.

A continuación, detallamos las conexiones relacionadas con cada uno de los tres problemas. Veremos que hay episodios en los que el objetivo ha sido establecer una conexión, y que al mismo tiempo se generan conexiones en episodios donde el propósito es otro dentro de los estadios de la discusión.

En el Problema 1, solo se había planteado la conexión con la propiedad transitiva, y efectivamente esta conexión se realizó (e_{10}). Por otro lado, hubo un episodio (e_{19}) en el que se estableció una conexión con el concepto de homotecia, al explicar cómo se había hecho la construcción del elemento B3 para que no fuese exactamente una simetría.

Junto con estos dos episodios, durante la discusión del Problema 1, se detectaron más conexiones. Por ejemplo, conexiones con otros ejercicios o problemas realizados en otras sesiones de clase o con otros apartados del mismo problema [45], [189a]. También se estableció la conexión con las simetrías de la definición de puntos homólogos aplicada a las translaciones [28]. Otra conexión de una alumna fue señalar las posibles construcciones de una circunferencia sin necesidad de conocer su centro [186b].

En el Problema 2, las conexiones que se habían tenido en cuenta a priori eran más numerosas. Se había planificado la conexión con las posiciones relativas de dos rectas para estudiar en profundidad las soluciones según las posiciones relativas de las mediatrices de puntos homólogos, y así se hizo (e_{41}). Por otro lado, se había planificado el tratamiento del caso particular de los giros de 180°

con la posterior conexión con las simetrías centrales y sus propiedades, y aunque sí se trataron los giros de 180° (e_{46}), no hubo conexión explícita con la simetría central. La última conexión que se había tenido en cuenta antes de implementar la secuencia didáctica era la posible conexión con el cuarto apartado del Problema 1, para aplicar la solución encontrada en el Problema 2. Esta conexión se llevó a cabo hacia el final de la discusión (e_{54}).

Dada la participación de los estudiantes, se dieron otros dos episodios que fueron considerados como conexiones, aunque no se habían tenido en cuenta previamente. El primer ejemplo es la conexión que Inés y Víctor hacen con el concepto de invariantes, en la cual conjeturan que los ángulos de giro de las dos soluciones asociadas a un par de segmentos no orientados suman 180° (e_{33}). Por otro lado, en un momento en el que se están buscando alternativas a las posibles transformaciones que podrían aplicarse a un par de segmentos, Núria establece la conexión con cuerpos de revolución y geometría en el espacio, proponiendo hacer un giro de un segmento respecto un eje de revolución (e_{39}).

Además de los episodios que fueron considerados como conexiones, se hicieron varias conexiones en conversaciones dentro de otros episodios. Un ejemplo podría ser la conexión con la notación en el campo de la geometría, ya que era importante dominar la notación para poder entender la discusión [219c] [223]. También en esta ocasión los participantes plantearon conexiones con otros ejercicios [306b] [445] o con otras intervenciones de la discusión [343b] [425b].

A diferencia de los Problemas 1 y 2, en la discusión del Problema 3, como veremos en el Capítulo 5 ‘Análisis de las oportunidades de aprendizaje’, no se ha detectado ningún episodio que haya consistido en tratar una conexión propiamente. En la preparación de la discusión, se había planeado que, puesto que no se había realizado la conexión del giro de 180° con la simetría central, esto se podría hacer en la discusión del Problema 3, aunque finalmente no ocurrió. Esta falta de conexión puede ser debida a la confluencia de diferentes motivos. Por un lado, debido a la activa e interesante participación de los alumnos, el profesor deja que sean ellos los que guíen la discusión, sin interrumpir sus propuestas. Esto provoca que al final de la discusión, cuando hubiera podido ser un buen momento para la conexión prevista, los alumnos intervienen buscando una generalización que tiene en cuenta las posibles isometrías resultantes de la composición de un número impar de simetrías axiales, y la discusión se centra en ello.

Por otro lado, puesto que se trata de un experimento de enseñanza-aprendizaje realizado en el marco de las sesiones regulares del curso de una escuela, el tiempo aparece como un factor restrictivo. Esto provoca que el profesor tenga que escoger y no pueda tratar las dos ideas interesantes: la que proponen los alumnos, y la que él tenía prevista.

De todos modos, durante la discusión sí que se hacen conexiones internas en un par de ocasiones [570c] [574b]. En estas ocasiones, se establece la conexión con la formalización anterior sobre las características del giro resultante de la composición de dos simetrías axiales con los ejes secantes, para intentar seguir el mismo patrón y caracterizar la translación resultante de hacer la composición entre dos simetrías axiales cuyos ejes son paralelos. También se establece la conexión, pero sin llegar a formalizarla, con la definición de la distancia entre dos rectas, que siempre tiene que ser medida perpendicularmente a las rectas. Esta conexión ocurre cuando los alumnos están intentando construir el vector entre los dos ejes para comprobar que mide la mitad que el vector de la translación resultante [586c].

4.2 Aplicación del instrumento de análisis TRU-Math a la implementación de la secuencia

Una vez analizados los tres problemas y su implementación explicando cómo transcurrió cada fase de la sistemática, aplicamos el instrumento de análisis de clases de Schoenfeld (2013), presentado en el capítulo de metodología. El objetivo de aplicar este instrumento es comprobar a grandes rasgos que la secuencia preparada bajo la sistemática propuesta en esta investigación da lugar a una situación de clase productiva en el sentido de Schoenfeld; es decir, que ha representado una práctica matemáticamente robusta para los estudiantes.

Para ello, aplicamos el instrumento a la secuencia en general y no a cada problema en concreto como se ha hecho hasta ahora. Recordemos que el objeto de estudio de esta investigación son las discusiones en gran grupo, por esta razón más adelante aplicamos el instrumento de análisis creado a propósito en esta tesis para profundizar en este aspecto.

Pasamos a aplicar el instrumento TRU-Math a cada parte de la estructura de clase que se ha considerado, y consecutivamente presentamos una justificación de nuestra interpretación.

A continuación, presentamos una tabla para cada una de las categorías que propone Schoenfeld. En la Tabla 6 incluimos el análisis del planteamiento; en la Tabla 7, el análisis de las exposiciones del profesor, tanto durante los momentos de trabajo individual, como los de trabajo en parejas o en gran grupo; en la Tabla 8, el análisis del trabajo en grupos reducidos, que para nuestro estudio se concreta con el trabajo en parejas; en la Tabla 9, el de las presentaciones de los estudiantes y en la Tabla 10, el de las presentaciones de confusiones o ideas equivocadas.

Finalmente, se concluye con una mirada conjunta a todas las rúbricas (Tabla 11). Esta mirada conjunta, recordemos que no nos da la información detallada, y que en el supuesto de querer profundizar en alguno de los aspectos, el propio autor recomienda hacer un estudio centrado en las situaciones deseadas.

Empezamos con un análisis de los planteamientos de los problemas de la secuencia. En general todos los problemas tienen la mima estructura y están presentados de la misma forma, así, solo con este análisis nos referimos conjuntamente a todas las situaciones de planteamiento durante el transcurso de la secuencia didáctica.

	Matemáticas	Demanda cognitiva	Acceso	Organismo: Autoridad y responsabilidad	Uso de la evaluación
Planteamiento	**3:** Se da más atención a los conceptos y conexiones, con la oportunidad de desarrollar prácticas matemáticas.	**3:** El andamiaje del profesor promueve una lucha productiva por parte de los estudiantes para construir el aprendizaje y participar en prácticas matemáticas.	**2:** Se ven esfuerzos para invitar a otros estudiantes a participar.	**2:** Los estudiantes tienen un tiempo para explicar, pero en general su papel es reactivo. El profesor sigue siendo la autoridad.	**2:** Se obtienen los razonamientos de los estudiantes o se hace referencia a ellos y se corrigen los errores.
Justificación	El planteamiento de los problemas está pensado para que se trabajen los conceptos y conexiones entre ellos de forma activa. No son ejercicios mecánicos. Al estar pensados para ser resueltos con la ayuda de la tecnología, aumentan el nivel de la práctica matemática en la que los alumnos se ven envueltos, porque en general tienen que crear ellos sus construcciones.	Los problemas de la secuencia están planteados de forma abierta y eso hace que los alumnos tengan que enfrentarse a elaborar una solución de forma activa. Además están planteados para trabajar por parejas con la ayuda del programa de geometría dinámica. Esto anima a los estudiantes a participar en la práctica matemática.	Todos los problemas se plantean de forma que primero los estudiantes tienen que leer el problema individualmente para conocer la situación del problema, y para pensar una estrategia de resolución o de abordaje. Después tienen que trabajar por parejas, lo que impulsa la participación activa de todos mientras el profesor realiza una monitorización. No todos los estudiantes participan por igual y quizá se podrían hacer más esfuerzos para asegurar que participan todos de forma activa.	Tal y como están planteados los problemas, no prestan especial atención a que los alumnos ganen autoridad y responsabilidad por sí solos, ya que la máxima autoridad sigue siendo el profesor que es quien plantea los problemas y el trabajo en clase. Hay momentos del planteamiento, que sí fomentan la apropiación de la autoridad, como en la discusión en gran grupo. Esto podría tenerse en cuenta para futuras ocasiones.	El planteamiento de los problemas y de la forma de trabajar incluyen la atención a los razonamientos de los estudiantes, ya que se pide explícitamente que los entreguen por escrito en dos ocasiones, tras el trabajo por parejas y tras la discusión en gran grupo. Pero el planteamiento está fijado, y no es frecuente un cambio de planteamiento con el retorno de los razonamientos entregados de los alumnos.

Tabla 6. Análisis del planteamiento

En el análisis del planteamiento podemos ver que en general se obtienen buenas puntuaciones aunque podría haberse prestado más atención a la incorporación activa de todos los estudiantes. En lo que sigue, presentamos el análisis de las exposiciones del profesor, realizadas durante la implementación de toda la secuencia didáctica.

	Matemáticas	Demanda cognitiva	Acceso	Organismo: Autoridad y responsabilidad	Uso de la evaluación
Exposición del profesor	**3:** Se da más atención a los conceptos y conexiones, con la oportunidad de desarrollar prácticas matemáticas.	**3:** El andamiaje del profesor promueve una lucha productiva de los estudiantes para construir el aprendizaje y participar en prácticas matemáticas.	**2:** Se ven esfuerzos para invitar a otros estudiantes a participar.	**2:** Los estudiantes tienen un tiempo para explicar, pero en general con un papel reactivo. El profesor sigue siendo la autoridad.	**3:** Se tienen en cuenta los razonamientos de los estudiantes y se discuten, a veces afectando a la estructura de la clase preparada de antemano.
Justificación	La secuencia está pensada para que los alumnos construyan conocimiento trabajando sobre todo en pareja y en gran grupo ; así las exposiciones del profesor no son parte central de las clases, aunque a menudo son necesarias para ayudar a los alumnos a establecer conexiones matemáticamente pertinentes que ellos no verbalizan.	En muchas ocasiones, el discurso del profesor no es solo explicativo sino que plantea nuevos retos y preguntas, a menudo guiado por el árbol del problema. Así, hay un nivel elevado de demanda cognitiva de las exposiciones del profesor.	Durante las exposiciones del profesor, a menudo se da la palabra a estudiantes, o se pregunta su opinión. Pero en otras ocasiones esto no ocurre. Aunque se hacen esfuerzos para que participen, no se sigue una dinámica que facilite el acceso a todos los alumnos.	Aunque en general los alumnos pueden expresar su opinión, durante las exposiciones del profesor, es cuando más callados están. En la escuela de la experimentación, los alumnos tienen interiorizadas unas normas de participación muy estrictas; cuando el profesor habla, no acostumbran a participar de modo espontáneo.	El profesor hace uso de los razonamientos de los estudiantes durante sus exposiciones; intenta conectar y ayudar a reflexionar sobre aspectos que se han dicho o realizado durante el trabajo previo. Dada la anticipación del trabajo en parejas, lleva a cabo estas acciones con éxito. Incluso a veces el hecho de querer intervenir requiere cambiar la planificación pensada. Normalmente las exposiciones del profesor no aparecen en el diseño instructivo de la secuencia, que está basada en la participación de los estudiantes.

Tabla 7. Análisis de la exposición del profesor

Tras el análisis de la exposición del profesor según las diferentes dimensiones presentadas, observamos que aunque las exposiciones del profesor no son la parte central de las clases, sus intervenciones son importantes en diversas situaciones.

Dejamos el análisis de las discusiones en gran grupo para un análisis más detallado y damos paso al análisis del trabajo en grupos reducidos o parejas.

	Matemáticas	Demanda cognitiva	Acceso	Organismo: Autoridad y responsabilidad	Uso de la evaluación
Trabajo en grupos reducidos	**3:** Se da más atención a los conceptos y conexiones, con la oportunidad de desarrollar prácticas matemáticas.	**3:** El andamiaje del profesor promueve una lucha productiva de los estudiantes para construir el aprendizaje y participar en prácticas matemáticas.	**3:** Hay claros esfuerzos para invitar y ayudar a participar a todos los estudiantes.	**3:** Se anima a los alumnos a explicar y responder a las ideas matemáticas. Se puede oír la voz de los estudiantes.	**2:** Se obtienen los razonamientos de los estudiantes o se hace referencia a ellos y se corrigen los errores.
Justificación	Durante el trabajo en pareja, los alumnos realizan directamente prácticas matemáticas, ya que las características de los problemas escogidos lo permiten.	Se da mucha importancia a los conceptos y las conexiones, ya que el andamiaje del profesor durante el trabajo por parejas con preguntas que va proponiendo para profundizar, van en este sentido.	En el trabajo en grupos reducidos, el profesor ha escogido el trabajo por parejas, ya que así fuerza la participación de todos los estudiantes. El hecho de que tengan que compartir ordenador y entregar un documento consensuado, acentúa la participación activa de todos los participantes.	Durante el trabajo en parejas los alumnos son protagonistas de su aprendizaje, ya que se deja total libertad a que cada grupo hable y resuelva el problema sin seguir consignas del profesor. Solo se da un andamiaje, pero porque el grupo lo pide.	El uso de la evaluación no es exhaustivo durante el trabajo en parejas. Sí se van a recoger los trabajos de los alumnos para su evaluación, pero durante las sesiones de trabajo por parejas, se deja que los alumnos aprendan por sí solo de sus errores. Solo si ellos solicitan ayuda, pueden ser corregidos en el momento.

Tabla 8. Análisis del trabajo en grupos reducidos

Del análisis general del trabajo por parejas, se desprende un buen entendimiento entre la secuencia planteada y su implementación. Es importante que muchos de los aspectos estén tan cuidados. De todos modos, ya nos da muestras de la importancia de revisar el tema de la evaluación para futuras mejoras.

Tras el análisis del trabajo en grupos reducidos, que se corresponde con parejas, damos paso al análisis de las presentaciones de los estudiantes. Estas presentaciones se llevan a cabo normalmente durante lo que consideramos discusiones en gran grupo. Aunque las presentaciones las analizamos aquí de forma general, también se han tenido en cuenta y se han analizado detalladamente dentro del análisis de la discusión en gran grupo.

	Matemáticas	Demanda cognitiva	Acceso	Organismo: Autoridad y responsabilidad	Uso de la evaluación
Presentaciones de los estudiantes	**2:** Se da más atención a los conceptos y a las conexiones matemáticas pero sigue dándose mínima importancia a las prácticas matemáticas.	**2:** Los estudiantes tienen oportunidades para establecer conexiones e involucrarse en prácticas, pero parte del reto está acompañado por una guía estricta.	**1:** No hay un esfuerzo aparente para mejorar el acceso y hay patrones desiguales de participación de los estudiantes.	**2:** Los estudiantes tienen un tiempo para explicar, pero en general asumen un papel reactivo. El profesor sigue siendo la autoridad.	**3:** Se tienen en cuenta los razonamientos de los estudiantes y se discuten, a veces afectando a la estructura de la clase preparada de antemano.
Justificación	Normalmente los estudiantes durante sus presentaciones dan más importancia a los conceptos, y les cuesta darse cuenta de que las prácticas matemáticas son importantes. En el análisis detallado se ve que los alumnos van mejorando en este aspecto y que se generan muchas oportunidades de aprendizaje de auto-gestión en la realización de prácticas matemáticas.	Las presentaciones de los estudiantes, incluidas dentro de las discusiones en gran grupo, están guiadas por el profesor, y a menudo no se deja la libertad suficiente para que sean ellos solos los que construyan conocimiento matemático.	Las presentaciones de los estudiantes no son equilibradas. Por falta de tiempo y por la complejidad de la situación, es difícil que expongan sus presentaciones todos los estudiantes. Aún así, el profesor podría esforzarse más para hacer intervenir a todos los estudiantes, lo que a veces entra en contradicción con la preparación de la fase de secuenciación.	En general el profesor deja hablar a los estudiantes y exponer sus ideas pero sigue siendo la autoridad. Esto es debido a que en la escuela los alumnos están acostumbrados a trabajar así. Durante el análisis de las discusiones en gran grupo se observa como los alumnos van ganando protagonismo y el profesor deposita más confianza en ellos.	Se consideran centrales las explicaciones de los alumnos. Como se verá en el análisis detallado, en diversas ocasiones esto provoca un cambio en la estructura de las discusiones que estaban preparadas. Respecto a la corrección de presentaciones erróneas, se intenta que sean los compañeros quienes corrijan, pero sino, se encarga el profesor.

Tabla 9. Análisis de las presentaciones de los estudiantes

En el análisis de las presentaciones de los estudiantes, se ha evidenciado una falta de atención por parte del profesor al acceso de los alumnos a la participación. Este hecho nos alerta de una posible mejora a tener en cuenta en futuras implementaciones.

Tras este análisis, damos paso al análisis de la presentación de confusiones e ideas equivocadas. Recordemos que este aspecto también estará tratado detalladamente dentro de la parte de análisis de los datos de las discusiones en gran grupo.

	Matemáticas	Demanda cognitiva	Acceso	Organismo: Autoridad y responsabilidad	Uso de la evaluación
Presentación de confusiones o ideas equivocadas	**3:** Se da más atención a los conceptos y conexiones, con la oportunidad de desarrollar prácticas matemáticas.	**3:** El andamiaje del profesor promueve una lucha productiva de los estudiantes para construir el aprendizaje y participar en prácticas matemáticas.	**3:** Hay claros esfuerzos para invitar y ayudar a participar a todos los estudiantes	**3:** Se anima a los alumnos a explicar y responder a las ideas matemáticas. Se puede oír la voz de los estudiantes.	**3:** Se tienen en cuenta los razonamientos de los estudiantes y se discuten, a veces afectando a la estructura de la clase preparada de antemano.
Justificación	Se acostumbra a dar más importancia a las confusiones o ideas equivocadas sobre las prácticas matemáticas. Tanto los alumnos durante las discusiones en gran grupo como el profesor durante el trabajo en parejas y en las discusiones en gran grupo, prestan mucha atención a presentar ideas equivocadas.	La presentación de equivocaciones por parte del profesor siempre se plantean en forma de demanda cognitiva, donde los alumnos tengan que esforzarse para construir conceptos o procedimientos de forma adecuada.	En lo que respecta a la presentación de ideas equivocadas, hay un esfuerzo constante del profesor para que los alumnos se sientan libres de preguntar dudas y exponer ideas; todas son respetadas y entre todos verificadas y modificadas.	Es una característica del profesor querer que los otros estudiantes ayuden a corregir y explicar conceptos mal interpretados e ideas erróneas. En general deja la responsabilidad a los estudiantes y promueve que se escuche su voz.	En general se tienen muy en cuenta las presentaciones de ideas equivocadas de los estudiantes y no son penalizadas en la evaluación. Tras la discusión en gran grupo, donde pueden haber presentado sus dudas, se les deja revisar el trabajo realizado en pareja para la posterior modificación.

Tabla 10. Análisis de las presentaciones de confusiones e ideas equivocadas

La tabla que acabamos de mostrar se trata del análisis del último aspecto propuesto por Schoenfeld. Hacemos notar la alta puntuación del sistema de rúbricas en este contexto.

Aunque hemos ido justificando en cada caso la elección de cada rúbrica, presentamos en la Tabla 11 una visión generalizada para interpretar conjuntamente el análisis global de la implementación de la secuencia didáctica.

	Matemáticas	Demanda cognitiva	Acceso	Organismo: autoridad y responsabilidad	Uso de la evaluación
Planteamiento	3	3	2	2	2
Exposición del profesor	3	3	2	2	3
Trabajo en grupos reducidos	3	3	3	3	2
Presentaciones de los estudiantes	2	2	1	2	3
Presentación de confusiones e ideas equivocadas	3	3	3	3	3

Tabla 11. Resumen numérico del análisis TRU-Math

Si nos fijamos en la representación global, en general podemos decir que la implementación de la secuencia didáctica ha sido satisfactoria, aunque es mejorable en algunos aspectos. Las matemáticas y la demanda cognitiva son los aspectos más potentes de la secuencia, mientras que el acceso es el punto más débil. Este aspecto debería tenerse en cuenta para posteriores implementaciones de la secuencia, lo cual se verá reflejado en el análisis detallado de las discusiones en gran grupo, momento en el que el acceso es más débil. Para intentar garantizar un orden en las clases, y una calidad en la secuenciación de las intervenciones, a fin de que se cumplan los objetivos matemáticos planteados previamente en la anticipación de cada problema, el profesor impone reglas estrictas y no deja participar libremente a los estudiantes. Por otro lado, dada la experiencia del profesor trabajando en estas situaciones, es difícil conseguir esta dinámica de trabajo en pocas sesiones de clase. Esto nos hace pensar que quizá se debería plantear la implementación de este método de trabajo más a menudo, con otros temas curriculares para que los alumnos estuvieran acostumbrados y participaran con mayor naturalidad.

En relación con la autoridad y responsabilidad y el uso de la evaluación, aunque en general se ha valorado positivamente, aspectos mejorables como el trabajo de las reflexiones personales sobre el propio proceso de aprendizaje, que en muchas ocasiones los alumnos no dominan lo bastante. El objetivo de este análisis era analizar la implementación de la secuencia de un modo general para garantizar que la práctica de enseñanza-aprendizaje era eficiente y que tendría sentido hacer un estudio en profundidad de una de las partes; en nuestro caso, centramos la atención en las discusiones en gran grupo, ya que en global se valora de forma positiva su implementación.

5 Análisis de las oportunidades de aprendizaje

En referencia al segundo objetivo del trabajo de tesis, es importante comprobar que la discusión en gran grupo ha generado situaciones potencialmente ricas que crean oportunidades de aprendizaje matemático para los estudiantes (5.1). Sin embargo, no es suficiente quedarnos en este nivel de comprensión. También se necesita probar la documentación de evidencias sobre el aprovechamiento de los estudiantes de algunas de las oportunidades de aprendizaje detectadas (5.2). Para ello, estructuramos este capítulo en dos apartados; cada uno pretende cumplir con uno de los propósitos que acabamos de mencionar.

5.1 Aplicación del instrumento de análisis 'Detector de oportunidades de aprendizaje' a las discusiones en gran grupo

Como se ha comentado en el Capítulo 3 'Metodología', ha sido imprescindible la creación de un instrumento de análisis para tratar el volumen de datos recogidos en las sesiones de puesta en común de los problemas. En este apartado exponemos de forma detallada el análisis de los datos utilizando el instrumento 'Detector de oportunidades de aprendizaje', presentado previamente en el tercer capítulo.

Recordemos brevemente que, en primer lugar, se hace la partición de las puestas en común en episodios según la estructura de tipos de orquestación y estadios de las discusiones en gran grupo que nos facilita el instrumento diseñado a tal efecto.

Seguidamente se interpretan las intervenciones de los participantes en cada episodio según la naturaleza de dichas intervenciones, teniendo en cuenta si se refieren a intervenciones de los ejes temático, interlocutivo o instrumental.

Una vez realizada la interpretación de las intervenciones, se añaden los conectores de influencia a las intervenciones para visualizar relaciones entre ellas. El esquema visual que representa de forma concisa el episodio facilita, a partir del énfasis en las interacciones entre participantes, la detección de oportunidades de aprendizaje que se puedan haber dado durante el episodio. Tal y como se ha definido en el capítulo de marco teórico, la noción de oportunidad de aprendizaje no debe confundirse con la de aprendizaje, puesto que la primera indica un escenario propicio al aprendizaje sin garantizar necesariamente que se produzca progreso en el ámbito de la construcción de conocimiento matemático.

Posteriormente, las oportunidades detectadas son agrupadas según si se trata de aprendizaje de conceptos, de procesos o de gestión. Recordemos que las oportunidades de aprendizaje de aspectos de gestión no son oportunidades orientadas a aprender a gestionar la clase sino que deben entenderse como una aproximación al dominio de la autogestión, que a su vez contribuye a que los alumnos tomen conciencia de su propio proceso de aprendizaje.

Además, durante el análisis y aunque no es el objetivo principal del instrumento que se está comentando, cuando se han detectado indicios de progreso en los alumnos, estos indicios se han recogido para disponer de evidencias del progreso como grupo clase durante las puestas en común a lo largo de la secuencia.

En este apartado del análisis de datos, incorporamos un análisis detallado para que se pueda ver minuciosamente de qué manera se ha llevado a cabo todo el procedimiento. A continuación presentamos el análisis de la puesta en común del Problema 1. Luego se mostrarán los resúmenes de los análisis de los Problemas 2 y 3, cuyos análisis detallados se hallan en el Anexo III.

5.1.1 Puesta en común del apartado 1 del Problema 1

La estructura de esta sesión de puesta en común es peculiar debido a que el Problema 1 tiene cuatro apartados con cierto paralelismo: el objetivo de cada apartado es el mismo, encontrar mediante qué transformación se ha pasado de una figura fija a otras. Así, se ha realizado un esquema de cada apartado del problema, como se ve en las tablas que adjuntamos a lo largo de la presentación del análisis.

La primera estructura que mostramos es la del primer apartado del problema, como se observa en la Tabla 12.

Discusión en gran grupo (Problema 1, barco B1)	Situación del problema	Presentación de una solución (argumentada)	Estudio de las estrategias para resolver o argumentar	Estudio de casos particulares o extremos	Contraste entre diferentes soluciones	Conexiones con otras situaciones	Generalización y conceptualización	Reflexión sobre el progreso matemático	*(Tipos de estadio)*
Demostración técnica									
Explicación de la pantalla	(e_1)								
Conexión pantalla-pizarra									
Discusión de pantalla			(e_4), (e_6), (e_9)	(e_7)		(e_{10})	(e_8)		
Descubrir y mostrar									
Trabajo del sherpa		(e_2)	(e_3), (e_5)						
(Tipos de orquestación)									

Tabla 12. Estructura del apartado 1 de la discusión del Problema 1

Esta representación esquemática aporta una información global sobre la situación de clase que se da. En primer lugar, observamos ciertas características en las acciones del profesor. Por un lado, se evidencia que la mayoría de episodios están centrados en los tipos de orquestación denominados *Discutir la pantalla* y *Trabajo del sherpa*, con lo cual se ve que la discusión se ha centrado en la participación de los alumnos. Por otro lado, si fijamos la atención en la sucesión de los episodios, se observa que hay saltos en el orden en lugar de seguir uno tras otro los estadios planteados. Sin embargo, los saltos son indicativos de una cierta flexibilidad por parte del profesor; éste deja que los alumnos marquen el ritmo de la clase y hagan referencia a los distintos estadios en un orden marcado por iniciativa de ellos.

En adelante mostramos un estudio detallado de cada episodio por orden cronológico donde, en cada caso, se especifica: i) la transcripción, presentada en forma de tabla; ii) la interpretación de los turnos de los participantes, un esquema que también proporciona el instrumento de análisis para observar la estructura de las implicaciones de los turnos en cada episodio; iii) la descripción de la situación de cada uno de ellos, para contextualizar el episodio dentro de la discusión; y finalmente iv) la interpretación de las oportunidades de aprendizaje que se han detectado, agrupadas según los tres tipos presentados, las de conceptos, las de procesos y las de gestión.

Episodio 1 (e_1): Recordatorio del enunciado

Presentamos el análisis del primer episodio construido para el Problema 1, siguiendo la estructura comentada en el apartado anterior.

#	Participante	Intervención	Interpretación
1	*Profesor:*	*A veure, mireu aquest. Teniu el vaixell aquest de color negre, vale? I hem d'aconseguir els altres amb les transformacions que coneixem.*	Recapitulación

Tabla 13. Transcripción e interpretación del Episodio 1

En este primer episodio, el profesor trae a colación el enunciado del problema [1] que los alumnos han trabajado previamente por parejas, por eso definimos el estadio de la puesta en común que se está dando como *Situación del problema*. Por otro lado, el tipo de orquestación que se lleva a cabo es una *Explicación de la pantalla*, ya que el profesor muestra en el proyector la construcción inicial con GeoGebra (Figura 26) y explica lo que originariamente pedía el problema.

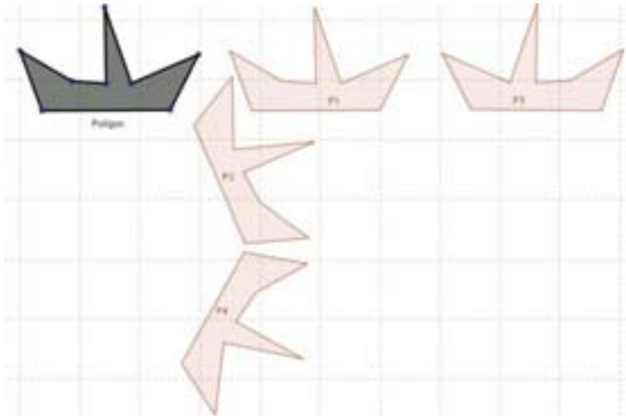


Figura 26. Construcción del enunciado del Problema 1

Tras la descripción de lo que ocurre en este breve episodio que se reduce a un único turno, representamos el esquema visual. Puesto que se produce solo una intervención, no hay conectores de influencia en la representación gráfica.

Figura 27. Esquema visual del Episodio 1

Oportunidades de aprendizaje:

Desde un punto de vista interpretativo y tras examinar el esquema del episodio (Figura 27), no observamos ninguna oportunidad de aprendizaje, ya que simplemente se está situando a los alumnos para iniciar la puesta en común.

Episodio 2 (e_2): Identificación de una translación

Tras el primer episodio donde el profesor introduce el problema, en el segundo episodio, la discusión se centra en el primer apartado del problema.

#	Participante	Intervención	Interpretación
2	*Profesor:*	*A veure, Víctor, el... el B1, per exemple, comencem pel principi, de què l'heu pintat i què és?*	Petición de solución
3	*Víctor:*	*De... d'una translació, però no sé de quin color era.*	Exposición sin argumentación
4	*Profesor:*	*Bueno, és igual.*	
5	*Sara:*	*Blau.*	
6	*Grupo clase:*	*Vermell.*	
7	*Profesor:*	*[a] Vale, la translació. [b]Tothom veu clar que això era una translació?*	a. Validación b. Establecimiento de consenso
8	*Grupo clase:*	*Sí.*	Asentimiento

Tabla 14. Transcripción e interpretación del Episodio 2

Caracterizamos este segundo episodio según el estadio *Presentación de una solución* porque un alumno expone la solución que ha encontrado con su compañero durante el trabajo por parejas. El tipo de orquestación en este episodio es *Trabajo del sherpa*, ya que es el alumno quien hace explícita la solución animado por el profesor.

Si nos fijamos en la interacción entre participantes [2-3-4-5-6], vemos que la petición de la solución por parte del profesor [2] genera que el alumno la exponga, aunque no argumente su elección [3]. Tras haber dado una solución, el profesor la valida [7a]. Finalmente, en la última intervención del profesor, se observa que mediante una pregunta [7b] que los alumnos responden afirmativamente [8], se busca consenso para continuar con la resolución del problema.

Tras la descripción de lo sucedido en el episodio, interpretamos que la solución que propone Víctor [3] es consecuencia de la petición de la solución que hace el profesor [2]. Además, la validación posterior del profesor [7a] viene motivada por la solución presentada por Víctor [3]. Por eso, marcamos conectores de influencia entre los tres códigos. De forma análoga, el asentimiento generalizado del grupo clase [8] viene motivado por el intento de búsqueda de consenso por parte del profesor [7b]. En cambio, no parece razonable que el intento de búsqueda de consenso dependa de la solución dada por el alumno, sino que más bien parece una práctica habitual que el profesor tiene interiorizada.

Dadas las justificaciones de los conectores de influencia entre las intervenciones de los participantes, las introducimos en el esquema visual del episodio de la Figura 28.

Figura 28. Esquema visual del Episodio 2

Oportunidades de aprendizaje:

Tras la descripción e interpretación de las intervenciones del episodio, nos centramos en las interacciones que han sido descritas para detectar oportunidades agrupadas según la estructura prevista.

Oportunidad de concepto:

- *Revisar la noción de translación.*

  Tras la recapitulación del anterior, se mantiene proyectada la imagen del enunciado en la pantalla. Así, el hecho de que un compañero presente la solución como una translación y que el profesor la valide, provoca que otros alumnos puedan revisar la noción de translación y recordarla gráficamente.

Oportunidades de gestión:

- *Aprender a auto-corregir la solución.*

  Si nos centramos en la interacción inicial entre el profesor y el estudiante, detectamos una oportunidad de aprender a auto-corregir la solución ya que ésta es expuesta por el alumno y posteriormente validada por el profesor. Sin embargo, no se aporta ninguna explicación más, con lo que se entiende que el alumno que no tenga la misma solución ya lo hará notar en la búsqueda de consenso.

- *Aprender la importancia de preguntar dudas.*

  El hecho de que, una vez validada la respuesta por parte del profesor, no se continúe directamente con la resolución del problema y se establezca consenso antes de proseguir, es una oportunidad de aprendizaje sobre la importancia de plantear las dudas que puedan surgir para seguir con la resolución del problema. El profesor es consciente de lo abiertos y ricos que son los problemas y del alto grado de profundidad al que se llega durante las discusiones en gran grupo. Por esta razón, si un estudiante no resuelve sus dudas, será difícil que sea capaz de seguir la discusión.

Episodio 3 (e_3): Construcción de un vector

Tras el episodio anterior, en el que se presenta la solución del primer apartado del problema pero no su resolución, en el episodio siguiente se trabaja una estrategia para argumentar la solución propuesta.

#	Participante	Intervención	Interpretación
9	*Profesor:*	*I per comprovar això què hauríem de fer? Adrià.*	Petición de argumentación
10	*Adrià:*	*Un vector.*	Justificación empírica
11	*Profesor:*	*Un vector? Un?*	
12	*Adrià:*	*Sí, bueno, no...*	

13	*José Antonio:*	*Sí, en aquest cas sí.*	
14	*Profesor:*	*Per què? Faig un vector, però un vector com?*	Petición de formalización
15	*Adrià:*	*De... de dos punts o sigui d'aquest punt, per exemple...*	Formalización
16	*Profesor:*	*D'aquest?*	
17	*Adrià:*	*Sí.*	
18	*Profesor:*	*Amb?*	
19	*Adrià:*	*Amb el mateix punt de l'altra figura.*	
20	*Profesor:*	*Com... aquests dos punts com es diuen, que li he explicat algú aquí abans?*	Corrección de vocabulario matemático
21	*Adrià:*	*Homo... no sé què.*	Uso de vocabulario específico
22	*Sergio:*	*Conseqüents...*	
23	*Maurici:*	*Ah, no, homòlegs!*	
24	*Víctor:*	*Homòlegs, homòlegs.*	
25	*Profesor:*	*Homòlegs.*	Validación
26	*Grupo clase:*	*Homòlegs, homòlegs, sí!*	Asentimiento
27	*Profesor:*	*Vale. Un punt amb la seva parella, com si diguéssim de la figura amb què s'ha transformat, és el seu homòleg.*	Recapitulación
28	*Sara:*	*També d'una simetria, o no?*	Conexión
29	*Profesor:*	*Com? Sí, sí, per la simetria el punt aquest de l'estrella amb la seva parella, aquests dos punts són homòlegs. Per tant, si em vol fer ajuntar aquest punt amb el seu homòleg, de B1, jo entenc que és aquest. Vale? Llavors, ara un moment que no sé si ho estic fent a ull això. No, ja me l'ha entès que és... Vale.*	Validación

Tabla 15. Transcripción e interpretación del Episodio 3

En el episodio actual, tras una petición explícita del profesor [9], se trabaja el estudio de una estrategia para argumentar el problema. La orquestación que organiza este episodio es del tipo *Trabajo del sherpa*, ya que es un alumno el que expone su forma de justificar el problema.

Si nos centramos en las intervenciones de los participantes, tras la petición de argumentación de la solución expuesta por el estudiante en el episodio anterior [9], un nuevo estudiante empieza a explicar cómo se podría comprobar que el resultado es correcto [10], es decir, que efectivamente la figura es una translación. Durante esta explicación, se pone de manifiesto la falta de formalización del alumno al intentar expresar oralmente la construcción de un vector [10-12]. Esta falta de formalización provoca una intervención del profesor para incidir en la correcta formalización [14]. Hay que hacer notar que en su intervención, el profesor solo recuerda al alumno la importancia de formalizar correctamente, sin hacer referencia a sus conocimientos. Posteriormente, se observa que el alumno conoce la forma de expresar un vector dando los dos extremos que lo definen [15]. Es entonces cuando éste intenta expresar el punto inicial y final que definen el vector deseado sin utilizar el vocabulario específico para expresar un concepto matemático como el de pareja de puntos homólogos [19]. Así, el profesor decide intervenir nuevamente para resaltar esta otra formalización [20]. En este momento otro estudiante interviene, aportando la palabra buscada [24] y otros alumnos del grupo la corroboran [26] a la vez que el profesor la valida [25].

Debido a esta interrupción para corregir vocabulario, el profesor considera oportuno hacer una recapitulación [27] y recuperar el hilo argumental donde se estaba trabajando el concepto de definición de un vector.

En relación con la formalización del vocabulario, un tercer estudiante plantea una pregunta que conecta el concepto de puntos homólogos aplicado a las translaciones con otra isometría, la simetría [28]. Finalmente, el profesor valida esta conexión [29].

Desde un punto de vista interpretativo, las intervenciones se van sucediendo de un modo que parece más o menos predecible. No obstante, hay una ocasión que parece seguir un orden impredecible. Hacia el final del episodio se produce una recapitulación por parte del profesor; es importante por la conexión que tiene con la formalización que se estaba haciendo antes de la interrupción por corrección de vocabulario que el profesor ha considerado oportuna. Por ello, hemos marcado el conector de influencia entre la formalización y la recapitulación.

Una vez definido el episodio e interpretado según los parámetros indicados, añadimos los conectores de influencia que se han especificado. Tras introducir esta información en la representación visual del episodio, se representa en la Figura 29.

Figura 29. Esquema visual del Episodio 3

Oportunidades de aprendizaje:

Fijándonos sobre todo en las interacciones representadas en esta primera fase del análisis, hemos detectado las oportunidades de aprendizaje que presentamos a continuación. Aunque no hay un medidor de riqueza de los episodios, ni tendría sentido que lo hubiera, observamos que en este episodio se han detectado oportunidades de aprendizaje de los tres tipos construidos. Por este motivo, afirmamos que el episodio es rico.

Oportunidades de concepto:

- *Aprender que una translación viene determinada por un vector.*

  El hecho de que el alumno construya un vector para justificar la veracidad de la respuesta que se ha presentado en el episodio anterior, genera la oportunidad de aprender que los vectores son los elementos que definen las translaciones.
- *Aprender qué elementos determinan o definen un vector.*

  La interacción entre Adrià y el profesor en la cual se pide la definición correcta de vector, que posteriormente el alumno expone –aunque sin rigor lingüístico– lleva al posible aprendizaje de que un vector está definido por su punto inicial y su punto final.
- *Aprender la definición de puntos homólogos para el caso de la translación.*

  La necesidad que encuentra el profesor de corregir una expresión errónea de vocabulario matemático crea la oportunidad de aprender la definición de puntos homólogos en una translación. El profesor ofrece la posibilidad de hacer la corrección al resto de los compañeros y son éstos los que apuntan la expresión adecuada, con lo cual consolidan este conocimiento con la posterior validación del profesor.
- *Aprender que el concepto de punto homólogo es generalizable a todas las transformaciones del plano.*

  Cuando Sara realiza la conexión con la simetría, se genera la oportunidad de aprender la aplicabilidad del concepto de puntos homólogos al resto de isometrías.

Oportunidades de proceso:

- *Aprender a formalizar matemáticamente.*

  Durante la interacción en la que se pasa de expresar un vector como una flecha a expresarlo como segmento orientado entre dos puntos, se genera en los alumnos la oportunidad de aprender el proceso de formalizar fijándose en el cambio en el discurso, al sustituir vocabulario coloquial por vocabulario técnico.

- *Aprender a conectar definiciones o expresiones de un ámbito concreto con uno más general.*

  El hecho de que un estudiante conecte una situación estudiada previamente, a partir de aplicar la definición en la situación que se está trabajando, puede generar en los alumnos una oportunidad de aprender la posibilidad de conectar fenómenos estudiados con otras situaciones análogas.

Oportunidades de gestión:

- *Aprender la necesidad de argumentar.*

  El hecho de que el profesor no continúe con otro apartado del problema sin antes pedir que se argumente la solución expresada en el episodio anterior, ofrece a los alumnos la oportunidad de aprender la importancia de justificar y argumentar las respuestas dadas.

- *Aprender la necesidad de expresarse con el lenguaje matemático adecuado.*

  El hecho de que se haya corregido el vocabulario utilizado por un alumno durante su explicación y que los compañeros hayan puesto de manifiesto que ese conocimiento se había trabajado antes, genera la oportunidad de aprender la importancia del uso del vocabulario adecuado cuando se dispone de él.

Episodio 4 (e_4): Propuesta de desplazamiento del vector

Recordemos que en el episodio anterior se había empezado con el objetivo de encontrar una argumentación a la solución que había propuesto un estudiante, pero durante el mismo, diversas intervenciones habían desviado el objetivo del profesor, así que ahora se vuelve a insistir en la argumentación de la solución.

#	Participante	Intervención	Interpretación
30	*Profesor:*	*A aquest vector què li passa? Només per haver fet això ja sé que és una translació?*	Invitación a la generalización
31	*Grupo classe:*	*No.*	
32	*Profesor:*	*Inés.*	
33	*Inés:*	*Ara si movem aquest vector...*	Justificación empírica
34	*Profesor:*	*[a] Vale, ara no sé si me'l deixarà moure, eh? [b] No.*	a. Comprobación de una propiedad que se cuestiona b. Obstáculo tecnológico

Tabla 16. Transcripción e interpretación del Episodio 4

Este episodio está definido por una orquestación del tipo *Discutir la pantalla*, ya que se intenta seguir la argumentación a partir de la construcción en la pantalla elaborada en el episodio anterior. En relación con el punto del problema que se explora, encontramos una estrategia de argumentación, ya que se sigue trabajando con la idea de que haber construido un vector entre puntos homólogos no demuestra que el barco sea una translación de la figura inicial.

Si nos fijamos en las interacciones entre participantes, en este episodio se observa cómo el profesor hace una intervención [30] para ayudar a los alumnos a generalizar la estrategia argumentativa que han expuesto en el episodio anterior. En consecuencia, Inés propone una acción técnica [33] que podría servir de justificación para mover el vector y ver si la figura entera se transforma mediante dicho vector. Esa intervención incita al profesor a comprobar la propiedad que expone Inés con la ayuda del GeoGebra en la pantalla [34a], pero pronto verbaliza que el programa no dejará utilizar esa técnica. De ahí, interpretamos que se experimenta un obstáculo tecnológico [34b].

A partir de la transcripción analizada según el tipo de intervenciones, nos disponemos a realizar la estructura del episodio añadiendo los conectores de influencia que consideramos relevantes. Como en otras ocasiones, las intervenciones están relacionadas de forma consecutiva. En particular, pasamos a detallar el obstáculo tecnológico. Lo vemos como una situación que ocurre porque se está haciendo una comprobación en la pantalla, pero que a la vez también repercute en el tipo de comprobación que se realiza porque debido al obstáculo es probable que se replantee la situación. De acuerdo con estas consideraciones, la estructura del episodio se refleja en el gráfico de la Figura 30.

Figura 30. Esquema visual del Episodio 4

Oportunidades de aprendizaje:

De este episodio se desprenden las oportunidades de aprendizaje que detallamos a continuación.

Oportunidad de proceso:

- *Aprender a usar la tecnología para justificar empíricamente.*

  El hecho de que Inés proponga una acción para realizar con el GeoGebra en respuesta a la invitación a la generalización del profesor, genera la oportunidad de aprender que hay ocasiones donde es útil usar la tecnología para justificar empíricamente una propiedad matemático-geométrica.

Oportunidades de gestión:

- *Aprender la necesidad de generalizar.*

  El hecho de que tras el episodio anterior el profesor invite a la generalización promueve la oportunidad de aprender la importancia de generalizar las argumentaciones realizadas.

- *Aprender la importancia de buscar alternativas matemáticas cuando una estrategia no funciona.*

  La propuesta de Inés, relativa a mover el vector para comprobar si la figura entera se transforma mediante una translación, no es una acción adecuada teniendo en cuenta cómo está construido el enunciado del problema. La imagen de la figura ya estaba creada como transformación de un vector dado pero oculto; así, la creación de un nuevo vector no podrá transformar nunca la imagen de la figura, que está fija. Este obstáculo tecnológico genera la oportunidad de buscar alternativas a esta argumentación.

Episodio 5 (e_5): Comparación de dos vectores

En el episodio anterior se había propuesto una estrategia para argumentar el problema por parte de una alumna, pero un obstáculo tecnológico hace replantear la estrategia y la misma alumna propone otra, como se verá en este nuevo episodio.

#	Participante	Intervención	Interpretación
35	*Inés:*	*O, sinó, si fem un vector, em, igual, des d'un altre punt fins al seu punt homòleg.*	Búsqueda de alternativas
36	*Profesor:*	*Per exemple: aquest aquí.*	Complemento de la explicación
37	*Inés:*	*Sí, després fem l'eina que compara els dos.*	Exposición sin argumentación
38	*Profesor:*	*[a] L'eina que compara, [b] no sé si tothom la coneix, eh? L'eina que*	a. Demostración técnica

		compara, amb aquest interrogant, [c] li dic compara'm aquest vector amb aquest vector i em diu: el vector k i el z són iguals. [d] Vale, ja ho tinc comprovat. Però... per tant, ja està, ja és una translació això.	b. Establecimiento de consenso c. Complemento de la explicación d. Validación
39	*Sergio:*	*Quina eina és?*	Petición técnica
40	*Profesor:*	*L'interrogant.*	Aclaración técnica

Tabla 17. Transcripción e interpretación del Episodio 5

En este episodio se trabaja otra estrategia para argumentar la solución del problema debido a que en la propuesta del episodio anterior ha habido un obstáculo tecnológico que ha obligado a replantearla. Así, el estadio que define este episodio es también *Estudio de las estrategias para argumentar el problema*. En relación al tipo de orquestación, al ser una alumna quien lo presenta, lo consideramos *Trabajo del sherpa*. Este es el primer episodio en el que también tiene lugar una demostración técnica [38a]; se ve la necesidad de dicha demostración en el contexto del episodio. Como hemos comentado en el apartado con el diseño del instrumento de análisis, este tipo de orquestación no se tiene en cuenta al delimitar episodios, porque es una acción más que surge dentro de un episodio.

El episodio empieza con la propuesta de Inés de construir otro vector entre otros dos puntos homólogos [35] y después compararlos [37]. Esta alumna no argumenta por qué razón serviría su estrategia, pero tras introducir el proceso de comparar dos elementos, el profesor quiere cerciorarse de que todo el grupo puede seguir la explicación [38b]. Así hace la demostración técnica [38a] de la herramienta mientras la muestra en la pantalla como un complemento de su explicación [38c]. Finalmente es el mismo profesor quien valida la propuesta de Inés diciendo que la estrategia de construir más vectores y compararlos lleva a justificar que se trata de una translación [38d]. Antes de proseguir con la resolución del problema, Sergio plantea una cuestión técnica [39], preguntando cuál es la herramienta que permite comparar, y el profesor lo aclara [40].

Desde un punto de vista interpretativo, la búsqueda de alternativas que propone Inés va ligada a su exposición, que por otra parte plantea sin argumentación alguna. Tras esta exposición sin argumentación, el profesor ve la necesidad de realizar una demostración técnica de la herramienta que presenta la estrategia de Inés para validar que todos los alumnos podrán seguir la explicación. Esta demostración está complementada por su explicación en la pantalla. La petición técnica de Sergio es consecuencia de la demostración técnica del profesor, y la aclaración sigue a la petición.

Siguiendo las fases del análisis, pasamos a presentar en forma de esquema visual las relaciones entre intervenciones en la Figura 31.

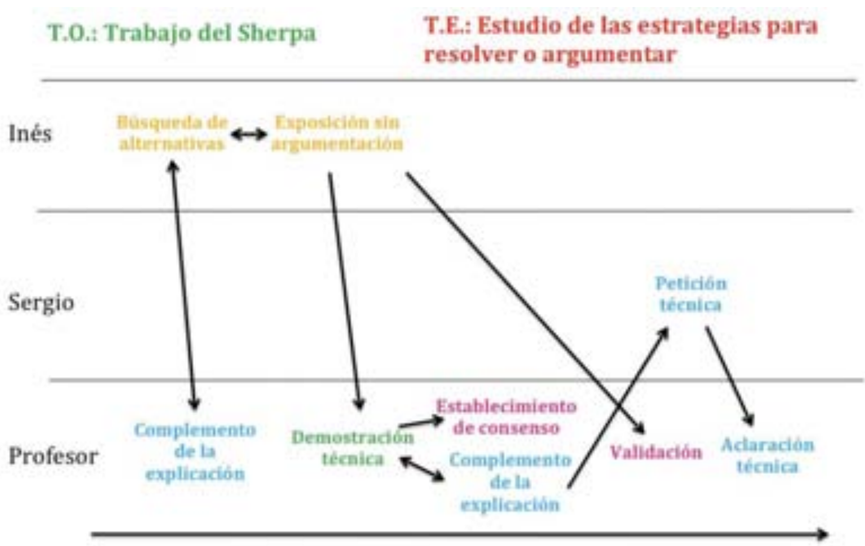


Figura 31. Esquema visual del Episodio 5

Oportunidades de aprendizaje:

Presentamos las oportunidades de aprendizaje que se han detectado de este episodio.

Oportunidades de concepto:

- *Aprender que la translación de una figura queda determinada por la imagen de cada uno de sus puntos.*

  El hecho de que la alternativa de Inés sea la construcción de otro vector para ver si la imagen por el mismo vector de dos puntos distintos tienen sus imágenes respectivas a sus correspondientes puntos homólogos, genera la oportunidad de ver las translaciones como un conjunto de translaciones de cada uno de sus puntos.

- *Aprender la existencia y el funcionamiento de la herramienta* Compara *de GeoGebra.*

  El hecho de que el profesor haga la demostración técnica del funcionamiento de una nueva herramienta que se acaba de incluir en una estrategia, provoca que los alumnos tengan la oportunidad de aprender una nueva herramienta pero en un contexto concreto; esto es de esperar que facilite la conexión de la nueva herramienta con su posible utilidad.

Oportunidad de proceso:

- *Aprender a usar la tecnología para elaborar justificaciones empíricas.*

  En el contexto del problema, donde se está trabajando con la tecnología, la estrategia de Inés contiene un alto grado de instrumentación ya que sin el uso del programa esta estrategia no tendría tanto sentido. Si se tratara de una resolución con lápiz y papel, entraríamos en la misma discusión de la precisión, y no podríamos comparar dos vectores. Así, esta situación genera la oportunidad de aprender a usar la tecnología para justificar empíricamente una solución. Aunque la comparación es más precisa, debemos tener en cuenta que la herramienta *Compara* de GeoGebra está programada numéricamente.

Oportunidades de gestión:

- *Aprender la importancia de visualizar la explicación matemática.*

Consideramos importante el hecho de que el profesor, a la vez que está realizando una demostración técnica, complemente su explicación con el apoyo tecnológico. Esto genera una oportunidad de aprender la importancia de visualizar la explicación matemática que está exponiendo, que los alumnos podrán aplicar en futuras ocasiones.

- *Aprender la importancia de plantear dudas.*

  En el segundo episodio, ya habíamos visto una situación que generaba la oportunidad de aprender la importancia de plantear dudas, con el profesor intentando llegar a un consenso antes de proseguir. En este episodio, al plantear una duda, Sergio provoca que a través de su ejemplo, otros alumnos se den cuenta de su importancia. También cabe mencionar la posterior actuación del profesor que se limita a resolver la duda sin hacer ningún comentario que pueda inducir a otros alumnos a no plantear las suyas, como sucede en algunas ocasiones.

Este episodio también ha generado oportunidades de los tres tipos, lo que muestra la riqueza que contiene.

Episodio 6 (e_6): Consideración de la teoría

El episodio anterior termina tras la demostración técnica de una nueva herramienta que menciona Inés en su estrategia, y con la validación del profesor de la estrategia presentada. Sin embargo, desde un punto de vista formal matemáticamente hablando, la estrategia de Inés no justifica por completo la respuesta inicial de Víctor, quien dice que la figura del enunciado es una translación. Así, en este episodio vemos cómo el profesor retoma el hilo para aclarar esta situación.

#	Participante	Intervención	Interpretación
41	*Profesor:*	*Ja són, ja puc dir que és una translació això, puc afirmar-ho? Sergio.*	Petición de argumentación
42	*Sergio:*	*Bueno, era una cosa... és que nosaltres el*	Búsqueda de

		que hem fet ha sigut com explicar-ho però a partir de la teoria.	alternativas
43	*Profesor:*	*Vale, però un moment seguim amb aquesta pregunta: ja puc afirmar, havent comparat aquests dos vectors, que això és una translació, aquest vaixell? José Manuel.*	Petición de argumentación

Tabla 18. Transcripción e interpretación del Episodio 6

En este episodio se discute sobre la construcción que hay en la pantalla tal y como quedó al final del episodio anterior. Como se ha comentado, se sigue trabajando con la estrategia de argumentación del problema.

El profesor hace una petición de argumentación [41] para seguir con la formalización de la justificación que había empezado Inés en el episodio anterior. El hecho de comparar dos vectores aún no justifica que la figura sea una translación.

A continuación, Sergio propone una alternativa a la estrategia de Inés [42], pero como el profesor no quiere desviar la atención de los alumnos añadiendo otras alternativas, no la tiene en cuenta y no da paso a Sergio para explicar su propuesta. En cambio, vuelve a insistir en la petición de argumentación [43] de la estrategia de comparativa de vectores.

Tras la interpretación de las intervenciones de los participantes, al analizar las influencias de algunas de las intervenciones sobre otras, parece que la búsqueda de alternativas por parte de Sergio no surge como consecuencia de la petición de argumentación del alumno, sino porque éste quería exponer lo hecho con su pareja. Sergio es un alumno que normalmente hace intervenciones a destiempo y que, aunque tiene un buen rendimiento y sigue con atención las clases, en las discusiones en gran grupo es usual que sus intervenciones sean aisladas y que no siempre respete el flujo de la discusión. Así, representamos la estructura visual del episodio mediante el esquema de la Figura 32.

Figura 32. Esquema visual del Episodio 6

Además de las oportunidades de aprendizaje que detallamos a continuación, hacemos notar que en este episodio detectamos una posible pérdida de la oportunidad de aprender a partir de la alternativa que plantea Sergio. El hecho de que la discusión siga una secuencia poco predecible y que se produzca un cambio de rumbo, provoca que inevitablemente se pierda alguna de las dos líneas de discusión. El profesor, en concreto, elige seguir con la discusión ya abierta. Una solución a esta pérdida de oportunidad sería continuar con la argumentación iniciada y retomar más adelante esta posible estrategia, pero como veremos a medida que avancemos en los episodios de esta sesión, no se vuelve a este punto para retomarlo, con lo que no se da paso al hilo argumental que podría surgir de la aportación de Sergio [42]: "Nosotros lo que hemos hecho ha sido explicarlo, pero a partir de la teoría".

Oportunidades de aprendizaje:

Presentamos las oportunidades de aprendizaje que se han detectado de este episodio.

Oportunidad de proceso:

- *Aprender a conectar tareas empíricas con conocimientos teóricos.*

Sergio se refiere a las relaciones que existen entre acciones matemáticas concretas y definiciones u otros conocimientos de naturaleza esencialmente teórica. A pesar de que este alumno no se extiende en su explicación, ni tampoco el profesor ahonda en ella, resulta de interés la mención del papel de la teoría en su razonamiento creando así una oportunidad de aprendizaje para sus compañeros.

Oportunidades de gestión:

- *Aprender la necesidad de la argumentación.*

  La importancia que le da el profesor a la argumentación al continuar preguntando por una formalización necesaria antes de avanzar con la resolución de otro apartado del problema, genera la oportunidad de aprender la importancia que tiene argumentar bien las soluciones expuestas.

- *Importancia de seguir la estructura de la discusión.*

  La situación incómoda generada a raíz de la propuesta de Sergio que el profesor ignora para seguir con lo que se estaba haciendo, muestra a los compañeros la oportunidad de aprender la importancia de mantener la coherencia durante las puestas en común. Hay que entender que, para que el grupo clase avance, a veces hay que tomar decisiones que pueden retardar la exposición de buenas ideas.

Episodio 7 (e_7): Contraejemplo de comparar dos vectores

Después de que en episodios anteriores se haya insistido en replantear la argumentación en torno a la estrategia que había propuesto Inés, en este episodio otro alumno observa un caso extremo que haría que no fuese válida la justificación de Inés basada en la comparación de dos vectores.

#	Participante	Intervención	Interpretación
44	*Jose Manuel:*	*No, perquè si per exemple un qualsevol dels dos punts estigués una miqueta diferent la figura no seria la mateixa.*	Observación de evidencia empírica

45	*Berta:*	*Com passa amb el B3, el tercer apartat...*	Conexión
46	*Profesor:*	*Si aquest per exemple l'hagués mogut aquí després jo expressament, vale? Aquí no estaríeu donant-vos compte, m'estaríeu dient que sí, que és una translació.*	Validación

Tabla 19. Transcripción e interpretación del Episodio 7

Como en el episodio anterior, en éste se discute sobre la estrategia de resolución de Inés que está proyectada en la pantalla; así, consideramos como tipo de orquestación la de *Discusión de la pantalla*. En referencia al estadio del problema que se está trabajando, lo hemos ubicado dentro del tipo *Estudio de casos particulares o extremos* porque como se verá en la descripción del episodio, José Manuel expone un caso extremo para mostrar que la estrategia de Inés no es suficiente.

En la descripción del episodio, vemos cómo, primero José Manuel indica que si encontráramos en un caso extremo para el que alguno de los puntos de la figura hubiesen sido desplazados, la figura no sería igual que la original, y por tanto sería imposible que se tratara de una translación [44]. José Manuel hace este comentario y lo explica como observación de una evidencia empírica, al imaginar un caso concreto que haría replantear la propuesta de Inés. En el mismo contexto, Berta conecta el supuesto caso que plantea José Manuel con un caso que, como se verá, aparece de forma explícita en el tercer apartado del problema. Berta conecta estas dos situaciones, una hipotética y otra real, con la que encontraremos más adelante [45]. Finalmente, el profesor valida la observación de José Manuel y plantea el caso de una posible trampa intencionada [46], que es lo que ocurrirá en el tercer apartado del problema.

Puesto que la conexión de Berta puede venir provocada por el comentario de José Manuel en el que éste plantea una posible modificación leve de la figura, la validación del profesor vuelve a ser respecto del comentario inicial de José Manuel. Tal y como entendemos las interacciones en este episodio, representamos el esquema visual de la Figura 33.

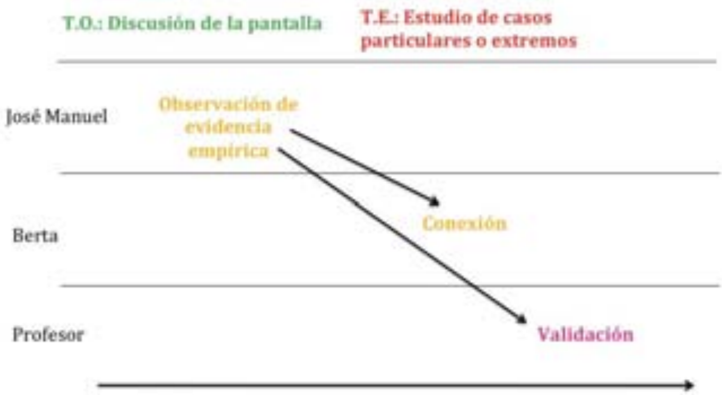


Figura 33. Esquema visual del Episodio 7

Oportunidades de aprendizaje:

Presentamos las oportunidades de aprendizaje que se han detectado de este episodio.

Oportunidad de proceso:

- *Aprender a justificar también casos extremos.*

  En este episodio se evidencia, mediante la presentación de un caso extremo, que para algún ejemplo, la justificación de comparar dos vectores no es suficiente, y se conecta con otro apartado en el cual se ha planteado intencionadamente una trampa. Esta situación genera la oportunidad de aprender que la justificación de una afirmación tiene que ser válida para todos los casos. Lo que se puede tratar de hacer es imaginar el peor de los casos, en el sentido de caso extremo.

Oportunidad de gestión:

- *Aprender la importancia de plantear casos particulares como contraejemplos de la solución dada.*

  El hecho de que José Manuel plantee que la justificación de Inés no es completa, y lo haga dando un contraejemplo, genera la oportunidad de aprender la importancia de saber pensar en contraejemplos para valorar o hacer una aproximación a una verificación de una solución o estrategia propuesta.

Episodio 8 (e_8): Comparación de todos los vectores

Tras lo que ocurre en el episodio anterior, José Manuel plantea un contraejemplo que hace evidente que la justificación de Inés no es válida. Esta alumna sabe encontrar por sí misma una solución.

#	Participante	Intervención	Interpretación
47	*Profesor:*	*Per tant, per poder afirmar que realment és una translació, què hauríeu de fer?*	Petición de argumentación
48	*Inés:*	*Mirar tots els vectors i comparar-los.*	Justificación empírica
49	*Berta:*	*Desplaçar rectament mitjançant...*	Justificación empírica
50	*Profesor:*	*Tots els vectors. Hauríem de fer-los tots.*	Validación

Tabla 20. Transcripción e interpretación del Episodio 8

En este episodio se sigue discutiendo la pantalla, pero se avanza en el estadio del problema ya que se pasa al tipo que hemos denominado *Generalización*.

Primero, el profesor pide explícitamente qué se podría hacer para argumentar que la figura es una translación de la inicial [47]. Habiendo estado presente en los episodios intermedios, Inés propone representar todos los vectores que unen los vértices homólogos de las figuras y posteriormente compararlos también todos [48]. Aunque se trata de una propuesta empírica, esta alumna propone una argumentación general, que ahora sí funciona para saber si una figura es una translación de otra. Al mismo tiempo, Berta propone otra estrategia que considera más eficaz [49] y que se va a tratar en el episodio siguiente. Finalmente, el profesor valida la aportación de Inés [50], y finaliza así la cadena de episodios que buscan la argumentación general de su estrategia.

Si nos fijamos en los conectores de influencia, observamos que las dos justificaciones empíricas que proponen Inés y Berta surgen como respuesta de la petición de argumentación del profesor, pero posteriormente solo se valida la generalización propuesta por Inés.

Una vez detectadas estas influencias, creamos la representación gráfica de este episodio en la Figura 34.

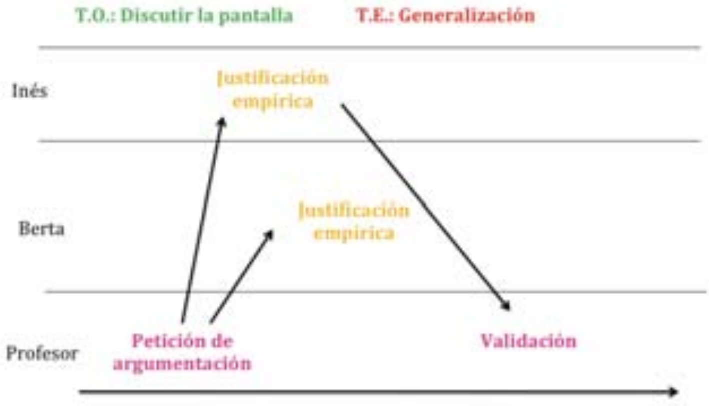


Figura 34. Esquema visual del Episodio 8

Oportunidades de aprendizaje:

En este episodio, además de las oportunidades de aprendizaje que comentamos, detectamos la oportunidad de tratar una nueva estrategia propuesta por Berta. Como hemos comentado, en el episodio siguiente se aprovecha esta oportunidad y se trabaja sobre este aspecto.

Oportunidad de concepto:

- *Aprender la noción de traslación mediante una revisión empírica.*

  Aunque toda la sesión en su conjunto puede entenderse como un escenario que promueve el aprendizaje conceptual de la noción de traslación, en este episodio en concreto mediante la intervención del profesor "para poder afirmar que realmente es una translación…" y la justificación empírica de Inés "Mirar todos los vectores y compararlos", explícitamente se atiende a dicha noción al considerar las propiedades de esta isometría. Es, pues, una oportunidad de aprender la noción de translación a partir de la revisión empírica.

Oportunidad de proceso:

- *Aprender a argumentar de forma general incluyendo todos los casos.*

De la interacción entre Inés y el profesor, en la cual la alumna propone una justificación y el profesor la valida, se llega al objetivo pretendido. De este modo, esta situación genera una oportunidad de aprender a encontrar un tipo de argumentación teniendo en cuenta todos los posibles casos en los que dicha argumentación podría no funcionar.

Oportunidad de gestión:

- *Aprender la necesidad de argumentar.*

Tras los esfuerzos del profesor para intentar que los alumnos justifiquen de una forma general la solución propuesta al principio, es clara la oportunidad de aprender a valorar la necesidad de una justificación matemática en cualquier problema que se plantee.

Episodio 9 (e_9): Visualización de la translación

En este episodio se da continuidad a la propuesta de Berta, enunciada en el episodio anterior.

#	Participante	Intervención	Interpretación
51	*Berta*	*I no seria millor moure-la i veure si coincideix?*	Búsqueda de alternativas
52	*Sara*	*També.*	Asentimiento
53	*Profesor*	*[a] També. [b] Puc fer, ara li puc fer: translació d'aquesta figura respecte aquest vector a veure si cau a sobre. [c] L'únic que aquí hi ha un problema: que si t'he mogut, si jo t'ho he fet com amb trampa, expressament, i t'he mogut tan poc que les ratlles aquestes són tan gruixudes que no ho veus, o sigui, ara si et posessis a fer zoom, per exemple, sí que veuries que realment encaixa.*	a. Validación b. Comprobación de una propiedad que se cuestiona c. Obstáculo tecnológico

Tabla 21. Transcripción e interpretación del Episodio 9

En este episodio se vuelve al estadio del tipo *Estudio de estrategias para argumentar o resolver el problema*. Esto ocurre durante el desarrollo de una orquestación del tipo *Discusión de la pantalla*.

En el episodio anterior no se ha tratado la propuesta de Berta, pero ella propone otra vez su idea [51] y una compañera dice estar de acuerdo [52]. Finalmente, el profesor valida la propuesta de la alumna [53a] e intenta comprobar la situación matemática en la pantalla [53b]. Entre tanto, el profesor explica una limitación de dicha estrategia debido a un posible obstáculo tecnológico al intentar comparar las dos figuras a simple vista otra vez [53c].

Tras analizar este episodio, llegamos a la representación gráfica de conectores de influencia de la Figura 35. Es razonable pensar que la insistencia y el acuerdo entre más de un alumno con la propuesta hacen que el profesor considere la intervención de la alumna. Posteriormente, durante la validación, se da la comprobación en la pantalla de lo que proponen Sara y Berta. Pero ahora, el obstáculo tecnológico no surge de la manipulación del programa, sino del planteamiento de un obstáculo que plantea el profesor de forma teórica en relación con la alternativa de las alumnas.

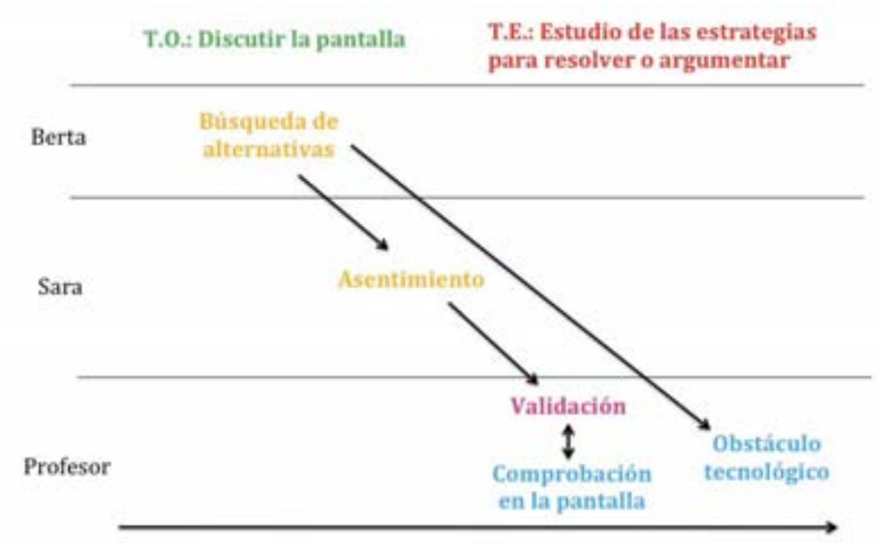


Figura 35. Esquema visual del Episodio 9

Oportunidades de aprendizaje:

En este episodio hacemos notar una situación peculiar. En los otros episodios, las oportunidades de aprendizaje derivadas del análisis no sabemos si serán aprovechadas o no por los alumnos. No obstante, en este episodio, la oportunidad de aprendizaje de gestión que presentamos, aunque quizá sea aprovechada por algún alumno, podría haber generado una reacción inmediata en la discusión. Esto no sucede, de modo que es una oportunidad no aprovechada por el momento.

Oportunidad de proceso:

- *Aprender a visualizar el movimiento de una translación.*

  El hecho de que la alternativa de Berta no implique aplicar la definición o sus propiedades sino que se trate de una aplicación de la visualización, es interesante desde el punto de vista de este proceso. También es importante saber visualizar el movimiento de las isometrías, y a través de este episodio se puede generar la oportunidad de aprender esto en otros estudiantes.

Oportunidad de gestión:

- *Aprender a pensar formas de evitar un obstáculo tecnológico.*

  En este episodio, el profesor está explicando que si se lleva a cabo la propuesta de Berta y Sara de aplicar una translación a la figura mediante uno de los vectores construidos para ver si se sobrepondrían, aparecerá un obstáculo tecnológico que no permitirá comparar las figuras más que a simple vista. Esta afirmación del profesor, podría haber generado una reacción por parte de algún participante para señalar que para comparar figuras en la ventana gráfica no existe solo la forma trabajada con anterioridad; también es aplicable la herramienta de comparación, aprendida en un episodio anterior, a las figuras correspondientes en la ventana algebraica, así no se impide la selección de las dos figuras por estar a simple vista superpuestas.

Episodio 10 (e_{10}): Uso de la propiedad transitiva

En los episodios anteriores se ha realizado la discusión del problema, dándose la solución y su justificación. Sin embargo, la justificación que se ha terminado por aceptar, no se ha construido empíricamente. Solo se ha planteado que se deberían comparar todos los vectores construidos a partir de parejas de puntos homólogos (Figura 36). En este episodio veremos la discusión sobre cómo esto se podría realizar empíricamente.

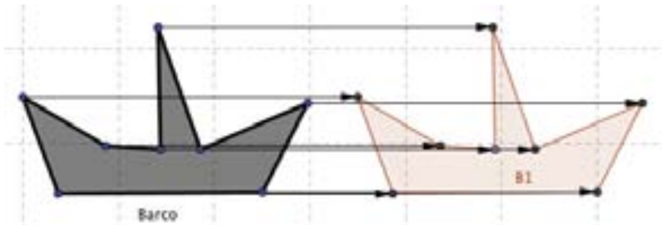


Figura 36. Construcción de todos los vectores entre puntos homólogos.

#	Participante	Intervención	Interpretación
54	*Profesor:*	*[a] Però, si estem aquí que vull comparar tots els vectors, [b] fa falta que els compari tots amb tots amb l'eina de l'interrogant vermell?*	a. Recapitulación b. Petición de argumentación
55	*Clara:*	*O sigui, si agafem un i veiem que ja, agafem per exemple el de dalt de tot i el comparem amb tots. I aleshores, com que ja ens dóna que tots són iguals, no cal fer, per exemple, el segon amb l'últim.*	Exposición sin argumentación
56	*Profesor:*	*[a] Sí, tothom? Tu José Antonio ho veus això? No, perquè no estaves escoltant. [b] La Clara diu: per comparar els... que tindré: set vectors, o vuit no sé. Per comparar-los tots, per veure que tots són iguals, diu: agafo el primer, bueno agafo un, que ella diu el primer, i el compara amb tots. El primer amb tots. [c] Amb això ja està afirmant que tots entre ells són iguals?*	a. Establecimiento de consenso b. Recapitulación c. Petición indirecta de argumentación
57	*Grupo clase:*	*Sí.*	Asentimiento
58	*Profesor:*	*O fa falta fer el primer amb el segon, el*	Petición indirecta

		segon amb el tercer, el primer amb el tercer, tots amb tots?	de argumentación
59	*Grupo clase:*	*No, ja està afirmat.*	Asentimiento
60	*Profesor:*	*Només amb un, amb tots ja va, eh! Que sinó és ineficient.*	Validación
61	*Sergio:*	*I com ho fas això per marcar un?*	Petición técnica
62	*Profesor:*	*Em, Sergio, estiguem... Ho he fet abans ja. Vector, aquest comparo amb aquest i em diu: son iguales. Vale?*	Demostración técnica
63	*Sergio:*	*Ah vale, clar.*	Asentimiento

Tabla 22. Transcripción e interpretación del Episodio 10

En este episodio, se sigue la discusión a partir de la construcción realizada con el programa en episodios anteriores. Así se sigue una orquestación del tipo *Discusión de la pantalla*. En lo que se refiere al tipo de estadio, se trabaja el de *Conexiones*, porque se conecta la justificación empírica con el concepto de transitividad para aumentar la eficiencia con respecto a la optimización de acciones en la comparación de vectores.

En el episodio anterior se ha trabajado con la propuesta de Berta de aplicar la translación y comparar las figuras, y se han discutido sus limitaciones técnicas. En este episodio, el profesor pide argumentar la justificación dada en el Episodio 8 por Inés [54b]. Antes hace una recapitulación [54a], para situar a los alumnos, ya que ha habido un episodio intermedio.

Como respuesta a la petición del profesor, Clara propone una técnica eficiente para comprobar que todos los vectores sean iguales, consistente en comparar un vector con todos los demás [55]. Sin decirlo explícitamente, aplica la propiedad transitiva, ya que si $u = v$ y $u = w$, entonces puede afirmar que $v = w$, y así con el resto de vectores.

A continuación el profesor establece consenso y tras detectar alumnos distraídos, les pregunta directamente para evidenciar que no estaban siguiendo la discusión [56a].

Tras esta acción, el profesor recapitula la situación [56b], repitiendo lo que había expuesto Clara. Finalmente, pide una argumentación de forma indirecta de la idea de Clara [56c, 58] pero los alumnos afirman que están de acuerdo con la conveniencia de la propuesta [57, 59] y no generan más argumentos. Tras estas intervenciones, el profesor decide dar por buena su solución sin añadir ninguna argumentación ni ninguna referencia explícita a la propiedad transitiva [60]. Sí hace referencia al concepto de ineficiencia [60], presente en otros episodios.

Sigue Sergio con la petición de una aclaración técnica sobre cómo se llevaría a cabo la comparación de los vectores [61]. Tras la explicación del profesor [62], el alumno asiente aceptando la respuesta [63].

Desde un punto de vista interpretativo, si nos fijamos en las relaciones de influencia de los turnos del episodio, el profesor marca el comienzo del episodio llevando la clase a seguir discutiendo la estrategia de comparación que algunos ya habían dado por cerrada.

A partir de ahí, es la intervención de Clara lo que genera, por un lado, que el profesor insista en su justificación para conectar explícitamente con la propiedad transitiva –que solo se acepta de forma implícita–, y por otro, que un alumno se pregunte cómo se realizaría la construcción empírica de dicha propuesta. El esquema de la Figura 37 resume esquemáticamente el episodio.

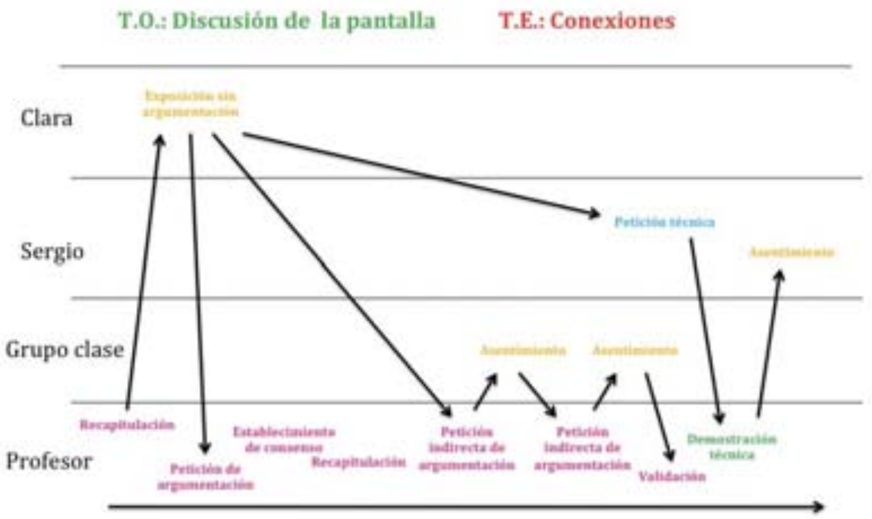


Figura 37. Esquema visual del Episodio 10

Oportunidades de aprendizaje:

Este episodio, último de esta serie de episodios que tratan sobre la translación de B1, apunta a varias oportunidades de aprendizaje. Puesto que se trata del último episodio, podríamos pensar que es donde se cierran una serie de aprendizajes que se han estado trabajando. Aun así, hemos preferido dejar este análisis conjunto de la serie de episodios para tratarlo de forma separada.

Oportunidad de concepto:

- *Aprender el concepto situado de transitividad.*

  De la propuesta de Clara de comparar solo un vector con todos los demás y de la insistencia mediante preguntas indirectas del profesor para hacer ver la necesidad de comparar también los otros vectores entre ellos, se desprende la oportunidad de aprender el concepto de transitividad, aunque en este episodio no se formalice dicha propiedad con su nombre.

Oportunidad de proceso:

- *Aprender a optimizar la comparación de* n *elementos.*

El hecho de que se trabaje la propiedad transitiva para optimizar esfuerzos, hace que sea razonable pensar que a los alumnos les puede servir para aprender a optimizar cualquier proceso de comparación de n elementos, no solo cuando se trata de vectores.

Oportunidades de gestión:

- *Aprender a ser eficientes en las acciones matemáticas.*

  Tras las preguntas del profesor sobre la necesidad de comparar los otros vectores entre ellos, y la posterior validación del método explicitando su eficiencia, se genera una oportunidad de aprendizaje relativa a la optimización de recursos gracias a la aplicación de conceptos matemáticos. Por los gestos de asentimiento de los alumnos, es razonable pensar que han entendido el concepto de eficiencia, cuando ven que pueden evitar comparaciones innecesarias.

- *Aprender la necesidad de argumentar.*

  El hecho de que el profesor vuelva a recapitular sobre una estrategia discutida dos episodios atrás con el objetivo de justificarla, da muestras de la importancia que da a argumentar todos los pasos de un problema, y eso genera una oportunidad para los alumnos de aprender esta necesidad.

5.1.2 Análisis integrado del primer apartado del Problema 1

Tras haber analizado en profundidad cada uno de los episodios, conviene hacer un análisis desde un punto de vista más general. Se trata de elaborar una descripción global de la situación para dar significado a la representación de los episodios de la Tabla 12.

El profesor empieza situando a los alumnos para empezar la discusión conjunta después del trabajo en parejas en la sesión anterior (e_1). A continuación, Víctor expone la solución que ha encontrado al problema, que la figura es una translación de la original (e_2). Tras esta presentación, surgen una serie de episodios que tratan de justificar la solución presentada por Víctor. Primero, Adrià plantea la idea de justificar empíricamente con el programa de geometría dinámica (e_3). Más tarde, Inés completa la aportación de Adrià con la propuesta de mover el vector para ver si la figura se mueve, lo cual no es instrumentalmente posible (e_4).

En un intento de formalización, Inés plantea la estrategia de construir otro vector y comparar uno con otro (e_5). Tras esta intervención, el profesor hace intentos de pedir argumentaciones en esta línea. En cambio, Sergio expone que tiene otra estrategia teórica, aunque no llega a presentarla (e_6). Siguiendo con la propuesta de Inés, José Manuel encuentra un contraejemplo con el que presenta casos extremos en los que el hecho de comparar solo dos vectores no sería suficiente (e_7). Por último y como reacción al contraejemplo de José Manuel, Inés plantea la generalización de su propia propuesta: comparar todos los vectores de parejas de puntos homólogos que salen de los vértices de la figura (e_8).

Una vez generalizada la justificación de la solución propuesta por Víctor al inicio, Berta propone otra estrategia de justificación de la solución, que es aceptada, pero con obstáculos tecnológicos. La estrategia consiste en aplicar la translación a la figura original del vector que se conjetura que puede ser el vector de translación, y comparar la figura resultante, con la propuesta en el enunciado (e_9).

Para terminar, siguiendo con la estrategia de comparar todos los vectores entre ellos y motivados por el profesor, se llega a plantear la estrategia que se seguiría para ser lo más eficientes posible en la comparación. Aquí es donde Clara hace referencia a la propiedad transitiva, pero sin hacerla explícita (e_{10}).

Tras esta descripción, podemos fijarnos en el conjunto de los episodios como una serie que tiene significado en su globalidad. Con el análisis detallado, hemos dado sentido a muchas situaciones que han ocurrido en la discusión conjunta, sobre todo a intervenciones de los participantes y a interacciones entre ellos, pero el foco era demasiado concreto para tener una idea global de la situación de clase. Por esta razón es interesante esta mirada conjunta a posteriori.

Centrando la atención en el Problema 1, observamos que en una primera instancia podría ser catalogado como ejercicio en lugar de problema, simplemente por las tres isometrías estudiadas que corresponde a cada figura. Sin embargo, el tratamiento que se ha hecho en la discusión en gran grupo permite tratarlo como problema.

Además, como se ha evidenciado en el análisis, lo consideramos potencialmente rico ya que se han identificado un total de 33 oportunidades de aprendizaje. El concepto de riqueza de un problema no es intrínseco al propio problema, sino que va acompañado de su gestión en el entorno de enseñanza y aprendizaje, tanto por parte del profesor como de los alumnos.

Tras considerar el problema como rico, cabe preguntar qué factores pueden haber influido para conseguir esta riqueza. Asumiendo la complejidad de analizar estas situaciones, entendemos que las dos características básicas del diseño experimental de esta investigación son claves, a saber: el entorno tecnológico y el entorno colaborativo.

Por un lado, la tecnología específica de geometría dinámica crea un entorno formal para el tratamiento de las isometrías. Como hemos visto en diferentes episodios, la tecnología ha permitido justificar empíricamente y no solo de forma abstracta, lo cual a su vez ha permitido manipular los elementos y propiedades matemáticas que intervenían en el problema. Si imaginamos el mismo problema en un entorno tradicional de lápiz y papel, el sentido de comparar vectores se pierde si no se conoce la teoría específica de este tema, ya que los vectores se compararían usando sus expresiones en coordenadas. Por tanto, es difícil un tratamiento de los vectores de forma intuitiva en un entorno de lápiz y papel, lo cual sí se ha llevado a cabo en la secuencia presentada en un entorno tecnológico.

Por otro lado, el entorno colaborativo y la organización de las sesiones siguiendo la secuencia trabajo individual – trabajo por parejas – trabajo en gran grupo, ha sido esencial para la gestión del problema. Individualmente o por parejas, no todos los alumnos hubiesen llegado a plantear y formalizar con el mismo grado de detalle facilitado por la discusión conjunta.

Como se ha explicado en el análisis detallado de los episodios, en diversas ocasiones ha sido el profesor quien ha guiado al grupo a tratar el problema de una cierta forma, dando importancia a los conceptos y procesos susceptibles de intervenir. Podríamos pensar que ha sido una discusión centrada en gran parte en el profesor. No obstante y tal como señala la distribución de los episodios en la Tabla 12, éstos han sido agrupados en la mitad inferior de la tabla, lo cual demuestra que la orquestación de la discusión se ha centrado en los alumnos. Así, el profesor ha realizado un andamiaje (Anghileri, 2006) de la situación dejando que los alumnos fuesen los protagonistas. También hemos observado una dificultad por parte de los participantes de comunicarse con fluidez y de comunicar con exhaustividad sus pensamientos. En muchas ocasiones se han detectado peticiones de argumentación por parte del profesor.

5.1.3 Puesta en común del apartado 2 del Problema 1

Como ya hemos comentado, el Problema 1 de la secuencia es peculiar por tener cuatro apartados análogos. A continuación, se presenta el análisis del segundo apartado del problema. Aunque la tabla se complete de forma independiente a la del primer apartado, la numeración de los episodios no se ha inicializado porque forman parte de la implementación del mismo problema. La Tabla 23 ilustra la representación del segundo apartado del Problema 1, para el cual se han identificado cinco episodios.

Discusión en gran grupo (Problema 1, barco B2)	Situación del problema	Presentación de una solución (argumentada)	Estudio de estrategias para resolver o argumentar	Estudio de casos particulares o extremos	Contraste entre diferentes soluciones	Conexiones con otras situaciones	Generalización y conceptualización	Reflexión sobre el progreso matemático	*(Tipos de estadio)*
Demostración técnica									
Explicar la pantalla									
Conectar pantalla y pizarra									
Discutir la pantalla			(e_{15})	(e_{14})					
Descubrir y mostrar									
Trabajo del sherpa		(e_{11})	(e_{12}), (e_{13})						
(Tipos de orquestación)									

Tabla 23. Estructura del apartado 2 de la discusión del Problema 1

Episodio 11 (e_{11}): Identificación de una simetría

Tras dar por terminado el trabajo en torno al primer apartado del Problema 1, en este episodio el profesor da paso al siguiente apartado del problema.

#	Participante	Intervención	Interpretación
64	*Profesor:*	*Què més? El B2.*	Petición de solución
65	*Maurici:*	*Jo...!!*	
66	*Profesor:*	*Maurici*	Invitación a la participación
67	*Maurici:*	*És una simetria.*	Exposición sin argumentación

Tabla 24. Transcripción e interpretación del Episodio 11

Este episodio es breve ya que simplemente se da paso al siguiente apartado [64, 66] consistente en otra figura transformada (Figura 38) y un alumno se ofrece voluntario [65] para dar la solución [67]. Posteriormente, el profesor valida la solución de Maurici, como muestra la primera intervención del Episodio 12 [68a]. Así, se considera la orquestación del tipo *Trabajo del sherpa* y el estadio del tipo *Presentación de una solución*. Como ha ocurrido en el apartado anterior, el alumno solo dice que se trata de una simetría pero no justifica por qué lo es.

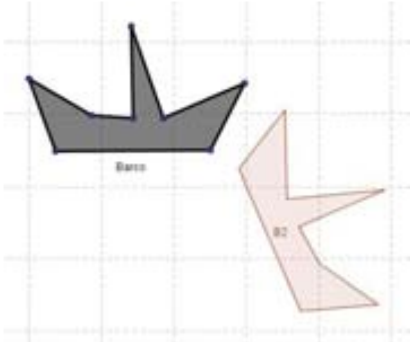


Figura 38. Imagen del enunciado del apartado 2 del Problema 1

A continuación presentamos la representación visual asociada al análisis del episodio, cuyo esquema es sencillo sobre todo debido a la brevedad del episodio.

Figura 39. Esquema visual del Episodio 11

Oportunidad de aprendizaje:

En este episodio presentamos una oportunidad de aprendizaje de concepto. La elección del alumno que ejerce el papel de sherpa no es decisión del profesor como la selección presentada por Smith y Stein (2011) indica. Este hecho conecta con los datos obtenidos en el análisis relativo a la sistemática llevada a cabo por el profesor. Como indica el análisis del Problema 1, la parte de selección donde el profesor podría haber decidido qué alumno empieza la puesta en común no está resuelta. Así, en este episodio se ve que si un alumno se presenta voluntario, no hay inconveniente en que presente su solución. La solución de Maurici es la correcta, pero cabe preguntar qué hubiese ocurrido si el alumno hubiese contestado de forma incorrecta y cómo esto hubiera influido en la secuenciación de la discusión.

Oportunidad de concepto:

- *Revisar la noción de simetría.*

  Al empezar este episodio, se proyecta en la pantalla la imagen del enunciado con el proyector. El hecho de que un compañero presente la solución como una simetría provoca que otros alumnos puedan revisar la noción de simetría y recordarla gráficamente. El profesor ha presentado este problema con una simetría oblicua, que no es la simetría respecto a un eje vertical más común. Al revisar la noción de simetría, el complemento visual que reciben puede llevar a recordar las diferentes posiciones posibles del eje de la transformación.

Episodio 12 (e_{12}): Prolongación de los lados para construir el eje de simetría

Tras la presentación de la solución por parte de Maurici, sigue un episodio donde el objetivo principal de la discusión es formalizar el concepto de simetría, haciendo referencia a los elementos que definen esta transformación.

#	Participante	Intervención	Interpretación
68	*Profesor:*	*[a]És una simetria, [b]respecte a què?*	a. Validación b. Petición de formalización
69	*Maurici:*	*Respecte d'un eix. Calculem, si fem una recta que passi...*	Solución con formalización
70	*Profesor:*	*Espera, una recta que passi...*	Complemento de la explicación

71	*Maurici:*	*O sigui, per com la base, per dir-ho així.*	
72	*Profesor:*	*La base?*	Petición de especificación
73	*Maurici:*	*O sigui... o sigui...*	Dificultad de comunicación
74	*Profesor:*	*Digues, digues, explica't bé!*	Petición de formalización
75	*Maurici:*	*El punt, és que no sé com dir-li ara...*	Dificultad de comunicación
76	*Profesor:*	*En aquest vaixell negre estàs?*	Complemento de la explicación
77	*Maurici:*	*Sí, sí, estic aquí.*	
78	*Profesor:*	*Aquest punt?*	Complemento de la explicación
79	*Maurici:*	*I el de l'esquerra.*	
80	*Profesor:*	*I aquest?*	Complemento de la explicación
81	*Maurici:*	*Sí. Una recta que passi pels punts.*	
82	*Profesor:*	*Faig una recta que passi per aquests dos.*	Complemento de la explicación
83	*Maurici:*	*I ara faig, amb... o sigui, pels mateixos punts una altra figura.*	
84	*Profesor:*	*Els seus homòlegs?*	Corrección de vocabulario
85	*Maurici:*	*Sí.*	Asentimiento
86	*Profesor:*	*Aquest i aquest.*	
87	*Maurici:*	*Sí.*	
89	*Profesor:*	*Vale.*	
90	*Maurici:*	*I ara després... ah sí, vale sí, sí, el mateix però amb els de dalt. O sigui no, des de... No, no, no... Aquest passa amb...*	

91	*Profesor:*	*Amb aquest?*	
92	*Maurici:*	*Sí, aquest i els homòlegs.*	Uso de vocabulario específico
93	*Profesor:*	*I els homòlegs. I aquest amb aquest. I ara?*	
94	*Maurici:*	*L'eix passa pels dos punts.*	Formalización
95	*Grupo reducido:*	*Ja té els dos punts aquells fas mediatriu i ja està, no? Sí, és el mateix que has fet tu.*	Auto-corrección
96	*Víctor:*	*Hi ha una manera més fàcil!*	Búsqueda de alternativas
97	*Profesor:*	*A veure, està bé, com heu trobat l'eix de simetria. És una manera… podríem dir, original.*	Validación

Tabla 25. Transcripción e interpretación del Episodio 12

Este episodio está protagonizado básicamente por Maurici, que explica su estrategia para construir el eje de simetría de la figura B2 (ver Figura 40). Así, se considera que es un episodio dentro del estadio del tipo *Estudio de estrategias para argumentar un problema*, con una orquestación del tipo *Trabajo del sherpa*.

En primer lugar, debe aclararse que el enunciado pide que se determine de qué transformación se trata en cada caso, pero que en particular se construya el eje para las simetrías.

Tras el episodio en el que Maurici dice que B2 es el producto de aplicar una simetría al barco original (e_{11}), el profesor valida la solución [68a] y pide un esfuerzo de formalización para introducir el concepto de eje de simetría [68b]. Rápidamente, Maurici formaliza explicitando que la simetría lo es respecto de un eje [69]; acto seguido, este alumno empieza a exponer su estrategia sobre cómo ha construido el eje de simetría [69]. Para complementar la explicación de Maurici, el profesor utiliza el entorno tecnológico en la reconstrucción de los pasos que sigue el alumno [se observa en los turnos del profesor, entre 70-93]. Mientras el profesor complementa la explicación, Maurici comunica su estrategia, algunas veces con cierta dificultad [se observa en los turnos del alumno, entre 71-92]. Cuando se hace más evidente la dificultad [73, 75], el profesor trata de animar al alumno para que haga un esfuerzo por expresarse con precisión [74]. En turnos posteriores, el profesor realiza una corrección de vocabulario al alumno del mismo concepto que surgió en el primer apartado del problema, en relación con los puntos homólogos [84], y el alumno asiente [85]. Finalmente Maurici concreta que el eje de simetría que busca es la recta que pasa por los dos puntos creados como intersección de las dos rectas construidas [94]. La estrategia del alumno para construir el eje de simetría se ilustra en la Figura 40.

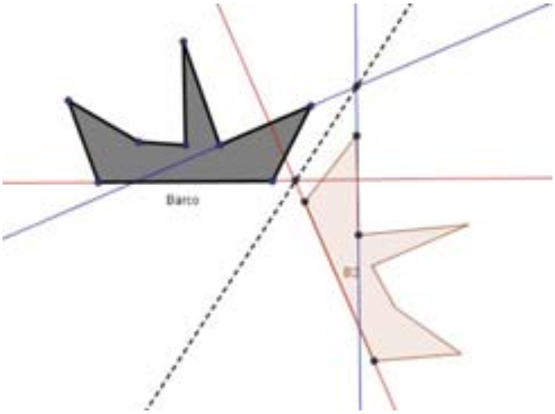


Figura 40. Estrategia de Maurici para construir el eje de simetría

Si analizamos con más detalle los turnos de Maurici, entre 71-92, donde presenta su construcción del eje de simetría, observamos que el procedimiento de construcción se corresponde con el representado en la Figura 40. El alumno empieza diciendo que querría hacer una recta que pasara "como por la base" [69, 71].

En ese momento el profesor no entiende a qué se refiere, porque no sabe cuál es la estrategia del alumno. De ahí que le pida que sea más concreto parafraseando su expresión "*¿La base?*" [72]. Entonces es cuando el alumno manifiesta su dificultad en el uso del lenguaje matemático, aunque tras una interacción visual con el profesor y la pantalla, llega a expresar bien con puntos cuál es la recta que quiere construir [76-82], que se corresponde con la línea recta roja horizontal de la Figura 40. Una vez construida esta recta, que pasa por la base del barco original, Maurici quiere construir su recta homóloga respecto al movimiento de simetría; lo que hace es construirla a partir de los puntos homólogos a los que ha utilizado para construir la primera recta [83]. Aplica el conocimiento de la geometría euclidiana según el cual las rectas siguen siendo rectas bajo la aplicación de simetrías. Así, Maurici construye la línea recta roja homóloga a la primera. Tras estas construcciones, propone realizar el mismo proceso empezando por una recta entre dos puntos diferentes [90], como se ve en las rectas azules de la Figura 40.

Mientras el profesor trata de construir lo que le ha indicado Maurici, éste aclara que debe hacer lo mismo con los puntos homólogos [92]. El uso del vocabulario específico de Maurici es, en este caso, correcto sin necesidad de ayuda del profesor. Así, el alumno ya tiene construidos los dos pares de rectas homólogas (rojas y azules en la Figura 40).

Finalmente Maurici formaliza que el eje de simetría buscado será la recta que pase por los dos puntos de intersección entre los pares de rectas construidas [94], que se corresponde con el eje discontinuo en la Figura 40.

La estrategia de Maurici genera que un grupo reducido de alumnos reflexionen sobre su propia construcción [95] y afirmen haber encontrado una forma más fácil de construir el eje de simetría entre dos figuras [96].Antes de dar paso a esta nueva propuesta de estrategia, el profesor valida la estrategia de Maurici, haciendo notar que ha complicado un poco la explicación, aunque sea correcta [97].

Si nos fijamos en la interacción entre los participantes, el episodio está centrado en las intervenciones de Maurici, quien intenta formalizar y explicar su estrategia. El alumno participa tras la petición de formalización del profesor, y durante su larga intervención surgen aclaraciones de vocabulario y complementos de la explicación en la pantalla. Estos complementos de la explicación generan que el alumno deba expresarse de forma precisa para exponer su construcción de forma oral, lo cual evidencia a su vez una cierta dificultad para comunicarse.

Se ve cómo la estrategia expuesta por Maurici genera que otros alumnos auto-evalúen sus estrategias y las propongan como una simplificación, o como una opción más eficiente, tal como se explica en el análisis del Episodio 10. Antes de dar paso a la siguiente propuesta de estrategia, el profesor verifica la presentada por Maurici. El hecho de que otros alumnos sugieran que su estrategia es más fácil hace conveniente que se valide lo expuesto por Maurici.

Después de este análisis interpretativo de las acciones de los participantes, presentamos en la Figura 41 la representación esquemática del episodio.

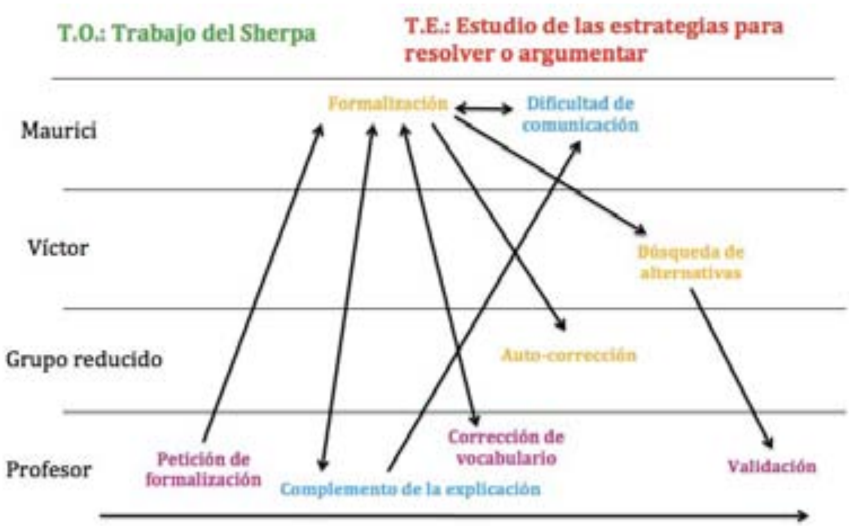


Figura 41. Esquema visual del Episodio 12

Oportunidades de aprendizaje:

Como ha ocurrido en episodios anteriores, junto con la detección de oportunidades de aprendizaje, en este episodio evidenciamos progreso matemático. Por ejemplo, la primera corrección de vocabulario del profesor al alumno, además de las correcciones en torno a la misma expresión en otros episodios, puede haber influido en el uso correcto de vocabulario por parte del alumno unos turnos más adelante. Detallamos a continuación las oportunidades de aprendizaje detectadas.

Oportunidades de concepto:

- *Aprender los elementos que caracterizan una simetría.*

  El hecho de que el profesor pregunte respecto a qué es una simetría un cierto movimiento, hace que surja la necesidad de definirla respecto a los elementos que la caracterizan, que en el caso de la simetría es el eje.

- *Aprender una estrategia para construir los ejes de simetría.*

  El hecho de que Maurici haya tenido tantos problemas al explicar su estrategia para encontrar los ejes de simetría y que otros alumnos propongan una estrategia más eficiente, hace que se pueda aprender tanto la estrategia de Maurici como la propuesta de los compañeros.

Oportunidades de proceso:

- *Aprender a utilizar el lenguaje matemático específico.*

  Una vez que el alumno se autocorrige y hace un buen uso del vocabulario específico, el profesor ya no hace comentarios en este sentido. Así, los alumnos pueden ver la importancia de usar específicamente el vocabulario matemático.

- *Aprender a encadenar de forma lógica las explicaciones matemáticas.*

  El hecho de que durante su esfuerzo de formalización Maurici encontrara tanta dificultad para expresarse hace que el profesor trate de organizar la información y de ir guiando sus propias explicaciones matemáticas. Esto facilita que los alumnos puedan aprender a encadenar de forma lógica sus explicaciones.

Oportunidades de gestión:

- *Aprender la importancia de expresarse con claridad.*

El hecho de que se dé un diálogo tan largo centrado en el entendimiento entre alumno y profesor, sin que se avance en ningún contenido ni estrategia, hace que los alumnos entiendan que es importante expresarse bien y encadenar bien las explicaciones para no ofrecer ideas o frases entrecortadas y que tenga que ser otra persona quien reconstruya. La insistencia del profesor en que Maurici se exprese bien es una acción clave en la generación de esta oportunidad.

- *Aprender la importancia de visualizar una explicación.*

  Como ya ha sucedido en episodios anteriores, el hecho de ir complementando la explicación de un participante visualmente mediante el instrumento tecnológico, hace que los alumnos tomen conciencia de la importancia de visualizar las explicaciones del resto de participantes.

Episodio 13 (e_{13}): Uso de los puntos medios entre puntos homólogos para la construcción del eje de simetría

Tras la solución presentada por Maurici en el episodio anterior, ahora se trabaja otra forma de encontrar el eje de simetría de las dos figuras. Se usan directamente las propiedades de la definición de simetría y a la vez que se busca el eje de simetría se comprueba que se trate de una simetría.

#	Participante	Intervención	Interpretación
98	*Profesor:*	*Però, podríem anar més enllà... amb el que sabem què és la definició de simetria, com el podríem construir? Rafael.*	Invitación a la búsqueda de alternativas
99	*Rafael:*	*Doncs, em, amb l'eina punto medio centro. Anem a...*	Exposición sin argumentación
100	*Profesor:*	*Punto, a veure, a veure... Vale, vale, digues.*	Complemento de la explicación
101	*Rafael:*	*Em... utilitzant l'eina punto centro medio.*	Exposición sin argumentación
102	*Profesor:*	*Vale. Punto medio centro. És una nova eina que el Rafael ha creat. Vale, amb*	Petición de argumentación

		aquesta eina què faig? Sshhhtt...	
103	*Rafael:*	*Em... i agafem amb qualsevol punt i el seu homòleg.*	Justificación empírica
104	*Profesor:*	*Per exemple: entre aquest i aquest, i entre aquest i aquest.*	
105	*Berta:*	*Però aquest és el seu homòleg?*	
106	*Profesor:*	*Sí, si és un... si m'estan dient...*	
107	*Berta:*	*Ah sí, sí!*	
108	*Núria:*	*No té cap punt aquest.*	
109	*Profesor:*	*Ai... Espera, espera... Avui estic una mica...*	Obstáculo tecnológico
110	*Núria:*	*És que no té cap punt aquí.*	
111	*Profesor:*	*Ara! Ho estic fent bé o no?*	
112	*Grupo reducido:*	*Sí, sí.*	
113	*Profesor:*	*Ara! Vale, ell ja ha fet... ell fa el punt mig entre dos homòlegs i el punt mig entre dos homòlegs, i llavors diu que l'eix haurà de passar per aquests dos punts mitjos. Sí, és el que estaves dient, no?*	Recapitulación
114	*Rafael:*	*Sí.*	
115	*Profesor:*	*Vale, però només fent dos punts mitjos ja val? I llavors amb aquest eix ja em crec, amb aquest eix que passa per aquí i per aquí, ja em crec que tots els altres també funcionaran?*	Invitación a la generalización
116	*Laia:*	*Però és que ara, si mira aquí... el punt...*	Observación de evidencia empírica
117	*Núria:*	*És que ha de fer un altre.*	
118	*Laia:*	*O sigui, si mires de baix...*	
119	*Profesor:*	*Perquè dec haver mogut algo... Ah, perquè si mires aquests ja veus que no;*	Obstáculo

		no, diu la Laia? Però això és perquè he fet algo malament, eh!	tecnológico
120	*Núria:*	*Perquè, o sigui, hauria de fer un altre.*	
121	*Profesor:*	*A veure...*	
122	*Clara:*	*O sinó, es pot fer els dos de baix que també...*	
123	*Profesor:*	*A veure... punt mig d'aquest amb aquest... Ohh... ja ho faré eh... A veure, primer anem a fer bé això. Vale, punt mig d'aquest amb aquest, ara! I què més? I punt mig d'un altre amb un altre. Però això és lo que havíem fet... D'aquest...*	
124	*Clara:*	*D'aquests dos i dels dos de baix.*	
125	*Maurici:*	*Veu com era més fàcil lo nostre.*	
126	*Profesor:*	*Sí, quasi... Ara.*	
127	*Maurici:*	*Si amb el que hem tardat en fer això, no hem tardat amb lo nostre.*	

Tabla 26. Transcripción e interpretación del Episodio 13

Tras el comentario de Víctor al final del Episodio 12, sobre formas más sencillas de encontrar el eje de simetría que la planteada por Maurici, el profesor trata de que se exponga una estrategia usando las propiedades de la definición de simetría [98].

Rafael presenta la herramienta que utiliza para solucionar el problema como propone el profesor, pero no explica qué procedimiento seguir [99]. Por eso, el profesor hace una petición de argumentación [102] para que Rafael explique cómo construir el eje de simetría con la herramienta que propone [103].

A medida que Rafael explica su estrategia –construir el punto medio entre dos pares de puntos homólogos (Figura 42)-, el profesor intenta aplicar esta estrategia para construir el eje de simetría por medio del programa de geometría dinámica y así complementar la explicación [100]. No obstante, se encuentra con un obstáculo tecnológico, el cual no explica públicamente [109-112], aunque en episodios posteriores se detalla.

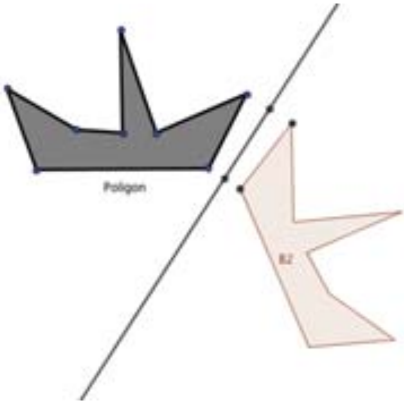


Figura 42. Estrategia de Rafael para construir el eje de simetría

Tras el tiempo destinado a solucionar los problemas técnicos, el profesor hace una recapitulación de la estrategia de Rafael para encontrar el eje de simetría [113] e invita a los alumnos a la generalización [115]. Del mismo modo que en el apartado anterior del problema, solo con dos puntos medios no se está comprobando si las dos figuras son simétricas. Este apartado es algo especial ya que en la puesta en común no se han diferenciado las dos sub-preguntas ocultas en el enunciado. La primera consiste en demostrar que realmente son dos figuras simétricas; la segunda trata de que se construya el eje de simetría. Se consideró interesante no especificar las dos sub-preguntas en el enunciado para no dar pistas de que algunas parejas de figuras podían no ser homólogas.

La invitación a la generalización del profesor queda interrumpida por la observación empírica de Laia, quien añade que a simple vista el eje construido con el procedimiento que proponía Rafael no parece ser el eje de simetría de las dos figuras [116].

En ese momento, el profesor plantea la opción de haber hecho algún error técnico por la dificultad que ha encontrado anteriormente y que no desvela. Vuelve a hacer la construcción. Después de analizar el video y la construcción, parece que simplemente se trata de un efecto óptico debido a que el eje de simetría es oblicuo [119-124].

Tras estos obstáculos técnicos, una estrategia que a priori era más optima que la que se había propuesto, resulta ser más costosa, hasta el punto que Maurici lo hizo notar en la discusión [125-127]. Puede decirse que esta última estrategia es más coherente matemáticamente hablando, ya que utiliza propiedades propias de la definición. Por otra parte, que Maurici perciba que no era una estrategia más sencilla.

Después de este análisis interpretativo de las acciones de los participantes, presentamos en la Figura 43 la representación esquemática del episodio, en el cual consideramos que esencialmente se hace el *Estudio una estrategia* para encontrar el eje de simetría siguiendo el *Trabajo del sherpa*, que en este caso es Rafael.

Figura 43. Esquema visual del Episodio 13

Oportunidades de aprendizaje:

En este episodio, la idea general podría ser que debido a un obstáculo tecnológico no solo no se han creado oportunidades de aprendizaje, sino que éstas se han dificultado. Aunque pueda ser así en algún caso, si analizamos detalladamente observamos que también se han generado oportunidades de aprendizaje para los alumnos.

Oportunidades de concepto:

- *Aprender las propiedades de los puntos del eje de simetría de dos figuras.*

  La propuesta de Rafael de construir el eje de simetría considerando la propiedad de que todos los puntos de este eje se encuentran en el punto medio de dos pares de puntos homólogos, hace que los alumnos puedan aprender a ver esta propiedad de las simetrías. Se aplica la propiedad por la cual los puntos homólogos están a igual distancia del eje y sobre la misma perpendicular.
- *Aprender a usar la herramienta* Punto medio.

  El hecho de encontrar los puntos buscados a través de la herramienta *Punto Medio* en lugar de, por ejemplo, construir la mediatriz, hace que los alumnos puedan aprender otra herramienta y mejore así su proceso de instrumentalización.

Oportunidades de gestión:

- *Aprender la importancia de visualizar una explicación.*

  Este episodio sirve para ejemplificar que con la complementación visual de la exposición de la estrategia, algunos alumnos han podido detectar un error y a partir de ahí se ha podido rectificar el error técnico. También se podría haber replanteado la estrategia desde el punto de vista matemático al evidenciar que la estrategia no funcionaba.
- *Aprender la importancia de las argumentaciones matemáticas.*

  En este episodio sucede un hecho relevante: la tecnología que sirve de apoyo, en lugar de facilitar una construcción, la dificulta. Sin embargo, esta misma dificultad ayuda a que los alumnos valoren la situación. Si se encuentran en una situación matemáticamente argumentada, aprenden a justificar sus decisiones, ya que están convencidos de la validez de su construcción, y tienen que aprender a detectar el error por otros medios.

Episodio 14 (e_{14}): Comprobación de la simetría entre dos figuras

Tras el episodio anterior, el profesor se da cuenta de que los alumnos no han diferenciado las dos sub-preguntas del apartado y han querido construir el eje de simetría directamente sin comprobar si las dos figuras eran simétricas. En este episodio, el profesor pretende que vean esta distinción, que sabe que les será útil para el siguiente apartado del problema.

#	Participante	Intervención	Interpretación
128	*Profesor:*	*Ara, vale. Només amb això, si us ho hagués fet expressament amb trampa, trobaríem que és una trampa?*	Invitación a la generalización
129	*Núria:*	*No.*	Exposición sin argumentación
130	*Profesor:*	*Perquè aquí podria haver passat que jo aquesta punta ara l'hagués mogut, per exemple. I vosaltres només m'esteu comparant que aquests punts són simètrics i que aquests punts són simètrics.*	Ampliación de la argumentación
131	*Sara (y otros):*	*No, però ara fem la simetria de la figura sencera!*	Búsqueda de alternativas
132	*Profesor:*	*[a] Ara fas la simetria de la figura sencera. [b] Fem la figura sencera respecte aquí i aparentment sí que va. [c] Però formalment ho hauríem de fer amb tots els punts..*	a. Validación b. Comprobación de una propiedad que se cuestiona c. Formalización

Tabla 27. Transcripción e interpretación del Episodio 14

En este episodio, observamos qué recurso utiliza el profesor para que los alumnos se den cuenta de que no han considerado que primero debían comprobar que las dos figuras eran simétricas antes de pasar a construir el eje de simetría. El profesor intenta que hagan el tratamiento de un caso particular, invitándoles a generalizar [128], lo cual ellos defendían en el episodio anterior.

Puesto que los alumnos contestan sin argumentar [129], el profesor completa la justificación explicando cómo podría ser el caso particular de construcción del eje de simetría de dos figuras no simétricas [130]. Los alumnos aprecian que no habían considerado esa opción, pero buscan una alternativa para verificar que las dos figuras son simétricas. Proponen hacer la simetría respecto al eje creado a partir de dos únicos puntos, y argumentan que si las dos figuras coinciden, sí serán simétricas [131]. Aunque de forma teórica sería una buena comprobación y así lo valida el profesor [132a], a la práctica, con el programa de geometría dinámica, puede conllevar problemas ya que la precisión de la pantalla no es exacta y las dos figuras podrían parecer coincidentes sin serlo. Para terminar, el profesor remarca que solo sería una comprobación aparente a la vez que lo construye en la pantalla [132a, 132b]. Más tarde, recuerda que formalmente deberían construir los puntos medios de cada pareja de homólogos [132c].

Si observamos el episodio de forma aislada, podríamos pensar que faltaría explicar el final del procedimiento. Sin embargo, como se ha dado un caso similar en el primer apartado del problema con el caso de la translación, el profesor supone que tras construir todos los puntos medios, ya comprobarán que todos pertenecen a la recta que proponen como eje de simetría. Una razón que explicaría por qué no acaba de formalizar el procedimiento, podría ser que sabe que el siguiente apartado del problema tratará este caso, y tampoco quiere ofrecer más información en ese momento.

Siguiendo este análisis interpretativo de las acciones de los participantes, presentamos en la Figura 44 la representación esquemática del episodio. A modo de síntesis, definimos este episodio como *Estudio de casos particulares*, que serían los casos trampas que se podrían haber creado a partir de la *Discusión de la pantalla*. Es a partir de lo que ya se ha construido en el episodio anterior que se genera la discusión de este episodio.

Figura 44. Esquema visual del Episodio 14

Oportunidades de aprendizaje:

Este episodio sirve de ejemplo para presentar aquellos episodios que, analizados de forma aislada, no muestran el potencial que tienen por las acciones concretas de los participantes, puesto que solo detectamos algunas oportunidades de aprendizaje. Con los episodios posteriores, entendemos la intención del profesor y vemos que actúa de una determinada manera para crear más oportunidades de aprendizaje en otras sesiones. Detallamos a continuación las oportunidades de aprendizaje detectadas en este episodio. Más adelante contabilizaremos las oportunidades de que gracias a este episodio se han podido generar en otros.

Oportunidades de concepto:

- *Aprender que una simetría tiene que cumplir la propiedad de que todos sus puntos sean simétricos.*

  El hecho de que el profesor haga hincapié en que habría que comprobar todos los puntos de la figura (al menos todos los vértices), lleva a que los alumnos tomen conciencia de que una isometría viene definida por la imagen de todos sus puntos.

Oportunidades de proceso:

- *Aprender a utilizar alternativas para mostrar estrategias.*

Cuando el profesor plantea un posible problema que surge por haber encontrado el eje de simetría usando solo dos pares de puntos homólogos, Sara y otros alumnos plantean una posible solución a este problema. Aunque después vean que esa solución puede tener otras complicaciones, es importante que los alumnos sean ágiles buscando alternativas a situaciones que puedan encontrar.

- *Aprender a considerar casos particulares para comprobar la validez de una argumentación o estrategia.*

  El profesor plantea un ejemplo que será el que haga que no sirva su estrategia para encontrar el eje de simetría. Así, los alumnos pueden aprender la importancia de usar casos particulares y extremos como herramienta para encontrar contraejemplos de lo que intentan probar.

Oportunidades de gestión:

- *Aprender la importancia de diferenciar entre dibujo y figura en programas de geometría dinámica.*

  El hecho de que el profesor remarque que "aparentemente" sí sirve construir la simetría de toda la figura, como proponen Sara y otros compañeros, facilita que se piense que no es del todo precisa esta propuesta, y que podrá dar problemas en otras situaciones, como veremos en el apartado siguiente.
- *Aprender a dosificar la información matemática de la que se dispone.*

  Si analizásemos este episodio de forma aislada, no asumiríamos esta oportunidad de aprendizaje. No obstante, analizado de forma global, y teniendo en cuenta que la situación del profesor-investigador aporta información adicional, es adecuado añadir esta oportunidad de aprendizaje de gestión. Cuando el profesor lanza la pregunta de si hubiesen detectado con esa estrategia si las figuras no hubiesen sido simétricas, es decir, si hubiese sido una trampa, Núria, contesta solo con un "No" sin argumentar. En general diríamos que hubiese sido mejor que la estudiante argumentase, con la idea de que siempre está bien que un alumno se explique y sepa comunicar sus ideas, pero aquí valoramos positivamente su silencio, porque ella sabe que en el siguiente apartado se va a tratar este tema, y supone que no todos sus compañeros se han dado cuenta de la trampa del profesor. Interpretamos que Núria considera crucial no desvelar ningún indicio de cómo habrá que hacer el siguiente apartado, y deja al profesor que decida el momento adecuado para explicarlo con más detalle.

Episodio 15 (e_{15}): Aclaración tecnológica para la precisión

El último episodio de este apartado es interesante porque cierra de manera concisa dos puntos que habían quedado abiertos. El primero es el obstáculo tecnológico con el que se había encontrado el profesor en el Episodio 13, y el segundo es el tratamiento de la estrategia para comprobar si dos figuras son simétricas, que ha quedado camuflada y no se ha tomado como estrategia, sino como alternativa a un posible error en el Episodio 14.

#	Participante	Intervención	Interpretación
133	*Adrià:*	*[a] Nosaltres ho vem fer directament així, fent la simetria, [b] però ja ha vist que ens sortia una figura que no coincidia!*	a. Búsqueda de alternativas b. Obstáculo tecnológico
134	*Profesor:*	*[a] Ja, però perquè vosaltres aquests punts els havíeu fet a ull. O sigui, al fer-los a ull, com que el punt és tan gruixut, semblava que passava pel vèrtex de la figura i en realitat no. [b]Però això podria ser una altra estratègia si es fes bé.*	a. Corrección de procedimiento matemático b. Validación
135	*Adrià:*	*Però com no es fan a ull?*	Búsqueda de alternativas
136	*Profesor:*	*[a] Eh... marcant que sigui el punt d'intersecció entre els dos segments del vaixell, [b] que és el que m'ha passat a mi abans...*	a. Demostración técnica b. Recapitulación

Tabla 28. Transcripción e interpretación del Episodio 15

A raíz del recurso de un alumno en el episodio anterior de realizar la simetría de toda la figura inicial respecto al eje construido solo con dos puntos para ver si las dos figuras son simétricas, Adrià lo considera como estrategia utilizada [133a], diciendo que con su pareja lo había hecho así pero no había funcionado [133b].

El profesor, que había detectado este error, les corrige [134a] explicando que han tenido un problema de precisión con el programa, es decir, que han construido el eje de simetría mal al haber construido dos puntos medios a partir de dos puntos que solo aparentemente eran homólogos. También conviene validar que la estrategia hubiese sido correcta sin esta dificultad [134b]. Aún faltaría otro detalle: una vez realizada la simetría de toda la figura, habría que comprobar con la herramienta *Comparación* que las figuras son la misma, ya que si no podríamos encontrar el mismo problema de precisión y estar viendo solo a simple vista que sí coinciden.

A raíz de la corrección del profesor, el alumno pregunta por la alternativa para no equivocarse como había hecho durante el trabajo en parejas; esto sugiere que tiene interés por aprender [135]. El profesor hace la demostración técnica para explicar cómo tendría que proceder para considerar los puntos de los vértices de forma exacta y no como dibujos. Propone que los defina como intersección de los dos lados contiguos que se encuentran en el vértice que busca [136a] y de forma superficial lo conecta con el obstáculo técnico del Episodio 13, donde ha tenido que repetir la construcción porque no había interpretado bien la propuesta de Maurici [136b].

Aunque se cierran varios temas, esencialmente en este episodio se realiza el *Estudio de otra estrategia* para verificar si dos figuras son simétricas a través de la *Discusión de la pantalla*. Representamos esquemáticamente en la Figura 45 la estructura de este episodio.

Figura 45. Esquema visual del Episodio 15

Oportunidades de aprendizaje:

Este episodio tiene la peculiaridad de que cierra algunos de los temas que habían quedado abiertos durante la puesta en común de este apartado del problema, pero a la vez, sigue dejando abiertos algunos aspectos para que en la puesta en común del siguiente apartado se puedan tratar más específicamente.

Oportunidades de proceso:

- *Aprender a utilizar el programa específico con precisión.*

  Después de algunos obstáculos tecnológicos y problemas de justificación derivados, finalmente el profesor da la explicación técnica de cómo se puede solucionar el problema de la precisión cuando hay que seleccionar un punto que no está marcado en la construcción porque se ha escondido. Esto hace que los alumnos aprendan otro recurso tecnológico para evitar posibles problemas de falta de precisión.

- *Aprender a usar estrategias para comprobar una solución.*

  Adrià no aporta una nueva estrategia para encontrar el eje de simetría entre dos figuras, sino que su estrategia sirve para hacer una comprobación. Hace la simetría de la figura inicial para ver que el eje que ha construido –sin explicar cómo–, realmente lo sea. Consideramos esta oportunidad diferente de la del episodio anterior. Entonces se buscaba la estrategia para superar una cuestión del profesor durante la discusión; en cambio, ahora Adrià explica la estrategia que ya había seguido en el trabajo en parejas. Lo podemos considerar, por tanto, como parte de su solución. Comprobar sistemáticamente las propias soluciones es un proceso necesario dentro del aprendizaje de las matemáticas.

Oportunidades de gestión:

- *Aprender la importancia de plantear dudas técnicas.*

  En este episodio, el profesor responde a Adrià que puede haber cometido un error técnico. El alumno, durante la discusión, pregunta cómo podría evitarse ese error técnico, lo cual supone una oportunidad de aprendizaje. Esto significa que se está entendiendo que, cuando se trabaja con tecnología, un problema técnico puede perturbar la solución abstracta que matemáticamente se tenía clara.

5.1.4 Análisis integrado del segundo apartado del Problema 1

Tras haber analizado en profundidad cada uno de los episodios, cabe realizar el análisis desde un punto de vista más general, siguiendo el modelo aplicado al primer apartado del problema. Una descripción global de la situación da mayor significado a la representación de los episodios de la Tabla 23.

El segundo apartado del Problema 1 es una continuación del apartado anterior. Para los alumnos se trata del mismo problema, y no hay ningún episodio de situación del problema porque ya se da por situado. Vemos cómo en primera instancia Maurici dice cuál será la solución, al afirmar que será una simetría (e_{11}).

Una vez ha presentado su solución, tras la petición del profesor, Maurici empieza a explicar su estrategia para encontrar el eje de simetría, con el procedimiento ilustrada en la Figura 40 (e_{12}). Después de que algunos alumnos noten que no es el procedimiento habitual, proponen otra estrategia aparentemente más sencilla para encontrar el eje de simetría, que es la representada en la Figura 42 (e_{13}).

Las dos estrategias de Maurici y Rafael respectivamente, asumen que las figuras son efectivamente simétricas. Es decir, que su objetivo es la construcción del eje de simetría dadas dos figuras simétricas. En cambio, no tienen en cuenta que las figuras pueden estar deformadas levemente para que no sean simétricas. El profesor introduce esta nueva opción, para señalar que también había que comprobar la condición de simétricas. Improvisadamente, los alumnos proponen una estrategia para ver si dos figuras son simétricas (e_{14}).

Tanto la estrategia que plantean en ese momento, como la que había probado Adrià durante el trabajo por parejas, son correctas. Sin embargo, pueden llevar a confusión si no se hace un tratamiento tecnológico preciso. Además, se aclaran algunos aspectos técnicos durante el transcurso de este episodio (e_{15}).

En este apartado, también notamos un progreso por parte de los alumnos en la auto-gestión de la discusión. Vemos ejemplos de alumnos que han dejado que los compañeros se equivocaran, para no desvelar las características del siguiente apartado. De ahí que todos los episodios de este apartado estén centrados en la primera mitad de la Tabla 23, lo que significa que no se ha dado un tratamiento general al problema ni se ha tratado de conectar con otras situaciones. Esto no es un inconveniente puesto que más tarde se trabajarán estos aspectos.

Consideramos este apartado rico de acuerdo con las oportunidades que hemos explicado. Aunque se han detectado obstáculos tecnológicos que han podido entorpecer la generación de oportunidades de aprendizaje, hay un total de 18 oportunidades de aprendizaje matemático, ya sea de conceptos, de procesos o de gestión.

Siguiendo la estructura aplicada para el análisis global del primer apartado del Problema 1, pasamos a examinar cómo los dos aspectos clave de esta investigación (entorno tecnológico y entorno colaborativo) pueden haber tenido influencia en el transcurso de los episodios.

Desde el punto de vista de la tecnología, se pone de relieve la influencia de la preparación, la anticipación y el modo de explotación en el desarrollo en clase de este apartado. La decisión del profesor de ocultar los vértices de las figuras, por ejemplo, cumple su función de que los alumnos no usen el arrastre y tengan más dificultad en ver directamente como habían sido definidas las isometrías aplicadas.

Por otro lado, han generado dificultades y obstáculos tecnológicos. Pensando en una revisión de la secuencia didáctica y de su implementación, este sería un punto a analizar específicamente, valorando ventajas e inconvenientes. El profesor podría considerar cambiar algún aspecto del enunciado del problema.

Aunque en este apartado no se ha puesto de manifiesto, y será un tema central en el siguiente, el hecho de considerar las trampas, este es también un aspecto específica del tratamiento del problema con tecnología. Una vez más, el mismo enunciado planteado con lápiz y papel no hubiese generado la discusión que consideramos rica desde el punto de vista del aprendizaje matemático de los alumnos.

Respecto al uso de un entorno colaborativo, y en concreto la discusión en gran grupo, en este momento de la secuencia se detecta cómo algunos alumnos se van sintiendo cómodos con su participación en esta dinámica de trabajo.

Gradualmente, entienden que la discusión en gran grupo de un problema que antes se ha trabajado por parejas es un espacio donde construir conocimiento conjuntamente y no un espacio para que las singularidades dominen la clase el profesor apenas note la habilidad de unos pocos alumnos.

5.1.5 Puesta en común del apartado 3 del Problema 1

Aunque consideramos este apartado independiente de los anteriores, no debe obviarse su relación que tiene con el apartado precedente. Por ello, a lo largo de esta sección haremos referencias a situaciones analizadas en los episodios que acabamos de presentar.

La Tabla 29 ilustra la representación del tercer apartado del Problema 1, para el cual se han identificado seis episodios.

Discusión en gran grupo (Problema 1, barco B3)	Situación del problema	Presentación de una solución (argumentada)	Estudio de estrategias para resolver o argumentar	Estudio de casos particulares o extremos	Contraste entre diferentes soluciones	Conexiones con otras situaciones	Generalización y conceptualización	Reflexión sobre el progreso matemático	*(Tipos de estadio)*
Demostración técnica									
Explicar la pantalla		(e_{20})							
Conectar pantalla y pizarra									
Discutir la pantalla				(e_{18})		(e_{19})			
Descubrir y mostrar									
Trabajo del sherpa		(e_{16})	(e_{17})				(e_{21})		
(Tipos de orquestación)									

Tabla 29. Estructura del apartado 3 de la discusión del Problema 1

Episodio 16 (e_{16}): Identificación errónea de una simetría

Recordemos que durante el segundo apartado se ha tratado el caso del barco que era una simetría, y los alumnos han presentado dos soluciones diferentes para hallar el eje de simetría.

Aunque no se ha insistido en la importancia de demostrar primero si las dos figuras son simétricas, como mínimo el profesor era consciente de que este aspecto volvería a aparecer en el tercer apartado.

#	Participante	Intervención	Interpretación
137	*Profesor:*	*Ara el B3, Inés, va!*	Petición de solución

138	*Inés:*	*Nosaltres…*	
139	*Profesor:*	*Sshhh…*	
140	*Inés:*	*En aquest cas, que és una simetria*	Exposición sin argumentación
141	*Profesor:*	*Vale, per tant, l'heu pintat de blau.*	
142	*Inés:*	*Em… Sí!*	
143	*Grupo reducido:*	*[Murmuro]*	

Tabla 30. Transcripción e interpretación del Episodio 16

Este episodio se caracteriza por la presentación de una solución a cargo de Inés [140], después de que el profesor dé paso al siguiente apartado del problema [137]. Así, lo consideramos *Presentación de una solución* por parte de un estudiante, con lo cual, se da el *Trabajo del sherpa*, siendo Inés el sherpa.

Aunque breve, este episodio es importante debido a varias características. Primero vemos cómo el profesor escoge al alumno que quiere que responda en lugar de plantear una pregunta abierta.

Si nos fijamos en la *Selección* de las fases de la sistemática aplicadas para preparar la discusión en gran grupo del problema, observamos que el profesor busca un alumno con un error en la solución. Escoge a Inés porque da por buena la solución de que el B3 es una simetría.

Además, observamos cómo se genera un murmullo por parte de otros estudiantes [143], ya que son muchos los que se han dado cuenta del error. Como en el apartado anterior, nadie comenta nada y se deja que el profesor decida como se va a tratar la "trampa".

A continuación, representamos en la Figura 46 el esquema del Episodio 16.

Figura 46. Esquema visual del Episodio 16

Oportunidades de aprendizaje:

Este episodio es muy breve, y la solución que plantea Inés, es incorrecta. De todos modos, hemos detectado oportunidades de aprendizaje de gestión.

Oportunidad de gestión:

- *Aprender a priorizar lo colaborativo por delante de lo individual.*

  El hecho de que los alumnos no intervengan cuando Inés presenta una solución errónea, da la oportunidad de aprender a ver las discusiones en gran grupo como un espacio colaborativo de construcción conjunta. Es importante que en las discusiones matemáticas se hagan las demostraciones o refutaciones de manera conjunta, por delante de que cada participante a título individual exprese sus ideas.

Episodio 17 (e_{17}): Uso de la mediatriz para la construcción de un eje de simetría

Tras la presentación incorrecta de la solución, Inés decide continuar con su intervención para explicar la estrategia seguida para encontrar el eje de simetría.

#	Participante	Intervención	Interpretación
144	*Profesor:*	*Vale, a veure, callem…*	

145	*Inés:*	*Nosaltres per trobar l'eix el que hem fet, bueno, és fer un segment entre un punt i el seu homòleg i després hem fet la mediatriu del segment*.	Exposición sin argumentación
146	*Profesor:*	*[a] Vale, heu fet per exemple: aquest i aquest... [b] M'heu fet un segment entre aquest i el seu homòleg, heu fet la mediatriu, i llavors dieu que això és l'eix de simetria, no?*	a. Complemento de la explicación b. Recapitulación
147	*Inés (y otros):*	*Sí!*	Asentimiento

Tabla 31. Transcripción e interpretación del Episodio 17

Clasificamos este episodio como *Estudio de una estrategia para resolver un problema* ya que Inés expone la construcción que ella ha utilizado. En consonancia, desde el punto de vista del tipo de orquestación, lo clasificamos como *Trabajo del sherpa*.

Si analizamos las acciones de los participantes involucrados en este episodio, vemos que mientras el profesor consigue que se interrumpa el murmullo [144], Inés continúa con su explicación de la solución y expone la estrategia que han seguido ella y su pareja, Víctor, para construir el eje de simetría [145]. Dados dos puntos homólogos (o que se piensan homólogos), Inés y Víctor construyen el segmento que los une, y posteriormente hacen la mediatriz de dicho segmento, como muestra la Figura 47.

Figura 47. Estrategia de Inés para construir el eje de simetría

Tras presentar Inés su estrategia, el profesor trata de introducir la construcción en la pantalla [146a], para ver si esto facilita mejor la comprensión del error. Mientras realiza la construcción, el profesor hace una recapitulación de los pasos a seguir [146b]. Cuando pide confirmación de comprensión a Inés, más alumnos responden afirmativamente [147]. Podríamos pensar que todos ellos están cometiendo el mismo error de Inés y Víctor, pero analizando el video y sus trabajos previos, nos damos cuenta de que entre los alumnos que contestan afirmativamente, se encuentran los que están considerando que las dos figuras son simétricas, y los que han utilizado esta estrategia en el segundo apartado cuando sí hay simetría.

Hemos puesto de manifiesto este aspecto porque es un ejemplo de acción de los alumnos con varios significados. Aunque el profesor haya planificado una secuenciación de la discusión, es difícil que acceda al pensamiento de todos los alumnos en cada momento; siempre va a tener que tomar decisiones con solo parte de la información necesaria.

En la Figura 48, mostramos el esquema que representa las acciones de este episodio.

Figura 48. Esquema visual del Episodio 17

Oportunidades de aprendizaje:

En este episodio, aunque también breve, identificamos diferentes oportunidades de aprendizaje de los tres tipos a partir de las acciones de Inés.

Oportunidad de concepto:

- *Aprender otra estrategia para construir el eje de simetría.*

  Aunque en este apartado no es necesario construir debido a que las figuras no son simétricas, la estrategia que Inés presenta para construir un eje de simetría es correcta. Tras las otras dos estrategias propuestas en el apartado anterior, en este episodio se aporta una nueva, lo cual añade a su vez nuevas posibilidades de aprendizaje. Así, se sigue trabajando el estudio de diferentes estrategias para llegar a una misma solución.

Oportunidad de proceso:

- *Aprender a usar el vocabulario específico.*

  Así como en los dos primeros apartados del problema el profesor tiene que corregir vocabulario específico, en particular para referirse a puntos homólogos, en este episodio Inés lo usa de forma natural en su explicación. Podríamos ver esto como una evidencia de progreso de esta alumna, pero a su vez como una oportunidad de aprendizaje para el resto de compañeros.

Oportunidad de gestión:

- *Aprender a completar las respuestas sin esperar la petición del profesor.*

  Otra acción que hace Inés en este episodio es contestar a la pregunta del profesor., Sin esperar que se le pregunte cómo continuar, ella misma decide ampliar su explicación, presentando la estrategia que ha seguido para construir el eje de simetría.

Episodio 18 (e_{18}): Planteamiento de un caso extremo

Tras ver que los alumnos que no están de acuerdo con la solución de Inés no toman partido en la discusión, el profesor decide implicar a Adrià. De este alumno sabe que sí que se dio cuenta de la trampa (las figuras no son simétricas) durante el trabajo por parejas.

#	Participante	Intervención	Interpretación
148	*Profesor:*	*Però que passa aquí, Adrià?*	Invitación a la generalización
149	*Adrià:*	*Que hi ha una trampa, perquè…*	Tratamiento de casos particulares
150	*Profesor:*	*Per què?*	Petición de argumentación
151	*Adrià:*	*Perquè no acaben de coincidir si fas la simetria, o sigui només coincideix un punt*	Justificación empírica
152	*Profesor:*	*Exacte, aquest és el problema. En aquest, jo vaig fer una trampa expressament, perquè aparentment són simetries…*	Validación

Tabla 32. Transcripción e interpretación del Episodio 18

Clasificamos este episodio como *Estudio de casos particulares* porque en él se trata el hecho de que el enunciado sea una trampa y con ello, que sea un caso particular que no cumple la estrategia que proponen los alumnos de forma general. Respecto al tipo de orquestación, lo consideramos *Discutir la pantalla* ya que el caso se discute a raíz de lo que ha presentado otra compañera.

Como en el episodio anterior, vemos la intencionalidad del profesor al preguntar a un alumno concreto [148]. El profesor había detectado, gracias a lo entregado al final de la sesión de trabajo por parejas, que Adrià y Clara habían comprobado que las figuras involucradas no son simétricas, como muestra la Figura 49.

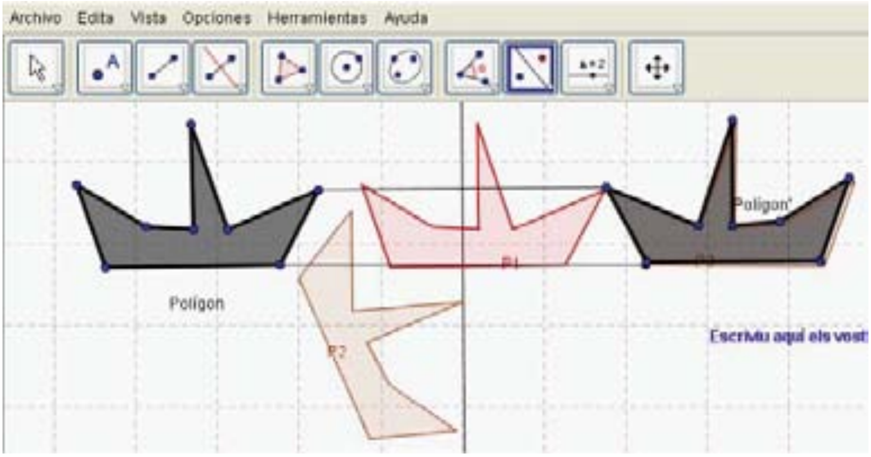


Figura 49. Extracto de la pantalla de Adrià durante el trabajo por parejas

A la pregunta directa del profesor, Adrià contesta que el enunciado contiene una trampa [149], y explica sus razones [149]. Suponemos que por una cuestión de costumbre, el profesor pregunta el porqué de su respuesta [150] y Adrià continua con su explicación [151]. Este alumno no da una argumentación formal sobre por qué las dos figuras no son simétricas, solo explica lo que él ha visto empíricamente durante el trabajo en parejas. Adrià y Clara primero suponen que son simétricas, y siguiendo la estrategia presentada por Inés en el Episodio 17, buscan el supuesto eje de simetría.

Posteriormente hacen la simetría de la figura inicial respecto de este eje. Al darse cuenta de que los puntos no encajan, descubren que su suposición inicial de figuras simétricas no se cumple.

Finalmente, el profesor verifica que las dos figuras del apartado se han construido para que parezcan figuras simétricas sin serlo [152].

Figura 50. Esquema visual del Episodio 18

Oportunidades de aprendizaje:

En este episodio, también hemos detectado oportunidades de aprendizaje de los tres tipos, que presentamos a continuación.

Oportunidad de concepto:

- *Aprender que las figuras deben cumplir las propiedades matemáticas y que a simple vista esto no es demostrable.*

  En este episodio Adrià desvela la trampa del apartado y explica que las figuras no son simétricas. Vemos esto como una oportunidad de aprendizaje de que las propiedades matemáticas no son siempre demostrables con simples dibujos, la apariencia de los cuales a menudo lleva a presuponer condiciones que en realidad no se cumplen.

Oportunidad de proceso:

- *Aprender a aplicar estrategias ya conocidas.*

  En la resolución del apartado anterior del problema, Adrià proponía una estrategia para comprobar si dos figuras son simétricas. Partiendo de la suposición que lo son, se trata de construir el eje y hacer la simetría para ver si coinciden. Esta estrategia se proponer para hacer una comprobación y el profesor, acertadamente, hace notar que se puede seguir viendo algo que no es matemáticamente verdadero. En el tercer apartado, sin embargo, Adrià recupera la estrategia para demostrar la no simetría. A modo de contraejemplo, piensa que le basta con ver que efectivamente no encajan (ver Figura 49). Esto genera una oportunidad de aprendizaje sobre los procesos matemáticos de demostración de los alumnos.

Oportunidad de gestión:

- *Aprender a completar las respuestas sin esperar la petición del profesor.*

  Por segundo episodio consecutivo, el alumno que interviene empieza a explicar el porqué de su respuesta sin que el profesor lo pida. Aunque en este caso, el profesor, por norma general, lo pregunta igualmente. La oportunidad de aprendizaje que se genera a partir de estas pequeñas acciones contribuye a que gradualmente los alumnos se acostumbren a participar en la discusión de forma argumentada.

Episodio 19 (e_{19}): Conexión con la homotecia

Tras la explicación algo insuficiente de Adrià para explicar que en este apartado las figuras no son isométricas, el profesor interviene para hacer una aclaración a los alumnos que no lo han detectado y a los que sí lo han detectado pero sin entender el motivo.

#	Participante	Intervención	Interpretación
153	*Profesor:*	*[a] De fet, jo vaig fer una simetria, però després li vaig fer una homotècia, [b] que és allò que us vaig dir que canvia la mida de la figura. Però era una homotècia de 1'1, que gairebé no es nota, però en realitat fa que els punts no siguin simètrics.*	a. Justificación empírica b. Conexión

Tabla 33. Transcripción e interpretación del Episodio 19

A partir de la situación de la pantalla que ha surgido en la discusión, el profesor quiere establecer la conexión del problema con otro tema de las transformaciones de las figuras, las homotecias. Así consideramos que el aspecto discursivo de este episodio es *Conectar* y que el modo de orquestación es *Explicar la pantalla*.

El único participante del episodio es el profesor. Aunque su propósito es justificar por qué las dos figuras no son simétricas [153a], la única forma de explicarlo es detallando el procedimiento seguido al crear el enunciado y por tanto mencionando el concepto de homotecia, que explica brevemente [153b]. La intención del profesor parece ser la de participar como un alumno, al intentar una justificación empírica; por ello, consideramos sus acciones como pensamientos matemáticos y no como intervenciones didácticas.

En la Figura 51, representamos el esquema visual de este episodio. Las acciones protagonizadas por el profesor están representadas con color amarillo, tal como se corresponde con el tipo de pensamientos matemáticos.

Figura 51. Esquema visual del Episodio 19

Oportunidades de aprendizaje:

En este episodio, aunque breve, hemos detectado dos oportunidades de aprendizaje.

Oportunidad de concepto:

- *Recordar el concepto de homotecia.*

  El hecho de que el profesor anote brevemente la característica de las homotecias –que cambia las medidas de la figura original–, puede hacer que los alumnos recuerden esta transformación en el plano. Notemos que se trae a colación también el factor de proporcionalidad. Esto sugiere que se confía en que los alumnos saben el significado del concepto.

Oportunidad de gestión:

- *Aprender la importancia de la precisión de los problemas.*

Debido a que el problema se ha llevado a cabo con el programa de geometría dinámica, los alumnos se han encontrado con problemas de precisión que quizá no hubieran aparecido trabajando con papel y lápiz. Por el comentario del profesor en este sentido y con la precisión de la homotecia de factor 1’1, puede ser que algunos alumnos entiendan la importancia de aplicar la precisión en los problemas de matemáticas y no solo en los de física.

Episodio 20 (e_{20}): Identificación correcta de la no isometría

Tras la explicación del profesor del motivo por el cual las figuras no son simétricas, éste centra sus explicaciones posteriores en los procesos que intervienen al demostrar que no son simétricas. Parece, sin embargo, los alumnos no siguen bien las explicaciones.

#	Participante	Intervención	Interpretación
154	*Profesor:*	*[a] Però llavors, tots aquells que comproveu les simetries fent només un punt, aquí semblava que sí, però en realitat si fas la simetria i ho comproves bé... [b] Si fas la simetria respecte d’aquest punt, sembla que sí, però si feu la simetria, ja es veu que al final no enganxa, d’acord? Per això és important que feu totes les mediatrius... [c] En realitat, que hauríeu d’haver fet?*	a. Justificación empírica b. Ampliación de la argumentación c. Petición de formalización
155	*Víctor:*	*No pintar*	Exposición sin argumentación
156	*Profesor:*	*Què hauríeu d’haver fet per veure-ho tot?*	Petición de formalización
157	*Víctor:*	*No hauríem d’haver pintat, perquè com no és cap isometria...*	Observación de evidencia empírica
158	*Profesor:*	*Exacte, no és cap. Per tant, no anava ni de blau, ni de verd, ni de vermell. Aquest havia de quedar marró com a l’enunciat, sí?*	Validación

Tabla 34. Transcripción e interpretación del Episodio 20

Este episodio sigue centrado en la discusión de lo que se observa en la pantalla, por eso consideramos que el tipo de orquestación es todavía *Discutir la pantalla*. Conceptualmente, veremos que aunque la intención del profesor sea otra, hay *Presentación de una solución*.

Tras haber expuesto en el episodio anterior que la figura B3 no es simétrica con la del enunciado, el profesor repite la justificación empírica [154a], ampliando su explicación [154b]. Pretende que los alumnos formalicen cuál era su error y cómo deberían haber actuado para darse cuenta de que la figura B3 no cumplía las propiedades necesarias para ser simétrica de la original [154c].

Al mismo tiempo que el profesor tiene estas ideas en mente, hay alumnos, como Víctor –pareja de Inés–, que acaban de notar que no es una simetría. Víctor quizá está pensando qué otra posibilidad hay, y contesta que la figura no tendría que haberse pintado de ningún color porque se corresponde con isometrías de las que habla el enunciado [155]. Los procesos de pensamiento de los alumnos son distintos, y esta es una evidencia de ello.

El profesor reacciona buscando otro alumno que pueda contestar en la dirección que él pretende o intentando que Víctor entienda el sentido de sus intervenciones. Para ello, reformula la pregunta aunque de una forma poco clara [156]. Víctor, que es el único alumno que vuelve a participar, repite su idea, aunque intenta explicar mejor la evidencia empírica [157]. El profesor decide validar su respuesta porque es correcta y dejar la pregunta para poder continuarla en otro episodio [158].

En la Figura 52, mostramos la representación esquemática del episodio. Una característica general es que no se establece un diálogo congruente según las expectativas del profesor, aunque el alumno pueda pensar que está respondiendo a sus peticiones.

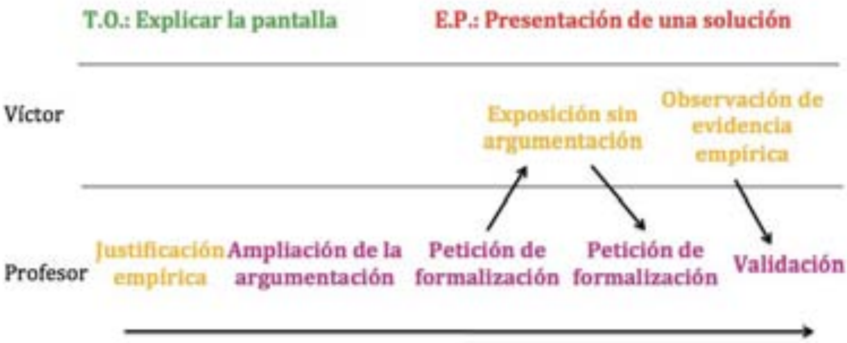


Figura 52. Esquema visual del Episodio 20

Oportunidades de aprendizaje:

En este episodio, también hemos detectado oportunidades de aprendizaje de los tres tipos construidos, que presentamos a continuación.

Oportunidad de concepto:

- *Aprender que las homotecias no son un tipo de isometría.*

  La interacción entre Víctor y el profesor durante el episodio, aunque parece que no se adecua a la petición del profesor, es potencialmente importante para muchos alumnos. Les puede clarificar que las homotecias no son un tipo de isometría ya que el objeto B3 no tiene que pintarse de ninguno de los colores asignados a las isometrías.

Oportunidad de gestión:

- *Aprender la importancia de participar aún sin garantías de corrección matemática.*

  Cuando el profesor no rechaza la participación de Víctor ni le hace evidente que sus comentarios no van en la línea de lo que quería tratar, se puede interpretar que así se contribuye a que los alumnos valoren la importancia de participar. La participación es un elemento que a su vez puede servir para aclarar aspectos que el profesor no considera en ese momento e incluso detectar comprensiones erróneas o incompletas.

Episodio 21 (e_{21}): Uso de la transitividad para la generalización

Como en el episodio anterior los alumnos no han comentado lo que el profesor tenía planeado, que este tratará de conseguir otra vez en este último episodio del tercer apartado del Problema 1.

#	Participante	Intervención	Interpretación
159	*Profesor:*	*Però, com... com comprovàvem que no era si ho haguéssim fet ben fet? José Manuel.*	Invitación a la generalización
160	*José Manuel:*	*Doncs, clar, podíem comparar-los amb tots però a la que afegeixes un que no coincideix, ja podem dir que no.*	Exposición sin argumentación
161	*Profesor:*	*D'acord.*	Validación
162	*Sergio:*	*Com, com?*	Petición de aclaración
163	*Profesor:*	*A veure, digues més alt cap allà.*	Invitación a la participación
164	*José Manuel:*	*Doncs que podíem fer-ho amb totes les mediatrius i veuríem que no coincidien, o només fins a trobar una que no coincideix.*	Exposición sin argumentación
165	*Profesor:*	*[a] O sigui, les dues mediatrius, la mediatriu que s'ha fet la Inés, només que haguéssim fet una altra i haguéssim posat amb l'eina de comparar, [b] mira anem-ho a fer. Faig per exemple aquest punt i també faré aquest. I llavors faig lo que ha fet la Inés: la mediatriu entre aquest i aquest. [c] Ah, veieu això que no fa falta fer-se el segment per fer la mediatriu, ho podeu fer donant-li a dos punts eh. I aquest amb aquest.[d] Faig les dues mediatrius i ara li dic: compara'm aquestes mediatrius.*	a. Justificación empírica b. Comprobación de una propiedad que se cuestiona c. Demostración técnica d. Justificación empírica
166	*Sara:*	*Profe...*	
167	*Profesor:*	*Què?*	
168	*Sara:*	*Però, aleshores, per veure si són simètriques o no, sempre hem de fer la comprovació per tots els punts a no ser que en trobem un pel mig que ja no ho*	Recapitulación

		compleix, no?	
169	*Profesor:*	*[a] Exacte. Vale? [b] En aquest cas, ara ja es veu que no ho són, però sinó teníeu la finestra algebraica i miràveu com es deien i li dius ja comparar m amb n, [c] i no fa falta fer això del zoom que alguns heu fet, però bé és un altre recurs.*	a. Validación b. Búsqueda de alternativas c. Búsqueda de alternativas

Tabla 35. Transcripción e interpretación del Episodio 21

Clasificamos este episodio como situación de *Generalización*, aunque veremos que durante las acciones se crean conexiones con otras situaciones matemáticas. Desde el punto de vista de la orquestación, a pesar de que se genera nuevo conocimiento y esto es guiado sobre todo por un alumno, tomamos el tipo *Discutir la pantalla* porque todo surge a partir de lo que se había construido en la pantalla durante los episodios anteriores.

Tras la participación de Víctor en el Episodio 19, el profesor, para asegurar que se va a tratar el tema que pretende, usa el recurso de preguntar directamente a un alumno que sabe que se ha dado cuenta de la situación que quiere tratar. Así, pregunta a José Manuel de qué manera podrían hacer la comprobación de que no hay simetría [159]. José Manuel contesta al profesor pero de forma algo críptica; no explica lo que quiere comparar, pero sí menciona que si encuentra un elemento que no coincida, podrá afirmar que no hay simetría [160]. Los elementos a comparar son las mediatrices de cada pareja de puntos homólogos. La propiedad matemática que aplica es la transitividad, ya que para que las figuras sean simétricas todas las mediatrices tienen que coincidir; no hace falta compararlas todas entre ellas, como ya se había trabajado en el primer apartado del problema con la comparación de vectores.

El profesor valida la intervención del alumno, sin notar que quizá no ha sido inteligible para el resto de alumnos [161]. Sergio, antes de que se pase a trabajar otra situación y puesto que no ha entendido la explicación de José Manuel, pregunta en voz alta [162]. Cuando el profesor interviene, valoramos positivamente que le pida que hable en dirección a sus compañeros en lugar de hablar mirándolo a él.

Así, se deja paso a José Manuel para que él mismo explique con más detalle lo que acaba de explicar [163]. Esta situación y el comentario del profesor son una evidencia de que aunque algunos profesores planteen sus clases centradas en los alumnos e intentando que estos construyan conocimiento colaborativamente, la distribución de los asientos en clase y las normas en torno a las intervenciones dirigidas al profesor están muy extendidas. Resulta difícil que a veces la discusión en gran grupo sea una conversación ordenada donde los participantes respeten los turnos sin necesidad de que alguien gestione la colaboración.

Tras el comentario del profesor y la petición de aclaración de Sergio, José Manuel repite su generalización esforzándose en expresar mejor sus ideas [164]. Aunque ningún alumno vuelve a preguntar, el profesor retoma la explicación de José Manuel e intenta una justificación empírica [165a] sobre por qué lo que dice José Manuel es correcto. A media explicación, puesto que están usando la construcción en la pantalla con la mediatriz de Inés, el profesor decide construir lo que ha explicado José Manuel sobre la construcción existente [165b].

Esta situación genera una situación rica. Cuando el profesor tiene que construir otra mediatriz junto con la construida por Inés, tiene la oportunidad de mostrar otra estrategia para construir la mediatriz entre dos puntos homólogos. Enseña a los alumnos mediante una demostración técnica que para construir una mediatriz no hace falta dibujar el segmento entre los dos puntos, sino que se puede hacer la mediatriz de dos puntos directamente [165c]. Finalmente, una vez finalizada la construcción, recuerda que el procedimiento formal para comparar dos elementos no es a simple vista, sino mediante la herramienta de comparar elementos [165d].

Cuando el profesor da la explicación por finalizada, Sara pide la palabra [166]. El profesor se la da [167] y ella expone una recapitulación para cerciorarse de que lo ha entendido todo bien [168]. Como Sara no comenta nada desde el punto de vista técnico, el profesor, además de validar su resumen [169a], aprovecha para hacer hincapié en este punto técnico y plantea una alternativa a cómo comparar dos rectas que puede estar superpuestas. Recuerda que se puede recurrir a la ventana algebraica, buscar las rectas, y con la herramienta de comparación, seleccionar directamente las de la ventana algebraica en lugar de las de la geométrica [169b]. Éste es un buen recurso. Lo que varios alumnos han hecho –y el profesor se ha dado cuenta de ello durante la fase de monitorización en parejas– es aplicar el zoom de acercamiento a las rectas, con lo que si no son coincidentes esto se observa con facilidad. Por ello, el profesor hace notar al final de su intervención que no es necesario usar esta herramienta, que no es muy efectiva. Si las rectas son coincidentes, la anterior no es una buena estrategia para demostrarlo.

En la Figura 53 mostramos la representación visual del Episodio 21, con el que acabamos este apartado del problema.

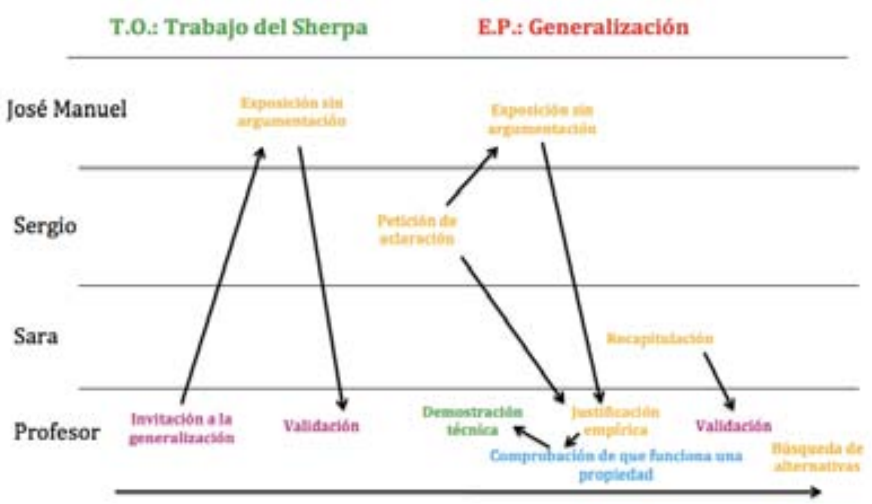


Figura 53. Esquema visual del Episodio 21

Oportunidades de aprendizaje:

En este episodio, una vez más hemos detectado oportunidades de aprendizaje de los diferentes tipos, que presentamos a continuación.

Oportunidad de concepto:

- *Recordar la propiedad transitiva.*

En este episodio, se genera una interacción rica ya que diferentes estudiantes participan en la misma discusión e interactúan. El hecho de que José Manuel proponga aplicar la propiedad transitiva para comprobar si dos figuras son simétricas, es una oportunidad para que los otros alumnos recuerden el concepto. Consideramos especialmente rico que, tras la petición de aclaración de Sergio, José Manuel se esfuerce en dar otra explicación, y que el profesor la complemente con detalles. Del mismo modo, la intervención final de Sara, que se esfuerza por hacer una recapitulación de lo esencial de la explicación, se convierte en una posible oportunidad para más alumnos. Notemos que no se verbaliza el concepto "propiedad transitiva" pero en todo momento se están refiriendo a él.

Oportunidades de proceso:

- *Aprender a usar la transitividad para optimizar una estrategia.*

El hecho de que algunos alumnos coincidan en que lo importante es comprobar que todas las rectas coinciden para demostrar que dos figuras son simétricas, es importante desde el punto de vista conceptual. Si añadimos la aportación de José Manuel y la posterior matización de Sara, todo esto puede generar la oportunidad de aprendizaje de aprender que la transitividad es útil como estrategia optimizadora.

- *Aprender la estrategia técnica necesaria para llevar a cabo la estrategia teórica.*

Una vez se ha coincidido en la importancia de aplicar la transitividad para comparar todas las rectas, hace falta que mediante la interacción con la tecnología se ponga en práctica la estrategia técnica para materializar la teoría. Esto es una oportunidad de aprendizaje para los alumnos.

- *Aprender a generalizar.*

La aportación de Sara puede servir como oportunidad para los compañeros de ver cómo se generaliza una explicación aplicada a un ejemplo en concreto.

Oportunidad de gestión:

- *Aprender la importancia de buscar alternativas.*

Al final del episodio, el profesor introduce una alternativa para cerciorarse de que todos los ejes de simetría son coincidentes, lo cual ya había observado durante la fase de monitorización. Aunque del episodio se desprende que la estrategia en la que se usa la transitividad es más eficiente, el profesor no rechaza las otras estrategias usadas por los alumnos. Esto puede generar un aprendizaje práctico de la importancia de saber buscar alternativas cuando uno no se encuentra la mejor solución desde el inicio.

5.1.6 Análisis integrado del tercer apartado del Problema 1

Siguiendo con el esquema del análisis de los apartados anteriores, hacemos una mirada conjunta a los episodios que forman parte del tercer apartado del Problema 1. Empezamos con una breve descripción global que permite ver de forma panorámica lo sucedido durante la discusión en gran grupo de este apartado.

Como en el segundo apartado, no hace falta una introducción del problema y directamente se da paso a la presentación de una solución. Aunque en el apartado anterior se había hablado de las técnicas necesarias para comprobar si dos figuras eran simétricas antes de pasar a construir su eje de simetría, Inés, quien tenía la respuesta del problema preparada conjuntamente con Víctor, expone su solución errónea (e_{16}). Esta alumna no tenido tiempo de hacer las comprobaciones pertinentes, así que continúa explicando su estrategia para la construcción del eje de simetría, habiendo resuelto a simple vista que las dos figuras son simétricas (e_{17}). Hay que tener en cuenta que la estrategia que propone es nueva (ver

Figura 47), ya que no había sido presentada durante el apartado anterior.

Una vez terminada su presentación, José Manuel expone que se trata de un caso particular, porque ha sido modificado para que las figuras no sean simétricas (e_{18}). Para aclarar la situación, el profesor toma parte en la discusión explicando qué técnica ha seguido para hacer la modificación, y establece la conexión con el concepto de homotecia para que los alumnos vean por qué no hay simetría (e_{19}).

A partir de ese punto, Víctor, pareja de Inés, se da cuenta de su error, e identifica la solución correcta. Ve que la figura no es una simetría, pero que tampoco se corresponde con ninguna de las otras isometrías, y así lo expone (e_{20}).

Finalmente, después de la petición del profesor, José Manuel expone una estrategia general para comprobar si dos figuras son simétricas. Utiliza la propiedad transitiva para realizar la comprobación con la mayor eficiencia posible (e_{21}). En esta última intervención, además de estar haciendo una conexión con la propiedad transitiva, también hace una conexión con la discusión del primer apartado del problema, donde se ha resuelto el problema análogo pero con la comparación de vectores.

Tras esta mirada global a la discusión del tercer apartado, adoptando mayor distancia con las acciones individuales de los participantes, nos damos cuenta de la construcción conjunta del conocimiento. Se observa como gradualmente, con la colaboración de diferentes participantes que aportan sus ideas del trabajo en parejas y que reflexionan durante la discusión en gran grupo, se modifican ideas erróneas y se sustituyen por soluciones y razonamientos correctos.

Fijándonos en la Tabla 29, como resumen visual de esta discusión, observamos de qué manera se han tratado casi todos los estadios de la discusión. El estadio centrado en la situación del problema no se ha llevado a cabo porque sería repetitivo. Tampoco la reflexión sobre el progreso matemático de cada alumno, ya que metodológicamente se tomó la decisión de que fuese posterior a la discusión en gran grupo, y se canalizara por escrito y de forma individual para tener evidencias de progreso de todos los estudiantes. El único estadio que parece que no se haya tratado es *Contraste entre diferentes soluciones* –entendiendo por soluciones las diferentes estrategias de construcción de los ejes de simetría–, que aunque no se ha hecho explícitamente, los alumnos lo pueden haber percibido ya que las estrategias propuestas han sido diferentes de las del apartado precedente.

Con esto, señalamos la riqueza que va tomando la discusión y lo completa que resulta cuando uno analiza las pequeñas conexiones desde un punto de vista global.

En relación con la tecnología, análogamente al apartado anterior, vemos que gracias a ella la tarea tiene sentido como problema matemático y no como ejercicio. Además, ayuda a tratar la precisión y la formalización de una manera indispensable.

Si nos fijamos en el aspecto colaborativo entre participantes, cada vez las discusiones van evidenciando una construcción más ordenada del conocimiento, lo que se refleja en un trabajo que va en una misma dirección. Tomando el aspecto del acceso de Schoenfeld (2013), cada vez es más evidente que no todos los participantes contribuyen, ni lo hacen del mismo modo, a la discusión conjunta. A menudo tampoco se dedican esfuerzos por parte del profesor ni de los compañeros para que mejore la participación de los otros. Es una tarea difícil, pero importante para llegar a una construcción realmente conjunta.

En contraposición a esta idea y tal como veremos en el análisis final del progreso de los alumnos, muchos de los que no participan activamente en la discusión incorporan ideas discutida en sus reflexiones personales por escrito.

5.1.7 Puesta en común del apartado 4 del Problema 1

Este apartado del Problema 1 es una continuación de los otros en tanto que sigue la misma estructura del anterior: dada una figura y su original, hay que decidir de qué isometría se trata. Ahora es un giro. No se pide la construcción de su elemento principal que es el centro de giro, ya que el problema solo pide determinar la transformación para las simetrías.

En la discusión que ahora presentamos, se dan varios hechos interesantes. Por un lado, al discutir el apartado tras haber encontrado figuras con trampa (supuestas simetrías), los alumnos tienen la intención de comprobarlo también en esta ocasión. Por otro lado, tras haber encontrado el elemento característico tanto para la simetría como para la translación (que no pedía el enunciado), los alumnos intentan también encontrar el centro de giro para este apartado, lo que promueve una serie de efectos en la práctica matemática.

A continuación, en la Tabla 36 presentamos la estructura de los episodios en que se ha dividido esta discusión.

Discusión en gran grupo (Problema 1, barco B4)	Situación del problema	Presentación de una solución (argumentada)	Estudio de estrategias para resolver o argumentar	Estudio de casos particulares o extremos	Contraste entre diferentes soluciones	Conexiones con otras situaciones	Generalización y conceptualización	Reflexión sobre el progreso matemático	*(Tipos de estadio)*
Demostración técnica									
Explicar la pantalla									
Conectar pantalla y pizarra						(e_{26})			
Discutir la pantalla									
Descubrir y mostrar			(e_{24})						
Trabajo del sherpa		(e_{22})	(e_{23}), (e_{25})						
(Tipos de orquestación)									

Tabla 36. Estructura del apartado 4 de la discusión del Problema 1

Episodio 22 (e_{22}): Identificación de un giro

Después de cerrar los apartados sobre las simetrías, se pasa a tratar el giro. En la Tabla 37, presentamos la transcripción del episodio con la interpretación de las acciones.

#	Participante	Intervención	Interpretación
170	*Profesor:*	*A veure, el B4. El B4 què era, Sara?*	Petición de solución
171	*Sara:*	*Un gir*.	Exposición sin argumentación
172	*Núria:*	*Un gir*.	Exposición sin argumentación
173	*Profesor:*	*Ok, de quin color? Verd, oi?*	Validación

Tabla 37. Transcripción e interpretación del Episodio 22

Caracterizamos este episodio como *Presentación de una solución*. Desde el punto de vista del tipo de orquestación lo consideramos *Trabajo del sherpa*, ya que son los alumnos los que presentan la solución.

Al inicio del episodio, el profesor da paso a la resolución de este nuevo y último apartado, preguntando directamente la solución a Sara [170]. Ésta responde que la cuarta figura es un giro de la original en el enunciado [171]. En el mismo sentido responde una compañera, Núria [172].

Aunque Sara y Núria contestan a la petición matemáticamente con la isometría adecuada, el profesor valida su solución y concreta que habría que pintar la figura de color verde, como pide el enunciado [173].

En la Figura 54 presentamos el esquema visual del episodio.

Figura 54. Esquema visual del Episodio 22

Oportunidades de aprendizaje:

Este episodio es similar a otros episodios ubicados en l inicio de los respectivos apartados del Problema 1.

Oportunidad de concepto:

- *Revisar la noción de giro.*

  El hecho de que un compañero presente la solución como una translación y que el profesor la valide, contribuye a que otros alumnos puedan revisar la noción de translación y recordarla gráficamente.

Oportunidades de gestión:

- *Aprender a auto-corregir la solución.*

  Si nos centramos en la interacción inicial entre profesor y estudiante, detectamos una oportunidad de aprender a auto-corregir la solución ya que ésta es expuesta por el alumno y posteriormente validada por el profesor. Sin embargo, no se aporta mayor explicación, con lo que se entiende que el alumno que no tenga la misma solución lo hará notar posteriormente.

Episodio 23 (e_{23}): Razonamiento por eliminación

Una vez presentada la solución correcta, un alumno explica de qué forma han decidido con su pareja que es un giro. Se trata de una estrategia válida, aunque no tiene en cuenta la posibilidad de que no sea ninguna de las isometrías planteadas.

#	Participante	Intervención	Interpretación
174	*Profesor:*	*Com vèieu que era un gir? A veure, com ho heu fet? Víctor.*	Petición de formalización
175	*Víctor:*	*Bueno, nosaltres ens vam fixar en l'orientació de la vela...*	Exposición sin argumentación
176	*Profesor:*	*Vale...*	Validación / Petición de formalización
177	*Víctor:*	*I vam veure que miraven cap al mateix costat del segment aquest que és recte, que està just a l'esquerra.*	Exposición sin argumentación
178	*Profesor:*	*Sí...*	Validación / Petición de formalización
179	*Víctor:*	*Que també està a... està a la mateixa banda.*	Exposición sin argumentación
180	*Profesor:*	*Vale...*	Validación / Petición de formalización
181	*Víctor:*	*[a] Llavors, amb això ja vam saber que no era una simetria. [b] Després, per saber que era un gir i no una translació vam dir que com que la base no estava ni a la mateixa recta ni a una paral·lela era un gir.*	a. Justificación deductiva b. Justificación deductiva
182	*Profesor:*	*[a] Exacte, [b] perquè lo que diu el Víctor, si aquest vaixell el trasllado amb una translació, la base del vaixell, per exemple, a on quedi, sempre hauria de quedar com en una paral·lela, o a la mateixa mida, a la mateixa alçada, o a una paral·lela, vale? Però si tinc la base*	a. Validación b. Ampliación de la argumentación

		del vaixell torta segur que no ho he fet amb un vector això. Vale? Per tant, hi he fet un gir.	

Tabla 38. Transcripción e interpretación del Episodio 23

Caracterizamos este episodio como Trabajo del sherpa, ya que es Víctor quien presenta su estrategia. Desde el punto de vista del estadio del problema , se trata del *Estudio de una estrategia para argumentar su solución*, porque durante la presentación Víctor argumenta su elección.

En primer lugar, el profesor hace la petición de formalización de la solución presentada por Sara y Núria en el episodio anterior [174]. Es Víctor, quien levanta la mano y se presenta voluntario para explicar cómo han decidido con su compañera que es un giro.

En diferentes turnos [175, 177 y 179], cuyos contenidos van siendo validados por el profesor [176, 178 y 180], Víctor construye eslabones para crear una cadena deductiva y finalizar con una parte de la exposición de su argumentación [181a]. Con este razonamiento explica por qué no hay simetría. Él mismo procede a explicar por qué descarta la opción de translación para así acabar deduciendo que debe ser un giro [181b].

Tras presentar la estrategia basada en la eliminación de posibilidades, el profesor valida su razonamiento [182a] y amplia su argumentación explicando con más detalle el último paso de su argumentación sobre cómo desestimar la opción de translación.

Esta estrategia es válida solo si se está seguro de que la solución es una de las tres posibilidades disponibles. Si existe la opción de que la figura no sea ninguna de las isometrías planteadas, la estrategia deja de ser adecuada. Recordemos que Víctor, junto con Inés, no se había dado cuenta del error del tercer apartado durante el trabajo por parejas, y lo rectifica en la discusión.

En la Figura 55 presentamos el esquema de las acciones que intervienen en el episodio.

Figura 55. Esquema visual del Episodio 23

Oportunidades de aprendizaje:

Presentamos las oportunidades de aprendizaje detectadas en este episodio. Víctor y el profesor interaccionan de forma ordenada, provocando un elevado número de peticiones indirectas.

Oportunidad de concepto:

- *Repaso de las características importantes de las isometrías.*

  Durante el episodio, Víctor expone frente al grupo la estrategia seguida para ver que el objeto B4 es un giro de la figura original. Al repasar todas las isometrías para acabar escogiendo el giro por descarte, revisa las características más importantes de cada una de ellas. Se pueden estar generando aprendizajes, por tanto, de dichas propiedades.

Oportunidad de proceso:

- *Aprender a usar estrategias visuales.*

  Aunque Víctor está obviando la posibilidad de que no se trate de ninguna isometría, su estrategia visual de comparación entre isometrías para descartar las que visualmente no parecen cumplir con las características necesarias, es una oportunidad de aprender este tipo de estrategias para el resto de alumnos.

Oportunidad de gestión:

- *Aprender la importancia de justificar la solución.*

Como ya ha sucedido en otros episodios, el hecho de que el profesor insista pidiendo más formalizaciones (aunque ahora de forma indirecta) mientras el alumno no justifica sus explicaciones, y que cuando lo hace el profesor deje de hacer peticiones de formalización y valide la justificación, contribuye a que los alumnos puedan aprender la importancia de argumentar en matemáticas.

Episodio 24 (e_{24}): Construcción de la circunferencia de giro

Tras la presentación de la estrategia de Víctor para la elección de la isometría correcta, Clara presenta un intento de estrategia para hallar el centro de giro.

#	Participante	Intervención	Interpretación
183	*Profesor:*	*[a] Però, d'aquest vaixell negre al vaixell P4, podeu anar amb un gir directament? [b]Perquè molta gent em deia: faria primer un gir i després el transportaria. [c] A veure, Clara.*	a. Invitación a la generalización b. Ampliación de la argumentación c. Invitación a la participación
184	*Clara:*	*Bueno, no ho sé segur, però, o sigui, senzillament una cosa que se m'acaba d'acudir de com fer que el vaixell giri, però igual no es pot fer, eh?*	Búsqueda de alternativas
185	*Profesor:*	*Sshhhtt... A veure, Isidro, en comptes de riure, escolta-la i mira a veure si es pot fer o no realment! Digues, digues, Clara.*	
186	*Clara:*	*[a] Bueno, és, em, fer una circumferència i aleshores no sé de quin exercici, però me'n recordo que tenia un punt que es podia moure tot al voltant de la circumferència. Aleshores, agafar tres punts del..., bueno no, és que clar el problema és com fer la circumferència. [b] Seria agafar un, o sigui per exemple, el punt de dalt de la dreta amb el seu homòleg i, després, clar, faltaria un tercer punt per poder...*	a. Búsqueda de alternativas b. Conexión

187	*Profesor:*	*Per poder determinar exactament la circumferència.*	Ampliación de la argumentación / Corrección de vocabulario

Tabla 39. Transcripción e interpretación del Episodio 24

Caracterizamos este episodio como *Estudio de una estrategia para argumentar su solución*. Tiene la peculiaridad que lo que presenta Clara no es una estrategia pensada durante el trabajo en parejas, sino una idea pensada en ese momento a raíz de los comentarios de otros participantes en la discusión. Por este motivo desde el punto de vista de la orquestación lo definimos como *Descubrir y mostrar*.

Al principio del episodio, el profesor quiere tratar el concepto de composición, que ha visto usar a alumnos intuitivamente durante el trabajo por parejas [183a-b]. Quiere introducir la discusión sobre la unicidad de solución en el movimiento que lleva la figura inicial hasta B4. Algunos alumnos han hecho constar en su solución escrita que harían primero un giro sobre cualquier punto interior de la figura inicial y posteriormente una translación. Esto es interesante ya que puede ser una forma de evitar tener que encontrar el centro de giro entre dos figuras homólogas, ya que el centro puede ser cualquiera, y para calcular el ángulo de giro se podría calcular el ángulo que forman las prolongaciones de dos lados homólogos de la figura. Una vez realizado el giro, la translación sería trivial.

Al ver que Clara se ofrece voluntaria, el profesor le da la palabra [183c]. Esta alumna plantea una forma de encontrar el centro de giro que haría que la figura inicial rotara directamente sobre B4. Es decir, cambia la dirección de la discusión para buscar una alternativa a la propuesta de Víctor [184]. Cuando Clara empieza a explicar su idea, dice que está poco reflexionada y que no sabe si se podrá llevar a cabo. Su idea es que en dos figuras transformadas mediante un giro, los puntos homólogos se deslizan por una circunferencia y la dificultad reside en hallar su centro. La alternativa de Clara es intentar construir la circunferencia aplicando otras propiedades para luego hallar el centro [186a].

Para esta estrategia (ver Figura 56), Clara se da cuenta que la otra estrategia con la que sabe construir una circunferencia sin usar su centro (practicada en otro problema de clase) es usando tres de sus puntos. Sin embargo, en esta ocasión, para cada circunferencia solo tiene dos puntos conocidos, por lo que su estrategia no es aplicable [186b].

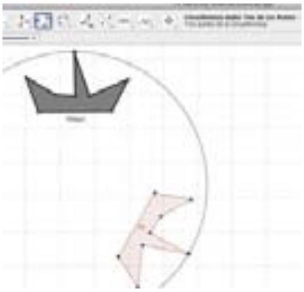


Figura 56. Estrategia propuesta por Clara

Finalmente el profesor hace una formalización de vocabulario para compartir con los demás estudiantes lo que Clara experimenta. Ésta ha dejado de hablar en cuanto aprecia la dificultad en su razonamiento [187].

A continuación (Figura 57) mostramos la representación visual del episodio.

Figura 57. Esquema visual del Episodio 24

Oportunidades de aprendizaje:

Presentamos las oportunidades de aprendizaje que se han detectado de este episodio.

Oportunidad de concepto:

- *Aprender la equivalencia de la transformación con la composición de transformación y translación.*

  La invitación a la generalización del profesor al inicio del episodio y su mención explícita de que hay alumnos que consideran la composición de dos isometrías mientras que se podría ir con una sola, puede provocar el aprendizaje de dicha equivalencia en algunos alumnos.

- *Recordar la construcción de una circunferencia sin saber su centro.*

  La conexión que establece Clara con las posibles formas de construir las circunferencias hace que se traiga a colación en clase uno de los métodos estudiados. Para los otros alumnos esto puede suponer un recordatorio de la construcción.

Oportunidad de proceso:

- *Aprender a buscar estrategias adecuadas a las variables conocidas.*

  Clara, pensando en voz alta, intenta aplicar la construcción de la circunferencia dados tres puntos. Ha planteado como hipótesis que uno de los elementos que le falta es el centro. Aunque su estrategia no llega a darse porque tampoco tiene los tres puntos necesarios, solo dos, puede estar contribuyendo a que algunos alumnos aprendan a buscar estrategias dependiendo de las variables dadas en el problema.

Oportunidad de gestión:

- *Aprender la importancia de participar en el descubrimiento de una idea, aunque sea errónea.*

El hecho de que Clara haya participado y que, aunque su propuesta se ha visto que no es correcta, el profesor haya ampliado la argumentación facilita que los alumnos vean de forma positiva su intento de construcción de conocimiento. Es importante observar que el profesor no desacredita la participación de Clara.

Episodio 25 (e_{25}): Construcción de los segmentos que unen puntos homólogos

Tras la presentación de la estrategia de Clara, Inés continúa en la línea de intentar encontrar la forma de construir el centro de giro. Como veremos, la discusión sobre la composición de un giro más una translación quedará olvidada.

#	Participante	Intervención	Interpretación
188	*Profesor:*	*A veure, Inés.*	Invitación a la participación
189	*Inés:*	*[a] Bueno, una mica és el que ens va dir l'altre dia. [b] Si el punt del que girem és exterior, l'altre dia vam fer una cosa que ens va dir que només servia amb algunes figures, que és fer el segment que unia un punt i el seu homòleg. O sigui, fer-los tots i si funcionés s'haurien de creuar en un punt, i aquest seria el punt en el qual es gira. [c] Però en aquest cas l'hem fet i hi havien segments que no es creuaven.*	a. Conexión b. Exposición sin argumentación c. Justificación empírica
190	*Profesor:*	*Vale, és que jo... has dit una petita cosa que no et vaig dir exactament això. Tu m'has dit: va funcionar l'altre dia i vostè va dir que només funcionaria per algunes figures. I no et vaig dir això, et vaig dir que només funcionaria per alguns angles.*	Ampliación de la argumentación

Tabla 40. Transcripción e interpretación del Episodio 25

Caracterizamos este episodio como *Estudio de una estrategia para argumentar su solución*, ya que Inés propone otra forma de hallar el centro de giro de una rotación. El tipo de orquestación es *Trabajo del* *sherpa*, ya que es esta alumna quien presenta la discusión de la estrategia.

Al levantar la mano, el profesor da la palabra a Inés [188]. La alumna presenta su idea y explica que está conectada con un ejercicio que hicieron otro día [189a]. Inés expone que como le ocurría en un ejercicio previo, si el punto de giro entre dos figuras es exterior, el centro de giro a veces se puede obtener encontrando la intersección de los segmentos que unen puntos homólogos (ver Figura 58). Ella misma añade que, para los casos que funciona, todos los segmentos tienen que ser secantes en un punto [189b] y que en este caso, cuando lo ha probado, los segmentos no coincidían en un solo punto. Por ello supone que este es uno de los casos donde no funciona esta estrategia, a pesar de que el centro sea exterior a la figura [189c].

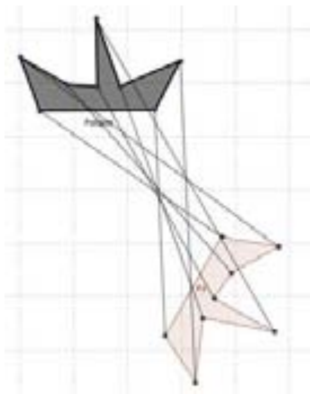


Figura 58. Estrategia propuesta por Inés

En esta intervención hay varios puntos a destacar. Por un lado, está la conexión que Inés establece con una situación similar a la de otro problema. El ejercicio del que habla consistía en una actividad introductoria para ver la diferencia entre las transformaciones en el plano en general y las isometrías. De forma intuitiva, el problema presentado en papel pedía marcar cuáles de las figuras (ver Figura 59) no se podía conseguir solo con isometrías.

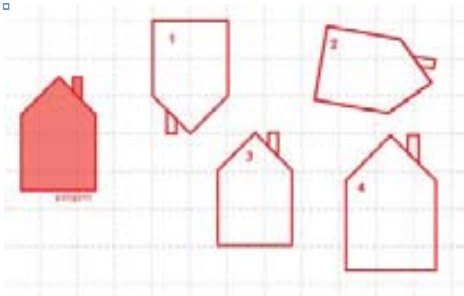


Figura 59. Enunciado de la primera actividad introductoria

En el momento de solucionar esta actividad, Inés intentó hallar dónde estaría el centro de giro que llevaba la casa inicial sobre la número 1. Construyó los segmentos que unían puntos homólogos y lo consiguió. El profesor validó el procedimiento pero dijo a Inés que tuviera en cuenta que no era un método general.

Por otro lado, de la intervención de Inés también se desprende que aunque ella ya se ha dado cuenta con las comprobaciones pertinentes de que la estrategia no funciona, al presentarla en la discusión, pide implícitamente una explicación más detallada.

De ahí que el profesor haga una aclaración de un error expuesto por Inés. Explica que la estrategia no va a funcionar para algunas figuras, pero sí para unos ángulos concretos de giro [190].

En el siguiente episodio vemos cómo el profesor dedica tiempo a explicar este malentendido. A continuación (Figura 60) mostramos la representación esquemática del Episodio 25.

Figura 60. Esquema visual del Episodio 25

Oportunidades de aprendizaje:

Presentamos las oportunidades de aprendizaje que se han detectado en este episodio.

Oportunidad de concepto:

- *Aprender que la estrategia escogida no es adecuada y depende del ángulo de giro.*

  Cuando Inés propone la estrategia a seguir, consistente en unir mediante segmentos los pares de puntos homólogos, ella misma justifica de un modo empírico que la estrategia no es válida para este caso. Aunque aún no se ha argumentado deductivamente, el hecho de que el profesor complemente su justificación y valide que no es una buena estrategia en este caso, puede contribuir a que algunos alumnos aprendan que la estrategia escogida no es válida ni en esta situación ni en algunas otras, dependiendo del ángulo de giro.

Oportunidad de proceso:

- *Aprender a aplicar estrategias conocidas anteriormente.*

  En este episodio Inés conecta la situación en la que se encuentra con otro ejercicio que había resuelto anteriormente. Aunque acabe viendo bajo la comprobación posterior que no es una solución posible, otros alumnos pueden aprender a probar otras estrategias de resolución de problemas ya realizados para resolver uno nuevo.

Episodio 26 (e_{26}): Tratamiento del giro de 180°

En este episodio se trata la situación que ha presentado Inés en la discusión para aclarar posibles dudas o ideas erróneas de esta alumna o de cualquier otro participante.

#	Participante	Intervención	Interpretación
191	*Profesor:*	*[a] La Inés l'altre dia ho va fer en el que tenia les dues cases, recordeu? [b] A veure si puc obrir algo aquí. En el que teníem les cases aquelles, que ho vam fer amb les cartolines, hi havia just la casa número 1. A veure... A veure si se m'obre que abans s'ha quedat en negre. [c] Bé, doncs res, de paraula, ja m'intentaré explicar bé. [d] Teníem una casa amb la xemeneia per aquí i l'altra casa estava aquí i girava, vale? Llavors, vau dir: li farem un gir i després la portarem. Vale? La Inés, amb el seu full, el que va fer va ser ajuntar els punts homòlegs, com si diguéssim, i se li van creuar tots en un punt, vale? Llavors, em, i llavors va dir: vale doncs aquest punt just serà el punt de gir per portar la casa cap aquí, vale? [e] I era just perquè aquella casa l'estàvem girant 180º. [f] Llavors, les banderes, recordeu l'exercici de les banderes? Les banderes, també hi havia una que estava aquí, la de mostra, i la... i una girada però estava així torta, no estava totalment així posada com les cases. Estava així torta. Llavors, la Inés va dir: ah! vaig a fer lo mateix. Uneixo punts homòlegs i també se'm tallaran en un punt, i ja hauré trobat el centre de gir. [g] Però no, quan va ajuntar punts homòlegs no se li tallaven tots en un punt, vale? I allò és perquè no estaven... perquè les banderes jo no les havia girat 180º, les havia girat posa-li 70, és igual, vale? Llavors no funciona. Això només et funcionaria si estàs fent un gir de 180º.*	a. Conexión b. Obstáculo tecnológico c. Búsqueda de alternativas d. Recapitulación e. Justificación empírica f. Recapitulación g. Justificación empírica h. Ampliación de la argumentación

		Val? [h] Llavors, en aquest cas, em, que estem aquí en el... en el vaixell aquest, jo el vaixell no l'he girat... no l'he girat 180. Vale? Per tant, no funciona lo d'ajuntar punts homòlegs per trobar el centre on es tallarien.	

Tabla 41. Transcripción e interpretación del Episodio 26

Desde el punto de vista de la orquestación, consideramos este episodio como *Conexión pantalla-pizarra*. El profesor establece las conexiones entre la pantalla y sus gestos porque en ese momento no puede mostrar otra pantalla por falta de conexión a Internet y tampoco puede hacer uso de la pizarra por falta de rotuladores. Aunque no recurra estrictamente a la pizarra , usamos este descriptor pensando también en la importancia de que lo que está conectando son dos artefactos diferentes, entendiendo artefactos de forma amplia, como se fundamenta en Morera, Planas y Fortuny (2013).

Por otro lado, el estadio de la discusión que se está llevando a cabo es la *Conexión* con otros problemas resueltos en clases precedentes con los mismos alumnos, mencionados en esta discusión.

Este episodio está totalmente centrado en el profesor. Es el único participante involucrado, pero en realidad está respondiendo a una petición específica de una alumna, y hace la conexión a través de las ideas que ésta ha presentado en la discusión.

Si nos fijamos en las acciones concretas, vemos como primero el profesor hace una conexión con el trabajo de otra sesión, para situar al resto de los alumnos en la explicación [191a]. Puesto que el profesor pretende hacer referencia al ejercicio que hicieron en otra sesión de clase (ver Figura 59), quiere abrir el enunciado en la pantalla, pero por un problema técnico de conexión a Internet, no se carga dicha página [191b] y se explica con palabras y gestos [191c].

Una vez empieza la explicación, el profesor hace una recapitulación del objetivo del problema, y de cuál fue la solución comentada. Vuelve a hacer una conexión con la composición de isometrías, ya que comenta que algunos alumnos, al dar una solución intuitiva, proponían girar primero la casa y luego trasladarla. El profesor decide dejar pasar esta conexión para centrarse en la forma de construir el centro de giro, que se trabajará en el segundo problema de la secuencia. También expone la solución de Inés para hallar el centro, uniendo puntos homólogos con segmentos, y encontrando de este modo el punto de corte [191d].

Una vez expuesta esta estrategia, el profesor justifica empíricamente que funciona, ya que el ángulo de giro de las casa era de 180° [191e]. Únicamente con esto no argumenta por qué funciona, pero les quiere poner un contraejemplo, y mostrarles una situación, también conocida por ellos, en la que el centro de giro entre dos figuras, no se puede encontrar con la estrategia mencionada. Para ello, hace una recapitulación de otro ejercicio que hicieron previamente con lápiz y papel. Se trata del ejercicio que mostramos en la Figura 61, en el cual tenían que observar qué figuras se podrían obtener sin levantar la figura inicial del papel [191f]. El profesor explica que, en el caso de la bandera azul, cuando Inés quiso aplicarle su estrategia, vio como los segmentos no se cortan en un punto y concluye, por tanto, que esa estrategia es casual y funciona únicamente para los giros de 180° [191g].

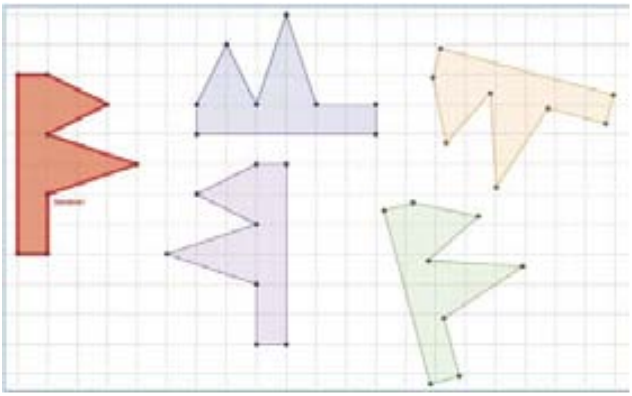


Figura 61. Enunciado de la segunda actividad introductoria

Finalmente, la conclusión que expone el profesor es que en este caso, el giro de los barcos no es 180°, por lo que se tiene que buscar otra estrategia ya que esta no funcionaría [191h].

El profesor no ha dado una argumentación sobre por qué solo funciona la estrategia anterior con giros de 180°. Prefiere que sean los alumnos quienes lo descubran mediante el tercer problema de la secuencia, donde se tratará la composición de simetrías axiales, y en concreto en el caso de ejes perpendiculares. También se conectará con la simetría central, ya que esta estrategia hace referencia directa a las propiedades de la simetría central y no de los giros de 180°.

En la Figura 62 presentamos la representación visual esquemática del Episodio 26.

Figura 62. Esquema visual del Episodio 26

Oportunidades de aprendizaje:

Este episodio tiene la peculiaridad de intervenir un único participante, el profesor, así que la interacción parece ser a simple vista inexistente. En cambio, si nos fijamos en las acciones que se han interpretado, vemos que aunque todas estén realizadas por el profesor, en realidad éste tiene un doble papel ya que actúa también como alumno en el sentido de ir relatando lo que observa que han hecho algunos alumnos (en particular, Inés) durante las sucesivas recapitulaciones e ir añadiendo justificaciones empíricas que no argumenta como se esperaría de un profesor.

Oportunidad de concepto:

- *Aprender en qué casos se puede usar la estrategia de unir puntos homólogos.*

  Cuando el profesor explica que en un ejercicio la estrategia era válida, como ya se había comprobado empíricamente y que, en cambio, en este problema no funciona la misma estrategia, no explica el razonamiento matemático sobre por qué sucede. Sin embargo, los alumnos pueden aprender en qué casos lo podrán usar, cuando el ángulo de giro sea 180°.

Oportunidad de gestión:

- *Aprender a no depender de la tecnología, cuando haya algún obstáculo tecnológico.*

  En este episodio, se da una situación bastante usual en los entornos didácticos con uso de tecnología. El tiempo de clase se está agotando, el profesor quiere establecer una conexión con un problema anterior, y la conexión a Internet para descargar el problema mencionado no es suficientemente rápida. Que el profesor decida seguir con la explicación oral puede hacer notar a los alumnos que para hacer matemáticas algunos recursos son útiles, siempre que se sea lo suficientemente versátil para adecuarse a situaciones inesperadas.

5.1.8 Análisis integrado del cuarto apartado del Problema 1

Como se ha hecho anteriormente, para ver de forma global la discusión en torno a este apartado, realizamos el análisis integrado de los diferentes episodios para no perdernos en los detalles de las acciones de los participantes que ya se han relatado.

Como en otras ocasiones, y puesto que no se trata de un problema nuevo, no existe ningún episodio de situación del problema y se da paso directamente a la presentación de una solución por parte de

Sara (e_{22}). Hasta entonces solo se puede evidenciar que los alumnos han sabido identificar el giro de entre todas las isometrías, pero no han dado ninguna argumentación sobre por qué es un giro. Después de una petición de formalización del profesor, Víctor presenta la estrategia que han seguido con su compañera de trabajo, Inés. Se trata de una estrategia basada en la eliminación de las otras isometrías. Por tanto, se está trabajando bajo la hipótesis de que, efectivamente, el objeto B4 va a ser resultado de una de las tres isometrías conocidas (e_{23}).

Posteriormente, Clara propone una estrategia para hallar el centro de giro haciendo uso de las propiedades de éste, en lugar de usar el conocimiento de las propiedades de las otras isometrías y comprobar que no son posibles, como en el caso de la estrategia propuesta por Víctor. Clara usa la propiedad de que en un giro, cada punto de la figura inicial se desplaza a lo largo de una circunferencia hasta que llega a su punto homólogo. Una de las propiedades de estas circunferencias es que todas ellas son concéntricas. De ahí que su estrategia consista en encontrar una circunferencia con una construcción que no requiera tener su centro y hallarlo a posteriori. Sin embargo, después Clara se da cuenta en el mismo episodio que no es posible llevar a cabo este procedimiento (e_{24}).

Tras este intento fallido de localización del centro de giró, Inés propone otra estrategia, que es con la que halló el centro de giro en otro ejercicio resuelto anteriormente como introducción al tema (e_{25}). Puesto que ese ejercicio trataba un caso particular, en concreto el de un giro de 180°, su estrategia no es generalizable. Después de esta propuesta, que no es totalmente fallida porque para unos casos concretos sí funciona, el profesor decide hacer una aclaración y explicar en voz alta los casos en los que sí funciona y los casos en los que no (e_{26}).

Si nos fijamos en la totalidad de los episodios de este apartado, notamos que además de no producirse el estadio para ubicar el problema, la mayoría de los episodios están centrados en estudios de estrategias y no se llegan a trabajar estadios del problema más complejos como la conexión entre conceptos y su generalización. Este hecho es razonable si tenemos en cuenta que se trata de un apartado cuyo objetivo principal es preparar la discusión profunda en el siguiente problema sobre cómo construir un centro de giro. Además, otro aspecto que puede influir en que la discusión de este apartado no se alargue hasta llegar a la solución, es que la clase se está terminando, y como sucede en los entornos de enseñanza-aprendizaje reglados, uno se debe ceñir a los tiempos estipulados.

Otro aspecto interesante de este apartado en relación con los anteriores, es que gradualmente los alumnos aprovechan algunas oportunidades de aprendizaje. Hay evidencias de que a lo largo del problema reconocen la importancia de formalizar y argumentar sus decisiones.

En relación con esta intención de construir el centro de giro, cuando no se tiene la solución, se usan las conexiones como recurso. Cada alumno de los tres que plantean su estrategia usa las conexiones en un sentido, pero todos ellos con el propósito de hallar la manera de construir el centro buscado.

En el primer caso, Víctor establece la conexión con otras isometrías de las que sí conoce las propiedades y de las que sabría construir los elementos. De este modo, probando únicamente que no se cumplen dichas propiedades obtiene el resultado de que la figura B4 es una rotación de la inicial. En el segundo caso, Clara establece la conexión con las posibles formas de construir una circunferencia para usar aquella que no necesita el centro, aunque después se da cuenta de que no tiene los elementos necesarios para construirla. Finalmente, Inés establece la conexión con otros problemas similares anteriores, para generalizar una propiedad válida en el otro contexto. Inés también se da cuenta de que su estrategia no es generalizable porque ha realizado la comprobación empírica y no ha sido satisfactoria.

Como en los otros apartados, pasamos a comentar la visión global desde el punto de vista del uso de la tecnología y del entorno de trabajo colaborativo.

En este apartado, no hemos tenido muy presente el uso de la tecnología ni se han creado obstáculos derivados de dicho uso. Así, esto de algún modo señala que los alumnos han incorporado la tecnología en este problema al avanzar en su proceso de génesis instrumental (Artigue, 2002).

Desde el punto de vista de la colaboración, vemos que los alumnos son los protagonistas. El profesor interviene únicamente de forma contundente al final cuando se hace evidente la necesidad de explicar la situación de confusión que plantea Inés con la presentación de su estrategia.

Con esta mirada conjunta damos por finalizado el análisis del primer problema de la secuencia, el cual se ha especificado con un alto grado de detalle para mostrar el procedimiento del análisis y para que se pueda apreciar que metodológicamente se ha cumplido la aplicación del instrumento diseñado. Damos paso a la presentación más sucinta del análisis de los otros dos problemas.

5.1.9 Puesta en común y análisis integrado del Problema 2

El análisis de la discusión en gran grupo del Problema 2, se ha realizado de manera análoga al del Problema 1, pero debido al espacio no lo incluimos en detalle en el documento principal de este manuscrito de tesis (ver Anexo III).

En el presente apartado, incluimos la tabla resumen de la distribución de los episodios de la discusión del Problema 2 (ver Tabla 42). A continuación, aportamos el resumen del análisis integrado de todos sus episodios para dar una mirada global que permita entender qué sucedió a grandes rasgos durante la discusión para así deducir los resultados más relevantes.

Discusión en gran grupo (Problema 2)	Situación del problema	Presentación de una solución (argumentada)	Estudio de estrategias para resolver o argumentar	Estudio de casos particulares o extremos	Contraste entre diferentes soluciones	Conexiones con otras situaciones	Generalización y conceptualización	Reflexión sobre el progreso matemático	*(Tipos de estadio)*
Demostración técnica									
Explicar la pantalla	(e_{27})		(e_{53})	(e_{47}), (e_{48})		(e_{46})			
Conectar pantalla y pizarra						(e_{41})			
Discutir la pantalla	(e_{34})		(e_{51})	(e_{40})	(e_{38})	(e_{54})			
Descubrir y mostrar			(e_{50})	(e_{36}), (e_{37}), (e_{42}), (e_{52})		(e_{39})	(e_{31}), (e_{32}), (e_{43}), (e_{49})		
Trabajo del sherpa		(e_{28})	(e_{29})	(e_{35}), (e_{45})	(e_{30}), (e_{44})	(e_{33})			
(Tipos de orquestación)									

Tabla 42. Estructura de la discusión del Problema 2

A diferencia de lo que ocurre con el Problema 1, la discusión del Problema 2 constituye una única conversación donde se tratan muchos temas, pero por las características del problema, no se ha dividido en apartados. Por ello, en la estructura de los episodios de la discusión el número de episodios ha aumentado. Otro factor a tener en cuenta es la duración de la discusión. En la planificación de la implementación didáctica de la secuencia, se habían otorgado 30 minutos a la discusión del Problema 1 y 50 minutos a la discusión del Problema 2.

Desde el punto de vista de la orquestación, la discusión es muy diversa. Prácticamente se usan todos los tipos de orquestación excepto la demostración técnica. Por el planteamiento previo de inclusión de la tecnología en la resolución de problemas, se evidencia otra vez que no es necesario dedicar episodios explícitamente a presentar la tecnología de forma técnica, sino que esta queda incluida en diferentes acciones dentro de los episodios.

Junto con observar que no se ha hecho un uso específico de las demostraciones técnicas, vemos que la mayoría de los episodios están centrados en los tres últimos tipos de orquestación, con lo que observamos que la orquestación ha estado centrada más en la participación de los alumnos. Este hecho es relevante si se relaciona con la distribución de los episodios por los diferentes estadios. Si nos centramos en la numeración de los episodios, hay evidencias de que los estadios se han trabajado de forma desordenada, pero ello puede deberse a la alta participación de los alumnos. Son ellos muchas veces quienes proponen aspectos para tratar en la discusión, con lo cual no siempre siguen el orden presumiblemente pretendido por el profesor.

Si se atiende a los tipos de estadio que se han trabajado durante la discusión, ha habido una gran concentración de estudio de casos particulares. Esto es por una parte debido a las características del problema, ya que se podía considerar una solución general, pero posteriormente era interesante hacer el estudio de los casos particulares, algunos de los cuales no cumplían con la regla general. Este aspecto hacía natural aumentar el número de episodios donde se trataban casos particulares. Además, para formalizar y generalizar este tratamiento, los alumnos hicieron también uso de muchos casos particulares hasta llegar a la solución general.

Por otro lado, el estudio de estrategias, las conexiones y las generalizaciones y conceptualizaciones, estuvieron presentes durante la discusión en igual medida. Por último, consideramos normal que se dedicaran pocos episodios a los estadios de la situación del problema y a la presentación de una solución. Cabe recordar que en lo relativo al estadio de reflexión personal sobre el progreso matemático, se pidió realizarla en casa y por escrito con la finalidad de recoger datos de todos los alumnos para la investigación.

Tras esta visión general de los aspectos destacables de la discusión del Problema 2, resumimos el contenido de los episodios presentados hasta ahora de forma esquemática.

Como hemos comentado, estamos ante una discusión un tanto desordenada, pero con valor colaborativo. Presentamos primero los grandes bloques temáticos que se han tratado durante esta discusión antes de pasar a detallar cada uno de los episodios en orden cronológico.

El primer bloque es el tratamiento de la solución general, que se puede resumir así: "El centro de la rotación de dos segmentos de igual longitud se encuentra en el punto de corte de las dos mediatrices de los segmentos que unen pares de puntos homólogos".

Una vez tratada esta solución, se trata la doble solución dados dos segmentos cualesquiera, debido a la no orientación de éstos. Posteriormente se realiza el estudio exhaustivo de los casos particulares dependiendo de las posiciones relativas de les mediatrices mencionadas en la solución general. Si éstas son paralelas, no habrá centro de giro, mientras que si son coincidentes, el centro de giro será la intersección de las mediatrices coincidentes con la prolongación de los segmentos.

Además de los aspectos presentados, que eran los que se habían planificado a priori, se realiza el estudio, aunque sin llegarlo a demostrar, de una propiedad que presentan Víctor e Inés, descubierta por ellos durante el trabajo en pareja: "Cuando se considera la doble solución entre dos segmentos de la misma longitud, la suma de los ángulos de giro de las dos soluciones siempre es 180°".

Estos aspectos generales surgieron de una larga discusión de 50 minutos de duración, en la que se detectan un total de 27 episodios, que como veremos a continuación, son protagonizados por muchos de los participantes presentes en la discusión de forma activa.

La discusión, como es habitual, empieza con la presentación del problema por parte del profesor para situar a los alumnos (e_{27}). Luego Inés y Víctor presentan la solución general que han encontrado durante el trabajo por pareja (e_{28}) junto con la justificación deductiva y empírica de su corrección (e_{29}). Después de la solución general, presentan la posibilidad de tener una doble solución debido a la no orientación de los segmentos dados en el enunciado (e_{30}). A raíz de la presentación de la doble solución, Gal·la menciona la importancia de la notación en los problemas matemáticos y el profesor hace una aclaración al respecto (e_{31}). Núria trata de generalizar la solución general teniendo en cuenta que las mediatrices se podrían hacer de dos pares de puntos homólogos cualesquiera, sin necesidad de que fuesen los extremos (e_{32}).

Una vez tratados estos aspectos de la solución general y de la doble solución, Inés y Víctor presentan otra propiedad descubierta con la ayuda de GeoGebra durante el trabajo en pareja: la propiedad de la suma de los ángulos de las dos soluciones, ya comentada (e_{33}). Este episodio es especialmente largo ya que se intenta demostrar dicha propiedad durante la discusión. Debido a que no había sido planificada su demostración y a algunos obstáculos tecnológicos, no se llega a la demostración y se destina un tiempo considerable hasta que el profesor propone pensarlo en casa y seguir con otros aspectos.

Es entonces cuando Laia introduce el caso particular de que las mediatrices construidas para hallar el centro de rotación sean paralelas (e_{34}). Posteriormente, Clara presenta un caso particular donde las mediatrices son, tal como indica la Figura 63 (e_{35}).

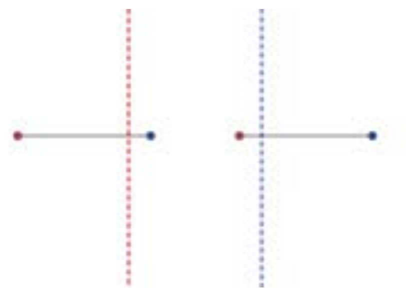


Figura 63. Caso particular de mediatrices paralelas propuesto por Clara

Tras tratar ese caso particular, Berta propone otro (ver Figura 64), que es el mismo que el de Clara pero en disposición vertical (e_{36}).

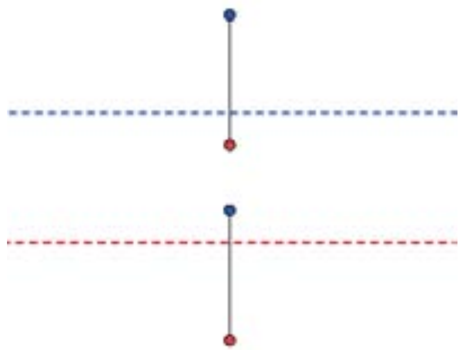


Figura 64. Caso particular de mediatrices paralelas propuesto por Berta

Tras la petición repetida del profesor de intentar generalizar cómo deben ser los segmentos para que las mediatrices sean paralelas, los alumnos proponen casos particulares. Andrea quiere proponer otro caso, que resulta ser un ejemplo de cuando las mediatrices son coincidentes en lugar de paralelas (ver Figura 65), con lo cual también se acaba introduciendo este otro caso particular (e_{37}).

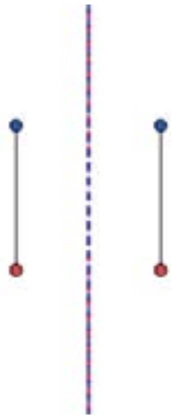


Figura 65. Caso particular de mediatrices coincidentes propuesto por Andrea

En el siguiente episodio de la discusión, varios alumnos conjeturan de manera errónea que si las mediatrices son coincidentes, hay infinitos centros de giro como solución (e_{38}). En el caso propuesto por Andrea, todos están de acuerdo en que no es resoluble mediante un giro, por lo cual empiezan a buscar isometrías alternativas que transformen un segmento en el otro. Núria, en concreto, propone un giro en 3D, tomando las mediatrices coincidentes como eje de revolución (e_{39}). En el siguiente episodio (e_{40}), José Manuel propone otra alternativa al caso tratado en (e_{37}), consistente en cambiar la orientación de uno de los segmentos para que las mediatrices no sean coincidentes; pero entonces no se está resolviendo el caso que se quería tratar.

En un intento de recapitulación por parte del profesor para ordenar ideas tratadas hasta el momento, se explicita el estudio de las posiciones relativas entre dos rectas para saber qué casos particulares se deberán tener en cuenta (e_{41}).

Como sucede a menudo en las discusiones en gran grupo, los alumnos tienen diferentes ritmos de razonamiento y algunos siguen pensando en un aspecto tratado minutos antes. Este ocurre con Núria y Sergio (e_{42}), quienes después de estudiar las posiciones relativas de las rectas para empezar a generalizar, proponen una isometría alternativa para hacer la transformación de los segmentos en (e_{37}). Luego Andrea, que después de proponer el ejemplo de (e_{37}) se da cuenta de que no es lo que quería ya que buscaba un ejemplo de segmentos cuyas mediatrices de puntos homólogos fuesen paralelas, obtiene un ejemplo (ver Figura 66) y lo propone junto con el estudio de las alternativas (e_{43}).

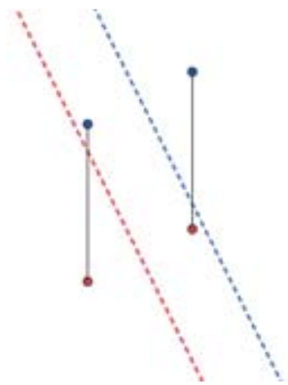


Figura 66. Caso particular de mediatrices paralelas propuesto por Andrea

Paralelamente a la consecución de casos particulares, Inés, que está en la mesa del profesor con Víctor desde que han salido al inicio de la clase a exponer su solución, está construyendo un contraejemplo para evidenciar el error de la conjetura planteada en (e_{38}): si se supone que las mediatrices son coincidentes, hay infinitos centros de giro (e_{44}). En el episodio solo se encuentra un contraejemplo con la ayuda de GeoGebra, pero no se argumenta por qué no funciona. Se aprovechan el momento, con la ayuda de GeoGebra (e_{45}), para comprobar la alternativa que proponía José Manuel en (e_{40}).

Ya que la alternativa de José Manuel se transforma en un caso en que los segmentos están girados 180°, el profesor establece una conexión recordando que se podría hallar el centro de giro simplemente uniendo con segmentos pares de puntos homólogos e intersecando estos segmentos (e_{46}), como ya se había comentado en el cuarto apartado del Problema 1.

A continuación, Aleix presenta otro ejemplo trivial donde las mediatrices de puntos homólogos serán coincidentes, cuando los segmentos sean coincidentes (e_{47}). Después, Gal·la propone otro caso particular donde las mediatrices de puntos homólogos serán coincidentes (ver Figura 67) (e_{48}); a partir de ahí, entre varios participantes que intervienen , se acaba generalizando que la posición de los segmentos tiene que ser simétrica para que las mediatrices sean coincidentes, a partir de lo cual podrá hallarse el centro de giro haciendo la intersección de las mediatrices coincidentes con la prolongación de los segmentos (e_{49}).

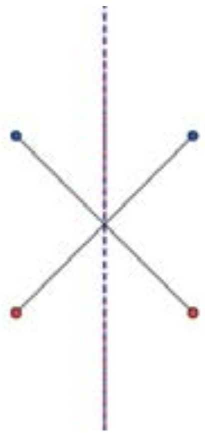


Figura 67. Caso particular de mediatrices coincidentes propuesto por Gal·la

Una vez llegan a este progreso, bajo el liderazgo de Inés, se comprueba que va a funcionar esa conjetura, y que efectivamente la prolongación de los segmentos da el centro de giro si éstos son simétricos (e_{50}).

A raíz de esta solución genérica, algunos alumnos preguntan si se podría generalizar la estrategia de trazar las prolongaciones de los segmentos para hallar el centro de giro. Mediante la construcción de un contraejemplo en la pantalla quedan convencidos de que no es así (e_{51}).

Antes de dar la discusión por finalizada, Victoria presenta un caso, que ya había salido (ver Figura 65), en el que los segmentos son simétricos, y por tanto las mediatrices coincidentes, pero donde prolongando los segmentos que son paralelos no se hallar el centro de giro. Todos están de acuerdo que en ese caso no hay centro de giro que pueda llevar ese segmento al otro, si consideramos las transformaciones en el plano (e_{52}).

Otra alumna, Laia, desde el primer momento está de acuerdo en que si las mediatrices son coincidentes, hay infinitos centros de giro. Aunque ha quedado convencida de que un centro estaría donde se cortan las prolongaciones de los segmentos, no ve por qué los otros infinitos puntos no pueden ser centros de giro. Ella defiende que se puede construir desde cualquier punto una circunferencia que pase por un par de puntos homólogos y otra que pase por otro par, que es lo que se necesita para realizar un giro. Lo que no tiene en cuenta es que el ángulo de giro tiene que ser el mismo, lo cual solo sucede en la prolongación de los segmentos (ver Figura 68 (e_{53})).

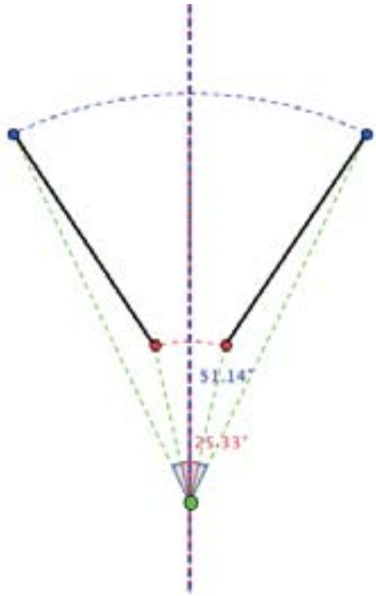


Figura 68. Representación de los ángulos de giro eligiendo un centro cualquiera

En el último episodio de la discusión del Problema 2, se establece una conexión con el último apartado del Problema 1. Si éste ha servido para introducir la necesidad de buscar el centro de giro entre dos figuras, tras el estudio exhaustivo de todas las posibilidades, los alumnos deberían saberlo aplicar. Así, se halló el centro de giro que llevaba el barco original sobre B4 (e_{54}).

Después de haber relatado la sucesión de episodios en la discusión de este problema y siguiendo la estructura de los apartados anteriores, pasamos a comentar la visión global desde el punto de vista del uso de tecnología y del trabajo colaborativo.

En muchas ocasiones se ha evidenciado en la discusión de este problema que los alumnos habían hecho conjeturas durante el trabajo por parejas gracias a la tecnología, y que posteriormente lo podían comunicar al resto de sus compañeros. También ha habido varias ocasiones en las que se ha utilizado el programa de geometría dinámica durante la discusión para comprobar o refutar algunas de las ideas que iban surgiendo espontáneamente. Incluso ha habido situaciones en las que se ha hecho una petición explícita de la necesidad de visualizar alguna idea en la pantalla para seguir adelante. Después de haberse familiarizado con los aspectos técnicos del bloque de las isometrías, que se ha trabajado con detalle en el Problema 1, vemos como en este segundo problema, los alumnos hacen un uso más instrumental del software para realizar actividades matemáticas, como conjeturar, comprobar o refutar. También ha habido momentos en los que se ha requerido ayuda desde el punto de vista técnico, lo cual muestra que no se ha adquirido una completa génesis instrumental (Artigue, 2002).

Si nos fijamos ahora en el trabajo colaborativo y en el potencial de la discusión en este segundo problema, vemos que los alumnos han mejorado su forma de participar. Han respetado los turnos y las ideas de los compañeros aunque en ocasiones no estuvieran bien organizadas ya que ha habido saltos hacia delante y hacia atrás en diferentes ocasiones. El problema tenía unas características que dificultaban que durante el trabajo por parejas se tuvieran en cuenta todos los posibles casos particulares. En cambio, en la discusión en gran grupo, los alumnos han ido descubriendo y construyendo todas las posibles soluciones. Aunque el profesor ha tenido un papel activo, pocas veces ha impuesto una explicación o una solución sin que hubiera alumnos que no entendieran la explicación. Así, aunque larga, ha sido una discusión productiva. Para posteriores implementaciones se debería trabajar mejor la planificación para que no se crearan tantos saltos durante la discusión con el riesgo de desviar la atención de algunos alumnos.

5.1.10 Puesta en común y análisis integrado del Problema 3

Del mismo modo que en el Problema 2, el análisis detallado del Problema 3 se incluye en los anexos de este trabajo (Anexo III). En este apartado, presentamos la estructura de la discusión del Problema 3 (ver Tabla 43) y el análisis integrado de todos los episodios para dar una idea sobre la composición de la situación.

Discusión en gran grupo (Problema 3)	Situación del problema	Presentación de una solución (argumentada)	Estudio de estrategias para resolver o argumentar	Estudio de casos particulares o extremos	Contraste entre diferentes soluciones	Conexiones con otras situaciones	Generalización y conceptualización	Reflexión sobre el progreso matemático	*(Tipos de estadio)*
Demostración técnica									
Explicar la pantalla	(e_{55})		(e_{58}), (e_{64})					(e_{60})	
Conectar pantalla y pizarra									
Discutir la pantalla			(e_{57}), (e_{63})				(e_{59})		
Descubrir y mostrar		(e_{62})					(e_{65})		
Trabajo del sherpa		(e_{56})		(e_{61})					
(Tipos de orquestación)									

Tabla 43. Estructura de la discusión del Problema 3

Comparando la duración de la presente discusión con las dos descritas, esta sería más parecida a la del Problema 1, ya que ocupa 30 minutos aproximadamente. Pero el número de episodios es reducido en comparación con las dos discusiones anteriores. Vemos esto como algo positivo ya que de algún modo el tema de la discusión no cambia tan a menudo y, por lo tanto, los alumnos mejoran su competencia discursiva y mantienen un orden temático más claro en las intervenciones.

Seguimos viendo que la mayoría de los episodios continúan centrados en los alumnos, ya que se encuentran distribuidos en las filas de la parte inferior de la tabla.

Atendiendo a los estadios de la discusión, se observa que no se ha realizado contraste entre soluciones debido a las características del problema. En esta discusión, tampoco se han detectado episodios centrados en conexiones con otras situaciones, como se ha detallado en el análisis de la fase de conexiones. Esencialmente se había planeado establecer una posible conexión de los giros de 180° con las simetrías centrales, ya que si los ejes de simetría son perpendiculares, las dos isometrías equivalen a la composición buscada. Pero finalmente, no se da dicha conexión.

Otro aspecto relevante en esta discusión es la referencia explícita a la reflexión del progreso matemático durante la discusión, lo cual nunca había sucedido ya que en el diseño instructivo estaba previsto que la reflexión sobre el progreso matemático la hicieran los alumnos de forma individual tras la discusión. Uno de los motivos por los que incluir en la discusión en gran grupo un episodio, guiado por el profesor, sobre la reflexión posterior que los alumnos deben hacer sobre su progreso matemático, puede ser la necesidad de observar, por parte del profesor, el trabajo de esta reflexión a posteriori. En los problemas previos no todos los alumnos parecen dedicar el tiempo necesario a realizar o a poner por escrito las reflexiones que se les pide. En esta ocasión, el profesor decide hacer hincapié en este sentido.

A parte de estas observaciones de algunos estadios de la discusión y si nos fijamos en el orden de los episodios distribuidos a lo largo de los estadios, parece a primera vista que están desordenados y que la discusión, al haber estado liderada por los alumnos en muchos momentos, otra vez da varios saltos. En cambio, poniendo atención a este aparente, observamos que los episodios forman una secuencia coherente de discusión.

Se observa cómo se empieza por una *Situación del problema*, después se *Presenta una solución* y a partir de ahí, se hace el *Estudio de estrategias para argumentar o resolver el problema*. La primera es una comprobación empírica usando el software de que la solución presentada es correcta, y la segunda una justificación deductiva de este resultado. Luego se realiza una *Conceptualización* de las propiedades presentadas en la solución y finalmente se hace una

Reflexión sobre el progreso matemático realizado. Estos estadios forman parte del primer ciclo detectado, que es interesante desde el punto de vista de la construcción de conocimiento colectivo. Junto con este ciclo, el resto de los episodios están secuenciados de un modo similar.

A continuación de la reflexión realizada al final del ciclo detallado, una alumna presenta un *Caso particular* y posteriormente se *Presenta una solución* a este caso. Igual que en el ciclo anterior, se hace primero la comprobación empírica de la solución mediante el programa de geometría dinámica y ello lleva a formalizar la justificación deductiva de las propiedades. Tras el estudio de las dos estrategias para comprobar y argumentar la solución dada, se realiza una *Generalización* final y en este caso sí se deja la *Reflexión sobre el progreso matemático* como ejercicio individual posterior a la discusión en gran grupo. Vemos una representación de la consecución de estos dos ciclos en la Figura 69.

Figura 69. Estructura de los ciclos de los estadios de la discusión en el Problema 3

Si miramos la discusión desde el punto de vista de la orquestación, como en las otras discusiones, las demostraciones técnicas han sido incluidas dentro de otros episodios. Además, muchas de las demostraciones técnicas que se dan durante la presente discusión son protagonizadas por los estudiantes, en lugar del profesor.

Así como en la discusión del segundo problema, la mayoría de tipos de orquestación habían aparecido, en esta discusión no hay conexión entre pantalla y pizarra. La génesis instrumental (Artigue, 2002) de los alumnos y del profesor va aumentando y eso lleva a que cada vez se sientan más cómodos trabajando en la pantalla. En muchas ocasiones en esta discusión utilizan la pantalla para comprobar soluciones y como complemento de explicaciones orales. Además, no se usa la pizarra en ningún momento, a pesar de que la orquestación indica usarla como conexión con la pantalla. Eso lleva a pensar que quizá se llega al otro extremo. Análogamente a los análisis de las otras discusiones en gran grupo, presentamos el relato de los diferentes episodios que forman parte de esta discusión.

Para empezar la discusión en gran grupo, el profesor sitúa a los alumnos con un recordatorio del enunciado del problema (e_{55}). A continuación, Berta presenta la solución completa que ha encontrado con su pareja, Eduard, que consiste en que la composición de dos simetrías axiales es igual a un giro de centro el punto de corte entre los dos ejes de simetría y de ángulo de giro el doble del ángulo que forman los dos ejes, ilustra la Figura 70 (e_{56}).

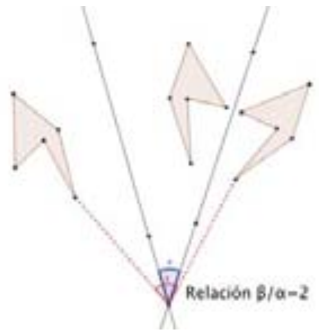


Figura 70. Solución del caso general a cargo de Berta

Tras la presentación de la solución, los alumnos toman la iniciativa de comprobar, con el software de geometría dinámica que la solución es correcta (e_{57}). La comprobación de esta solución les lleva a construir una justificación deductiva de la solución presentada por Núria. La justificación se basa en la igualdad de los ángulos que se crean entre un punto con el eje de simetría y su homólogo con el eje de simetría, como señala la Figura 71 (e_{58}).

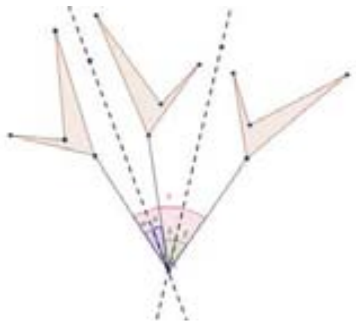


Figura 71. Justificación deductiva a cargo de Núria

Tras la justificación deductiva de la solución, se da una conceptualización de lo que se está realizando ya que Sergio pregunta sobre la amplitud de los ángulos α y β. Así, se aclara que α y β pueden ser distintos, pero lo importante es que son iguales a α' y β' respectivamente (e_{59}). Antes de proseguir con la discusión del problema, el profesor interviene para hacer una reflexión sobre la importancia de la argumentación y de incluirla en la reflexión posterior que cada alumno debe hacer de forma individual tras la discusión en gran grupo (e_{60}).

Tras el estudio completo de la solución general, Clara presenta un caso que se debería estudiar a parte, cuando los ejes de simetría son paralelos (e_{61}). Adrià y Laia presentan una solución general para este caso particular y la formalización de sus propiedades, que consiste en que la composición de dos simetrías axiales cuyos ejes son paralelos es equivalente a una translación de vector perpendicular a estos ejes y de módulo el doble que la distancia entre los ejes, como ilustra la Figura 72 (e_{62}).

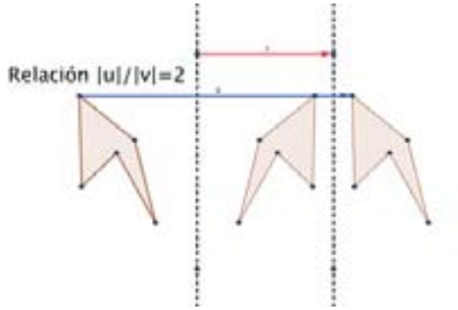


Figura 72. Solución del caso particular a cargo de Adrià y Laia

Tras la presentación de la solución, como en el caso general, los alumnos hacen la construcción con el software de geometría dinámica para comprobar que es correcta (e_{63}); esto les ayuda a formular una justificación deductiva que tratan en el siguiente episodio. Su justificación es análoga a la del caso en que los ejes son secantes, pero dividen en partes iguales las distancias entre un punto (Figura 73) y su homólogo en lugar de dividirlo en ángulos iguales como en el caso anterior (e_{64}).

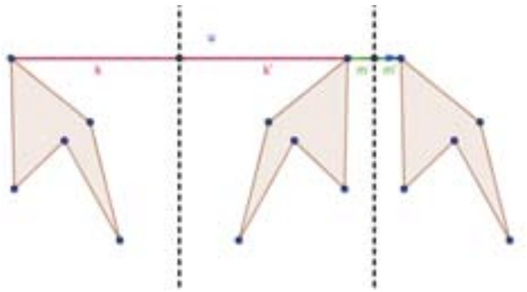


Figura 73. Justificación deductiva a cargo de diversos alumnos

Finalmente, los alumnos proponen una generalización del problema basada en estudiar qué ocurriría si en lugar de dos simetrías se hiciesen un número genérico *n*, lo cual tratan sobre todo para *n* impar (e_{65}).

Una vez finalizado el relato de lo sucedido en el gran grupo, hacemos una mirada conjunta desde el punto de vista del papel del uso de la tecnología y del trabajo colaborativo.

En la discusión de este problema, se ha puesto de manifiesto cómo los alumnos han hecho uso del software de geometría dinámica para comprobar las diferentes soluciones y propiedades que otros compañeros presentaban. Eso les ha servido como herramienta en las dos situaciones donde se ha producido, para construir la justificación deductiva que mostraba dichas propiedades. Así, en esta discusión, concluimos que la tecnología ha tenido un papel relevante en la construcción de conocimiento conjunto. Además, se observa la comodidad creciente con la que se presentan y discuten propuestas directamente en la pantalla utilizando el software en lugar de la pizarra.

Desde el punto de vista del trabajo colaborativo, el hecho de haber detectado los ciclos de episodios que forman una estructura ordenada y con sentido, da muestras de que el trabajo colaborativo se ha ido consolidando y de que los alumnos mejoran en competencia discursiva.

Por otro lado, vemos que los primeros episodios están liderado por pocos alumnos, mientras que a medida que avanza la discusión, más alumnos van interviniendo en los episodios; es ahí donde se construye colectivamente porque ningún alumno se ciñe solo a lo que ha realizado durante el trabajo en parejas.

Aunque en este último problema parece que participan más alumnos que en las discusiones anteriores, todavía hay algunos que no participan activamente, lo cual se pone de manifiesto en el análisis de Schoenfeld (2013) cuyo resumen está en la Tabla 11.

Para futuras implementaciones, habría que analizar con mayor detalle este aspecto y planificar antes de llevar a cabo la implementación de la secuencia didáctica.

5.2 Análisis del progreso matemático en las discusiones en gran grupo

Este trabajo se ha estructurado mediante diferentes fases, unas más teóricas –como la adaptación de unas sistemáticas creadas por otros autores– y otras más prácticas –como el análisis de la implementación de una secuencia de problemas utilizando dicha sistemática para comprobar su eficiencia (Sfard y Kieran, 2001).

Llegados a este punto nos encontramos con un gran reto metodológico. Somos conscientes de la dificultad de mostrar que realmente una secuencia didáctica ha sido eficiente y matemáticamente productiva (Sfard y Kieran, 2001) para los alumnos.

Puesto que el objeto de estudio de esta tesis son, principalmente, las discusiones en gran grupo, hemos recogido datos de los alumnos antes y después de cada discusión para poder comparar sus protocolos e inferir si hay evidencias de progreso matemático.

Metodológicamente se trata de una decisión adecuada, aunque puede ser que así se ponga en evidencia menos progreso del que realmente ha habido, a causa de la dificultad de los alumnos para expresar por escrito sus propias reflexiones sobre su progreso matemático, como ya se ha señalado en el análisis de la implementación de la secuencia, siguiendo el modelo de Schoenfeld (2013).

Se han escogido varias oportunidades de aprendizaje de diferentes tipos que se han detectado durante el análisis de las discusiones en gran grupo mediante el instrumento diseñado a tal efecto. A partir de estas oportunidades se mostrarán ejemplos de aprovechamiento de los alumnos.

Para sostener que ha habido aprovechamiento, suponemos que, habiendo demostrado que el alumno no había puesto de manifiesto el conocimiento antes de la discusión en gran grupo, sí lo hace posteriormente.

Además de este método para detectar progreso matemático en los estudiantes, a lo largo del análisis de las discusiones en gran grupo se han identificado episodios en los que se han trabajado las competencias matemáticas generales y específicas de las isometrías que aparecen en el currículo vigente (ver apartado 2.2.1 del marco teórico).

Es crucial que haya una relación directa y una coherencia entre la naturaleza de las competencias que se piden en el currículo y las oportunidades de aprendizaje que se han detectado y aprovechado.

Podríamos imaginar una situación en que se hubieran detectado muchas oportunidades de aprendizaje que, aunque aprovechadas por los alumnos, no tuvieran relación alguna con las competencias que aparecen en el currículo para el nivel educativo de los alumnos ni con el tema específico matemático que se está tratando.

Por esta razón, en este apartado exponemos el análisis del progreso de los alumnos desde el punto de vista de las competencias. No hemos realizado únicamente un análisis de la comparativa entre los documentos entregados antes y después de la discusión en gran grupo, sino que también hemos analizado el progreso de los alumnos a lo largo de toda la secuencia de problemas porque consideramos que las competencias son un aspecto a valorar de forma más global.

5.2.1 Análisis de la correspondencia entre oportunidades de aprendizaje detectadas y competencias curriculares

Presentamos el análisis de la relación entre competencias y oportunidades detectadas durante las discusiones en gran grupo. En la columnas de la izquierda se enumeran las competencias del currículo, seguidas de las oportunidades de aprendizaje con los problemas en las que se han detectado cada una de ellas.

Finalmente, en la columna de la derecha, introducimos la frecuencia absoluta de aparición de cada oportunidad de aprendizaje en el análisis de datos.

COMPETENCIAS GENERALES – OPORTUNIDADES DE GESTIÓN			
Tratamiento de la información	Entender la información matemática de un problema contextualizado	3	1
Competencia digital	Pensar formas de evitar un obstáculo tecnológico	1, 2	3
	Importancia de la diferencia entre dibujo y figura cuando se usan los programas de geometría dinámica	1	1
	Importancia de la precisión de los problemas con el uso del software	1, 2	2
	No depender de la tecnología, cuando puede haber algún obstáculo tecnológico	1	1
Autonomía e iniciativa personal	Auto-corregir la solución	1	2
	Completar las respuestas sin esperar la petición del profesor	1	2
	Importancia de participar aunque no se esté convencido de la corrección de la aportación	1, 3	3
	Hacer comprobaciones en paralelo a la discusión para ayudar a avanzar	2	3
Aprender a aprender	Importancia de preguntar las dudas	1, 2, 3	6
	Importancia de preguntar las dudas técnicas	1, 2	2
	No siempre se saben argumentar las evidencias empíricas observadas, y que se requiere más tiempo	2, 3	2
La comunicación lingüística	Necesidad de argumentar	1, 2, 3	13
	Necesidad de expresarse con el lenguaje matemático adecuado	1, 2, 3	5
	Necesidad de generalizar	1, 2, 3	3
	Importancia de visualizar la explicación matemática	1, 2, 3	8
	Importancia de expresarse con claridad	1	1
Competencia social y ciudadana	Importancia de buscar alternativas matemáticas cuando una estrategia no funciona	1	2
	Importancia de seguir la estructura de la discusión	1	1
	Ser eficientes en las acciones matemáticas	1, 2, 3	3
	Mantener la intriga de los problemas al conjunto de la clase	1, 2	2
	Aprender a priorizar lo colaborativo por delante de lo individual	1, 2	2
	Respetar a los compañeros	3	1
		Problema	*Frec.*

Tabla 44. Oportunidades de gestión relativas a competencias generales

En la Tabla 45 mostramos las oportunidades de aprendizaje de proceso relacionadas con las competencias procedimentales del currículo.

COMPETENCIAS PROCEDIMENTALES – OPORTUNIDADES DE PROCESO			
Pensar matemáticamente	Aprender a conectar tareas empíricas con conocimientos teóricos	1, 2	2
	Aprender a generalizar	1, 2	3
	Aprender a aplicar estrategia conocidas anteriormente	1, 3	3
	Aprender a buscar patrones o propiedades	2	2
Razonar matemáticamente	Aprender a justificar también casos extremos	1, 2	2
	Aprender la importancia de plantearse casos particulares como contraejemplos de la solución dada	1, 2, 3	7
	Aprender a argumentar de forma general incluyendo todos los casos	1, 2, 3	5
	Aprender que no se puede demostrar nada con ejemplos	3	1
Plantearse y resolver problemas	Aprender a buscar alternativas para mostrar estrategias	1	1
	Aprender a usar estrategias visuales	1	1
	Aprender a plantearse preguntas que nos ayuden a generalizar	2, 3	4
Utilizar técnicas básicas para hacer matemáticas	Aprender a conectar definiciones o expresiones de un ámbito concreto con uno más general	1, 2	2
	Aprender a optimizar la comparación de n elementos mediante la transitividad	1	2
	Aprender a usar estrategias para comprobar una solución	1	1
	Aprender a buscar estrategias adecuadas a las variables conocidas	1	1
Utilizar instrumentos para hacer matemáticas	Aprender a usar la tecnología para justificar empíricamente	1, 2, 3	9
	Aprender a utilizar el software específico con precisión	1	1
	Aprender la estrategia técnica necesaria para llevar a cabo la estrategia teórica	1, 2, 3	3
	Aprender a usar el software como herramienta de conjetura-error	2	1
	Aprender a usar el dinamismo del GeoGebra como simulador de infinitos casos	3	1
Comunicar a los demás su trabajo	Aprender a formalizar matemáticamente	1, 3	2
	Aprender a utilizar el lenguaje matemático específico	1, 2	3
	Aprender a encadenar de forma lógica las explicaciones matemáticas	1	1
	Aprender a aplicar estrategias ya conocidas	1	1
		Problema	*Frec.*

Tabla 45. Oportunidades de proceso relativas a competencias procedimentales

Finalmente, en la Tabla 46 se indica la relación entre las competencias específicas y las oportunidades de aprendizaje de concepto que han sido detectadas.

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS – OPORTUNIDADES DE CONCEPTO			
Entender los efectos de las transformaciones	Revisar la noción de translación	1	1
	Aprender que la translación de una figura queda determinada por la imagen de cada uno de sus puntos	1	1
	Aprender la noción de traslación mediante una revisión empírica	1	1
	Aprender a visualizar el movimiento de una translación	1	1

	Revisar la noción de simetría	1	1
	Aprender que una simetría tiene que cumplir que absolutamente todos sus puntos sean simétricos	1	1
	Recordar el concepto de homotecia	1	1
	Revisar la noción de giro	1	1
	Aprender que existe una doble solución en el problema	2	1
	Aprender que el giro de una figura viene determinada por el giro de cada uno de sus puntos	2	1
	Aprender la propiedad de que los ángulos de las dos soluciones de un giro suman 180º	2	1
	Aprender que las diferentes posiciones de los segmentos nos dan diferentes posiciones relativas de las mediatrices de puntos homólogos	2	1
	Aprender transformaciones alternativas en casos particulares	2	3
	Aprender que cuando las mediatrices son coincidentes no hay infinitos centros de giro posibles	2	1
	Aprender que si los segmentos no son simétricos no sirve la estrategia de prolongarlos	2	1
	Aprender que la simetría cambia la orientación de las figuras	3	1
Saber describirlos en términos matemáticos	Aprender que una translación viene determinada por un vector	1, 3	2
	Aprender qué elementos determinan o definen un vector	1	1
	Aprender los elementos que caracterizan una simetría	1	1
	Aprender las propiedades de los puntos que forman parte del eje de simetría de dos figuras	1	1
	Aprender que las figuras deben cumplir las propiedades matemáticas y que a simple vista no se puede demostrar nada	1	1
	Repaso de las características importantes de las isometrías	1, 3	2
	Aprender que la estrategia escogida no es adecuada y depende del ángulo de giro	1, 2	2
	Aprender en qué casos se puede usar la estrategia de unir puntos homólogos	1	1
	Aprender a encontrar el centro de giro dadas dos figuras homólogas	2	2
	Aprender la estrategia de usar como centro donde se cortan los segmentos	2	1
	Aprender a encontrar el centro de giro con segmentos simétricos	2	1
	Aprender que una característica de los giros es que el ángulo de giro sea igual para cualquiera de sus puntos	2	1
	Aprender que el ángulo que forman dos ejes de simetría que se cortan es la mitad que el ángulo de giro de la composición	3	1
	Aprender la demostración de que el ángulo de giro es el doble que el que forman los ejes de simetría	3	1
	Aprender los elementos que caracterizan un giro	3	1
	Aprender que el módulo del vector de la translación es el doble de la distancia entre los dos ejes de simetría paralelos	3	1
	Aprender que el vector de la translación tiene que ser perpendicular a los ejes de simetría paralelos	3	1
Incorporar vocabulario específico	Aprender la definición de puntos homólogos para el caso de la translación	1	1
	Aprender que el concepto de punto homólogo es generalizable a todas las transformaciones del plano	1	1
	Aprender que la notación fija la orientación de las figuras	2	1
Incorporar instrumentalización específica	Aprender la existencia y el funcionamiento de la herramienta ‘Compara’ de GeoGebra	1	1
	Aprender una estrategia para construir los ejes de simetría	1	2
	Aprender a usar la herramienta ‘Punto medio’	1	1
	Aprender el funcionamiento de la herramienta ‘Deslizador’ de GeoGebra	2	1
	Aprender técnicas sobre el funcionamiento de la herramienta 'Deslizador'	2	1
	Aprender el funcionamiento de la herramienta 'Función' de GeoGebra	3	1
	Aprender el funcionamiento de la herramienta 'Vector'	3	1
Comprender lo que significa que en una transformación se conserve la distancia	Aprender que las homotecias no son un tipo de isometrías	1	1
	Aprender que dos figuras homólogas están a igual distancia del centro de giro	2	1
	Aprender que existirá una isometría que transforme una figura en otra si éstas son homólogas	2	1
	Aprender que dos figuras homólogas están a igual distancia del eje de simetría	3	1
Empezar a comprender los efectos de la composición	Aprender la equivalencia de la transformación con la composición de la transformación con una translación	1	1
	Aprender la equivalencia de dos simetrías axiales secantes con un giro	3	1
	Aprender la equivalencia de dos simetrías axiales paralelas con una translación	3	1

	Aprender que para definir la composición no hay que usar el paso intermedio	3	1
	Aprender que como las simetrías cambian la orientación la paridad del número de simetrías influirá en la composición	3	1
Comprender otros conceptos relacionados	Aprender el concepto situado de transitividad	1	2
	Recordar la construcción de una circunferencia sin saber su centro	1	1
	Aprender que la orientación de las figuras homólogas es importante para la solución	2	1
	Recordar la diferencia entre rectas que se cortan o que se cruzan	2, 3	2
	Aprender que si los segmentos son simétricos las mediatrices serán coincidentes	2	1
		Problema	*Frec.*

Tabla 46. Oportunidades de concepto relativas a competencias específicas

Es crucial para la validez de esta investigación que las oportunidades de aprendizaje estén acorde con las competencias curriculares oficiales. Eso lleva a confirmar que si se detecta aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje por parte de los alumnos, se verá que la secuencia didáctica de problemas ha sido eficiente y productiva.

5.2.2 Análisis del aprovechamiento de algunas oportunidades de aprendizaje durante las discusiones en gran grupo

Como se verá más adelante en los resultados relativos al análisis de las oportunidades de aprendizaje, no todas las oportunidades pueden ser evidenciadas comparando los protocolos de los alumnos antes y después de las discusiones en gran grupo. Además, no todas las oportunidades han aparecido en igual medida durante las discusiones. Seleccionamos oportunidades que representen los tres tipos –de gestión, de procesos y de conceptos– y que se hayan detectado en las tres discusiones analizadas.

Debido a que las oportunidades de concepto son específicas de cada problema, haremos una excepción y escogeremos una oportunidad de aprendizaje de concepto importante para cada uno de los problemas.

Así, las oportunidades de aprendizaje escogidas para ejemplificar el progreso de los alumnos son:

Oportunidades de gestión:

- *Aprender la necesidad de argumentar*, que se ha detectado en las tres discusiones en 13 ocasiones.
- *Aprender la importancia de visualizar la explicación matemática*, que se ha detectado en las tres discusiones en 8 ocasiones.

Oportunidades de procesos:

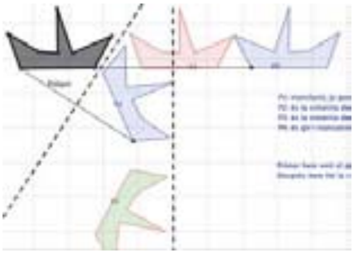
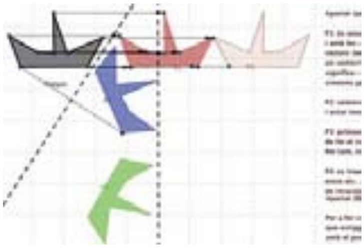
- *Aprender a argumentar de forma general incluyendo todos los casos*, que se ha detectado en las tres discusiones en 5 ocasiones.
- *Aprender a utilizar el vocabulario matemático específico*, que se ha detectado en las dos primeras discusiones en 3 ocasiones.

Oportunidades de conceptos:

- Relativa a P1: *Aprender que la transformación de una figura viene determinada por la transformación de cada uno de sus puntos*, que se ha detectado en tres ocasiones, una para cada isometría estudiada.
- Relativa a P2: *Aprender a encontrar el centro de giro cuando los segmentos son simétricos,* que se ha detectado solo en la discusión del Problema 2.
- Relativa a P3: *Aprender que para definir una composición no debe usarse la transformación intermedia*, que se ha detectado solo en la discusión del Problema 3.

Debido a las características de las oportunidades de aprendizaje de conceptos, seguiremos la estructura de mostrar ejemplos de alumnos de cada discusión, y analizaremos, a la vez, su progreso relativo a las oportunidades de aprendizaje de procesos y a otras más generales.

Para mostrar el aprovechamiento de la oportunidad de aprender que la transformación de una figura viene determinada por la transformación de cada uno de sus puntos, tomamos el trabajo de tres alumnos, Gerard, Gal·la y José Manuel. A continuación mostramos sus trabajos relativos al Problema 1 antes y después de la discusión en gran grupo. En el Anexo IV hay los documentos originales de GeoGebra de estos alumnos.

<table>
<tr><th colspan="2">Trabajo de Gerard antes y después de la discusión del Problema 1</th></tr>
<tr><td>ANTES
</td><td>DESPUÉS
</td></tr>
<tr><td>a)
B1: translació, ja que només l'hem desplaçat horitzontalment.
B2: és la simetria del polígon original, l'eix de simetria està inclinat.
B3: és la simetria del polígon original, l'eix de simetria està vertical.
B4: és gir i translació, ja que primer es gira i després es trasllada.
b) Primer hem unit el punt del polígon inicial amb el seu simètric.
Després hem fet la seva mediatriu i hem obtingut l'eix de simetria.</td><td>(a)
B1: és una translació, ja que l'únic que es fa es desplaçar el polígon inicial horitzontalment, i amb les mateixes proporcions. Per a comprovar que no s'ha modificat la figura, hem de fer vectors (entre tots els parells de punts homòlegs). Llavors, finalment, l'únic que hem de fer és comparar un vector amb la resta, un amb tots, utilitzant l'eina (a?=b). Si tots els vectors són iguals, això significa que només s'ha fet una translació, i no un gir. A més, descartem que sigui una simetria perquè té la vela en el mateix sentit que la de la figura inicial.
B2: veiem que és una simetria respecte el polígon inicial. Ho veiem perquè és el seu reflex, tot i estar inclinat. A l'apartat (b) s'explica com fer els eixos de simetria.
B3: primerament, veiem que es tracta d'una simetria, com al cas del polígon B2. Tot i així, després de fer el seu eix de simetria, veiem que el polígon simètric P3 és la simetria, però inclinada lleugerament.
Per tant, no la pintem de res perquè és una simetria però també un gir.
B4: es tracta d'un gir, ja que descartem la simetria i també la translació, ja que tots els vectors formats entre els punts homòlegs, són quasi tots diferents. Es fa un gir, però de moment no sabem trobar el punt de rotació.
(b) Per a fer els eixos de simetria de les figures B2 i B3, primer de tot hem de fer un segment que estigui entre els dos punts homòlegs, de cadascuna de les figures simètriques amb el polígon inicial. Llavors, fem la mediatriu de cadascun dels segments, obtenint així els eixos de simetria.
Tot i així, per comprovar que és una simetria, hem</td></tr>
</table>

	de fer la simetria utilitzant l'eina apropiada, respecte l'eix acabat de crear. Fent-ho, i ampliant la imatge resultant, veiem que la figura B2 és simètrica, perquè encaixa perfectament. Tanmateix, la figura B3 no és només simètrica, ja que en ampliar la imatge, veiem que està lleugerament girada. Per tant, no la pintem de cap color.

Tabla 47. Comparación de documentos de Gerard del Problema 1

Si comparamos los documentos de Gerard anteriores y posteriores (Tabla 47) a la discusión en gran grupo y en relación con las oportunidades de aprendizaje seleccionadas, observamos cómo en el primer apartado añade en la construcción los vectores de cada uno de los vértices del polígono en forma de barco para compararlos unos con otros. Así, vemos que ha entendido la importancia de fijarse en las translaciones experimentadas por los vértices de la figura original.

Para las figuras B2 y B3, ocurre lo mismo: en la argumentación sobre cómo ha buscado los ejes de simetría Gerard sostiene que para comprobar que se trata de una simetría tiene que hacer la imagen de la figura respecto al eje que construye y comprobar si todos los puntos son simétricos.

Respecto a las oportunidades más generales, vemos cómo este alumno cuida la parte visual añadiendo los vectores y coloreando las figuras adecuadas. Sin embargo, no hay una mejora sustancial en la explicación visual; por ejemplo, no aparece la prueba con la cual, después de hacer la simetría del B3, se ve que no todos los puntos coinciden.

Gerard ha progresado en la consideración de la argumentación al entregar un problema, y sus argumentaciones son más generales, aunque aún se podrían mejorar.

En relación con el uso de vocabulario específico, en la solución previa a la discusión este alumno no usa en ningún momento la palabra *homólogos;* para referirse a ella utiliza la expresión “un punto y su simétrico”. En cambio, en el documento posterior, utiliza correctamente en tres ocasiones la expresión “puntos homólogos”.

También se observan otras oportunidades de aprendizaje que han sido aprovechadas, pero no es el propósito de este documento realizar un análisis exhaustivo.

A continuación, presentamos los extractos de los documentos de Gal·la (Tabla 48).

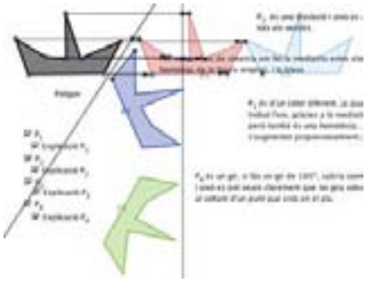
Trabajo de Gal·la antes y después de la discusión del Problema 1	
ANTES	DESPUÉS
	
* La figura B1 és una translació, ja que el que canvia és la posició de la figura. Ni la girem ni fem la simetria, tan sols la desplacem. * La figura B2 és una simetria, i hem fet una demostració. Per trobar l'eix de simetria, el que hem fet ha sigut traçar rectes entre dos punts de la figura (de la simetria i de la original), i els punts d'intersecció són els punts per on ha de passar l'eix de simetria. * La figura B3 és una simetria, i per demostrar-ho, hem construït el eix. Aquest eix passa pel punt d'intersecció de dos punts de la figura, pels quals hem passat una recta	B_1, és una translació i això es pot comprovar si comparem tots els vectors. B_2: Per trobar l'eix de simetria hem fet la mediatriu entre els punts homòlegs de la figura original, i la blava. B_3 és d'un color diferent, ja que és una simetria, i hem trobat l'eix, gràcies a la mediatriu de dos punts (homòlegs), però també és una homotècia, o sigui, la mida de la figura s'ha augmentat proporcionalment. B_4 és un gir, si fos un gir de 180º, sabria com demostrar-ho, tot i això es pot veure clarament que no gira sobre si mateix, sinó al voltant d'un punt que està en el pla.

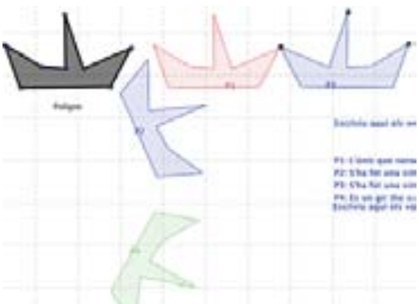
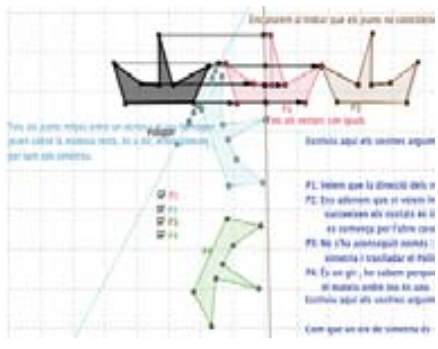
Tabla 48. Comparación de documentos de Gal·la del Problema 1

Analizando el progreso de Gal·la, vemos que ha añadido todos los vectores entre puntos homólogos en la primera figura para comprobar que se trata de una translación. Todos los vértices se han trasladado bajo el mismo vector, pero no hay evidencia de progreso para el caso de las simetrías. De todas formas, esta alumna sí incorpora una modificación en su resultado pintando de un color diferente B3. En su explicación menciona que el tamaño de la figura se ha modificado.

En relación con la argumentación, Gal·la ha mejorado en su elaboración, ya que se ha esforzado más al explicar el razonamiento de cada una de las elecciones. Apreciamos una mejora sustancial cuando se trata de complementar las explicaciones visualmente.

Como se observa en la figura del documento posterior, ha introducido las casillas de verificación para estructurar sus explicaciones y asociar cada construcción con una explicación. También ha incorporado la construcción de los dos ejes de simetría y ha complementado sus explicaciones con el código de color.

El vocabulario específico utilizado ha sido mejorado en el segundo documento. Como Gerard, incorpora en sus explicaciones la expresión “puntos homólogos” en lugar de “los dos puntos de la figura, de la simetrías y de la original”. Gal·la utiliza en su explicación el concepto de homotecia para referirse a B3, que ha sufrido una transformación que ha modificado su tamaño. A continuación, presentamos los documentos de José Manuel (Tabla 49).

Trabajo de José Manuel antes y después de la discusión del Problema 1	
ANTES 	DESPUÉS 
Escriviu aquí els vostres arguments de l'apartat a): **B1:** L'únic que canvia és la posició, no la direcció. **B2:** S'ha fet una simetria amb un eix inclinat. **B3:** S'ha fet una simetria amb un eix vertical una mica separat del polígon inicial.	*Escriviu aquí els vostres arguments de l'apartat a):* **B1:** Veiem que la direcció dels segments que formen els costats no canvia, només canvia la posició (coordenades). **B2:** Ens adonem que si veiem les dues figures amb el mateix angle (p.ex. que la base sigui paral·lela al terra) l'ordre en què es succeeixen els costats és

B4: És un gir (ho sabem perquè els costats no tenen la mateixa direcció que els del polígon inicial). *Escriviu aquí els vostres arguments de l'apartat b):*	invers (a l'original hi ha un costat inclinat, un costat més curt i menys inclinat i la vela; en canvi, a B2 es comença per l'altre costat inclinat, la vela, el costat curt i el costat inclinat restant). **B3:** No s'ha aconseguit només fent una simetria, també s'ha fet una homotècia. Ho veiem perquè després d'intentar fer un eix de simetria i traslladar el Polígon, ens hem adonat que el Polígon simètric i P3 no coincideixen. **B4:** És un gir, ho sabem perquè els costats no tenen la mateixa direcció que els del polígon inicial, però si que es succeeixen en el mateix ordre (no és una simetria). *Escriviu aquí els vostres arguments de l'apartat b):* Com que un eix de simetria és perpendicular i equidista d'un punt i el seu *homògen* la recta que passi per tots els punts mitjos entre un punt i l'*homògen* serà l'eix de simetria. Per tant, per construir-lo: 1. Hem buscat el punt mig entre cada vèrtex i el seu *homògen* amb l'eina 'Punto Medio o Centro'. 2. Hem fet una recta que passés per dos d'ells. 3. Hem comprovat que tots ells juguessin sobre aquesta recta amb l'eina 'Relación entre dos objetos'. B1:Tots els vectors són iguals. B2:Tots els punts mitjos entre un vèrtex i el seu *homògen* jeuen sobre la mateixa recta, és a dir, estan alineats per tant són simètrics. B3:Ens aturem al trobar que els punts no coincideixen en la recta, per tant no és una simetria.

Tabla 49. Comparación de documentos de José Manuel del Problema 1

José Manuel ha incorporado en su segundo documento todos los puntos de los vértices de las figuras. Esto es debido a que ha hecho las comprobaciones para cada uno de los puntos, como explica en el cuadro de texto. En rojo, apunta al lado de la construcción de B1 que todos los vectores son iguales. En azul y marrón apunta que todos los puntos medios entre puntos homólogos están situados sobre la misma recta en B2 y que no lo están en B3.

En relación con la argumentación, se nota progreso entre un documento y otro, ya que en el primero solo se dan explicaciones visuales pero no se demuestra la veracidad de las afirmaciones. Incluso hay ocasiones en el segundo documento donde José Manuel utiliza más de una argumentación. Por ejemplo, en el caso de B3, por un lado utiliza la estrategia de construir un eje de simetría y aplicar la simetría a la figura original para ver si todos los puntos coinciden con la supuesta imagen, y por otro lado utiliza la estrategia de comprobar con la herramienta "Compara (*a*=?*b*)" si todos los puntos medios entre puntos homólogos yacen sobre la misma recta.

El progreso de José Manuel respecto de las visualizaciones de las explicaciones es considerable, ya que incorpora todos los elementos necesarios en la construcción: puntos en los vértices, vectores, comentarios de color etiquetados con las casillas de verificación e incluso la imagen de B3 para ver que no coincide con la del enunciado.

Así, el barco y su supuesto eje de simetría se pintan en marrón como en el enunciado.

En cambio, según los documentos de José Manuel, la oportunidad de aprendizaje de usar vocabulario matemático específico no ha sido aprovechada totalmente. En algún párrafo vemos que sí incorpora la palabra *homotecia*, y valoramos positivamente el esfuerzo de hablar con propiedad matemática. Pero es evidente el error en la incorporación de la palabra *homólogos*, ya que utiliza, en su lugar, *homógenos*.

Hasta este punto hemos mostrado tres ejemplos en los que se puede ver que hay alumnos que han aprovechado las oportunidades de aprendizaje seleccionadas para el Problema 1.

Para mostrar el aprovechamiento concreto de la oportunidad de aprender a hallar el centro de giro cuando los segmentos son simétricos, tomamos el trabajo de otros tres alumnos, Núria, Clara y Víctor.

A continuación mostramos sus trabajos antes y después de la discusión en gran grupo del Problema 2, donde identificamos el aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje más generales que hemos seleccionado. Empezamos con el trabajo de Núria (Tabla 50).

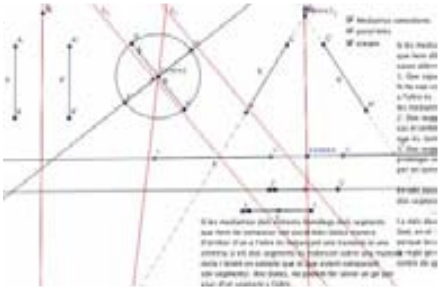
Trabajo de Núria antes y después de la discusión del Problema 2	
ANTES	DESPUÉS
	
El punt de rotació ha d'equidistar de cada punt del segment 1 amb el que li correspon de la Peça2. Si la fem girar 360º al voltant del punt de gir, cada un dels punt de la figura dibuixarà una circumferència els punts de la qual equidisten d'un únic centre que és el punt de gir. Seguint aquest concepte, hem agafat els dos extrems del segment i hem fet la mediatriu de sos segments imaginaris, compresos entre els punts A i A1 i B i B1. La seva intersecció equidistarà de les dues parelles de punts. Per tant si fem rotar la figura principal al voltant d'aquest centre, podrem superposar-la a l'altra, com en el cas de l'animació. Si els punts homòlegs en comptes de ser A i A1 i B i B1 fossin A i B1 i B i A1, l'única cosa que hauríem de fer es trobar un altre centre al voltant del qual podríem fer rotar la figura principal i superposar-la a l'altra (en aquest cas superposaríem els punts A i B1 i B i A1). Per trobar aquest centre apliquem l'anterior procediment (basant-nos en la intersecció de les mediatrius del punts homòlegs).	Si les mediatrius dels extrems homòlegs dels dos segments que hem de comparar són **coincidents** tenim tres casos diferents: 1. Que siguin dos segments paral·lels. En aquest cas, no hi ha cap centre de gir. L'única manera d'arribar d'una figura a l'altra és amb una translació o amb una simetria respecte les mediatrius. 2. Dos segments que es creuen per la meitat. En aquest cas el centre de gir serà just on es creuen els segments que és, també, per on passen les mediatrius. 3. Dos segments simètrics. El que hem de fer aquí és prolongar els segments i, on es tallin (que serà un punt per on també passen les mediatrius) serà el centre de gir. En tots aquests casos són donant per suposat que els dos segments que estem comparant mesuren el mateix. I a més decidint els punts homòlegs com es veu en el dibuix. Sinó, en el primer i el tercer cas no hi hauria cap problema perquè les mediatrius no coincidirien i llavors faríem servir la regla general. En el segon cas seria exactament el mateix centre de gir però fent rotar la figura cap a l'altre costat. Si les mediatrius dels extrems homòlegs dels segments que hem de comparar són **paral·leles** l'única manera d'arribar d'un a l'altre és mitjançant una translació (o una simetria si els dos segments es trobessin sobre una mateixa recta i tenint en compte que el que estem comparant són segments). Així doncs, no podem fer servir un gir per anar d'un segment a l'altre. (Això agafant com a punts homòlegs els extrems com en el dibuix sinó no hi hauria cap problema perquè les mediatrius es creuarien). Si les mediatrius dels extrems homòlegs dels dos segments que hem de comparar no són ni paral·leles ni coincidents sinó que simplement es **creuen**, el punt de creuament serà el centre de gir com vam explicar quan ho vam fer en parelles amb la variant de triar punts homòlegs diferents.

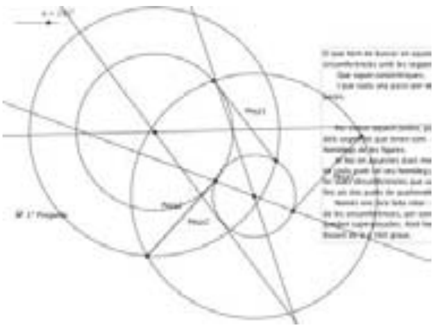
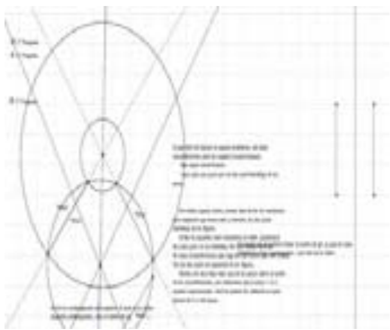
Tabla 50. Comparación de documentos de Núria del Problema 2

Si comparamos los documentos de Núria, observamos que ha progresado en la resolución de casos particulares. En concreto, el que hemos seleccionado como oportunidad de aprendizaje específica de este problema: cuando los segmentos son simétricos equivale a cuando las mediatrices de puntos homólogos son coincidentes. Núria trata esta situación en primer lugar. Aunque consideramos un progreso haber resuelto la situación donde las mediatrices son coincidentes, aún podría haberlos compactado todos en un único caso. Diciendo que el centro de giro se encontrará donde se corten las prolongaciones de los segmentos, se incluirían los otros casos que Núria considera por separado. Aún así, el progreso que se evidencia respecto a la argumentación en la atención a cada caso es sustancial.

En relación con el uso de vocabulario matemático específico, en general la forma de expresarse matemáticamente es adecuada, pero Núria debería prestar atención para evitar la confusión entre rectas “que se cortan o que se cruzan”.

Otro progreso en la parte gráfica de sus documentos es la incorporación de casillas de verificación para organizar sus argumentos y la ordenación de los casos particulares que en el primer documento Núria no ha tenido en cuenta.

A continuación presentamos los documentos de Clara (Tabla 51).

Trabajo de Clara antes y después de la discusión del Problema 2	
ANTES	DESPUÉS
	
El que hem de buscar en aquest problema, són dues	1r) El cas general ja l’hem explicat al primer

circumferències amb les següent característiques: *Que siguin concèntriques, i que cada una passi per els dos punt homòlegs de les peces.* Per trobar aquest centre, primer hem de fer les mediatrius dels segments que tenen com a extrems, els dos punts homòlegs de les figures. Al lloc on aquestes dues mediatrius es tallin, equidistarà de cada punt i el seu homòleg. Per tant, només hem de fer dues circumferències que vagi des del centre que hem trobat, fins als dos punts de qualsevol de les figures. Només ens farà falta rotar una de les peces sobre el centre de les circumferències, per comprovar que la peça 1 i la 2 queden superposades. Això ho podem fer utilitzant un punt lliscant de 0 a 360 graus.	document. 2n) He fet les prolongacions del segment. El punt on és tallen aquestes prolongacions, serà el centre de gir. Ho comprovem visualment a la construcció. 3r) En aquest cas no podem trobar el centre de gir, ja que les dues mediatrius estan superposades, i quan prolonguem els segments no és tallen.

Tabla 51. Comparación de documentos de Clara del Problema 2

Clara es una alumna que incorpora los casos particulares en su solución, y en particular la de los segmentos simétricos, pero lo hace en la mínima expresión. Expone, de forma concisa, todas las propiedades que quiere añadir, e incluso por ser tan breve agrupa diversos casos que otros alumnos han tratado por separado.

En relación con la argumentación, quizá no ha madurado suficientemente, aunque a menudo usando el instrumento visual, Clara se refiere a la demostración utilizando el deslizador. Por otra parte, sus justificaciones empíricas, incorporan argumentación matemática.

No se ve un progreso evidente en el uso de vocabulario matemático específico, pero Clara sí sigue usando la expresión “puntos homólogos”, que ha aprendido en la discusión del Problema 1.

En relación con la importancia de complementar sus explicaciones visualmente, notamos un progreso ya que esta alumna ordena todos los casos, aunque no es clara con la construcción de cada uno de ellos. Otros alumnos, por ejemplo, han usado diferentes colores para referirse a los distintos elementos de la construcción.

Ahora mostramos los documentos de Víctor antes y después de la discusión en gran grupo del Problema 2 (Tabla 52).

Trabajo de Víctor antes y después de la discusión del Problema 2	
ANTES	DESPUÉS

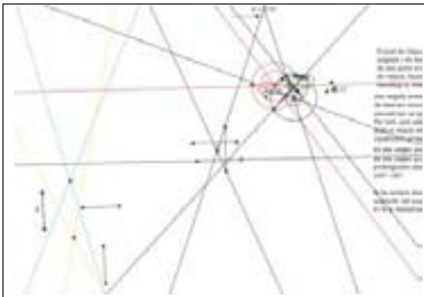
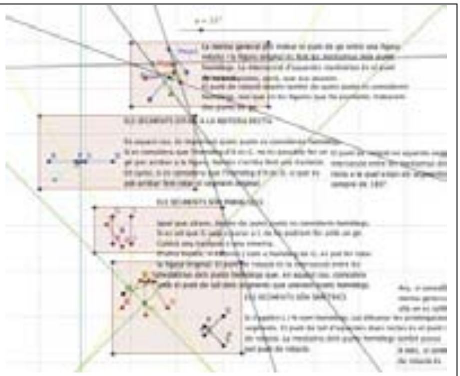
	
El punt de rotació de la figura ha d'equidistar dels punts originals i els homòlegs. El lloc geomètric que equidista de dos punts és la mediatriu, per tant, per trobar el punt de rotació, haurem de fer les mediatrius dels punts homòlegs la intersecció de les quals serà el punt de rotació. Una vegada tenim el punt de rotació, aquest serà el centre de diverses circumferències concèntriques, cadascuna d'elles passant per un punt i el seu homòleg. Per tant, això vol dir que quan movem el punt lliscador, cada punt es mourà només per la seva circumferència, equidistant sempre del punt de rotació. Els dos angles amb els quals la rotació coincideix corresponen als dos angles que es formen en la intersecció de les prolongacions dels dos segments. En aquest cas, són 100º i 80º. Hi ha sempre dos punts de rotació (excepte quan els segments són paral·lels), que depèn d'entre quins punts homòlegs es fa la mediatriu.	La norma general per trobar el punt de gir entre una figura rotada i la figura original és fent les mediatrius dels punts homòlegs. La intersecció d'aquestes mediatrius és el punt de rotació. El punt de rotació depèn també de quins punts es consideren homòlegs, així que en les figures que ho permetin, trobarem dos punts de gir. ELS SEGMENTS ESTAN A LA MATEIXA RECTA: En aquest cas, és important quins punts es consideren homòlegs. Si es considera que l'homòleg d'A és C, no és possible fer un gir per arribar a la figura. Només s'arriba fent una translació. En canvi, si es considera que l'homòleg d'A és D, sí que es pot arribar fent rotar el segment original. El punt de rotació en aquesta segona situació es troba en la intersecció entre les mediatrius dels punts homòlegs i la recta a la qual estan els segments. L'angle de rotació serà sempre de 180º. ELS SEGMENTS SÓN PARAL·LELS: Igual que abans, depèn de quins punts es considerin homòlegs. Si es vol que G vagi a parar a I, no ho podrem fer amb un gir. Caldrà una translació o una simetria. D'altra banda, si es pren J com a homòleg de G, es pot fer rotar la figura original. El punt de rotació és la intersecció entre les mediatrius dels punts homòlegs que, en aquest cas, coincideix amb el punt de tall dels segments que uneixen punts homòlegs. ELS SEGMENTS SÓN SIMÈTRICS: Si s'agafen L i N com homòlegs, cal dibuixar les prolongacions dels segments. El punt de tall d'aquestes dues rectes és el punt de rotació. La mediatriu dels punts homòlegs també passa pel punt de rotació. Ara, si considerem que L i O són homòlegs, s'aplica la norma general: fer les mediatrius dels punts homòlegs i, allà on es tallin, trobarem el punt de rotació. A més, si sent simètrics, els segments es tallen, el punt de rotació és el punt de tall entre ells.

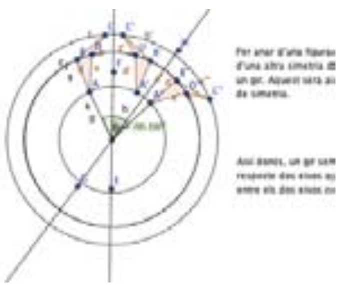
Tabla 52. Comparación de documentos de Víctor del Problema 2

Víctor también incorpora en su segunda solución los casos particulares, y en concreto el de segmentos simétricos. Como sus compañeros, tampoco es totalmente óptimo cuando tiene que tratar y argumentar el conjunto de casos particulares, pero ya es por si mismo un progreso el hecho de tenerlos en cuenta.

En general, se ve una mejora en la argumentación de su solución, lo cual indica que ha progresado en este sentido. Otro progreso reside en la manera de presentar sus soluciones. El esfuerzo por complementar visualmente sus explicaciones es muy grande. Se puede verla diferencia entre los dos documentos entregados solo mirando las construcciones.

El tratamiento del vocabulario específico de Víctor es adecuado, con ejemplos de que sigue usando el vocabulario aprendido en la discusión del Problema 1, junto con otras expresiones matemáticas adecuadas.

Por último, para mostrar el aprovechamiento de la oportunidad de aprender que para definir una composición no se debe usar la transformación intermedia, tomamos el trabajo de tres alumnos, Sergio, Núria y José Manuel. A continuación mostramos sus trabajos antes y después de la discusión en gran grupo del Problema 3. Núria y Sergio son compañero en el trabajo en parejas, por lo que documentamos una única vez su trabajo (Tabla 53).

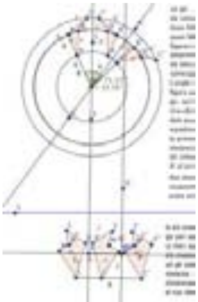
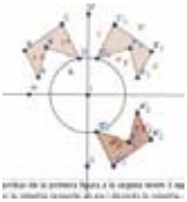
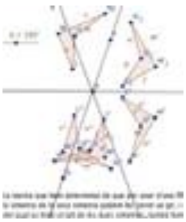
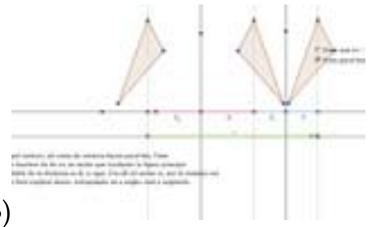
Trabajo de Núria y Sergio antes de la discusión del Problema 3
ANTES 

Per anar d'una figura a una altra que correspon a la simetria d'una altra simetria de la primera podem fer servir simplement un gir. Aquest serà al voltant d'on es tallen els dos eixos de simetria. Així doncs, un gir sempre es pot descomposar en dues simetries respecte dos eixos que tallin pel centre de gir i sempre que la distància entre els dos eixos correspongui a la meitat del gir.

Tabla 53. Primer documento de Núria y Sergio del Problema 3

El motivo por el cual hemos escogido un ejemplo de comparativa de documentos de dos alumnos que han trabajado en pareja es porque consideramos interesante ver un ejemplo de cómo el progreso de cada alumno es individual tras la discusión en gran grupo.

A continuación presentamos los documentos realizados por los dos alumnos de forma individual después de la discusión del Problema 3 (Tabla 54).

Trabajo de Núria y Sergio después de la discusión del Problema 3	
Núria DESPUÉS	Sergio DESPUÉS
A)  B)  C) 	 A)  B)
A) Per anar d'una figura a una altra que correspon a la simetria d'una altra simetria de la primera podem fer servir simplement un gir. Aquest serà al voltant d'on es tallen els dos eixos de simetria. Perquè, sabent que tots els punts homòlegs de dues figures simètriques equidisten de l'eix de simetria, i que quan fem rotar una figura, cada un dels seus punts tracen figures concèntriques al voltant del centre de gir, podem determinar que el punt de tall dels eixos (que equidistarà de tots i cada un dels punts homòlegs de ambdues figures) correspondrà	**A)** Prèviament hem reproduït les simetries de la figura creada; posteriorment, hem traçat les mediatrius de tots els punts homòlegs de la figura principal i la segona simetria; és aleshores quan ens hem donat compte que el punt de tall (que és com trobàvem el centre de gir per superposar una figura a una altra) d'aquestes mediatrius coincideix amb el dels eixos de simetria. Així demostres que el centre de gir serà el punt de tall dels eixos de simetria. Això ho hem pogut fer donat que el nombre de

al centre de totes aquestes circumferències. L'angle que formen dues rectes que vagin un punt de la primera figura al seu homòleg de la tercera, passant pel centre de gir, serà el doble de l'angle que formen els dos eixos de simetria. (2α=β) Això és degut a que, com hem dit abans, cada un dels punt de la primera figura i el seu homòleg de la segona equidisten de l'eix de simetria, igual que ho fan els punts de la primera figura amb els de la tercera. Per tant si sumem la distància que hi ha del punt A, per exemple, al primer eix de simetria, i la distància del A'' al segon, serà la mateixa que A' al primer eix i al segon. Així doncs, un gir sempre es pot descomposar en dues simetries respecte dos eixos que tallin pel centre de gir i sempre que la distància entre els dos eixos correspongui a la meitat del gir. Si els eixos de simetria són paral·lels, no podem fer servir gir per anar d'una figura a una altra, necessitem una translació (a més a més de la simetria) ja que no hi ha punt de tall entre els eixos i com vam comprovar en el problema 3, no es pot utilitzar un gir per anar d'una figura a una altra que tenen la base en una mateixa recta o en paral·leles. La translació serà el doble de la distància que hi ha entre els dos eixos, per la mateixa raó que en el cas dels angles. --> p=2r **B)** Per arribar de la primera figura a la segona tenim 3 opcions: 1. Fer la simetria respecte un eix i després la simetria d'aquesta respecte una perpendicular del primer eix. 2. Fer rotar la primera figura al voltant d'un centre de gir (tall entre eixos => mediatrius) 180º. Això és fer una simetria central. *(Simetria central (180º) = 2 simetries d'eixos perpendiculars (90º+90º))* 3. Fer una simetria respecte un punt, o sigui fer, també, una simetria central però aquesta vegada amb l'eina 'Refleja Objeto' por Punto, fent la simetria de la figura respecte el punt de tall dels eixos de simetria. **C)** La norma que hem determinat de que per anar d'una figura a la simetria de la seva simetria podem fer servir un gir, el centre del qual es trobi al tall de les dues simetries, també funcionarà quan hi hagi més de dues simetries sempre que compleixin el següent: a) el nombre de simetries ha de ser parell, ja que, d'aquesta manera, la figura recupera la seva orientació normal. (A dalt es pot veure un exemple en el que el nombre de simetries és imparell i per tant no funciona.) b) tots els eixos de simetria han de tallar per un mateix punt que serà el centre de gir.	simetries és parell, la qual cosa vol dir que tornem a adoptar la posició principal. Veiem que en realitat que els graus que hem de girar per fer el gir d'una simetria respecte l'altra final (al voltant del centre de gir, es clar) serà el doble de l'angle format pels dos eixos de simetria entre els quals es troba la primera simetria de la nostra figura inicial. Això es degut a que, donat que la primera simetria, per definició, ha d'estar a la mateixa distància de la figura principal respecte un eix, veurem que si unim els punts homòlegs amb un punt qualsevol d'aquest eix, per força obtindrem en ambdós casos dos angles iguals (un costat dels quals serà l'eix de simetria). Aquest punt el tindrem doncs concret (intersecció d'eixos), i si fem el mateix amb l'altra simetria secundària, també obtindrem dos angles iguals; així, com a resultat, dintre dels eixos entre mig dels quals hi resideix la segona simetria es formarà un angle α+β, del qual trobarem repetit α i β. Per aquesta mateixa raó, tot el conjunt serà β+β+α+α, o el que és el mateix 2(α+β). **B)** Si pel contrari, els eixos de simetria fossin paral·lels, l'únic que hauríem de fer és un vector que traslladés la figura principal el doble de la distància α+β, o sigui, 2(α+β) (el vector u), per la mateixa raó que hem explicat abans, extrapolada no a angles sinó a segments.

Tabla 54. Documentos de Núria y Sergio posteriores a la discusión del Problema 3

En el documento conjunto observamos que Núria y Sergio presentan como solución a la composición hacer un giro sobre un centro que fijan. Esto implica que para hacer la composición necesitarían usar la figura final para calcular el ángulo de giro. Por otro lado, no presentan ninguna argumentación a su solución ni estudian casos particulares.

En primer lugar analizamos el progreso evidenciado en los documentos de Núria. Esta alumna incorpora en la solución que la composición consistiría en un giro de ángulo el doble del que forman los dos ejes de simetría. Vemos que ha entendido que no puede hacer uso de la figura resultante para realizar la composición.

Núria argumenta sus soluciones de forma clara y se ayuda de las construcciones visuales para complementar sus explicaciones. Incluso presenta diferentes documentos para añadir más casos estudiados.

Además de completar el caso general, esta alumna añade el caso particular de ejes de simetría paralelos. Análogamente al caso general, define la composición como una translación de vector con módulo el doble de la distancia entre ejes. Sorprende que trate el caso particular en que los dos ejes son perpendiculares, y realice la conexión con la equivalencia entre el giro de 180° y la simetría central. Estos conceptos no se habían tratado en clase, pero es razonable pensar que ha complementado su estudio con otros recursos que le han proporcionado estos nuevos conocimientos, lo cual valoramos positivamente.

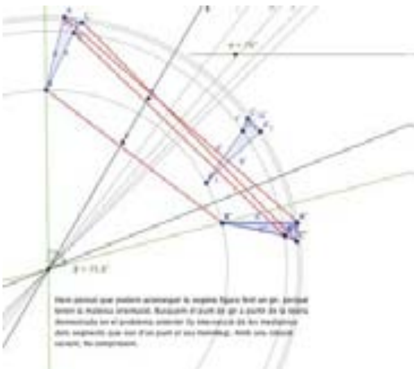
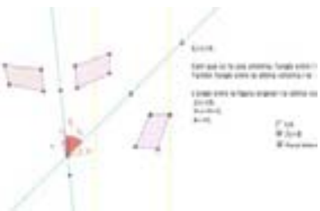
Otra aportación de Núria en su documento posterior a la discusión en gran grupo es el estudio de la situación dada al aumentar los ejes de simetría. Al final de la discusión del Problema 3, ella misma propone este nuevo enfoque, y por falta de tiempo se propone a los alumnos que lo estudien individualmente.

Respecto al uso correcto de vocabulario específico matemático, en general Núria hace un buen uso de él, a pesar de no incorpora la expresión "realizar la composición" en lugar de "la simetría de la simetría".

En segundo lugar, analizamos el progreso en los documentos de Sergio. Como su compañera, este alumno incorpora la condición de los grados de rotación, pudiendo así construir la figura de la composición sin usar la imagen realizada con las dos simetrías. Sergio da importancia a la argumentación y la incorpora en su presentación, pero da más importancia a la presentación visual, mostrando con colores cada uno de los ángulos y segmentos iguales para su justificación.

Así como Núria había incluido en su documento final la generalización del problema a un número *n* de simetrías, Sergio solo construye el caso particular en que los ejes de simetría son paralelos, y añade un comentario en su redacción diciendo que puede hacer esto porque el número de simetrías es par y no se modifica la orientación de la figura.

En relación con el uso de vocabulario matemático adecuado, Sergio incorpora y mantiene vocabulario trabajado en las anteriores discusiones en gran grupo, sin utilizar la expresión “composición” en su explicación. A continuación presentamos los documentos entregados por José Manuel en relación con el Problema 3 (Tabla 55).

<table>
<tr><th colspan="2">Trabajo de José M. antes y después de la discusión del Problema 3</th></tr>
<tr><td>ANTES
</td><td>DESPUÉS

A)</td></tr>
</table>

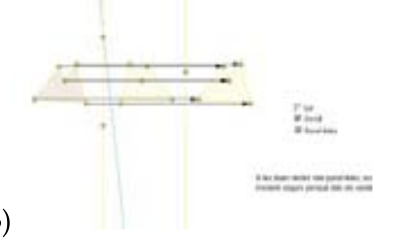
	 B)
Hem pensat que podem aconseguir la segona figura fent un gir, perquè tenen la mateixa orientació. Busquem el punt de gir a partir de la teoria demostrada en el problema anterior (la intersecció de les mediatrius dels segments que van d'un punt al seu homòleg). Amb una rotació variant, ho comprovem.	A) ζ=ε+δ; Com que es fa una simetria, l'angle entre la figura original i la primera recta és el mateix que ε. També l'angle entre la última simetria i la última recta és el mateix que δ. L'angle entre la figura original i la última simetria (β) és: 2ε+2δ; Si ε+δ=ζ; β=2ζ. I el centre de gir és el punt de tall dels dos eixos. B) Si les dues rectes són paral·leles, es pot fer una translació; n'estem segurs perquè tots els vectors són iguals.

Tabla 55. Comparación de documentos de José Manuel del Problema 3

Si analizamos el progreso de José Manuel vemos cómo, antes de la discusión en gran grupo, utiliza la figura resultante para describir el giro equivalente a la composición. Él aplica directamente los conceptos trabajados en el Problema 2, y por lo tanto necesita la figura resultante para hallar el centro de giro construyendo las mediatrices de puntos homólogos. En cambio, en el documento posterior a la discusión, utiliza este razonamiento solamente para demostrar que la solución es correcta. Así, a la vez, está argumentando su solución. También explicita la demostración de que el ángulo de giro será el doble del ángulo que forman los ejes de simetría.

Hay la incorporación de casos particulares, en este caso el de los ejes paralelos, aunque este alumno no comenta la posibilidad de generalizar el problema con un número genérico de ejes de simetría.

En relación con los complementos visuales de las explicaciones, intuimos un propósito de esforzarse en la presentación, aunque la introducción de colores no es significativa en su explicación. Por otro lado, sí organiza los diferentes casos con casillas de verificación.

En relación con el vocabulario específico matemático, en general las expresiones de José Manuel intentan ser técnicas y matemáticas, pero a veces inventa palabras en lugar de buscarlas. Por un lado, esto significa que entiende la importancia de hablar con propiedad matemática. Para poner un ejemplo de esto, en la explicación del documento previo a la discusión, encontramos la expresión "rotación variante" cuando se refiere a un deslizador entre 0° y 360°. Además, al comparar sus documentos del Problema 1, vemos que usa de forma errónea la palabra *homógenos* en lugar de *homólogos*. En cambio, en sus documentos del Problema 3 hay una mejora en este sentido, ya que usa de forma apropiada la palabra *homólogos*.

Con todos estos ejemplos de alumnos y problemas, hemos evidenciado progresos particulares en relación con las oportunidades de aprendizaje escogidas. No todos los alumnos han progresado del mismo modo en los diferentes aspectos que hemos ido comentando, lo cual sugiere que cada alumno sigue su propio proceso de aprendizaje. Sí hemos podido exponer que algunas de las oportunidades de aprendizaje que se habían detectado en las discusiones en gran grupo han sido aprovechadas.

Un hecho que llama la atención es que, de los tres alumnos que se han seleccionado para analizar progreso en la discusión del Problema 3, ninguno ha incorporado en su vocabulario específico el concepto de composición. Revisando las oportunidades de aprendizaje, vemos que no se ha detectado ninguna oportunidad de aprendizaje de concepto en este sentido durante la discusión del Problema 3, y la oportunidad de proceso, "Aprender a utilizar el vocabulario matemático específico", solo se ha detectado en tres ocasiones pero únicamente en las dos primeras discusiones. Esto es importante porque contribuye a validar nuestro instrumento de detector de oportunidades de aprendizaje: si la oportunidad no aparece durante la discusión es razonable que los alumnos no realicen un progreso al respecto.

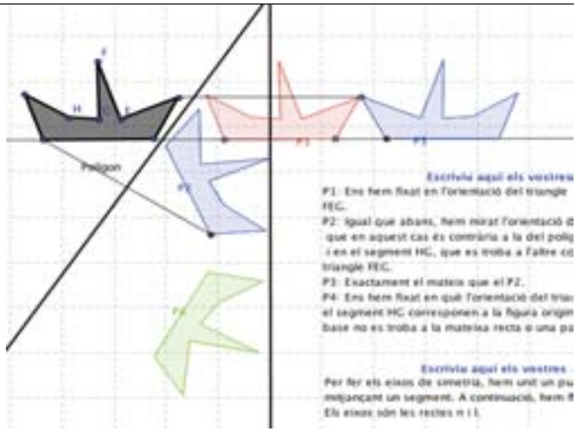
5.2.3 El caso de Inés en el desarrollo de competencias a lo largo de la secuencia

Tras haber dado ejemplos de oportunidades de aprendizaje que han sido aprovechadas durante las discusiones en gran grupo, en este apartado mostramos un ejemplo del análisis del trabajo de los estudiantes a lo largo de toda la secuencia de problemas para poner de relieve evidencias de progreso en términos de las competencias necesarias que se tratan en el currículo.

Como no es posible incluir en este resumen el análisis de todos los alumnos, hemos elegido, a modo de ejemplo, el trabajo de Inés. Esta ha sido una de las alumnas más participativas en las discusiones en gran grupo y una de las que ha mostrado una reflexión personal posterior más elaborada.

En este documento incluimos imágenes estáticas de su trabajo en el entorno informático, con lo cual perdemos el carácter dinámico de sus soluciones. Por esta razón, hemos incluido los documentos originales de GeoGebra en el Anexo V. A continuación adjuntamos los documentos presentados por Inés y sus intervenciones en las discusiones en gran grupo de cada uno de los problemas.

Del primer problema de la secuencia, tenemos el documento entregado por Inés y Víctor (Figura 74), y posteriormente el texto que ambos alumnos escribieron como explicación de su solución en pareja.



B1: *Ens hem fixat en l'orientació del triangle FEG, que és la mateixa que al polígon original, i en el segment HG, que està als dos casos a l'esquerra del triangle FEG.*

B2: *Igual que abans, hem mirat l'orientació del triangle FEG, que en aquest cas és contrària a la del polígon original, i en el segment HG, que es troba a l'altre costat del triangle FEG.*

B3: *Exactament el mateix que el B2.*

B4: *Ens hem fixat en què l'orientació del triangle FEG i el segment HG corresponen a la figura original, però la base no es troba a la mateixa recta o una paral·lela.*

Per fer els eixos de simetria, hem unit un punt del polígon original amb el seu simètric corresponent mitjançant un segment. A continuació, hem fet una mediatriu del segment que ja és l'eix de simetria. Els eixos són les rectes n i l.

Figura 74. Solución del Problema 1 de Inés y Víctor después del trabajo por pareja

Los aspectos más importantes emergentes del análisis del documento son los siguientes:

- Inés solo realiza justificaciones visuales de la elección de cada isometría para cada barco y no usa el *software* como soporte en la resolución.
- Utiliza notación matemática para complementar sus explicaciones nombrando los vértices de las figuras para referirse a ellas, pero no hace uso de vocabulario específico del tema.
- No define los elementos que caracterizan las isometrías que identifica, como el vector de la translación o el centro del giro.

- La estrategia para construir los ejes de simetría consiste en construir el segmento que une un par de puntos homólogos, y luego construir la mediatriz de este segmento.
- No tiene en cuenta la trampa de precisión tratada en el tercer apartado y con un razonamiento visual considera la figura como simétrica de la original.

Después de presentar el documento conjunto resultante del trabajo por parejas, resumimos las intervenciones durante la discusión en gran grupo de este problema (ver Tabla 56).

Apartado	Episodio	Intervenciones
B1	(e_4)	Propone mover el vector para comprobar que era una translación pero se encuentran con un obstáculo tecnológico.
	(e_5)	Busca alternativas al obstáculo tecnológico y propone construir otro vector y compararlos para ver que son iguales.
	(e_8)	Propone la generalización de construir todos los vectores y compararlos todos.
B3	(e_{16})	Presenta la solución errónea de que el tercer barco es una simetría del fijo.
	(e_{17})	Explica una estrategia para construir el eje de simetría de las figuras simétricas: Construye un segmento entre dos puntos homólogos y posteriormente la mediatriz de éste.
B4	(e_{25})	Expone una forma de encontrar el centro de giro que funciona para ciertos casos que desconoce.

Tabla 56. Intervenciones de Inés durante la discusión en gran grupo del Problema 1

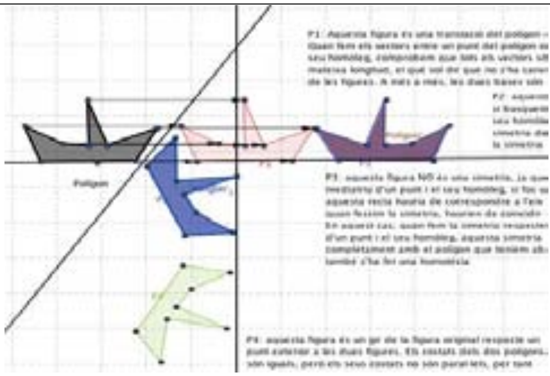
Las apreciaciones destacables del análisis de las intervenciones de Inés durante la discusión en gran grupo del Problema 1 son las siguientes:

- Inés participa activamente en la búsqueda de una justificación para comprobar la elección de la translación en el primer apartado proponiendo una estrategia, por eso la consideramos consciente de que su justificación visual es insuficiente.
- Hace un cambio en su pensamiento porque en el marco de la justificación deductiva que están creando conjuntamente, sigue buscando alternativas a los obstáculos tecnológicos; el

hecho de proponer construir y comparar más vectores lo interpretamos como un progreso en relación con haber visto la importancia de que todos los puntos de una figura se trasladen bajo el mismo vector, para que la figura sea una translación.

- Su generalización final mediante la cual aplica la estrategia que acabamos de mencionar a todos los puntos de la figura indica un progreso, ya que pone de manifiesto que se ha dado cuenta de la importancia de generalizar una solución.
- Presenta la solución del tercer apartado de forma incorrecta (si hay un cambio en este sentido lo podremos considerar progreso).
- Para construir el eje de simetría sigue la estrategia de construcción de un segmento y posteriormente la mediatriz de éste.
- En el documento previo a la discusión, en el giro no da información sobre los elementos que lo caracterizan. Hay progreso en la discusión en gran grupo cuando propone una estrategia para hallar el centro de giro, y por lo tanto poder informar sobre los elementos que lo caracterizan.
- La estrategia que propone para hallar el centro de giro es una particular que le funcionó en un ejercicio previo donde el ángulo de giro era 180°, pero desconoce la razón por la cual a veces funciona y otras no.

Tras la discusión en gran grupo del Problema 1, Inés entrega la reflexión personal de su progreso en un nuevo documento de GeoGebra, del cual podemos ver la imagen y la explicación en la Figura 75.



B1: *Aquesta figura és una translació del polígon original. Quan fem els vectors entre un punt del polígon original i el seu homòleg, comprovem que tots els vectors són de la mateixa longitud, el què vol dir que no s'ha canviat la mida de les figures. A més a més, les dues bases són paral·leles.*

B2: *Aquesta figura és una simetria del polígon original, ja que si busquem la mediatriu entre cadascun dels punts amb el seu homòleg, totes aquestes rectes coincideixen. I si fem la simetria del polígon original respecte aquest eix (les mediatrius), la simetria i la figura B2 coincideixen.*

B3: *Aquesta figura NO és una simetria, ja que: si fem la mediatriu d'un punt i el seu homòleg, si fos una simetria, aquesta recta hauria de correspondre a l'eix de simetria, i quan féssim la simetria, haurien de coincidir els dos polígons. En aquest cas, quan fem la simetria respecte a la mediatriu d'un punt i el seu homòleg, aquesta simetria no encaixa completament amb el polígon que teníem abans, ja que també s'ha fet una homotècia.*

B4: *Aquesta figura és un gir de la figura original respecte un punt exterior a les dues figures. Els costats dels dos polígons són iguals, però els seus costats no són paral·lels, per tant no pot ser una translació. El gir seria d'entre 90º i 180º.*

Figura 75. Solución del Problema 1 de Inés después de la discusión en gran grupo

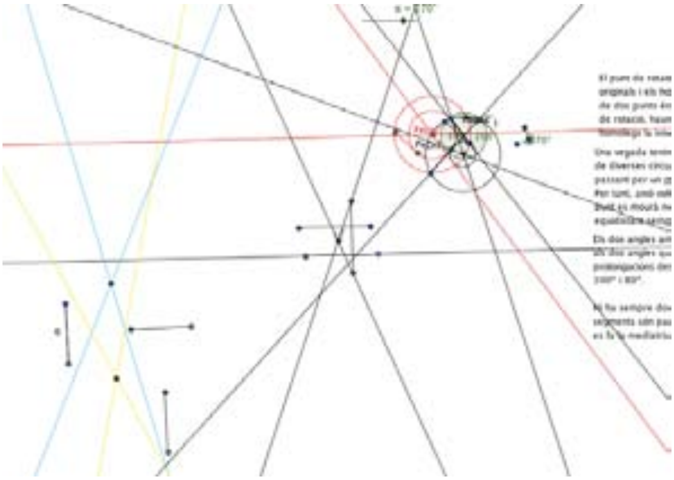
Tras analizar el documento entregado por Inés fruto de su reflexión personal sobre su aprendizaje durante la discusión en gran grupo, destacamos los siguientes puntos importantes:

- Inés incluye en el documento final la construcción de todos los vectores de la primera figura para luego compararlos. Se evidencia un progreso en la conceptualización de lo que significa que una figura es isométrica a otra si lo son todos sus puntos. No sabemos si el procedimiento de comparación de los vectores ha sido óptimo, ya que el protocolo de construcción del *software* no permite recuperar este tipo de acciones.

- Por primera vez incorpora vocabulario específico del tema en sus explicaciones, en concreto, la expresión "puntos homólogos".
- Puntualiza que una isometría no puede haber modificado el tamaño de las figuras. Esto puede evidenciar progreso al entender que las isometrías son transformaciones que conservan el tamaño.
- En el segundo apartado introduce dos estrategias para comprobar que la figura es una simetría. Una consiste en construir todas las mediatrices entre pares de puntos homólogos y compararlas. La otra consiste en construir una sola mediatriz de un par de puntos homólogos y aplicar la simetría respecto a ese eje para ver si las figuras coinciden.
- Usa una estrategia para construir los ejes ligeramente diferente, con la que se ahorra el paso de construir el segmento que une un par de puntos homólogos y construye la mediatriz directamente entre dos puntos. Hay progreso en la consideración de varias estrategias para llegar a escoger las más óptimas.
- En el tercer apartado cambia su respuesta previa a la discusión, de modo que también hay evidencias de progreso.
- Apoya su nueva solución con una justificación que coincide con la segunda que acabamos de exponer.
- Incorpora con corrección la palabra de vocabulario específico *homotecia*.
- En el último apartado, el del giro, completa su solución detallando los elementos que caracterizan el giro; aunque da muestras de que no tiene el conocimiento para definirlos totalmente, incluye estimaciones de sus características, con lo que da evidencias de su progreso al entender la importancia de definir matemáticamente las isometrías. Las estimaciones que da de las características del giro es que su centro será exterior a las figuras y que el ángulo será de entre 90° y 180°.

El progreso de Inés durante la implementación del Problema 1 no es independiente del resto de problemas. Por ello, los comentarios que siguen los relacionaremos con evidencias de ideas erróneas que se han detectado hasta ahora.

A continuación (Figura 76) presentamos la solución conjunta de Inés y Víctor después de trabajar en parejas para resolver el Problema 2.



El punt de rotació de la figura ha d'equidistar dels punts originals i els homòlegs. El lloc geomètric que equidista de dos punts és la mediatriu, per tant, per trobar el punt de rotació, haurem de fer les mediatrius dels punts homòlegs la intersecció de les quals serà el punt de rotació.

Una vegada tenim el punt de rotació, aquest serà el centre de diverses circumferències concèntriques, cadascuna d'elles passant per un punt i el seu homòleg. Per tant, això vol dir que quan movem el punt lliscador, cada punt es mourà només per la seva circumferència, equidistant sempre del punt de rotació.

Els dos angles amb els quals la rotació coincideix corresponen als dos angles que es formen en la intersecció de les prolongacions dels dos segments. En aquest cas, són 100º i 80º.

Hi ha sempre dos punts de rotació (excepte quan els segments són paral·lels), que depèn d'entre quins punts homòlegs es fa la mediatriu.

Figura 76. Solución del Problema 2 de Inés y Víctor después del trabajo por parejas

Tras analizar el documento entregado después del trabajo por parejas, destacamos los siguientes puntos relevantes:

- En este segundo problema, el documento de GeoGebra del enunciado no es completo y la presentación visual no está muy elaborada. Es pobre desde un punto de vista autoexplicativo y además la distribución de las construcciones es desordenada.

- De forma positiva destacamos la solución del caso general que han presentado y la buena argumentación que incluyen. Esto da evidencias del progreso respecto al problema anterior de generalizar las soluciones presentadas.
- Hay también la utilización de expresiones matemáticas específicas como “lugar geométrico”.
- A partir del comentario respecto a la traza que dejarían los extremos de la figura al rotar, Inés tiene una intuición correcta del movimiento del giro en este caso, que se complementa con las justificaciones visuales expuestas durante el trabajo en parejas del Problema 1.
- Destaca la inclusión del deslizador en la construcción, lo cual sugiere progresos en la génesis instrumental y uso del *software* para comprobar conjeturas, ambos aspectos relativos a la competencia digital.
- Los dos alumnos aportan una propiedad nueva, relativa a los ángulos de giro de las dos soluciones, que evidencia un progreso en el pensamiento matemático de proponer nuevos problemas y observar nuevas propiedades.
- Hay un uso correcto del vocabulario adquirido durante la resolución del Problema 1, lo cual indica que la incorporación de vocabulario específico que se había considerado como un progreso en el análisis de la resolución del Problema 1 se está consolidando.
- Tienen en cuenta la doble solución del caso general dependiendo de los puntos que se elijan como parejas de puntos homólogos. Esto responde al hecho de que el profesor formula esta pregunta durante la monitorización del trabajo en parejas, tal como había sido diseñado durante la anticipación del problema.

A continuación resumimos todas las intervenciones de Inés durante la discusión en gran grupo del Problema 2.

Episodio	Intervenciones
(e_{29})	Expone una justificación deductiva de por qué el centro de giro se encuentra construyendo las mediatrices y luego lo comprueba empíricamente.
(e_{30})	Mientras Víctor, su compañero, expone la posibilidad de la doble solución, Inés hace la precisión del ángulo de giro que tendría cada una.
(e_{33})	Expone la nueva propiedad que han encontrado durante el trabajo por parejas de que los ángulos de giro de las dos soluciones coinciden con los formados por las prolongaciones de los segmentos.
(e_{33})	Realiza una corrección técnica cuando están intentando comprobar la nueva propiedad, les surge un obstáculo tecnológico y busca alternativas para salvar el obstáculo.
(e_{35})	Desde la posición de *sherpa*, realiza la aclaración técnica de que no se puede llevar a cabo la propuesta de Clara.
(e_{41})	Completa la posición relativa que pueden tener dos rectas en el plano utilizando vocabulario específico.
(e_{44})	Desde la posición de *sherpa*, realiza una construcción en paralelo para refutar la propuesta de poder poner el centro en cualquier punto de las mediatrices coincidentes.
(e_{45})	Desde la posición de *sherpa*, realiza una construcción en paralelo para verificar la propuesta de unir puntos homólogos en el caso de que los segmentos sean paralelos y simétricos.
(e_{46})	Realiza una conexión con un ejercicio resuelto antes de la secuencia de problemas en que se trataba con un giro de 180º.
(e_{49})	Propone el caso particular de segmentos simétricos y formaliza su explicación.
(e_{49})	Presenta la solución de prolongar los segmentos a su propia propuesta.
(e_{50})	Durante la comprobación de la solución de prolongar los segmentos, debido a un obstáculo tecnológico, conceptualiza el problema y de una solución mediante una aproximación.
(e_{54})	Realiza una demostración técnica mientras aplican lo aprendido durante la sesión al barco (B4) del problema anterior.

Tabla 57. Intervenciones de Inés durante la discusión en gran grupo del Problema 2

Recordemos que en la discusión en gran grupo del Problema 2, Inés realiza el papel de sherpa, ya que con Víctor presentan su solución y después se quedan en la mesa del profesor gestionando el uso del *software*. Esto puede explicar la razón por la cual, como veremos, Inés realiza varias intervenciones comparado con otras discusiones y otros compañeros. Los comentarios más destacados después de analizar las intervenciones de Inés durante la discusión son los siguientes:

- Expone públicamente la justificación deductiva entregada en el documento previo, con lo cual muestra dominio del razonamiento escrito.
- Da importancia a los elementos que caracterizan el giro porque complementa la explicación de su compañero añadiendo pequeños detalles. Esto confirma progreso en la definición matemática de isometría, tal y como habíamos concluido en el problema anterior.
- Expone la propiedad nueva que cree haber encontrado, pero hay evidencias de escasa madurez porque los dos alumnos la presentan de un modo distinto; posteriormente el profesor interpretar sin resolverse la situación.
- En la posición de sherpa, Inés gestiona el uso del *software*, con evidencias de progreso en su génesis instrumental al reaccionar rápidamente a propuestas de sus compañeros, que a veces se encuentran con obstáculos tecnológicos ante los cuales busca alternativas.
- Utiliza vocabulario matemático preciso para referirse a las posiciones relativas de las rectas, aunque no sea vocabulario específico de este tema, con lo cual reafirmamos la consideración de que tiene asumida la importancia de hablar matemáticamente.
- Da importancia al hecho de demostrar las soluciones porque aprovecha su posición para comprobar las propuestas de sus compañeros.
- Al conectar la situación que se está tratando con la propuesta durante la discusión del Problema 1 de hallar el centro de giro

uniendo los puntos homólogos, hacemos una doble interpretación. Por un lado, esto señala capacidad para conectar varias situaciones y, por lo tanto, pensar matemáticamente. Por otro , teniendo en cuenta cómo hace la propuesta, intuimos que ha encontrado otro ejemplo donde su estrategia puede funcionar, pero aún no sabe exactamente cuál es la regla general que explica cuándo funciona.

- Resuelve el caso particular de segmentos simétricos y mediatrices coincidentes, presentando una solución trabajada durante el trabajo por parejas pero no evidenciada en el documento. Consideramos esto un progreso, ya que es razonable pensar que durante la discusión en gran grupo haya podido madurar la idea que habían trabajado sin éxito viendo ahora que es un caso particular que requiere tratamiento específico.
- Dado un obstáculo tecnológico relativo a la precisión, Inés presenta un redondeo en los cálculos y sabe diferenciar entre una trampa, como la del Problema 1, y una cuestión de precisión del *software*. Esto puede ser una evidencia del progreso en la génesis instrumental de Inés.
- En general, se pone de manifiesto una destreza elevada con el *software* y la capacidad de usarlo para diferentes propósitos, entre ellos, hacer justificaciones empíricas y comprobaciones. Esto es un progreso respecto al uso que se le había dado al inicio del Problema 1, únicamente como imagen visual.

Pasamos a presentamos el documento de Inés tras su reflexión sobre su progreso durante la discusión del Problema 2 (Figura 77). Para poder incorporar una imagen global del documento de GeoGebra entregado por Inés, hemos tenido que modificar las proporciones de su tamaño, pero se puede consultar el original en el Anexo V.

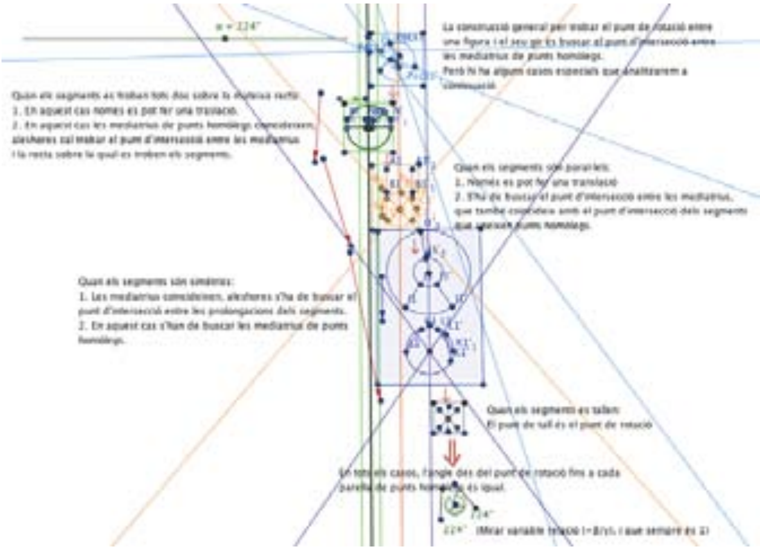
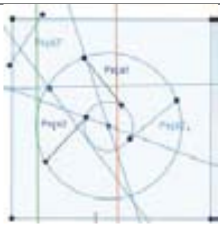
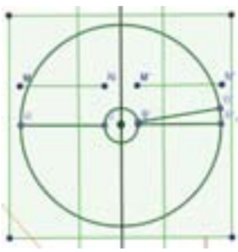
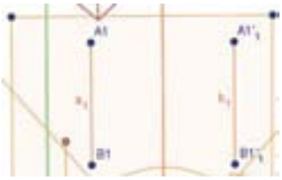
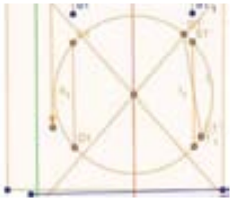


Figura 77. Solución del Problema 2 de Inés después de la discusión en gran grupo

Como caso excepcional debido a la cantidad de detalles en la construcción, añadimos una representación detallada de cada apartado y sus explicaciones en la Tabla 58.

Representación dinámica	Argumentación
	*La* ***construcció general*** *per trobar el punt de rotació entre una figura i el seu gir és buscar el punt d'intersecció entre les mediatrius de punts homòlegs. Però hi ha alguns casos especials que analitzarem a continuació:*
	*Quan els* ***segments*** *es troben tots dos* ***sobre la mateixa recta****:* *1. En aquest cas només es pot fer una translació.* *2. En aquest cas les mediatrius de punts homòlegs coincideixen, aleshores cal trobar el punt d'intersecció entre les mediatrius i la recta sobre la qual es troben els segments.*

<table>
<tr><td></td><td></td><td>Quan els segments són paral·lels:

1. Només es pot fer una translació

2. S'ha de buscar el punt d'intersecció entre les mediatrius, que també coincideix amb el punt d'intersecció dels segments que uneixen punts homòlegs.</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Quan els segments són simètrics:

1. Les mediatrius coincideixen, aleshores s'ha de buscar el punt d'intersecció entre les prolongacions dels segments.

2. En aquest cas s'han de buscar les mediatrius de punts homòlegs.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>Quan els segments es tallen:

El punt de tall és el punt de rotació</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>En tots els casos, l'angle des del punt de rotació fins a cada parella de punts homòlegs és igual.

(Mirar variable relació (=β/γ), i que sempre és 1).</td></tr>
</table>

Tabla 58. Representación detallada de la solución del Problema 2 de Inés

Presentamos los comentarios que consideramos más destacados después de analizar las intervenciones de Inés:

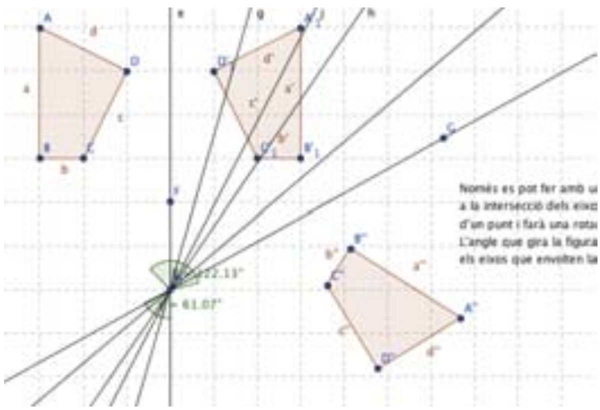
- Si únicamente nos fijamos en la presentación de su solución respecto a la parte gráfica, hay progreso en el ámbito visual y organizativo de la solución. Incluso se observa que ha utilizado las isometrías para generar este documento. Si comparamos los documentos antes y después de la discusión, observamos que el primer documento contenía algunas probaturas, mientras que en el segundo Inés muestra que ya no tiene ideas vagas sino que ha conseguido organizar y resolver todos los casos.

- En este documento presenta el caso general y precisa cómo se debe hallar el centro de giro pero no vuelve a copiar la argumentación. Suponemos que se debe a que no lo considera un progreso comparado con su documento previo. Parece dar por válida la argumentación y no creer que sea importante repetirla.
- Volvemos a ver que utiliza la estrategia más sencilla para construir la mediatriz entre dos puntos sin tener que construir el segmento que los une. Este hecho refuerza la idea de progreso.
- Tiene en cuenta varios casos particulares que se han tratado durante la discusión en gran grupo pero no los agrupa de forma óptima, ya que hay explicaciones redundantes. Por esta razón inferimos que ha incorporado bien la idea de que es importante tratar casos particulares, sin embargo aún le falta progresar en el pensamiento matemático en lo que se refiere a la generalización.
- En cada caso particular que presenta, mantiene la separación de soluciones dependiendo de cómo oriente los extremos de los segmentos. Así, después de tratar la doble solución en cada caso, vemos evidencias de que lo observado en el documento anterior a la discusión, que podía ser fruto de la pregunta del profesor durante la monitorización, es una muestra de progreso.
- Señala la importancia de buscar isometrías alternativas cuando no existe un giro que transforme un segmento en el otro. Esto refuerza la idea de progreso en ir más allá y pensar matemáticamente y no quedarse únicamente con lo que se pide en el enunciado tal como ocurre en la resolución del Problema 1.
- Trata por separado el caso en que se aplica un giro de 180° y usa la estrategia que ha mencionado en varias ocasiones de

unir pares de puntos homólogos. Progresa en el sentido de que al menos sabe cuándo puede aplicar esta estrategia, pero habría que confirmar si conoce los motivos.

- Hace un uso adecuado del vocabulario matemático específico "cortar" y "cruzar", que algunos de sus compañeros confunden. No lo consideramos un progreso porque no tenemos evidencias de que los confundiera anteriormente, pero sí asumimos que se esfuerza por hablar con precisión.
- Incorpora en su solución escrita la propiedad comentada en la discusión por la cual el ángulo de giro debe ser el mismo para cada par de puntos homólogos de una figura. Esto es significativo ya que casi ningún compañero lo ha incluido en el documento posterior a la discusión en gran grupo, mientras que Inés sí ha aprovechado las oportunidades en este sentido.
- En el documento final, incorpora la creación de una variable para comprobar que el ángulo de giro es el mismo. Hace uso del dinamismo que proporciona el *software* para la comprobación de invariantes, lo cual apunta a un alto nivel de instrumentación.

A continuación presentamos el documento realizado por Inés y Víctor del Problema 3 (Figura 78).



Només es pot fer amb un gir. La màquina es col·locaria a la intersecció dels eixos de simetria, la seva mida serà d'un punt i farà una rotació de la figura respecte a si mateixa. L'angle que gira la figura és del doble de l'angle que formen els eixos que envolten la primera simetria.

Figura 78. Entrega de la solución del Problema 3 de Inés y Víctor después del trabajo por parejas

Destacamos los comentarios que consideramos interesantes después del análisis del documento entregado por Inés y Víctor antes de la discusión:

- Presentan la solución de la composición definiendo el giro con todos sus elementos: centro y ángulo. Esto es relevante porque si ya habíamos visto progreso el considerar importante definir con precisión matemática las isometrías, ahora hay progresado, además, en la obtención de estos elementos y en saber definirlos matemáticamente.
- Aplican los conocimientos que han obtenido durante el Problema 2 al construir todas las mediatrices de pares de puntos homólogos para hallar el centro de giro. Además, construyen las cuatro mediatrices para aplicar los conceptos aprendidos en el Problema 1 relativos a la importancia de cerciorarse de que todos los puntos se transforman bajo el mismo giro. Otra vez, se confirma el progreso detectado en los problemas anteriores, que Inés aplica en este último problema.
- Sorprende que no hay tratamiento de casos particulares, lo cual no sugiere que su progreso sobre la importancia de tratarlos no haya sido efectivo, sino más bien que lo que no tiene incorporado es la capacidad de imaginar todas las posibles posiciones de los objetos en el plano.
- Sigue utilizando un vocabulario matemático adecuado, pero no incorpora ninguna novedad específica del tema.
- En la forma de redactar la solución, hay esfuerzo por contextualizar la solución en el mismo entorno que se ha planteado en el enunciado. Esto muestra la capacidad de conectar el contexto con el contenido abstracto matemático.

Presentamos en la Tabla 59 las intervenciones de Inés durante la discusión en gran grupo del Problema 3.

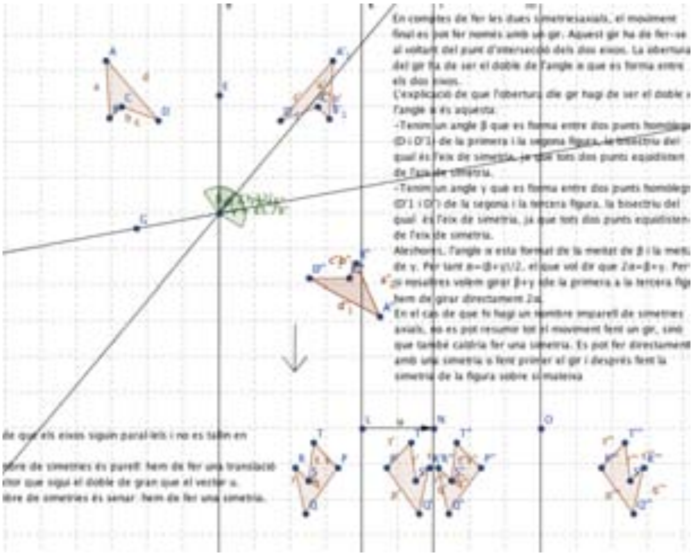
Episodio	Intervenciones
(e_{57})	Realiza una explicación técnica de cómo crear comprobar que el ángulo de giro es el doble que el ángulo que forman entre ellos los ejes de simetría. Lo hace creando una variable $\frac{\beta}{\alpha}$, y hace una justificación deductiva de por qué van en este orden.
(e_{63})	Propone una forma de construir un vector de tamaño el doble que otro, pero se encuentra con un obstáculo tecnológico y se autocorrige.

Tabla 59. Intervenciones de Inés durante la discusión en gran grupo del Problema 3

Presentamos los comentarios que consideramos relevantes tras el análisis de las intervenciones de Inés:

- Su participación en esta discusión es escasa, pero valoramos que deje que otros alumnos sean los que tengan la oportunidad de conducir las discusiones. Por eso consideramos que su comportamiento ayuda a la colaboración entre participantes.
- La explicación que elabora ante la clase para justificar su argumentación sobre la solución del caso general no está incorporada en el documento previo.
- Su propuesta de una estrategia para construir un vector doble mientras en la discusión se está construyendo la justificación del caso particular, sugiere que se ha dado cuenta de que su solución era insuficiente, pero no por eso deja de participar. Por otro lado, seguimos evidenciando progreso en su génesis instrumental. Aunque tiene un nivel alto, sin embargo, todavía hay ocasiones en las que no prevé los obstáculos tecnológicos, para algunos de los cuales busca alternativas o bien identificar un error.

Por último, presentamos en la Figura 79 el documento final de Inés tras la discusión en gran grupo del Problema 3.



*En el cas dels **eixos secants**:*

En comptes de fer les dues simetries axials, el moviment final es pot fer només amb un gir. Aquest gir ha de fer-se al voltant del punt d'intersecció dels dos eixos. La obertura del gir ha de ser el doble de l'angle α que es forma entre els dos eixos.

L'explicació de que l'obertura del gir hagi de ser el doble que l'angle α és aquesta:

-Tenim un angle β que es forma entre dos punts homòlegs (D i D'1) de la primera i la segona figura, la bisectriu del qual és l'eix de simetria, ja que tots dos punts equidisten de l'eix de simetria.

-Tenim un angle γ que es forma entre dos punts homòlegs (D'1 i D'') de la segona i la tercera figura, la bisectriu del qual és l'eix de simetria, ja que tots dos punts equidisten de l'eix de simetria. Aleshores, l'angle α esta format de la meitat de β i la meitat de γ. Per tant α=(β+γ)/2, el que vol dir que 2α=β+γ. Per tant, si nosaltres volem girar β+γ (de la primera a la tercera figura), hem de girar directament 2α.

En el cas de que hi hagi un nombre imparell de simetries axials, no es pot resumir tot el moviment fent un gir, sinó que també caldria fer una simetria. Es pot fer directament amb una simetria o fent primer el gir i després fent la simetria de la figura sobre si mateixa.

*En el cas dels **eixos paral·lels**:*

En el cas de que els eixos siguin paral·lels i no es tallin en cap punt:

- Si el nombre de simetries és parell: hem de fer una translació per un vector que sigui el doble de gran que el vector u.

-Si el nombre de simetries és senar: hem de fer una simetria.

Figura 79. Entrega de la solución del Problema 3 de Inés después de la discusión en gran grupo

Mencionamos las características que consideramos relevantes a partir del análisis del documento final de Inés:

- Inés incorpora en su documento la justificación deductiva de que el ángulo de la composición es el doble del ángulo que forman los ejes de simetría. Eso indica progreso en la consideración de las demostraciones, ya que podría haber escogido la justificación empírica realizada con el *software*.
- Incorpora la variable del *software* para mostrar la invariancia de la doble proporción. Parece que empieza a ser una estrategia usual para ella cuando tiene que comprobar una característica de este tipo, lo cual supone una mejora de su génesis instrumental.
- Introduce el tratamiento de un número genérico de simetrías, pero solo tiene en cuenta el número impar de simetrías y, además, que todas ellas se corten en un punto. Por un lado, vemos que el razonamiento no está completo, pero por el otro consideramos el esfuerzo por estudiar estos casos, que es voluntario en la reflexión personal.
- Incluye una nueva propiedad: un número impar de simetrías siempre será igual a una sola simetría o equivalente a la composición de giro y simetría. Esto indica que Inés consigue simplificar el problema y además utiliza el concepto de composición que se está trabajando junto con el de equivalencia de soluciones.
- Incorpora en su documento final todo el tratamiento del caso particular con ejes de simetría paralelos y lo resuelve directamente para el caso de n simetrías. Esto muestra progreso en la generalización de las soluciones de los problemas.
- Aunque se esfuerza por generalizar su solución, hay algún error como por ejemplo la generalización de la composición si el número de simetrías es par y son paralelas. Decir que la composición es una translación es correcto, pero la generalización de las características de los elementos que la definirían no lo es excepto para el caso con dos simetrías.

- Con el número impar de simetrías, ocurre lo mismo: presenta bien la solución, que será una simetría, pero no informa sobre los elementos que la caracterizan. Son problemas de una dificultad más elevada, que señalan progreso en la línea de la resolución de problemas y de desarrollo del pensamiento matemático.

Como hemos ido mencionando en los comentarios de las intervenciones de Inés, ya sean orales o escritas, hemos detectado evidencias de progreso en su aprendizaje en varios aspectos. Para terminar, revisamos la relación de los distintos progresos con las competencias presentadas en el currículo.

Si nos fijamos en las competencias generales, podemos resumir aquellas en las que Inés ha mostrado un cierto nivel de competencia en distintos aspectos. Por ejemplo, en varias ocasiones esta alumna ha mostrado un dominio digital y en general hemos evidenciado progreso en su proceso de génesis instrumental. También ha mostrado una autonomía e iniciativa personal en muchos momentos, sobre todo durante las discusiones en gran grupo en las que ha participado de manera activa, siendo sus aportaciones interesantes desde el punto de vista de la construcción de conocimiento, pero también respecto a la creación de oportunidades de aprendizaje para el resto de participantes. Se ha documentado que es una alumna competente social y ciudadanamente, siguiendo la estructura de las discusiones y ayudando a construir de forma común diversos ámbitos del conocimiento matemático.

Durante el análisis de la implementación de la secuencia de problemas se ha observado un progreso respecto a la competencia lingüística: se ha percibido una mejora de la comprensión de la alumna sobre la importancia de desarrollar procesos matemáticos concretos mediante el uso de lenguaje preciso. En varias ocasiones también se ha evidenciado su interés por aprender, y su insistencia en resolver dudas o ideas inicialmente difusas. Esto lleva a pensar que la competencia de aprender a aprender es bastante madura.

A continuación, pasamos a resumir las competencias procedimentales de matemáticas que Inés ha trabajado durante la implementación de la secuencia de problemas.

En varias ocasiones hemos documentado progreso en lo que se refiere a pensar y razonar matemáticamente. En múltiples ocasiones Inés ha propuesto estrategias, alternativas y justificaciones tanto empíricas como deductivas. Otro aspecto que valoramos positivamente es la capacidad que esta alumna ha ido desarrollando de plantearse por si misma nuevos retos que completaran la resolución de los problemas propuestos inicialmente.

Durante la implementación de la secuencia, Inés ha mostrado progreso en el dominio de las técnicas básicas e instrumentales para hacer matemáticas en el contexto de la resolución de problemas en torno a isometrías. También hemos detectado una mejora en la forma de presentar su trabajo, tanto oralmente durante las discusiones en gran grupo como de forma escrita en sus reflexiones posteriores.

En estos últimos párrafos, damos paso a una breve visión conjunta de las competencias de contenidos específicos que se esperan en el currículo en relación con el estudio de las isometrías en la enseñanza secundaria obligatoria.

Consideramos probado el progreso de Inés en la comprensión de los efectos de las transformaciones. Al principio solo consigue visualizar algunos de estos efectos a grosso modo, mientras que más tarde llegar a ver que las propiedades tienen que cumplirse para cada uno de los puntos de una figura. Consigue además elaborar una mejor comprensión sobre la importancia de detectar qué elementos caracterizan cada una de las isometrías, hasta finalmente saber definirlos matemáticamente con corrección.

Hemos observado cómo en varios momentos Inés utiliza la propiedad de que las isometrías mantienen las distancias de las figuras, y evidentemente las distancias de cada punto de la figura a los elementos que caracterizan las isometrías, como el eje de simetría o bien el centro de giro.

A lo anterior, cabe añadir un progreso en relación a la comprensión del concepto de composición de isometrías, llegando incluso a visualizar los efectos de un número genérico de isometrías compuestas.

Tras analizar el progreso de Inés a lo largo de la secuencia de problemas y su correspondencia con las competencias curriculares, estamos en condiciones de afirmar que las oportunidades de aprendizaje detectadas van en la misma dirección que las competencias propuestas por el currículo vigente. Por otra parte, el aprovechamiento de estas oportunidades supone un progreso en el aprendizaje matemático de los alumnos, que es coherente con el marco institucional en el contexto de nuestra investigación. En síntesis, podemos afirmar que las discusiones en gran grupo, originadas a raíz del diseño experimental y la aplicación de una sistemática, han sido efectivas y productivas desde el punto de vista de Sfard y Kieran (2001).

6 Resultados

En el presente capítulo tratamos los resultados relativos a los dos objetivos de la investigación. Primero, introducimos los resultados sobre el análisis de la sistemática (6.1). Dentro de este apartado se encuentran los dos resultados metodológicos que se corresponden con los instrumentos didácticos 'Árbol del problema' (6.1.1) y 'Estadios de la discusión' (6.1.2). Posteriormente, presentamos como resultado fundamental la sistemática, que es el eje vertebrador de esta investigación y una de las aportaciones teóricas más importantes (6.1.3).

Siguen los resultados relativos a las oportunidades de aprendizaje de los estudiantes (6.2), organizados en tres direcciones. Por un lado, se tratan aspectos metodológicos sobre cómo evidenciar oportunidades de aprendizaje a través de la presentación del instrumento de análisis 'Detector de oportunidades de aprendizaje' (6.2.1). Este instrumento es una aportación metodológica relevante en el área. Luego, se señalan resultados relativos a la detección práctica de estas oportunidades (6.2.2). Finalmente, se discuten las evidencias de aprovechamiento de algunas de las oportunidades detectadas (6.2.3).

6.1 Resultados sobre la evaluación de la sistemática

Recordemos que el primer objetivo consistía en *analizar la sistemática que comporta la planificación, implementación y evaluación de una secuencia didáctica con discusiones en gran grupo bajo el soporte de un software de geometría dinámica*.

Durante la adaptación de los conceptos teóricos de Smith y Stein (2011) y Drijvers y otros (2010) para crear la sistemática que ayudaría a la implementación de la secuencia didáctica, vimos la necesidad de crear dos instrumentos metodológicos que facilitasen la implementación de algunas de las fases de la sistemática. Estos instrumentos los consideraremos resultados metodológicos.

En este apartado, presentamos los resultados que se han obtenido en la evaluación del diseño y la implementación de la sistemática. Se trata de una evaluación general que ha sido realizada desde el punto de vista de la enseñanza. En el siguiente apartado (6.2) se complementará la evaluación desde el punto de vista del aprendizaje de los alumnos.

6.1.1 Árbol del problema

El concepto de árbol de un problema se elaboró con la intención de plasmar de forma esquemática el estudio de anticipación que un profesor podía llevar a cabo durante la resolución de un problema. Se adaptaron las ideas de espacio del problema y espacio básico del problema que considera Cobo (1998) citando a Newell y Simon (1972) y Mayer (1986). Todos ellos dan mucha importancia al conjunto de posibilidades o estrategias que tiene un *resolutor* –experto o no– para resolver un problema. Nosotros no queríamos utilizar este instrumento únicamente como contenedor de las diferentes estrategias de resolución del problema en un espacio reducido, sino que también nos propusimos que sirviera para relacionar las distintas opciones, así como para dar indicaciones al alumno sobre cómo se podía pasar de una a otra. De este modo, poco a poco se fue desarrollando y se estableció la estructura actual, que incorpora mensajes posibles del profesor para poder guiar al alumno en la resolución y discusión del problema en cuestión.

Durante el presente estudio, se han validado algunos detalles de su estructura. Por ejemplo, si nos fijamos en el orden de las ramas del árbol, notamos que el profesor ha basado la secuenciación de la discusión en gran grupo en el orden en que él mismo ha creado el árbol, porque, de alguna forma, puede haber materializado su estructura didáctica mental en el esquema del árbol, como puede verse en los análisis integrados de las discusiones en gran grupo de los problemas.

Del mismo modo, los mensajes del profesor que se habían creado a priori, han resultado ser muy efectivos durante la fase de monitorización de la sistemática. En varias ocasiones se ha puesto de manifiesto en las discusiones en gran grupo que los alumnos utilizaban la estructura que se les había transmitido en los mensajes durante la monitorización para presentar sus soluciones durante la discusión en gran grupo.

Las preguntas de ampliación también han resultado ser útiles durante la monitorización, ya que han sido claves para el tratamiento de la diversidad dentro de la clase. Cada pareja de alumnos ha podido avanzar a su ritmo y en ningún momento nadie ha tenido que esperar a que terminara el resto de los participantes.

Así, en este estudio se ha hecho una reconstrucción de la idea de espacio básico de un problema para dar paso a la noción de árbol de un problema. Además se ha demostrado cómo esta restructuración ha sido significativa en el desarrollo de las sesiones observadas.

6.1.2 Estadios de la discusión

Las discusiones de los problemas en gran grupo siguen una estructura general que nos hizo pensar que el profesor seguía unos estadios para ir desarrollando la implementación de estas discusiones. Fue por eso que intentamos hacer emerger una tipología de estadios que el profesor, de forma intuitiva y no consciente, había seguido para secuenciar las discusiones en gran grupo.

Entendemos por estadios las fases del desarrollo de la clase para poner en común la discusión del problema en un sentido conceptual y procedimental. Presentamos los estadios de la discusión que se han detectado según el orden empírico surgido del análisis:

- *Situación del problema.*
- *Presentación de una solución del problema.*
- *Estudio de las diferentes estrategias para resolver o argumentar el problema.*
- *Estudio de casos particulares o extremos.*
- *Estudio de diferentes soluciones.*

- *Conexiones con otras áreas, contenidos matemáticos e incluso entre las diferentes soluciones.*
- *Generalización y conceptualización.*
- *Reflexión sobre los aspectos matemáticos emergente*s.

Del análisis de las tres últimas fases –implementación didáctica, secuenciación y conexiones– para cada problema, emergieron los diferentes estadios mencionados. En base a esta estructura, creamos un instrumento de análisis basado en estos estadios, que ha ayudado a organizar los datos y ordenar los episodios según la actividad matemática que se estaba llevando a cabo en cada momento. Este instrumento didáctico, que lo llamamos 'Estadios de la discusión', se puede entender como un conjunto de acciones que ayudan a organizar y gestionar la discusión en gran grupo de un problema.

Así como las fases de resolución de un problema (Schoenfeld, 1992) han sido muy estudiadas, el conjunto de acciones que el profesor puede tener en cuenta para la discusión en gran grupo de las soluciones de un problema es uno de los resultados novedosos de este estudio. Igual que en el resultado anterior sobre el árbol de problemas, el instrumento no pretende ser un guión cerrado, pues siempre dependerá del problema, el profesor, el trabajo previo de los alumnos, etc.

Una vez creamos esta noción de estadios de la discusión, que puede considerarse un resultado derivado de la implementación de la sistemática por parte del profesor, fue aplicado a la creación del instrumento de análisis que vamos a presentar a continuación.

De este modo, podemos concluir que los estadios de la discusión han sido claves para poder estructurar las discusiones en gran grupo para el posterior análisis detallado de las acciones y de las interacciones de y entre los participantes.

Consideramos importante que el profesor sea capaz de elaborar un andamiaje (Anghileri, 2006) de las ideas de los alumnos y consiga hacer procesos de filtrado (Sherin, 2002), ayudando previamente en la generación de ideas y su posterior comparación y evaluación para conseguir filtrar lo que considera oportuno en cada momento, para que los alumnos sigan el proceso de resolución de un problema (Schoenfeld, 1992) y lo completen con los de los otros participantes.

Si nos fijamos en los estadios que nosotros proponemos, de alguna forma sugieren un proceso de filtrado general de las ideas de los alumnos de toda la discusión, fomentando la presentación de soluciones –distintas, cuando se da el caso– y de estrategias, el contraste entre ellas, el estudio de casos particulares que puedan derivarse de ellas y también las posibles conexiones, para finalizar con la generalización y conceptualización de las ideas más relevantes del problema.

Así, los estadios de la discusión que hemos creado tienen como referentes teóricos las fases de resolución de problemas de Schoenfeld (1992). En relación con la gestión y orquestación de las discusiones, este resultado está en sintonía con los procesos de filtraje de Sherin (2002) y el concepto de andamiaje de Anghileri (2006).

6.1.3 Sistemática y su análisis

Como ya hemos comentado a lo largo del trabajo, uno de los resultados que se esperaba de este primer objetivo era poder evaluar la adaptación metodológica de las fases teóricas de Smith y Stein (2011) y de Drijvers y otros (2010).

Esta sistemática ha sido eficiente desde un punto de vista funcional para el profesor. En repetidas ocasiones, evidenciamos en el análisis de datos cómo el hecho de basarse en la sistemática ayuda al profesor a tener en cuenta detalles para la preparación de las discusiones en gran grupo. A lo largo del análisis se han evidenciado posibles mejoras en la sistemática, con lo cual se presenta como resultado principal una reestructuración de esta sistemática. Dentro de este apartado de reestructuración, se detalla una explicación de cada nueva fase de la sistemática, incluyendo la fase de conexiones que se elimina.

Reestructuración de la noción de sistemática para implementar discusiones en gran grupo con tecnología

Además de la creación de los instrumentos para facilitar la implementación de algunas de las fases de la sistemática, la reestructuración de la sistemática es un resultado crucial para poderla utilizar de nuevo en futuras investigaciones e implementaciones.

Después de reestructurar y refinar las fases teóricas de Smith y Stein (2011) y de Drijvers y otros (2010), presentamos como resultado final la siguiente estructura de la sistemática (Tabla 60). Recordemos que Smith y Stein ponían el foco en el trabajo colaborativo y las discusiones en gran grupo, mientras que para Drijvers y sus colegas el foco del estudio se centraba en la incorporación de la tecnología en las sesiones.

Fases de la orquestación Smith y Stein (2011)	**Orquestación instrumental Drijvers et al. (2010)**	**Propuesta de Sistemática de discusiones con tecnología**
Anticipación		*a)* Anticipación a partir del árbol del problema.
	Configuración didáctica.	*b)* Configuración didáctica ampliada.
	Modo de explotación.	*c)* Modo de explotación.
Monitorización		*d)* Monitorización .
Selección		*e)* Selección de situaciones.
Secuenciación	Implementación didáctica.	*f)* Secuenciación de la implementación didáctica.
Conexiones		

Tabla 60. Reestructuración de la sistemática

Así, además de la estructura general, la definición de cada fase de la sistemática se ha visto alterada al compaginar las dos visiones de trabajo colaborativo y tecnología. A continuación, destacamos los aspectos más importantes de cada una de ellas.

a) Sobre la anticipación a partir del árbol del problema

Según Smith y Stein (2011), la fase da anticipación consiste en estudiar las distintas aproximaciones y estrategias –correctas e incorrectas– de los alumnos. También defienden que es necesario hacer el estudio de los conceptos matemáticos, los procesos y las representaciones que el profesor quiere que aprendan.

Ball y Bass (2009) presentan el conocimiento matemático específico del profesor y, de algún modo, el hecho de elaborar una anticipación del problema fomenta que los profesores trabajen para tener la habilidad de poder hacer diagnosis de los procedimientos de los alumnos. La anticipación también ayuda al profesor a alcanzar un mayor conocimiento del horizonte matemático relativo al problema, durante el estudio de las conexiones que se podrán hacer o de los puntos clave del problema para poder, posteriormente, subrayarlos y destacarlos.

Nosotros consideramos que en un entorno tecnológico como el que se ha creado para el marco de esta investigación, también habría que poner una atención especial en las modificaciones que podrían incorporarse si se trabaja con el instrumento que se esté usando en cada momento. Por ejemplo, los aspectos relacionados con la precisión de las construcciones, o la facilidad de conjeturar cuando se usa el dinamismo del *software*.

Quisiéramos añadir un aspecto clave en la definición de la fase de anticipación. Además de pensar a priori sobre las posibles estrategias y soluciones usadas por los alumnos, consideramos crucial reflexionar sobre los comentarios, mensajes y ayudas que podrían servir a los alumnos para progresar en la resolución del problema; es decir, las posibles acciones que puede hacer el profesor para gestionar el aprendizaje de los alumnos.

Para todo ello, proponemos el uso de los árboles de los problemas para llevar a cabo esta fase de la sistemática, ya que al construirlo, se realizan todas las acciones que constituyen la esencia de la anticipación.

Podemos hacer constar que, en el presente estudio, las anticipaciones de los problemas han consistido básicamente en realizar los árboles de los problemas. Hemos observado que muchas de las otras fases han usado los árboles de problemas, es decir, la anticipación previa que se había elaborado, como punto de referencia. Por todo ello podemos afirmar que la anticipación es una de las fases claves de toda la sistemática.

En este estudio en concreto también se han encontrado resultados relativos a la mejora de la implementación didáctica de los problemas seleccionados, ya que se han detectado posibles ampliaciones de los árboles de los problemas, que serán presentados junto con las implicaciones didácticas en el capítulo de conclusiones. Precisamente, los cambios en los árboles señalan aspectos de evaluación de la secuencia didáctica. No hemos incluido una fase específica de evaluación de la secuencia dentro de la sistemática, pero esta evaluación tiene lugar en distintos momentos y se pone de relieve con la adaptación de cambios en planificaciones e implementaciones posteriores.

b) Sobre la configuración didáctica ampliada

Drijvers y otros (2010) definen la configuración didáctica como la disposición de ciertos artefactos en el entorno de clase; o, en otras palabras, el escenario de enseñanza planteado por el profesor y los artefactos involucrados en este escenario. Entendemos que Trouche (2004) y Drijvers y otros (2010) crearon esta fase de la orquestación instrumental pensando en la tecnología como principal instrumento, pero nosotros, después de llevar a cabo esta investigación, queremos tomar en consideración el concepto de artefacto-instrumento en un sentido más amplio. En varios momentos del análisis de datos se ha podido percibir la importancia e influencia que puede tener la pizarra, la cual también puede ser considerada instrumento (Mariotti, 2012).

Por otra parte, la configuración didáctica para todos los problemas de esta investigación, ha sido la misma, lo cual nos hace replantear la adaptación metodológica de esta fase. Creemos que esta fase es necesaria, pero quizá, teniendo en cuenta cómo se ha diseñado la secuencia, no tiene sentido planteárselo para cada problema sino como configuración didáctica de la secuencia de problemas en general.

c) Sobre el modo de explotación

Según Drijvers y otros (2010) el modo de explotación es la forma en que el profesor decide usar la configuración didáctica, incluyendo decisiones sobre cómo se presentan y trabajan las tareas, los posibles roles de los artefactos y los esquemas o técnicas que pueden ser desarrolladas por los estudiantes.

Después de realizar el presente estudio, hemos observado varios aspectos interesantes que consideramos cruciales para la reestructuración de esta fase de la sistemática.

Para tomar decisiones sobre la forma de trabajar las tareas, se ha confirmado la funcionalidad cíclica del trabajo consistente en una comprensión individual de la tarea (I), un trabajo conjunto por parejas (P), una discusión en gran grupo (G) y, finalmente, una reflexión personal (R). Este ciclo de trabajo lo denominamos por el acrónimo (IPGR), que se relaciona con los ciclos de trabajo que también aplican Saxe y otros (2009) en su estudio.

Consideramos que el trabajo individual previo es fundamental para que todos los alumnos estén atentos al problema que se va a resolver por parejas, ya que de este modo, como mínimo durante un determinado intervalo de tiempo, han podido reflexionar sobre sus primeras ideas alrededor del problema. Algunos autores como Hershkowitz y Schwarz (1999) ya habían puntualizado que transmitir el pensamiento individual a un compañero durante el trabajo por parejas es un proceso purificado donde se evitan detalles sin importancia.

El trabajo en parejas es clave para que los alumnos resuelvan el problema. Así se ha visto evidenciado en muchos momentos del análisis de datos de la discusión en gran grupo. Por ejemplo, hay situaciones en que se ve que también en la discusión en gran grupo se mantiene una complicidad entre las parejas. Por otro lado, interpretamos que en muchos episodios se da una orquestación del tipo *Trabajo del sherpa* porque los alumnos exponen frente al grupo resultados o estrategias encontradas durante el trabajo en parejas.

Por otra parte, consideramos que es fundamental la discusión en gran grupo posterior al trabajo en parejas. Ha sido durante ésta que se ha podido profundizar en la resolución de los problemas. En el análisis de datos hemos comprobado que algunos alumnos se han dado cuenta de errores que habían cometido durante el trabajo en parejas, o simplemente que han podido plantearse cuestiones que no habían llegado a tratar.

En referencia a la necesidad de hacer este trabajo individual final donde se pedía a los alumnos que reflexionaran sobre el progreso matemático que habían realizado, estamos convencidos que es necesario incluirlo en el ciclo de trabajo. La reflexión personal sobre el progreso de uno mismo tras la discusión en gran grupo permite a cada alumno hacer su propio proceso de filtraje, y por lo tanto contribuye al proceso de aprendizaje de cada uno de los alumnos.

Hay que tener en cuenta que aunque presentemos en este orden el ciclo de trabajo, no tiene por qué ser invariante. Incluso en ocasiones, se pueden considerar variaciones dinámicas del orden o saltos en el tipo de trabajo.

La planificación del modo de explotación en los diferentes problemas se hizo tras haber hecho una prueba piloto y después de haber construido el árbol del problema, pero antes de haber generalizado de forma teórica los estadios de la discusión en grupo de un problema. Por el modo como se han sucedido las discusiones en gran grupo, pensamos que los estadios de la discusión hubieran sido una herramienta que habría facilitado la planificación del modo de explotación.

Finalmente, en la reestructuración de esta fase, consideramos que la última parte de la definición, donde se expresa la importancia de estudiar los esquemas o las técnicas que pueden ser desarrolladas por los estudiantes, puede evitarse. Esta parte está incluida en la fase de anticipación del problema, y por lo tanto en su árbol.

d) Sobre la monitorización

La monitorización, tal y como lo presentan Smith y Stein (2011), consiste en prestar atención al pensamiento matemático de los alumnos mientras trabajan en el problema para poder escoger en qué y en quién centrarse durante la discusión en gran grupo. Los autores también consideran importante hacer preguntas que ayuden a los alumnos a clarificarse, a establecer acuerdos en el grupo, a ser conscientes de su pensamiento…

Después de la realización de este estudio, proponemos usar el árbol del problema como instrumento didáctico para incorporar todos los posibles mensajes con el objetivo de tratar los aspectos arriba mencionados, y nos gustaría añadir también que es crucial que las preguntas puedan ayudar también a los alumnos a descubrir errores o a avanzar en la resolución del problema. Así, en el árbol queda representada de forma esquemática mucha de la información necesaria para tratar el problema. De todas formas no concedemos todo el mérito al árbol, ya que además hay que usarlo de un modo adecuado: el profesor no debe olvidar que únicamente está haciendo un andamiaje del aprendizaje del alumno, como defiende Anghileri (2006) en su artículo, y que sobre todo tiene que tener en cuenta los distintos procesos de aprendizaje de las diferentes parejas para dar atención a la diversidad de alumnos con los que puede encontrarse.

Por supuesto, además de realizar la monitorización teniendo en cuenta todos los aspectos que se han mencionado anteriormente, el profesor también debe tener desarrollada la habilidad de analizar el trabajo de los estudiantes para después poder hacer una buena selección de los aspectos que hay que tratar durante la discusión en gran grupo, lo que forma parte del conocimiento matemático específico y del horizonte matemático que tiene el profesor (Ball y Bass, 2009).

Otro aspecto que consideramos importante incluir en la reestructuración de la fase de monitorización es el hecho de tener en cuenta los artefactos que se están utilizando, las ayudas técnicas que los estudiantes puedan requerir y la capacidad de prever una posible mejora en el establecimiento de conjeturas, que puede ser facilitado por el *software* utilizado. Esto último lo hemos tenido en cuenta después de observar un uso diferente del *software* de geometría dinámica durante el trabajo por parejas respecto del trabajo durante la discusión en gran grupo. Durante el trabajo en parejas se ha evidenciado un uso del *software* para conjeturar y buscar soluciones, mientras que durante la discusión en gran grupo se le ha dado un uso más centrado en la comprobación de ciertas conjeturas.

e) Sobre la selección de situaciones

Smith y Stein (2011) presentan esta fase de selección como la selección de los alumnos para que muestren su trabajo durante la discusión en gran grupo en función de sus respuestas matemáticamente hablando. Una de las estrategias que proponen para llevar a cabo esta fase es pedir voluntarios pero escoger estratégicamente aquellos que interesa por el tipo de respuesta a la que sabemos que han llegado.

Después de este estudio, llegamos a la conclusión que no es fácil plantear una forma de llevar a cabo esta selección. Puede ser tan positivo que un alumno presente la solución correcta como que otro presente una solución incorrecta o incompleta. Hemos encontrado ejemplos para ilustrar ambas situaciones, y en ambos casos se resolvieron satisfactoriamente, por lo tanto, no podemos concluir con un resultado final, pero sí que puede ser un punto de reflexión antes de llevar a cabo futuras implementaciones.

Otra incorporación que proponemos en la definición de esta fase es que las situaciones que se traten durante la discusión en gran grupo no tienen por qué ser soluciones de los alumnos. Proponemos así, una selección de situaciones interesantes para trabajar durante la discusión en gran grupo que sirvan para establecer conexiones y tratar aspectos específicos relacionados con los objetivos del problema.

f) Sobre la secuenciación y la implementación didáctica

Durante la adaptación teórica de las fases de Smith y Stein (2011) y de Drijvers y otros (2010), decidimos respetar lo máximo posible las fases como cada uno de los autores las habían creado. A posteriori, después de la implementación y el análisis de este estudio, podemos ver cómo estas dos fases –la implementación didáctica y la secuenciación– tienen muchos puntos en común, lo que puede provocar un solapamiento entre ellas.

Smith y Stein (2011) presentan la secuenciación como una fase en la que es necesario usar diferentes aproximaciones a las estrategias de los alumnos para maximizar sus posibilidades de mejora. Se refieren, por ejemplo, a tratar las estrategias más comunes y posteriormente las menos usadas, o a hacer un tratamiento de las más concretas para dar paso a las más abstractas… Su objetivo es relacionar o contrastar las diferentes estrategias realizadas por los alumnos. También tienen en cuenta, como Drijvers y otros (2010), las decisiones *ad hoc* que deberá tomar el profesor por el elemento de incertidumbre de las acciones de los alumnos antes de llevar a cabo la discusión en gran grupo.

La implementación didáctica definida por Drijvers y otros (2010) es una fase caracterizada por su vertiente teórica en el sentido que es difícil una preparación concreta; así, su objetivo es que el profesor sea consciente del elemento de incertidumbre que existe al llevar a cabo una discusión en gran grupo aunque haya sido preparada de antemano. Como complemento de esta idea abstracta, Smith y Stein (2011) intentan de algún modo darle forma, incluyendo esta fase de preparación de lo que será la secuenciación de las intervenciones durante la discusión en gran grupo. Evidentemente, el nivel de preparación de la secuenciación, por lo que proponen Drijvers y otros (2010), no podrá llegar a ser totalmente determinista, lo cual tampoco creemos que sería bueno.

Así, nosotros proponemos la unión de estas dos fases en una sola fase que llamaremos *Secuenciación de la implementación didáctica*. Para la preparación de esta fase, consideramos que hay que tener en cuenta todas las fases estudiadas anteriormente, y además habrá que tener en cuenta los estadios de la discusión que han emergido de este estudio. Con esto y con la ayuda del árbol del problema elaborado, se pueden llevar a cabo discusiones en gran grupo efectivas desde el punto de vista de Sfard y Kieran (2001). Evidentemente, tenemos que recordar que partimos siempre del supuesto que el conocimiento matemático específico del profesor (Ball y Bass, 2009) es suficientemente elevado como para tener la habilidad de poder hacer diagnosis de los procedimientos de los alumnos durante las discusiones, no solo cuando éstos cometen errores, sino también cuando usan métodos no estándares o que no eran los esperados.

Sobre las conexiones

En este estudio hemos considerado la fase de conexiones de una forma muy amplia. Desde el punto de vista de Smith y Stein (2011), se entiende que la fase de conexión sirve para conectar las diferentes soluciones de los alumnos y para reforzar la idea de que no hay que exponer, únicamente, varias soluciones que hayan resuelto sino que hay que conectar las diferentes estrategias para tener discusiones matemáticas centradas en el desarrollo sucesivo de potentes ideas matemáticas. A nuestro entender, a lo largo de este trabajo hemos ido ampliando lo que considerábamos como conexiones. Aquello a lo que las autoras se refieren, nosotros lo hemos considerado como estadios de las discusiones en los que se contrastan las diferentes estrategias y soluciones de los problemas.

Por otro lado, desde el punto de vista de Ball y Bass (2009), se considera que dentro del conocimiento del horizonte matemático de un profesor, debe haber la habilidad de hacer conexiones con otras situaciones matemáticas para contribuir en el aprendizaje de los alumnos de diferentes prácticas matemáticas. Nosotros, también hemos tenido en cuenta esta idea como definición de conexiones dentro de los estadios del problema.

Durante el estudio se han detectado conexiones, como hemos podido ver en el análisis de datos (4.1.8.), durante las acciones de los participantes dentro de las discusiones en gran grupo, en las cuales ya se ha especificado que unas veces se hacían conexiones entre diferentes estrategias del mismo problema, otras veces se hacían conexiones con otros problemas de la secuencia, e incluso, en otras más se hacían conexiones con otros conceptos matemáticos que formaban parte del conocimiento del contenido común del profesor (Ball y Bass, 2009) en unos casos, y del conocimiento matemático previo de los alumnos en otros.

Con todo esto, queremos poner de manifiesto que no hace falta considerar las conexiones como una fase, sino que lo que algunos autores consideran como fase está, de hecho, presente en diferentes momentos de la sistemática y de las discusiones en gran grupo. Es por esto que esta reestructuración nos lleva a no considerar las conexiones como otra fase de la sistemática, ya que, a nuestro entender y como acabamos de explicar, se tratan en otros puntos.

Visión conjunta de los resultados de la evaluación de la implementación de la sistemática

Si nos fijamos en los resultados de forma global, podemos concluir que la sistemática ha sido implementada con éxito desde el punto de vista del profesor tras de la evaluación positiva que se ha realizado. Un factor que ha influido directamente en este éxito ha sido la aplicación de los instrumentos presentados que han facilitado la tarea de preparar alguna de las fases.

Por otra parte, se ha considerado oportuno en el análisis de datos evaluar la implementación de la sistemática mediante un instrumento externo a esta investigación. Con ello nos proponíamos que no pudiera pensarse que se había valorado positivamente la implementación de la sistemática por haber sido evaluada con unos parámetros no neutros. Así, tras la aplicación del instrumento TRU-Math (Schoenfeld, 2013), se ha evidenciado la valoración positiva que se ha obtenido en la mayoría de sus puntos. También ha servido para detectar algunas debilidades, que deberán tenerse en cuenta en futuras investigaciones de esta línea de trabajo, como por ejemplo el hecho de que el acceso a las discusiones no se pruebe para todos los estudiantes.

6.2 Resultados sobre las oportunidades de aprendizaje de los estudiantes

Recordemos que el segundo objetivo de la investigación consistía en *detectar oportunidades de aprendizaje de las isometrías y progresos matemáticos de los alumnos en el contexto de la secuencia didáctica creada a partir de la sistemática.*

Análogamente al apartado de resultados sobre la evaluación de la implementación de la sistemática, para realizar el análisis de datos se requirió de un instrumento de análisis adecuado. Este instrumento resultante deviene un resultado metodológico, que presentamos a continuación (6.2.1).

Tras el resultado metodológico, introducimos el resultado relativo a las oportunidades de aprendizaje detectadas en las discusiones. Además de este resultado, hemos obtenido otros resultados derivados de la aplicación de este instrumento a las discusiones en gran grupo. También presentamos estos resultados agrupados según la parte del instrumento del cual han surgido (6.2.2).

Finalmente, se muestran los resultados relativos al aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje por parte de los alumnos (6.2.3).

6.2.1 Detector de oportunidades de aprendizaje

Para el análisis de las discusiones en gran grupo y la posible detección de oportunidades de aprendizaje, hemos diseñado el instrumento 'Detector de oportunidades de aprendizaje'. Éste se estructura en tres partes (ver Tabla 61). En la primera, se organiza una sesión de clase en episodios, que se tabulan en estadios de la discusión y se valora el tipo de orquestación instrumental que se está llevando a cabo. Esta distribución de los episodios en una tabla de doble entrada deja entrever en qué orden se han sucedido, lo cual puede dar muestras de cómo se ha secuenciado la sesión de clase.

Partes del instrumento de análisis	Descripción
1.ª	Estructuración de la discusión en episodios según el tipo de orquestación y los estadios de la discusión.
2.ª	Estudio en profundidad de cada episodio: • Caracterización de las acciones de los participantes. • Representación de los conectores de influencia.
3.ª	Detección de oportunidades de aprendizaje de los estudiantes.

Tabla 61. Estructura del 'Detector de oportunidades de aprendizaje'

Esta primera parte permite visualizar cómo han actuado el profesor y los alumnos durante la sesión representada, según el tipo de orquestación, y cómo participan los alumnos. Puede servir para evidenciar si la clase se ha centrado en un modelo más participativo para los alumnos, o si la sesión se ha centrado en el profesor. A su vez, si nos fijamos en la variable de los estadios de la discusión en gran grupo del problema, observamos, gracias a la primera parte del instrumento de análisis, qué estadios se han trabajado y cuáles se han tratado más. En este caso, es difícil realizar una interpretación detallada de la situación por varios motivos que pueden haber influido en la distribución, como, por ejemplo, el tipo de problema que se está discutiendo, la motivación de los alumnos durante la sesión o una preparación previa del profesor limitada que puede provocar que no se traten algunos de los estadios.

Una vez realizada la tabla estructurada de los episodios, la segunda parte del instrumento de análisis consiste en estudiar en profundidad cada uno de ellos. Organizamos las intervenciones dentro del episodio diferenciándolas según el participante que realiza la intervención e indicando de qué tipo es cada acción. También se mantiene en la representación la sucesión temporal de las intervenciones. Una vez están secuenciadas las intervenciones o acciones de los participantes, representamos mediante segmentos orientados las posibles relaciones de influencia que puede haber entre unas y otras. Esta representación de cada episodio nos ofrece una visión de los aspectos que han sido más destacados del episodio y expone visualmente de qué manera la interacción entre los participantes que han llevado a cabo las acciones pueden haber generado oportunidades de aprendizaje, que posteriormente intentamos detectar.

Por último, la tercera parte del instrumento de análisis consiste en detectar posibles oportunidades de aprendizaje a partir de la interacción entre los participantes y sus acciones. Las oportunidades de aprendizaje que se detectan se clasifican según los tipos que se han establecido a partir del análisis de datos de este estudio.

Como veremos más adelante, en este trabajo se ha podido demostrar la operatividad del instrumento, ya que ha sido utilizado y aplicado para detectar oportunidades de aprendizaje, que es uno de los objetivos de esta investigación.

6.2.2 Oportunidades de aprendizaje en discusiones con tecnología

Después de la creación y la aplicación de este instrumento de análisis a los datos de la investigación, efectivamente se han detectado varias oportunidades de aprendizaje en cada uno de los episodios de las discusiones en gran grupo con tecnología.

De algún modo, este resultado, aunque es muy general, ayuda a valorar positivamente una parte del segundo objetivo de esta investigación. Recordemos que con este segundo objetivo nos proponíamos detectar oportunidades de aprendizaje durante las discusiones en gran grupo con tecnología, y efectivamente han podido detectarse gracias al instrumento que se ha creado a tal efecto.

Si bien el principal resultado de la aplicación de dicho instrumento ha sido encontrar un número satisfactorio de oportunidades de aprendizaje, consideramos que son importantes otros sub-resultados que han surgido de mirar con detalle la aplicación de cada una de las partes del instrumento. Puesto que son muchos los sub-resultados obtenidos, los hemos agrupado según el concepto que los caracteriza. Así, tenemos los resultados relativos a las estructuras de las discusiones, a las características de los problemas, a los episodios de las discusiones, a las acciones de los episodios y a las oportunidades de aprendizaje.

Estructuras de las discusiones en gran grupo

Tras aplicar la primera parte del instrumento a las discusiones en gran grupo y después de hacer la partición de los episodios y distribuirlos en la tabla de doble entrada según el tipo de orquestación y el estadio de la discusión que los definía, hemos observado que se producían varias situaciones generales que consideramos sub-resultados. A continuación presentamos la relación que se ha detectado entre el tipo de orquestación y el orden de tratamiento de los estadios de la discusión. Añadimos la reestructuración de los tipos de orquestación que se propone.

Relación entre el tipo de orquestación y el orden de los estadios de las discusiones

Hemos detectado que existe una relación entre los tipos de orquestación que se usan en una discusión y el orden de los estadios en dicha discusión. Por un lado, en las discusiones que hemos analizado, los estadios de la discusión no han seguido el orden establecido por la lista de la matriz, sino que ha habido saltos en varias ocasiones. Si nos fijamos en estos saltos, vemos que normalmente se deben a propuestas de los alumnos con las que reintroducen temas que se habían dado por cerrados o presentan nuevas ideas que todavía no habían sido tratadas sin dejar terminar el estadio que se trabaja en ese momento. Creemos que esta situación tiene relación directa con el hecho de que, en estas discusiones, la mayoría de orquestaciones detectadas han sido de los tres últimos tipos (*Discusión de pantalla*, *Descubrir y mostrar* y *Trabajo del sherpa*), que están más centradas en los alumnos.

Por otro lado, sostenemos la siguiente hipótesis: cuando los tipos de orquestación usados son los primeros, más centrados en el profesor (*Demostración técnica*, *Explicación de la pantalla* y *Conexión pantalla-pizarra*), el orden de los estadios de la discusión tiende a secuenciarse según el orden en el que aparecen en la tabla. Teniendo en cuenta que en estos casos es el profesor el que lleva el peso de la orquestación de la discusión, es razonable pensar que también puede guiar a los alumnos hacia los estadios que quiere discutir.

Así, si se pretende que los alumnos sean los protagonistas de su propio aprendizaje, el profesor tiene que mantener de algún modo una actitud abierta a dejar que las discusiones fluyan, lo que a veces provoca que las discusiones sean un poco desordenadas. No debe olvidarse tampoco que, de hecho, durante una discusión en gran grupo el profesor intenta hacer grandes procesos de filtraje (Sherin, 2002), consistentes en la generación de ideas, la comparación de unas con otras y su posterior filtraje. Así, a pesar del desorden de los episodios en los distintos estadios de los problemas, analizados a grandes rasgos desde un punto de vista externo, podemos observar cómo siguen su propio orden para realizar un proceso de filtraje entre todas las ideas de los alumnos.

Por otro lado, aunque en las discusiones no se han seguido linealmente los distintos estadios, a medida que los alumnos mejoran su auto-gestión, adquieren habilidades que les permiten actuar como profesores y entienden cada vez mejor la importancia de que la discusión siga un guión más o menos ordenado. Aunque se den saltos en el orden de tratamiento de los estadios, es importante mantener la línea argumental dentro de cada estadio hasta que se considera que se puede cambiar de estadio.

Reestructuración de los tipos de orquestación

Durante la implementación de la primera parte del análisis de las discusiones en gran grupo, no encontramos ningún episodio que se centrase en hacer una demostración técnica del *software* de geometría dinámica. Para esta investigación, se había trabajado con el *software* de geometría dinámica escogido en una secuencia de geometría básica anterior a la de isometrías para que los alumnos estuvieran familiarizados con el programa. Aunque en distintos momentos de las diferentes discusiones en gran grupo hay intervenciones tanto del profesor como de los alumnos para realizar alguna precisión técnica acerca del *software*, no lo consideramos como un tipo de orquestación, sino como un uso específico del programa dentro de la discusión en gran grupo.

Este sub-resultado puede hacernos reflexionar sobre la naturaleza de este tipo de discusión. Aunque al definir este tipo de orquestación, Drijvers y otros (2010) lo plantean como si estuviese centrado en el profesor, según los datos de esta investigación –dejando a un lado que el profesor no destina explícitamente tiempo de la discusión a hacer demostraciones técnicas–, cuando surgen en la discusión son generalmente los alumnos los que los lideran.

Además de la reflexión que planteamos sobre el protagonista de la acción, consideramos que la naturaleza de una demostración técnica, si un profesor la quisiera plantear de esta forma, se parece más a un estadio de la discusión donde se está realizando una actividad relacionada con la resolución del problema, que no que el profesor esté realizando otro estadio de la discusión mediante una demostración técnica.

Esta contraposición entre nuestro resultado y los que presentan los autores mencionados en su artículo, puede deberse a la elección del instrumento, ya que, dependiendo de lo intuitivo que sea su uso para los alumnos, puede influir en la necesidad de tener que hacer demostraciones técnicas del artefacto.

Los problemas

Se han detectado unos resultados generales que consideramos relevantes. Desde el punto de vista matemático, las actividades involucradas en la resolución de problemas tienen relevancia. Desde el punto de vista pedagógico, se ha observado que eran actividades instructivas que fomentaban la realización de actividades matemáticas. Esto nos lleva a conjeturar sobre las características de la implementación de estos problemas.

Relación entre la riqueza de los problemas y los estadios de la discusión

Aunque no confirmamos la doble implicación del título anterior, sí que hemos observado que los problemas de esta investigación han sido ricos (Hershkowitz y Schwarz, 1999) ya que se han generado unas discusiones muy provechosas a partir de su planteamiento en las que se han detectado muchas oportunidades de aprendizaje, como veremos más adelante. Uno de los factores que creemos que ha sido determinante es que los problemas abarcan varios estadios de la discusión. Por ejemplo, algunos problemas admiten distintas soluciones o estrategias de resolución, lo que ha fomentado que éstas se pudieran contrastar unas con otras. Además, son problemas que invitan a hacer conexiones entre ellos y con situaciones matemáticas externas. Desde un punto de vista más general, también podemos observar que todos aceptan generalizaciones de los distintos casos particulares que pueden tenerse en cuenta.

Por eso, nuestra hipótesis es que si, antes de empezar, pueden detectarse varios estadios que se podrían tratar, esto puede ser una garantía de que el problema puede ser rico desde un punto de vista argumentativo matemáticamente. Por el contrario, si a priori un problema no presenta varias soluciones o distintas estrategias de resolución, o su resolución es muy concreta y no presenta casos particulares ni generalizaciones, lo más probable es que su discusión no sea tan rica, aunque tras un estudio por parte del profesor, o tras una implementación con alumnos, podría ser que todos estos puntos estuvieran escondidos y que pudiera transformarse en un problema rico para discutir en clase.

La tecnología como elemento transformador de ejercicios en problemas

Después del análisis detallado de las discusiones en gran grupo, ponemos de manifiesto cómo, en distintos momentos de la discusión, la tecnología se ha convertido en un elemento mediador. Ésta ha influido en gran medida en las discusiones de los participantes. En innumerables episodios, el objeto de la discusión estaba centrado en la argumentación de las ideas de los alumnos, ya que éstos podían apoyarse en comprobaciones realizadas con la tecnología con un grado de precisión que no hubiera sido posible conseguir si la resolución de los mismos problemas se hubiera llevado a cabo con lápiz y papel. En el primero de ellos, por ejemplo, no se hubieran podido detectar los errores de precisión de uno de los puntos de las figuras, y en lugar de convertirse en un problema rico, no habría sido nada más que un ejercicio de identificación visual. En el segundo, seguramente no se podría haber hecho un tratamiento dinámico de todos los posibles casos particulares, y probablemente solo se habría resuelto el caso planteado en el enunciado, con lo cual el problema se habría reducido al mero ejercicio de aplicar las propiedades de los giros y su conexión con las mediatrices definidas como lugar geométrico de los puntos que están a la misma distancia de dos otros puntos dados. Finalmente, en el tercer problema, consideramos que hubiera sido difícil comprobar las conjeturas de los alumnos. Por todo ello, concluimos que la tecnología puede tener un papel importante para poder convertir meros ejercicios en problemas.

Los episodios de las discusiones

Presentamos a continuación algunas tipologías de episodios que se han detectado comparando aquellos que formaban parte de un mismo estadio de la discusión. Hemos separado los episodios por estadios, y de algunos de ellos —*Situación del problema, Presentación de una solución, Estudio de estrategias, Establecimiento de conexiones*— se han detectado algunos patrones.

Sobre la situación de los problemas

Los cuatro episodios que se han caracterizado en todo el análisis de datos como 'Situación del problema' (e_1, e_{27}, e_{34} y e_{55}) coinciden en algunos aspectos: son episodios cortos, protagonizados básicamente por el profesor, y consisten en una recapitulación de los rasgos más importantes que planteaba el problema para empezar con su discusión.

En general, se trata siempre del primer episodio de la discusión de cada problema, excepto en el Episodio 34 (Problema 2), en el cual es una alumna quien propone otra pregunta para el problema y sitúa la discusión en el estadio de casos particulares del problema.

Sobre la presentación de una solución

En el análisis de todas las discusiones se han detectado siete episodios que han sido incluidos en el estadio de *Presentación de una solución*. La mayoría de ellos tienen una característica en común: todos empiezan con una petición de la solución por parte del profesor, y terminan con una petición de formalización o de argumentación.

Estas características se deben a que, después del planteamiento del problema, los alumnos esperan a que el profesor seleccione al alumno que va a presentar su solución, por lo tanto, en la mayoría de los casos esperan una petición de la solución por parte del profesor. La coincidencia en el desarrollo de la parte final, en la que el profesor pide la formalización o argumentación del problema, se debe a que la mayoría de las veces los alumnos presentan sus soluciones mediante exposiciones sin argumentación y, normalmente, no siguen hasta que el profesor hace una petición explícita para que continúen con su presentación. De todos modos, hemos observado que a medida que se iban sucediendo las discusiones, los alumnos han ido añadiendo las propiedades de su solución, es decir, su formalización, como por ejemplo en el Episodio 62 (Problema 3). Es por esta razón que intuimos un progreso en la auto-gestión de la participación en las discusiones en gran grupo.

Respecto al tipo de orquestación utilizado en los episodios en los que se presenta una solución, en la mayoría de los casos es el trabajo del sherpa el que predomina, ya que después de la petición de solución del profesor, suele ser un alumno o una pareja quien expone la solución encontrada durante el trabajo por parejas.

Sobre el estudio de diferentes estrategias

Durante el análisis de las discusiones en gran grupo de los problemas seleccionados para este estudio, se han identificado 20 episodios con los cuales realizar el estudio de estrategias. Si nos fijamos en todos estos episodios, observamos que ocho de ellos utilizan el tipo de orquestación de *trabajo del sherpa* (e_3, e_5, e_{12}, e_{13}, e_{17}, e_{23}, e_{25} y e_{29}). En general, esto ocurre porque presentan estrategias que han trabajado con sus compañeros durante el trabajo en parejas, y por tanto son ellos los protagonistas en la discusión en gran grupo para compartir sus ideas. También hemos detectado que durante estos episodios, utilizan la tecnología como soporte visual para el resto de los compañeros. No consideramos, por lo tanto, que sea relevante el dinamismo del *software*, ya que lo utilizan de manera estática, únicamente para presentar sus ideas delante de la clase.

Los episodios que se han identificado como *explicación de la pantalla* (e_4, e_6, e_9, e_{15}, e_{51}, e_{57} y e_{63}) y *descubrir y mostrar* (e_{24} y e_{50}) se deben, según lo que hemos observado, a que es necesario ampliar las presentaciones de los compañeros que han expuesto lo que habían trabajado en parejas, y que por lo tanto es necesario construir el conocimiento durante las discusiones en gran grupo. Nueve han sido los episodios con estas características y hemos observado que el uso de la tecnología ha tomado, en estos casos, un enfoque diferente. Puesto que en estas situaciones, normalmente, los alumnos están pensando durante la discusión, utilizan la tecnología para comprobar o refutar sus ideas y poder elaborar justificaciones empíricas.

Finalmente, se han detectado tres episodios en los que el tipo de orquestación utilizado ha sido *explicación de la pantalla* (e_{53}, e_{58} y e_{64}), y en los tres se han dado justificaciones deductivas. Este hecho lo interpretamos positivamente, ya que cuando durante la discusión se estudian nuevas estrategias para argumentar un problema, normalmente se hacen justificaciones empíricas, pero cuando el conocimiento durante la discusión en gran grupo se eleva, los alumnos son capaces de hacer justificaciones deductivas donde el uso de la tecnología vuelve a ser anecdótico en el sentido de la argumentación, y retoma el valor de visualizador para el resto de los compañeros.

Así, podemos concluir que existe una relación entre las orquestaciones y el uso que se hace en cada momento de la tecnología. A continuación veremos, más concretamente, que también se han detectado diferentes usos de la tecnología según el tipo de deducciones. Por un lado, los alumnos usan la tecnología para comprobar y poder hacer justificaciones empíricas, mientras que, por otro lado, la usan como herramienta de apoyo en sus explicaciones cuando se trata de hacer justificaciones deductivas.

Siguiendo con otras observaciones que se han realizado en los episodios en los que se hacen estudios de estrategias, podemos afirmar que la mayoría de ellos no finalizan con una validación por parte del profesor —como si que ocurría después de que los alumnos presentaran sus soluciones—, sino que normalmente siempre se hace algún comentario para que los alumnos mejoren, reflexionen, o profundicen sobre el tema que se está discutiendo.

Como ya hemos comentado anteriormente, la elaboración de los estadios de la discusión de un problema fomenta que se lleven a cabo grandes procesos de filtraje, y normalmente, en particular en los episodios en los que se lleva a cabo un estudio de las estrategias para resolver o argumentar un problema, se están generando ideas y comparándolas. De todos modos, hemos detectado algunos episodios en los que se da un proceso de filtraje completo (Sherin, 2002). Por ejemplo, vemos en el Episodio 51 cómo se establece una conjetura, posteriormente se realiza una comprobación empírica, que se verifica que es errónea y por eso se presenta una refutación, y a continuación se hace una recapitulación para establecer finalmente un consenso. Así, vemos cómo se han presentado ideas y se han contrastado, y finalmente se ha hache un filtraje para que todos los alumnos participaran en el consenso.

Sobre las conexiones

En los ocho episodios de conexiones que hemos detectado, se han identificado todos los tipos de orquestación excepto las demostraciones técnicas, como ya se ha especificado anteriormente.

En general, podemos decir que ninguna de las conexiones que se han realizado durante las discusiones no había sido trabajadas durante el trabajo en parejas, excepto una. Así, constatamos que se ha hecho uso, en general, de todas las orquestaciones; la de *trabajo del sherpa*, que como hemos comentado anteriormente se acostumbra a usar para presentar una idea que había sido trabajada durante el trabajo por parejas, la relacionamos con esta conexión que había surgido del trabajo en parejas de dos alumnos con la cual presentan una nueva propiedad que no se había tenido en cuenta en la anticipación del problema (e_{33}).

En relación con esta situación, hemos notado que algunas conexiones se habían anticipado, y a pesar de que no todas ellas se han tratado en las discusiones en gran grupo, en cambio sí que se han tratado otras que no habían sido anticipadas previamente. Esto lo valoramos positivamente porque da muestras de que los alumnos que trabajan colaborativamente también pueden jugar el rol de orquestadores (Ellis, 2011) y pueden influir sobre los aspectos que se traten durante la discusión.

Queremos poner de manifiesto, también, que este tipo de episodios no se ha dado en todos los problemas. Por ejemplo, en el segundo apartado del primer problema y en el tercer problema, no se han detectado episodios de conexiones, lo cual no quiere decir que no se hayan hecho conexiones consideradas como acciones, como se ha podido ver en el análisis específico de las conexiones en el apartado 4.1.8.

Acciones de los episodios

Como sugiere el instrumento de análisis detallado anteriormente, todas las acciones de los participantes durante las discusiones en gran grupo fueron clasificadas según si eran Intervenciones didácticas (D-I), Intervenciones de pensamiento matemático (TM-I) o Usos del *software* de geometría dinámica (DGS-U).

Hay que señalar que la mayoría de las acciones se han podido clasificar siguiendo estas tres categorías, aunque algunas no se han podido incluir en esta clasificación debido a su bajo componente discursivo o matemático. En otros casos, se han agrupado intervenciones para poder analizar la acción de una forma global.

Como ya se ha detallado durante el análisis de los episodios en las tablas de las intervenciones, además de clasificar las acciones en estos tres grandes grupos, hemos interpretado el sentido de cada una de ellas. Esta clasificación de aproximadamente 600 intervenciones determina los tipos de acciones que han emergido del análisis, que hemos clasificado como mostramos en los sub-resultados siguientes.

Como en casos anteriores y para cada una de las tres categorías, hemos encontrado tres sub-resultados destacados: tipologías de intervención didáctica, de intervención de pensamiento matemático y de uso del programa de geometría dinámica. A su vez, detallamos otros sub-resultados de estos, que también consideramos relevantes.

Tipologías de intervención didáctica (D-I)

Después de analizar todas las discusiones en gran grupo, hemos observado que las intervenciones didácticas no solo han estado llevadas a cabo por el profesor, sino que en varias ocasiones los alumnos también han hecho intervenciones didácticas.

En el marco de esta investigación, se han detectado un cierto tipo de intervenciones didácticas que se presentarán a continuación. Creemos que sería interesante para futuras investigaciones que se pudiera contrastar este resultado con otras discusiones en gran grupo orquestadas por profesores distintos, ya que creemos que la diversidad de acciones detectadas podría aumentar.

Entre todas las intervenciones didácticas que se han detectado, se han identificado cuatro grandes tipologías y cada una de ellas incluye acciones distintas. Según nuestra clasificación, el primer tipo lo conforman las intervenciones de gestión de los alumnos en clase, relativo al control del comportamiento y la atención de éstos. Algunas de estas acciones son *Invitación a la participación* o *Petición de atención*.

El segundo tipo de intervenciones didácticas son aquellas que sirven para gestionar la discusión, como por ejemplo *Recapitulaciones* o *Establecimientos de consenso*. El tercer tipo se centra, más específicamente, en la gestión de las discusiones matemáticas, como por ejemplo las *Validaciones*, las *Peticiones de formalización, de argumentación, de generalización*, las *Correcciones de vocabulario matemático* o las *Formalizaciones y aclaraciones*. Y por último, las acciones en las que se ha detectado a los alumnos actuando de profesores, realizando intervenciones didácticas.

Para representar estas tipologías detectadas de forma esquemática, en la Tabla 62 hemos resumido las acciones distribuidas por tipos y además incluimos la frecuencia de aparición en las discusiones en gran grupo que se han analizado.

INTERVENCIONES DIDÁCTICAS (D-I)		
Gestión de clase	Invitación a la participación	≅ 25
	Petición de atención	≅ 5
Gestión de la discusión	Recapitulación	≅ 40
	Establecimiento de consenso	≅ 40
Gestión de la discusión matemática	Petición de formalización, de argumentación, de explicación, de generalización, de conexión, de comprobación	≅ 80
	Validación	≅ 75
	Invitación a la generalización, a la búsqueda de alternativas, a la formalización, a la reflexión	≅ 50
	Ampliación o complemento de la explicación	≅ 15
	Formalización o aclaración	≅ 10
	Corrección de vocabulario matemático o de procedimiento matemático	≅ 5
Participación de los alumnos como profesor	Validación	≅ 5
	Aclaración	≅ 5
	Complemento de la explicación	≅ 5
	Refutación o contraste de la solución	≅ 5

Tabla 62. Tipos de intervención didáctica y su frecuencia

Si nos centramos en la frecuencia de aparición de los diferentes tipos de intervenciones didácticas que se han detectado, podemos encontrar una respuesta a la contradicción que, hasta ahora, se podía pensar que habíamos obtenido. Por un lado, por el tipo de episodios que se han detectado en el análisis de las discusiones en gran grupo, se había concluido que las discusiones analizadas estaban centradas mayormente en los alumnos. Por otra parte, en cambio, detectábamos una alta participación del profesor en los episodios. Visualmente, las intervenciones de color morado en las interpretaciones de las acciones en los episodios nos podían dar esta impresión.

Una vez analizados los tipos de intervenciones didácticas, nos damos cuenta de que la mayoría de acciones que utiliza el profesor son para gestionar la discusión desde un punto organizativo y matemático; ahora bien, si miramos más detalladamente las acciones, muchas consisten en hacer peticiones a los alumnos, para que sean ellos los que realicen las prácticas matemáticas.

Hemos detectado, además, esta diferencia entre hacer peticiones y hacer invitaciones, lo que también va en la línea del resultado obtenido. Muchas veces, el profesor únicamente invita a que los alumnos hagan lo que él propone, aunque siempre dejando abierta la posibilidad de elección de los alumnos. Así, podemos afirmar que por el tipo de acciones que lleva a cabo el profesor, aunque su participación en las discusiones sea elevada, éstas siguen estando centradas en los alumnos.

Tipologías de las intervenciones de pensamiento matemático (TM-I)

Las intervenciones de pensamiento matemático están mayormente protagonizadas por los alumnos, aunque como hemos visto en el apartado anterior, el profesor actúa a veces como alumno como estrategia didáctica. Después del análisis, centrándonos en el tipo de intervenciones de pensamiento matemático y la frecuencia de sus apariciones, podemos detectar cuáles pueden ser las debilidades discursivas y matemáticas de los alumnos durante las discusiones.

Por ejemplo, se ha detectado un gran número de exposiciones de los alumnos sin argumentación. Aunque se han dedicado esfuerzos para que ellos se den cuenta de la importancia de argumentar sus intervenciones, la gran cantidad de intervenciones de este tipo pone en evidencia que se trata de una competencia que como grupo clase todavía no se ha adquirido.

Por otro lado, el hecho de que los alumnos hayan realizado bastantes deducciones empíricas y deductivas, hayan hecho esfuerzos para formalizar sus ideas y hayan realizado conjeturas y búsquedas de alternativas, pone de manifiesto que los alumnos tienen un nivel aceptable en competencias matemáticas que se presentan en los currículos, como razonar matemáticamente o plantearse y resolver problemas. Así, las intervenciones de pensamiento matemático (TM-I) nos ayudan a detectar debilidades y potencialidades en las competencias de los alumnos. En la Tabla 63 representamos las acciones detectadas. En este caso hemos detectado tres tipos de intervenciones de pensamiento matemático. El primer tipo son aquellas acciones que van en la línea de colaborar en la construcción conjunta del conocimiento. Algunos ejemplos son los *Asentimientos* o las *Peticiones de aclaración*.

El segundo, todas aquellas acciones que van dirigidas a construir matemáticamente el conocimiento. Algunos ejemplos son las *Exposiciones sin argumentación*, las *Observaciones de evidencias empíricas y conjeturas*, la *Búsqueda de alternativas* o la *Formalización*.

Por último, el tercer tipo de intervenciones didácticas está compuesto por aquellas en las que el profesor hace el papel de alumno, y realiza acciones como podrían ser las *Justificaciones empíricas o deductivas* (Marrades y Gutiérrez, 2000), *Conexiones* o incluso la *Búsqueda de alternativas*.

INTERVENCIONES DE PENSAMIENTO MATEMÁTICO (TM-I)		
Colaboración discursiva	Asentimiento	≅ 35
	Petición de aclaración	≅ 15
Discusión matemática	Exposición sin argumentación	≅ 75
	Justificaciones empíricas y deductivas	≅ 40
	Observación de evidencias empíricas y conjeturas	≅ 35
	Búsqueda de alternativas	≅ 25
	Formalización	≅ 15
	Tratamiento de casos particulares	≅ 10
	Conexiones	≅ 10
	Uso de vocabulario específico	≅ 5
Participación del profesor como alumno	Justificación empírica o deductiva	≅ 5
	Conexión	≅ 5
	Búsqueda de alternativas	≅ 5

Tabla 63. Tipos de intervención de pensamiento matemático y su frecuencia

Aunque en la representación anterior (Tabla 63) hemos unido todas las justificaciones sin importarnos de qué tipo eran, un análisis detallado de éstas nos ha llevado a observar que, a medida que avanzan las discusiones, disminuyen las justificaciones empíricas y aumentan las deductivas. Este resultado lo podemos interpretar de dos formas que de algún modo se complementan.

Para visualizar mejor el resultado que planteamos, hemos representado los datos en la Tabla 64. En ella podemos ver cómo el número de justificaciones empíricas y deductivas es aproximadamente el mismo, pero si nos fijamos en la evolución separando los datos por problemas, vemos que, a medida que avanzan las discusiones en gran grupo, las justificaciones empíricas disminuyen y las deductivas aumentan.

	P1	**P2**	**P3**	**TOTAL**
Justificaciones empíricas	12	6	3	21
Justificaciones deductivas	2	6	11	19

Tabla 64. Detalle de las frecuencias de las justificaciones

Para interpretar estos resultados, hacemos referencia a dos ideas. Por un lado, podríamos afirmar que los alumnos están haciendo un progreso y que a lo largo de las discusiones han reforzado la idea de que es importante basarse en argumentaciones deductivas. Por otro lado, también podemos interpretar que los tipos de justificaciones van relacionadas con el tipo de problema que se está resolviendo y que por ello cada uno tiene un tipo de distribución.

Después de haber trabajado profundamente con los problemas y con los alumnos, proponemos una combinación de estas dos interpretaciones. Por un lado los problemas iban aumentando de nivel argumentativo y por otro lado, los alumnos también han ido mejorando su habilidad argumentativa a lo largo de las sesiones.

Como hemos visto en los apartados anteriores, en algunos momentos, aunque son escasos, los alumnos realizan acciones de profesor realizando intervenciones didácticas. Esto podría entrar en contradicción con la definición de los tipos de orquestación de Drijvers y otros (2010), sin embargo, está de acuerdo con Ellis (2011), que sostiene que no solo el profesor debe realizar las intervenciones didácticas.

Por un lado, las definiciones de los tipos de orquestaciones de Drijvers y otros (2010) mencionan explícitamente que las demostraciones técnicas, las explicaciones de la pantalla y las conexiones de pantalla-pizarra son realizadas por el profesor, y que por lo tanto las orquestaciones de este tipo están centradas en el profesor. Por otro lado, vemos que algunas veces los alumnos también actúan como profesores, y eso nos hace replantear las definiciones. Pensamos que es acertado revisar las definiciones y no imponer que éstas tengan que ser protagonizadas por los profesores.

En el resultado planteado anteriormente sobre el análisis de las acciones del profesor, ya se ha visto cómo sus intervenciones ayudan a los alumnos a que sean los protagonistas de las discusiones. De este modo, podemos considerar la actuación del profesor como un ejemplo de buen andamiaje que puede ayudar al progreso matemático de los alumnos. Sin embargo, queremos tener en cuenta la idea de Ellis (2011) que sostiene que los propios alumnos también pueden llevar a cabo el andamiaje, como ocurre en varias intervenciones de las discusiones estudiadas.

Tipologías del uso del *software* de geometría dinámica (DGS-U)

Los usos que se le ha dado a la tecnología durante las puestas en común son distintos, pero en ningún caso se ha detectado el uso de la tecnología para hacer conjeturas. En cambio, durante el trabajo en parejas, este uso ha sido el más extendido, como hemos podido documentar en este estudio. Así, afirmamos que el uso del *software* de geometría dinámica (DGS-U) en las discusiones en gran grupo tiene una naturaleza distinta que durante el trabajo en parejas.

Un motivo de ello puede ser la accesibilidad del instrumento por parte de todos los estudiantes durante el trabajo en parejas, y la dificultad de acceder al instrumento durante las discusiones en gran grupo. Aunque el profesor y los alumnos hayan creado un ambiente de trabajo agradable y distendido en el sentido que hay libertad para participar activamente en la discusión, la distribución física del ordenador no da pie al uso inmediato por parte de todos los estudiantes.

Además, si nos fijamos en la frecuencia de uso de cada acción, observamos que no solo la naturaleza de estas acciones son diferentes que en el trabajo por parejas, sino que, además, el número es muy inferior al uso de intervenciones de pensamiento matemático (TM-I) o de intervenciones didácticas (D-I). Consideramos que esta disminución entre las intervenciones de un tipo y del otro es natural, y creemos que es importante que sea así para una discusión colectiva donde lo esencial siguen siendo las intervenciones de los participantes, y en la que la tecnología tiene un papel secundario pero necesario, como veremos más adelante.

Después del estudio en detalle de los diferentes usos que se le ha dado al *software* de geometría dinámica en las discusiones en gran grupo analizadas, se han identificado tres tipos.

El primero estaría formado por todas las acciones que están relacionados con el aprendizaje técnico del instrumento, y por lo tanto que fomentan el proceso de instrumentación. En este tipo podemos incluir las demostraciones técnicas presentadas por Drijvers y otros (2010), que como hemos comentado anteriormente, en las discusiones analizadas no ha sido pertinente considerarlo como tipos de orquestación de los episodios sino como acciones dentro de ellos.

Otro tipo de uso que le han dado los participantes ha sido como soporte visual en el que apoyar sus explicaciones. Queremos hacer notar que las acciones de este tipo tienen una naturaleza diferente que las otras, porque están usando el instrumento sin utilizar las propiedades dinámicas ni geométricas en muchos casos, es decir, no van relacionadas con el tipo de artefacto-instrumento que se considere.

Por último, un tercer tipo de usos del *software* de geometría dinámica es el relacionado con la comprobación de hipótesis planteadas por los alumnos durante la discusión. En este punto es donde, relacionándolo con el resultado anterior, se ha detectado que el uso matemático era diferente durante el trabajo por parejas. De algún modo, este tipo de usos serían los que fomentarían la instrumentalización, ya que es lo que te aporta el *software* en la creación del pensamiento matemático.

A continuación (Tabla 65) hemos representado las acciones relacionadas con el uso del *software* detectadas en las discusiones en gran grupo para poder visualizar su distribución en los tres tipos identificados.

USOS DEL *SOFTWARE* DE GEOMETRÍA DINÁMICA (DGS-U)		
Instrumentación	Obstáculo tecnológico	≅ 20
	Demostración técnica	≅ 15
	Petición de aclaración técnica	≅ 10
	Aclaración técnica	≅ 10
Instrumentalización	Comprobación de una propiedad que se está cuestionando	≅ 10
Soporte visual	Complemento de la explicación	≅ 10
	Construcción aclaratoria	≅ 10

Tabla 65. Tipos de uso del *software* de geometría dinámica y su frecuencia

Nos gustaría comentar nuestra interpretación sobre la acción de este tipo más frecuentada de las detectadas en todas las discusiones en gran grupo. Los obstáculos tecnológicos son, de alguna forma, unas acciones un poco peculiares. No son acciones realizadas por ninguno de los participantes, podríamos decir que son acciones generadas por el *software* pero que afectan directamente a los participantes, por eso las hemos clasificado dentro de las acciones relacionadas con los usos de *software* de geometría dinámica.

Al fijar nuestra atención en estas situaciones, hemos detectado que normalmente van acompañadas de demostraciones o aclaraciones técnicas, y, en la mayoría de los casos, de una búsqueda de alternativas o de un replanteamiento de la situación por parte de los estudiantes. Es por eso que consideramos que el hecho de encontrarse con obstáculos tecnológicos en las discusiones en gran grupo es una forma de fomentar también el pensamiento matemático de los estudiantes.

Como implicación didáctica, queremos hacer notar que, en muchas ocasiones, los obstáculos tecnológicos son salvados por los propios estudiantes, cosa que demuestra que no es necesario que los profesores dominen totalmente todos los aspectos técnicos de un *software* para poder utilizarlo en las clases.

Oportunidades de aprendizaje de los episodios

Tras la interpretación de las acciones de los participantes de cada episodio, y la representación de éstas mediante conectores de influencia, hemos detectado las oportunidades de aprendizaje relativas a cada episodio. Las oportunidades de aprendizaje que se han detectado han sido de muchos tipos y han sido fomentadas por interacciones ente todos los participantes de la discusión y la tecnología. En este sentido todas ellas se han considerado como estímulos externos (Planas e Iranzo, 2009) para el progreso matemático de los alumnos.

Se han podido detectar alrededor de 200 oportunidades de aprendizaje. Por un lado, podríamos aceptar que las discusiones han sido eficaces (Sfard y Kieran, 2001) desde el punto de vista del profesor, ya que se han generado muchas oportunidades de aprendizaje para los alumnos. Sin embargo, hay dos puntos que pueden fallar en esta asunción.

Por un lado, como ya hemos comentado anteriormente, faltaría ver si las oportunidades que se han detectado han sido aprovechadas por los alumnos. Esto lo veremos más adelante en este capítulo. El otro punto importante es que aún no se ha analizado la validez de estas oportunidades de aprendizaje y su interés en el contexto que nos encontramos de enseñanza-aprendizaje de las isometrías.

Para ello, hemos realizado una clasificación de las oportunidades de aprendizaje y se ha establecido una relación con las competencias que dictamina el currículo, para evidenciar la correspondencia entre ellas. A continuación mostramos los resultados obtenidos acompañados de algunos sub-resultados que consideramos relevantes.

Durante el análisis de las oportunidades de aprendizaje, nosotros habíamos adoptado la clasificación de éstas según si eran oportunidades de aprendizaje de auto-gestión, de procesos o de conceptos. Esta clasificación era una adaptación del marco de Schoenfeld (1992), en el que el autor propone el conocimiento base, las estrategias de resolución de problemas, la auto-regulación y los sistemas de creencias. Desde nuestro punto de vista, las oportunidades de aprendizaje que se dan en una discusión en gran grupo son de los tres primeros tipos.

En el currículo, las competencias también están separadas según los contenidos específicos de las isometrías, las competencias procedimentales de matemáticas y las competencias generales.

Tras la representación conjunta de las competencias y las oportunidades de aprendizaje, se ha evidenciado que hay una correspondencia entre las categorías previamente diseñadas de competencias y de oportunidades de aprendizaje como hemos evidenciado en el apartado de 'Análisis de la correspondencia entre oportunidades de aprendizaje detectadas y competencias curriculares' del Capítulo 5 (5.2.1).

Así, podemos concluir que las oportunidades de aprendizaje detectadas en las discusiones en gran grupo de esta secuencia de problemas son interesantes desde el punto de vista de las competencias requeridas por el currículo. Si además se observa un aprovechamiento de estas oportunidades por parte de los alumnos, las discusiones en gran grupo estudiadas se podrán considerar productivas (Sfard y Kieran, 2001).

Presentamos un resumen de estas competencias relacionadas con las oportunidades de cada tipo. Primero, las competencias generales con las oportunidades de gestión; luego las competencias procedimentales con las oportunidades de proceso; y posteriormente, las competencias específicas con las oportunidades de concepto. Acabamos con una visión conjunta de todas las oportunidades de aprendizaje detectadas.

Sobre las oportunidades de aprendizaje de gestión

En la Tabla 66 se muestra un resumen de las competencias generales relacionadas con las oportunidades de aprendizaje de gestión detectadas. En la columna de la derecha se muestra la frecuencia con que se han detectado oportunidades de aprendizaje de cada competencia.

COMPETENCIAS GENERALES – OPORTUNIDADES DE GESTIÓN		
Tratamiento de la información	Entender la información matemática de un problema contextualizado.	1
Competencia digital	Tener en cuenta la consistencia de las construcciones y la precisión del *software*, pensando formas de evitar un obstáculo tecnológico, cuando es necesario.	7
Autonomía e iniciativa personal	Completar las respuestas, hacer aportaciones, comprobaciones y auto-correcciones sin esperar la petición del profesor.	10
Aprender a aprender	Entender que las argumentaciones requieren tiempo de reflexión y que es importante preguntar las dudas conceptuales y técnicas.	10
La comunicación lingüística	Entender la necesidad de visualizar, argumentar y generalizar las explicaciones matemáticas y expresarse con claridad haciendo uso del lenguaje matemático apropiado.	30
Competencia social y ciudadana	Seguir la estructura de la clase priorizando lo colaborativo por delante de lo individual y manteniendo la intriga de los problemas. Buscar alternativas matemáticas, ser eficientes y respetar a los compañeros.	11
		Frec.

Tabla 66. Resumen de oportunidades de gestión relativas a competencias generales

En el caso de las oportunidades de aprendizaje de gestión, éstas no han cubierto la totalidad de las competencias generales que presenta el currículo. En relación con el *Conocimiento e interacción con el mundo físico*, podemos decir que en la mayoría de casos los alumnos han resuelto problemas abstractos, aunque de entrada estaban contextualizados.

Lo mismo sucede con la competencia de *Expresión cultural y artística*, la cual vemos razonable que no se haya tratado específicamente durante las sesiones de esta secuencia de problemas.

Si nos fijamos en la frecuencia con que se han tratado las diferentes competencias, observamos que hay dos competencias, la *Comunicación lingüística* y la *Competencia digital*, que a pesar de ser un foco importante de este trabajo, tienen frecuencias muy distintas. La lingüística superior a la digital.

Por un lado vemos razonable después del análisis de los datos que se haya dado tanta importancia a los aspectos lingüísticos, porque es la base de unas buenas discusiones. En cambio, la competencia digital no es que no se haya tratado, sino que se han tratado aspectos más concretos que se verán en las tablas posteriores.

Además, como ya hemos comentado anteriormente, el uso de la tecnología durante el trabajo por parejas o durante las discusiones en gran grupo ha sido muy distinto, con lo cual es normal que se haya potenciado poco la competencia digital en general durante la discusión.

Queremos comentar que en este apartado las oportunidades que se han detectado son muy generales, e incluso a veces podrían parecer de otras materias, pero consideramos que es importante que se mantengan porque en la clase de matemáticas también se trabajan muchos aspectos generales de comportamiento y también se establecen las normas que regulan las sesiones (Hershkowitz y Schwarz, 1999).

Sobre las oportunidades de aprendizaje de procesos

En la Tabla 67 se muestra el resumen de las oportunidades de aprendizaje de procesos matemáticos relacionadas con las competencias procedimentales propuestas por el currículo.

COMPETENCIAS PROCEDIMENTALES – OPORTUNIDADES DE PROCESO		
Pensar matemáticamente	Buscar patrones y generalizar. Conectar tareas empíricas con conocimientos teóricos conocidos anteriormente.	10
Razonar matemáticamente	Argumentar de forma general sin usar ejemplos, incluyendo todos los casos particulares y extremos, que a veces pueden servir de contraejemplos.	15
Plantearse y resolver problemas	Plantearse preguntas y alternativas y aprender a usar estrategias visuales.	6
Utilizar técnicas básicas para hacer matemáticas	Buscar estrategias adecuadas a las variables conocidas, conectando ideas de diferentes ámbitos y buscar estrategias para optimizar procesos o hacer comprobaciones.	6
Utilizar instrumentos para hacer matemáticas	Usar el *software* de forma precisa usando estrategias técnicas para llevar a cabo estrategias teóricas. Hacer usos del *software* para justificar las soluciones, como herramienta de conjetura-error o de simulador de un número elevado de casos.	15
Comunicar a los demás su trabajo	Encadenar de forma lógica las explicaciones y formalizaciones matemáticas usando vocabulario matemático específico conocido previamente.	7
		Frec.

Tabla 67. Resumen de oportunidades de procesos relativas a competencias procedimentales

Tras el análisis conjunto de oportunidades y competencias se evidencia cuáles de ellas se han trabajado con mayor intensidad. Se puede observar que en las sesiones de discusión en gran grupo de la secuencia de problemas se le da importancia a *Pensar y razonar matemáticamente*. Así, de alguna forma se establecen las reglas socio-matemáticas que Yackel y Cobb (1996) relacionan con las oportunidades de aprendizaje.

Desde un punto de vista instrumental, se evidencia un tratamiento específico de los instrumentos técnicos, que se usan en función de la influencia que pueda tener su precisión como instrumentos. Esta observación está relacionada directamente con el resultado de que el uso adecuado de la tecnología puede servir como transformador de ejercicios en problemas. Por ello, es evidente la presencia de la instrumentalización en las oportunidades de aprendizaje para ayudar a mejorar la génesis instrumental de los alumnos.

Sobre las oportunidades de aprendizaje de conceptos

A continuación, mostramos en la Tabla 68 el resumen de la representación de las oportunidades de aprendizaje de conceptos relacionados con las competencias específicas de las isometrías.

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS – OPORTUNIDADES DE CONCEPTO		
Entender los efectos de las transformaciones	Revisar las nociones de las transformaciones de forma teórica y empírica y sus características. Visualizar el movimiento y ver que se transforman todos los puntos. Buscar transformaciones alternativas en casos particulares.	18
Saber describirlos en términos matemáticos	Aprender los elementos que determinan las transformaciones y algunas características de estos elementos. Trabajar casos particulares en los que usar estrategias concretas para encontrar dichos elementos.	21
Comprender qué significa que se conserve la distancia en una transformación	Aprender que las isometrías conservan la distancia y las homotecias no.	4
Empezar a comprender los efectos de la composición	Estudiar las equivalencias entre composiciones de transformaciones sin usar los pasos intermedios. Generalizar el concepto de composición al caso *n*-ésimo.	5
Comprender otros conceptos relacionados	Recordar definiciones, construcciones y propiedades estudiadas anteriormente en otras situaciones.	7
Incorporar vocabulario específico	Aprender definiciones y notación específica del tema.	3
Incorporar instrumentalización específica	Trabajar herramientas y estrategias específicas.	8
		Frec.

Tabla 68. Resumen de oportunidades de conceptos relativas a competencias específicas

Durante la representación conjunta de las competencias con las oportunidades de aprendizaje, hemos notado que algunas de las oportunidades de aprendizaje que consideramos específicas de contenidos matemáticos no estaban representadas en las competencias del currículo. Así, hemos creado tres tipos de competencias que nos han sido útiles para llevar a cabo la distribución.

Una de ellas consiste en *Incorporar vocabulario específico*. El uso de vocabulario específico es considerado como una competencia requerida para los alumnos y es por eso que en las clases de matemáticas es natural que se creen espacios para tratar conceptos relacionados con el vocabulario específico que se usa durante el tema en concreto, en nuestro caso, las isometrías.

Otra competencia que hemos necesitado ha sido *Incorporar instrumentalización específica*. Igual que en el caso anterior, la competencia digital de los alumnos está considerada como una competencia importante y necesaria. Así, si usamos tecnología en el aula, como en el caso de este estudio, es natural que nos encontremos con situaciones donde se trabajan algunas herramientas específicas relacionadas con los conceptos que se están tratando.

Finalmente, en relación con la importancia de realizar conexiones con otras situaciones matemáticas que puedan completar el progreso matemático de los alumnos, hemos considerado como competencia específica *Comprender otros conceptos relacionados*, porque éstos, aunque no ayudan a comprender mejor el concepto de composición o cómo se definen matemáticamente las isometrías, son necesarios para el proceso completo de enseñanza-aprendizaje del tema.

Otro resultado interesante que se ha puesto de relieve es que el número de oportunidades de aprendizaje de las diferentes competencias específicas es decreciente. Este hecho no es casual. Las competencias están ordenadas, como en el currículo, de forma que van aumentando de nivel conceptual. Es natural que primero se introduzcan los movimientos intuitivos de las isometrías, posteriormente las definiciones, luego sus propiedades, y finalmente las composiciones entre ellas.

Así, que el número de oportunidades asociadas a cada competencia sea decreciente da muestras de que los problemas están planteados desde un punto de vista constructivista, donde poco a poco los alumnos van construyendo el conocimiento de forma helicoidal, dando importancia a la revisión de competencias ya tratadas. El sistema de competencias es profundo y es natural que se tengan que ir tratando de diversas formas a lo largo de las sesiones para que los alumnos mejoren su comprensión.

Queremos precisar que el número de oportunidades es decreciente como se ha comentado, pero si nos fijamos en la Tabla 46, donde aparece el estudio detallado, vemos que las competencias más sencillas se han ido tratando a lo largo de los tres problemas, mientras que las más complejas solo al final.

Visión conjunta de las oportunidades de aprendizaje

A continuación presentamos algunos resultados que consideramos relevantes en relación con el estudio conjunto de las oportunidades de aprendizaje detectadas a lo largo de este estudio.

Si nos fijamos en las frecuencias de aparición de las oportunidades de aprendizaje, podemos evidenciar una diferencia clara entre las oportunidades de conceptos y las demás. Tras la representación esquemática de la Tabla 46, donde se representan las oportunidades de concepto, se puede observar como la mayoría de frecuencias son iguales a uno. Esto muestra que las diversas oportunidades de aprendizaje de concepto que se han detectado han sido principalmente diferentes. En realidad, cada problema está incluido en la secuencia didáctica con unos objetivos y es normal que se trabajen los conceptos adecuados en cada caso.

En cambio, en las oportunidades de gestión y de procesos, no ocurre lo mismo. Hay oportunidades de aprendizaje que se han detectado varias veces y en problemas distintos. Consideramos que esto es razonable, ya que el trabajo para alcanzar las competencias que están asociadas es un trabajo relacionado con todos los temas de matemáticas, y por eso, queda representado en los diferentes problemas.

Otro aspecto general que presentamos es la diferente naturaleza de las oportunidades de aprendizaje que se han detectado en relación a las diferentes formas en que se evidencia su aprovechamiento. Puesto que uno de los objetivos de tener las oportunidades de aprendizaje que se han detectado durante las discusiones en gran grupo es poder ver si los alumnos las han aprovechado, hemos tratado de escoger algunos ejemplos de oportunidades que fuesen significativas para mostrar en el estudio el aprovechamiento de los estudiantes. Durante la selección nos dimos cuenta de que no todas las oportunidades de aprendizaje eran igualmente evaluables, y que ello no dependía del tipo que eran.

Por ejemplo, hemos detectado oportunidades que un alumno puede incorporar inmediatamente durante la discusión en gran grupo y se puede evidenciar su progreso si se tiene el registro de la totalidad de la discusión. Un problema que existe en este tipo de oportunidades es que la posibilidad de evaluarla depende de lo participativo que sea el alumno en cuestión, porque aunque realmente la haya aprovechado, quizá no lo pone de manifiesto públicamente.

Otro tipo de oportunidades que se han detectado son aquellas que el alumno puede plasmar en la reflexión personal posterior. Escribiendo sus reflexiones sobre el progreso matemático se puede evidenciar el aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje.

En otras ocasiones, es más común poner de manifiesto el aprovechamiento de oportunidades durante la realización de otros problemas de la secuencia. Para comprobar que el alumno ha aprovechado las oportunidades de proceso, hay que poderlo ver en situaciones similares durante la resolución de otros problemas.

Finalmente, hay algunas oportunidades de aprendizaje que requerirían una observación profunda durante un período de tiempo más largo para poder evaluar su aprovechamiento. Estas oportunidades son las que hacen referencia de forma general a aspectos de prácticas matemáticas, y que se puede verse si el alumno ha aprovechado dichas oportunidades solamente a largo plazo.

6.2.3 Aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje

En el apartado (5.2.2) del análisis de los protocolos entregados por los estudiantes, se presentan evidencias de progreso de los alumnos mostrando parejas de documentos entregados por cada uno de ellos, ya que se tienen datos de las entregas del trabajo realizado por cada pareja antes de la sesión de discusión en gran grupo, así como también el trabajo individual de cada alumno después de la discusión.

Recordemos que en el análisis se valoraba el aprovechamiento de algunas oportunidades de aprendizaje seleccionadas por su importancia y su amplia presencia durante las discusiones de la secuencia de problemas. Así, podemos presentar como resultado que existen alumnos para los cuales la discusión en gran grupo diseñada e implementada siguiendo la sistemática presentada ha sido productiva en el sentido que han aprovechado al menos algunas de las oportunidades de aprendizaje que se han detectado.

De todos modos, entendemos la limitación de las generalizaciones porque, como apunta Kieran (2001), las interacciones pueden ser productivas para todos los participantes o solo para algunos. De la misma forma, puede suceder el caso contrario: podría ser que hubiera habido más aprendizaje del que se detectado y que por falta de evidencias no pueda añadirse en este trabajo. Consideraremos, como Cobo (1998), que estos aprendizajes no evidenciados serán debidos a la reestructuración cognitiva que se produzca como consecuencia de reflexiones no explícitas durante los procesos de resolución de los problemas o de reflexiones individuales posteriores a los procesos de resolución.

En este estudio, usamos los ejemplos de los alumnos que han evidenciado progreso para validar o evaluar de forma positiva la sistemática que se ha diseñado para trabajar la resolución de los problemas de la secuencia en un entorno tecnológico y colaborativo. Sin embargo, el haber aprovechado las oportunidades de aprendizaje detectadas no significa que los alumnos hayan progresado competencialmente al nivel que se espera de ellos. Es por eso que damos gran importancia al análisis donde se presenta la concordancia entre las competencias del currículo y las oportunidades de aprendizaje detectadas. De este modo, podemos afirmar que los alumnos que se han analizado en detalle han progresado en el sentido del currículo vigente.

Para finalizar, destacamos que, usando el vocabulario de Sfard y Kieran (2001), ahora ya podemos afirmar que las discusiones han sido productivas además de efectivas como habíamos concluido al final del capítulo anterior, ya que además de detectar éxito desde el punto de vista del profesor y de la enseñanza, se ha evidenciado éxito desde el punto de vista del alumno, y por tanto del aprendizaje.

Tras la presentación de todos los resultados, realizamos un breve resumen con los aspectos más relevantes que se han mostrado. En un primer apartado sobre la evaluación de la sistemática (6.1), se han presentado los instrumentos didácticos construidos en el marco de esta investigación (6.1.1 y 6.1.2). Además, se ha ilustrado la reestructuración de la sistemática (6.1.3), y se han proporcionado los rasgos que caracterizan cada una de sus nuevas fases.

En relación a los resultados sobre las oportunidades de aprendizaje (6.2), se ha presentado el instrumento de análisis (6.2.1) y la detección de oportunidades de aprendizaje (6.2.2). Del análisis para detectar oportunidades de aprendizaje también se han desprendido otros resultados interesantes que ayudan a caracterizar las estructuras de las discusiones en gran grupo, los problemas, los episodios de las discusiones, las acciones dentro de estos episodios y las oportunidades de aprendizaje detectadas. Finalmente, se han documentado los resultados globales que contribuyen a dar validez a la presente investigación, tales como los resultados derivados de la aplicación del instrumento TRU-Math y del análisis del aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje (6.2.3).

7 Conclusiones y discusión

En este último capítulo exponemos una interpretación conjunta de todos los resultados, con el propósito de potenciar la comprensión de la relación entre enseñanza y aprendizaje matemático. En primer lugar, damos respuesta a la pregunta que impulsó esta investigación: ¿Cómo se pueden potenciar las relaciones entre enseñanza y aprendizaje de las isometrías mediante la gestión de discusiones en gran grupo y el uso de tecnología? (7.1).

En segundo lugar, retomamos las ideas más relevantes del marco teórico para reflexionar sobre los resultados obtenidos en relación con dicho marco. En este mismo apartado, además, presentamos la discusión sobre la metodología del estudio (7.2).

Tras el apartado de discusión, presentamos en tercer lugar las implicaciones didácticas que se desprenden de este trabajo a modo de recomendaciones para profesores que puedan llevar a cabo clases que incluyan discusiones en gran grupo con tecnología (7.3).

Por último, repasamos sucintamente las limitaciones que presenta el estudio y las generalizaciones y prospectivas que pueden extraerse (7.4).

Como se puede observar, en este capítulo hemos modificado la estructura que hemos aplicado en los capítulos precedentes, ya que tratamos de presentar una conclusión global a la investigación: en lugar de seguir diferenciando los aspectos relativos a los dos objetivos de la investigación, el propósito de este capítulo es mostrar la relación entre enseñanza y aprendizaje, y, por lo tanto, discutir acerca de la interpretación conjunta de todos los resultados.

7.1 Conclusiones

En este apartado responderemos la pregunta de investigación que hemos mencionado al inicio del capítulo mediante la interpretación conjunta de los resultados obtenidos en el Capítulo 6.

7.1.1 Conclusiones relativas al análisis de la sistemática y su validación

De los resultados teóricos presentados en el capítulo anterior, se desprende que la sistemática (6.1.3) promueve la implementación eficiente y productiva de discusiones en gran grupo sobre isometrías con tecnología. Se ha puesto de manifiesto que la implementación de la secuencia de problemas ha generado oportunidades de aprendizaje (6.2.2), siendo algunas de ellas aprovechadas por los alumnos (6.2.3). Por ello, afirmamos que se ha potenciado la relación entre enseñanza y aprendizaje de las isometrías.

Concretamente, los objetivos de enseñanza, que se materializan a través de las competencias del currículo, y las oportunidades de aprendizaje detectadas están en sintonía. Por tanto, se hace evidente la relación entre enseñanza y aprendizaje durante la secuencia.

Las discusiones en gran grupo han tenido un papel decisivo en el desarrollo competencial que se espera institucionalmente de los estudiantes. Los resultados muestran evidencias de progreso matemático entre el trabajo realizado por parejas y la reflexión personal posterior a la discusión en gran grupo (6.2.3).

Además, se confirma que el uso del programas de geometría dinámica potencia competencias de los alumnos en relación con varias habilidades matemáticas. Debido a las características del *software* y de las actividades diseñadas, el entorno tecnológico ejerce un papel clave en el desarrollo del pensamiento matemático de los alumnos. Se notan especialmente avances en la búsqueda de alternativas, la representación con precisión y el establecimiento de conjeturas.

Estos resultados son una aportación novedosa, ya que contribuyen a un mejor conocimiento de la relación entre enseñanza y aprendizaje desde una doble perspectiva que incluye el trabajo colaborativo y el uso de la tecnología. En particular, esto ocurre respecto a las discusiones en gran grupo con *software* de geometría dinámica.

7.1.2 Conclusiones relativas a los resultados metodológicos

Para promover la relación enseñanza-aprendizaje, también han sido claves los resultados metodológicos de esta investigación. Para analizar el desarrollo de las competencias en el alumnado, se ha contado con una sistemática completa y operativa que ha surgido de la reestructuración de dos sistemas teóricos (Drijvers y otros, 2010; Smith y Stein, 2011).

Los instrumentos metodológicos creados ad hoc son útiles para llevar a cabo de forma precisa la planificación, implementación y evaluación de la secuencia de problemas. El instrumento didáctico 'Árbol del problema' deviene un instrumento vertebrador de la participación del profesor en varias fases de la sistemática: anticipación, modo de explotación, monitorización y secuenciación de la implementación didáctica (6.1.1).

En la presente investigación, el instrumento 'Estadios de la discusión' ha resultado ser una herramienta útil para organizar una parte del análisis de los datos, y además ha contribuido a preparar el procedimiento para detectar oportunidades de aprendizaje. Sin embargo, en el futuro, tal y como explicaremos más adelante, puede convertirse en una herramienta didáctica para ayudar al profesor a desarrollar la fase de la secuenciación de la implementación didáctica (6.1.2).

El instrumento de análisis que también hemos presentado como resultado de esta investigación es el 'Detector de oportunidades de aprendizaje', que se ha creado para poner de manifiesto la generación de oportunidades de aprendizaje durante las discusiones en gran grupo con tecnología (6.2.1).

De este modo, vemos que los dos primeros instrumentos metodológicos creados para esta investigación —Árbol del problema y Estadios de la discusión— promueven la relación enseñanza-aprendizaje de las isometrías y pueden ser considerados instrumentos didácticos. En cambio, el tercer instrumento presentado —Detector de oportunidades de aprendizaje—, lo consideramos, principalmente, un instrumento de análisis en el ámbito de la investigación. Éste ayuda a caracterizar el concepto de aprendizaje, desgranando con detalle todas las acciones dentro de una discusión en gran grupo con uso de tecnología.

En resumen, estos instrumentos son novedosos en relación con la literatura existente porque proporcionan herramientas concretas para potenciar las relaciones entre enseñanza y aprendizaje. Por un lado, dan facilidades para llevar a cabo el proceso de enseñanza de forma eficaz y productiva, y por otro, ayudan a mostrar con detalle características del aprendizaje matemático.

7.1.3 Conclusiones relativas a discusiones en gran grupo con tecnología

Aunque no era el principal objetivo de esta investigación, gracias a la minuciosidad que ha permitido el instrumento durante el análisis, se han podido inferir varios resultados sobre las características de distintos factores que determinan una discusión en gran grupo con tecnología. A continuación, presentamos la discusión conjunta de algunos de estos resultados obtenidos a partir del estudio de algunas características de las estructuras de las discusiones, de los problemas, de los episodios de las discusiones, de las acciones de los episodios y de las oportunidades de aprendizaje (6.2.2).

Respecto a la *estructura* que siguen algunas de las discusiones en gran grupo, se han detectado relaciones entre el orden en el que se han tratado los estadios de los problemas y los tipos de orquestaciones utilizados, según si estaban más o menos centrados en los estudiantes: cuando la orquestación estaba centrada en el profesor, los estadios se han tratado de manera ordenada; por el contrario, el orden ha sido menor cuando la orquestación estaba centrada en los estudiantes. Además, se ha realizado una reestructuración de los tipos de orquestación, ya que se ha observado que uno de ellos —Demostración técnica— no se usaba durante las discusiones en gran grupo.

Por lo que hace referencia a los *problemas*, se han detectado relaciones entre su riqueza y los estadios que se tratan. Hay que tener en cuenta que esta relación de influencia existe, y a continuación presentamos algunas observaciones a modo de ejemplo. Se ha observado que, si se lleva a cabo una buena anticipación del problema en la cual se muestra que dicho problema tiene posibilidades de tratar un gran número de estadios, es razonable pensar que éste va a ser rico en oportunidades, si se gestiona adecuadamente. Sin embargo, hay que vigilar, puesto que si no se ha realizado una anticipación exhaustiva o ésta no se gestiona adecuadamente, la riqueza del problema puede llegar a quedar oculta. Hay otros factores, además, que pueden influir a la hora de aumentar o disminuir la riqueza de un problema, como por ejemplo la dinámica de participación en clase de los alumnos. En esta investigación se presenta otro resultado en este sentido: la tecnología puede ser un transformador de ejercicios en problemas, con lo cual puede, también, ayudar a enriquecerlos (Hershkowitz y Schwarz, 1999).

Del estudio de las características principales de los *episodios* de las discusiones se desprenden algunos patrones a la hora de tratar estadios concretos de estas discusiones. Algunos ejemplos de ello son: los episodios en los cuales se sitúa el problema, aquéllos en los que se presentan soluciones, otros en los que se hace el estudio de estrategias y, por último, los episodios en los que se establecen conexiones.

En relación con las características de las *acciones* de los episodios, se han validado las tres tipologías creadas —intervenciones didácticas, intervenciones de pensamiento matemático y usos del *software* de geometría dinámica— y de cada una de ellas se ha elaborado un resumen de los tipos encontrados, en los cuales hemos podido observar las tipologías más usadas y organizar y clasificar dichas categorías.

Finalmente, se han detectado características sobre las *oportunidades de aprendizaje* encontradas durante las discusiones en gran grupo. Éstas, además de haberlas clasificado según los tres tipos —de gestión, de procesos, o de conceptos—, se han conectado con las competencias presentadas en el currículo. Se ha establecido, de esta forma, una correspondencia entre las oportunidades y las competencias, cosa que permite considerar el aprovechamiento de los alumnos como válido dentro del marco curricular en el que se insiere esta experiencia didáctica.

El análisis detallado de las características de las discusiones en gran grupo con tecnología es muy valioso porque aporta una visión detallada de los elementos que intervienen en la discusión. Esto ayuda a entender mejor la relación entre enseñanza y aprendizaje, y a comprender de qué manera una serie de situaciones contribuyen a facilitar el progreso de los estudiantes.

7.2 Discusión

En este apartado comparamos nuestros resultados con nuestras expectativas iniciales, revisamos los objetivos que habíamos planteado para contestar la pregunta de investigación y reflexionamos sobre posibles cambios que podríamos introducir si tuviéramos que empezar la investigación de nuevo. Esta revisión nos llevará a establecer conexiones entre los resultados obtenidos y el marco teórico, y a reflexionar sobre el papel que ha tenido éste en el estudio. Finalmente, discutimos sobre la metodología escogida para llevar a cabo esta investigación.

7.2.1 Reflexión sobre la adecuación de los objetivos de la investigación

Si nos fijamos en la pregunta de investigación que hemos sacado a colación al empezar este capítulo, observamos que, para ver cómo se podía potenciar la relación enseñanza-aprendizaje de las isometrías en el entorno descrito, era necesario buscar referencias que dieran consejos en relación con las discusiones en gran grupo y con las clases con tecnología.

Una vez encontrados dos sistemas teóricos independientes y tras haberlos sometido a una reestructuración en abstracto, era importante analizar la sistemática creada a partir del análisis de la experimentación de esta sistemática. De este modo, consideramos que el primer objetivo consistente en analizar la sistemática que comporta la planificación y la implementación de una secuencia didáctica ha permitido establecer conexiones entre las dos referencias teóricas de Smith y Stein (2011) y Drijvers y otros (2010).

Este primer objetivo relacionado con los aspectos de enseñanza de las isometrías a través de discusiones en gran grupo con tecnología, se ha alcanzado mediante la creación de la sistemática generada. Esta sistemática ha sido clave para la consecución del objetivo focalizado en detectar oportunidades de aprendizaje de las isometrías y progresos matemáticos por parte del alumnado.

Es fundamental poder evidenciar que la implementación de la secuencia ha sido productiva para cerciorarse de la funcionalidad de la sistemática, con lo cual la detección de oportunidades de aprendizaje es necesaria. Además, el segundo objetivo se propone detectar progreso matemático en los estudiantes para comprobar que realmente las oportunidades detectadas han sido aprovechadas.

Aunque en el planteamiento inicial de la investigación consideramos que esta argumentación era suficiente, durante el análisis de los datos nos dimos cuenta de que era importante poder valorar de qué nivel eran las oportunidades de aprendizaje que se habían detectado y que los alumnos estaban aprovechando. Para ello, se estableció una conexión entre las oportunidades detectadas y las competencias fijadas en el currículo, porque de alguna forma es la herramienta que nos permite medir el nivel de enseñanza que se pretende alcanzar con la secuencia didáctica.

De este modo, podemos considerar que a partir del aprendizaje hemos vuelto al punto de partida, la enseñanza. Finalmente, después de la discusión conjunta de la pregunta de investigación y los objetivos con los resultados obtenidos, consideramos que la estructura de esta investigación es coherente.

La creación metodológica del instrumento para detectar las oportunidades de aprendizaje ha sido tan minuciosa que el propio instrumento nos ha llevado a obtener características interesantes de las discusiones en gran grupo con tecnología de la secuencia didáctica. Es por eso que se decidió añadir estos resultados en el apartado de las oportunidades de aprendizaje (6.2.2).

7.2.2 El papel del marco teórico

Si hacemos una revisión de la investigación desde el punto de vista del marco teórico, vemos que éste ha sido clave en varios aspectos.

Primero, las recomendaciones teóricas de Smith y Stein (2011) para llevar a cabo discusiones en gran grupo y las propuestas de Drijvers y otros (2010) acerca de la introducción de tecnología en la clase de matemáticas han sido una base teórica que se ha considerado como referente sobre el cual construir el presente estudio. Hemos tomado estas referencias teóricas como punto de partida y las hemos reestructurado a partir de la implementación práctica. Como culminación, se ha hecho emerger una propuesta de sistemática sobre la cual se ha podido implementar una secuencia didáctica que nos permitiera entender mejor la relación entre enseñanza y aprendizaje.

Por otra parte, el hecho de haber establecido una definición amplia de lo que en esta investigación se ha considerado una oportunidad de aprendizaje ha sido relevante, ya que, de este modo, se han podido incorporar oportunidades a partir de varias interacciones entre acciones de los participantes.

Además, para comprobar el aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje detectadas, también ha jugado un papel crucial el marco teórico. El hecho de considerar el aprendizaje como cambios en el pensamiento de los estudiantes, ha permitido poder tener evidencias concretas del aprovechamiento o no de una oportunidad.

Siguiendo con el hilo argumental de los eslabones lógicos de la investigación, tras el análisis del aprovechamiento por parte de los alumnos, se ha podido considerar adecuado el nivel gracias a que el conocimiento escolar necesario del alumno estaba basado en las competencias del currículo.

Otros constructos presentados en el marco teórico también han sido cruciales, como la génesis instrumental. Su papel ha sido importante en lo que se refiere al establecimiento de las diferentes acciones relacionadas con el uso que se ha dado al *software* de geometría dinámica.

Por otro lado, el conocimiento de contenido matemático y de contenido pedagógico ha tenido un doble papel. En el ámbito de la implementación de la secuencia didáctica, ha ayudado a definir el estilo del profesor y de las intervenciones didácticas que ha promovido para alcanzar los objetivos. En cambio, en el ámbito de la investigación, ha tenido un papel esencial para ayudar a definir las oportunidades de aprendizaje de concepto y de procesos.

7.2.3 El papel de la metodología

En esta investigación consideramos que la metodología ha tenido un papel fundamental, tanto por el detalle del diseño metodológico, como por los resultados posteriores que se han evidenciado en este sentido.

Para la consecución del primer objetivo, que consistía en evaluar la sistemática, se diseñó una metodología detallada sobre cómo implementar la secuencia didáctica. Después de un análisis general, fue necesaria la incorporación de un instrumento metodológico externo para validar de forma neutra su eficiencia.

Para llevar a cabo con precisión la implementación de la secuencia a través de la sistemática se crearon dos instrumentos que, a medida que ha avanzado la investigación, podemos tenerlos en cuenta como instrumentos didácticos, porque esencialmente ayudan al profesor a gestionar algunas de las fases y contribuyen a la simplificación del trabajo que implica la planificación de una secuencia didáctica mediante la sistemática.

El instrumento externo que se introdujo para comprobar la eficacia de la implementación de la secuencia fue el TRU-Math (Schoenfeld, 2013), con el cual se pudo analizar la totalidad de la implementación de la secuencia mediante un sistema de rúbricas. Consideramos que esta estrategia metodológica, con un instrumento de evaluación externo y neutro, es necesaria para poder generalizar los resultados obtenidos.

Para la consecución del segundo objetivo, consistente en detectar oportunidades de aprendizaje y hallar evidencias de su aprovechamiento, se creó ad hoc un instrumento, para tratar los datos y detectar las oportunidades de aprendizaje que se dieron durante la discusión con tecnología.

El papel que ha tenido este instrumento de análisis ha sido decisivo, porque nos ha permitido encontrar otros resultados acerca de las características de algunos de los elementos involucrados en el análisis, que además contribuyen a comprender mejor las relaciones entre enseñanza y aprendizaje.

Podemos concluir que, en general, la metodología de este estudio ha contribuido a la organización y la validez de sus razonamientos.

7.3 Implicaciones didácticas

A lo largo de este estudio se han tratado varios aspectos que directa o indirectamente pueden convertirse en recomendaciones didácticas para otros profesores.

A continuación presentamos de forma resumida recomendaciones de gestión de discusiones en gran grupo que incluyan *software* de geometría dinámica.

Consideramos importante que el profesor haga una planificación adecuada de la sesión de clase. Nuestra propuesta es que siga la estructura de la *sistemática* que proponemos para llevarla a cabo. Hay que realizar una *anticipación* del problema que se va a plantear a los alumnos con atención, teniendo en cuenta las posibles estrategias y considerando que el uso del *software* puede modificar la naturaleza del problema. Asimismo, se deben introducir preguntas que ayuden al alumno a tratar los diferentes estadios que el profesor tiene previsto que aparezcan en la discusión, pero con un andamiaje que también permita a los alumnos explorar por iniciativa propia.

Como consecuencia de este estudio, se ha adaptado el concepto de árbol del problema para llevar a cabo esta fase. Es por ello que recomendamos utilizar este instrumento didáctico o un formato equivalente para hacer una anticipación completa y ordenada del problema en cuestión.

El hecho de incluir la tecnología en el aula —o cualquier otro tipo de material— hace que también se recomiende un diseño detallado de la *configuración didáctica*. Además, hay que tener en cuenta que el tratamiento que harán los estudiantes del *software* o del material puede cambiar sustancialmente según si están trabajando de forma individual, por parejas o en grupo.

Todo ello, lo relacionamos con la importancia de hacer el estudio del *modo de explotación*. Como recomendación general se propone el uso de ciclos de trabajo que consistan en espacios de trabajo individual, en parejas, en gran grupo y otra vez individualmente para que cada alumno pueda reflexionar sobre su propio aprendizaje. Hay que tener en cuenta que solamente se trata de una recomendación y que hay que ser flexible en cada situación: así, por ejemplo, se pueden cambiar las temporizaciones o el orden de los ciclos de trabajo. En concreto, para las discusiones en gran grupo también es importante que el profesor planifique qué tipo de orquestación cree que es más significativa pedagógicamente para cada situación.

En relación con la *monitorización*, recomendamos que el profesor permanezca atento a las diferentes actuaciones de los alumnos para poder empezar el andamiaje durante esta fase. Es muy importante tener presente la anticipación del problema que se ha hecho y los estadios que se querrán tratar en la discusión en gran grupo para poder ir redirigiendo la clase a lo largo del proceso de filtraje que tiene que llevar a cabo el profesor.

Una vez realizada la monitorización de los estudiantes, se trata de *seleccionar unas situaciones* que ayuden a encaminar la discusión hacia los objetivos que se han propuesto durante el diseño de la secuencia didáctica.

Finalmente, consideramos la *secuenciación de la implementación didáctica* como el punto culminante donde se puede aplicar toda la planificación previa que se ha especificado anteriormente. Una recomendación para llevar a cabo esta fase es guiar la discusión mediante el andamiaje de las acciones de los participantes para acercarse a la planificación detallada que se ha elaborado con anterioridad. Los instrumentos que pueden ayudar a ello son el árbol del problema y los estadios de la discusión. El seguimiento de la estructura del árbol para acercar los estudiantes a la resolución de los problemas se lleva a cabo paralelamente con la intención de tratar todos los estadios de la discusión que de antemano se han podido planificar.

De todas modos y aunque la secuencia didáctica utilizando la sistemática propuesta se desarrolló con éxito, si tuviéramos que empezar otra vez este estudio, habría algunos puntos que trataríamos de mejorar. Por ejemplo, sería deseable que hubiera un trabajo previo por parte del profesor de algunas técnicas para fomentar la participación de más alumnos, ya que, como se ha visto en los resultados derivados de la aplicación del TRU-Math, éste ha sido el punto débil del análisis de la implementación de la secuencia.

Otro aspecto al cual prestaríamos especial atención es al hecho de tratar de una forma específica la reflexión personal posterior a la discusión en gran grupo. Como se ha puesto de manifiesto en varios momentos de los resultados, no todos los alumnos tenían la suficiente madurez para revisar de forma individual su propio aprendizaje y presentarlo por escrito y con detalle. Es por ello que creemos que se debería hacer una consideración especial en cuanto a su enseñanza. Esta situación está estrechamente ligada con las competencias de autogestión y de saber reflexionar sobre el propio aprendizaje. Es una forma de actuar quizá demasiado madura para que los alumnos de este nivel lo logren satisfactoriamente, por eso es importante hacer un tratamiento específico.

El hecho de tener las competencias curriculares como punto de referencia no ha limitado el análisis de los datos obtenidos en la investigación. Se han encontrado ejemplos en los que se ha propuesto una incorporación específica de algunas competencias que se han considerado interesantes. En otras situaciones se ha considerado normal el hecho de que alguna competencia no se hubiera tratado.

Hasta este punto hemos presentado recomendaciones para que la planificación y la implementación de la secuencia didáctica sea lo más efectiva posible en términos de coherencia.

Por otro lado, para ayudar a que la implementación de la secuencia didáctica sea productiva en el sentido de que genere oportunidades de aprendizaje que los alumnos puedan aprovechar, consideramos interesante que los profesores también tengan un conocimiento más profundo de la relación entre enseñanza y aprendizaje del tema que están preparando. Por eso, recomendamos que, por supuesto a un nivel global, puedan utilizar el instrumento de análisis como elemento de acercamiento al conocimiento del alumno, y de las diferentes formas de aprendizaje que se dan. En algunas ocasiones, por falta de tiempo y/o recursos, al profesor no le es posible realizar un seguimiento suficiente del aprendizaje de sus estudiantes.

El hecho de usar el instrumento de análisis, o alguna de sus partes, ayuda a que el profesor conozca las limitaciones y potencialidades de sus alumnos y de las sesiones de clase conociendo características concretas de algunos de los aspectos que intervienen.

De todas formas, somos conscientes de que todas estas recomendaciones conllevan una dedicación temporal inalcanzable para un profesor en activo, ya que todos los instrumentos son muy detallados y requieren mucha atención.

Teniendo en cuenta esta limitación, al finalizar este estudio ofrecemos, como aportación didáctica, todo el material creado para esta secuencia didáctica junto con todos los instrumentos didácticos elaborados y ejemplos sobre cómo sacar provecho de estas discusiones en gran grupo con tecnología, que forman parte de una secuencia didáctica que tiene sentido en sí misma.

En concreto, tras esta investigación también se han hecho aportaciones en los Árboles de los Problemas 2 y 3. En cada caso se han incorporado aspectos que no se habían tenido en cuenta durante la planificación y que, en cambio, se consideraron interesantes durante el análisis de los datos.

En relación con la presumible falta de tiempo que puede experimentar el profesor al pretender una actuación tan minuciosa, de esta investigación se desprende la relevancia del trabajo en equipo y de conjugar esfuerzos para reflexionar acerca de las propias prácticas de enseñanza.

7.4 Limitaciones y prospectiva

En este apartado final de las conclusiones, presentamos algunas recomendaciones para realizar futuros estudios siguiendo esta línea de investigación. Dichas recomendaciones surgen de ideas que se han desarrollado durante el presente estudio pero que no se han trabajado de forma profunda.

Primero, un aspecto general que consideramos importante es la posible generalización de los resultados de la investigación. Aunque hay indicios de que muchas de las partes sí que serían generalizables —como, por ejemplo, algunos aspectos de los instrumentos metodológicos—, no se ha realizado un estudio posterior suficientemente exhaustivo para confirmarlo. Es por eso que consideramos oportuno trabajar en esta línea, porque ayudaría a entender mejor la relación entre enseñanza y aprendizaje no solo en un entorno concreto sino de forma más global.

Algunas de las investigaciones que se podrían llevar a cabo en la línea de generalizar los instrumentos creados en esta investigación, podrían ser las que ya se han empezado a plantear a raíz de este estudio.

En relación con el 'Árbol del problema', podría analizarse con detalle el estilo de distintos profesores a la hora de elaborar la anticipación de un mismo problema, con el objetivo de encontrar patrones que ayuden a sistematizar su creación.

Los 'Estadios de la discusión' son una herramienta que ha surgido de la generalización emergente que se hizo a través del análisis de datos de esta investigación. Sin embargo, su ampliación para los usos de cada estadio que hacen distintos profesores puede comportar una reestructuración de la generalización presentada.

Lo mismo ocurre con el instrumento de análisis. Hay que recordar que está diseñado específicamente para analizar los datos de esta investigación. En una generalización realizada a posteriori (Morera, Planas y Fortuny, 2013), se ha avanzado considerando de una forma más amplia el concepto de instrumento y aplicando la génesis instrumental de una forma abstracta a cualquier tipo de material que pudiera ayudar a la visualización matemática.

Aunque se ha tratado de generalizar el instrumento de análisis, teniendo en cuenta que es muy detallado y que posee una gran cantidad de aspectos que se relacionan entre sí, se podrían plantear futuras investigaciones en relación con algunos de estos aspectos.

Por ejemplo, sería interesante estudiar el tipo de influencias que se dan entre las diferentes acciones de un episodio para después poder caracterizar el tipo de situaciones ricas que se están creando durante una discusión en gran grupo. Hasta el momento, los conectores de influencia que se utilizan no aportan más información sobre el tipo de influencia; en cambio, se podría detallar el tipo de influencia que tiene una acción sobre otra y que quedara reflejado en el diagrama.

Una vez caracterizados de forma detallada los tipos de influencia, futuras investigaciones podrían centrarse en establecer relaciones entre las situaciones creadas y los tipos de oportunidades de aprendizaje que generan. Como posible ampliación, también sería adecuado profundizar en esta línea y estudiar, además, cuáles de estas situaciones han propiciado más o menos aprovechamiento por parte de los alumnos.

En relación con este último punto acerca del aprovechamiento de los alumnos y conectándolo con las recomendaciones que sugeríamos en el apartado de implicaciones didácticas (1.3), se podría desarrollar esta investigación estudiando posibles causas acerca de la manera en que puede variar el aprovechamiento de los alumnos de diferentes clases, en las cuales los profesores han elaborado, aparentemente de forma muy similar, una planificación de la misma secuencia didáctica mediante la sistemática propuesta.

Otro frente que podría abordarse como aplicación de algunos de los resultados es la implementación de la estructura del presente estudio en la formación de profesores. Como comentábamos al principio de este trabajo, son necesarias las investigaciones que miren de forma conjunta el trabajo colaborativo con la introducción de tecnología, y en concreto aplicado a la formación inicial o permanente del profesorado. Hemos observado a lo largo de esta investigación que continuamente el profesor debe tener en cuenta el hecho de que gestionar discusiones en gran grupo con tecnología requiere una planificación previa. Chapman (2012) plantea una serie de retos para futuras investigaciones centradas en la formación del profesorado. Uno de los retos importantes es el conocimiento tecnológico del profesor, lo cual encaja con la propuesta curricular sobre el uso de tecnología en la enseñanza de las matemáticas.

8 Conclusion and discussion

In this final chapter we present a joint interpretation of the results in order to foster our understanding of the relationships between mathematics teaching and learning. Firstly we will answer the question that prompted this research: How can we enhance the relation between teaching and learning isometries through whole-group discussions and technological mediation?

Secondly, we will take over relevant ideas of the theoretical framework to reflect on the results obtained in connection to the framework. Moreover, in this same section, we will introduce a discussion concerning the methodology we have used in this study (8.2).

Following the discussion, we present in third place the educational implications arising from this study as recommendations for teachers who may conduct classes that consist of whole-group discussions with technology (8.3).

Finally, we shall review in short some limitations of the study, some generalizations and some forecasts that can be drawn from it (8.4).

As can be seen, in this chapter we have modified the structure applied to previous chapters, that is, by trying to provide an overall conclusion to our investigation. Instead of differentiating the goals of the study, the purpose of this chapter is to strengthen the relationships between teaching and learning by discussing the joint interpretation of the results.

8.1 Conclusions

The contents of this section contribute to answer the research question by means of the joint interpretation of the results presented in Chapter 6.

8.1.1 Conclusions on the systematic and its validation

From the theoretical results displayed in the previous chapter, it appears that the systematic restructuring (6.1.3) promotes efficient and productive implementation of whole-group discussions on isometries. It becomes clear that the implementation of the sequence of problems has generated learning opportunities (6.2.2) subsequently turned into learning by students (6.2.3). For this particular reason we can say that the relationships between teaching and learning isometries have been strengthened.

The goals of teaching, which could be materialized through the official curriculum skills in the country, and the learning opportunities that have been identified are all in harmony. This fact exemplifies the relation between teaching learning coming up from the work around the sequence of problems. Further, the whole-group discussions have been instrumental in the development of students' competence. The results show evidence of mathematical progress in work conducted by pairs and in personal reflection performed after whole-group discussion (6.2.3).

The use of a technological environment has enhanced a series of skills that the students possess regarding several curricular and mathematical issues. On the one hand, it has helped to work directly on aspects related to development of the students' digital skills. Furthermore, due to the software's features and to the previously outlined activities, the technological environment has played a key role in the development of significant mathematical thinking among students, such as seeking alternatives, working accurately, establishing conjectures, etc.

These results are a novelty as they contribute to a better understanding of the relationships between teaching and learning from a dual perspective, including collaborative work and technology use, specifically in whole-group discussions with geometry dynamic software.

8.1.2 Conclusions on methodological results

To promote the understanding of the teaching-learning relationship, the methodological results of this research have been basic. To analyse the development of curricular and mathematical skills, we have relied upon a comprehensive systematic that has emerged from the restructuring of two theoretical systems, from Drijvers et al. (2010), and Smith and Stein (2011).

The methodological tools that have been created ad hoc have been useful to implement the sequence of problems. Repeatedly, the teaching tool that has been named as "Problem Tree" has become an instrumental backbone of teacher participation in several phases of the scheme like the anticipation, the operation mode, the monitoring or the sequencing of the didactic implementation (6.1.1).

The tool "Stages of Discussion" has been proved as a useful instrument for organizing part of the data analysis, and indirectly for detecting learning opportunities. As explained below, in the future it might become an adequate teaching tool to help the teacher develop the sequencing of the didactic implementation (6.1.2).

The analysis tool we have displayed as a result of this research is the "Learning Opportunities Detector", which has been created to make the formation of learning opportunities explicit throughout whole-group discussions with technology (6.2.1).

Thus, the first two methodological tools created for this research – the Problem Tree and the Stages of Discussion– promote the teaching and learning of isometries and may be considered educational tools on their own. However, the third tool –Learning Opportunities Detector– must be considered, primarily, as an analytical tool that contributes to the field. It is a tool that helps to better understand the concept of learning as it unravels the detail of all interventions that occur in a whole-group discussion by focusing on the creation of learning opportunities.

In summary, these three instruments are new in that they provide concrete tools to foster the understanding of the relationships between teaching and learning for the case of the secondary mathematics classroom with a particular didactical environment. On the one hand, these tools facilitate the teaching in an efficient and productive way, and on the other, they show the detail of substantial characteristics of the students' mathematics learning.

8.1.3 Conclusions on whole-group discussions with technology

Although this was not the main focus of the research, due to the thoroughness of our analysis tools, we have been able to come up with several results concerning different issues on whole-group discussion with technology. Next, we will go into some of these issues with an emphasis on the structure of the discussion, the problems, the stages, the specific actions and the learning opportunities.

It has been observed that, concerning the structure of whole-group discussions, there is a relation between the order in which the periods of the problems are treated and the organization, influenced by whether or not the emphasis was put on the students. When the organization was focused on the teacher, the different stages were treated in a rather classical form, while less methodical when the focus was on the students. A restructuration of the types of organization was made when it was observed that one of them –e.g., technical demonstration- was not being used in whole-group discussions.

In reference to the problems, a relation has been found between its mathematical complexity and the stages of discussion. We will give examples of this relation further on. We have observed that, with an adequate anticipation of the problem –in which the fact that the problem can be addressed in a great number of stages is displayed- it is reasonable to assess that the problem will provide several different opportunities. Here the key factors are an adequate anticipation and management, which force the exploration of the mathematical complexity of the problem. Other factors may lead to capture the complexity of a problem: for example, the dynamics of the students' participation in class. To this respect, this research has point to an important finding: a certain use of technology can transform exercises into problems, and eventually help enhance the mathematics learning through them (Hershkowitz & Schwarz, 1999).

To grasp some of the primary characteristics of whole-group episodes, the different stages must be broken into more concrete interactional patterns. A few examples are: the stage during which the problem happens, the one in which the solutions are found, others in which the strategies are considered and, finally, those in which connections are established.

Three types have been validated as being related to the characteristics of actions in the episodes: didactic interventions, mathematical thought interventions and use of dynamic geometry software. For each, a summary has been established, which allows to observe, organize and classify the types.

Finally we have outlined characteristics of the learning opportunities that are created in whole-group discussion. In addition to being separated into three types –management, process or concept–, they have been linked to curricular skills. A correspondence between opportunities and skills has, consequently, been established. Thus we conclude about the benefits, for the students, of this didactic experience from the perspective of the institutional curricular framework.

The analysis of the characteristics of whole-group discussions with technology is valuable for it gives a thorough understanding of the elements of the discussion and their role in the development of the mathematics teaching and learning. It helps better understand the relationship between teaching and learning, and how a series of didactical situations facilitate the students' progress.

8.2 Discussion

In this section we will compare our results with our initial expectations, reviewing the research goals and reflecting on eventual changes. This overall review points to ties between the results obtained and the theoretical framework. It also highlights the role that the theories have played in the study. Finally, we will discuss methodological choices.

8.2.1 Reflection on the adequacy of the goals

Taking a closer look at the research question and to find a way to maximize the teaching-learning relationship, it was necessary to search for useful references in matter of whole-group discussions and technology in the mathematics classroom.

Once we found two independent theoretical systems and after submitting them to restructuration, it was important to analyse the generated systematic based on the analysis of its experimentation. We consider that the first consistent goal in the analysis of the systematic, entailing the planning and implementing of a didactic sequence, has permitted the establishment of connections between Smith and Stein (2011) and Drijvers et al. (2010).

This first goal, in relation to the teaching of isometries through whole-group discussions with technology, has been reached with the creation of the systematic. This systematic has been focused on the uncovering of learning opportunities in regard to isometries and progress in mathematics.

It is fundamental to prove that the implementation of the sequence has helped to assess the functionality of the systematic, for which the recognition of learning opportunities is necessary. Also, the second goal aims at the detection of students' mathematical progress to make sure whether the opportunities have been taken advantage of.

Although in the initial approach of the research we considered these arguments as sufficient, during the analysis of the results we realised of the importance of examining with more precision the learning opportunities taken by the students. To this end, a connection was established between the identified opportunities and the curricular skills. In a way, this connection allows to grasp the teaching that is attainable by means of the didactic sequence.

By studying the learning, we have come back to where we came from: the teaching. Overall, after the joint discussion on the research question, the goals and the results, we consider the research structure and its coherence

The methodological creation of the instrument that would detect learning opportunities was so meticulous that the instrument itself has led to observe interesting characteristics within whole-group discussions with technology in the didactic sequence. This is why it was decided to include such results in relation to the learning opportunities (6.2.2).

8.2.2 The role of the theoretical framework

If we evaluate the investigation from the point of view of the theoretical framework, we see how the theories have been a key element in many aspects.

Firstly, the theoretical recommendations from Smith and Stein (2011) to carry out whole-group discussions and those from Drijvers et al. (2010) concerning the introduction of technology in mathematics classrooms have been used as a building basis. These two references were used as a starting point, but restructured according to practical requirements. In addition, a systematic emerged around the implementation of a didactic sequence that permitted the comprehension of the relation between teaching and learning.

On the other hand, the investigation has drawn on a wide definition of learning opportunities, which has made it possible to incorporate to the study a greater range of actions and interactions from and among participants.

Furthermore, to verify how the identified opportunities were actually taken advantage of, the theoretical assumptions have played a crucial role. The fact of considering learning as a change in the students thought and talk has provided tangible evidence of the helpfulness of all particular opportunities.

Other elements presented in the theoretical framework have also been crucial, such as the notion of instrumental genesis. Its role has been with regards to the establishment of different actions related to the use of the dynamic geometry software.

The knowledge of mathematical and pedagogical contents has played two roles. In the implementation of the didactic sequence, such contents helped to define the style of the teacher, as well as the didactic interventions. On the other hand, in the context of the investigation, such contents helped to define the learning concepts and the processes opportunities.

8.2.3 The role of the methodology

In this research the methodology has played a central role, for the details of the methodological design as much as for all the subsequent results. To achieve the first goal, which consisted of evaluating the systematic, a detailed didactical methodology was designed to implement the sequence of problems. After an initial analysis, the incorporation of an external methodological tool became necessary in order to objectively validate what was designed as a provisional tool.

In order to carry out in a precise way the implementation of the sequence through the systematic, two instruments were created. As the investigation went on, we could view them as didactic instruments, essentially because they helped the teacher to act and make decisions throughout the different stages. These two instruments also contributed to the simplification of the work implied in the planning of the didactic sequence through the systematic.

The external instrument brought in to ensure the effectiveness of the sequence was the TRU-Math (Schoenfeld, 2013). With it, it was possible to analyse the totality of the sequence's implementation through a system of classification. We consider this methodological choice with an external instrument to be necessary for the analysis of the results.

To achieve the second goal, consisting of the detection of learning opportunities and their profit by students, another detailed instrument was created ad hoc to identify learning opportunities that took place during the whole-group discussion with technology.

The role of this third analytical instrument has been decisive since it has led to find other results concerning other parts involved in the analysis with regards to a better understanding of the relation between teaching and learning.

We may conclude that, in general, the methodology used in this study, and created for it, has contributed to the achievement of the goals in a precise and rigorous way.

8.3 Didactic implications

Throughout this study several aspects have been dealt with, which, directly or indirectly, may turn out as didactic recommendations for mathematics teachers. In this section, we will present a summarized version of recommendations for the management of whole-group discussions with dynamic geometry software.

We consider that the teacher's planning for each class is important. For this purpose, we suggest the use of the systematic that we have created. An *anticipation* of the problem given to the students should be done thoroughly, taking into account the different conceivable strategies, the use of the particular software and its influence on the work with the problem. Then, questions should be introduced to help the student go through the different stages planned by the teacher. These questions should be prepared in a way that they do not hinder the students' initiatives of exploration.

As a consequence of this study, the notion of Problem Tree was used to carry out this last stage. This is why we recommend this didactic instrument –or a similar– to carry out the full anticipation and organisation.

The use of technology in the classroom –or any other artefact– makes us also recommend a detailed design of the *didactic configuration*. Likewise, we must take into consideration that the use of the software by the students will be substantially different if they are working individually, in pairs or in group.

We relate all this to the importance of studying the *operating mode*. As a general recommendation, we suggest working cycles which would consist of spaces for individual work, in pairs, in whole-group and once again individually. This way, each student has the possibility to reflect on its own learning. This remains a recommendation and one should be flexible in each situation: for example, both the timing and the order of the working cycles may be amended. The teacher must plan which type of organization will be more significant, pedagogically and didactically speaking, in every situation.

Regarding the *monitoring process*, the teacher needs to be attentive to the students' actions to start the structuring during this phase. It is very important for the teacher to have in mind the anticipation of the problem, as well as the stages to treat in the whole-group discussion. Hence the class dynamics may be redirected along the filtering process.

Once the monitoring of the students is done, it is time to *select situations* that facilitate the orientation of the discussion towards the curricular objectives in the didactic sequence.

Finally, we consider the *sequencing of the didactic implementation* as the culminating point where the planning is applied. To carry out this phase, we recommend guiding the discussion by structuring the students' interventions as to follow, if possible, the planning. The Problem Tree and the Stages of Discussion become useful instruments. The tree structure of problem resolution would be followed in parallel by the planned stages of discussion.

Even though the development of the didactic sequence using the systematic was successful, if we had to replicate the study, a few aspects would be decided differently. It would be convenient, for example, to have the teacher familiarize the students with the TRU-Math tool to enhance participation. As we have seen in the results derived from the application, this was a rather week point of the experiment.

Another aspect for improvement is the approach to the students' individual reflection after whole-group discussion. We observed on several occasions that not all students showed enough maturity to evaluate their own learning and put it down accurately in writing. This matter deserves special consideration from the teacher. Such a situation is in direct correspondence to self-management and self-introspection professional skills. Students at this school level may not have enough experience to act satisfactorily and this is why a specific treatment would be necessary.

In addition, the fact of having the curricular skills in our country as a reference throughout the research has been very convenient and has made the whole process much more reliable. For some cases, a specific incorporation was suggested of a few skills, while other skills were not expected to be dealt with from the beginning of the planning.

Up to this point, we have presented recommendations to make the planning and implementing of the didactic sequence as effective as possible in terms of coherence in the teaching.

On the other hand, to assure the productivity of the didactic sequence's implementation –in the sense that it should create learning opportunities for the students– the teachers should have a deep understanding of the teaching-learning relation. This is why we globally suggest the use of the analytical instrument as a tool to seize the student's learning. Often due to lack of time and/or resources, the teacher cannot do an adequate follow-up on the students' learning.

The use of the analytical instrument, or at least parts of it, is expected to help the teacher to grasp the potential of the students and of the mathematical problems by gaining access to concrete didactical characteristics of the classroom situation.

We are aware that all these recommendations imply an unreachable dedication for an active 'real' teacher, since all the instruments are highly detailed and its application requires full attention along with time commitment. As to the lack of time the teacher, we strongly team work and joint efforts, as this may also enrich self-examination of teaching.

Considering this restraint, we see as a didactic input all the material created for the didactic sequence, all the didactic instruments elaborated together with many examples on how to make the best of whole-group discussions with technology. It all is part of a didactic sequence, which makes sense in itself.

Specifically, the feedback from this investigation had permitted the reelaboration of the problem trees 2 and 3. In each case, aspects we had not taken into consideration during the planning were incorporated as the analysis showed their specific interest.

8.4 Constraints and forecasts

In this final section, we present recommendations for the fulfilment of future studies in the same line of investigation. The recommendations come from ideas developed during the present study, which have not been worked upon deeply because they were not in the pipeline.

A general aspect is the possible generalization of some of the results. Although some parts seem to be, indeed, possible to generalize –for example, some aspects of the methodological instruments– subsequent studies are required to confirm it. This could be an appropriate direction to follow. It would help understand the relation between learning and teaching not only in a specific context but in a more global manner.

Some of the researches that could be carried out to generalize the current tools could be those we have already raised as starting points. Regarding the problem tree, we could analyse the didactical styles of different teachers when elaborating the anticipation for that particular problem, in order to find patterns that would help systematization.

If we take a closer look at the Stages of Discussion, we find a tool that has developed itself along with the emerging generalization through the analysis of the results. If it were to be amplified for the use of each stage by distinct teachers, it could imply a restructuration of the presented generalization.

The same happens with the analytical instrument, though it has been specifically designed to analyse the data in this investigation. In Morera, Planas and Fortuny (2013), progress has been made considering a more comprehensive notion of instrument, and applying instrumental genesis in an abstract way to any kind of material that could help mathematical visualization.

Although we have tried to generalize the analysis instrument, it is extremely detailed and has a lot of aspects that are interrelated. Hence future research might be undertaken in relation to some of these issues. For example, it would be interesting to study the influence between the different actions of an episode in order to be able to define the situations being created for a whole-group discussion. So far, the influence connectors do not provide enough information on the type of influence. However, the type of influence of an action over another action could have been detailed and reflected in the diagram.

Once the types of influence have been defined, future research could focus on establishing relationships between situations and types of learning opportunities they generate. As a possible extension of this study, it would also be appropriate to go deeper in this line and consider which of these situations have led to higher or lesser progress by students.

With regards to this last point about students' progress and connecting with the didactic recommendations (1.3), one could study possible causes that have an influence on the students' progress. Another line for further development is the implementation of the structure of this research in the field of mathematics teacher education. As mentioned above, a research that considers both collaborative work and the introduction of technology is required, specifically applied to pre-service and in-service teacher education. We have seen that the teacher must constantly keep in mind the fact that managing whole-group discussion with technology requires planning in advance. Chapman (2012) poses a considerable amount of challenges for future research focused on the training of teachers. She raises the technological knowledge of the teacher, on the basis that the application of technology in the teaching of mathematics is convenient.

Resumen

El trabajo de tesis doctoral 'Contribución al estudio de la enseñanza y aprendizaje de isometrías mediante discusiones en gran grupo con tecnología' constituye una aportación a la investigación en Educación Matemática enmarcada en las teorías socio-cognitivas. En particular, para el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje en el aula de matemáticas de secundaria se consideran las dimensiones discursiva e instrumental. La interpretación práctica de estas dimensiones se corresponde, respectivamente, con el desarrollo de discusiones en gran grupo y el uso de software de geometría dinámica.

La pregunta principal de investigación es: ¿Cómo se pueden potenciar las relaciones entre enseñanza y aprendizaje de las isometrías mediante la gestión de discusiones en gran grupo y el uso de tecnología? Para dar respuesta a esta pregunta, se plantean dos objetivos: 1) Analizar una sistemática de planificación, implementación y evaluación de una secuencia didáctica con discusiones en gran grupo bajo el soporte de un software de geometría dinámica; 2) Detectar oportunidades de aprendizaje de las isometrías y su aprovechamiento en el contexto de la secuencia didáctica creada a partir de la sistemática anterior. Para la consecución de estos objetivos, se diseña una situación de investigación con base en un grupo clase con alumnado de 14-15 años en un centro de Barcelona.

La fundamentación teórica tiene tres ejes. En primer lugar, se explica la noción de aprendizaje que se tiene en cuenta a lo largo del estudio. Esta noción se aplica al dominio de las matemáticas y se relaciona con la de oportunidades de aprendizaje matemático. En segundo lugar, se introducen dos aspectos del conocimiento del alumno, el curricular y el instrumental. Tanto el conocimiento curricular como el instrumental se entienden como ideales que se persiguen con el aprovechamiento de las diferentes oportunidades de aprendizaje. Por último, se señalan dos aspectos del

conocimiento del profesor, el matemático y el pedagógico, según se enfatice el acceso a los contenidos o bien la gestión de todo el proceso en torno a la enseñanza de dichos contenidos.

De acuerdo con los principios teóricos, la cuestión de investigación y los objetivos científicos, se realiza un diseño metodológico en dos grandes bloques. Atendiendo a la consecución del primer objetivo y con inspiración en la literatura, se integran fases de planificación, implementación y evaluación en un método inédito que denominamos sistemática. Se elabora una secuencia didáctica de resolución de problemas de isometrías, que se ajusta a las orientaciones proporcionadas por la sistemática. Tras el desarrollo en clase de la secuencia de problemas, se recurre a un instrumento externo para comprobar la efectividad de la sistemática en lo que concierne a la aplicación de la secuencia.

La consecución del segundo objetivo puede entenderse como una forma de validar la sistemática. Para ello se diseña un instrumento de análisis inédito a fin de detectar oportunidades de aprendizaje que se hayan generado durante la implementación de la secuencia de problemas. El siguiente paso en la validación de la sistemática es comprobar si algunas de estas oportunidades han sido aprovechadas por los alumnos. El aprovechamiento se explora mediante la comparación de los protocolos de los alumnos –antes y después de la discusión en gran grupo– para evidenciar cambios que sugieran aprendizaje.

El análisis mantiene las dos direcciones determinadas por los objetivos de la investigación. Por un lado, se analiza la aplicación de la sistemática en la planificación, implementación y evaluación de la secuencia de problemas. Se usa el instrumento externo para analizar la efectividad de la secuencia didáctica que se ha diseñado siguiendo las orientaciones de la sistemática.

Por otro lado, se analizan las discusiones en gran grupo mediante el instrumento diseñado a tal efecto para detectar oportunidades de aprendizaje. Para la comparación de los protocolos, se adoptan métodos narrativos centrados en la discusión conjunta de contenidos curriculares teóricos y cambios detectados empíricamente. Tanto el diseño de instrumentos inéditos como su aplicación son parte sustancial del trabajo de tesis.

La consecución del primer objetivo se pone de relieve, primero, con resultados de tipo metodológico en torno al análisis de la sistemática. Estos se corresponden con los instrumentos didácticos 'Árbol del problema' y 'Estadios de la discusión'. Luego, se presenta la sistemática como resultado fundamental, que es el eje vertebrador de esta investigación y una de las aportaciones teóricas más importantes.

Siguen los resultados relativos a las oportunidades de aprendizaje de los estudiantes, organizados en tres direcciones. Por un lado, se tratan aspectos metodológicos sobre cómo evidenciar oportunidades de aprendizaje a través de la presentación del instrumento de análisis 'Detector de oportunidades de aprendizaje'. Este instrumento es una aportación metodológica relevante en el área. Luego, se señalan resultados relativos a la detección práctica de estas oportunidades. Finalmente, se discuten las evidencias de aprovechamiento de algunas de las oportunidades detectadas.

De los resultados teóricos, se desprende que la sistemática promueve la implementación eficiente y productiva de discusiones en gran grupo sobre isometrías con tecnología. Se ha puesto de manifiesto que la implementación de la secuencia de problemas ha generado oportunidades de aprendizaje, siendo algunas de ellas aprovechadas por los alumnos. Por ello, afirmamos que se ha potenciado la relación entre enseñanza y aprendizaje de las isometrías.

Se confirma que las discusiones en gran grupo tienen un papel decisivo en el desarrollo competencial que se espera institucionalmente de los estudiantes. Los resultados señalan progreso matemático desde el trabajo realizado por parejas hasta la reflexión personal posterior a la discusión en gran grupo con uso de tecnología.

Además, se confirma que el uso del software de geometría dinámica potencia competencias de los alumnos en relación con varias habilidades matemáticas. Debido a las características del *software* y de las actividades diseñadas, el entorno tecnológico ejerce un papel clave en el desarrollo del pensamiento matemático de los alumnos. Se notan especialmente avances en la búsqueda de alternativas, la representación con precisión y el establecimiento de conjeturas.

Los instrumentos metodológicos creados ad hoc son útiles para llevar a cabo de forma precisa la planificación, implementación y evaluación de la secuencia de problemas. El instrumento didáctico 'Árbol del problema' deviene un instrumento vertebrador de la participación del profesor en varias fases de la sistemática: anticipación, modo de explotación, monitorización y secuenciación de la implementación didáctica.

El instrumento 'Estadios de la discusión' deviene una herramienta útil para organizar parte del análisis de los datos; además contribuye a preparar el procedimiento para detectar oportunidades de aprendizaje. El instrumento 'Detector de oportunidades de aprendizaje' es principalmente de análisis en el ámbito de la investigación. Éste ayuda a caracterizar el concepto de aprendizaje, desgranando con detalle todas las acciones dentro de una discusión en gran grupo con uso de tecnología.

La estrecha relación entre enseñanza y aprendizaje que se establece a lo largo del estudio, junto con el interés por mejorar las prácticas de educación matemática, llevan a concluir sobre recomendaciones para el aula. Hay consenso acerca de la necesidad de preparar el desarrollo de la práctica educativa, sin embargo no existen instrumentos específicos que supongan herramientas didácticas orientadas a la gestión de discusiones en gran grupo con uso de tecnología. En este sentido, este trabajo de tesis tiene que contribuir a introducir cambios susceptibles de reforzar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, que es el fin último de la investigación en el área.

Summary

The doctoral thesis 'Contribution to the study of teaching and learning of isometries through whole-group discussions with technology' constitutes a progress to the area of mathematics education research under the tradition of socio-cognitive approaches. For the analysis of learning and teaching processes in secondary school mathematics, the discursive and instrumental dimensions have been considered. The practical interpretation of these dimensions corresponds, respectively, with the development of discussions in whole group and the use of dynamic geometry software.

The key question of our research is the following: How can the relationships between learning and teaching isometries be optimized by means of whole group discussions and technology? To answer this question, two goals have been posed: 1) Analysing the planning, implementation and evaluation of a systematic for a didactic sequence with whole group discussions and dynamic geometry software; 2) Detecting learning opportunities and how they are taken advantage of in relation to the didactic sequence created within the systematic. To attain the goals, an experimental situation was designed with a group of 14 and 15-year-old students in a school of Barcelona.

The theoretical foundation has three main axes. First, there is the notion of learning, which is applicable to the field of mathematics in relation to the students' opportunities of learning contents of school mathematics. Second, there is the aspect of knowledge, both curricular and instrumental. Knowledge is understood as an ideal pursued by taking advantage of the opportunities given in the learning process. Third, we point out aspects of the teacher's knowledge: the mathematical and the pedagogical, depending on where the emphasis is put –either on the accessibility of the content or on the management of the teaching process.

In accordance with the theoretical foundation, the research question and the scientific goals, we have created a methodological design with two primary components. For the achievement of the first goal and inspired by concrete literature, the phases of planning, implementation and evaluation are integrated in an unprecedented method, which we call systematic. We have elaborated a didactic sequence for the resolution of isometry problems, in adjustment to the orientations given by the systematic. Through the classroom development of the sequence of problems, an external instrument has been used to prove the effectiveness of such systematic in regard to the application of the sequence.

The accomplishment of the second goal may be understood as a validation of the systematic. To this end, an analytical instrument has been designed to detect the learning opportunities generated throughout the implementation of the sequence. The next step to validating the systematic has been to verify whether the students have taken advantage of any of the opportunities. Their capitalization has been explored through the comparison of the students' protocols –before and after whole group discussion- to underline changes that point to evidence of learning.

The analysis follows the two directions determined by the two goals. On the one hand, the application of the systematic in the planning, implementation and evaluation of the sequence is analysed. The external instrument is then used to analyse the effectiveness of the didactic sequence designed accordingly with the orientations given by the systematic.

On the other hand, whole group discussions are analysed with the instrument created to identify the learning opportunities. For the comparison of the protocols, we adopt narrative methods focused on the discussions of both theoretical curricular content and changes detected empirically. The innovative design of the instruments, as well as its application, is a substantial part of the work.

The accomplishment of the first goal is highlighted, first, with methodological results in relation to the systematic. Those correspond to the didactic instruments 'Problem tree' and "Stages of discussion". Later, the systematic is presented as the fundamental result, the backbone of the study and one of its main theoretical inputs.

Results regarding the students' learning opportunities are organized in three groups. On the one hand, methodological aspects are discussed on how to highlight learning opportunities through the presentation of the tool 'Detector of learning opportunities'. This instrument is an important methodological contribution to the field. We then present the results concerning the practical detection of these opportunities. We finally discuss the evidence of some of the opportunities having been capitalized by at least some of the students.

From the set of theoretical results, it appears that the systematic promotes efficient and productive implementations of whole group discussions on isometry contents with the support of technology. It becomes clear that the implementation of the sequence of problems has generated learning opportunities, some of which have been capitalized by students. Thus we may infer that the understanding of and the relationship between teaching and learning of isometries have been strengthened.

Further, it is confirmed that whole group discussions have a fundamental role in the development of the skills that are institutionally required from the students. Results indicate mathematical progress from the work done in pairs with the use of technology to the subsequent individual reflection after the discussion.

In addition, we confirm that the use of dynamic geometry software enhances the student's skills in relation to mathematical competence. Given the characteristics of the software and the designed activities, the technological environment plays a key role in the organization and development of mathematical reasoning. Noticeable progress is perceived in the search for alternatives, in accurate representation, and in the establishment of conjectures, among others.

The methodological tools created ad hoc have been proved particularly useful to carry out the planning, implementation and evaluation of the sequence of problems. The didactic tool 'Problem tree' becomes a backbone for the teacher's participation in several phases of the scheme: anticipation, mode of operation, monitoring, and sequencing the didactic implementation.

The instrument 'Stages of discussion' becomes a useful tool aimed at organising data analysis, while helping to prepare the precise procedure to detect learning opportunities. The instrument 'Learning opportunities detector' is mainly used in the analysis aimed at characterising the concept of learning within whole group discussions with technology.

The close relationship between teaching and learning established throughout the study, as well as the interest to improve mathematical classroom practices, leads to conclude with several recommendations. There is general consensus on the need to prepare the development of classroom mathematical practices. However, there are no specific instruments involving teaching tools designed to carefully manage whole group discussions with technology. Thus, the current investigation is expected to contribute to the introduction of certain changes likely to improve the teaching and learning of mathematics. From our perspective, such improvement is the ultimate goal of the research in mathematics education research.

Referencias bibliográficas

Anghileri, J. (2006). Scaffolding practices that enhance mathematics learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *9*(1), 33-52.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*(3), 245-274.

Ball, D. L., y Bass, H. (2009). With an eye on the mathematical horizon: Knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures. En M. Neubrand (Ed.), *Proceedings of the 43rd Jahrestagung fur Didaktik der Mathematik* (pp. 11-29). Oldenburg, Alemania: WTM-Verlag.

Chapman, O. (2012). Challenges in mathematics teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *15*, 263-270.

Cobb, P., y Whitenack, J. W. (1996). A method for conducting longitudinal analyses of classroom video recordings and transcripts. *Educational Studies in Mathematics*, *30*, 213-228.

Cobo, P. (1998). *Análisis de los procesos cognitivos y de las interacciones sociales entre alumnos (16-17) en la resolución de problemas que comparan áreas de superficies planas. Un estudio de casos.* Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona.

Departament d'Educació (2007). *Currículum d'Educació Secundària Obligatòria*. Barcelona: Generalitat de Catalunya.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., y Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: Instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *75*, 213-234.

Ellis, A. B. (2011). Generalizing-promoting actions: How classroom collaborations can support students' mathematical generalizations. *Journal for Research in Mathematics Education, 42,* 308-345.

Hershkowitz, R., y Schwarz, B. (1999). The emergent perspective in rich learning environments: Some roles of tools and activities in the construction of sociomathematical norms. *Educational Studies in Mathematics*, *39*, 149-166.

Hoyles, C., y Forman, E. (Eds.) (1995). Special issue: Processes and products of collaborative problem solving: Some interdisciplinary perspectives. *Cognition and Instruction, 13*.

Jaworski, B. (1992). Mathematics teaching: What is it? *For the Learning of Mathematics*, *12*(1), 8-14.

Kieran, C. (2001). The mathematical discourse of 13-year-old partnered problem solving and its relation to the mathematics that emerges. *Educational Studies in Mathematics*, *46*, 187-228.

Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom: Two episodes and related theoretical abductions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *26*(1), 60-82.

Krummheuer, G. (2012). El aprendizaje matemático como participación en procesos de argumentación colectiva. En N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 61-79). Barcelona: Graó.

Laborde, C., y Capponi, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(1-2), 165-210.

Lavy, I. y Leron, U. (2004). The emergence of mathematical collaboration in an interactive computer environment. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9*, 1-23.

Mariotti, M. A. (2012). ICTs as opportunities for teaching-learning in a mathematics classroom: The semiotic potential of artefacts. En T. Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 25-40). Taipei, Taiwan: PME.

Marrades, R., y Gutiérrez, Á. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 87-125.

Mayer, R. (1986). *Pensamiento, resolución de problemas y cognición*. Barcelona: Paidós.

Morera, L., y Fortuny, J. M. (2012). An analytical tool for the characterisation of whole-group discussions involving dynamic geometry software. En T. Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 233-240). Taipei, Taiwan: PME.

Morera, L., Fortuny, J. M., y Planas, N. (2012). Momentos clave en el aprendizaje de isometrías en un entorno colaborativo y tecnológico. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, *30*(1), 143-154.

Morera, L., Planas, N., y Fortuny, J. M. (2013). Design and validation of a tool for the analysis of whole group discussions in the mathematics classroom. En B. Uhuz (Ed.), *Proceedings of the 8th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (en prensa). Antalya, Turquía: ERME.

Morera, L., Souto, B., y Arteaga, P. (2011). *¿Qué puede hacerse antes de llevar un problema al aula?* Comunicación presentada en las XV Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas, Julio de 2011, Gijón (actas en prensa).

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Newell, A., y Simon, H. A. (1972). *Human problem solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Planas, N., e Iranzo, N. (2009). Consideraciones metodológicas para la interpretación de procesos de interacción en el aula de matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 12*(2), 179-213.

Planas, N., y Morera, L. (2012). La argumentación en la matemática escolar: Dos ejemplos para la formación del profesorado. En E. Badillo, L. García, A. Marbà, y M. Briceño (Eds.), *El desarrollo de competencias en las clases de ciencias y matemáticas* (pp. 275-300). Mérida, Colombia: Fondo Editorial Mario Briceño Iragorry.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: Une approche cognitive des instruments contemporains*. París, Francia: Armand Colin.

Saxe, G., Gearhart, M., Shaughnessy, M., Earnest, D., Cremer, S., Sitabkhan, Y., Platas, L., y Young, A. (2009). A methodological framework and empirical techniques for studying the travel of ideas in classroom communities. En B. Schwarz, T. Dreyfus, y R. Hershkowitz (Eds.), *Transformation of knowledge through classroom interaction* (pp. 203-222). Nueva York: Routledge.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics. En D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Matematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). Nueva York: Macmillan.

Schoenfeld, A. (2013). Classroom observations in theory and practice. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, *45*(5), Monográfico en preparación, 'Theoretical frameworks in research on and with mathematics teachers'.

Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being: How mathematical discourse and mathematical objects create each other. En P. Cobb, E. Yackel, y K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating: Perspectives on mathematical discourse, tools, and instructional design* (pp. 37-98). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Sfard, A., y Kieran, C. (2001). Cognition as communication: Rethinking learning-by-talking through multi-faceted analysis of students' mathematical interactions. *Mind, Culture, and Activity*, *8*(1), 42-76.

Sherin, M. G. (2002). A balancing act: Developing a discourse community in a mathematics classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *5*, 205-233.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Smith, M., y Stein, M. K. (2011). *Five practices for orchestrating productive mathematics discussions*. Reston, VA: NCTM.

Stevens, R. (2000). Divisions of labor in school and in the workplace: Comparing computer and paper-supported activities across settings. *Journal of the Learning Sciences, 9(4)*, 373-401.

Taneva, S., Alterman, R., y Hickey, T. (2005). Collaborative learning: Collaborative depth. En B. G. Bara, L. Barsalou and M. Bucciarelli (Eds.), *Proceedings of the XXVII Annual Conference of the Cognitive Science Society* (pp. 2156-2161). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *9*(3), 281-307.

Trouche, L., y Drijvers, P. (2010). Handheld technology for mathematics education: Flashback into the future. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, *42*(7), 667-681.

Verillon, P., y Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, *10*(1), 77-101.

Vermont Department of Education (2000). *Vermont's framework of standards and learning opportunities*. Montpelier, VT: Department of Education.

White, T. (2008). Debugging an artifact, instrumenting a bug: Dialectics of instrumentation and design in technology-rich learning environments. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *13*(1), 1-26.

Yackel, E., Cobb, P., y Wood, T. (1991) Small-group interactions as a source of learning opportunities in second-grade mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(5), 390-408.

Yackel, E. (2001). Explanations, justification and argumentation in mathematics classrooms. En M. van den Heuven Panhuizel (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 9-24). Utrecht, Holanda: PME.