Universitat Autònoma de Barcelona
Departament de Didàctica de la Matemàtica
i de les Ciències Experimentals

LA INFLUÈNCIA DE L'ÚS DE JOCS D'ESTRATÈGIA EN L'APRENENTATGE DE LA RESOLUCIÓ DE PROBLEMES DE MATEMÀTIQUES A L'EDUCACIÓ SECUNDÀRIA

TESI DOCTORAL

Anna Navarro Farré

Director: Dr. Jordi Deulofeu Piquet

Bellaterra, juny de 2013

Al Pau i al Jaume,
Al David,
Als meus pares.

"El joc i la bellesa estan en l'origen d'una gran part de la matemàtica. Si els matemàtics de tots els temps s'ho han passat tant bé jugant i contemplant el joc i la seva ciència, per què no tractem d'aprendre i comunicar les matemàtiques a través del joc i la bellesa?"

M de Guzmán (1984)

AGRAÏMENTS

Fer una tesi doctoral requereix temps, esforç i suport de molta gent que t'envolta. I per això vull agrair a totes aquelles persones que m'han ajudat que arribés al final d'aquesta recerca.

Agraïment especial a en Jordi Deulofeu, director de la tesi i company de treball de les sessions d'ESTALMAT. Per la seva experiència, la seva capacitat de treball, els seus recursos i la seva paciència en les meves arrancades i parades. M'ha brindat una ajuda incondicional, tant professional com personal i sense la qual, no hauria estat possible fer aquest treball.

Agraïment als professors de l'institut Sant Pere i Sant Pau de Tarragona, Frederic i Beatriz, per haver-me facilitat el poder fer la recollida de dades.

El meu agraïment també a les professores de l'institut Campclar de Tarragona, Blanca i Sílvia, pels seus consells de redacció.

Agraïments també per tots els professors i companys d'ESTALMAT, per la seva col·laboració en la recollida de dades i el caliu que m'han ofert des del començament d'aquest gran projecte del qual he tingut la fortuna de formar-ne part. En especial, a la Mireia, a l'Antoni, al Javier i al Jordi, per haver compartit sessions on tant he après i disfrutat. A l'Antoni Vila, pels seus consells i ànims, sobretot a l'inici d'aquest procés. I molt especialment, a la Marta Berini, coordinadora i ànima del projecte, que sempre m'ha recolzat i facilitat el camí.

També vull agrair a cadascun dels alumnes que han participat en la recerca.

Una atenció especial i merescuda a la meva família, per la seva col·laboració total. Als meus pares Carme i Josep, i a la meva germana Montserrat, per animar-me a seguir endavant. Als meus fills Pau i Jaume, per les hores que els he deixat de dedicar. I finalment, vull destacar a en David, per estar sempre al meu costat, per la seva comprensió i suport emocional, que han fet possible que acabés aquest treball.

ÍNDEX

1. INTRODUCCIÓ..9

2. MARC TEÒRIC...15
2.1- Resolució de problemes...17
2.1.1- Educació i resolució de problemes. Antecedents.......17
2.1.2- Definicions de problema......................................27
2.1.3- Tipus de problemes..29
2.1.4- Fases de la resolució de problemes........................34
2.1.5- Factors que influeixen en la resolució de problemes.39
2.1.6- Síntesi..42
2.2- Jocs matemàtics..46
2.2.1- Educació i jocs. Antecedents................................46
2.2.2- Jocs matemàtics: definició...................................49
2.2.3- Classificació de jocs..51
2.2.4- Jocs i matemàtiques..54
2.2.5- Síntesi..57

3. OBJECTIUS DEL TREBALL...61

4. METODOLOGIA DE LA INVESTIGACIÓ...65
4.1- Context d'investigació i població de l'estudi......................67
4.1.1- Institut d'Educació Secundària..............................67
4.1.2- Estímul del Talent Matemàtic (ESTALMAT)............. 67
4.2- Disseny de l'experiència...71
4.2.1- Introducció..71
4.2.2- Elecció dels jocs...72
4.2.3- Elecció dels problemes..74
4.2.4- Elecció de les mostres...75
4.2.5- Metodologia de l'experiència................................76
4.2.6.-Organització i anàlisis de les dades.......................78

5. ORGANITZACIÓ, ANÀLISI DE LES DADES I RESULTATS......................79
5.1- Organització de les dades...81
5.2- Exposició de resultats de cadascun dels problemes per cada grup i cada fase...88
5.3- Anàlisi de la resolució dels problemes..............................90
5.3.1- Comprensibilitat..90
5.3.2- Facilitat...102
5.3.3- Anàlisi de les estratègies heurístiques...................113
5.3.4- Altres estratègies heurístiques no considerades a priori...125
5.3.5- Descripció dels llenguatges de les resolucions dels problemes..129
5.3.6- Síntesi del les quatre característiques estudiades, per cada grup..147
5.4- Millores de les resolucions dels problemes.......................154
5.4.1- Exemples de millores de les resolucions dels problemes..154
5.4.2- La influència dels jocs en la resolució de problemes segons les opinions dels alumnes.................................167

6. CONCLUSIONS...171

BIBLIOGRAFIA...187

ANNEXOS...197

1. Protocol de problemes..199
2. Taules de dades dels problemes.....................................201
3. Entrevistes personals..233

1. INTRODUCCIÓ

1. INTRODUCCIÓ

Juguem? Qui no ha dit mai aquestes paraules? En totes les cultures i al llarg de tots els temps podem trobar jocs que s'han practicat generació darrera generació, i el joc és una activitat característica de la humanitat (Huizinga, 1938).

Per una part trobem molts jocs amb un contingut matemàtic profund i per altra banda trobem una part de la matemàtica amb un gran component lúdic. Per tant, sembla evident que el joc ens pot ajudar a iniciar als més joves a la tasca matemàtica, motivant i estimulant els alumnes i també al professor. De fet, ja s'han fet estudis per mostrar que això és així i que amb determinats jocs podem practicar algunes estratègies de resolució de problemes (Deulofeu, 1995; Corbalán 1997; Mallart, 2008). Aquest treball vol seguir la línia d'investigació d'aquests estudis, encara que el joc no serà el centre pel que fa a l'anàlisi de les dades, sinó que formarà part del disseny metodològic de la recerca. L'antecedent fonamental d'aquest estudi és el treball de recerca (Navarro, 2010) en el qual seguint la tesi de Corbalán (1997) vam estudiar les estratègies heurístiques utilitzades en la resolució de petits jocs d'estratègia. Ja en finalitzar aquell treball ens vam preguntar si la pràctica de jocs d'estratègia més enllà de servir per aprendre a resoldre aquests jocs podia proporcionar als alumnes eines de caràcter heurístic que els fossin útils en la resolució de problemes de matemàtiques encara que els jocs no tinguessin relació amb aquests. Per tant, la idea general que volem estudiar és la influència que el treball amb jocs, concretament amb petits jocs d'estratègia, pot tenir en la millora de l'aprenentatge de la resolució de problemes.

Cal destacar que una part de l'estudi d'aquest treball està fet amb alumnes de secundària i l'altra part d'aquest treball està fet en un context molt especial, amb alumnes també de secundària, però que segueixen un programa d'Estímul del Talent Matemàtic (ESTALMAT).

ESTALMAT sorgeix pel problema del tractament de la diversitat. En el context escolar és evident que els alumnes que componen un grup classe, en qualsevol nivell, no són iguals o homogenis, sinó que tenen característiques i capacitats diferents. En una situació reglada hi ha diversitat en matemàtiques ja que els interessos, les motivacions, les facilitats i dificultats són molt variades en cada alumne. Per això en certs casos extrems pot ser interessant tractar aquesta diversitat amb accions des de fora de l'àmbit reglat. ESTALMAT es preocupa de la diversitat "per dalt", és a dir, de nois amb talent i interès especial per les matemàtiques. Així doncs, l'objectiu d' ESTALMAT és l'estímul del talent precoç en matemàtiques.

En el desenvolupament d'una activitat com aquesta és possible estudiar molts aspectes: aquells referits a la concepció de l'activitat, objectius, estructura, etc. i aquells referits al seu desenvolupament en una realitat concreta. Tant en uns com en els altres, l'anàlisi de les propostes que es fan és un aspecte rellevant. Nosaltres hem escollit una de les maneres d'estimular l'aprenentatge de les matemàtiques, d'acord amb una certa concepció del que realment són les matemàtiques: la resolució de problemes (Halmos, 1980; Polya, 1962). En particular, fent resolució de problemes mitjançant jocs d'estratègia.

Així doncs, és propòsit del present treball analitzar diversos aspectes relacionats amb la resolució de problemes i els jocs. En concret, veure la influència dels jocs en l'aprenentatge de la resolució de problemes, tant amb alumnes heterogenis de secundària, com amb alumnes, també de secundària, però que fan el primer curs d'ESTALMAT a Catalunya.

Per tant, la pregunta general que guia aquest del treball es pot enunciar així: **Treballar amb jocs d'estratègia pot ajudar als alumnes de secundària obligatòria en el procés d'aprenentatge de la resolució de problemes de matemàtiques?**

Per tal de respondre aquesta pregunta analitzem la resolució de problemes d'alumnes de secundària abans i després de treballar amb jocs d'estratègia. Hem seleccionat uns problemes, hem elaborat un protocol de problemes i l'hem passat als alumnes per tal de recollir les dades de les resolucions.

Hem treballat amb els alumnes uns determinats jocs que es poden resoldre utilitzant diferents estratègies heurístiques similars a les que utilitzem resolent els problemes. Novament, hem tornat a passar el protocol de problemes per tal de recollir les dades de les resolucions dels problemes després de treballar els jocs i les diferents heurístiques associades als mateixos. Finalment, hem analitzat diferents aspectes de les resolucions i hem comparat els resultats d'abans i de després de treballar amb els jocs.

La Memòria consta de sis capítols, dels que aquesta breu introducció, per situar el camp de treball i explicar en línies generals l'estructura de la mateixa, constitueix el primer.

El segon capítol conté el desenvolupament del marc teòric rellevant pel treball. L'hem dividit en dues parts: resolució de problemes i jocs matemàtics. En la primera fem un repàs de la resolució de problemes en l'educació matemàtica i els seus antecedents, de les diferents definicions de problema, dels tipus de problemes, les seves fases i dels factors que influeixen en la seva resolució. Acabem amb una síntesi dels aspectes més rellevants pel nostre treball. En la segona part abordem els Jocs Matemàtics parlant de jocs i educació i els antecedents que tenim, amb les definicions i classificacions de jocs i establint relacions entre jocs i matemàtiques, i en particular entre jocs d'estratègia i resolució de problemes. Acabem amb una síntesi d'aquesta part, aclarint quines paraules i amb quin significat les farem servir en el nostre treball.

En el tercer capítol ens centrem en la definició dels objectius de la investigació amb més precisió.

El quart capítol té com a títol "metodologia de la investigació". En la primera part es fa una descripció de les poblacions i una anàlisi detallada del context d'investigació del cas dels alumnes de secundària i del cas del context especial ESTALMAT. S'explica l'origen, justificació i descripció d'ESTALMAT. Es detallen les característiques dels nois amb talent, en especial del grup observat. En la segona part, s'explica el disseny de la recerca i en particular dels instruments utilitzats per a l'obtenció de dades de la investigació, l’elecció dels problemes, dels jocs, i de les mostres, i finalment, la metodologia de la investigació.

El cinquè capítol està dedicat a l’organització i anàlisi de les dades. S’aborda l’organització de dades i els resultats dels problemes obtinguts abans i després de treballar els jocs, tot exposant les dades i fent un estudi i comparació de les mateixes. En l’últim apartat s’exposen les millores obtingudes després de treballar els jocs a partir d’un estudi de casos.

En el sisè capítol podem trobar-hi les conclusions de l’estudi i les implicacions didàctiques. En aquest capítol és on es sintetitza tot el procés d’investigació del treball recollint els resultats que s’han anat elaborant a partir de l’anàlisi de les dades.

Finalment es presenta la Bibliografia utilitzada i es completa la Memòria amb els Annexos: 1. Protocol de problemes, 2. Taules de dades dels problemes, 3. Entrevistes personals

2. MARC TEÒRIC

2. MARC TEÒRIC

Aquest capítol està dividit en dos apartats. En el primer fem un repàs de la resolució de problemes en l'educació matemàtica i els seus antecedents, de les diferents definicions de problema, dels tipus de problemes, les seves fases i dels factors que influeixen en la seva resolució. Acabem amb una síntesi dels aspectes més rellevants pel nostre treball. En el segon apartat abordem els Jocs Matemàtics parlant de jocs i educació i els antecedents que tenim, amb les definicions i classificacions de jocs i establint relacions entre jocs i matemàtiques, i en particular entre jocs d'estratègia i resolució de problemes. Acabem amb una síntesi d'aquesta part, aclarint quines paraules i amb quin significat les farem servir en el nostre treball.

2.1- Resolució de problemes

2.1.1- Educació i resolució de problemes. Antecedents

En primer lloc, creiem important remarcar que la resolució de problemes de matemàtiques (RP) en el marc escolar és un camp d'estudi relativament recent, i amb una importància també relativament recent, malgrat la seva rellevància històrica. Lester (1994), en una interessant revisió de l'estat de la recerca en RP durant el període 1970-1994, utilitzant com a indicadors els articles publicats al *Journal for Research in Mathematics Education*, es recolza en Kilpatrick qui el 1969 caracteritzava la literatura sobre RP en matemàtiques en aquell moment com a ateòrica, no-sistemàtica i descoordinada, interessada gairebé de forma exclusiva en els problemes verbals estandaritzats dels llibres de text i restringida a la quantificació de les conductes en RP.

Si parlem de recerca en Resolució de Problemes i el seu naixement, és obligat parlar de Georg Pólya, pensador i matemàtic d'origen hongarès, que a mitjans de segle XX i partint de les idees de Descartes, funda l'anomenada heurística moderna, ciència que estudia el comportament humà davant dels problemes i tracta d'esbrinar les operacions mentals útils per resoldre'ls.

Pólya (1945) examina mitjançant la introspecció el comportament d'un resolutor ideal de problemes i elabora en conseqüència un model del procés de resolució dividit en fases que aquest resolutor recorre linealment, passant d'una a una altra només quan aquesta s'ha acabat.

Les quatre fases del model són:

- comprensió
- concepció i elaboració d'un pla
- execució del pla
- recapitulació o mirada retrospectiva

El model del Pólya ve acompanyat per un conjunt de preguntes de naturalesa heurística. Diu que les regles heurístiques (preguntes i suggeriments que determinen la posada en marxa de les operacions mentals adequades per a la resolució de problemes) han de complir dues propietats:

1) han de ser generals (per a qualsevol classe de problema)

2) han de ser naturals (és a dir poden sorgir dels mateixos alumnes)

Pólya afirma també que el professor no s'ha d'imposar mai a l'alumne encara que no és bo deixar-lo tot sol. Proposa el mètode d'interrogació progressiva: ajudes progressives en forma de preguntes que puguin suggerir un camí de resolució. En cap cas s'ha de donar les coses fetes als alumnes.

Distingeix dos grans tipus de problemes:

1) Problemes per resoldre: l'objectiu és produir, construir o trobar un objecte, un nombre, una quantitat, un punt, una funció, etc.

2) Problemes per demostrar: problemes en els quals, a partir d'una hipòtesi, es vol demostrar una tesi. Es troben principalment en l'àmbit universitari, encara que també són possibles a secundària.

El mètode de Pólya per ensenyar a resoldre problemes està detallat en el seu llibre *How to solve it* (1945). Aquest llibre, també conté un diccionari d'heurística. El següent llibre de Pólya, *Mathematics and Plausible Reasoning* (1954), està dedicat a l'estudi de l'estructura formal dels raonaments que es fan quan es resolen problemes i que no poden ser descrits amb els patrons clàssics deductius de la lògica: els que en el diccionari d'heurística Pólya va començar anomenant-los raonaments heurístics i que aquí anomena "plaussibles". Finalment, el seu darrer llibre, *Mathematical discovery* (1962-1965) està dividit en dos volums. En el primer, Pólya parla de mètodes (cartesià, del de dos llocs, inducció...) per a la resolució de problemes i en el segon, de models generals que engloben grans classes de maneres d'elaborar plans de resolució.

La dècada dels 80 es pot considerar com l'inici de la RP com a camp d'estudi dins la Didàctica de les Matemàtiques. Fins aquell moment la RP era us aspecte poc tractat com ho mostren l'informe publicat per l'Educational Studies in Mathematics (1978), elaborat per l'ICMI amb el títol de *Changes in Matehmatics Education Since te Late 1950's- Ideas and Realisation* i el fet que, el congrés ICME-4 (Berkeley, 1980) va abordar la RP amb un sol dels seus grups de treball, grup anomenat "Aspectes poc habituals en els programes". A partir d'aquest moment amb la publicació *de An agenda for action* del NTCM es es produeix el canvi com es pot veure per la importància donada a la RP en els congressos ICME-5 (Adelaida, 1984) i ICME-6 (Budapest, 1988) que esdevenen una prova de la rellevància adquirida per la RP en pocs anys.

A. H. Schoendfeld és el deixeble més conegut de Pólya. En el llibre *Mathematical Problem Solving* (1985) analitza, observant protocols de resolució reals, els comportaments que els alumnes desenvolupen mentre resolen problemes i intenta categoritzar les seves conductes i descriure el conjunt del procés com un conjunt d'episodis, amb el qual elabora un model d'actuació.

Davant de la persistència en el fracàs de molts resolutors es pregunta quin tipus d'explicació o quines característiques Pólya no havia tingut en compte.

Aquest autor considera que les regles heurístiques que proposa Pólya no són suficients. Segons ell, cal, a més, una heurística de control per tal que l'alumne reflexioni sobre el que està fent. Shoendfeld introdueix components (heurístiques, de gestió, recursos i sistemes de creences) per les carències dels resolutors (Shoendeld, 1992).

Els components pel coneixement i comportament necessari per una adequada caracterització de la tasca de resolució de problemes són:

- Recursos: Coneixement matemàtic que té l'individu
    - Intuïcions
    - Fets
    - Procediments i algoritmes
    - Rutines

- Heurístiques: Estratègies i tècniques per fer familiar un problema
    - Dibuixar figures, tot introduint una notació adequada
    - Reformular problemes
    - Fer tests i procediments de verificació

- Control: Decisions globals per triar i implementar recursos i estratègies
    - Planificació
    - Conscienciació de fets metacognitius.

- Sistemes de creences: Punt de vista personal
    - Sobre si mateix
    - Sobre l'entorn
    - Sobre el tema
    - Sobre les matemàtiques

Schoendfeld creu que la pràctica de resolució de problemes no és suficient per aprendre a resoldre problemes, ja que cal, entre altres, prendre consciència sobre el procés desenvolupat, és a dir, sobre els processos metacognitius (Shoendeld, 1992).

En la mateixa direcció J. Mason, L. Burton i K. Stacey en el seu *llibre Pensar matemáticamente* (1982) matisen la idea de metacognició i proposen que els alumnes es converteixin en els seus propis monitors de control de la resolució.

Kilpatrick (1985) manifesta que s'ha produït un important canvi del qual en fa una revisió. Distingeix quatre perspectives diferents sota les quals s'havia abordat fins aleshores el paper que juga el problema i els seus processos de resolució en la literatura de recerca en educació matemàtica:

- a) Des de la perspectiva psicològica: el problema és una activitat lligada al subjecte, normalment motivat.

- b) Des de la perspectiva socioantropològica: el problema és una tasca pròpia d'una situació de transacció, entenent l'aula de matemàtiques com una situació social construïda en comú per tots els participants, on l'alumnat i el professorat interpreta cadascú accions i intencions.

- c) Des de la perspectiva matemàtica: el problema és una construcció, es pensa que la matemàtica és creada en un procés de formulació i resolució de problemes.

- d) Des de la perspectiva pedagògica: el problema és vehicle; curricularment pel paper que juguen els problemes en l'educació matemàtica, i didàcticament per ajudar a com ensenyar a resoldre problemes.

Kilpatrick (1985) considera que l'entrada en el domini de la RP és deguda als treballs en problemes verbals, i cita, com a contribució rellevant, la classificació feta per Polya (1962) des d'una perspectiva pedagògica, malgrat en general, fa una crítica a l'excessiva dependència cap als seus treballs durant molts anys.

Kilpatrick (1985) va agrupar els enfocaments sobre com ensenyar a resoldre problemes en cinc categories:

- osmosis: consisteix en aprendre els mètodes o eines heurístiques que estan presents en els problemes, resolent-ne molts. Molts autors, entre ells Lester (1985), han dit que fer molts problemes al llarg de molt de temps és essencial.

- memorització: ve dels enfocaments d'ensenyança influïts per una anàlisi jeràrquica de les eines d'aprenentatge en els que la solució d'un problema es descompon en procediments atòmics que s'ensenyen un a un. També està present en plantejaments que pretenen ensenyar heurística. En aquests les heurístiques es tracten com procediments perfectament determinats que cal seguir pas a pas. En certa manera s'algoritmitza l'heurística i s'ensenyen explícitament els algoritmes obtinguts. Un exemple el trobem en l'article de Shoendfeld (1979) *Explícit Training as a Variable in Problem Solving Performance*.

- Imitació: quan es situa als alumnes en presència d'un model de resolutor competent i s'ensenya d'alguna manera a analitzar aquesta conducta competent, amb conductes pròpies o alienes. Un exemple: Problem solving in the Mathematics Currículum: A report, Recomendations and an Annotated Bibliography (Shoendfeld, 1983a) on el professor actua com a model de resolutor

- Cooperació: els alumnes no han de ser capaços simplement d'observar i analitzar conductes competents per intentar imitar-les, sinó que han de ser capaços d'observar i analitzar també les conductes dels seus companys per cooperar amb ells

- Reflexió: apareix un component metacognitiu. Un exemple el trobem en Shoendfeld (1992) *What's All the Fuss about Metacognition?,* on explica com incorpora aquests elements en una classe de resolució de problemes

Les causes més importants del baix rendiment de la nostra ment són els bloqueigs de diverses classes que la dominen (Guzmán, 1991). Hi ha bloqueigs culturals, inculcats des de petits, n'hi ha d'altres que són bloqueigs emocionals, i d'altres que provenen de l'ambient de cadascú.

El primer pas essencial per al tractament dels bloqueigs consisteix a conèixer-los. Un cop coneguts, segons Miguel de Guzmán, es poden seguir tres principis per pensar millor:

- Tenir un model ideal de forma de pensar i intentar ajustar-s'hi.
- Fer molta pràctica amb la utilització d'aquest model.
- Tenir una forma d'examinar i avaluar el nostre procés de pensament.

El model ideal es pot adquirir seguint un conjunt d'estratègies globals que poden ajudar en l'activitat mental de tipus general i que posteriorment es converteix en tècniques específiques quan es passa a diferents camps particulars del pensament.

Per tal d'assimilar a fons els mecanismes de reacció dels experts és molt útil exercitar-se, no només a resoldre molts problemes, sinó també a examinar els propis processos mentals.

Per tal d'examinar-los, Guzmán proposa:

- elaborar el protocol del procés (acta que dóna constància dels fenòmens interessants que ocorren mentre es resol uns problema)
- analitzar el protocol (per conèixer les formes de procedir)
- avaluar el procés (comparar la realització amb altres possibles formes de procedir)

Pel que fa a l'esquema de resolució de problemes, el model de Guzmán està basat, com el de la majoria d'autors, en les idees de Pólya i en gran mesura coincideix amb molts altres models més recents, com Mason, Burton, Stacey (1982) o Schoendfeld (1985).

L'esquema que proposa és el següent:

- Familiaritzeu-vos amb el problema: tracteu de resoldre a fons la situació, amb tranquil·litat, al vostre ritme. Jugueu amb la situació

- Busqueu estratègies: comenceu pel més fàcil, experimenteu, feu-vos un esquema, una figura, un diagrama, una notació apropiada, busqueu un problema similar, utilitzeu la inducció.

- Seguiu la vostra estratègia: seleccioneu les millors idees de la fase anterior, actueu amb flexibilitat, no us capfiqueu amb una sola idea.

- Reviseu el procés i traieu-ne conseqüències: examineu a fons el camí més simple, mireu fins on arriba el mètode, reflexioneu sobre el propi procés i traieu-ne conseqüències per al futur.

Luis Puig (1996), en el llibre *Elementos de Resolución de problemas*, elabora un model de competència que l'associa a l'estil heurístic de resolució de problemes. L'elabora tenint en compte la investigació dels poders del subjecte de Pólya i els components del model d'actuació de Shoendfeld.

Descriu el model en forma de llista:

- destreses amb potencial heurístic (no té caràcter de transformació del problema)
- suggerències heurístiques (senyalen una direcció del treball però no es refereix a cap procediment concret per buscar o produir la problema)
- destreses amb potencial heurístic (no té caràcter de transformació del problema)
- eines heurístiques (es refereixen a un procediment determinat que permet a partir del problema a resoldre, formular un problema relacionat)
- mètodes de resolució amb contingut heurístic
- patrons plausibles

- gestor instruït (és el que no només sap que ha de controlar el procés sinó que coneix quines són aquestes tasques concretes associades a l'ús d'eines heurístiques)
- concepció de la naturalesa de la tasca de resoldre problemes

A més, en el model de Puig hi són presents altres elements com coneixements conceptuals, processos matemàtics, esquemes, algoritmes, rutines, models, etc.

La consideració de les eines heurístiques com a instruments de transformació del problema, porta a parlar de l'espai de problemes entès com el conjunt de problemes generats per eines, mètodes o suggerències heurístiques i les relacions entre ells.

Segons Puig (1996), la teoria de Newell & Simon (1972) es basa en l'examen detallat de les dades subministrades per protocols de subjectes resolent problemes en veu alta i adopta la forma adequada per convertir-se en un programa d'ordenador que produeix efectivament les conductes que pretén explicar i no sols descriure.

Puig, a partir de l'estudi de casos, pretén examinar les maneres com apareixen o es manifesten els elements del model de competència en l'actuació d'alumnes que han estat instruïts en heurística. Observa el conjunt de les conductes dels alumnes resolent problemes que són observables i pren dades dels fets de cognició que estan relacionats amb els elements del model de competència. La tècnica d'obtenció de dades deriva de la que va elaborar Schoendfeld i consisteix en plantejar problemes a parelles de resolutors perquè les resolguin en veu alta, sense que l' investigador intervingui en cap moment. Les sessions es graven en vídeo i s'elabora després un protocol escrit que s'analitza.

Anys més tard, Lester (1994), planteja les 4 àrees sobre les quals s'ha produït un major progrés en la recerca formulant-les com a preguntes:

a) Què fa que un problema sigui difícil per als estudiants? Goldin (1982) i McClintock (1979) van fer un treball en aquesta línia de recerca la qual es va reconduir vers l'estudi de les interaccions entre les variables de la tasca i les característiques dels resolutors.

b) En què es diferencien els bons i dolents resolutors? Schoenfeld inicia una sèrie de treballs en aquesta línia (1985a, 1987a). Lester recolzant-se en Lesh (1982), fa constar que determinant amb precisió les maneres en les quals els experts resolen els problemes i instruint d'aquestes maneres als novells en curts espais de temps pot no tenir com a resultat les conseqüències desitjades.

c) Què se sap sobre l'ensenyament de la resolució de problemes? Callejo (1991), basant-se en Burkhardt i Schoenfeld, considera que els projectes d'aprenentatge en resolució de problemes giren al voltant de tres elements: la pràctica, l'adquisició de coneixements de mètodes generals de resolució de problemes o d'heurístics particulars i la reflexió sobre les tasques (pròpies i alienes).

d) És la metacognició la força directiva en resolució de problemes? Es consideren les accions metacognitives com una força directiva en la resolució de problemes, i amb influències sobre les conductes cognitives en totes les fases del procés de resolució.

Segons Castro (2008), Schoendfeld, en la seva revisió de 1992, reconeix que els intents realitzats per ensenyar als alumnes estratègies generals de resolució de problemes no han tingut èxit i considera que potser sigui millor ensenyar estratègies específiques lligades a la classe de problemes. A més de les estratègies, Schoendfeld (1992) centra la seva atenció en la incorporació de nous components de la resolució de problemes que puguin explicar les actuacions dels resolutors: coneixement base, aspectes metacognitius, aspectes afectius i el sistema de creences i pràctiques.

Schoenfeld (1992) expressa la necessitat de major claredat en el significat dels termes, del perfeccionament dels mètodes de recerca. Fa notar la importància de la comprensió de les interaccions entre els aspectes de l'activitat de resolució de problemes, i la necessitat de millorar els instruments de la seva avaluació. També considera el paper de les creences i afectes en la resolució de problemes, i la necessitat de major atenció als aspectes relacionats amb la instrucció. Segons, Shoendfeld (1992), a l'estat espanyol, sobre recerca en resolució de problemes en els darrers anys, a banda dels treballs de Callejo (1994, 1999), Carrillo (1996) i Puig (1988, 1996), es destaquen els treballs de Fayos (1996), Zorroza (1994) i Cobo (1998), en el marc dels processos cognitius. També els treballs de Gascón (1989), en el marc de l'heurística, i de Corbalán (1997) sobre els jocs d'estratègia a l'aula; els treballs que estudien la relació entre els processos de resolució de problemes dels alumnes i diferents aspectes de la instrucció (Plata, 1998; Hernández, 1996).

Castro (2008) analitza les alternatives al model d'actuació clàssic d'ensenyar estratègies de resolució de problemes, els models de competències: uns centrats en l'aspecte de representació (Golding, 1987), altres centrats en competències formals (Socas, 2001) i altres centrats en una component heurística dins d'un model teòric local que incorpora l'anàlisi de tasques (Puig, 1996).

La rellevància actual de la resolució de problemes té relació amb el fet que en la 1a dècada del S.XXI s'han reformulat els currículums de molts països introduint la idea de competència (Departament d'Educació, 2007; Niss 2011). Malgrat que la competència matemàtica es subdivideix en altres subcompetències i aquestes no coincideixen en els diferents currículums, el que si és clar, és que en tots els models, la resolució de problemes apareix com a una d'aquestes subcompetències.

2.1.2- Definicions de problema

Schoendfeld (1992) afirma que la literatura sobre resolució de problemes de matemàtiques és difícil d'interpretar perquè "problema" i "resolució de problema" tenen i han tingut significats variats i en ocasions contradictoris.

Puig (1996) recull una revisió de les diferents definicions del terme "problema" segons diferents perspectives: des de la psicologia, des de la intel·ligència artificial, des de l'educació matemàtica (problema versus exercici). Podem classificar les definicions en dos grans grups: les que consideren el problema de forma independent al resolutor i les que incorporen la dependència al resolutor.

Dins del primer grup tenim una de les més clàssiques definicions de problema o de "resoldre un problema". Segons Pólya (1945):

"resoldre un problema consisteix a trobar un camí allà on prèviament no es coneixia tal, trobar una sortida per a una situació difícil, per a vèncer un obstacle, assolir un objectiu desitjat que no pot ser immediatament assolit per mitjans adequats".

Aquesta definició considera el problema de forma independent al resolutor.

Dins del segon grup tenim la idea de problema des de la perspectiva psicològica on s'incorpora la dependència al resolutor. Kilpatrick (1985) considera que des de la perspectiva psicològica es veu la idea de problema com a activitat, en qualsevol cas, però lligada al subjecte. Diversos autors coincideixen que una de les definicions més clàssiques és la que dóna Brownell (1942) en el seu text *Problem Solving*:

"La resolució de problemes es refereix a) tan sols a tasques conceptuals o perceptives, b) la naturalesa de les quals el subjecte que és capaç de comprendre gràcies a la seva naturalesa original, a un aprenentatge previ, o a l'organització de la tasca, però c) per a les quals, en aquell moment, desconeix qualsevol camí directe de realització. d) El subjecte experimenta perplexitat davant la situació problemàtica, però no experimenta total confusió (...). La resolució del problema resulta ser el procés mitjançant el qual el subjecte es desprèn del seu problema (...) Definits així, es poden pensar els problemes com si ocupessin un territori intermedi en un conjunt que s'estén des dels 'enigmes' en un extrem fins a les situacions completament familiars i comprensibles a l'altre" (Brownell, 1942, pàg. 416).

Dins d'aquesta perspectiva general, la idea de problema pot venir formulada segons la teoria psicològica en la qual s'emmarca. Brownell esmenta a Greeno que defineix què és un problema per al conductisme, on ens descriu de quina naturalesa es allò que no se sap fer o quina és la possible font de perplexitat:

"(...) es presenta un problema quan la resposta que és necessària per a aconseguir una fita és menys forta que altres respostes, o quan es requereixen vàries respostes i és poc probable que totes elles puguin ser executades" (pàg. 239).

D'altra banda, Callejo i Vila (2004) donen una definició que és especialment útil per a l'àmbit educatiu i que recull els principals elements exposats anteriorment. Per ells, un problema de matemàtiques és:

"(...) situació, plantejada amb finalitat educativa, que proposa una qüestió matemàtica el mètode de resolució de la qual no és immediatament accessible a l'alumne o resolutor o grup d'alumnes que intenta resoldre-la, perquè no disposa d'un algoritme que relacioni les dades i la incògnita o d'un procés que identifiqui automàticament les dades amb la conclusió, i per tant, haurà de buscar, investigar, establir relacions, implicar el seu afecte, etc. per afrontar una situació nova" (pàg. 31,32).

2.1.3- Tipus de problemes

Són molts els criteris que ens poden permetre classificar les diferents tipologies de problemes. Mallart (2008) exposa tres classificacions diferents dels problemes: A) tenint en compte els coneixements i les experiències prèvies del resolutor, B) tenint en compte la diferència entre problemes i exercicis i, C) tenint en compte la finalitat.

A) Classificació relacionant els coneixements i les experiències prèvies del resolutor

Pólya (1945) va proposar una classificació dels problemes en relació als coneixements i a les experiències prèvies dels alumnes fent referència també a la situació on són proposats:

a) els problemes en els quals la regla que cal aplicar acaba de ser presentada o estudiada a classe
b) els problemes en els quals cal escollir la regla que es va treballar a classe recentment
c) els problemes en els quals cal escollir una combinació de regles prèviament estudiades
d) els problemes en els quals cal investigar: es tracta de problemes la resolució dels quals exigeix una combinació original de regles i l'ús del raonament plausible

B) Classificacions centrades en la diferència entre problemes i exercicis

Existeix un intent de caracteritzar la idea de problema com a contraposició a la idea d'exercici, associant a la idea d'exercici l'existència de procediment o algorisme que condueix a la solució, pressuposant-ne un caràcter mecànic i immediat, i reservant la idea contrària a la idea de problema. Els exercicis rutinaris s'organitzen per tal de practicar sobre una tècnica matemàtica particular que prèviament ha estat demostrada a l'estudiant. L'estructura general d'aquests tipus d'exercicis és:

1. Un treball s'usa per tal d'introduir una tècnica
2. La tècnica s'il·lustra
3. Es donen més treballs per tal que l'estudiant practiqui les habilitats i les tècniques il·lustrades.

S'assumeix que havent treballat aquests tipus d'exercicis, els estudiants tenen una nova tècnica en el seu bagatge matemàtic. La suma total de les tècniques del currículum reflecteixen el cos de les matemàtiques que l'estudiant s'espera que domini. El conjunt de tècniques que l'estudiant domina constitueix el seu coneixement matemàtic.

Goldin (1982) amb la finalitat d'analitzar la diferència entre exercici i problema, va construir una escala on situar els salts d'una idea a l'altra contenint els següents punts de referència:

1) es sap la resposta
2) es té un procediment per arribar a la resposta, se sap que es té i se sap descriure el procediment abans d'executar-lo
3) ídem, però no se sap descriure
4) ídem, però no s'està segur que el procediment sigui l'adequat, o de quin dels procediments que es tenen és l'adequat
5) no es té cap procediment per al problema

Aquesta idea també es presenta en la següent definició de Kantowski (1980) on diu que un problema és una situació per a la qual l'individu que s'enfronta a ella no té un algorisme que garanteixi una solució; el coneixement rellevant d'aquesta persona ha de ser aplicat d'una nova forma per tal de resoldre el problema. Aquí es fa explícita la idea d'aplicació del coneixement en una forma no mecànica, idea recollida per Carl (1989) que pensa que la resolució de problemes és el procés d'aplicació dels coneixements prèviament adquirits a situacions noves i no familiars.

Carrillo (1996) afirma que el concepte de problema ha d'associar-se a l'aplicació significativa (no mecànica) del coneixement matemàtic a situacions no familiars, la consciència de tal situació, l'existència de la dificultat a l'hora d'enfrontar-se a ella i la possibilitat de ser resolta aplicant l'esmentat coneixement.

Schoenfeld (1985) afirma que ser un problema no és una propietat inherent d'una tasca matemàtica. És una relació entre l'individu i la tasca el que fa de la tasca un problema per a aquella persona. La paraula problema és una tasca que és difícil per a l'individu que està intentant resoldre-la. Aquesta dificultat ha de ser un embolic intel·lectual més que de càlcul. Si es té accés a un esquema de solució per a una tasca matemàtica, aquesta tasca és un exercici i no un problema.

Tal com diu Mallart (2008), Gaulin (1982) distingeix entre problemes rutinaris (exercicis) i problemes no rutinaris expressant que la diferència entre un exercici i un verdader problema és relativa. Allò que per a alguna persona constitueix un problema no rutinari pot molt bé ser un simple exercici per a una altra; tot depèn dels coneixements i experiències anteriors de l'alumnat. La idea de relativitat esmentada per Gaulin (1982), i que tant Pólya (1945) com Goldin (1982) presenten en forma d'escala, la precisa més Callejo (1994) quan vol distingir entre les idees de problema rutinari i problema no rutinari atenent a quatre aspectes: el comportament a seguir per l'alumne per arribar a la solució, l'objectiu que persegueix el professor quan els proposa, els temps a utilitzar i la dimensió afectiva.

Contreras (1999) posa l'èmfasi en efectes negatius, conseqüència de considerar els problemes com a vehicle per a aplicar (paper definit com a il·lustratiu) i per a poder provar que es coneix un determinat concepte, fet, mètode o procediment rutinari.

C) Classificacions centrades en la finalitat

El paper del professorat s'incorpora en la classificació de Butts (1980) que distingeix entre: exercicis de reconeixement (el resolutor només ha de buscar en la seva memòria el resultat), exercicis algorísmics (el resolutor ha d'executar un algorisme de forma automàtica), problemes d'aplicació (el resolutor coneix un procediment per a resoldre el problema i ha de justificar que aquest procediment és l'adequat per a obtenir la solució), problemes de recerca (el resolutor ha de crear un procediment de solució), situacions problemàtiques (en l'enunciat de les quals no s'ha precisat què és el que cal fer i aquesta és la primera tasca del resolutor).

Borasi (1986) parla d'exercicis, problemes verbals, enigmes, prova d'una conjectura, problemes de la vida real, situacions problemàtiques i situacions, on les diferències entre aquestes categories s'establirien en funció d'aspectes com l'existència de context, el tipus de formulació, les solucions i els mètodes d'abordatge.

Una classificació propera a aquestes, que inclou el paper del professorat i fa referència al context és la que efectua Blanco (1993): exercicis de reconeixement; exercicis algorísmics o de repetició (reforçar alguna expressió matemàtica determinada o potenciar habilitats de càlcul); problemes de traducció simple o complexa (en l'enunciat apareix tota la informació necessària per a la seva resolució i indica l'estratègia a seguir); problemes de processos (la forma de càlcul no apareix clarament delimitada, possibilitant la conjectura de diferents camins per tal de trobar la solució i ajuden a desenvolupar estratègies de comprensió, planificació i de solució de problemes); problemes sobre situacions reals (el mètode d'aproximació a aquests tipus de problemes acostuma a suposar tres passes principals: la creació d'un model matemàtic de la situació, l'aplicació de tècniques matemàtiques al model i la traducció a la situació real per tal d'analitzar la seva validesa); problemes d'investigació matemàtica (suggereixen la recerca d'algun model per trobar la solució); problemes de puzles (pretén mostrar el potencial recreatiu de les matemàtiques, obligant a flexibilitzar la forma d'atacar un problema i a considerar diverses perspectives donat que el context i la formulació acostumen a ser enganyosos i la seva solució no suposa necessàriament processos matemàtics, i sí que poden resoldre's mitjançant una idea feliç).

Per a l'anàlisi dels problemes, Vila (2001) distingeix cinc tipus de problemes:

- exercicis: exercicis són proposats amb la finalitat de mecanitzar determinats procediments presentats a l'aula o ajudar a la comprensió de determinats conceptes
- qüestions pràctiques: són proposades estretament relacionades amb coneixements matemàtics i tenen com a finalitat fixar aquests coneixements mitjançant una connexió amb la vida real o amb una pseudoaplicació de les matemàtiques
- problemes no contextualitzats: són proposats als alumnes amb la finalitat de facilitar un ús significatiu dels coneixements matemàtics presentats a l'aula
- situacions problema: es proposen per tal de que els alumnes construeixin (Gil i altres, 1988) els coneixements o els processos

matemàtics necessaris per a resoldre el problema. No es busca tant la funcionalitat sinó la construcció del saber.

- problemes d'estratègia: es proposen amb la finalitat del treball en l'elaboració d'estratègies intel·lectuals que puguin ser útils en un ampli rang de situacions. No és tant important la construcció d'un saber com l'elaboració i explicació de l'estratègia seguida

2.1.4- Fases de la resolució de problemes

Durant el segle XX molts autors es plantejaren quantes fases tenia la resolució de problemes. Les versions més importants es recullen a continuació.

Segons Mallart (2008), Dewey (1910) descrivia les següents fases en el procés de resolució d'un problema real qualsevol: identificació de la situació problemàtica; definició precisa del problema; anàlisi mitjans-finalitat, pla de resolució; assumpció de les conseqüències; avaluació de la solució, supervisió, generalització. I Wallas (1926) descrivia les quatre etapes de l'acte creatiu: familiarització, incubació, inspiració i verificació, igual com feia Poincaré (1903) que anomenà il·luminació la tercera fase.

Pólya (1945) descriu les següents quatre fases en la resolució d'un problema matemàtic: comprensió del problema, disseny d'un pla, execució del pla, verificació de la solució obtinguda. Aquesta descripció és bàsicament introspectiva, que descriu les accions desenvolupades per un resolutor ideal, o sigui aquell resolutor que sempre avança directament cap a la solució final del problema, sense necessitat d'abandonar o de refer cap camí iniciat.

Mason, Burton i Stacey (1982) descriuen el procés de resolució de problemes donant importància cabdal a allò que se sent: els estats afectius, d'ànim o emocionals. Fa referència a uns processos (particularització, generalització, conjecturació) a unes fases (abordatge, atac, revisió) i a uns estats, i no és tant un model descriptiu o analític sinó un model d'ajuda instruccional (Callejo, 1994).

Schoenfeld (1985) descriu minuciosament les conductes i accions desenvolupades per subjectes reals. Indica que no es troben fases perfectes, o en altres paraules que les fases no tenen necessàriament un caràcter lineal. Observa les següents distincions: anàlisi i comprensió, disseny-planificació, exploració, execució i verificació.

Carrillo (1996) manifesta la idea que no hi ha fases perfectes i el nucli més important de la qüestió no està tant en l'etiquetatge com en la concepció de la provisionalitat de l'estat en què es troba el resolutor en relació amb les fases del problema. Concep les fases com estats pels quals es passa i als quals es pot tornar al llarg del procés de resolució.

A continuació, segueixen quatre punts que recullen les quatre fases que proposà Pólya (1945): abordatge, disseny d'un pla, execució del pla i revisió.

Abordatge

Resulta necessari abans de començar a treballar en una direcció determinada familiaritzar-se a fons amb el problema. L'abordatge comença quan un s'enfronta al problema. Les línies a seguir són molt clares: un ha de fer-se amb el problema de dues maneres distintes; adonant-se de la informació que es dóna, i determinant què és el que es pregunta realment. Així, resulta útil estructurar la feina en la fase d'abordatge responent a les tres preguntes següents: Què és el que sé? Què és el que vull? Què puc usar?

Mason, Burton i Stacey (1982) entenen la fase d'abordatge com tota aquella activitat encaminada a:

- familiaritzar-se, comprendre i assimilar el missatge
- aclarir els propòsits fites i tipus de respostes que s'han de produir
- seleccionar, repassar i reposar idees, coneixements... que de forma immediata vénen al cap a mesura que s'entra en matèria

Segons aquests autors, en aquesta fase es poden desenvolupar algunes de les següents accions: organitzar la informació, ampliar la informació, elaborar i contrastar conjectures, definir termes i relacions, introduir una representació o una notació.

Aquesta fase, en certa manera, equivaldria a les fases d'Identificació, Comprensió, Planificació i Exploració (parcialment doncs només es prenen les primeres decisions) que descriu amb detall Carrillo (1996).

Disseny d'un pla

En aquest punt es tracten les conjectures, bàsiques per a l'elaboració d'un pla, i la recerca d'estratègies diverses.

Una conjectura és una afirmació que sembla raonable, però que la seva veracitat no ha estat demostrada. Les conjectures formen la columna vertebral del raonament matemàtic: es pensa que una certa propietat ha de ser certa. Si es descobreix que és falsa, es modifica o s'abandona. En canvi, si es pot justificar convincentment, aleshores passa a ocupar un lloc en el conjunt de conjectures i justificacions que podran anar constituint finalment la resolució.

Sembla que les conjectures es produeixen com a resultat de dues activitats fonamentals. Particularitzar, probablement la font més usual. L'altre mètode és el d'analogia, que és en realitat una forma de generalització (freqüentment la semblança és només parcial, encara així resulta molt útil per suggerir conjectures i enfocaments alternatius del problema). El procés de fer conjectures depèn del fet que sigui capaç de reconèixer una llei o una analogia, o, en altres paraules, de ser capaç de fer una generalització.

La segona fase del procés d'enfrontament amb un problema consisteix en tractar de determinar estratègies concretes per atacar-lo. Unes quantes normes generals que permeten construir diverses estratègies en la resolució de problemes són les que segueixen:

A) Començar per allò més fàcil. De vegades un problema resulta difícil per les seves dimensions i per presentar massa elements. Altres vegades el problema, vist en el seu conjunt, resulta complicat i inabordable. Per començar se'n pot escollir una part que sembli més simple. La simplificació d'un problema es pot aconseguir no només per reducció de les seves dimensions, sinó també afegint alguna condició addicional que no estigui a l'enunciat proposat i que el fa més assequible. Fins i tot encara que sembli al principi que la simplificació sigui massa dràstica, es pot comprovar amb freqüència com el seu ajut és molt efectiu.

B) Experimentar les propietats generals d'un conjunt de nombres, figures, objectes en general, s'esclareixen quan s'observa la presència d'elles en casos particulars. Per això, la forma d'esbrinar si una certa propietat és comuna a molts elements consisteix en experimentar amb molts d'ells. L'experimentació i l'observació són tècniques molt fructíferes per al descobriment i per a la resolució de problemes. De l'observació sorgeix una conjectura. La conjectura permet predir com serà la situació per a un nombre més gran. Se segueix experimentant, és a dir, es contrasta la conjectura. Així es comprova que se segueix verificant, o que s'ha de rebutjar, perquè ja no es compleix. Si aquest contrast resulta favorable a la conjectura, vindrà després la tasca de donar la raó que sempre, és a dir, per a qualsevol número succeirà el que la conjectura afirma.

C) Fer un esquema, una figura, un diagrama. És aconsellable a fi de trobar bones idees que li serveixin a un per resoldre el problema que s'esquematitzi i dibuixi els elements que apareixen en la situació que s'estudia.

D) Escollir un llenguatge adequat, una notació apropiada. Una mateixa situació pot abordar-se amb diferents eines mentals, però normalment n'hi ha una de més efectiva.

E) Buscar un problema semblant. A mesura que s'adquireix experiència amb els problemes, en força casos es poden trobar situacions que s'assemblen a la que es proposen. El fet de recordar situacions semblants pot proporcionar un principi de confiança. En fer-ho, probablement sorgiran procediments d'atac d'aquest tipus de problemes que facilitaran estratègies vàlides pel que es treballa en qüestió.

F) Inducció. La inducció matemàtica és un dels mètodes de demostració més freqüents en alguns camps de la matemàtica. Consisteix en observar que es compleix una propietat per al primer cas, i suposar que es compleix per a qualsevol cas, i aleshores comprovar que es compleix per al cas següent. Hi ha dues coses importants que un s'ha d'assegurar: 1) Si h té la propietat P, aleshores h+1 té la propietat P; 2) El nombre 1 (o pot ser 30) té la propietat P.

G) Suposar el problema resolt. Una tècnica molt comú i fèrtil del pensament matemàtic consisteix en suposar el problema resolt. Les condicions del problema, l'enunciat, donen a conèixer uns quants detalls de la situació però no el quadre en el seu conjunt. En imaginar el problema resolt, de forma pràctica apareixen les dades més properes al que es busca i més fàcilment es trobarà el camí des d'on s'hi és fins a on es vol arribar.

H) Suposar que no. És un procés de pensament molt usual en la resolució de problemes. Pot ser a través d'una sèrie d'experiments s'ha arribat a la conjectura que es verifica una certa situació P. Es vol demostrar que la conjectura P és certa. Es parteix de no-P i s'analitza què es dedueix a partir d'aquesta suposició, tractant d'arribar a una contradicció amb algun fet, principi, teorema o hipòtesi que es dóna per certa. Si s'aconsegueix, s'ha acabat.

Execució del pla

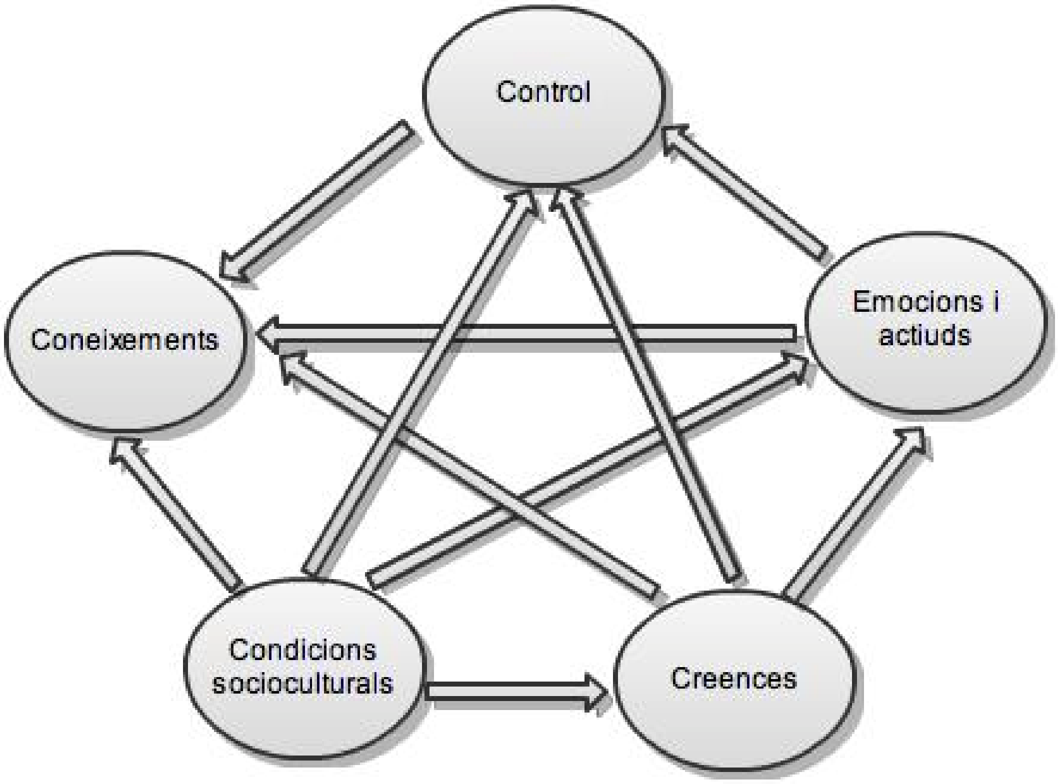
Quan s'executa el pla cal dur a terme la pròpia estratègia. També és necessària una justificació i un convenciment del que s'està fent.
Quan el problema és de naturalesa difícil, encara després d'haver dedicat temps a la preparació del camí a seguir, es pot creure fortament que cap de les estratègies que es tenen pot dur a la solució. Aquest pot ser el moment de la incubació. Tradicionalment tot procés creatiu (i la resolució de problemes ho és) s'ha analitzat en quatre etapes importants que són la preparació, la incubació, la il·luminació, i la verificació.

Revisió

Una vegada que s'ha aconseguit una resolució satisfactòria, o quan hom està a punt de deixar-ho estar, és essencial revisar la feina feta. Aquest és el moment de mirar cap enrere per millorar i ampliar la capacitat de raonament, i per intentar situar la resolució en un context més general. Això implica tornar enrere per comprovar el que s'ha fet i reflexionar en els fets clau i mirar cap endavant amb la intenció de fer una generalització de tot el procés i dels resultats. L'estructura de la fase de revisió es podria considerar constituïda per: comprovar la solució, reflexionar en les idees i moments clau, generalitzar a un context més ampli. Prenent nota dels detalls de la solució i reconstruint com s'ha raonat, un elabora una comprovació a fons.

2.1.5- Factors que influeixen en la resolució de problemes

Kilpatrick (1985) considera que per a ser bon resolutor de problemes és convenient disposar d'un bon bagatge organitzat de coneixements entorn al contingut, d'un bon bagatge de procediments per representar i transformar el problema i d'un sistema que controli i guiï la selecció de coneixements i procediments. Aquest autor es refereix als coneixements del camp específic, als coneixements de les estratègies de resolució de problemes i a la capacitat de control i autoregulació, amb un clar component cognitiu. No obstant, treballs posteriors consideren importants també els factors no cognitius, concretament de tipus afectiu i contextual (McLeod i Adams, 1989; McLeod, 1992; Mason, Burton, Stacey, 1982; Guzmán, 1991; Gómez-Chacón, 2000). En aquesta línia, el concepte d'intel·ligència emocional (Goleman, 1996) ha cobrat força per adoptar una visió més àmplia que la que ho encasella al domini cognitiu. McLeod (1992, 1993) comenta que la decisió de perseverar en el camí d'una possible solució pot estar influenciada per l'ansietat o la confiança, o també que els processos d'emmagatzematge i recuperació de la informació poden estar afectats per les emocions.



Quadre 2.1.1: Interpretació de la interdependència entre les cinc categories que segons Lester (1987) influencien els resultats de la Resolució de Problemes. (Les fletxes indiquen una influència directa)

Lester (1987) estudia sobre els factors que influencien els resultats de la resolució de problemes i distingia cinc categories interdependents: els coneixements, el control, els afectes, les creences i les condicions socioculturals (quadre 2.1.1). Lester ressalta el paper cabdal que juguen les creences en la interrelació entre aquestes cinc categories. Lester mostra la idea que el desenvolupament, la comprensió i l'ús de les idees i tècniques matemàtiques es desenvolupen en situacions culturals, i que les influències d'aquestes es deixen sentir en qualsevol de les altres quatre categories. Lester utilitza el terme creences com Schoenfeld (1985), considerant que aquestes donen forma a les actituds i les emocions i dirigeixen les decisions preses durant l'activitat matemàtica. Ell inclou en la categoria de l'afecte d'una banda actituds com la motivació, l'interès, la confiança, la perseverança, el gust per assumir riscos, la tolerància a l'ambigüitat i la resistència a la finalització prematura i d'altra banda emocions. Així defensa que les emocions i les accions cognitives interactuen i que el rendiment d'un individu desenvolupant tasques matemàtiques està molt influenciat pels factors afectius.

Per control, Lester entén la classificació i subseqüent assignació de recursos disponibles per enfrontar-se amb èxit a situacions matemàtiques (decisions executives entorn a la planificació, avaluació, gestió i regulació). Aquesta categoria està influenciada per les condicions socioculturals, per les emocions i les actituds i per les creences; però a la vegada dirigeix la manera en la qual són utilitzats els coneixements.

Sota el nom de coneixements, Lester inclou els següents recursos que pot utilitzar l'individu: fets i definicions, algorismes, heurístics, i la multitud de rutines (no algorismes, procediments) que concentra l'individu quan es refereix a tasques matemàtiques.

Callejo (1994) considera que per a resoldre un problema és necessari conèixer el camp específic al qual es refereix el problema, regular i controlar els coneixements i enfrontar-s'hi amb les actituds matemàtiques adequades. Aquesta tasca intel·lectual està impregnada d'emocions presents al llarg del procés de resolució i de bloquejos cognitius, afectius i socioculturals. Però el context en el qual es proposen habitualment els exercicis i els problemes en l'àmbit escolar genera en els estudiants conviccions que no són les més adequades per a resoldre problemes.

A la pregunta de què necessita un individu per a resoldre problemes, Kilpatrick (1985) considera: un bon bagatge organitzat de coneixements entorn al contingut; un bon bagatge de procediments per a representar i transformar el problema; un sistema que controli i guiï la selecció de coneixements i procediments.

Intel·ligència emocional en matemàtiques

Goleman (1996) ha desenvolupat el terme d'intel·ligència emocional que adopta una visió més àmplia de la intel·ligència, és una qüestió de la intel·ligència social que involucra habilitats per a manejar els propis sentiments i els sentiments dels altres, discriminant entre ells i usant aquesta informació com a guia del propi pensament i accions. Es pot dir que la persona alfabetitzada emocionalment en matemàtiques és aquella que ha desenvolupat la seva intel·ligència emocional en aquest context i que ha assolit una forma d'interactuar en aquest àmbit, que té molt en compte els sentiments i les emocions; l'alfabetització emocional engloba habilitats tals com el control d'impulsos i fòbies en relació a l'assignatura, que permet desenvolupar la necessària atenció per què s'assoleixi l'aprenentatge, l'autoconsciència, la motivació, l'entusiasme, la perseverança, l'empatia, l'agilitat mental, etc. (Gómez-Chacón, 1997). Mason, Burton i Stacey (1982) afirmen que els factors que influeixen en el grau d'efectivitat del raonament matemàtic són el coneixement dels continguts matemàtics, però en els altres dos vèrtexs d'un hipotètic triangle equilàter se situaria també la competència en l'ús dels processos d'investigació matemàtica (conjecturar, particularitzar, generalitzar, comunicar...) i la confiança en el domini dels estats emocionals i psicològics.

2.1.6- Síntesi

Considerem la idea de resolució de problemes com la definició donada per Callejo i Vila (2004) ja que donen una definició que és especialment útil per a l'àmbit educatiu:

"(...) situació, plantejada amb finalitat educativa, que proposa una qüestió matemàtica el mètode de resolució de la qual no és immediatament accessible a l'alumne o resolutor o grup d'alumnes que intenta resoldre-la, perquè no disposa d'un algoritme que relacioni les dades i la incògnita o d'un procés que identifiqui automàticament les dades amb la conclusió, i per tant, haurà de buscar, investigar, establir relacions, implicar el seu afecte, etc. per afrontar una situació nova" (pàg. 31,32).

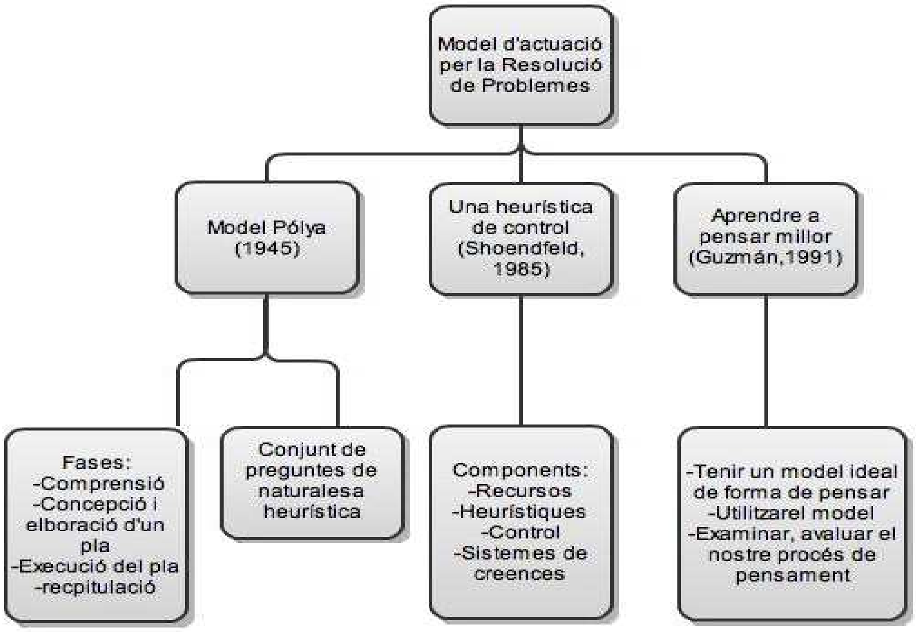
Per altra banda, destaquem els marcs teòrics de Pólya (1945, 1954, 1962) i Schoendfeld (1985, 1992) perquè els dos elaboren un model d'actuació per la resolució de problemes que considerem essencial pel procés d'ensenyament-aprenentatge de les matemàtiques.

Com hem vist, el model de Pólya està basat en quatre fases (comprensió, concepció i elaboració d'un pla, execució del pla, recapitulació o mirada retrospectiva) i ve acompanyat per un conjunt de preguntes de naturalesa heurística (preguntes i suggeriments que determinen la posada en marxa de les operacions mentals adequades per a la resolució de problemes)

Aquest model el completa Shoendfeld amb una heurística de control per tal que l'alumne reflexioni sobre el que està fent. Shoendfeld introdueix components pel coneixement i comportament necessari per una adequada caracterització de la tasca de resolució de problemes, són: recursos (coneixement matemàtic que té l'individu), heurístiques (estratègies i tècniques per fer familiar un problema), control (decisions globals per triar i implementar recursos i estratègies) i sistemes de creences.

Una altra idea que trobem interessant i necessària per completar el model d'actuació per a la RP és la idea de Guzmán "es pot aprendre a pensar millor" seguint els tres principis: -Tenir un model ideal de forma de pensar i intentar ajustar-s'hi, -Fer molta pràctica amb la utilització d'aquest model, -Tenir una forma d'examinar i avaluar el nostre procés de pensament.

Es pot sintetitzar la tasca de resolució de problemes amb el següent esquema:

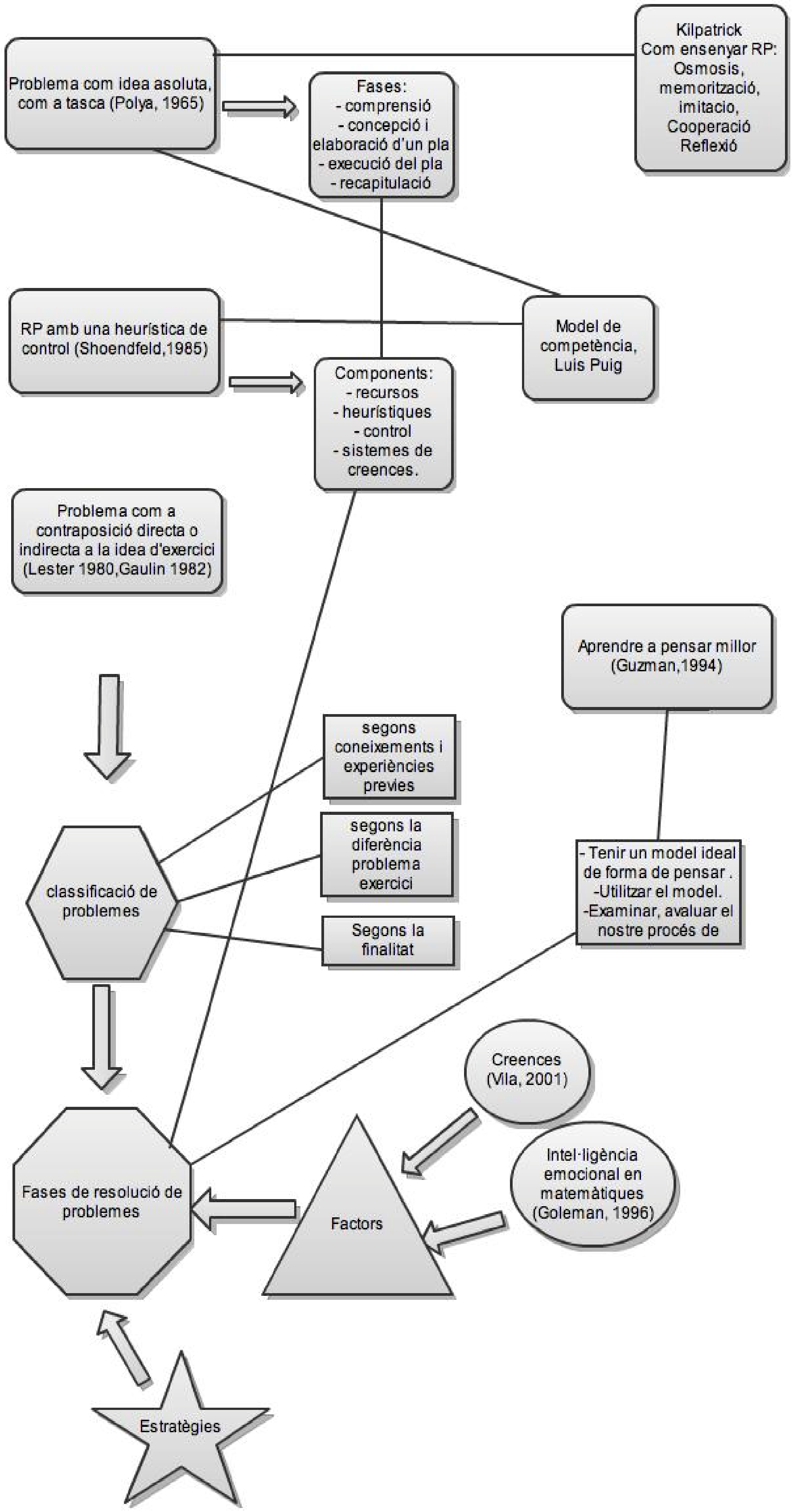


Quadre 2.1.2: Esquema del Model d'actuació per la Resolució de Problemes

Hem parlat de classificació de problemes. Els problemes que utilitzarem en aquest treball per recollir les dades són problemes que Vila (2001) classifica com problemes d'estratègia, ja que els proposem, amb la finalitat de l'elaboració d'estratègies intel·lectuals.

També hem parlat de les fases de resolució d'un problema. En el treball ens centrem en les tres primeres fases de la resolució d'un problema. La primera fase: Abordatge, que fa a referència a la comprensió i assimilació del missatge. A la segona fase: Disseny d'un pla, la recerca d'estratègies diverses o heurístiques. I a la tercera fase: Execució del pla, la resolució del problema. En el nostre estudi, analitzarem la comprensió de l'enunciat abans i després de treballar amb jocs; així com les estratègies heurístiques, i les resolucions dels problemes.

Així mateix, el següent quadre sintetitza el marc teòric sobre RP:



Quadre 2.1.3: Esquema del marc teòric de Resolució de Problemes

2.2- Jocs matemàtics

2.2.1- Educació i jocs. Antecedents

Revisant bibliografia que relacioni el jocs i l'educació matemàtica, trobem en el monogràfic de Bright, Harvey i Wheeler, Learning and mathematics Games (1985), un dels primers estudis de l'efectivitat de la utilització dels jocs en l'ensenyament-aprenentatge. En aquest treball analitzen dues variables dels jocs: el nivell instruccional i el nivell taxonòmic, així con les interaccions entre ambdues. Analitzant la informació obtinguda van treure conclusions sobre l'efectivitat dels jocs: 1. Efectivitat dels jocs a nivells taxonòmics alts; 2. L'alt nivell taxonòmic necessari en la resolució de problemes podria proporcionar-se amb la pràctica de jocs, tot i que faltaria determinar el seu record amb el pas del temps; 3. Els jocs, sobretot de nivell taxonòmic alt, han d'utilitzar-se recentment al moment de l'aprenentatge; i 4. La fantasia, l'estímul o la curiositat incrementen la seva efectivitat. I acaben donant un llistat de futures línies d'investigació, entre les quals destaca la necessitat de comparar els jocs amb altres estratègies d'ensenyament aprenentatge.

Cal destacar la investigació quantitativa que van realitzar J. M. Gairín i F. Corbalán (1989) per obtenir informació sobre la utilització de jocs en les classes de matemàtiques a l'educació de 6 a 14 anys, obtenint uns resultats que mostraven una opinió molt positiva del professorat cap a la pràctica sistemàtica de jocs en les classes i la disposició a continuar treballant amb jocs motivada per l'acollida favorable de l'alumnat. F. Corbalán va presentar *Juegos Matemáticos para secundaria y bachillerato* (1994) on primer tracta d'establir les relacions entre joc y matemàtiques i aborda el problema fonamental de la classificació del jocs. En la segona part revisa els efectes que produeixen a la classe de matemàtiques tot comentant avantatges i inconvenients de la seva utilització a classe. Estableix una relació entre jocs i resolució de problemes. Finalment presenta una col·lecció de jocs d'utilitat en l'educació Secundària i Batxillerat classificats i amb comentaris pedagògics.

Gairín (1990) recull algunes conseqüències que poden derivar-se a l'utilitzar els jocs educatius en el procés d'ensenyança aprenentatge de les matemàtiques. També recull resultats d'investigacions sobre els efectes que produeix la utilització de jocs matemàtics en els alumnes dels quals destaca estimular l'interès i desenvolupar actituds positives cap a les matemàtiques. En aquest article també exposa l'opinió de professors que han practicat jocs educatius amb els seus alumnes.

Es poden trobar articles i llibres que relacionen els jocs matemàtics d'estratègies amb els projectes curricular de matemàtiques. Per exemple, H. Williford (1992) els relaciona amb els Estàndard Curriculars del NCTM, Gómez Chacón (1992) amb el currículum de matemàtiques.

Corbalán (1996) fa un estudi de la utilització d'algunes estratègies de resolució de problemes en la resolució de jocs matemàtics d'estratègia, comparant la forma de procedir dels alumnes amb les suposades a priori pel professor, és a dir, analitzant si la pràctica de determinats jocs suposava pels alumnes la utilització d'estratègies eficients.

Corbalán (1997) fa un anàlisi de les estratègies que utilitzen els alumnes de 12,13,14 anys en sis jocs seleccionats i descriu la tipologia de jugadors en alumnes d'aquestes edats. S'ha fet una caracterització dels jocs segons: la comprensibilitat del joc, la facilitat per obtenir una estratègia guanyadora (o almenys parcial) o per solucionar el joc, possibilitat d'anàlisi del joc tot tractant la utilització d'estratègies adequades (estratègies diferents a 'assaig i error') i finalment la possibilitat de descripció, és a dir de la comunicació per par de l'alumnat de les estratègies adoptades. S'ha caracteritzat el grau de interiorització de diferents estratègies de resolució de problemes en les diferents edats de la ESO. En concret s'ha centrat l'estudi en tres d'elles: 'començar pel final', 'estudi sistemàtic de tots els casos' i 'utilització de la simetria'. S'afirma que totes elles augmenten amb l'edat, que començar pel final és una estratègia assumida, que ho està menys 'l'estudi sistemàtic de tots els casos' i que no ho està en absolut 'la utilització de la simetria'.

Garcia Azcárate (1998) defensa la utilització de jocs de coneixements a la classe de matemàtiques tot explicant les característiques que ha de tenir un bon joc de coneixements i posa exemples de com fer-ho.

Ferrero (1998) defensa el joc com a recurs didàctic per l'educació matemàtica i presenta jocs per practicar a l'última etapa de l'educació primària.

Bishop (1998) explora algunes de les propietats dels jocs, la seva importància en la història i en la cultura de la humanitat, els motius pels que els jocs han estat importants per les matemàtiques i finalment les raons que ens porten a proposar la seva introducció i ús en l'educació matemàtica a diferents nivells educatius.

Guzmán (1984) revisa l'impacte dels jocs en la història de les matemàtiques, busca el fonament matemàtic dels jocs i quines matemàtiques s'apropen al joc. Guzmán recull les conseqüències de la utilització dels jocs per la didàctica de les matemàtiques i explica també com utilitzar-los en l'ensenyança tot buscant directrius heurístiques basades en jocs. Finalment fa una classificació per actituds o nuclis temàtics propis de l'activitat matemàtica de jocs.

Deulofeu (1999) mostra la diversitat d'aplicacions que els jocs i les recreacions poden tenir en l'educació matemàtica, fonamentalment en l'àmbit de la classe, però també en el del centre educatiu e inclús en el barri o la ciutat. Ho fa amb exemples que tracten d'il·lustrar aquesta aplicació i la seva incidència en els diferents aspectes de l'aprenentatge.

Edo (2002) fa una investigació sobre l'aprenentatge de matemàtiques realitzades en un context de jocs de taula en el marc escolar 2n curs d'educació primària. S'investiga sobre: el paper que exerceix la influència educativa de la mestra i de la influència educativa entre alumnes en el procés d'aprenentatge de continguts matemàtics.

Edo, Deulofeu, Badillo i Baeza (2008) estudien el paral·lelisme entre les fases de resolució d'un joc i les fases de resolució de problemes, i a *Estudio del paralelismo entre las fases de resolución de un juego y las fases de resolución de un problema*, aproximen la investigació a la utilització dels jocs d'estratègia com eina metodològica per a l'ensenyament-aprenentatge de la resolució de problemes. En concret, aquest estudi se centra en l'ús d'un joc d'estratègia com eina metodològica per al desenvolupament d'habilitats de resolució de problemes. El seu objectiu és descriure i analitzar les fases de l'heurística que alumnes de cinquè de primària (10-11 anys) desenvolupen per a descobrir les estratègies guanyadores en el joc "Tancar quinze" realitzant un possible paral·lelisme entre aquestes fases i la de la resolució d'un problema matemàtic.

2.2.2. - Jocs matemàtics: definició

Una de les definicions que trobem a l'enciclopèdia catalana de joc és: "Activitat física o mental que té com a principal fi la diversió o entreteniment del qui l'executa". També es defineix teoria dels jocs "MAT Teoria que analitza matemàticament el comportament òptim dels diversos jugadors davant les possibles estratègies aplicables per a la resolució guanyadora del conflicte (joc)". És una definició molt general i poc precisa.

Gardner (1983) explicita la dificultat d'arribar a una definició precisa de joc tot comentant que la idea de joc porta a molts significats enllaçats entre sí, significats que s'han anat concatenant al temps que evolucionava el llenguatge i subratlla que les idees de joc, recreació i lúdic són aproximadament iguals.

Fetcher (1971) assenyala quines característiques ha de presentar una acció o ocupació per tal de poder considerar-se un joc: hi ha un conjunt de jugadors, dos o més (observem que oblida els jocs individuals, els que suposen un repte personal, anomenats solitaris que són molt abundants i de gran importància en la Matemàtica, com reflecteix la abundant literatura existent sobre els mateixos); hi ha un conjunt finit de regles que engloben totes les pautes de comportament que es poden presentar en el seu desenvolupament; el conjunt de possibles resultats està especificat o determinat; els participant en el joc tenen interessos contraposats; cada jugador té plena capacitat d'actuació davant les diferents possibilitats que se li presentin durant el joc; existeix informació que permet en tot moment a cada jugador conèixer la situació del seu oponent, però sense que aquestes posicions siguin conegudes a priori en l'inici del joc.

Posteriorment, Bright, Harvey i Wheeler (1985) van analitzar la definició de M. Inbar i C. S. Stoll en la seva obra *Games and learning. Interchange* (1970) completant-la i adoptant una definició semblant a la de Fetcher (1971) pels jocs de regles (Gairín, 1990):

1. Un joc és una acció o ocupació voluntària i lliure.
2. Un joc és un repte contra una tasca o un oponent.
3. Un joc es controla per un conjunt definit de regles que regeixen totes les pautes de comportament que es poden presentar en el joc.
4. Un joc representa una situació arbitrària clarament delimitada en el temps i en l'espai des de l'activitat de la vida real.
5. Socialment las situacions dels jocs són considerades com de mínima importància.
6. El joc té una clara delimitació en l'espai i en el temps. No és possible conèixer a priori l'estat on s'arribarà durant el seu desenvolupament.
7. Un joc s'acaba després d'un nombre finit de moviments en l'espai-temps.

Aquesta és la definició de joc que utilitzarem a partir d'ara, ja que és una definició formal tant des de la psicologia com des de la sociologia.

D'entre tots els jocs que avarca la definició anterior tractarem d'aquells que tenen uns objectius instructius o educatius, i els anomenarem jocs educatius. Si els jocs educatius corresponen a algun dels propòsits de l'educació matemàtica els anomenarem jocs educatius matemàtics o jocs matemàtics.

2.2.3 -Classificació dels jocs

Bright, Harvey i Wheeler (1985) van identificar quatre conjunts de variables del joc educatiu que a priori semblaven relacionades amb els efectes cognitius, és a dir, amb els efectes que descriuen canvis o diferències en la consecució d'objectius relacionats amb el saber i el desenvolupament d'habilitats i capacitats intel·lectuals atribuïts al fet de practicar algun joc educatiu. Les variables són: característiques del joc (format, restriccions imposades en el joc, necessitat de reacció, temps i espai); objectius educatius del joc (contingut del joc, nivell instruccional i nivell taxonòmic -coneixement, comprensió, aplicació, anàlisi, síntesi i avaluació-) i interaccions d' aprenentatge durant el joc (nivell competitiu, igualtat entre estudiants).

Revisant la literatura del joc matemàtic o matemàtica recreativa es pot afirmar que la tasca de classificació no és senzilla, trobant classificacions referides a gairebé cadascuna d'aquestes variables: continguts, materials, participants, nivell instruccional i, en alguns casos, considerant simultàniament més d'una d'aquestes variables. Corbalán (1996) fa una descripció detallada de les classificacions que apareixen en alguns tractats sobre jocs matemàtics i afirma que són aquelles classificacions que atenen als propis jocs i al paper que ocupen en el procés d'ensenyament-aprenentatge les més interessants per a un context educatiu de matemàtiques. En canvi, una classificació que prioritzi la facilitat de localització dels elements (organització alfabètica o per materials que utilitzen) tindria poca incidència en altres variables del joc com podrien ser els continguts i destreses que a priori desenvoluparia i que són d'interès educatiu.

També ens podem fixar en classificacions referides a la implicació o no d'acció en el joc. Carrillo (1996) enumera tres factors que caracteritzen un joc matemàtic d'acció: l'atzar, la combinatòria i l'estratègia i comenten que en un joc d'atzar, el jugador no ha de prendre cap decisió més raonable que les altres possibles, en canvi, en un joc d'atzar i estratègia les decisions del jugador afectaran en el desenvolupament i desenllaç del joc, per tant, des d'un perspectiva didàctica seran més interessants els jocs on intervé l'estratègia.

Ens interessen les classificacions referents als objectius educatius dels jocs matemàtics: classificació segons el nivell taxonòmic del joc, classificació segons els nivell instruccional i classificació segons el contingut del joc.

- Classificació taxonòmica: Bloom (1956) va definir cinc nivells taxonòmics que es podrien donar en el procés d'aprenentatge dels estudiants a partir de l'activitat de jugar: coneixement, comprensió, aplicació, anàlisi i avaluació. Per assignar el nivell taxonòmic d'un joc cal observar quin d'aquests taxons és més necessari per jugar d'una manera 'eficient', cal observar com juguen els alumnes.

- Classificació segons el nivell instruccional: aquesta classificació fa referència al lloc que ocupa el joc en el procés d'ensenyament-aprenentatge per a un grup determinat d'alumnes d'acord amb allò que han treballat, que no han treball i que treballaran mentre juguin. Així podem parlar de tres nivells instruccionals del joc matemàtic: nivell pre-instruccional, quan l'ús del joc serveix per introduir conceptes, procediments i actituds; nivell co-instruccional, quan el joc comparteix simultàniament amb altres activitats aquesta introducció per tal que es recolzin mútuament; i nivell post-instruccional, quan permet recordar o reforçar conceptes, procediments i actituds introduïts prèviament per altres mètodes o activitats.

- Classificació segons l'objecte del joc: és una classificació de joc matemàtic basada en el currículum en el qual s'ha d'utilitzar i centrant el seu objectiu en el propi joc. Aquesta classificació està relacionada amb el contingut del joc i amb els procediments que a priori desenvolupa. En aquest marc trobem dues classes de jocs: els jocs de coneixements i d'estratègies. Corbalán (1994) considera un tercer grup que anomena jocs de procediment conegut en el qual hi agrupa tots aquells jocs de coneixements i d'estratègies que són coneguts fora de l'aula.

Jocs de coneixements: la seva pràctica exigeix l'ús de conceptes i algorismes matemàtics i permet treballar 'tòpics' conceptual, procedimentals i actitudinals habituals en els programes de matemàtiques. La seva utilització pot fer-se en diferents fases del procés d'ensenyament-aprenentatge (en qualsevol dels tres nivells instruccionals). Poden subdividir-se en grups: numèrics, geomètrics, algèbrics, amb calculadora i de probabilitat (Corbalán, 1994).

Jocs d'estratègia: entendrem per estratègia d'un jugador el comportament o camí escollit per aquest en cada jugada en un intent d'aconseguir els seus objectius individuals. Anomenem estratègia guanyadora a aquella que porta a la realització dels objectius plantejats independentment de l'actuació dels seus adversaris en el cas d'un joc de dos o més jugadors. Corbalán i Deulofeu (1996) anomenen joc d'estratègia a aquell que joc que pretén impulsar procediments per guanyar sempre o per no perdre i dins de l'ampli ventall de jocs d'estratègia distingeixen els jocs d'informació completa o determinació exacta en els quals no hi ha intervenció de l'atzar dels jocs que són combinació d'atzar i estratègia.

A Gomez-Chacón (1992), trobem els criteris que ha de complir un joc educatiu matemàtic per ser considerat joc matemàtic d'estratègia.

1. Ha de ser per una o mes persones
2. Ha de tenir un conjunt de regles fixes que proporcionen una 'guia' pel desenvolupament d'estratègies, ajudant a descobrir procediments. Les regles estableixen els objectius per cada jugador i permeten decidir quan s'ha acabat el joc posant de manifest la consecució dels objectius plantejat.
3. Els jugadors hauran d'escollir els seus propis procediments i estratègies en un intent d'obtenir els seus objectius individuals.

Anomenarem petits jocs estratègia a aquells que són per a dos jugadors, les seves condicions fan que siguin de curta durada i sense intervenció de l'atzar, pels quals existeix, en general, una estratègia guanyadora (és a dir, un conjunt d'instruccions que ens permeten decidir en tot moment i en qualsevol situació com hem de jugar) que permet guanyar a un dels dos jugadors, el primer o el segon en jugar (Corbalán i Deulofeu,1996).

2.2.4.- Jocs i matemàtiques

Bishop (1988) inclou l'acció de jugar en les activitats de desenvolupament d'idees matemàtiques per la important relació entre jocs, matemàtiques i educació matemàtica des d'una perspectiva antropològica i cultural: en totes les cultures es juga i totes es prenen l'activitat de jugar molt seriosament, per exemple, el sistema de numeració actual té el seu origen a l'Índia i d'allà provenen mols dels jocs més populars i estesos arreu del món -escacs, parxís, jocs de cartes- (F.Corbalán, 1994)

Ferrero (1998) afirma que els jocs per l'activitat mental que generen creen bases del pensament matemàtic i potencien el desenvolupament de tècniques intel·lectuals (pensament lògic i desenvolupament del raonament).

Guzmán (1984) analitza la relació entre jocs i la forma de pensar en matemàtiques i expressa que possiblement cap altre mètode aproparà més a una persona a la manera de fer interna de les matemàtiques que un joc ben escollit. Senyala: "la matemàtica és, en gran part, joc, i el joc pot, en moltes ocasions, analitzar-se mitjançant instruments matemàtics"

Winter i Ziegler (1983) han establert de manera esquemàtica la correspondència que hi ha entre jocs de regles i el pensament matemàtic:

Jocs	Pensament matemàtic
Regles del joc	Regles de construccions, regles lògiques, instruccions, operacions.
Situacions inicials	Axiomes, definicions, allò donat.
Jugades	Construccions, deduccions.
Figures del joc	Mitjans, expressions, termes.
Estratègia del joc	Utilització hàbil de les regles, reducció d'exercicis coneguts a fórmules.
Situacions resultants	Nous teoremes, nous coneixements.

Quadre 2.2.1: Correspondència entre jocs de regles i pensament matemàtic

Els jocs proporcionen situacions en que l'activitat d'investigació s'assembla molt a la de persones que tracten de resoldre un problema, Bouvier (1981)

Analitzar un joc i buscar la seva solució és una activitat que s'assembla molt a la manera que treballen els matemàtics, Gairín (1990). Conclou que hi ha una estreta relació entre joc i matemàtiques.

Jocs d'estratègia i resolució de problemes

Dins de la relació jocs i matemàtiques ens interessa la relació entre un determinat tipus de joc, els jocs d'estratègia i un aspecte especialment important de les matemàtiques i el seu ensenyament: la resolució de problemes.

A Corbalán (1996) podem trobar formulacions de les fases de resolució d'un joc similars a les fases de resolució de problemes.

El mateix Corbalán proposa:

1. Familiaritzar-se amb el joc, entendre les components del joc i els tipus de moviments o formes d'actuar, l'objectiu del joc, la forma de guanyar i les regles;

2. Posar en funcionament possibles estratègies pel joc que ens ocupa, fent proves i intentant relacionar-lo amb altres jocs semblants o amb estratègies guanyadores conegudes;

3. Aplicar les estratègies dissenyades, estudiar moviments d'atac i possibles respostes, fer que el joc progressi; i

4. Comprovar si l'estratègia és sempre guanyadora.

Gomez Chacón (1992):

1. Familiarització amb el joc;
2. Exploració inicial que permeti buscar diverses estratègies de resolució;
3. Posar en pràctica l'estratègia seleccionant posicions guanyadores, examinant la validesa de les conjectures, etc.; i
4. Reflexionar sobre el procés seguit.

M. de Guzmán (1998) proposa:

1. Abans de fer, provar d'entendre;
2. Agafaré una estratègia;
3. Miraré si la meva estratègia em porta al final; i
4. Trauré suc al joc.

Corbalán (1994) fa una recopilació de tècniques o estratègies de resolució de problemes i els jocs amb els quals es poden practicar aquestes estratègies. Algunes d'aquestes són: Començar pel final, experimentar i extraure pautes, treure partit de la simetria, utilitzar un mètode d'expressió adequat, resoldre problemes anàlegs, desenvolupar habilitats espacials, conjecturar, manipular i experimentar manualment, començar per la part fàcil, resoldre un problema més senzill.

2.2.5- Síntesi

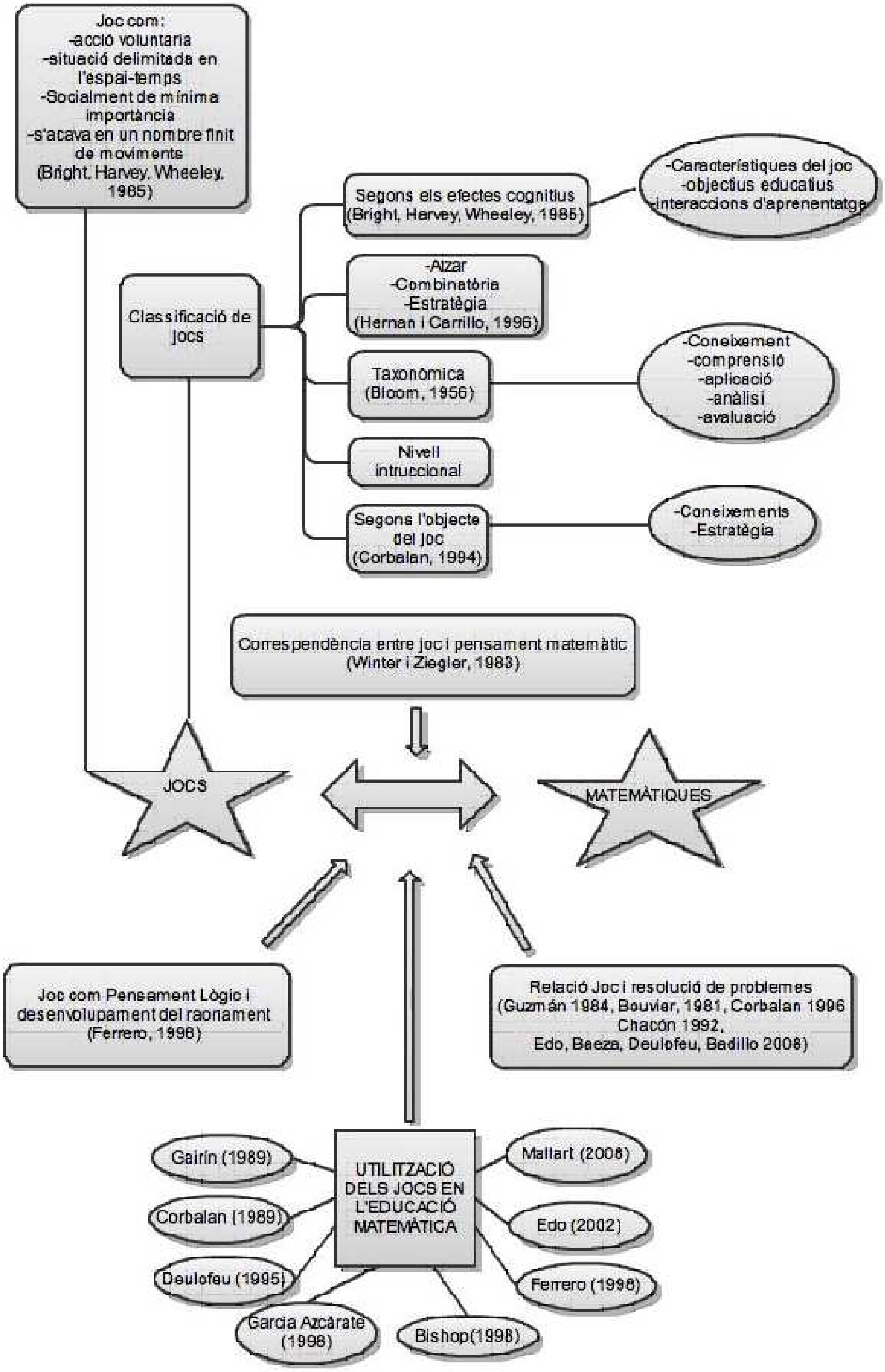
Considerarem la definició de joc de regles donada per Bright, Harvey i Wheeler (1985):

1. Un joc és una acció o ocupació voluntària i lliure.
2. Un joc és un repte contra una tasca o un oponent.
3. Un joc es controla per un conjunt definit de regles que regeixen totes les pautes de comportament que es poden presentar en el joc.
4. Un joc representa una situació arbitrària clarament delimitada en el temps i en l'espai des de l'activitat de la vida real.
5. Socialment las situacions dels jocs són considerades com de mínima importància.
6. El joc té una clara delimitació en l'espai i en el temps. No és possible conèixer a priori l'estat on s'arribarà durant el seu desenvolupament.
7. Un joc s'acaba després d'un nombre finit de moviments en l'espai-temps.

Ens interessen els jocs educatius matemàtics, en particular els jocs d'estratègia, aquells que són per a dos jugadors, les seves condicions fan que siguin de curta durada i sense intervenció de l'atzar, pels quals existeix, en general, una estratègia guanyadora (és a dir, un conjunt d'instruccions que ens permeten decidir en tot moment i en qualsevol situació com hem de jugar) que permet guanyar a un dels dos jugadors, el primer o el segon en jugar (Corbalán i Deulofeu, 1996).

Destaquem la relació entre jocs i matemàtiques (Bishop, 1999; Ferrero, 1998; Guzmán, 1984; Winter i Ziegler, 1983; Bouvier, 1981). Concretant més encara, la relació entre jocs d'estratègia i resolució de problemes i la utilització dels jocs en l'educació matemàtica (Corbalán, 1996; Gómez-Chacón, 1992; Guzmán, 1998; Deulofeu 1995).

Seguidament es mostra un quadre que sintetitza el marc teòric sobre jocs:



Quadre 2.2.2: Esquema del marc teòric de Jocs

Per acabar marc teòric ens ha semblat interessant definir algunes paraules per tal d'establir el seu ús a la resta del treball.

Precisions terminològiques

En el nostre treball utilitzem repetidament paraules com estratègia, heurística, estratègia guanyadora i estratègia heurística, que poden tenir diferents significats. Per tal d'evitar ambigüetats, entenem que cal precisar quins d'aquests termes utilitzarem i en quin sentit.

Entenem **estratègia** com el conjunt d'accions que realitza el resolutor per resoldre un problema. Si el conjunt permet resoldre el problema diem que és una bona estratègia. En aquest sentit, una bona estratègia és la que porta a aconseguir l'objectiu, la que porta a la solució del problema.

Quan ens referim als jocs, utilitzarem la paraula estratègia amb el següent significat: forma de decidir cadascuna de les jugades d'una partida tenint en compte les possibles jugades de l'adversari. En el cas de jocs, l'**estratègia guanyadora** per a un dels jugadors és el conjunt de jugades que ha de fer un dels jugadors per tal de guanyar sempre a l'adversari. Es tracta d'una manera de jugar perfectament definida, i que porta a resoldre el joc.

En el camp dels jocs la paraula estratègia s'utilitza tant per definir una manera de jugar com també per definir un tipus de jocs: **jocs d'estratègia**, que són aquells en els quals no hi ha intervenció de l'atzar i que teoria de jocs es coneixen com a jocs d'informació completa.

Per altra part, entenem **heurística** com l'art de descobrir, inventar. D'acord amb Polya l'heurística és el conjunt de mètodes exploratoris de plantejament i de resolució de problemes.

Les **estratègies heurístiques** són aquelles idees que permeten ajudar a resoldre un problema de matemàtiques. Alguns exemples els trobem en el llibre How to solve it, Polya (1945): començar pel més fàcil, experimentar, fer esquema, una figura, un diagrama, una notació apropiada, problema similar, inducció, suposar problema resolt, suposar el contrari.

Quan en la resolució d'un problema s'utilitza com a idea central una heurística determinada es poden confondre els termes estratègia i heurística. En canvi, quan s'utilitzen vàries heurístiques la diferència és clara ja que el terme estratègia enclou les diferents heurístiques utilitzades.

3. OBJECTIUS DEL TREBALL

3. OBJECTIUS DEL TREBALL

L'etapa de l'Educació Secundària Obligatòria ha de proporcionar a tots els nois i noies una educació que els permeti assegurar un desenvolupament personal sòlid, adquirir les competències culturals i socials relatives a l'expressió i comprensió oral, a l'escriptura, al càlcul i a la resolució de problemes de la vida quotidiana (Departament d'Educació, 2007). D'acord amb Polya (1954), la funció principal del professor ha de consistir en l'estímul de l'acció de l'alumne, col·locant-lo en situacions que fomentin l'exercici d'aquelles activitats que millor puguin conduir-lo a l'adquisició de les actituds bàsiques més característiques que es pretén transmetre amb el cultiu de cada matèria.

Per la semblança entre joc i matemàtica, existeixen moltes activitats i moltes actituds comunes que poden proposar-se escollint jocs adequats de la mateixa manera que s'escullen activitats matemàtiques d'aparença més seriosa. Però el joc té avantatges de tipus psicològic i motivacional sobre els continguts pròpiament matemàtics.

Moltes persones que es declaren incapaces per la matemàtica, gaudeixen intensament amb puzles i jocs, l'estructura dels quals s'assembla força a la de la matemàtica. No tots els jocs tenen un aprofitament didàctic per a l'ensenyament de les matemàtiques, però n'hi ha que sí, que es poden manipular de manera semblant a la que es fa amb la resolució de problemes matemàtics i que ens transmeten lliçons profundament valuoses.

Seguint la línea d'altres treballs (Deulofeu, 1995; Puig, 1996; Corbalán, 1997), varem veure (Navarro, 2010) que amb el joc podem apropar-nos d'una manera més efectiva didàcticament a les matemàtiques (per la motivació i les actituds) i que amb el joc podem practicar hàbits de pensament adequats per la resolució de problemes. Varem veure que els alumnes de secundària utilitzen determinades estratègies generals de resolució de problemes en la cerca d'estratègies guanyadores en els jocs matemàtics d'estratègia i vam comparar les estratègies de resolució de problemes utilitzades en diferents edats de l'ESO i en alumnes d'elevat talent en matemàtiques (ESTALMAT) en la cerca d'estratègies guanyadores en els jocs matemàtics d'estratègia.

És objecte d'estudi en el present treball veure si treballar amb jocs d'estratègia a l'aula és una bona eina per a l'ensenyament de resolució de problemes de matemàtiques. Per tant, la nostra pregunta de recerca és:

Treballar amb jocs d'estratègia pot ajudar als alumnes de secundària obligatòria en el procés d'aprenentatge de la resolució de problemes de matemàtiques?

En el present treball volem veure quines són les influències de treballar amb els jocs a l'hora de resoldre problemes de matemàtiques i veure si hi ha i com és la millora en les resolucions dels problemes. Per això, estudiarem si hi ha canvis en la comprensió de l'enunciat, en la resolució dels problemes, en les estratègies heurístiques utilitzades i en el llenguatge utilitzat per expressar les resolucions dels problemes.

En concret, els objectius del present treball són:

- Estudiar si els alumnes d'ESO milloren en la comprensió de l'enunciat de determinats problemes de matemàtiques, després de treballar amb jocs d'estratègia.

- Analitzar si els alumnes d'ESO resolen millor els problemes en el sentit d'un increment quantitatiu en l'obtenció d'un resultat correcte, després de treballar amb petits jocs d'estratègia.

- Comparar l'ús d'estratègies heurístiques en la resolució de problemes, en el sentit de variació d'estratègies més pertinents, abans després de treballar amb jocs d'estratègia.

- Comparar les diferències en l'expressió de la resolució dels problemes, en el sentit d'un increment de l'ús de llenguatges adequats, abans i després de treballar amb jocs d'estratègia

4. METODOLOGIA DE LA INVESTIGACIÓ

4. METODOLOGIA DE LA INVESTIGACIÓ

Aquest capítol està dividit en dos apartats. En el primer es fa una descripció de les poblacions anàlisi detallat del context d'investigació del cas dels alumnes de secundària i en el cas del context especial ESTALMAT. S'explica l'origen, justificació i descripció d'ESTALMAT. Es detallen les característiques dels nois amb talent, en especial del grup observat. En el segon apartat, s'explica el disseny de la recerca i en particular dels instruments utilitzats per a l'obtenció de dades de la investigació, l'elecció dels problemes, dels jocs, i de les mostres, i finalment, la metodologia de la investigació.

4.1 Context d'investigació i població de l'estudi

4.1.1- Institut d'Educació Secundària

L'IES Sant Pere i Sant Pau de Tarragona està ubicat a Sant Pere i Sant Pau, barri de la zona Nord de la Ciutat de Tarragona. En l'institut s'imparteix l' Educació Secundària Obligatòria (ESO) amb 4 grups per 1r, 4 grups per 2n, 4 grups per 3r i 4 grups per 4t. També s'imparteix Batxillerat (BTX) amb dos grups per 1r i dos grups pel 2n curs. El nivell sociocultural és baix-mitjà amb força immigració.

4.1.2- Estímul del Talent Matemàtic (Programa ESTALMAT)

Origen i justificació d'ESTALMAT

L'observació d'altres països, com Estats Units o Hamburg, ens mostra que la preocupació pel talent ajuda en el desenvolupament del país. Les necessitats tecnològiques de la societat fan que es dediqui especial atenció en els qui en un futur dependrà el progrés tècnic. La comunitat o país que sàpiga tractar el talent que té podrà anar més enllà que la que no es preocupa per aconseguir-ho. En qualsevol comunitat hi ha nois amb talent especial per les matemàtiques. Si no són detectats, aquests nois poden passar l'escolarització desatesos amb un grau de frustració més o menys elevat o patir inadaptació per avorriment. En aquest cas la societat no en trauria cap profit.

El que es pretén és orientar aquests alumnes per una gran satisfacció per ells i un benefici per la societat. No es tracta d'afavorir la desigualtat; ja que si no es fes res, el més possible és que només s'arribarien a desenvolupar plenament els nois que provinguessin de famílies amb nivell socioeconòmic més elevat.

La Real Acadèmia de Ciències va aprovar el Setembre de 1998 un projecte per l'estímul del talent precoç en matemàtiques. Aquest projecte es va començar de manera experimental a la Comunitat de Madrid, sota la direcció del professor M. De Guzmán que va ser l'autèntic promotor de l'experiència.

El grup d'edat sobre el que es va iniciar el projecte va ser el corresponent al començament de l'ESO (12-13 anys). Es va fer un test de selecció per fer un primer filtratge i una entrevista posterior amb els estudiants seleccionats i amb els seus familiars per fer el filtratge final de 25 alumnes. L'orientació va ser continuada durant dos cursos acadèmics. Es van fer reunions de tres hores setmanals, des d'octubre fins el juny, els dissabtes de 10,00 a 13,00 del matí.

Sota la tutela de professors amb experiència en aquest tipus d'acció es va tractar d'estimular i supervisar la iniciació de la forma més adequada el desenvolupament mental dels participants, a partir de diversos temes i maneres de pensar de caire matemàtic que poguessin agradar-los i entusiasmar-los per la matemàtica. També es va establir una tutoria personal de cada alumne per continuar el contacte amb ells i la seva orientació una vegada acabat el període de duració del projecte.

El maig de 2003 es va posar en marxa l'extensió del projecte a Catalunya, sota la tutela de la FEEMCAT (Federació d'entitats per a l'ensenyament de les Matemàtiques de Catalunya) i de la SCM (Societat Catalana de Matemàtiques).

Descripció de l' ESTALMAT de Catalunya

El grup d'edat sobre el que es va iniciar el projecte va ser el corresponent a primer i segon de l'ESO (12-13 anys). Es va fer una prova de selecció per fer un primer filtratge i una entrevista posterior amb els estudiants seleccionats i amb els seus familiars per fer el filtratge final de 25 alumnes; procés anàleg al de Madrid.

El dissabte 27 de desembre de 2003 es va inaugurar oficialment el curs 2003-2004 el projecte ESTALMAT a Catalunya a la sala Prat de la Riba de l'edifici de l'Institut d'Estudis Catalans i va comptar amb la presència del Secretari General del Departament d'Ensenyament, el Director General d'Universitats, Recerca i Societat de la Informació, el Director General de la Fundació Vodafone i els presidents de les dues entitats organitzadores, La FEEMCAT (Federació d'entitats per a l'ensenyament de les Matemàtiques de Catalunya) i la SCM (Societat Catalana de Matemàtiques). En acabar l'acte, les noies i nois seleccionats van marxar en autocar a la casa de colònies Escola de natura de Vallcarca a El Figueró per a una estada de cap de setmana per fer coneixença.

Les activitats d'ESTALMAT consisteixen en una sessió de treball dividida en dues parts, amb dos professors a l'aula, que tenen lloc tots els dissabtes del curs escolar a la Facultat de Matemàtiques i Estadística de la UPC, amb una durada de la jornada de les 10,00 a 13,00 del matí. Els professors tenen com a principal objectiu despertar la iniciativa dels alumnes i els ajuden i orienten en tot el que cal.

Hi ha dos cursos d'ESTALMAT. Després dels dos cursos hi ha un seguiment telemàtic on es proposen alguns problemes i es fan sessions presencials trimestralment. Aquest grup d'exalumnes és el grup anomenat ESTALMAT PI.

Característiques identificadores dels nois amb talent

Greenes (1981), a *Identifying the Gifted Student in Mathematics,* assenyala algunes de les característiques importants que poden ajudar a la identificació del talent especial en Matemàtiques.

Miguel de Guzmán en treu les idees centrals:
Abans del 1950, la intel·ligència es mesurava amb el IQ (Intelligence quotient), però després dels estudis de Guiford, Torrance,...es considera que les mesures normals del IQ no tenen en compte elements molt importants de la intel·ligència humana tals com la creativitat. Marland, al 1972, va proposar diferenciar dos tipus d'intel·ligència a través de les seves possibles orientacions concretes i línies d'acció específica. Els treballs de Renzull s'han centrat també en la creativitat i persistència en el treball.

Miguel de Guzmán resumeix que algunes característiques identificadores del talent en general són:

- rapidesa en l'aprenentatge
- habilitats d'observació
- memòria excel·lent
- capacitat excepcional de raonament i verbal
- s'avorreixen fàcilment amb les tasques de repetició, revisió, rutines
- posseeixen una gran potència d'abstracció
- capacitat de salts intuïtius
- s'arrisquen amb gust en la seva exploració amb idees noves
- són curiosos i interrogants.

En matemàtiques, sovint l'ensenyament inicial es basa en algoritmes aritmètics rutinaris i això dificulta identificar les aptituds adequades per la matemàtica pròpiament. Es necessari anar en compte per identificar, ja que hi ha alumnes que són molt bons realitzadors d'exercicis, mentre que hi ha dotats que no estan dins d'aquest grup d'alumnes. S'ha de diferenciar el bon estudiant de l'estudiant amb talent.

Característiques del grup d'ESTALMAT

Les característiques que hem pogut observar en la majoria dels nois d'ESTALMAT són:

- capacitat de generalitzar
- riquesa d'idees
- formulació espontània d'idees i de problemes
- ganes d'aprendre
- capacitat d'abstracció
- habilitat per l'organització de les dades
- preferència per problemes que per exercicis repetitius
- preferència per la comunicació oral
- raonament ràpid
- rapidesa en l'aprenentatge

Tenim caràcters molt variats i personalitats molt diferents. Alguns alumnes són oberts i espontanis, altres són més reservats i callats. Per tant no podem generalitzar una manera de fer comú a tots ells. Sí podem dir que dins dels diferents graus de maduració la majoria actuen com és habitual en la seva edat i fan el mateix que qualsevol altre grup d'alumnes de la seva edat: juguen, xerren, riuen. Però tot i així, tenen una motivació especial per fer i aprendre matemàtiques. La tria d'alumnes és un procés molt complicat i potser en algun cas molt puntual no del tot encertada. La majoria dels alumnes segueix perfectament les classes i fa aportacions molt interessants.

4.2- Disseny de l'experiència

4.2.1- Introducció

Per tal de respondre la pregunta general que guia aquest del treball: **Treballar amb jocs d'estratègia pot ajudar als alumnes de secundària obligatòria en el procés d'aprenentatge de la resolució de problemes**

de matemàtiques? analitzem la resolució de problemes d'alumnes de secundària abans i després de treballar amb jocs d'estratègia.

Pel disseny de l'experiència hem seleccionat uns problemes, hem elaborat un protocol de problemes i l'hem passat als alumnes per tal de recollir les dades de les resolucions. Hem treballat amb els alumnes uns determinats jocs que es poden resoldre utilitzant diferents estratègies heurístiques similars a les que utilitzem resolent els problemes. Novament, hem tornat a passar el protocol de problemes per tal de recollir les dades de les resolucions dels problemes després de treballar els jocs i les diferents heurístiques associades als mateixos. Finalment, hem analitzat diferents aspectes de les resolucions i hem comparat resultats d'abans i de després de treballar els jocs.

4.2.2- Elecció dels jocs

Hem triat jocs que es poden aplicar durant tota l'Educació Secundària Obligatòria. És a dir, no són ni molt senzills ni molt complicats i en els que les partides són curtes (els que hem anomenat Petits Jocs d'Estratègia). També hem tingut en compte que en els jocs es pugui trobar l'estratègia guanyadora mitjançant procediments interessants. Hem triat 4 jocs:

A continuació fem una descripció general dels jocs escollits:

JOC DEL 15: És un joc per dos jugadors. Tenim nou fitxes numerades de l'1 al 9. En un taulell 3x3 cada jugador al seu torn col·loca una fitxa a la casella que vulgui. Guanya el jugador que forma línea recta de 3 fitxes que sumin 15.

Estratègia guanyadora: posar el 5 al centre i posar la fitxa que fa parella amb la que posa el contrincant: 1-9, 2-8, 3-7, 4-6. Sempre sumarà 15 amb el 5 que hem posat al començament. Guanya el 1r jugador.

Heurístiques: ús de la simetria, fer un estudi sistemàtic de tots els casos

TREURE FITXES: És un joc per dos jugadors. Tenim deu fitxes iguals i cada jugador, al seu torn retira una o dues fitxes, a la seva elecció. Guanya el jugador que treu l'última fitxa.

Estratègia guanyadora: el primer jugador agafa fitxes de manera que sempre quedi un múltiple de tres.

Heurístiques: començar per final o raonament a la inversa.

ARRIBAR EL PRIMER (O LA REINA): És un joc per dos jugadors. En un tauler 8x8 el primer jugador col·loca una fitxa en la casella que vulgui i a partir d'aquí, de manera alternativa, van movent: horitzontal cap a l'esquerra, vertical cap a baix, en diagonal cap a baix i cap a l'esquerra. Guanya el jugador que aconsegueix portar una fitxa a la casella inferior esquerra.

Estratègia guanyadora: Guanya el primer jugador si col·loca la fitxa a l'espai (2, 3), (4, 6), (5,8), (7, 11), (9, 14), (10, 16), (12, 19) o el seus simètrics respecte de la diagonal del tauler.

Heurístiques: Raonament a la inversa, utilització de la simetria, reduir el problema a un més senzill.

MARGARITA: a) És un joc per dos jugadors. Tenim un tauler 9x1 amb nou fitxes. 2 jugadors. Cada jugador treu una o dues fitxes, però en el cas de ser dos han d'estar juntes. Guanya el jugador que aconsegueix emportar-se l'última fitxa.

b) És un joc per dos jugadors. En un tauler en forma de margarita de nou pètals posem una fitxa en cada pètal. Cada jugador, en el seu torn, treu una o dues fitxes, però en el cas de ser dos han d'estar juntes. Guanya el jugador que aconsegueix emportar-se l'última fitxa.

Estratègia guanyadora pel segon jugador: en la primera jugada es retira el nombre contrari de fitxes que l'adversari i situades oposades a les seves, de manera que es deixi al primer jugador sis fitxes col·locades en dos grups simètrics de tres fitxes. A partir d'aquest moment agafar les fitxes simètriques de les que retiri l'adversari.

Heurístiques: Ús de la simetria.

Podem sintetitzar les estratègies heurístiques previstes per treballar amb cada joc amb el següent quadre:

JOC	ESTRATÈGIES HEURÍSTIQUES PREVISTES
Joc del 15	- Fer un estudi sistemàtic de tots els casos possibles - La utilització de la simetria numèrica
Treu fitxes	- Començar pel final
Arribar el primer o reina	- Començar pel final - La utilització de la simetria
Margarita	- La utilització de la simetria

Taula 4.2.1: Estratègies heurístiques previstes per cada joc

4.2.3- Elecció dels problemes

Hem triat quatre problemes que es poden plantejar durant l'educació secundària obligatòria. Són problemes que per resoldre necessitem heurístiques diferents.

Per triar els problemes va ser necessària una prova pilot on vam detectar que algun problema era massa inaccessible per la majoria i vam modificar algun enunciat.

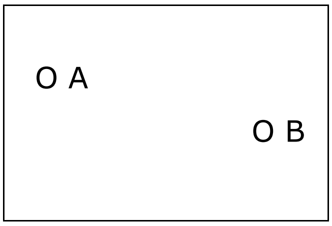
A continuació fem una descripció general dels problemes escollits:

Problema 1: a) Suma els nombres de l'1 al 100.
b) Pots aplicar el que has fet a l'apartat anterior per sumar els nombres de 1 al 75? Fes-ho i explica les diferències.

Problema 2: Si només podem anar a la dreta i a baix, quants recorreguts diferents hi ha per anar de A a I sense passar dues vegades pel mateix lloc?

A	B	C
D	E	F
G	H	I

Problema 3: En quina direcció hem d'impulsar la bola A perquè toqui al costat i després toqui la bola B?



Problema 4: D'una quantitat en traiem la meitat més un, del que queda en traiem la meitat més un, del que queda em traiem la meitat més un, del que queda, novament, traiem la meitat més 1 i en queda 1. Quina és la quantitat inicial?

PROBLEMA	ESTRATÈGIES HEURÍSTIQUES PREVISTES
1	- La utilització de la simetria numèrica - Reduir el problema a un més fàcil
2	- Fer un estudi sistemàtic de tots els casos possibles
3	- La utilització de la simetria
3	- Començar el problema pel final

Taula 4.2.2: Estratègies heurístiques previstes per cada problema

4.2.4- Elecció de les mostres

Hem triat alumnes de secundària de l'institut Sant Pere i Sant Pau de Tarragona.

Els grups triats per la recollida de dades són: un curs de 1r, un de 2n i un de 3r d'ESO tots ells amb alumnes sense greus dificultats d'aprenentatge. Tot i així, són grups bastant heterogenis.

Hem triat alumnes també de secundària però amb gran talent per les matemàtiques i que segueixen el programa d'ESTALMAT. El grup triat és un grup del 1r curs d'ESTALMAT.

Hem triat alumnes de 1r, 2n, i 3r i no de 4t perquè els alumnes d'ESTALMAT estan cursant aquests cursos. A més d'acord amb el currículum, els jocs estan indicats en els cursos de 1r i 2n ESO.

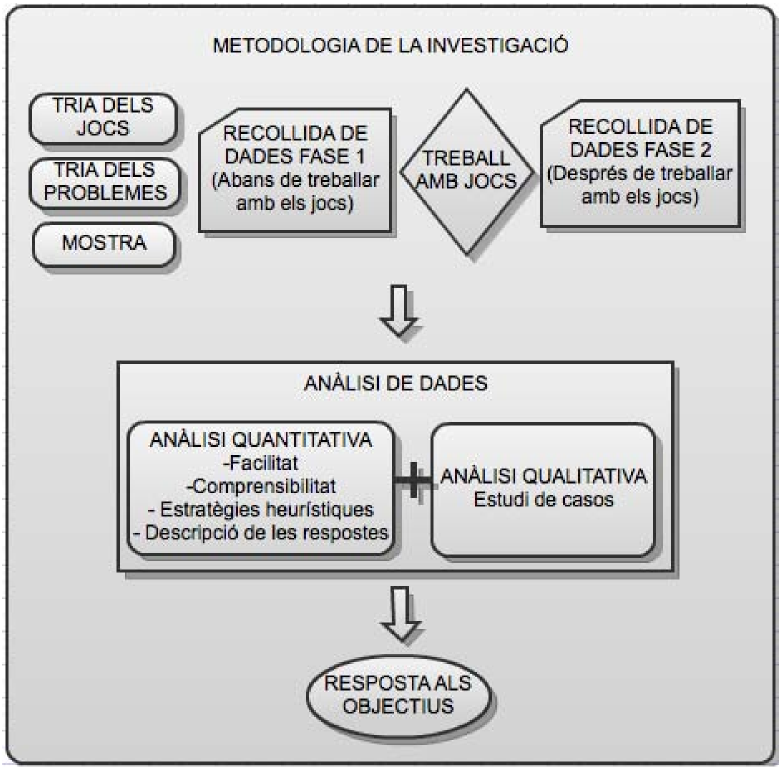
4.2.5- Metodologia de l'experiència

Per tal de respondre a l'objectiu del treball, que recordem que és veure si treballar amb jocs d'estratègia és una ajuda per als alumnes de secundària obligatòria en l'aprenentatge de la resolució de problemes de matemàtiques, hem fet el següent:

Hem dissenyat un instrument de recollida de dades que consta de quatre problemes (veure annex 1), hem escollit una mostra d'alumnes de secundària (alumnes de 1r, 2n, 3r d'ESO i alumnes també de secundària però que segueixen un programa d'estimulació del talent en matemàtiques ESTALMAT). Hem passat els problemes a la mostra d'alumnes. Hem escollit quatre jocs d'estratègia (veure 4.2.2) la resolució dels quals és similar a la resolució d'alguns problemes. Hem fet unes sessions per treballar els jocs i les heurístiques concretes per cada joc. Hem verbalitzat les heurístiques amb els alumnes en cada cas. Després hem tornat a passar els problemes. Per tant, hem recollit les dades del protocol de problemes en dues fases: la fase 1, abans de treballar els jocs i la fase 2, després de treballar-los. Entre la fase 1 i la fase 2 ha transcorregut un mes de temps aproximadament. Per poder comparar les dues fases i valorar la millora, no ens hem fixat només si han resolt el problema bé o no, sinó que hem considerat 5 aspectes diferents dels problemes per a l'anàlisi de les seves resolucions: la resposta subjectiva que cada alumne fa sobre si ha resolt el problema, la resposta objectiva de si han resolt el problema, la comprensió de l'enunciat, l'estratègia heurística, i l'expressió de la resolució. Els dos primers aspectes fan referència a la resposta, si han resolt el problema o no; ens interessa la resposta objectiva i la subjectiva per determinar quina distància hi ha entre el que fan o el que diuen que fan i ho utilitzarem en la definició de comprensibilitat del problema. No només ens interessa quantificar quants ho han fet bé abans i després de treballar els jocs sinó que volem estudiar els canvis que es produeixen al treballar els jocs i per això hem considerat els altres tres aspectes: comprensió, estratègia heurística i expressió de la resolució.

D'aquesta manera hem pogut analitzar les resolucions dels problemes de cada grup i de la mostra total en cada fase i comparar les millores per grups, per fases i per cada problema. També hem fet, per cada característica definida, una anàlisi de la millora global de tots els problemes per cada nivell. Finalment, hem fet un estudi de casos per exposar exemples de millores de les resolucions dels problemes després de treballar els jocs i mostrar la influència de l'ús de jocs en la resolució dels problemes segons les opinions dels alumnes.

Podem sintetitzar la metodologia de l'estudi amb el següent esquema:



Quadre 4.2.1: Metodologia de la investigació

4.2.6.-Organització i anàlisis de les dades

Hem organitzat les dades en taules. En l'apartat 5.1 s'exposa la codificació de les taules de recollida de dades per l'anàlisi de les resolucions dels problemes. En l'apartat 5.2 s'exposen els resultats obtinguts per a cada grup i per a cada fase. En l'apartat 5.3 es fa l'estudi i anàlisi de les resolucions dels problemes. Pel tal de poder fer aquest estudi, hem definit i quantificat: la comprensibilitat, la facilitat, les estratègies heurístiques i la descripció de les resolucions dels problemes. Hem analitzat les resolucions dels problemes de cada grup i de la mostra total en cada fase i hem comparat les millores per grups, per fases i per cada problema. També hem fet, per cada característica definida, una anàlisi de la millora global de tots els problemes per cada nivell. Finalment, en l'aparta 5.4 exposem exemples de millores de les resolucions dels problemes després de treballar els jocs i l'evidència de la influència dels jocs en la resolució dels problemes.

5. ORGANITZACIÓ I ANÀLISI DE LES DADES

5. ORGANITZACIÓ, ANÀLISI DE LES DADES I RESULTATS

Aquest capítol està dedicat a l'organització i anàlisi de les dades. S'aborda l'organització de dades i els resultats dels problemes obtinguts abans i després de treballar els jocs, tot exposant les dades i fent un estudi i comparació de les mateixes. En l'últim apartat s'exposen les millores obtingudes després de treballar els jocs.

5.1. Organització de les dades

Hem començat analitzant les dades corresponents als 4 problemes que constitueixen el protocol de problemes. Hem utilitzat cinc aspectes diferents per a l'anàlisi de les resolucions dels problemes i els hem codificat per comparar les dues fases. La fase 1: abans de treballar els jocs i, la fase 2: després de treballar-los. La codificació s'ha fet de la manera següent:

I: <u>La resposta subjectiva</u>: La resposta que cada alumne fa sobre si ha resolt el problema.	Si - 1 No - 2
II: <u>Resposta objectiva</u>: La realitat de la resposta que les/els alumnes proporcionen deduïda de les altres contestacions.	Si total – 1 Si parcial - 2 No–3 (inclou: no respon) No està clar - 4
III: <u>Comprensió de l'enunciat</u>: Comprensió que els/les alumnes fan de l'enunciat deduït de l'explicació que fan de l'enunciat i també deduït de la resolució del problema.	Si – 1 No -2 No està clar - 3
IV: <u>Estratègia heurística</u>: Fa referència al tipus d'estratègies heurístiques que s'han utilitzat, deduïdes de les seves resolucions.	Segons cada problema, la seva heurística esperada i el seu grau d'aplicació
V: <u>Expressió de la realització</u>: Fa referència a la manera que han utilitzat per expressar les resolucions dels problemes.	Cap -1 Llenguatge verbal -2 Gràficament -3 Llenguatge numèric -4 Altres codificacions -5

Taula 5.1.1: Codificació de les taules de dades de la resolució del protocol de problemes

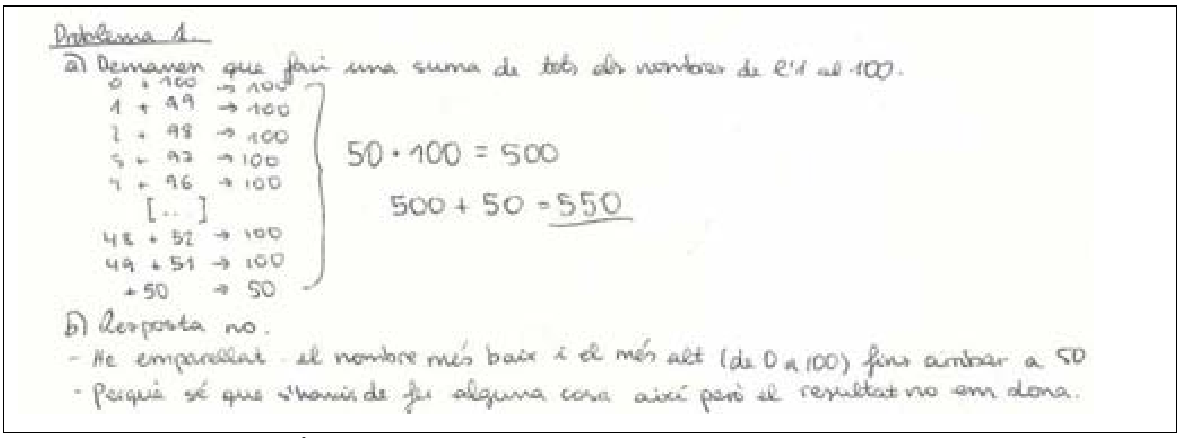
El punt IV, estratègia heurística, requereix un tractament específic, la qual cosa ens obliga a detallar els criteris i el grau d'aplicació de les heurístiques emprades per a cadascun del problemes. Aquest fet fa que, més enllà d'un tractament quantitatiu inicial, sigui interessant fer una anàlisi qualitativa tenint en compte el que fan els alumnes, cosa que ens permetrà conèixer amb més detall la utilització que fan els alumnes de les estratègies heurístiques i que farem en l'apartat 5.5.

Seguidament detallem els criteris i el grau d'aplicació de les heurístiques emprades per a cadascun del problemes:

Problema 1 a) Suma els nombres de l'1 al 100.
b) Pots aplicar el que has fet a l'apartat anterior per sumar els nombres de 1 al 75? Fes-ho i explica les diferències.

1-No s'identifica cap estratègia
2-Fer la suma directament, o dir el resultat de la suma sense justificar
3-Fer ús de simetria numèrica però sense arribar al resultat
4-Fer ús de simetria numèrica arribant a la solució del primer apartat
5-Fer ús de simetria numèrica arribant a la solució del primer i segon apartats

Els dos primers criteris no necessiten cap aclariment. Pel que fa al 3r, ús de simetria numèrica però sense arribar al resultat, un exemple del que fan alguns alumnes és el següent:

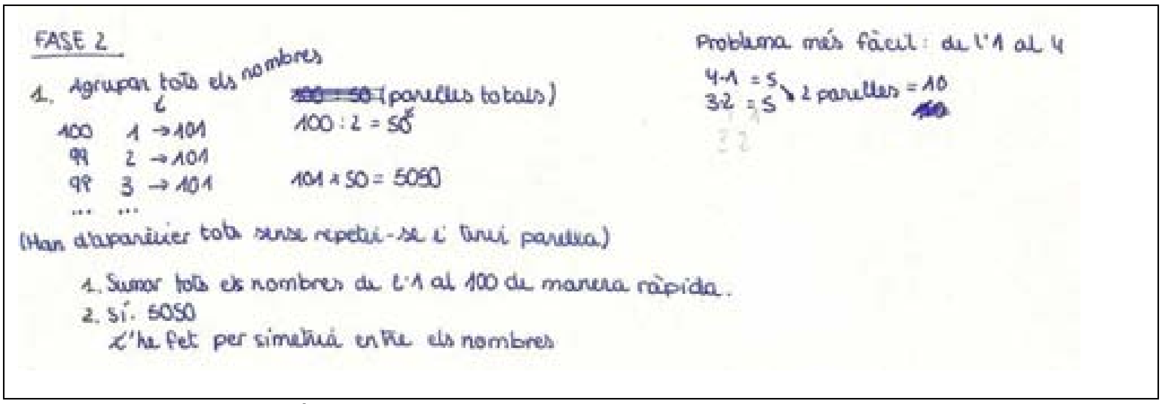

Problema 1.
a) Demanen que faci una suma de tots els nombres de l'1 al 100.
0 + 100 → 100
1 + 99 → 100
2 + 98 → 100
3 + 97 → 100
4 + 96 → 100
[...]
48 + 52 → 100
49 + 51 → 100
+ 50 → 50

50 · 100 = 500
500 + 50 = 550

b) Resposta no.
- He emparellat el nombre més baix i el més alt (de 0 a 100) fins arribar a 50
- Perquè sé que s'havia de fer alguna cosa així però el resultat no em dona.

Imatge 5.1.2: Resolució de l'alumne 20 de 3r d'ESO, problema 1, fase 1

Pel que fa al 4rt, ús de simetria numèrica arribant a la solució del primer apartat, un exemple del que fan alguns alumnes és el següent:


FASE 2

1. Agrupar tots els nombres

100 1 → 101
99 2 → 101
98 3 → 101
... ...

~~100~~ 50 (parelles totals)
100 : 2 = 50

101 × 50 = 5050

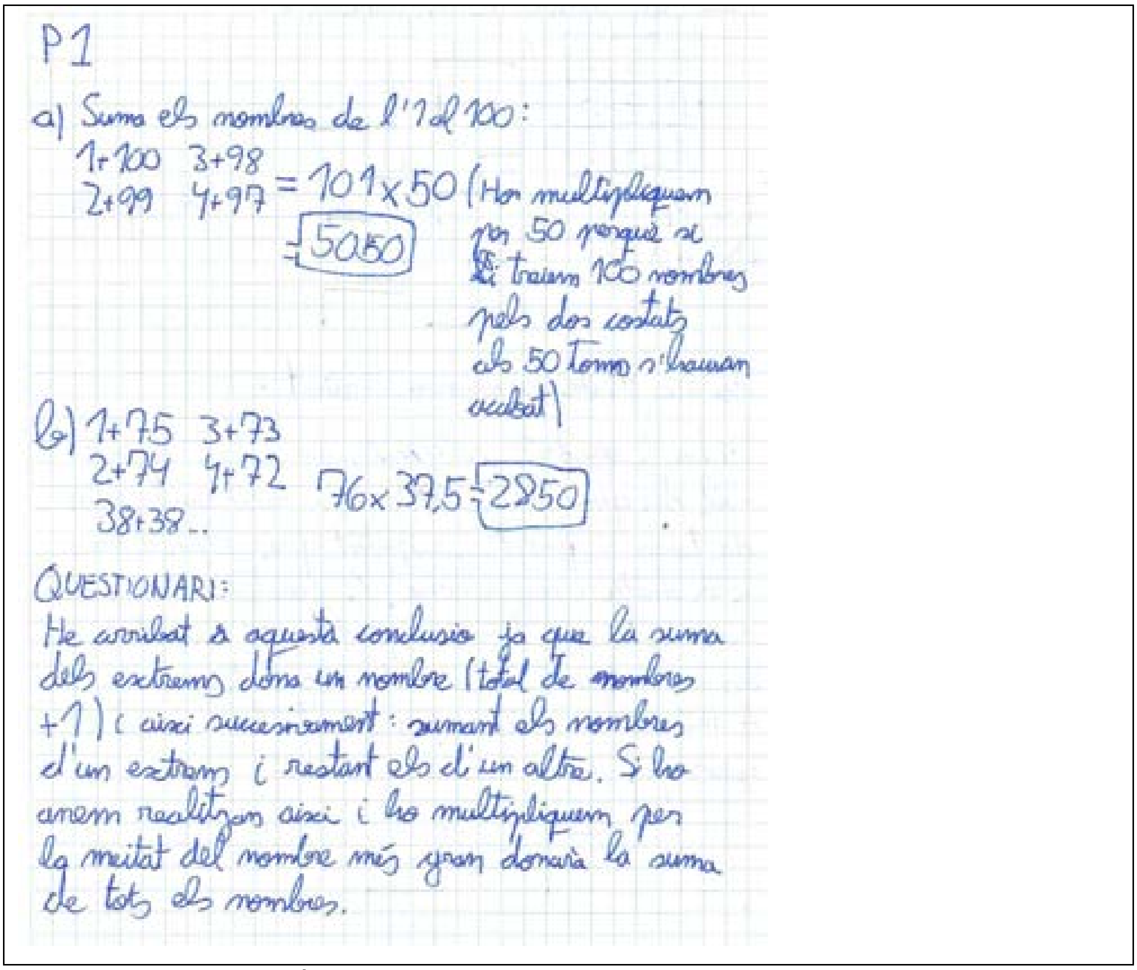
(Han d'aparellar tots sense repetir-se i tenir parella)

1. Sumar tots els nombres de l'1 al 100 de manera ràpida.
2. Sí. 5050
S'ha fet per simetria entre els nombres

Problema més fàcil: de l'1 al 4
4+1 = 5
3+2 = 5 → 2 parelles = 10

Imatge 5.1.3: Resolució de l'alumne 16 de 3r d'ESO, problema 1, fase 2

Pel que fa al 5è, ús de simetria numèrica arribant a la solució del primer i segon apartats, un exemple del que fan alguns alumnes és el següent:


P1

a) Suma els nombres de l'1 al 100:
1+100 3+98
2+99 4+97 = 101×50 = 5050
(Hem multipliquem per 50 perquè si traiem 100 nombres pels dos costats els 50 torns s'hauran acabat)

b) 1+75 3+73
2+74 4+72 76×37,5 = 2850
38+38...

QUESTIONARI:
He arribat a aquesta conclusió ja que la suma dels extrems dóna un nombre (total de nombres +1) i així successivament: sumant els nombres d'un extrem i restant els d'un altre. Si ho anem realitzant així i ho multipliquem per la meitat del nombre més gran donarà la suma de tots els nombres.

Imatge 5.1.4: Resolució de l'alumne 5 d' ESTALMAT, problema 1, fase 2

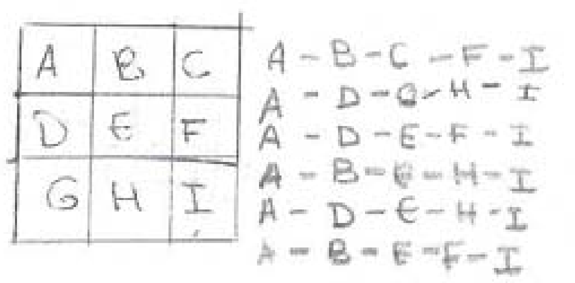
Problema 2 Si només podem anar a la dreta i a baix, quants recorreguts diferents hi ha per anar de A a I sense passar dues vegades pel mateix lloc?

A	B	C
D	E	F
G	H	I

1- No s'identifica cap estratègia
2- Dir algun camí
3- Estudi de tots els casos mentalment i diuen tots els camins.
4- Estudi de tots els casos gràficament
5- Estudi de tots els casos mitjançant arbre de possibilitats

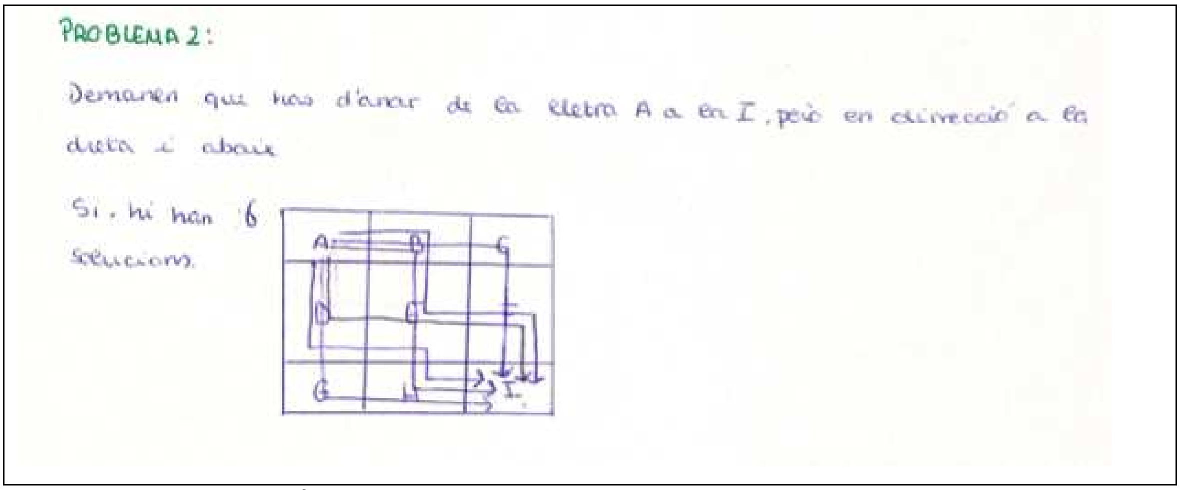
Els dos primers criteris no necessiten cap aclariment.

Pel que fa al 3r, estudi de tots els casos mentalment i diuen tots els camins, un exemple del que fan alguns alumnes és el següent:



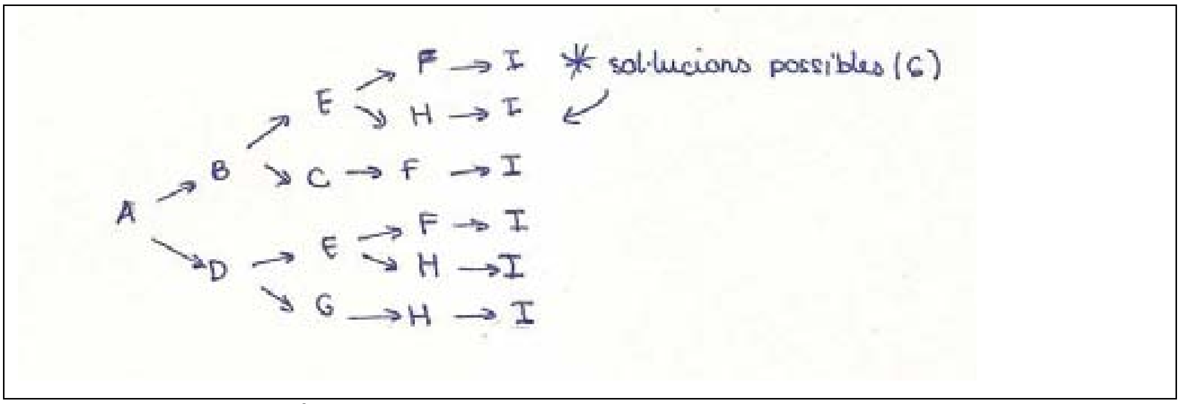
Imatge 5.1.5: Resolució de l'alumne 17 de 2n d'ESO, problema 2, fase 2

Pel que fa al 4rt, estudi de tots els casos gràficament, un exemple del que fan alguns alumnes és el següent:



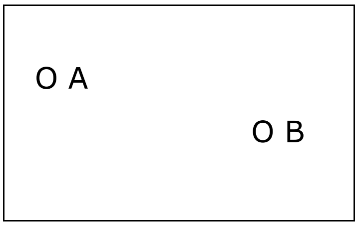
Imatge 5.1.6: Resolució de l'alumne 10 de 3r d'ESO, problema 2, fase 2

Pel que fa al 5è, estudi de tots els casos mitjançant arbre de possibilitats, un exemple del que fan alguns alumnes és el següent:



Imatge 5.1.7: Resolució de l'alumne 12 de 3r d'ESO, problema 2, fase 2

Problema 3 En quina direcció hem d'impulsar la bola A perquè toqui al costat i després toqui la bola B?



1- No s'identifica cap estratègia

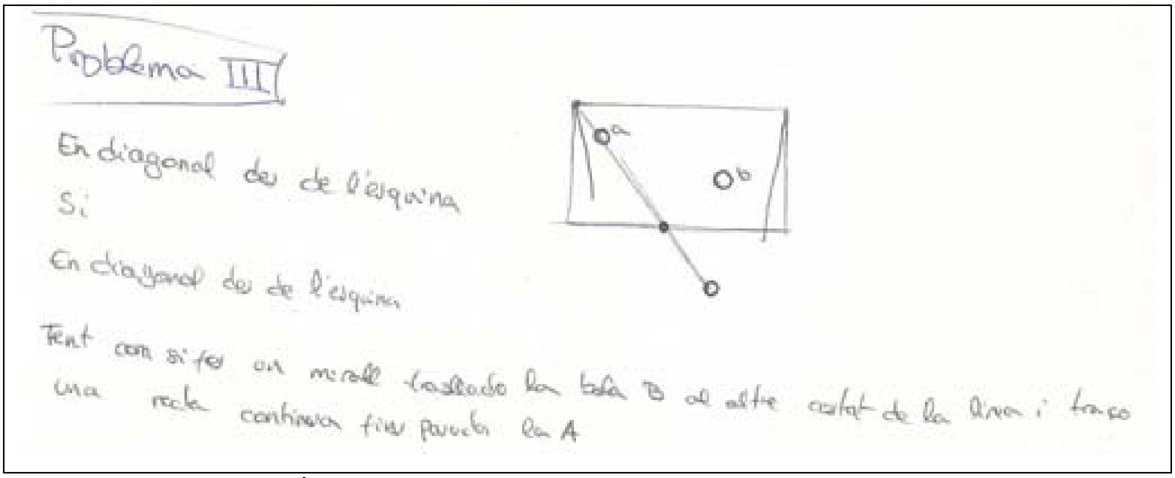
2- Donar un punt sense justificar

3- Fer ús de simetria geomètrica però amb error

4- Fer ús de simetria geomètrica correctament

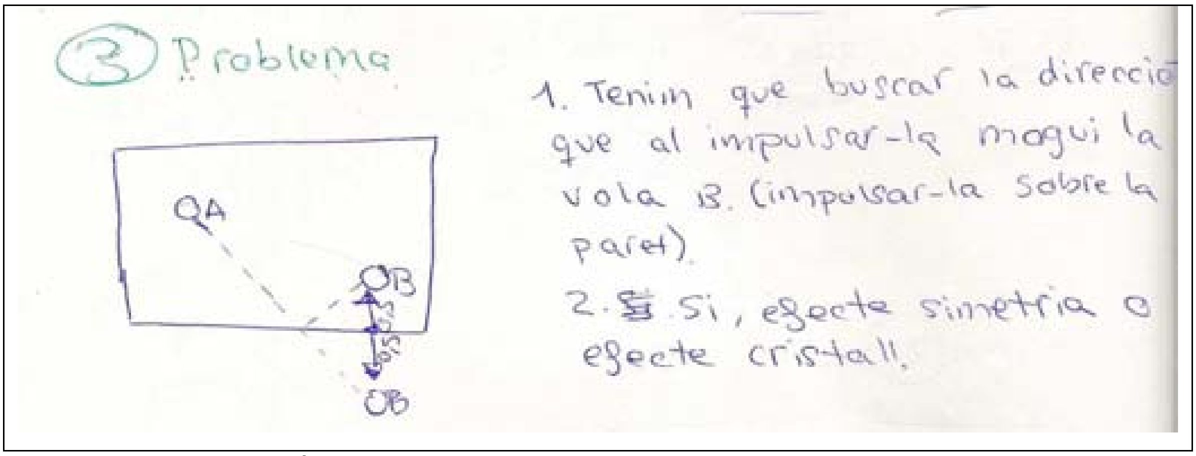
5- Fer ús de simetria geomètrica i justificant la resposta

Els dos primers criteris no necessiten cap aclariment. Pel que fa al 3r, ús de simetria geomètrica però amb error, un exemple del que fan alguns alumnes és el següent:



Imatge 5.1.8: Resolució de l'alumne 11 de 1r d'ESO, problema 3, fase 1

Pel que fa al 4rt, ús de simetria geomètrica correctament, un exemple del que fan alguns alumnes és el següent:



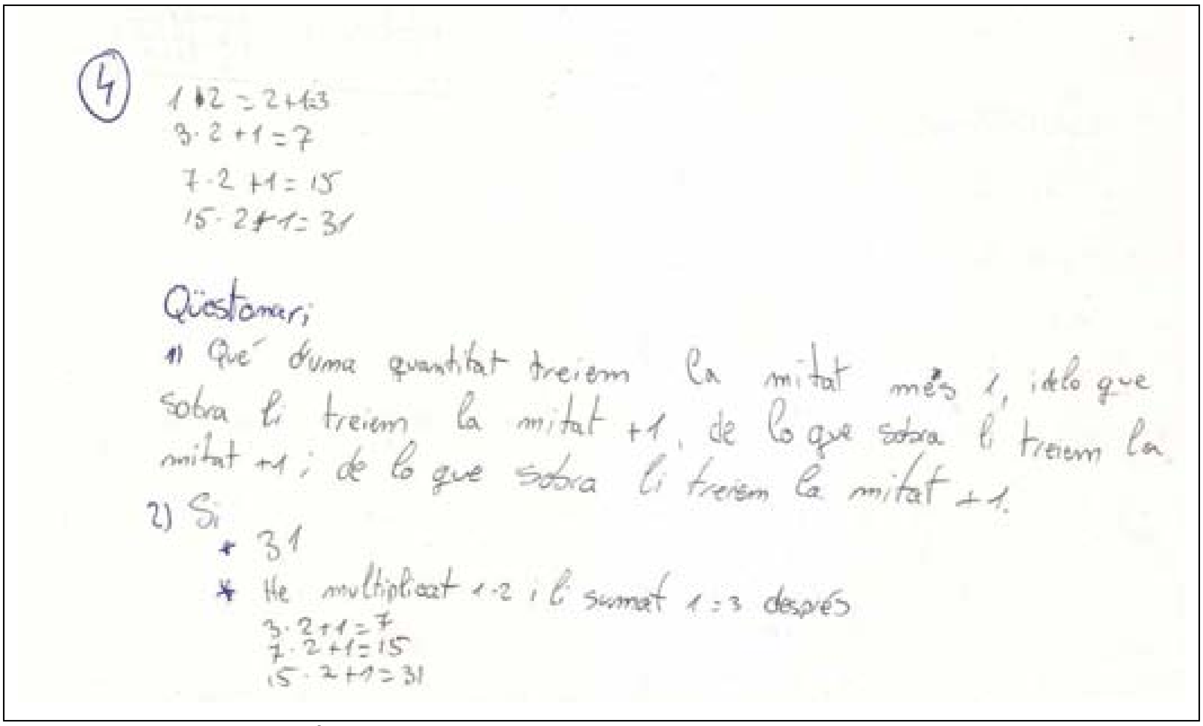
Imatge 5.1.9: Resolució de l'alumne 8 de 1r d'ESO, problema 3, fase 2

Pel que fa al 5è, ús de simetria geomètrica i justificant la resposta, cap alumne ho ha fet així.

Problema 4 D'una quantitat en traiem la meitat més un, del que queda en traiem la meitat més un, del que queda em traiem la meitat més un, del que queda, novament, traiem la meitat més 1 i en queda 1. Quina és la quantitat inicial?

1- No s'identifica cap estratègia cap
2- Dir un nombre sense justificar o fent la suma amb calculadora
3- Fer el problema a la inversa però incorrectament
4- Fer el problema a la inversa correctament però incomplet
5- Fer el problema a la inversa correctament i complet

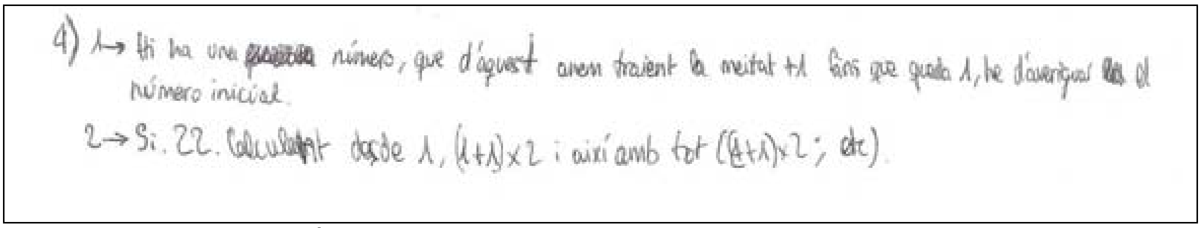
Els dos primers criteris no necessiten cap aclariment. Pel que fa al 3r, fer el problema a la inversa però incorrectament, un exemple del que fan alguns alumnes és el següent:


4
1·2 = 2+1=3
3·2+1=7
7·2+1=15
15·2+1=31

Qüestionari
1) Què d'una quantitat treiem la mitat més 1, i de lo que sobra li treiem la mitat +1, de lo que sobra li treiem la mitat +1; de lo que sobra li treiem la mitat +1.
2) Si
* 31
* He multiplicat 1·2 i li sumat 1=3 després
3·2+1=7
7·2+1=15
15·2+1=31

Imatge 5.1.10: Resolució de l'alumne 27 de 1r d'ESO, problema 4, fase 1

Pel que fa al 4rt, fer el problema a la inversa correctament però incomplet, un exemple del que fan alguns alumnes és el següent:

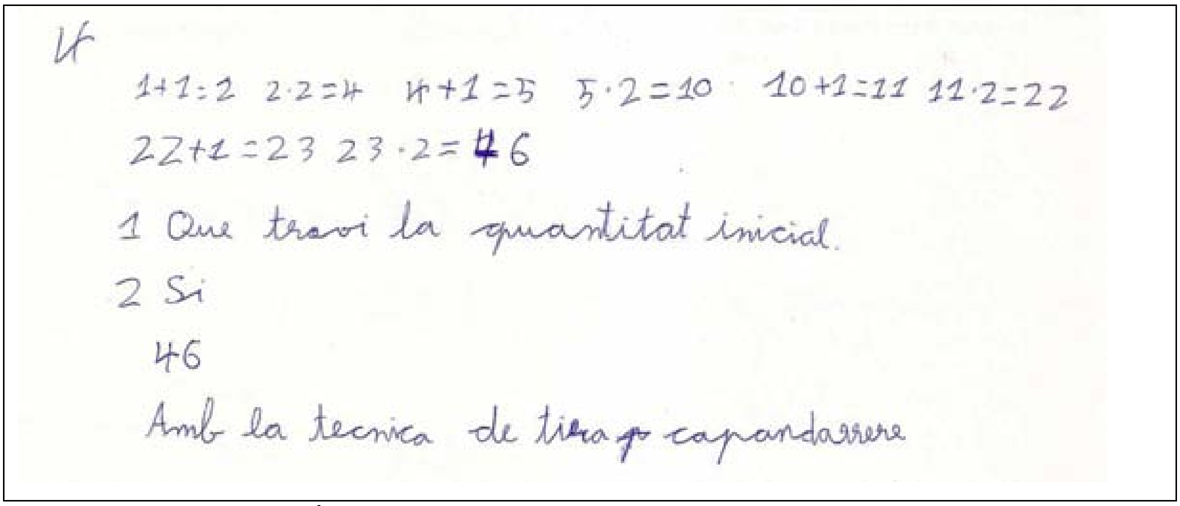


4) 1→ Hi ha una ~~quantitat~~ número, que d'aquest anem traient la meitat +1 fins que queda 1, he d'averiguar ~~el~~ el número inicial.

2→ Si. 22. Calculant desde 1, (1+1)×2 i així amb tot ((1+1)×2; etc).

Imatge 5.1.11: Resolució de l'alumne 24 de 2n d'ESO, problema 4, fase 2

Pel que fa al 5è, fer el problema a la inversa correctament i complet, un exemple del que fan alguns alumnes és el següent:



4

1+1=2 2·2=4 4+1=5 5·2=10 10+1=11 11·2=22

22+1=23 23·2=46

1 Que trovi la quantitat inicial.

2 Si

46

Amb la tecnica de tira ~~p~~ capandarrere

Imatge 5.1.12: Resolució de l'alumne 26 de 1r d'ESO, problema 4, fase 2

Una vegada establerts els criteris i les heurístiques per a cada problema, ja podem fer el buidat de les dades del protocol.

5.2- Exposició de resultats de l'anàlisi quantitatiu de cadascun dels problemes per cada grup i cada fase

El primer que hem fet és buidar les dades del protocol de problemes.

Recordem que les mostres són:

Grup	1r	2n	3r	ESTALMAT	TOTAL
Nombre d'alumnes	26	25	28	24	103

A l'annex 2, es presenten totes les taules amb les dades per a cadascun dels problemes i per cada mostra d'alumnes i per a cada fase, organitzades de la següent manera:

Alumnes 1r d'ESO (fase 1)

Problema	1	2	3	4
Taula	5.2.1	5.2.2	5.2.3	5.2.4

Alumnes 1r d'ESO (fase 2)

Problema	1	2	3	4
Taula	5.2.5	5.2.6	5.2.7	5.2.8

Alumnes 2n d'ESO (fase 1)

Problema	1	2	3	4
Taula	5.2.9	5.2.10	5.2.11	5.2.12

Alumnes 2n d'ESO (fase 2)

Problema	1	2	3	4
Taula	5.2.13	5.2.14	5.2.15	5.2.16

Alumnes 3r d'ESO (fase 1)

Problema	1	2	3	4
Taula	5.2.17	5.2.18	5.2.19	5.2.20

Alumnes 3r d'ESO (fase 2)

Problema	1	2	3	4
Taula	5.2.21	5.2.22	5.2.23	5.2.24

Alumnes ESTALMAT (fase 1)

Problema	1	2	3	4
Taula	5.2.25	5.2.26	5.2.27	5.2.28

Alumnes ESTALMAT (fase 2)

Problema	1	2	3	4
Taula	5.2.29	5.2.30	5.2.31	5.2.32

Aquestes dades ens serviran per analitzar els resultats d'acord amb les característiques dels problemes que definim en el següent apartat.

5.3- Anàlisi de les resolucions dels problemes

En aquest apartat, fem l'estudi de les resolucions dels problemes. Pel tal de poder fer aquest estudi, hem definit i quantificat: la comprensibilitat, la facilitat, les estratègies heurístiques i la descripció de les resolucions dels problemes. D'aquesta manera hem pogut analitzar les resolucions dels problemes de cada grup i de la mostra total en cada fase i comparar les millores per grups, per fases i per cada problema. També hem fet, per cada característica definida, una anàlisi de la millora global de tots els problemes per a cada nivell.

5.3.1.- Comprensibilitat

La comprensibilitat fa referència a la facilitat per entendre el problema (és a dir, entendre l'enunciat i resoldre el problema). Un problema és més comprensible quant major és el percentatge de la resposta 1 en l'apartat III (comprensió de l'enunciat del problema), així com la proporció del grup de respostes 1 i 1 (o 1 i 2) en els apartats I (resposta subjectiva) i II (resposta objectiva), respectivament, és a dir, els alumnes que diuen que han resolt el problema i efectivament és així, total o parcialment.

Els problemes que tenen Índex de Comprensibilitat alt són aquells que un percentatge elevat d'alumnes entenen el seu enunciat i també un percentatge elevat el resolen.

En les taules d'aquest subapartat apareixen agrupats els percentatges de respostes d'aquests grups d'alumnes en cadascun dels problemes. El significat de les columnes és el següent:

A Resposta 1 a l'apartat III, és a dir, s'entén l'enunciat del problema

B Resposta 1 i 1 als apartats I i II, és a dir, es diu que es resol el problema i és així

C Resposta 1 i 2 als apartats I i II, a dir, es diu que es resol el problema i és així parcialment

t1 Total que resulta de sumar B amb la meitat de C, és a dir, el percentatge ponderat dels que resolen el problema total o parcialment

t Total que resulta de sumar A i t1, és a dir, els que entenen l'enunciat més els que resolen el problema.

Icomp Índex de comprensibilitat: t/200

La columna t ens donaria una mesura de la comprensibilitat tenint en compte tots els factors que afecten a cadascun dels problemes, sent el màxim resultat possible 200. L'índex de comprensibilitat el trobem dividint aquest valor per 200. Per tant, serà un valor comprès entre 0 i 1. L'anomenarem Icomp.

Comprensibilitat 1r ESO fase 1

Problema	A	B	C	a%	b%	c%	t1	t	Icomp
P1	7	0	0	26,92	0,00	0,00	0,00	26,92	0,13
P2	17	9	9	65,38	34,62	34,62	51,92	117,31	0,59
P3	21	7	0	80,77	26,92	0,00	26,92	107,69	0,54
P4	2	2	0	7,69	7,69	0,00	7,69	15,38	0,08

Taula 5.3.1: Comprensibilitat dels alumnes 1r d'ESO fase 1

D'acord amb les dades de la taula anterior, pels alumnes de 1r ESO a la fase 1, el problema amb índex de comprensibilitat més elevat és el 2n problema (0,59), seguit del 3r (0,54). En aquests problemes, hi ha més alumnes que entenen els seus enunciats i més alumnes que diuen que els han resolt i efectivament és així, total o parcialment. Els problemes amb menys comprensibilitat són el 1r (0,13) i el 4t (0,08). Això vol dir que molts alumnes no han entès els enunciats dels problemes, o que no els han resolt.

Comprensibilitat 1r ESO fase 2

Problema	A	B	C	a%	b%	c%	t1	t	Icomp
P1	12	1	1	46,15	3,85	3,85	5,77	51,92	0,26
P2	23	13	11	88,46	50,00	42,31	71,15	159,62	0,80
P3	25	13	0	96,15	50,00	0,00	50,00	146,15	0,73
P4	12	3	0	46,15	11,54	0,00	11,54	57,69	0,29

Taula 5.3.2: Comprensibilitat dels alumnes 1r d'ESO fase 2

Pels alumnes de 1r ESO a la fase 2, el problema amb índex de comprensibilitat més elevat és el 2n problema (0,80), seguit del 3r (0,73). En aquests problemes, hi ha més alumnes que entenen els seus enunciats i més alumnes que diuen que els han resolt i efectivament és així, total o parcialment. Els problemes amb menys comprensibilitat són el 4t i el 1r (0,29 i 0,26 respectivament). Això vol dir que hi ha més alumnes que no han entès els enunciats dels problemes, o que no els han resolt.

Comprensibilitat 2n ESO fase 1

Problema	A	B	C	a%	b%	c%	t1	t	Icomp
P1	4	0	0	16	0	0	0	16	0,08
P2	10	5	12	40	20	48	44	84	0,42
P3	16	0	0	64	0	0	0	64	0,32
P4	3	0	0	12	0	0	0	12	0,06

Taula 5.3.3: Comprensibilitat dels alumnes 2n d'ESO fase 1

Pels alumnes de 2n d'ESO a la fase 1, el problema amb índex de comprensibilitat més elevat és el 2n problema (0,42), seguit del 3r (0,32). En aquests problemes, hi ha més alumnes que entenen els seus enunciats i més alumnes que diuen que els han resolt i efectivament és així, total o parcialment. Els problemes amb menys comprensibilitat són el 1r i el 4t

(0.08 i 0,06 respectivament). Això vol dir que molts alumnes no han entès els enunciats d'aquests problemes, o que no els han resolt.

Comprensibilitat 2n ESO fase 2

Problema	A	B	C	a%	b%	c%	t1	t	Icomp
P1	7	0	0	28	0	0	0	28	0,14
P2	21	19	3	84	76	12	82	166	0,83
P3	24	2	0	96	8	0	8	104	0,52
P4	8	2	1	32	8	4	10	42	0,21

Taula 5.3.4: Comprensibilitat dels alumnes 2n d'ESO fase 2

Pels alumnes de 2n d'ESO a la fase 2, el problema amb índex de comprensibilitat més elevat és el 2n problema (0,83), seguit del 3r (0,52). En aquests problemes, hi ha més alumnes que entenen els seus enunciats i més alumnes que diuen que els han resolt i efectivament és així, total o parcialment. Els problemes amb menys comprensibilitat són el 4t i el 1r (0,21 i 0,14 respectivament). Això vol dir que hi ha més alumnes que no han entès els enunciats d'aquests problemes, o que no els han resolt.

Comprensibilitat 3r ESO fase 1

Problema	A	B	C	a%	b%	c%	t1	t	Icomp
P1	20	3	7	71,43	10,71	25,00	23,21	94,64	0,47
P2	24	5	17	85,71	17,86	60,71	48,21	133,93	0,67
P3	24	1	0	85,71	3,57	0,00	3,57	89,29	0,45
P4	7	1	1	25,00	3,57	3,57	5,36	30,36	0,15

Taula 5.3.5: Comprensibilitat dels alumnes 3r d'ESO fase 1

Pels alumnes de 3r d'ESO a la fase 1, el problema amb índex de comprensibilitat més elevat és el 2n problema (0,67), seguit del 1r i 3r (0,47 i 0,45). En aquests problemes, hi ha més alumnes que entenen els seus enunciats i més alumnes que diuen que els han resolt i efectivament és així, total o parcialment. El problema amb menys comprensibilitat és el 4t (0,15).

Això vol dir que més alumnes no han entès l'enunciat d'aquest problema, o que no l'han resolt.

Comprensibilitat 3r ESO fase 2

Problema	A	B	C	a%	b%	c%	t1	t	Icomp
P1	17	4	0	60,71	14,29	0,00	14,29	75,00	0,38
P2	28	19	8	100,00	67,86	28,57	82,14	182,14	0,91
P3	24	1	0	85,71	3,57	0,00	3,57	89,29	0,45
P4	8	4	1	28,57	14,29	3,57	16,07	44,64	0,22

Taula 5.3.6: Comprensibilitat dels alumnes 3r d'ESO fase 2

Pels alumnes de 3r d'ESO a la fase 2, el problema amb índex de comprensibilitat més elevat és el 2n problema (0,91), seguit del 3r (0,45). En aquests problemes, hi ha més alumnes que entenen els seus enunciats i més alumnes que diuen que els han resolt i efectivament és així, total o parcialment. Els problemes amb índex de comprensibilitat més baix són el 1r i el 4t problema (0,38 i 0,22 respectivament). Això vol dir que hi ha més alumnes que no han entès els enunciats d'aquests problemes, o que no els han resolt.

Comprensibilitat ESTALMAT fase 1

Problema	A	B	C	a%	b%	c%	t1	t	Icomp
P1	19	12	0	79,17	50,00	0,00	50,00	129,17	0,65
P2	18	15	2	75,00	62,50	8,33	66,67	141,67	0,71
P3	12	1	0	50,00	4,17	0,00	4,17	54,17	0,27
P4	11	3	3	45,83	12,50	12,50	18,75	64,58	0,32

Taula 5.3.7: Comprensibilitat dels alumnes ESTALMAT fase 1

El problema més comprensible pels alumnes d'ESTALMAT a la fase 1 és el 2n problema (0,71), seguit del 1r (0,65). En aquests problemes, hi ha més alumnes que entenen els seus enunciats i més alumnes que diuen que els han resolt i efectivament és així, total o parcialment. Els problemes amb índex de comprensibilitat més baix són el 4t i el 3r (0,32 i 0,27 respectivament). Això vol dir que més alumnes no han entès els enunciats d'aquests problemes, o que no els han resolt.

Comprensibilitat ESTALMAT fase 2

Problema	A	B	C	a%	b%	c%	t1	t	Icomp
P1	24	22	0	100,00	91,67	0,00	91,67	191,67	0,96
P2	20	16	3	83,33	66,67	12,50	72,92	156,25	0,78
P3	20	1	0	83,33	4,17	0,00	4,17	87,50	0,44
P4	17	14	0	70,83	58,33	0,00	58,33	129,17	0,65

Taula 5.3.8: Comprensibilitat dels alumnes ESTALMAT fase 2

El problema més comprensible pels alumnes d'ESTALMAT a la fase 2 és el 1r problema (0,96), seguit del 2r i 4t (0,78 i 0,65 respectivament). En aquests problemes, hi ha més alumnes que entenen els seus enunciats i més alumnes que diuen que els han resolt i efectivament és així, total o parcialment. El problema amb menys comprensibilitat és el 3r (0,44). Això vol dir que més alumnes no han entès l'enunciat d'aquest problema, o que no l'han resolt.

Comprensibilitat de la mostra total d'alumnes fase 1

Problema	A	B	C	a%	b%	c%	t1	t	Icomp
P1	50	15	7	48,54	14,56	6,80	17,96	66,50	0,33
P2	69	34	40	66,99	33,01	38,83	52,43	119,42	0,60
P3	73	9	0	70,87	8,74	0,00	8,74	79,61	0,40
P4	23	6	4	22,33	5,83	3,88	7,77	30,10	0,15

Taula 5.3.9: Comprensibilitat de la mostra total d'alumnes fase 1

El problema amb l'índex de comprensibilitat més alt per la mostra total d'alumnes a la fase 1 és el 2n problema (0,60), seguit del 3r i el 1r (0,44 i 0,33 respectivament). En aquests problemes, hi ha més alumnes que entenen els seus enunciats i més alumnes que diuen que els han resolt i efectivament és així, total o parcialment. El problema amb menys comprensibilitat és el 4t (0,15). Això vol dir que més alumnes no han entès l'enunciat d'aquest problema, o que no l'han resolt.

Comprensibilitat de la mostra total d'alumnes fase 2

Problema	A	B	C	a%	b%	c%	t1	t	Icomp
P1	60	27	1	58,25	26,21	0,97	26,70	84,95	0,42
P2	92	67	25	89,32	65,05	24,27	77,18	166,50	0,83
P3	93	17	0	90,29	16,50	0,00	16,50	106,80	0,53
P4	45	23	2	43,69	22,33	1,94	23,30	66,99	0,33

Taula 5.3.10: Comprensibilitat de la mostra total d'alumnes fase 2

El problema amb l'índex de comprensibilitat més alt per la mostra total d'alumnes a la fase 2 és el 2n problema (0,83), seguit del 3r i el 1r (0,53 i 0,42 respectivament). En aquests problemes, hi ha més alumnes que entenen els seus enunciats i més alumnes que diuen que els han resolt i efectivament és així, total o parcialment. El problema amb menys comprensibilitat és el 4t (0,33). Això vol dir que més alumnes no han entès l'enunciat d'aquest problema, o que no l'han resolt.

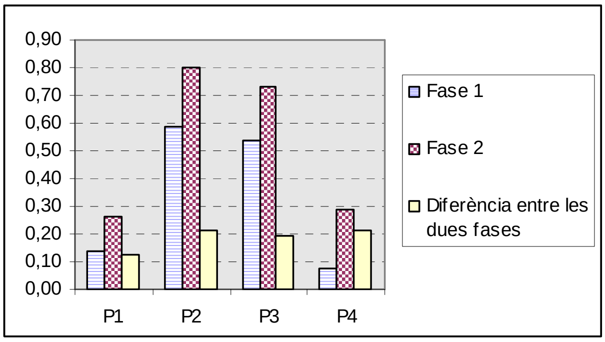
Comparacions en la comprensibilitat entre les dues fases per a cada grup i per a cada problema

Tot seguit mostrem les taules per a cada grup amb l'índex de comprensibilitat de les dues fases, i la diferència dels índex en cada fase per a cada problema.

1r ESO

Problema	Icom 1ESO fase I	Icomp 1ESO fase II	Icomp 1ESO II-I
P1	0,13	0,26	+0,13
P2	0,59	0,80	+0,21
P3	0,54	0,73	+0,19
P4	0,08	0,29	+0,21

Taula 5.3.11: Comprensibilitat dels alumnes de 1r ESO per a cada problema



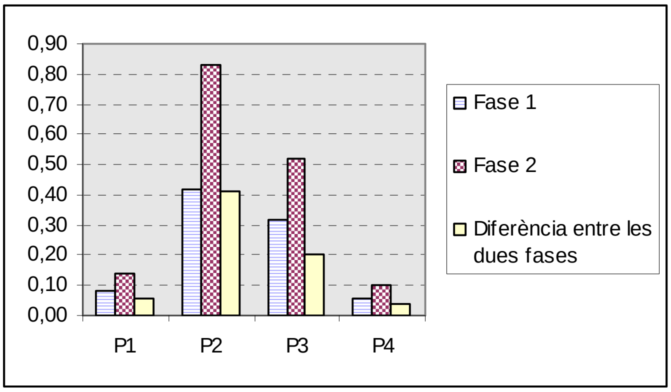
Gràfic 5.3.1: Comprensibilitat dels alumnes de 1r ESO per a cada problema

Podem observar un augment de l'índex de comprensibilitat en la fase 2 per a tots els problemes, sent l'augment major en el problema 2 i 4 (+0,21 en els dos cosos).

2n ESO

Problema	Icom 2ESO fase I	Icomp 2ESO fase II	Icomp 2ESO II-I
P1	0,08	0,14	+0,06
P2	0,42	0,83	+0,41
P3	0,32	0,52	+0,20
P4	0,06	0,10	+0,04

Taula 5.3.12: Comprensibilitat dels alumnes de 2n ESO per a cada problema



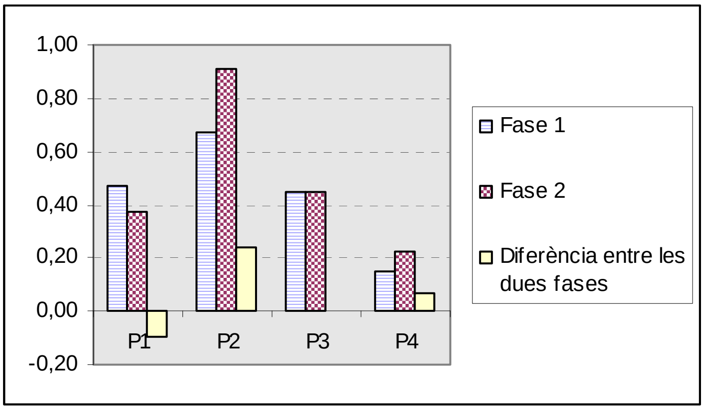
Gràfic 5.3.2: Comprensibilitat dels alumnes de 2n ESO per a cada problema

Podem observar un augment de l'índex de comprensibilitat en la fase 2 per a tots els problemes, sent l'augment major en el problema 2 (+0,41).

3r ESO

Prob	Icom 2ESO fase I	Icomp 2ESO fase II	Icomp 2ESO II-I
P1	0,47	0,38	-0,10
P2	0,67	0,91	+0,24
P3	0,45	0,45	+0,00
P4	0,15	0,22	+0,07

Taula 5.3.13: Comprensibilitat dels alumnes de 3r ESO per a cada problema



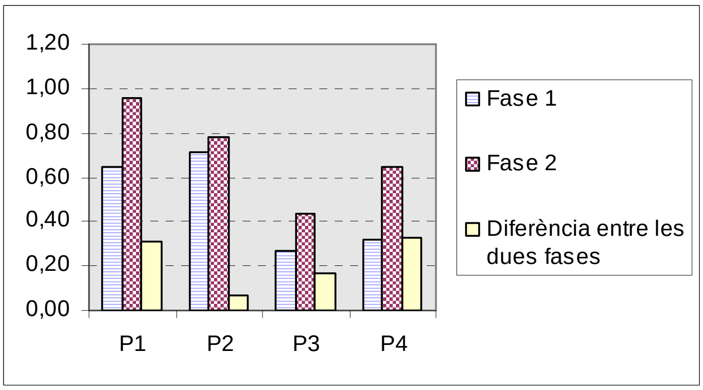
Gràfic 5.3.3: Comprensibilitat dels alumnes de 3r ESO per a cada problema

Podem observar un augment de l'índex de comprensibilitat en la fase 2 per als problemes 2 i 4 (+0,24 i +0,07). Pel problema 3, l'índex de comprensibilitat es manté a les dues fases. Pel problema 1, hi ha un petit descens (-0,10). Creiem que aquest descens és degut que a la primera fase, els alumnes és van capficar en trobar la suma, directament o estratègies poc eficients. En la segona fase, van comprendre que s'havia de buscar una manera de fer la suma sense fer-la directament, van comprendre millor la finalitat del problema però no van trobar la manera de resoldre'l.

ESTALMAT

Prob	Icom 2ESO fase I	Icomp 2ESO fase II	Icomp 2ESO II-I
P1	0,65	0,96	+0,31
P2	0,71	0,78	+0,07
P3	0,27	0,44	+0,17
P4	0,32	0,65	+0,33

Taula 5.3.14: Comprensibilitat dels alumnes de ESTALMAT per a cada problema



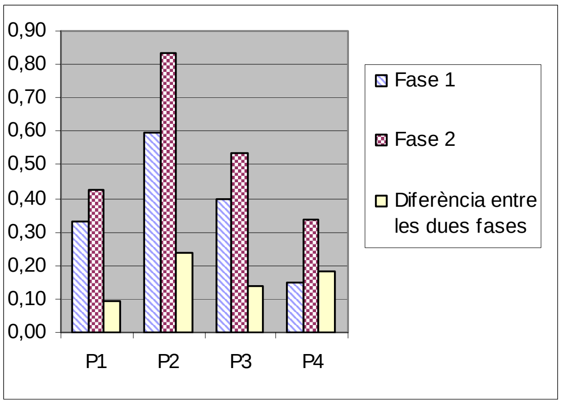
Gràfic 5.3.4: Comprensibilitat dels alumnes de ESTALMAT per a cada problema

Podem observar un augment de l'índex de comprensibilitat en la fase 2 per a tots els problemes, sent l'augment major en els problemes 4 i 1 (+0,33 i +0,31).

Mostra total

Problema	Icom MOSTRA TOTAL fase I	Icomp MOSTRA TOTAL fase II	Icomp MOSTRA TOTAL II-I
P1	0,33	0,42	+0,09
P2	0,60	0,83	+0,24
P3	0,40	0,53	+0,14
P4	0,15	0,33	+0,18

Taula 5.3.15: Comprensibilitat de la mostra total d'alumnes per a cada problema



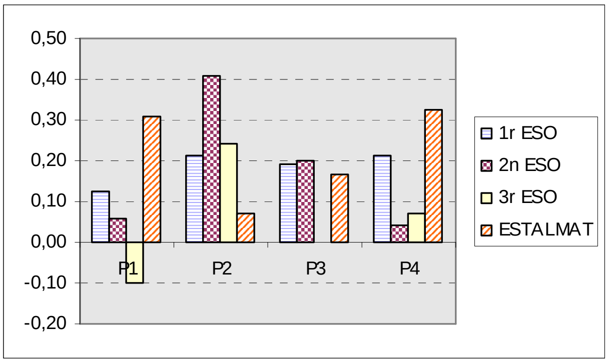
Gràfic 5.3.5: Comprensibilitat de la mostra total d'alumnes per a cada problema

En tots els problemes augmenta la comprensibilitat en la segona fase. L'augment més significatiu es dóna en el problema 2 (+ 0,24). En els problemes 3 i 4 també hi ha augments (+0,14 i +0,24), mentre que el problema 1, l'augment és poc significatiu (+0,09).

A partir dels resultats anteriors podem obtenir les **variacions de l'índex de comprensibilitat** entre la fase 1 i la fase 2, en els diferents grups i per a cada problema:

Prob	Icomp 1ESO II-I	Icomp 2ESO II-I	Icomp 3ESO II-I	Icomp ESTALMAT II-I
P1	+0,13	+0,06	-0,10	+0,31
P2	+0,21	+0,41	+0,24	+0,07
P3	+0,19	+0,20	+0,00	+0,17
P4	+0,21	+0,04	+0,07	+0,33

Taula 5.3.16: Variacions de la diferència de l'índex de comprensibilitat de la fase 1 i 2 per cada grup d'alumnes i per a cada problema



Gràfic 5.3.6: Variacions de la diferència de l'índex de comprensibilitat de la fase 1 i 2 per cada grup d'alumnes i per a cada problema

Podem observar que, en el problema 1 la comprensibilitat augmenta pels grups de 1r, 2n i ESTALMAT (+0,13; +0,06 i +0,31 respectivament) i disminueix pel grup de 3r (-0,10). Que l'augment és major pel grup d'ESTALMAT. Pel problema 2, la comprensibilitat augmenta pel tots els grups, sent major pel grup de 2n (+0,41) seguit pels grups de 3r, 1r i ESTALMAT (+0,24; +0,21, +0,07), en aquest ordre. Pel problema 3, l'índex de comprensibilitat es manté pel grup de 3r i augmenta pels grups de 1r, 2n, i ESTALMAT (+0,19; +0,20 i +0,17 respectivament). Pel problema 4, la comprensibilitat augmenta per tots els grups, sent major pel grup d'ESTALMAT (+0,33).

Millora global de la comprensibilitat del conjunt de problemes per a cada nivell

Si considerem com a millora global de la comprensibilitat la suma de les millores de la comprensibilitat de cada problema obtenim pels diferents nivells:

Nivell	1r ESO	2n ESO	3r ESO	ESTALAMAT
Millora global	+0,74	+0,71	+0,21	+0,88

Taula 5.3.17: Millora global de la comprensibilitat per a cada nivell

Observem que a ESTALMAT, 1r i 2n d'ESO les millores són molt més grans (+0,88; +0,74 i +0,71 respectivament). A 3r d'ESO la millora és menor (+0,21).

Síntesi dels resultats pel que fa a la comprensibilitat

1r ESO: El problema més comprensible pels alumnes de 1r ESO, tant a la fase 1 com a la 2, és el 2n problema, seguit del 3r. Els problemes amb menys comprensibilitat són el 1r i el 4t. Podem observar un augment de l'índex de comprensibilitat en la fase 2 per a tots els problemes, sent l'augment major en el problema 2.

2n ESO: El problema més comprensible pels alumnes de 2n ESO a la fase 1 és el 2n problema, seguit del 3r. Els problemes amb menys comprensibilitat són el 1r i el 4t. Podem observar un augment de l'índex de comprensibilitat en la fase 2 per a tots els problemes, sent l'augment major en el problema 2.

3r ESO: El problema més comprensible pels alumnes de 3r ESO a la fase 1 és el 2n problema, seguit del 1r i 3r. El problema amb menys comprensibilitat és el 4t. El problema més comprensible pels alumnes de 3r ESO a la fase 2 és el 2n problema, seguit del 3r. Els problemes amb menys comprensibilitat són el 1r i el 4t problema. Podem observar un augment de l'índex de comprensibilitat en la fase 2 per als problemes 2 i 4, sent l'augment major en el problema 2. Pel problema 3, l'índex de comprensibilitat es manté a les dues fases. Pel problema 1, hi ha un petit descens. Creiem que aquest descens és degut que a la primera fase, els alumnes és van capficar en trobar la suma, directament o amb estratègies poc eficients. En la segona fase, van comprendre que s'havia de buscar una manera de fer la suma sense fer-la directament, van comprendre millor la finalitat del problema però no van trobar la manera de resoldre'l.

ESTALMAT: El problema més comprensible pels alumnes d'ESTALMAT a la fase 1 és el 2n problema, seguit del 1r. En aquests problemes, hi ha més alumnes que entenen els seus enunciats i més alumnes que diuen que els han resolt i efectivament és així, total o parcialment. El problema amb menys comprensibilitat és el 3r, seguit del 4t. El problema més comprensible pels alumnes d'ESTALMAT a la fase 2 és el 1r problema, seguit del 2r i 4t. El problema amb menys comprensibilitat és el 3r. Podem observar un augment de l'índex de comprensibilitat en la fase 2 per a tots els problemes, sent l'augment major en els problemes 1 i 4.

Mostra total: El problema amb l'índex de comprensibilitat més alt per la mostra total d'alumnes tant a la fase 1 com a la fase 2 és el 2n problema, seguit del 3r i el 1r. El problema amb menys comprensibilitat és el 4t. En tots els problemes augmenta la comprensibilitat en la segona fase. L'augment més significatiu es dóna en el problema 2. En els problemes 3 i 4 també hi ha augments mentre que el problema 1, l'augment és menys significatiu.

Si considerem com a millora global de la comprensibilitat la suma de les millores de la comprensibilitat de cada problema obtenim que a ESTALMAT, 1r i 2n d'ESO les millores són molt més grans i en aquest ordre i a 3r d'ESO la millora és menor.

5.3.2- Facilitat

La facilitat és refereix a les dificultats per resoldre el problema, total o parcialment. Per això ens fixem en les respostes 1 ó 2 en l'apartat II, que és el que recull si han trobat o no la solució (total o parcialment), amb independència del que cregui l'alumne. I dins d'aquestes respostes hem donat més importància a les resolucions totals que a les parcials.

La lectura de les columnes de la taula, expressades en percentatge, és la següent:

B Respostes 1 a la columna II
C Respostes 2 a la columna II
t1 Suma de la columna B i la meitat de C

t2 Suma de la columna B i de C
Ifaci Índex facilitat: T1/100

Observem que les tres primeres columnes tenen el mateix nom que a la taula de comprensibilitat encara que els valors d'aquesta taula podrien ser iguals o majors ja que alguns alumnes troben estratègies totals o parcials però ells diuen que no les han trobat.

Observem que la columna que realment mesura l'índex de facilitat és la T1, tot i que aportem la T2, alumnes que donen alguna estratègia.

Facilitat 1r ESO fase 1

Problema	B	C	b%	c%	t1	t2	Ifaci
P1	0	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
P2	9	9	34,62	34,62	51,92	69,23	0,52
P3	7	0	26,92	0,00	26,92	26,92	0,27
P4	2	0	7,69	0,00	7,69	7,69	0,08

Taula 5.3.18: Facilitat dels alumnes 1r d'ESO fase 1

El problema amb l'índex de facilitat més alt pels alumnes de 1r ESO a la fase 1 és el 2n problema (0,52), seguit del 3r (0,27). En aquests problemes, hi ha més alumnes que els han resolt total o parcialment. El problema 4 té menys índex de facilitat (0,08). Això vol dir que molts alumnes no l'ha resolt. El problema 1 té índex de facilitat zero. Això vol dir que cap alumne l'ha resolt total o parcialment.

Facilitat 1r ESO fase 2

Problema	B	C	b%	c%	t1	t2	Ifaci
P1	1	1	3,85	3,85	5,77	7,69	0,06
P2	13	11	50,00	42,31	71,15	92,31	0,71
P3	13	0	50,00	0,00	50,00	50,00	0,50
P4	3	0	11,54	0,00	11,54	11,54	0,12

Taula 5.3.19: Facilitat dels alumnes 1r d'ESO fase 2

El problema amb l'índex de facilitat més alt pels alumnes de 1r ESO a la fase 2 és el 2n problema, seguit del 3r (0,71 i 0,50 respectivament). En aquests problemes, hi ha més alumnes que els han resolt total o parcialment. Els problemes amb menys índex de facilitat són el 4t i el 1r (0,12 i 0,06 respectivament). Això vol dir que menys alumnes els han resolt.

Facilitat 2n ESO fase 1

Problema	B	C	b%	c%	t1	t2	Ifaci
P1	0	0	0	0	0	0	0
P2	5	12	20	48	44	68	0,44
P3	0	0	0	0	0	0	0
P4	0	0	0	0	0	0	0

Taula 5.3.20: Facilitat dels alumnes 2n d'ESO fase 1

El problema amb l'índex de facilitat més alt pels alumnes de 2n ESO a la fase 1 és el 2n problema (0,44). És l'únic problema que aquest grup d'alumnes l'ha resolt total o parcialment. Els altres problemes tenen índex de facilitat zero. Això vol dir que aquest grup d'alumnes no els han resolt en aquesta fase.

Facilitat 2n ESO fase 2

Problema	B	C	b%	c%	t1	t2	Ifaci
P1	0	0	0	0	0	0	0
P2	19	3	76	12	82	88	0,82
P3	2	0	8	0	8	8	0,08
P4	2	1	8	4	10	12	0,1

Taula 5.3.21: Facilitat dels alumnes 2n d'ESO fase 2

El problema amb l'índex de facilitat més alt pels alumnes de 2n ESO a la fase 2 és el 2n problema (0,82). Els problemes 4 i 3 tenen un índex de facilitat baix (0,1 i 0,08 respectivament), per tant, hi ha pocs alumnes que els han resolt total o parcialment. El problema 1 té índex de facilitat zero. Això vol dir que cap alumne ha resolt el problema 1.

Facilitat 3r ESO fase 1

Problema	B	C	b%	c%	t1	t2	Ifaci
P1	3	7	10,71	25,00	23,21	35,71	0,23
P2	5	17	17,86	60,71	48,21	78,57	0,48
P3	1	0	3,57	0,00	3,57	3,57	0,04
P4	0	1	0,00	3,57	1,79	3,57	0,02

Taula 5.3.22: Facilitat dels alumnes 3r d'ESO fase 1

El problema amb l'índex de facilitat més alt pels alumnes de 3r ESO a la fase 1 és el 2n problema, seguit del 1r. En aquests problemes, hi ha més alumnes que els han resolt total o parcialment. Els problemes amb menys índex de facilitat són el 3r i el 4t. Això vol dir que menys alumnes els han resolt.

Facilitat 3r ESO fase 2

Problema	B	C	b%	c%	t1	t2	Ifaci
P1	4	0	14,29	0,00	14,29	14,29	0,14
P2	19	8	67,86	28,57	82,14	96,43	0,82
P3	1	0	3,57	0,00	3,57	3,57	0,04
P4	4	1	14,29	3,57	16,07	17,86	0,16

Taula 5.3.23: Facilitat dels alumnes 3r d'ESO fase 2

El problema amb l'índex de facilitat més alt pels alumnes de 3r ESO a la fase 2 és el 2n problema (0,82). En aquest problema, hi ha més alumnes que l'han resolt total o parcialment. Els problemes 1, 3 i 4 tenen menys índex de facilitat (0,14; 0,04 i 0,16 respectivament). Això vol dir que menys alumnes els han resolt.

Facilitat ESTALMAT fase 1

Problema	B	C	b%	c%	t1	t2	Ifaci
P1	12	0	50,00	0,00	50,00	50,00	0,50
P2	15	2	62,50	8,33	66,67	70,83	0,67
P3	1	0	4,17	0,00	4,17	4,17	0,04
P4	3	3	12,50	12,50	18,75	25,00	0,19

Taula 5.3.24: Facilitat dels alumnes ESTALMAT fase 1

El problema amb l'índex de facilitat més alt pels alumnes d'ESTALMAT a la fase 1 és el 2n problema (0,67), seguit del problema 1 (0,50). En aquests problemes, més alumnes els han resolt total o parcialment. El problemes amb menys índex de facilitat són el 4 i el 3 (0,19 i 0,04 respectivament). Això vol dir que menys alumnes els han resolt.

Facilitat ESTALMAT fase 2

Problema	B	C	b%	c%	t1	t2	Ifaci
P1	22	0	91,67	0,00	91,67	91,67	0,92
P2	16	3	66,67	12,50	72,92	79,17	0,73
P3	1	0	4,17	0,00	4,17	4,17	0,04
P4	14	0	58,33	0,00	58,33	58,33	0,58

Taula 5.3.25: Facilitat dels alumnes ESTALMAT fase 2

El problema amb l'índex de facilitat més alt pels alumnes d'ESTALMAT a la fase 2 és el 1r problema (0,92), seguit dels problemes 2n i 4t (0,73 i 0,58 respectivament). En aquests problemes, més alumnes els han resolt total o parcialment. El problema amb menys índex de facilitat és el 3r (0,04). Això vol dir que menys alumnes l'han resolt.

Facilitat mostra total fase 1

Problema	B	C	b%	c%	t1	t2	Ifaci
P1	15	7	14,56	6,80	17,96	21,36	0,18
P2	34	40	33,01	38,83	52,43	71,84	0,52
P3	9	0	8,74	0,00	8,74	8,74	0,09
P4	6	4	5,83	3,88	7,77	9,71	0,08

Taula 5.3.26: Facilitat de la mostra total d'alumnes fase 1

El problema amb l'índex de facilitat més alt per la mostra total dels alumnes a la fase 1 és el 2n problema (0,52), seguit del problema 1 (0,18). En aquests problemes, més alumnes els han resolt total o parcialment. El problemes amb menys índex de facilitat són el 3 i el 4 (0,09 i 0,08 respectivamnet). Això vol dir que menys alumnes els han resolt.

Facilitat mostra total fase 2

Problema	B	C	b%	c%	t1	t2	Ifaci
P1	27	1	26,21	0,97	26,70	27,18	0,27
P2	67	25	65,05	24,27	77,18	89,32	0,77
P3	17	0	16,50	0,00	16,50	16,50	0,17
P4	23	2	22,33	1,94	23,30	24,27	0,23

Taula 5.3.27: Facilitat de la mostra total d'alumnes fase 2

El problema amb l'índex de facilitat més alt per la mostra total dels alumnes a la fase 2 és el 2n problema (0,77), seguit dels problemes 1 i 4 (0,27 i 0,23 respectivament). En aquests problemes, més alumnes els han resolt total o parcialment. El problema amb menys índex de facilitat és el 3r (0,17). Això vol dir que menys alumnes l'han resolt.

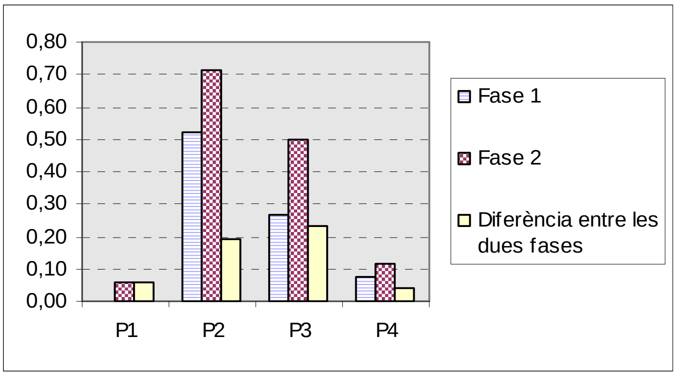
Comparacions en la facilitat entre les dues fases per a cada grup

Tot seguit mostrem les taules per a cada grup amb l'índex de facilitat de les dues fases, i la diferència dels índex en cada fase per a cada problema.

1r ESO

Prob	Ifaci 1ESO fase I	Ifaci 1ESO fase II	Ifaci 1ESO II-I
P1	0,00	0,06	+0,06
P2	0,52	0,71	+0,19
P3	0,27	0,50	+0,23
P4	0,08	0,12	+0,04

Taula 5.3.28: Facilitat dels alumnes de 1r d'ESO per a cada problema



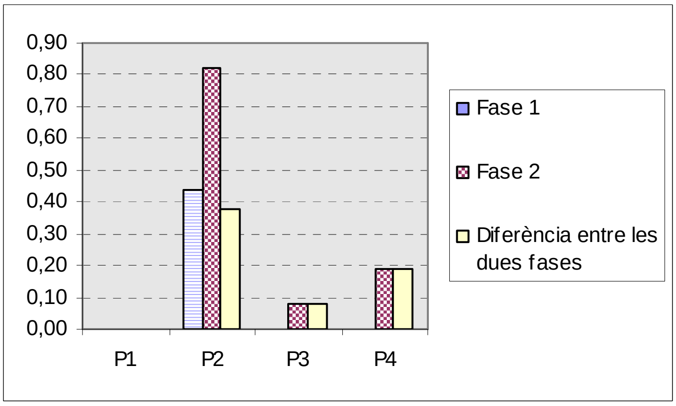
Gràfic 5.3.7: Facilitat dels alumnes de 1r d'ESO per a cada problema

Podem observar un augment de l'índex de facilitat en la fase 2 per tots els problemes, sent l'augment major en el problema 3 (+0,23).

2n ESO

Problema	Ifaci 2ESO fase I	Ifaci 2ESO fase II	Ifaci 2ESO II-I
P1	0,00	0,00	0,00
P2	0,44	0,82	+0,38
P3	0,00	0,08	+0,08
P4	0,00	0,19	+0,19

Taula 5.3.29: Facilitat dels alumnes de 2n d'ESO per a cada problema



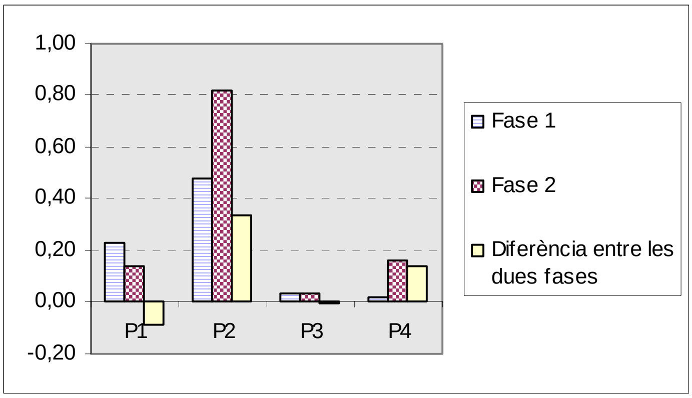
Gràfic 5.3.8: Facilitat dels alumnes de 2n d'ESO per a cada problema

Podem observar un augment de l'índex de facilitat en la fase 2 pels problemes 2,3 i 4, sent l'augment major en el problema 2 (+0,38).

3r ESO

Problema	Ifaci 3ESO fase I	Ifaci 3ESO fase II	Ifaci 3ESO II-I
P1	0,23	0,14	-0,09
P2	0,48	0,82	+0,34
P3	0,04	0,04	+0,00
P4	0,02	0,16	+0,14

Taula 5.3.30: Facilitat dels alumnes de 3r d'ESO per a cada problema



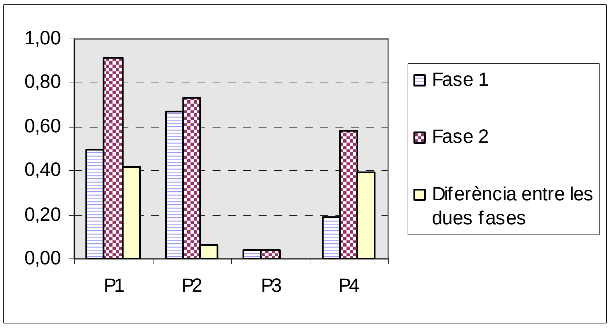
Gràfic 5.3.9:Facilitat dels alumnes de 3r d'ESO per a cada problema

Podem observar un augment de l'índex de facilitat en la fase 2 per als problemes 2 i 4 (+0,34 i +0,14 respectivament). Pel problema 3, l'índex de facilitat es manté a les dues fases. Pel problema 1, hi ha un petit descens (-0,09). Creiem que aquest descens és degut que a la primera fase, els alumnes és van capficar en trobar la suma, directament o amb estratègies poc eficients, però van resoldre algun apartat. En la segona fase, van comprendre que s'havia de buscar una manera de fer la suma sense fer-la directament, i com no van trobar la manera, van deixar en blanc el problema.

ESTALMAT

Prob	Ifaci ESTALMAT fase I	Ifaci ESTALMAT fase II	Ifaci ESTALMAT II-I
P1	0,50	0,92	+0,42
P2	0,67	0,73	+0,06
P3	0,04	0,04	+0,00
P4	0,19	0,58	+0,39

Taula 5.3.31: Facilitat dels alumnes d'ESTALMAT per a cada problema



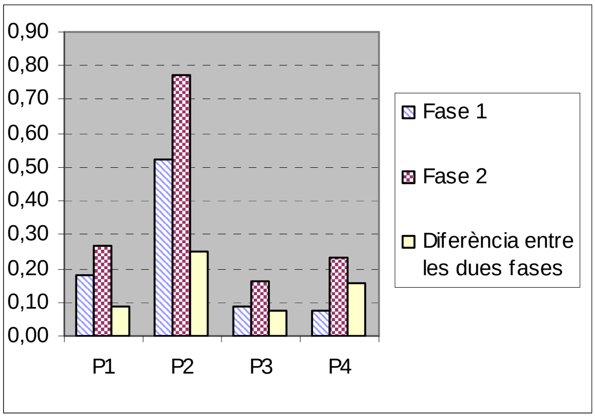
Gràfic 5.3.10: Facilitat dels alumnes d'ESTALMAT per a cada problema

Podem observar un augment de l'índex de facilitat en la fase 2 pels problemes 1, 2 i 4 (+0,42; +0,39 i +0,06 respectivament). No hi ha augment en el problema 3.

Mostra total

Problema	Ifaci MOSTRA TOTAL fase I	Ifaci MOSTRA TOTAL fase II	Ifaci MOSTRA TOTAL II-I
P1	0,18	0,27	+0,09
P2	0,52	0,77	+0,25
P3	0,09	0,17	+0,08
P4	0,08	0,23	+0,16

Taula 5.3.32: Facilitat de la mostra total d'alumnes per a cada problema



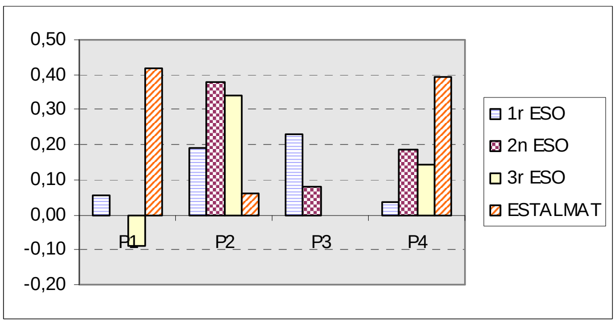
Gràfic 5.3.11: Facilitat de la mostra total d'alumnes per a cada problema

En tots els problemes augmenta la facilitat en la segona fase, sent l'augment major en el problema 2 (+0,25), seguit del problema 4 (+0,16). Els augments són menys significatius en els problemes 1 i 3 (+0,09 i +0,08 respectivament).

A partir dels resultats anteriors podem obtenir les **variacions de l'índex de facilitat** de la fase 1 a la fase 2 en els diferents grups:

Prob	Ifaci 1ESO II-I	Ifaci 2ESO II-I	Ifaci 3ESO II-I	Ifaci ESTALMAT II-I
P1	+0,06	+0,00	-0,09	+0,42
P2	+0,19	+0,38	+0,34	+0,06
P3	+0,23	+0,08	+0,00	+0,00
P4	+0,04	+0,19	+0,14	+0,39

Taula 5.3.33: Variacions de la diferència de l'índex de facilitat de la fase 1 i 2 per cada grup d'alumnes i per a cada problema



Gràfic 5.3.12: Variacions de la diferència de l'índex facilitat de la fase 1 i 2 per cada grup d'alumnes i per a cada problema

Podem observar que, en el problema 1 la facilitat augmenta pels grups de 1r d'ESO, i ESTALMAT i disminueix pel grup de 3r d'ESO. Que l'augment és major pel grup d'ESTALMAT (+0,42), seguit pel grup de 1r d'ESO (+0,06). Pel problema 2, la facilitat augmenta pel tots els grups, sent major pel grup de 2n d'ESO (+0,38) seguit pels grups de 3r d'ESO (+0,34), 1r d'ESO (+0,19) i ESTALMAT (+0,06). Pel problema 3, l'índex de facilitat es manté pels grups de 3r d'ESO i ESTALMAT i augmenta pels grups de 1r i 2n d'ESO (+0,23 i +0,08 respectivament). Pel problema 4, la facilitat augmenta per tots els grups, sent major pel grup d'ESTALMAT (+0,39).

Millora global de la facilitat per a cada nivell: Si considerem com a millora global de la facilitat la suma de les millores de la facilitat de cada problema obtenim pels diferents nivells:

Nivell	1r ESO	2n ESO	3r ESO	ESTALAMAT
Millora global	+0,52	+0,65	+0,39	+0,87

Taula 5.3.34: Millora global de la facilitat per a cada nivell

Observem que a ESTALMAT, 2n i 1r d'ESO, en aquest ordre, les millores de la facilitat són més grans (+0,87; +0,65 i +0,52 respectivament). A 3r d'ESO la millora de la facilitat és menor +0,39.

Síntesi dels resultats pel que fa a la facilitat

1r ESO: El problema amb l'índex de facilitat més alt pels alumnes de 1r ESO, tant a la fase 1 com a la fase 2, és el 2n problema, seguit del 3r. En aquests problemes, hi ha més alumnes que els han resolt total o parcialment. Els problemes amb menys índex de facilitat són el 1r i el 4t. Això vol dir que més alumnes no els han resolt. Podem observar un augment de l'índex de facilitat en la fase 2 per tots els problemes, sent l'augment major en el problema 3.

2n ESO: El problema amb l'índex de facilitat més alt pels alumnes de 2n ESO a la fase 1 és el 2n problema. És l'únic problema que aquest grup d'alumnes l'ha resolt total o parcialment. Els altres problemes tenen índex de facilitat zero. Això vol dir que aquest grup d'alumnes no els han resolt en aquesta fase. El problema amb l'índex de facilitat més alt pels alumnes de 2n ESO a la fase 2 és el 2n problema. Els problemes 2 i 3 tenen un índex de facilitat baix. El problema 1 té índex de facilitat zero. Podem observar un augment de l'índex de facilitat en la fase 2 pels problemes 2, 3 i 4, sent l'augment major en el problema 2.

3r ESO: El problema amb l'índex de facilitat més alt pels alumnes de 3r d'ESO a la fase 1 és el 2n problema, seguit del 1r. Els problemes amb menys índex de facilitat són el 3r i el 4t. El problema amb l'índex de facilitat més alt pels alumnes de 3r d'ESO a la fase 2 és el 2n problema. Els problemes 1, 3 i 4 tenen menys índex de facilitat. Podem observar un augment de l'índex de facilitat en la fase 2 per als problemes 2 i 4, sent l'augment major en el problema 2. Pel problema 3, l'índex de facilitat es manté a les dues fases. Pel problema 1, hi ha un petit descens. Creiem que aquest descens és degut que a la primera fase, els alumnes és van capficar en trobar la suma, directament o estratègies poc eficients, però van resoldre algun apartat. En la segona fase, van comprendre que s'havia de buscar una manera de fer la suma, sense fer-la directament, i com no van trobar la manera, van deixar en blanc el problema.

ESTALMAT: El problema amb l'índex de facilitat més alt pels alumnes d'ESTALMAT a la fase 1 és el 2n problema, seguit del problema 1. En aquests problemes, més alumnes els han resolt total o parcialment. El problemes amb menys índex de facilitat són el 3 i el 4. El problema amb l'índex de facilitat més alt pels alumnes d'ESTALMAT a la fase 2 és el 1r problema, seguit dels problemes 2n i 4t. El problema amb menys índex de facilitat és el 3r. Podem observar un augment de l'índex de facilitat en la fase 2 pels problemes 1, 2 i 4, sent l'augment major en els problemes 1 i 4. No hi ha augment en el problema 3.

Mostra total: El problema amb l'índex de facilitat més alt per la mostra total dels alumnes tant a la fase 1 com a la 2 és el 2n problema. En tots els problemes augmenta la facilitat en la segona fase, sent l'augment major en el problema 2, seguit dels problemes 4 i 3.

Si considerem com a millora global de la facilitat la suma de les millores de la facilitat de cada problema obtenim que a ESTALMAT, 2n i 1r d'ESO, les millores de la facilitat són més grans i en aquest ordre. A 3r d'ESO la millora de la facilitat és menor.

5.3.3- Anàlisi de les estratègies heurístiques dels problemes

Problema 1	1-No s'identifica cap estratègia 2-Fer la suma directament, o dir el resultat de la suma sense justificar 3-Fer ús de simetria numèrica però sense arribar al resultat 4-Fer ús de simetria numèrica arribant a la solució del primer apartat 5-Fer ús de simetria numèrica arribant a la solució del primer i segon apartats
Problema 2	1- No s'identifica cap estratègia 2- Dir algun camí 3- Estudi de tots els casos mentalment i diuen tots els camins. 4- Estudi de tots els casos gràficament 5- Estudi de tots els casos mitjançant arbre de possibilitats
Problema 3	1- No s'identifica cap estratègia 2- Donar un punt sense justificar 3- Fer ús de simetria geomètrica però amb error 4- Fer ús de simetria geomètrica correctament 5- Fer ús de simetria geomètrica i justificant la resposta
Problema 4	1- No s'identifica cap estratègia cap 2- Dir un nombre sense justificar o fent la suma amb calculadora 3- Fer el problema a la inversa però incorrectament 4- Fer el problema a la inversa correctament però incomplet 5- Fer el problema a la inversa correctament i complet

Taula 5.3.35: Codificació de les heurístiques esperades per a cada problema

En aquest apartat estudiem les estratègies heurístiques que utilitzen els alumnes per a la resolució de cada problema. En primer lloc ens centrarem en l'anàlisi de les estratègies heurístiques esperades (definides en l'apartat 5.2). Recordem que la codificació de les heurístiques esperades per a cada problema està explicitada en la taula 5.3.35.

En les taules següents apareixen les respostes a l'apartat IV: Estratègia, en percentatges. Segons les estratègies heurístiques definides anteriorment per a cada problema.

Per tal de quantificar l'ús d'heurístiques esperades farem el següent: donarem els valors de 0 als codis 1 i 2 ja que no corresponen a la identificació de cap heurística concreta. En canvi els codis 3, 4 i 5 sí que corresponen a l'ús de l'heurística esperada i com cadascun correspon a un major grau d'aplicació de l'heurística esperada, a cadascun li donarem més valor. Sumarem els percentatges d'alumnes que han obtingut codi 3, més dues vegades el percentatge d'alumnes que ham obtingut codi 4, més tres vegades el percentatge d'alumnes que han obtingut el codi 5.

D'acord amb l'anterior, l'estructura de les taules serà sempre la mateixa: tres columnes per les estratègies heurístiques 3, 4 i 5. La columna S recull la suma de les tres anteriors. T és el resultat de sumar la columna E3, amb el doble de la columna E4, més el triple de la columna E5. Iana és el coeficient resultat de (E3+2·E4+3·E5)/300, el percentatge d'alumnes que apliquen alguna estratègia heurística adequada. Aquest apartat es diferència de l'apartat facilitat ja que en aquest no ens limitem a veure si s'ha trobat solució, sinó que estudiem si s'ha fet utilitzant alguna estratègia heurística esperada.

Anàlisi de les estratègies heurístiques 1r ESO fase 1

Problema	E3	E4	E5	E3 (%)	E4 (%)	E5 (%)	s	t	I ana
P1	0	0	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
P2	0	8	0	0,00	30,77	0,00	30,77	61,54	0,21
P3	2	5	0	7,69	19,23	0,00	26,92	46,15	0,15
P4	1	0	1	3,85	0,00	3,85	7,69	15,38	0,05

Taula 5.3.36: Anàlisi de les estratègies heurístiques dels alumnes 1r d'ESO fase 1

L'índex d'anàlisi pels alumnes de 1r ESO en la fase 1 és més alt en el problema 2 (0,21). Això vol dir que és el problema on més alumnes han utilitzat l'heurística esperada, en aquest cas, estudi de tots els casos, ja sigui mentalment, gràficament o mitjançant arbre de possibilitats, i diuen tots els camins possibles. En els problemes 3 i 4, algun alumne ha utilitzat l'heurística esperada. I en el problema 1, cap alumne ha utilitzat l'heurística esperada.

Anàlisi de les estratègies heurístiques 1r ESO fase 2

Problema	E3	E4	E5	E3 (%)	E4 (%)	E5 (%)	s	t	I ana
P1	0	0	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
P2	2	12	0	7,69	46,15	0,00	53,85	100,00	0,33
P3	2	12	0	7,69	46,15	0,00	53,85	100,00	0,33
P4	4	0	3	15,38	0,00	11,54	26,92	50,00	0,17

Taula 5.3.37: Anàlisi de les estratègies heurístiques dels alumnes 1r d'ESO fase 2

L'índex d'anàlisi pels alumnes de 1r ESO en la fase 2 és més alt en el problema 2 i 3 (0,33 en els dos casos). Això vol dir que són els problemes on més alumnes han utilitzat l'heurística esperada. En el problema 4, algun alumne ha utilitzat l'heurística esperada. I en el problema 1, cap alumne l'ha utilitzat.

Anàlisi de les estratègies heurístiques 2n ESO fase 1

Problema	E3	E4	E5	E3 (%)	E4 (%)	E5 (%)	s	t	I ana
P1	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
P2	4	1	0	16	4	0	20	24	0,08
P3	2	0	0	8	0	0	8	8	0,03
P4	1	0	0	4	0	0	4	4	0,01

Taula 5.3.38: Anàlisi de les estratègies heurístiques dels alumnes 2n d'ESO fase 1

En aquesta primera fase, els alumnes de 2n ESO, han utilitzat poc les heurístiques esperades; tot i així, on més l'han utilitzat és en el problema 2 (0,08). En el problema 1 cap alumne les ha utilitzat.

Anàlisi de les estratègies heurístiques 2n ESO fase 2

Problema	E3	E4	E5	E3 (%)	E4 (%)	E5 (%)	s	t	I ana
P1	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
P2	11	10	0	44	40	0	84	124	0,41
P3	1	1	1	4	4	4	12	24	0,08
P4	6	1	2	24	4	8	36	56	0,19

Taula 5.3.39: Anàlisi de les estratègies heurístiques dels alumnes 2n d'ESO fase 2

L'índex d'anàlisi, pels alumnes de 2n ESO en la fase 2, és més alt en el problema 2 (0,41). Això vol dir que és el problema on més alumnes han utilitzat l'heurística esperada. En els problemes 3 i 4, algun alumne ha utilitzat l'heurística esperada. I en el problema 1, cap alumne l'ha utilitzat.

Anàlisi de les estratègies heurístiques 3r ESO fase 1

Problema	E3	E4	E5	E3 (%)	E4 (%)	E5 (%)	s	t	I ana
P1	2	1	1	7,14	3,57	3,57	14,29	25,00	0,08
P2	3	3	0	10,71	10,71	0,00	21,43	32,14	0,11
P3	1	0	0	3,57	0,00	0,00	3,57	3,57	0,01
P4	1	1	1	3,57	3,57	3,57	10,71	21,43	0,07

Taula 5.3.40: Anàlisi de les estratègies heurístiques dels alumnes 3r d'ESO fase 1

En aquesta primera fase, els alumnes de 3r ESO, han utilitzat poc les heurístiques esperades. Al problema 2 és on més les han utilitzat.

Anàlisi de les estratègies heurístiques 3r ESO fase 2

Problema	E3	E4	E5	E3 (%)	E4 (%)	E5 (%)	s	t	I ana
P1	6	2	1	21,43	7,14	3,57	32,14	46,43	0,15
P2	4	14	1	14,29	50,00	3,57	67,86	125,00	0,42
P3	2	0	0	7,14	0,00	0,00	7,14	7,14	0,02
P4	2	3	3	7,14	10,71	10,71	28,57	60,71	0,20

Taula 5.3.41: Anàlisi de les estratègies heurístiques dels alumnes 3r d'ESO fase 2

L'índex d'anàlisi pels alumnes de 3r ESO en la fase 2 és més alt en el problema 2 (0,42). Això vol dir que és el problema on més alumnes han utilitzat l'heurística esperada. El segueixen el problema 4 (0,20), 1 (0,15) i finalment el problema 3 (0,02), on han utilitzat menys les heurístiques esperades.

Anàlisi de les estratègies heurístiques ESTALMAT fase 1

Problema	E3	E4	E5	E3 (%)	E4 (%)	E5 (%)	s	t	I ana
P1	3	5	0	12,50	20,83	0,00	33,33	54,17	0,18
P2	2	8	5	8,33	33,33	20,83	62,50	137,50	0,46
P3	0	0	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
P4	5	0	3	20,83	0,00	12,50	33,33	58,33	0,19

Taula 5.3.42: Anàlisi de les estratègies heurístiques dels alumnes ESTALMAT fase 1

Els alumnes d'ESTALMAT, en la fase 1, han obtingut un índex d'anàlisi més alt en el problema 2 (0,46), per tant, vol dir que utilitzen l'heurística estudi de tots els casos per resoldre el problema. Després el segueixen el problema 4 (0,19), fer problema a la inversa i el problema 1 (0,18) amb simetria numèrica. El problema 3 té índex d'anàlisi 0, on cap alumne utilitza l'heurística de la simetria geomètrica.

Anàlisi de les estratègies heurístiques ESTALMAT fase 2

Problema	E3	E4	E5	E3 (%)	E4 (%)	E5 (%)	s	t	I ana
P1	0	6	12	0,00	25,00	50,00	75,00	200,00	0,67
P2	2	8	6	8,33	33,33	25,00	66,67	150,00	0,50
P3	1	0	1	4,17	0,00	4,17	8,33	16,67	0,06
P4	0	0	14	0,00	0,00	58,33	58,33	175,00	0,58

Taula 5.3.43: Anàlisi de les estratègies heurístiques dels alumnes ESTALMAT fase 2

Els alumnes d'ESTALMAT, en la fase 2, han obtingut un índex d'anàlisi més alt en el problema 1 (0,67), per tant, vol dir que utilitzen l'heurística de la simetria numèrica per resoldre el problema. Després el segueixen els problemes 2 i 4 (0,50 i 0,58 respectivament). El problema amb l'índex d'anàlisi més baix és el problema 3 (0,06), on menys alumnes utilitzen l'heurística de la simetria geomètrica.

Anàlisi de les estratègies heurístiques del total de la mostra fase 1

Problema	E3	E4	E5	E3 (%)	E4 (%)	E5 (%)	s	t	I ana
P1	5	6	1	4,85	5,83	0,97	11,65	19,42	0,06
P2	9	20	5	8,74	19,42	4,85	33,01	62,14	0,21
P3	5	5	0	4,85	4,85	0,00	9,71	14,56	0,05
P4	8	1	5	7,77	0,97	4,85	13,59	24,27	0,08

Taula 5.3.44: Anàlisi de les estratègies heurístiques de la mostra total fase 1

Els alumnes en la fase 1, han obtingut un índex d'anàlisi més alt en el problema 2 (0,21); per tant, vol dir que utilitzen l'heurística estudi de tots els casos per resoldre el problema. Després el segueixen el problema 4 (0,08) amb resoldre a la inversa i el problema 1 (0,06) amb simetria numèrica, i finalment el problema 3 (0,05), on menys alumnes utilitzen l'heurística de la simetria geomètrica.

Anàlisi de les estratègies heurístiques del total de la mostra fase 2

Problema	E3	E4	E5	E3 (%)	E4 (%)	E5 (%)	s	t	I ana
P1	6	8	13	5,83	7,77	12,62	26,21	59,22	0,20
P2	19	44	7	18,45	42,72	6,80	67,96	124,27	0,41
P3	6	13	2	5,83	12,62	1,94	20,39	36,89	0,12
P4	12	4	22	11,65	3,88	21,36	36,89	83,50	0,28

Taula 5.3.45: Anàlisi de les estratègies heurístiques de la mostra total fase 2

Els alumnes en la fase 2, han obtingut un índex d'anàlisi més alt en el problema 2 (0,41); per tant, vol dir que utilitzen l'heurística estudi de tots els casos per resoldre el problema. Després el segueixen els problemes 4 i 1 (0,28 i 0,20 respectivament). El problema amb l'índex d'anàlisi més baix és el problema 3 (0,12), on menys alumnes utilitzen l'heurística de la simetria geomètrica.

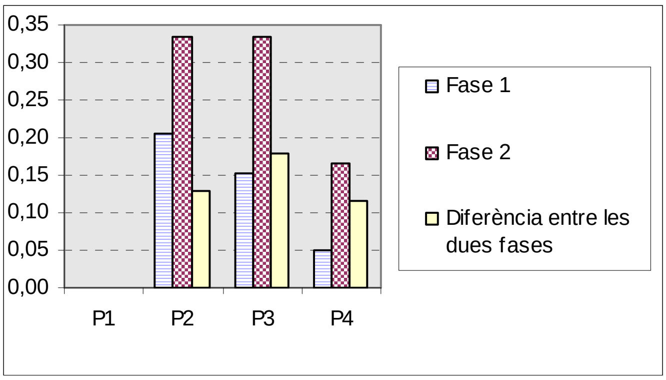
Comparacions en les estratègies heurístiques entre les dues fases per a cada grup

Tot seguit mostrem les taules per a cada grup amb l'índex d'anàlisi de les dues fases, i la diferència dels índex en cada fase per a cada problema.

1r ESO

Problema	Iana 1ESO fase I	Iana 1ESO fase II	Iana 1ESO II-I
P1	0,00	0,00	0,00
P2	0,21	0,33	0,13
P3	0,15	0,33	0,18
P4	0,05	0,17	0,12

Taula 5.3.46: Estratègies heurístiques dels alumnes 1r d'ESO per a cada problema



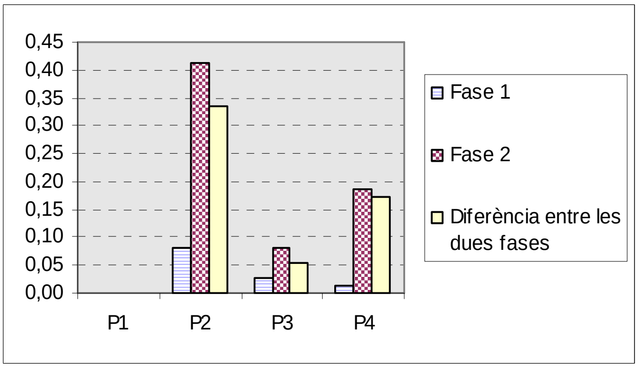
Gràfic 5.3.13: Estratègies heurístiques dels alumnes 1r d'ESO per a cada problema

Podem observar un augment de l'índex d'anàlisi en la fase 2 per a tots els problemes, sent l'augment major en el problema 3 (0,18).

2n ESO

Problema	Iana 2ESO fase I	Iana 2ESO fase II	Iana 2ESO II-I
P1	0,00	0,00	0,00
P2	0,08	0,41	0,33
P3	0,03	0,08	0,05
P4	0,01	0,19	0,17

Taula 5.3.47: Estratègies heurístiques dels alumnes 2n d'ESO per a cada problema



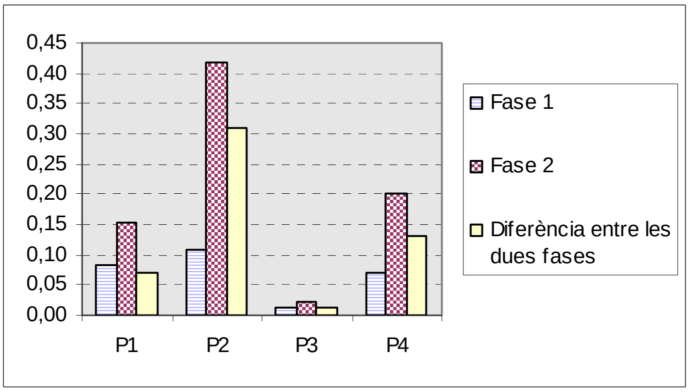
Gràfic 5.3.14: Estratègies heurístiques dels alumnes 2n d'ESO per a cada problema

Podem observar un augment de l'índex d'anàlisi en la fase 2 per a tots els problemes, sent l'augment major en el problema 2 (0,33).

3r ESO

Problema	Iana 3ESO fase I	Iana 3ESO fase II	Iana 3ESO II-I
P1	0,08	0,15	0,07
P2	0,11	0,42	0,31
P3	0,01	0,02	0,01
P4	0,07	0,20	0,13

Taula 5.3.48: Estratègies heurístiques dels alumnes 3r d'ESO per a cada problema



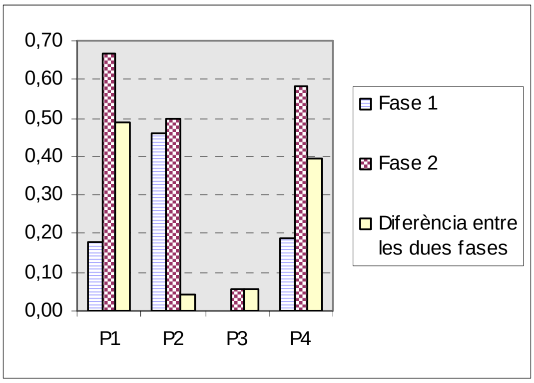
Gràfic 5.3.15: Estratègies heurístiques dels alumnes 3r d'ESO per a cada problema

Podem observar un augment de l'índex d'anàlisi en la fase 2 per a tots els problemes, sent l'augment major en el problema 2 (0,31).

ESTALMAT

Problema	Iana ESTALMAT fase I	Iana ESTALMAT fase II	Iana ESTALMAT II-I
P1	0,18	0,67	0,49
P2	0,46	0,50	0,04
P3	0,00	0,06	0,06
P4	0,19	0,58	0,39

Taula 5.3.49: Estratègies heurístiques dels alumnes d'ESTALMAT per a cada problema



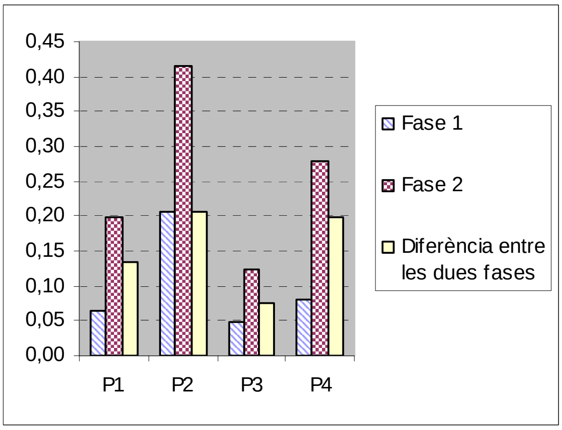
Gràfic 5.3.16: Estratègies heurístiques dels alumnes d'ESTALMAT per a cada problema

Podem observar un augment de l'índex d'anàlisi en la fase 2 per a tots el problemes, sent l'augment major en els problemes 1 i 4 (0,49 i 0,39 respectivament) i menor en els problemes 3 i 2 (0,06 i 0,04 respectivament).

Mostra total

Problema	Iana MOSTRA TOTAL fase I	Iana MOSTRA TOTAL fase II	Iana MOSTRA TOTAL II-I
P1	0,06	0,20	0,13
P2	0,21	0,41	0,21
P3	0,05	0,12	0,07
P4	0,08	0,28	0,20

Taula 5.3.50: Estratègies heurístiques de la mostra total d'alumnes per a cada problema



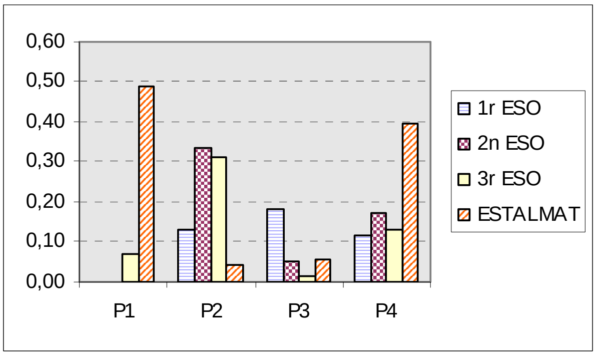
Gràfic 5.3.17: Estratègies heurístiques de la mostra total d'alumnes per a cada problema

En tots els problemes augmenta índex d'anàlisi de les estratègies heurístiques en la segona fase, sent l'augment major en el problema 2

(0,21), seguit dels problemes 4 i 1 (0,20 i 0,13 respectivament). En el problema 3 augmenta menys l'índex d'anàlisi (0,07).
A partir dels resultats anteriors podem obtenir les **variacions de l'índex d'anàlisi** de les estratègies heurístiques de la fase 1 a la fase 2 en els diferents grups:

Problema	Iana 1ESO II-I	Iana 2ESO II-I	Iana 3ESO II-I	Iana ESTALMAT II-I
P1	0,00	0,00	0,07	0,49
P2	0,13	0,33	0,31	0,04
P3	0,18	0,05	0,01	0,06
P4	0,12	0,17	0,13	0,39

Taula 5.3.51: Variacions de la diferència de l'índex d'anàlisi d'estratègies heurístiques de la fase 1 i 2 per cada grup d'alumnes



Gràfic 5.3.18: Variacions de la diferència de l'índex d'anàlisi d'estratègies heurístiques de la fase 1 i 2 per cada grup d'alumnes

Observem que en el problema 1, l'índex d'anàlisi només augmenta en els grups dels alumnes de 3r d'ESO i ESTALMAT. En el problema 2, s'obté un major augment d'aquest índex majoritàriament en els alumnes de 2n i 3r d'ESO. En el problema 3, l'augment és major pels alumnes de 1r d'ESO. En el problema 4, el major l'augment es produeix en el cas d'alumnes d'ESTALMAT. Per tant, les heurístiques milloren en la segona fase, però la millora depèn del problema i de les edats dels alumnes.

Millora global de les estratègies heurístiques per a cada nivell: Si considerem com a millora global de les estratègies heurístiques la suma de les millores de les estratègies heurístiques de cada problema obtenim pels diferents nivells:

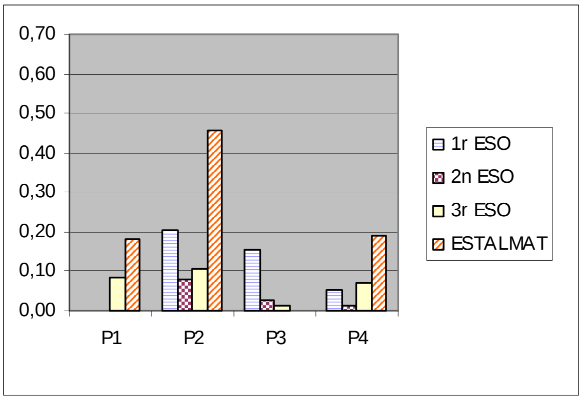
Nivell	1r ESO	2n ESO	3r ESO	ESTALAMAT
Millora global	0,43	0,55	0,52	0,98

Taula 5.3.52: Millora global de les estratègies heurístiques per a cada nivell

Observem que a ESTALMAT la millora és més gran (0,98). Segueixen les millores a 2n i 3r d'ESO (0,55 i 0,52 respectivament), seguit de 1r (0,43).

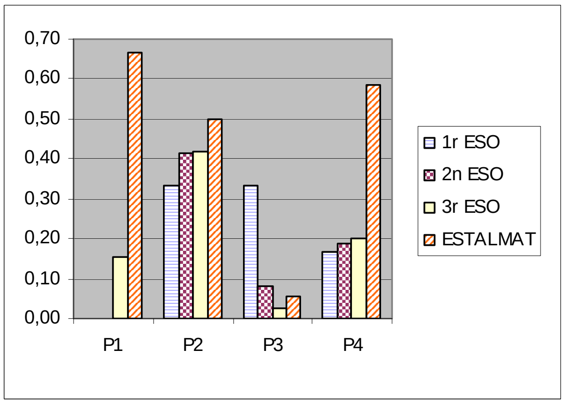
Estudi de les heurístiques utilitzades en la fase 1 i en la fase 2 pels diferents grups d'alumnes

Heurístiques fase 1



Gràfic 5.3.18: Índex d'anàlisi de les estratègies heurístiques de la fase 1 per cada grup d'alumnes

Heurístiques fase 2



Gràfic 5.3.19: Índex d'anàlisi de les estratègies heurístiques de la fase 2 per cada grup d'alumnes

Observem que en la fase 2 els alumnes d'ESTALMAT utilitzen les heurístiques esperades millor i resolen millor els problemes 1, 4 i 2 i en aquest ordre. En el problema 3, els que més bé ho fan són els de 1r d'ESO. Com veurem més endavant en l'apartat 5.4.2 i annex 3, les entrevistes fetes als alumnes ens permeten deduir que aquest fet es produeix perquè havien treballat un problema semblant a classe de matemàtiques. Observem que l'índex d'anàlisi augmenta més pels alumnes d'ESTALMAT en els problemes 1 i 4. En el cas d'ESTALMAT, el problema 2 no augmenta tant perquè parteix d'un índex major.

Síntesi dels resultats pel que fa a les estratègies heurístiques

1r ESO: L'índex d'anàlisi pels alumnes de 1r d'ESO en la fase 1 és més alt en el problema 2. Això vol dir que és el problema on més alumnes han utilitzat l'heurística esperada, en aquest cas, estudi de tots els casos, ja sigui mentalment, gràficament o mitjançant arbre de possibilitats, i diuen tots els

camins possibles. En els problemes 2 i 3 algun alumne ha utilitzat l'heurística esperada. I en el problema 1, cap alumne ha utilitzat l'heurística esperada.
L'índex d'anàlisi pels alumnes de 1r ESO en la fase 2 és més alt en el problema 2 i 3. Això vol dir que són els problemes on més alumnes han utilitzat l'heurística esperada. En el problema 4, algun alumne l'ha utilitzat. I en el problema 1, cap alumne ha utilitzat l'heurística esperada: ús de simetria numèrica. Podem observar un augment de l'índex d'anàlisi en la fase 2 per a tots els problemes, sent l'augment major en el problema 3.

2n ESO: En aquesta primera fase, els alumnes de 2n d'ESO, han utilitzat poc les heurístiques esperades, els índexs d'anàlisi són baixos. En el problema 1 cap alumne les ha utilitzat. L'índex d'anàlisi, en la fase 2, és més alt en el problema 2. Això vol dir que és el problema on més alumnes han utilitzat l'heurística esperada, estudi sistemàtic de tots els casos. En els problemes 3 i 4, algun alumne ha utilitzat l'heurística esperada: simetria geomètrica i fer el problema a la inversa. I en el problema 1, cap alumne ha utilitzat l'heurística esperada: simetria numèrica. Podem observar un augment de l'índex d'anàlisi en la fase 2 per a tots els problemes, sent l'augment major en el problema 2.

3r ESO**:** En aquesta primera fase, els alumnes de 3r d'ESO, han utilitzat poc les heurístiques esperades. Al problema 2 és on més les han utilitzat. L'índex d'anàlisi pels alumnes de 3r d'ESO en la fase 2 és més alt en el problema 2. Això vol dir que és el problema on més alumnes han utilitzat l'heurística esperada. El segueixen els problemes 4, 1 i finalment el 3, on han utilitzat poc les heurístiques esperades. Podem observar un augment de l'índex d'anàlisi en la fase 2 per a tots els problemes, sent l'augment major en el problema 2.

ESTALMAT: Els alumnes d'ESTALMAT, en la fase 1, han obtingut un índex d'anàlisi més alt en el problema 2, per tant, vol dir que utilitzen l'heurística estudi de tots els casos per resoldre el problema. Després el segueixen el problema 4 amb l'estratègia fer el problema a la inversa i el problema 1 amb simetria numèrica. El problema 3 té índex d'anàlisi zero, on cap alumne utilitza l'heurística de la simetria geomètrica. En la fase 2, han obtingut un índex d'anàlisi més alt en el problema 1, per tant, vol dir que utilitzen l'heurística de la simetria numèrica per resoldre el problema. Després el segueixen els problemes 2 i 4. El problema amb l'índex d'anàlisi més baix és el problema 3 on menys alumnes utilitzen l'heurística de la simetria geomètrica. Podem observar un augment de l'índex d'anàlisi en la fase 2 per a tots el problemes, sent l'augment major en els problemes 1 i 4.

Mostra total: Els alumnes tant en la fase 1 com en la fase 2, han obtingut un índex d'anàlisi més alt en el problema 2, per tant, vol dir que utilitzen l'heurística estudi de tots els casos per resoldre el problema. Després el segueixen el problema 1 amb simetria numèrica, el problema 4 amb resoldre a la inversa i finalment el problema 3, on menys alumnes utilitzen l'heurística de la simetria geomètrica. En tots els problemes augmenta índex d'anàlisi de les estratègies heurístiques en la segona fase, sent l'augment major en el problema 2, seguit dels problemes 4 i 1.

Si considerem com a millora global de les estratègies heurístiques la suma de les millores de les estratègies heurístiques de cada problema obtenim que a ESTALMAT la millora és més gran. Segueixen les millores a 2n i 3r d'ESO i finalment de 1r d'ESO.

5.3.4- Altres estratègies heurístiques no considerades a priori

Al començament d'aquest apartat, hem explicitat les estratègies heurístiques esperades per a cada problema:

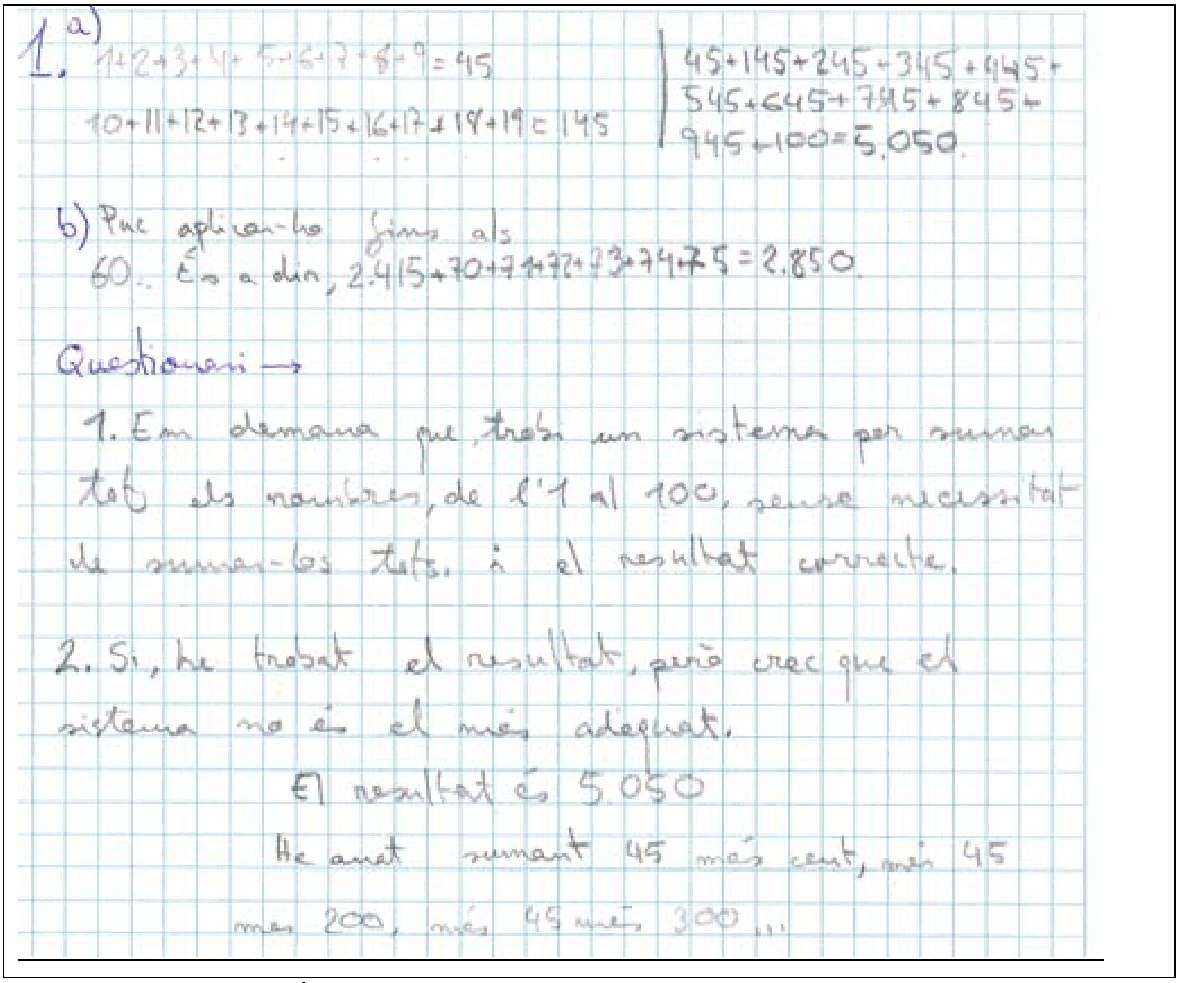
Problema 1	Fer ús de simetria numèrica
Problema 2	Estudi de tots els casos (mentalment, gràficament o mitjançant arbre de possibilitats)
Problema 3	Fer ús de simetria geomètrica
Problema 4	Fer el problema a la inversa

Taula 5.3.53: Estratègies heurístiques esperades per a cada problema

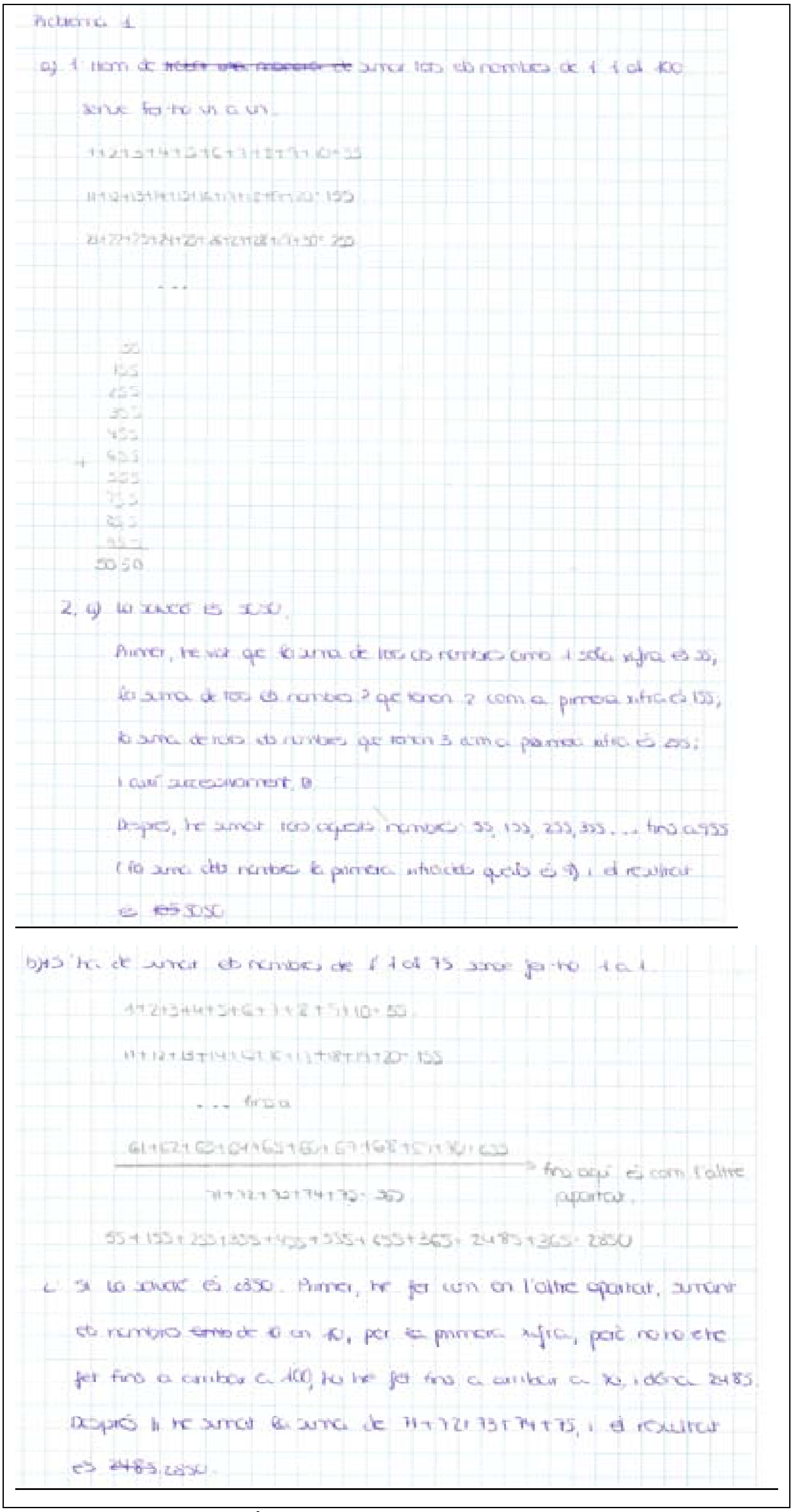
En alguns problemes, hem obtingut altres estratègies heurístiques vàlides però que no les havíem considerat a priori. En aquest punt veurem alguns exemples d'aquestes heurístiques que mostren com els alumnes, a vegades, utilitzen altres maneres de resoldre el problema i que també resulten productives.

En concret veurem tres exemples del problema 1 i dos del problema 2, com hem comentat tots ells d'alumnes d'ESTALMAT. Dels problemes 3 i 4 no hem trobat exemples rellevants.

- El problema 1, els alumnes 2, 3 i 4 d'ESTALMAT el resolen sumant els nombres de deu en deu i després sumant totes les sumes parcials. Utilitzen les estratègies heurístiques: reduir el problema a un més fàcil i resoldre per analogia.


1. a) 1+2+3+4+5+6+7+8+9=45
10+11+12+13+14+15+16+17+18+19=145
45+145+245+345+445+545+645+745+845+945+100=5.050
b) Puc aplicar-ho fins als 60. És a dir, 2.415+70+71+72+73+74+75=2.850
Questionari →
1. Em demana que trobi un sistema per sumar tots els nombres, de l'1 al 100, sense necessitat de sumar-los tots, i el resultat correcte.
2. Sí, he trobat el resultat, però crec que el sistema no és el més adequat.
El resultat és 5.050
He anat sumant 45 més cent, més 45 més 200, més 45 més, 300, ...

Imatge 5.3.1: Resolució de l'alumne 3 d'ESTALMAT, problema 1, fase 2



Problema 1

a) 1' Hem de ~~trobar una manera de~~ sumar tots els nombres de 1 fins al 100 sense fer-ho un a un.

1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55

11+12+13+14+15+16+17+18+19+20=155

21+22+23+24+25+26+27+28+29+30=255

...

55
155
255
355
455
+ 555
655
755
855
955

5050

2. a) La solució és 5050.

Primer, he vist que la suma de tots els nombres amb 1 sola xifra és 55, la suma de tots els nombres que tenen 2 com a primera xifra és 155; la suma de tots els nombres que tenen 3 com a primera xifra és 255; i així successivament.

Després, he sumat tots aquests nombres: 55, 155, 255, 355, ... fins a 955 (la suma dels nombres la primera xifra dels quals és 9) i el resultat és ~~505~~ 5050

b) 1' S'ha de sumar els nombres de 1 fins al 75 sense fer-ho 1 a 1.

1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55

11+12+13+14+15+16+17+18+19+20=155

... fins a

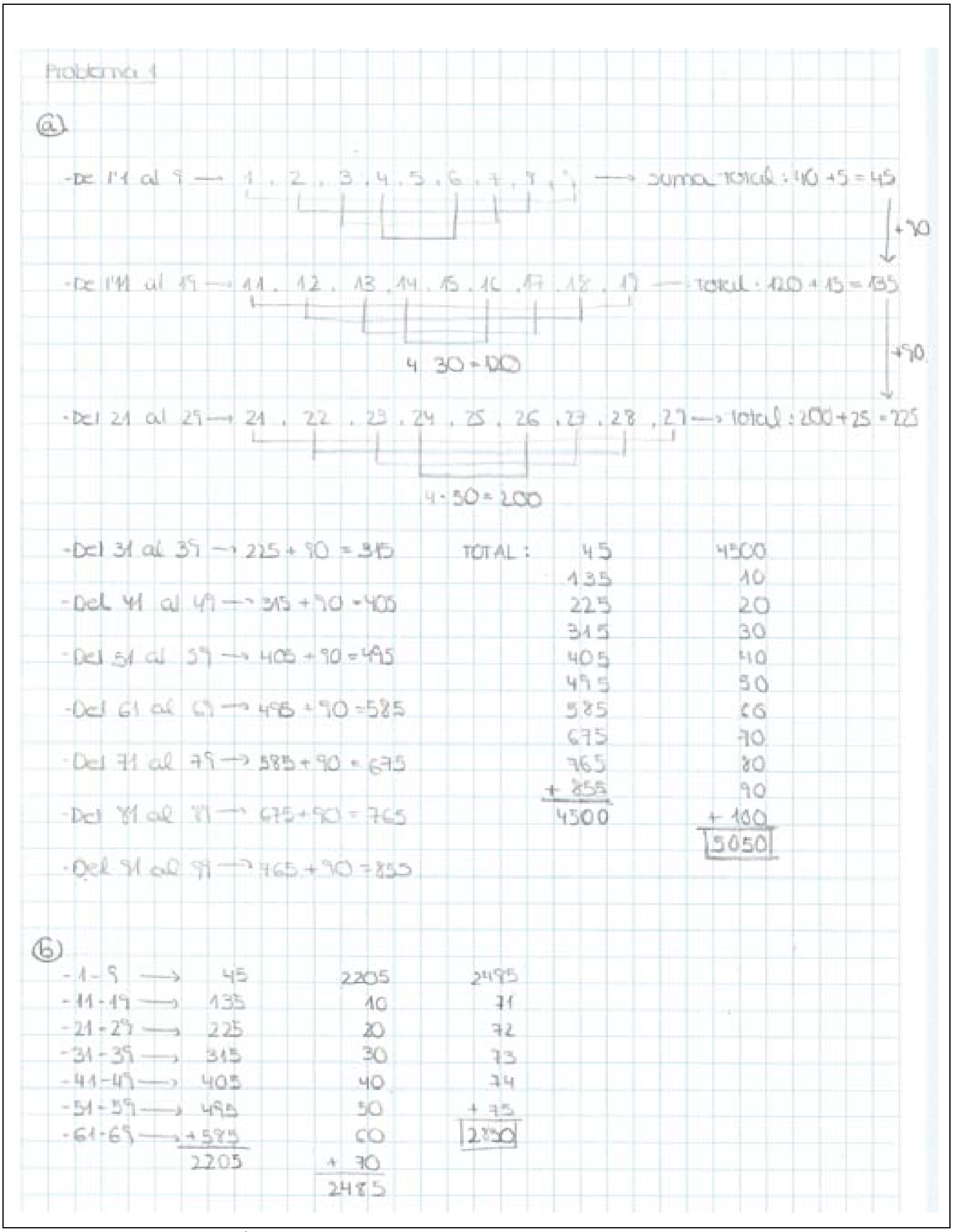
61+62+63+64+65+66+67+68+69+70=655 → fins aquí és com l'altre apartat.

71+72+73+74+75=365

55+155+255+355+455+555+655=2485+365=2850

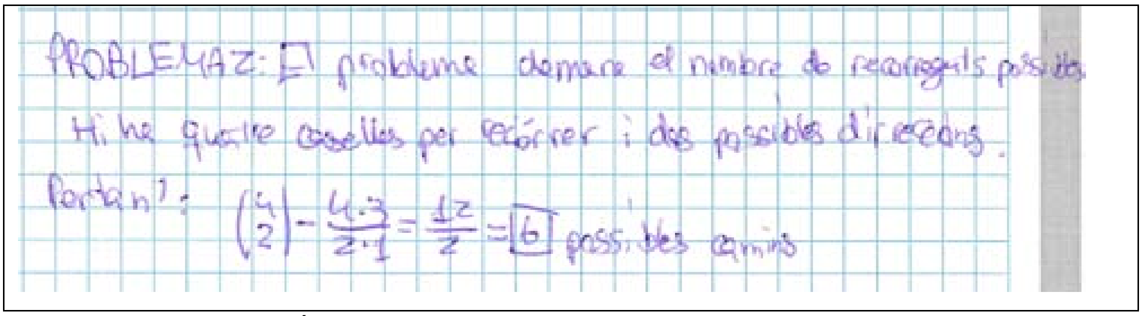
c) Sí la solució és 2850. Primer, he fet com en l'altre apartat, sumant els nombres ~~amb~~ de 10 en 10, per la primera xifra, però no ho he fet fins a arribar a 100, ho he fet fins a arribar a 70, i dóna 2485. Després li he sumat la suma de 71+72+73+74+75, i el resultat és ~~2485~~ 2850.

Imatge 5.3.2: Resolució de l'alumne 2 d'ESTALMAT, problema 1, fase 2



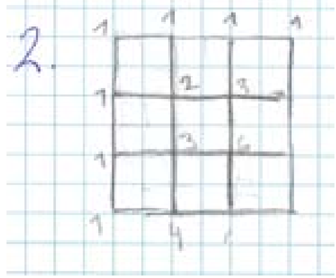
Imatge 5.3.3: Resolució de l'alumne 4 d'ESTALMAT, problema 1, fase 2

El problema 2, l'alumne 18 d'ESTALMAT el resol utilitzant combinatòria, és a dir, classifica el problema com a problema de combinatòria i aplica els seus coneixements matemàtics del tema.



Imatge 5.3.4: Resolució de l'alumne 18 d'ESTALMAT, problema 2, fase 2

El problema 2, l'alumne 3 d'ESTALMAT resol el problema modelitzant-lo a través del triangle aritmètic o de Pascal.



Imatge 5.3.5: Resolució de l'alumne 3 d' ESTALMAT, problema 2, fase 2

Les estratègies heurístiques que hem obtingut diferents a les considerades a priori són molt poques i només les hem obtingut amb alguns alumnes d'ESTALMAT. Aquest fet valida la nostra elecció inicial d'estratègies heurístiques esperades.

5.3.5- Descripció dels llenguatges les resolucions dels problemes

En aquest apartat es tracta d'analitzar l'aspecte de la comunicació de les estratègies que s'han adoptat. Analitzem, per tant, les respostes de la columna V: Expressió de la realització de cadascun dels problemes.

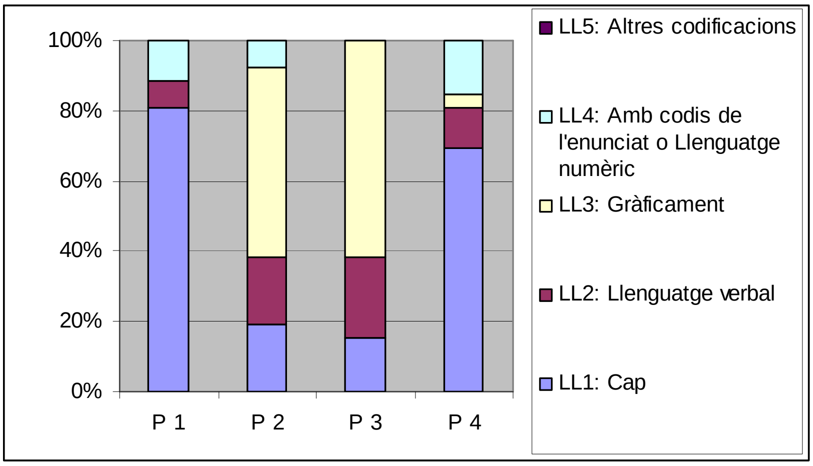
Recordem que:

1	Cap llenguatge
2	Llenguatge verbal
3	Llenguatge gràfic
4	Llenguatge numèric (o codis similars d'acord amb l'enunciat)
5	Altres codis

Descripció de les resolucions dels problemes 1r d'ESO fase 1

Problema	LL1	LL2	LL3	LL4	LL5	LL1 (%)	LL2 (%)	LL3 (%)	LL4 (%)	LL5 (%)
P1	21	2	0	3	0	80,77	7,69	0,00	11,54	0,00
P2	5	5	14	2	0	19,23	19,23	53,85	7,69	0,00
P3	4	6	16	0	0	15,38	23,08	61,54	0,00	0,00
P4	18	3	1	4	0	69,23	11,54	3,85	15,38	0,00

Taula 5.3.54: Descripció de les resolucions dels alumnes 1r d'ESO fase 1



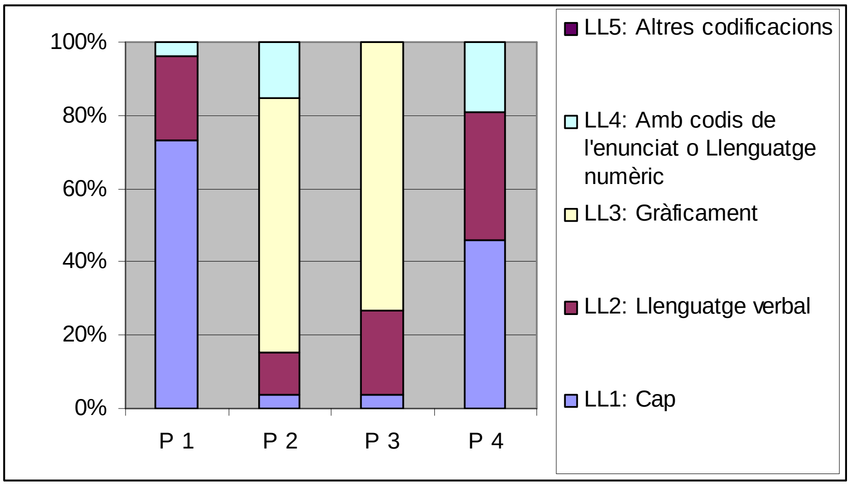
Gràfic 5.3.20: Descripció de les resolucions dels alumnes 1r d'ESO fase 1

Podem observar que els alumnes de 1r ESO en la primera fase, el 80,77% no fa cap resolució del problema 1, i els que la fan, descriuen la resolució amb llenguatge numèric (11,54%) o amb llenguatge verbal (7,69%). En el problema 2, la majoria fa una resolució de tipus gràfica (53,85%) i els altres, s'expressen amb llenguatge verbal (19,23%) o amb altres codificacions (7,69%). En el problema 3, la resolució és majoritàriament també de tipus gràfic (61,54%). I en el problema 4, el 69,23% no fan cap resolució del problema i dels pocs que el fan, o bé s'expressen amb llenguatge verbal (11,54%) o amb llenguatge numèric (15,38%).

Descripció de les resolucions dels problemes 1r d'ESO fase 2

Problema	LL1	LL2	LL3	LL4	LL5	LL1 (%)	LL2 (%)	LL3 (%)	LL4 (%)	LL5 (%)
P1	19	6	0	1	0	73,08	23,08	0,00	3,85	0,00
P2	1	3	18	4	0	3,85	11,54	69,23	15,38	0,00
P3	1	6	19	0	0	3,85	23,08	73,08	0,00	0,00
P4	12	9	0	5	0	46,15	34,62	0,00	19,23	0,00

Taula 5.3.55: Descripció de les resolucions dels alumnes 1r d'ESO fase 2



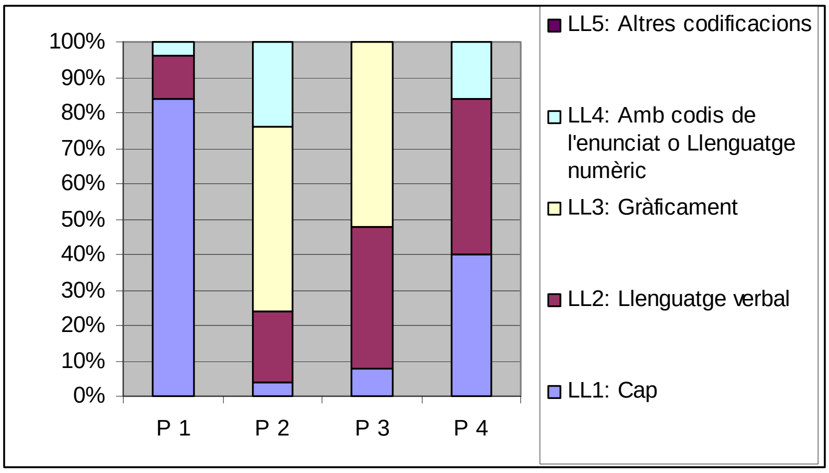
Gràfic 5.3.21: Descripció de les resolucions dels alumnes 1r d'ESO fase 2

Podem observar que els alumnes de 1r d'ESO, el 73,08% no fa cap resolució el problema 1, i els que la fan, la majoria descriuen la resolució amb llenguatge verbal (23,08%). En el problema 2, la majoria fa una resolució de tipus gràfica (69,23%) i els altres, s'expressen amb codificacions o llenguatge verbal. En el problema 3, la resolució és majoritàriament també de tipus gràfic (73,08%). I en el problema 4, un percentatge elevat no el fan (46,15%) i dels que el fan, o bé s'expressen amb llenguatge verbal (34,62%) o amb llenguatge numèric (19,23%).

Descripció de les resolucions dels problemes 2n d'ESO fase 1

Problema	LL1	LL2	LL3	LL4	LL5	LL1 (%)	LL2 (%)	LL3 (%)	LL4 (%)	LL5 (%)
P1	21	3	0	1	0	84	12	0	4	0
P2	1	5	13	6	0	4	20	52	24	0
P3	2	10	13	0	0	8	40	52	0	0
P4	10	11	0	4	0	40	44	0	16	0

Taula 5.3.56: Descripció de les resolucions dels alumnes 2n d'ESO fase 1



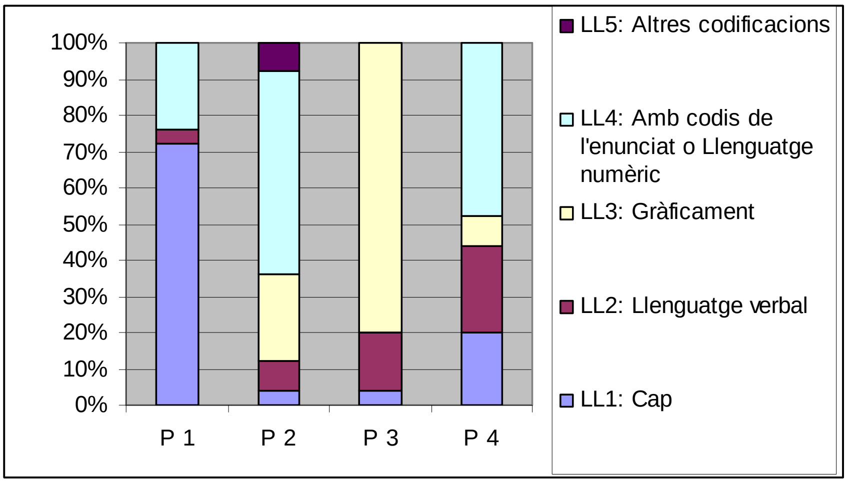
Gràfic 5.3.22: Descripció de les resolucions dels alumnes 2n d'ESO fase 1

Podem observar que els alumnes de 2n ESO en la primer fase, el 84% no fa cap resolució el problema 1, i els que la fan, descriuen la resolució amb llenguatge verbal majoritàriament. En el problema 2, la majoria fa una resolució de tipus gràfica (52%) i els altres, s'expressen amb codificacions o llenguatge verbal. En el problema 3, la resolució és majoritàriament també de tipus gràfic (52%), seguida de l'expressió verbal (40%). I en el problema 4, dels que el fan, la majoria s'expressa amb llenguatge verbal (44%) i la resta amb llenguatge numèric (16%).

Descripció de les resolucions dels problemes 2n d'ESO fase 2

Problema	LL1	LL2	LL3	LL4	LL5	LL1 (%)	LL2 (%)	LL3 (%)	LL4 (%)	LL5 (%)
P1	18	1	0	6	0	72	4	0	24	0
P2	1	2	6	14	2	4	8	24	56	8
P3	1	4	20	0	0	4	16	80	0	0
P4	5	6	2	12	0	20	24	8	48	0

Taula 5.3.57: Descripció de les resolucions dels alumnes 2n d'ESO fase 2



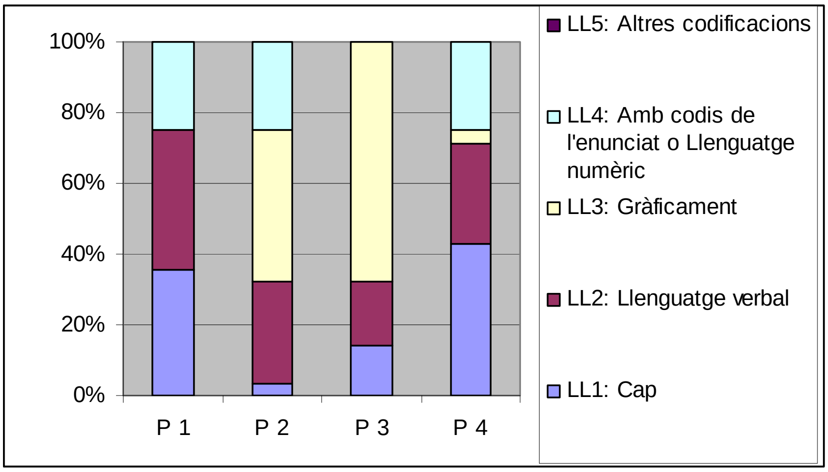
Gràfic 5.3.22: Descripció de les resolucions dels alumnes 2n d'ESO fase 2

Podem observar que els alumnes de 2n d'ESO, el 72% no fa cap resolució el problema 1, i els que la fan, la majoria descriuen la resolució amb llenguatge numèric (24%). En el problema 2, la majoria s'expressa amb codificacions (56%) o gràficament (24%). En el problema 3, la resolució és majoritàriament també de tipus gràfic (80%). I en el problema 4, un 20% no l'ha resolt i la de la resta la majoria s'expressa amb llenguatge numèric (48%) o llenguatge verbal (24%).

Descripció de les resolucions dels problemes 3r d'ESO fase 1

Problema	LL1	LL2	LL3	LL4	LL5	LL1 (%)	LL2 (%)	LL3 (%)	LL4 (%)	LL5 (%)
P1	10	11	0	7	0	35,71	39,29	0,00	25,00	0,00
P2	1	8	12	7	0	3,57	28,57	42,86	25,00	0,00
P3	4	5	19	0	0	14,29	17,86	67,86	0,00	0,00
P4	12	8	1	7	0	42,86	28,57	3,57	25,00	0,00

Taula 5.3.58: Descripció de les resolucions dels alumnes 3r d'ESO fase 1



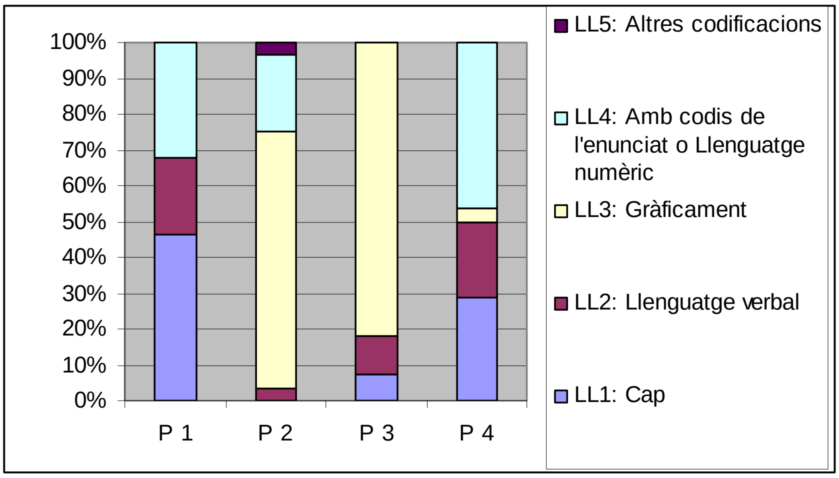
Gràfic 5.3.23: Descripció de les resolucions dels alumnes 3r d'ESO fase 1

Podem observar que en el problema 1 els alumnes de 3r ESO, en la primera fase, un 35,71% no fan cap resolució del problema, la resta s'expressen amb llenguatge verbal (39,29%) o amb llenguatge numèric (25%). El problema 2, majoritàriament expressen la resolució gràficament (42,86%), seguit d'expressió verbal 28,57% i numèrica (25%). El problema 3, el resolen la majoria gràficament (67,86%). El problema 4, un 42,86% no l'ha resolt, la resta s'expressen amb llenguatge verbal (28,57%) o llenguatge numèric (25%).

Descripció de les resolucions dels problemes 3r d'ESO fase 2

Problema	LL1	LL2	LL3	LL4	LL5	LL1 (%)	LL2 (%)	LL3 (%)	LL4 (%)	LL5 (%)
P1	13	6	0	9	0	46,43	21,43	0,00	32,14	0,00
P2	0	1	20	6	1	0,00	3,57	71,43	21,43	3,57
P3	2	3	23	0	0	7,14	10,71	82,14	0,00	0,00
P4	8	6	1	13	0	28,57	21,43	3,57	46,43	0,00

Taula 5.3.59: Descripció de les resolucions dels alumnes 3r d'ESO fase 2



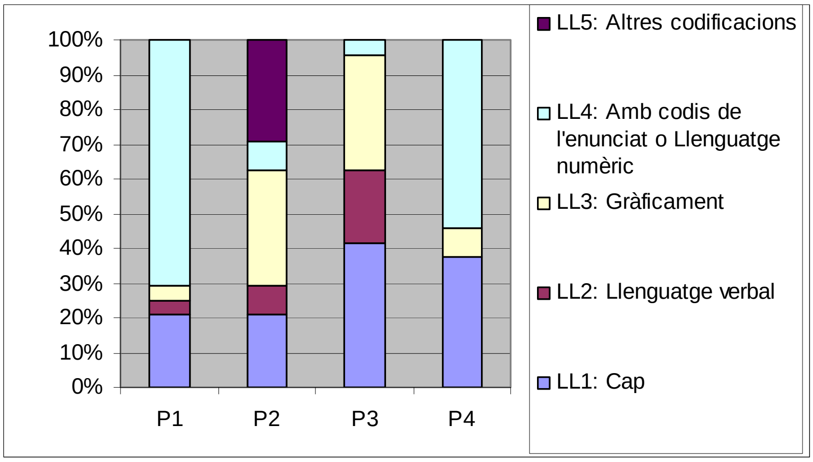
Gràfic 5.3.24: Descripció de les resolucions dels alumnes 3r d'ESO fase 2

Podem observar que en el problema 1 els alumnes de 3r ESO, en la segona fase, un 46,43% no fan cap resolució del problema, la resta s'expressen amb llenguatge verbal (21,43%) o amb llenguatge numèric (32,14%). En el problema 2, majoritàriament expressen la resolució gràficament (71,43%), seguit d'expressió verbal (28,57%) i numèrica (25%). El problema 3, el resolen la majoria gràficament (82,14%). El problema 4, un 28,57% no l'ha resolt, la resta s'expressen amb llenguatge verbal (21,43%) o llenguatge numèric (46,43%).

Descripció de les resolucions dels problemes d'ESTALMAT fase 1

Problema	LL1	LL2	LL3	LL4	LL5	LL1 (%)	LL2 (%)	LL3 (%)	LL4 (%)	LL5 (%)
P1	5	1	1	15	2	20,83	4,17	4,17	70,83	0,00
P2	5	2	8	2	7	20,83	8,33	33,33	8,33	29,17
P3	10	5	8	1	0	41,67	20,83	33,33	4,17	0,00
P4	9	0	2	13	0	37,50	0,00	8,33	54,17	0,00

Taula 5.3.60: Descripció de les resolucions dels alumnes d'ESTALMAT fase 1



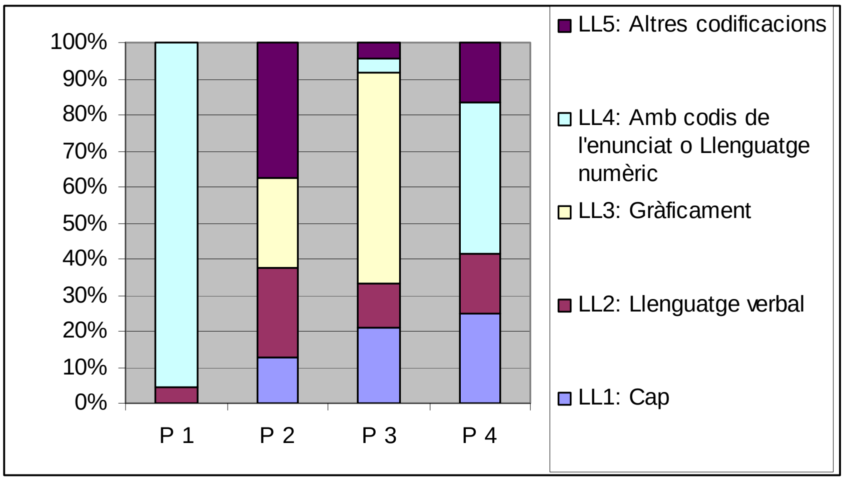
Gràfic 5.3.25: Descripció de les resolucions dels alumnes d'ESTALMAT fase 1

Podem observar que en el problema 1 els alumnes d'ESTALMAT, en la primera fase, un 20,83% no fan cap resolució del problema, la majoria s'expressa amb llenguatge numèric (70,83%). El problema 2, un 20,83% no ha fet cap resolució, i de la resta majoritàriament expressen la resolució gràficament (33,33%). En el problema 3, hi ha un 41,67% que no el resolen, la resta el resolen la majoria gràficament (33,33%). El problema 4, un 37,50% no l'ha resolt, la resta s'expressa majoritàriament amb llenguatge numèric (54,17%).

Descripció de les resolucions dels problemes d'ESTALMAT fase 2

Problema	LL1	LL2	LL3	LL4	LL5	LL1 (%)	LL2 (%)	LL3 (%)	LL4 (%)	LL5 (%)
P1	0	1	0	23	0	0,00	4,17	0,00	95,83	0,00
P2	3	6	6	0	9	12,50	25,00	25,00	0,00	37,50
P3	5	3	14	1	1	20,83	12,50	58,33	4,17	4,17
P4	6	4	0	10	4	25,00	16,67	0,00	41,67	16,67

Taula 5.3.61: Descripció de les resolucions dels alumnes d'ESTALMAT fase 2



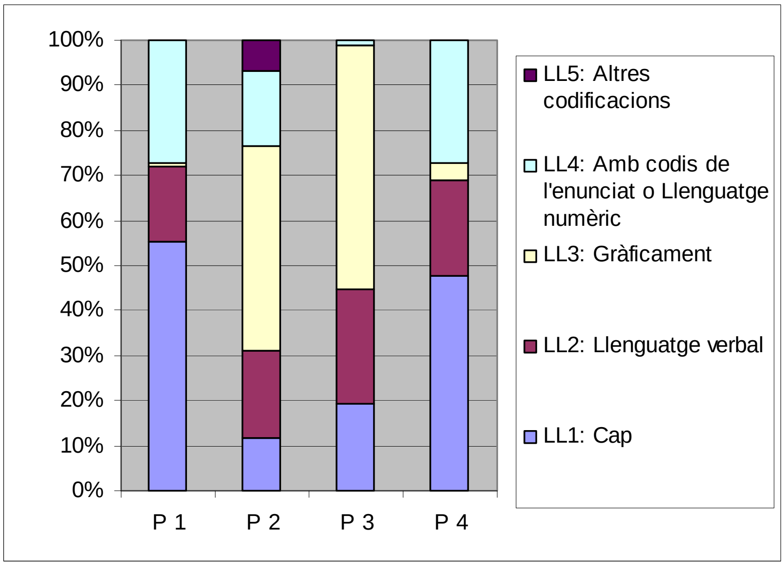
Gràfic 5.3.26: Descripció de les resolucions dels alumnes ESTALMAT fase 2

Podem observar que en el problema 1 els alumnes d'ESTALMAT, en la segona fase, tots fan alguna resolució i la majoria s'expressa amb llenguatge numèric (95,83%). El problema 2, un 12,50% no ha fet cap resolució, i de la resta expressen la resolució gràficament o amb llenguatge verbal (33,33% en els dos casos). En el problema 3, hi ha un 20,83% que no el resolen, la resta el resolen la majoria gràficament (58,33%). El problema 4, un 25% no l'ha resolt, la resta s'expressa majoritàriament amb llenguatge numèric (41,67%).

Descripció de les resolucions dels problemes per la mostra total fase 1

Problema	LL1	LL2	LL3	LL4	LL5	LL1 (%)	LL2 (%)	LL3 (%)	LL4 (%)	LL5 (%)
1	57	17	1	26	2	55,34	16,50	0,97	27,18	0,00
2	12	20	47	17	7	11,65	19,42	45,63	16,50	6,80
3	20	26	56	1	0	19,42	25,24	54,37	0,97	0,00
4	49	22	4	28	0	47,57	21,36	3,88	27,18	0,00

Taula 5.3.62: Descripció de les resolucions de la mostra total dels alumnes fase 1



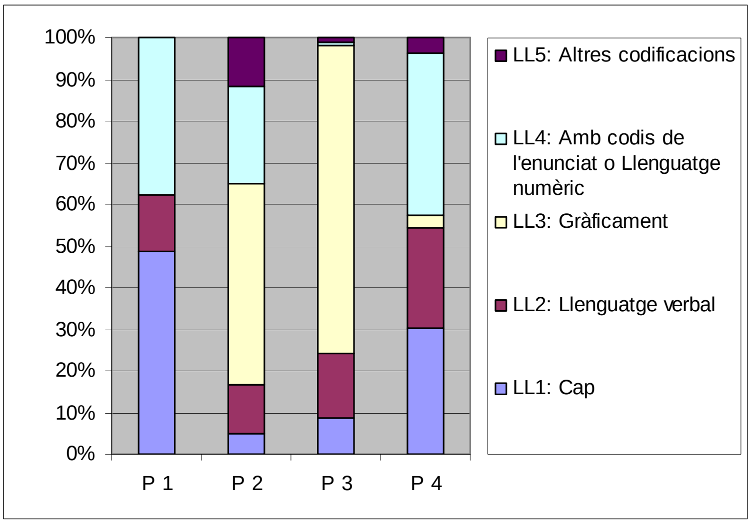
Gràfic 5.3.27: Descripcions de les resolucions dels problemes per la mostra total dels alumnes fase 1

Podem observar que en el problema 1, en la fase 1, un 55,34 % no fan cap resolució, de la resta, la majoria s’expressa amb llenguatge numèric (27,18%). El problema 2, un 11,65% no ha fet cap resolució, i de la resta expressen la resolució gràficament (45,63%), amb llenguatge verbal (16,50%) o amb llenguatge verbal (19,42%). En el problema 3, hi ha un 19,42% que no el resolen, la resta el resolen la majoria gràficament (54,37%). El problema 4, un 47,57% no l’ha resolt, la resta s’expressa majoritàriament amb llenguatge numèric (27,18%) o llenguatge verbal (21,36%).

Descripció de les resolucions dels problemes per la mostra total fase 2

Problema	LL1	LL2	LL3	LL4	LL5	LL1 (%)	LL2 (%)	LL3 (%)	LL4 (%)	LL5 (%)
P1	50	14	0	39	0	48,54	13,59	0,00	37,86	0,00
P2	5	12	50	24	12	4,85	11,65	48,54	23,30	11,65
P3	9	16	76	1	1	8,74	15,53	73,79	0,97	0,97
P4	31	25	3	40	4	30,10	24,27	2,91	38,83	3,88

Taula 5.3.63: Descripció de les resolucions de la mostra total dels alumnes fase 2



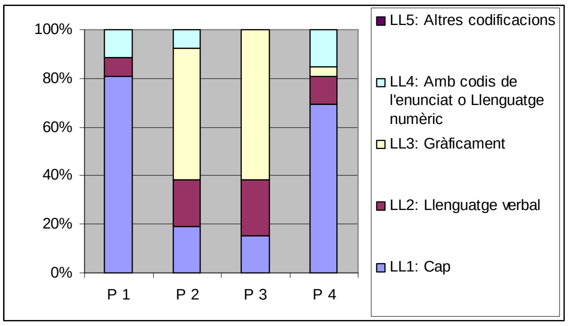
Gràfic 5.3.28: Descripcions de les resolucions dels problemes per la mostra total dels alumnes fase 2

Podem observar que en el problema 1, en la fase 2, un 48,54 % no fan cap resolució, de la resta, la majoria s'expressa amb llenguatge numèric (37,86%). El problema 2, un 4,85% no ha fet cap resolució, i de la resta majoritàriament expressen la resolució gràficament (48,54%). En el problema 3, hi ha un 8,74% que no el resolen, de la resta el resolen la majoria gràficament (73,79%). El problema 4, un 30,10% no l'ha resolt, la resta s'expressa majoritàriament amb llenguatge numèric (38,83%) o llenguatge verbal (24,27%).

Comparacions en els llenguatges emprats en les resolucions dels problemes entre les dues fases per a cada grup

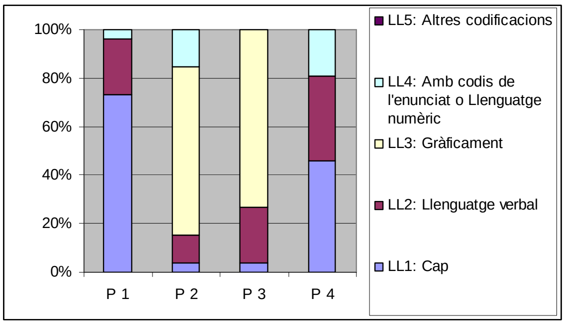
1r d'ESO:

Fase 1



Gràfic 5.3.29: Descripció de les resolucions dels alumnes 1r d'ESO fase 1

Fase 2

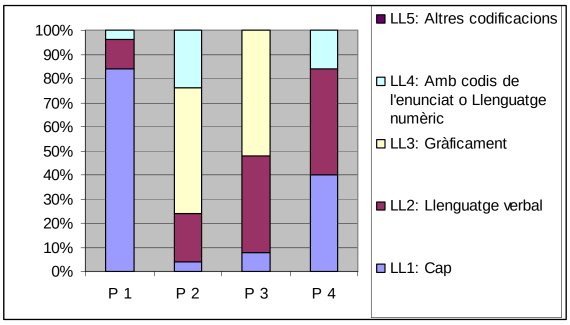


Gràfic 5.3.30: Descripció de les resolucions dels alumnes 1r d'ESO fase 2

En tots els problemes a la fase 2 disminueix LL1 (cap descripció del problema). Això vol dir que alumnes que no escriuen res a la fase 1, sí ho fan a la fase 2. En el problema 1: augmenta l'ús del llenguatge verbal i del llenguatge numèric. En el problema 2: augmenta l'ús del llenguatge verbal, gràficament i llenguatge numèric; tot i que en les dos fases majoritàriament els alumnes s'expressen gràficament. En el problema 3: augmenta LL3 (gràficament); tot i que en les dos fases majoritàriament els alumnes s'expressen gràficament. En el problema 4: augmenta l'ús del llenguatge verbal, i del llenguatge numèric.

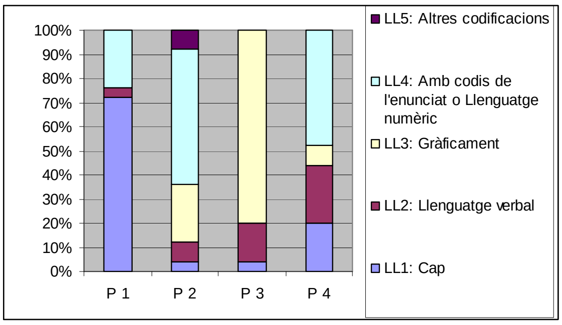
2n d'ESO:

Fase 1



Gràfic 5.3.31: Descripció de les resolucions dels alumnes 2n d'ESO fase 1

Fase 2

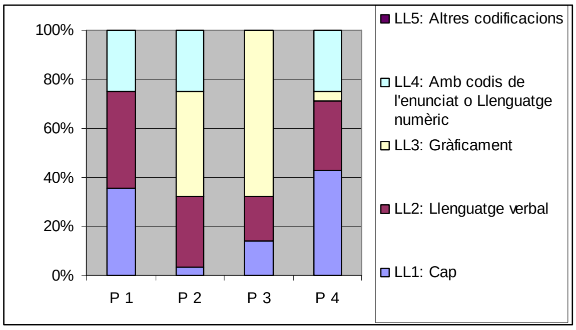


Gràfic 5.3.32: Descripció de les resolucions dels alumnes 2n d'ESO fase 2

En tots els problemes a la fase 2 disminueix LL1 (cap descripció del problema). Això vol dir que alumnes que no escriuen res a la fase 1, sí ho fan a la fase 2. En el problema 1: disminueix LL2 (llenguatge verbal) i augmenta LL4 (llenguatge numèric). En el problema 2: disminueix LL 2 (llenguatge verbal) i LL3 (gràficament); i augmenta LL4 (llenguatge numèric) i la LL5 (altres codis). En el problema 3: disminueix LL2 (llenguatge verbal) i augmenta LL3 (gràficament). En el problema 4: augmenta LL2 (llenguatge verbal), LL3 (gràficament) i LL4 (llenguatge numèric).

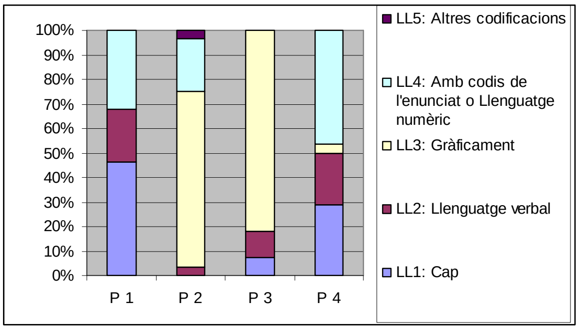
3r d'ESO:

Fase1



Gràfic 5.3.33: Descripció de les resolucions dels alumnes 3r d'ESO fase 1

Fase 2

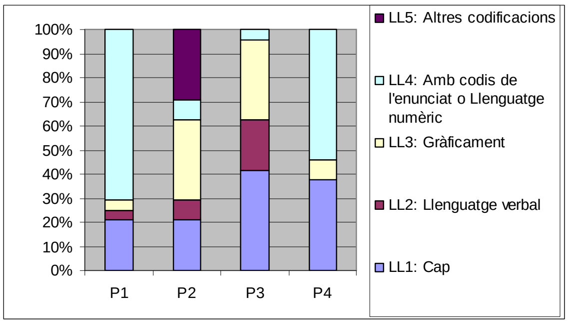


Gràfic 5.3.34: Descripció de les resolucions dels alumnes 3r d'ESO fase 2

En els problemes 2, 3 i 4 a la fase 2 disminueix LL1 (cap descripció del problema). Això vol dir que alumnes que no escriuen res a la fase 1, sí ho fan a la fase 2. En canvi al problema 1 augmenta LL1 (cap) i LL4 (llenguatge numèric) i disminueix LL2 (llenguatge verbal). En el problema 2: disminueix LL2 (llenguatge verbal) i augmenta LL3 (gràficament), LL4 (llenguatge numèric) i LL5 (altres codis). En el problema 3: disminueix LL2 (llenguatge verbal) i augmenta LL3 (gràficament). En el problema 4: disminueix la LL2 (llenguatge verbal), i augmenta LL4 (llenguatge numèric).

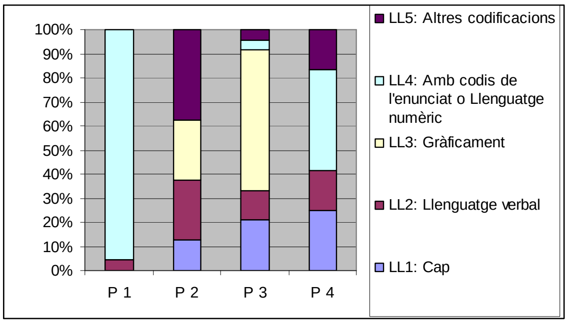
ESTALMAT:

Fase1



Gràfic 5.3.35: Descripció de les resolucions dels alumnes ESTALMAT fase 1

Fase 2

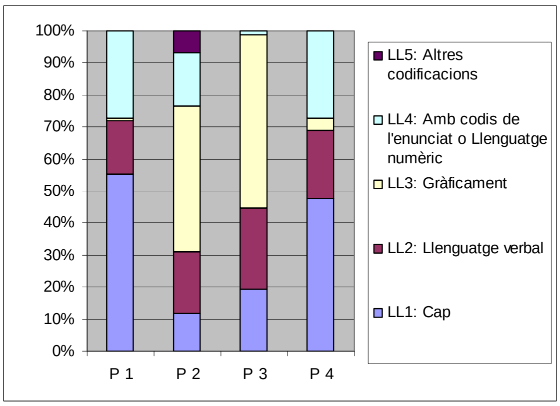


Gràfic 5.3.36: Descripció de les resolucions dels alumnes ESTALMAT fase 2

Pel alumnes d'ESTALMAT, en tots els problemes en la fase 2 disminueix LL1 (cap expressió), és a dir, que en la segona fase hi ha més alumnes que resolen els problemes, independentment que la resposta sigui o no correcta. En el problema 1 en la segona fase augmenta el llenguatge numèric. En el problema 2 augmenta el llenguatge verbal i altres codis. El problema 3 augmenta el llenguatge gràfic en la segona fase. Observem que en el problema 4, disminueix el llenguatge verbal i augmenta el llenguatge numèric.

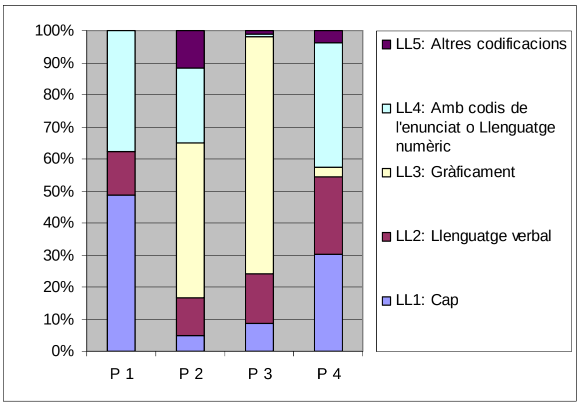
Mostra total:

Fase1



Gràfic 5.3.37: Descripció de les resolucions problemes per la mostra total dels alumnes fase 1

Fase 2



Gràfic 5.3.38: Descripció de les resolucions problemes per la mostra total dels alumnes fase 2

Per la mostra total d'alumnes, en tots els problemes en la fase 2 disminueix LL1 (cap expressió), és a dir, que en la segona fase hi ha més alumnes que resolen els problemes, independentment que la resposta sigui o no correcta. En el problema 1 en la segona fase augmenta el llenguatge numèric. En el problema 2 augmenta el llenguatge verbal i altres codis. El problema 3 augmenta el llenguatge gràfic en la segona fase. Observem que en el problema 4, disminueix el llenguatge verbal i augmenta el llenguatge numèric.

Observem que les proporcions de cada resposta en cada problema són similars en les dues fases. El tipus d'expressió majoritària depèn del problema. Tanmateix, hi ha una clara millora en el següent sentit: al passar a la fase 2 disminueix en tots els problemes l'ús del LL1 i LL2 (que són cap llenguatge i llenguatge verbal) mentre que augmenten els LL3 i LL4 (que són llenguatge gràfic i llenguatge numèric).

Descripció global per a cada nivell: Si considerem com a descripció global la suma dels percentatges de les descripcions de cada problema obtenim els resultats de les taules següents. (Observació: la suma de tots els llenguatges per cada grup ara és 400 ja que hem sumat els percentatges dels quatre problemes).

FASE 1

Grup	LL1 (%)	LL2 (%)	LL3 (%)	LL4 (%)	LL5 (%)
1r	184,615	61,538	119,230	34,615	0
2n	136	116	104	44	0
3r	96,428	114,285	114,285	75	0
ESTALMAT	120,833	33,333	79,166	137,5	29,166
MOSTRA GLOBAL	133,980	82,524	104,854	71,844	6,796

Taula 5.3.64: Descripció global de les resolucions per a cada grup, fase 1

FASE 2

Grup	LL1 (%)	LL2 (%)	LL3 (%)	LL4 (%)	LL5 (%)
1r	126,923	92,307	142,307	38,461	0
2n	100	52	112	128	8
3r	82,142	57,142	157,14286	100	3,571
ESTALMAT	58,333	58,333	83,333	141,666	58,333
MOSTRA GLOBAL	92,233	65,048	125,242	100,971	16,504

Taula 5.3.65: Descripció global de les resolucions per a cada grup, fase 2

FASE 2-FASE1

Grups	LL1 (%)	LL2 (%)	LL3 (%)	LL4 (%)	LL5 (%)
1r	-57,692	30,769	23,076	3,846	0
2n	-36	-64	8	84	8
3r	-14,285	-57,142	42,857	25	3,571
ESTALMAT	-62,499	24,999	4,1666	4,166	29,166
MOSTRA TOTAL	-41,747	-17,475	20,388	29,126	9,708

Taula 5.3.66: Descripció global de les resolucions per a cada grup, diferència entre les dues fases

Ja hem vist que les descripcions varien per a cada problema en cada fase, però si considerem la descripció global de tots els problemes observem que a 1r d'ESO, a la primera fase, majoritàriament no fan cap resolució dels problemes i dels que els fan els llenguatges més utilitzats són primer el llenguatge gràfic i seguidament el verbal. Observem que en la segona fase els alumnes de 1r d'ESO resolen més, ja que disminueix el nombre de LL1 (cap llenguatge) i augmenta, tant el llenguatge verbal, com el gràfic, també augmenta el llenguatge numèric, tot i que en menys percentatge.

Els alumnes de 2n d'ESO en la primera fase resolen més que els de 1r d'ESO, tot i així resolen poc, i ho fan utilitzant llenguatge verbal principalment i també en llenguatge gràfic o numèric. En la segona fase, resolen més i passen d'expressar-se en llenguatge verbal a expressar-se en llenguatge numèric.

Els alumnes de 3r d'ESO resolen més que els de segon i els de primer i ho fan utilitzant llenguatge verbal i gràfic principalment i també en llenguatge numèric. En la segona fase, hi ha més alumnes que resolen els problemes, baixa l'expressió en llenguatge verbal i puja el llenguatge gràfic i numèric.

Els alumnes d'ESTALMAT, en la primera fase, resolen més que els alumnes de 2n i 1r d'ESO, però menys que els de tercer, i ho fan principalment amb llenguatge numèric, també utilitzen altres codificacions i llenguatge gràfic. A la segona fase, resolen més que tots els altres grups, majoritàriament s'expressen amb llenguatge numèric com a la primera fase però en més quantitat ja que hi ha un petit descens del llenguatge verbal que passa al llenguatge numèric.

En la mostra global, els alumnes a la primera fase s'expressen majoritàriament en llenguatge gràfic, seguit del numèric i verbal, tot i que cal destacar que hi ha un percentatge important de cap expressió, això vol dir que no resolen. En la segona fase, hi ha un descens important dels alumnes que no resolen, hi ha un descens en l'expressió verbal i un augment major en la utilització del llenguatge numèric, seguit d'un augment en el llenguatge gràfic i un menor augment en la utilització d'altres codificacions.

Síntesi dels resultats pel que fa als llenguatges emprats en les resolucions dels problemes

1r ESO: Podem observar que els alumnes de 1r ESO en la primera fase, pocs fan alguna resolució del problema 1 i aquests descriuen la resolució amb llenguatge numèric o amb llenguatge verbal. En la segona fase disminueix LL1 (cap descripció del problema) i augmenta l'ús del llenguatge verbal i del llenguatge numèric. En el problema 2 i 3, en les dues fases la majoria fa una resolució de tipus gràfica i els altres, s'expressen amb codificacions o llenguatge verbal. Pocs alumnes fan alguna resolució del problema 4 en la primera fase i s'expressen amb llenguatge verbal o amb llenguatge numèric.
En tots els problemes a la fase 2 disminueix LL1 (cap descripció del problema). Això vol dir que alumnes que no escriuen res a la fase 1, sí ho fan a la fase 2.

2n ESO: Podem observar que els alumnes de 2n ESO en la primer fase, pocs fan alguna resolució el problema 1, i els que la fan, descriuen la resolució amb llenguatge verbal majoritàriament. En la segona fase, disminueix LL2 (llenguatge verbal) i augmenta LL4 (llenguatge numèric). En el problema 2, a la primera fase, la majoria fa una resolució de tipus gràfica i els altres, s'expressen amb codificacions o llenguatge verbal. En la segona fase, disminueix LL2 (llenguatge verbal) i LL3 (gràficament) i augmenta LL4 (llenguatge numèric) i LL5 (altres codis). En el problema 3, en la primera fase, la resolució és majoritàriament també de tipus gràfic, seguida de l'expressió verbal. En la segona fase disminueix el llenguatge verbal i augmenta el gràfic. I en el problema 4, dels que el fan, la majoria s'expressa amb llenguatge verbal i la resta amb llenguatge numèric. En la segona fase augmenta el llenguatge verbal, llenguatge gràfic i llenguatge numèric. En tots els problemes a la fase 2 disminueix LL1 (cap descripció del problema). Això vol dir que alumnes que no escriuen res a la fase 1, sí ho fan a la fase 2.

3r ESO: Podem observar que en el problema 1 dels que fan alguna resolució del problema, s'expressen amb llenguatge o amb llenguatge numèric. En la segona fase augmenta LL1 (cap resolució) i LL4 (llenguatge numèric) i disminueix LL2 (llenguatge verbal). El problema 2, majoritàriament expressen la resolució gràficament, seguit d'expressió verbal i numèrica. El problema 3, el resolen la majoria gràficament. En problema 4, o no el resolen o si ho fan s'expressen amb llenguatge verbal o llenguatge numèric. En la segona fase disminueix llenguatge verbal i augmenta llenguatge numèric. En els problemes 2, 3 i 4 a la fase 2 disminueix LL1 (cap descripció del problema). Això vol dir que alumnes que no escriuen res a la fase 1, sí ho fan a la fase 2.

ESTALMAT: Podem observar que en el problema 1 els alumnes d'ESTALMAT, en la primera fase, la majoria s'expressa amb llenguatge numèric. En la segona fase augmenta el llenguatge numèric. En problema 2, tant en la fase 1 com en la 2, dels que el resolen, la majoria s'expressa gràficament. En la segona fase augmenta el llenguatge verbal i altres codis. En el problema 3, el resolen la majoria gràficament. En el problema 4, s'expressen majoritàriament amb llenguatge numèric. En la segona fase, disminueix el llenguatge verbal i augmenta el llenguatge numèric. En tots els problemes en la fase 2 disminueix LL1 (cap expressió), és a dir, que en la segona fase hi ha més alumnes que resolen els problemes, independentment que la resposta sigui o no correcta.

Mostra total: Podem observar que en el problema 1, dels que el fan, la majoria s'expressa amb llenguatge numèric. En el problema 2 expressen la resolució gràficament majoritàriament, o amb llenguatge verbal. En la segona fase augmenta el llenguatge verbal i altres codis. En el problema 3, el resolen la majoria gràficament. El problema 4 s'expressa majoritàriament amb llenguatge numèric o llenguatge verbal. En la segona fase disminueix el llenguatge verbal i augmenta el llenguatge numèric. Per la mostra total d'alumnes, en tots els problemes en la fase 2 disminueix LL1 (cap expressió), és a dir, que en la segona fase hi ha més alumnes que resolen els problemes, independentment que la resposta sigui o no correcta.

Observem que les proporcions de cada resposta en cada problema són similars en les dues fases. El tipus d'expressió majoritària per resoldre els problemes es manté per tot el grup d'alumnes en tots els problemes en la segona fase. Per tant, el tipus d'expressió majoritària depèn del problema. Tanmateix, hi ha una clara millora en el següent sentit: al passar a la fase 2 disminueix en tots els problemes l'ús del LL1 i LL2 (que són cap llenguatge i llenguatge verbal) mentre que augmenten els LL3 i LL4 (que són llenguatge gràfic i llenguatge numèric).

5.3.6-Síntesi de les 4 característiques estudiades, per a cada grup:

1r d'ESO: El problema més comprensible pels alumnes de 1r d'ESO, tant a la fase 1 com a la 2, és el 2n problema, seguit del 3r. Els problemes amb menys comprensibilitat són el 1r i el 4t. Podem observar un augment de l'índex de comprensibilitat en la fase 2 per a tots els problemes, sent l'augment major en el problema 2.

El problema amb l'índex de facilitat més alt pels alumnes de 1r d'ESO, tant a la fase 1 com a la fase 2, és el 2n problema, seguit del 3r. En aquests problemes, hi ha més alumnes que els han resolt total o parcialment. Els problemes amb menys índex de facilitat són el 1r i el 4t. Això vol dir que més alumnes no els han resolt. Podem observar un augment de l'índex de facilitat en la fase 2 per tots els problemes, sent l'augment major en el problema 3.

L'índex d'anàlisi pels alumnes de 1r d'ESO en la fase 1 és més alt en el problema 2. Això vol dir que és el problema on més alumnes han utilitzat l'heurística esperada, en aquest cas, estudi de tots els casos, ja sigui mentalment, gràficament o mitjançant arbre de possibilitats, i diuen tots els camins possibles. En els problemes 2 i 3 algun alumne ha utilitzat l'heurística esperada. I en el problema 1, cap alumne l'ha utilitzat. L'índex d'anàlisi pels alumnes de 1r d'ESO en la fase 2 és més alt en el problema 2 i 3. Això vol dir que són els problemes on més alumnes han utilitzat l'heurística esperada. En el problema 4, algun alumne l'ha utilitzat. I en el problema 1, cap alumne l'ha utilitzat. Podem observar un augment de l'índex d'anàlisi en la fase 2 per a tots els problemes, sent l'augment major en el problema 3.

Podem observar que pocs alumnes de 1r ESO en la primera fase fan alguna resolució del problema 1 i aquests descriuen la resolució amb llenguatge numèric o amb llenguatge verbal. En la segona fase disminueix LL1 (cap descripció del problema) i augmenta l'ús del llenguatge verbal i del llenguatge numèric. En el problema 2 i 3, en les dues fases la majoria fa una resolució de tipus gràfica i els altres, s'expressen amb codificacions o llenguatge verbal. Pocs alumnes fan alguna resolució del problema 4 en la primera fase i s'expressen amb llenguatge verbal o amb llenguatge numèric.
En tots els problemes a la fase 2 disminueix LL1 (cap descripció del problema). Això vol dir que alumnes que no escriuen res a la fase 1, sí ho fan a la fase 2.

2n d'ESO: El problema més comprensible pels alumnes de 2n ESO a la fase 1 és el 2n problema, seguit del 3r. Els problemes amb menys comprensibilitat són el 1r i el 4t. Podem observar un augment de l'índex de comprensibilitat en la fase 2 per a tots els problemes, sent l'augment major en el problema 2.

El problema amb l'índex de facilitat més alt pels alumnes de 2n ESO a la fase 1 és el 2n problema. És l'únic problema que aquest grup d'alumnes l'ha resolt total o parcialment. Els altres problemes tenen índex de facilitat zero. Això vol dir que aquest grup d'alumnes no els han resolt en aquesta fase. El problema amb l'índex de facilitat més alt pels alumnes de 2n ESO a la fase 2 és el 2n problema. Els problemes 2 i 3 tenen un índex de facilitat baix. El problema 1 té índex de facilitat zero. Podem observar un augment de l'índex de facilitat en la fase 2 pels problemes 2, 3 i 4, sent l'augment major en el problema 2.

En la primera fase, els alumnes de 2n ESO, han utilitzat poc les heurístiques esperades, els índexs d'anàlisi són baixos. En el problema 1 cap alumne les ha utilitzat. L'índex d'anàlisi, pels alumnes de 2n ESO en la fase 2, és més alt en el problema 2. Això vol dir que és el problema on més alumnes han utilitzat l'heurística esperada. En els problemes 3 i 4, algun alumne ha utilitzat l'heurística esperada. I en el problema 1, cap alumne ha utilitzat l'heurística esperada. Podem observar un augment de l'índex d'anàlisi en la fase 2 per a tots els problemes, sent l'augment major en el problema 2.

Pel que fa al llenguatge utilitzat en l'expressió de les resolucions dels problemes, podem observar que els alumnes de 2n ESO en la primer fase, pocs fan alguna resolució el problema 1, i els que la fan, descriuen la resolució amb llenguatge verbal majoritàriament. En la segona fase, disminueix LL2 (llenguatge verbal) i augmenta LL4 (llenguatge numèric). En el problema 2, a la primera fase, la majoria fa una resolució de tipus gràfica i els altres, s'expressen amb codificacions o llenguatge verbal. En la segona fase, disminueix LL2 (llenguatge verbal) i LL3 (gràficament); i augmenta la LL4 (llenguatge numèric) i LL5 (altres codis). En el problema 3, en la primera fase, la resolució és majoritàriament també de tipus gràfic, seguida de l'expressió verbal. En la segona fase disminueix el llenguatge verbal i augmenta el gràfic. I en el problema 4, dels que el fan, la majoria s'expressa amb llenguatge verbal i la resta amb llenguatge numèric. En la segona fase augmenta el llenguatge verbal, gràfic i numèric. En tots els problemes a la fase 2 disminueix LL1 (cap descripció del problema). Això vol dir que alumnes que no escriuen res a la fase 1, sí ho fan a la fase 2.

3r d'ESO: El problema més comprensible pels alumnes de 3r d'ESO a la fase 1 és el 2n problema, seguit del 1r i 3r. El problema amb menys comprensibilitat és el 4t. El problema més comprensible pels alumnes de 3r d'ESO a la fase 2 és el 2n problema, seguit del 3r. Els problemes amb menys comprensibilitat són el 1r i el 4t problema. Podem observar un augment de l'índex de comprensibilitat en la fase 2 per als problemes 2 i 4, sent l'augment major en el problema 2. Pel problema 3, l'índex de comprensibilitat es manté a les dues fases. Pel problema 1, hi ha un petit descens. Creiem que aquest descens és degut que a la primera fase, els alumnes és van capficar en trobar la suma, directament o amb estratègies poc eficients. En la segona fase, van comprendre que s'havia de buscar una manera de fer la suma sense fer-la directament, van comprendre millor la finalitat del problema però no van trobar la manera de resoldre'l.

El problema amb l'índex de facilitat més alt pels alumnes de 3r d'ESO a la fase 1 és el 2n problema, seguit del 1r. Els problemes amb menys índex de facilitat són el 3r i el 4t. El problema amb l'índex de facilitat més alt pels alumnes de 3r d'ESO a la fase 2 és el 2n problema. Els problemes 1, 3 i 4 tenen menys índex de facilitat. Podem observar un augment de l'índex de facilitat en la fase 2 per als problemes 2 i 4, sent l'augment major en el problema 2. Pel problema 3, l'índex de comprensibilitat es manté a les dues fases. Pel problema 1, hi ha un petit descens. Creiem que aquest descens és degut que a la primera fase, els alumnes és van capficar en trobar la suma, directament o estratègies poc eficients, però van resoldre algun apartat. En la segona fase, van comprendre que s'havia de buscar una manera de fer la suma, sense fer-la directament, i com no van trobar la manera, van deixar en blanc el problema.

En la primera fase, els alumnes de 3r ESO, han utilitzat poc les heurístiques esperades. Al problema 2 és on més les han utilitzat. L'índex d'anàlisi pels alumnes de 3r d'ESO en la fase 2 és més alt en el problema 2. Això vol dir que és el problema on més alumnes han utilitzat l'heurística esperada. El segueixen el problema 4, 1 i finalment el problema 3, on han utilitzat poc les heurístiques esperades. Podem observar un augment de l'índex d'anàlisi en la fase 2 per a tots els problemes, sent l'augment major en el problema 2.

Pel que fa al llenguatge utilitzat en l'expressió de les resolucions dels problemes, podem observar que en el problema 1 dels que fan alguna resolució del problema, s'expressen amb llenguatge o amb llenguatge numèric. En la segona fase augmenta LL1 (cap resolució) i LL4 (llenguatge numèric) i disminueix LL2 (llenguatge verbal). El problema 2, majoritàriament expressen la resolució gràficament, seguit d'expressió verbal i numèrica. El problema 3, el resolen la majoria gràficament. En problema 4, o no el resolen o si ho fan s'expressen amb llenguatge verbal o llenguatge numèric. En la segona fase disminueix llenguatge verbal i augmenta llenguatge numèric. En els problemes 2, 3 i 4 a la fase 2 disminueix LL1 (cap descripció del problema). Això vol dir que alumnes que no escriuen res a la fase 1, sí ho fan a la fase 2.

ESTALMAT: El problema més comprensible pels alumnes d'ESTALMAT a la fase 1 és el 2n problema, seguit del 1r. En aquests problemes, hi ha més alumnes que entenen els seus enunciats i més alumnes que diuen que els han resolt i efectivament és així, total o parcialment. El problema amb menys comprensibilitat és el 3r, seguit del 4t. El problema més comprensible pels alumnes d'ESTALMAT a la fase 2 és el 1r problema, seguit del 2r i 4t. El problema amb menys comprensibilitat és el 3r. Podem observar un augment de l'índex de comprensibilitat en la fase 2 per a tots els problemes, sent l'augment major en els problemes 1 i 4.

El problema amb l'índex de facilitat més alt pels alumnes d'ESTALMAT a la fase 1 és el 2n problema, seguit del problema 1. En aquests problemes, més alumnes els han resolt total o parcialment. El problemes amb menys índex de facilitat són el 3 i el 4. El problema amb l'índex de facilitat més alt pels alumnes d'ESTALMAT a la fase 2 és el 1r problema, seguit dels problemes 2n i 4t. El problema amb menys índex de facilitat és el 3r. Podem observar un augment de l'índex de facilitat en la fase 2 pels problemes 1, 2 i 4, sent l'augment major en els problemes 1 i 4. No hi ha augment en el problema 3.

Els alumnes d'ESTALMAT, en la fase 1, han obtingut un índex d'anàlisi més alt en el problema 2, per tant, vol dir que utilitzen l'heurística estudi de tots els casos per resoldre el problema. Després el segueixen el problema 4 amb fer el problema a la inversa i el problema 1 amb simetria numèrica. El problema 3 té índex d'anàlisi zero, on cap alumne utilitza l'heurística de la simetria geomètrica. En la fase 2, han obtingut un índex d'anàlisi més alt en el problema 1, per tant, vol dir que utilitzen l'heurística de la simetria numèrica per resoldre el problema. Després el segueixen els problemes 2 i 4. El problema amb l'índex d'anàlisi més baix és el problema 3 on menys alumnes utilitzen l'heurística de la simetria geomètrica. Podem observar un augment de l'índex d'anàlisi en la fase 2 per a tots el problemes, sent l'augment major en els problemes 1 i 4.

Pel que fa al llenguatge utilitzat en l'expressió de les resolucions dels problemes, podem observar que en el problema 1 els alumnes d'ESTALMAT, en la primera fase, la majoria s'expressa amb llenguatge numèric. En la segona fase augmenta el llenguatge numèric. En problema 2, tant en la fase 1 com en la 2, dels que el resolen, majoritàriament expressen gràficament. En la segona fase augmenta el llenguatge verbal i altres codis. En el problema 3, el resolen la majoria gràficament. En el problema 4, s'expressen majoritàriament amb llenguatge numèric. En la segona fase, disminueix el llenguatge verbal i augmenta el llenguatge numèric. En tots els problemes en la fase 2 disminueix LL1 (cap expressió), és a dir, que en la segona fase hi ha més alumnes que resolen els problemes, independentment que la resposta sigui o no correcta.

Mostra total**:** El problema amb l'índex de comprensibilitat més alt per la mostra total d'alumnes tant a la fase 1 com a la fase 2 és el 2n problema, seguit del 3r i el 1r. El problema amb menys comprensibilitat és el 4t. En tots els problemes augmenta la comprensibilitat en la segona fase. L'augment més significatiu es dóna en el problema 2. En els problemes 3 i 4 també hi ha augments, mentre que en el problema 1, l'augment és menys significatiu.

El problema amb l'índex de facilitat més alt per la mostra total dels alumnes tant a la fase 1 com a la 2 és el 2n problema. En tots els problemes augmenta la facilitat en la segona fase, sent l'augment major en el problema 2, seguit dels problemes 4 i 3.

Els alumnes tant en la fase 1 com en la fase 2, han obtingut un índex d'anàlisi més alt en el problema 2, per tant, vol dir que utilitzen l'heurística estudi de tots els casos per resoldre el problema. Després el segueixen el problema 1 amb simetria numèrica, el problema 4 amb resoldre a la inversa i finalment el problema 3, on menys alumnes utilitzen l'heurística de la simetria geomètrica. En tots els problemes augmenta índex d'anàlisi de les estratègies heurístiques en la segona fase, sent l'augment major en el problema 2, seguit dels problemes 4 i 1. Si considerem com a millora global de les estratègies heurístiques la suma de les millores de les estratègies heurístiques de cada problema obtenim que a ESTALMAT la millora és més gran. Segueixen les millores a 2n i 3r d'ESO i finalment de 1r d'ESO.

Pel que fa al llenguatge utilitzat en l'expressió de les resolucions dels problemes, podem observar que en el problema 1, dels que el fan, la majoria s'expressa amb llenguatge numèric. En el problema 2 expressen la resolució gràficament majoritàriament, o amb llenguatge verbal. En la segona fase augmenta el llenguatge verbal i altres codis. En el problema 3, el resolen la majoria gràficament. El problema 4 s'expressa majoritàriament amb llenguatge numèric o llenguatge verbal. En la segona fase disminueix el llenguatge verbal i augmenta el llenguatge numèric. Per la mostra total d'alumnes, en tots els problemes en la fase 2 disminueix LL1 (cap expressió), és a dir, que en la segona fase hi ha més alumnes que resolen els problemes, independentment que la resposta sigui o no correcta. Observem que les proporcions de cada resposta en cada problema són similars en les dues fases. El tipus d'expressió majoritària per resoldre els problemes es manté per tot el grup d'alumnes en tots els problemes en la segona fase. Per tant, el tipus d'expressió majoritària depèn del problema.

Tanmateix, hi ha una clara millora en el següent sentit: al passar a la fase 2 disminueix en tots els problemes l'ús del LL1 i LL2 (que són cap llenguatge i llenguatge verbal) mentre que augmenten els LL3 i LL4 (que són llenguatge gràfic i llenguatge numèric).

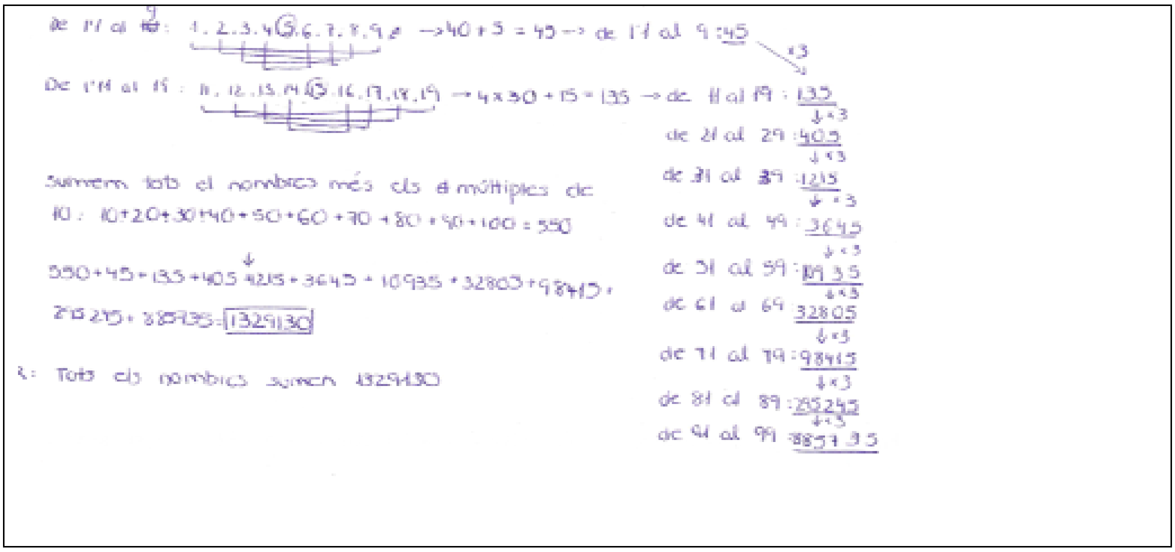
5.4- Millores de les resolucions dels problemes

5.4.1- Exemples de millores de les resolucions dels problemes

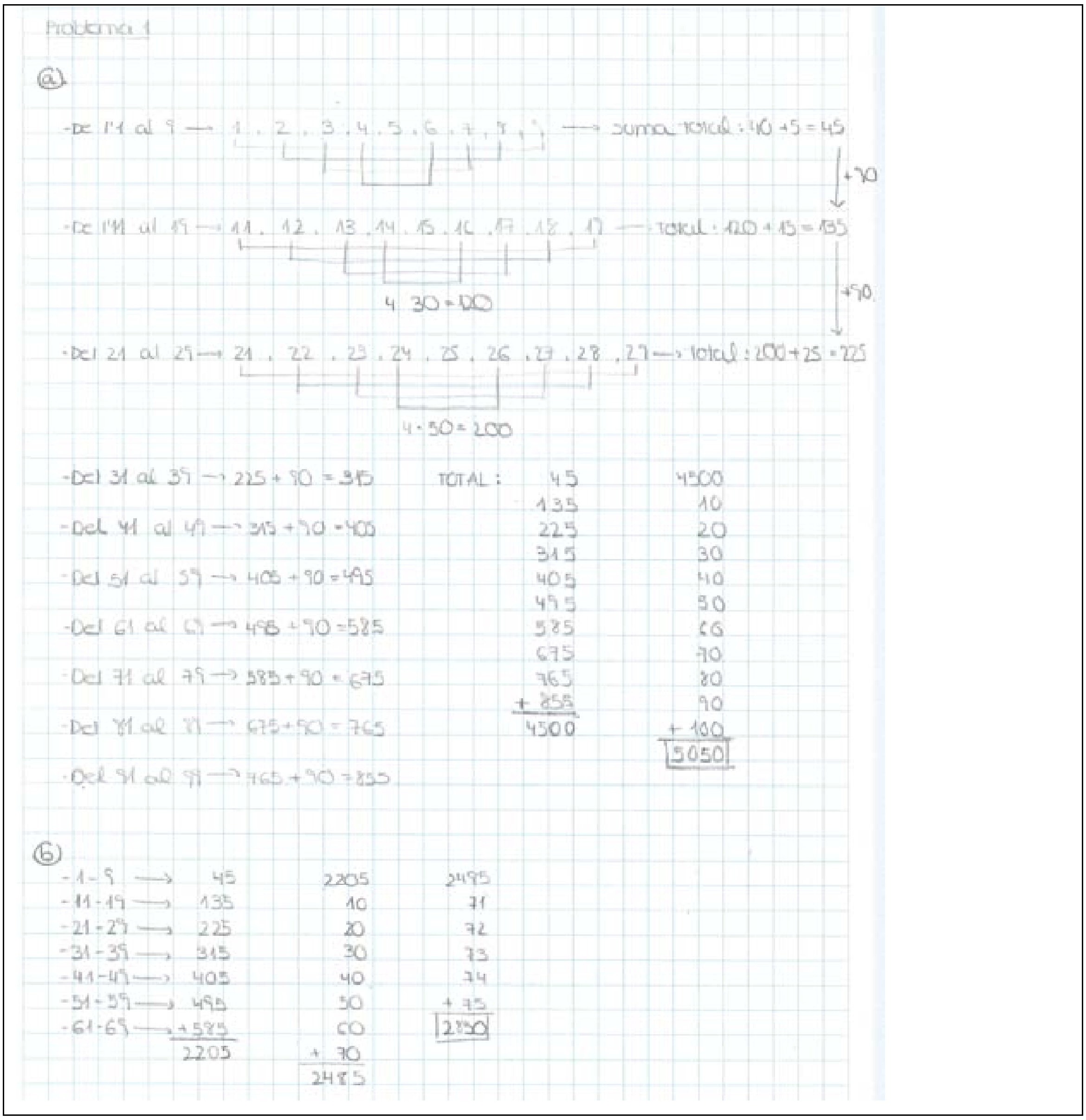
L'estudi anterior, de l'apartat 5.4, té un caràcter quantitatiu i hem pogut obtenir resultats que mostren millores en les resolucions dels problemes que els alumnes fan després de treballar els jocs; però amb la quantificació de les dades no hem vist el que realment fan els alumnes. Per poder conèixer millor el que fan, en aquest apartat fem un estudi qualitatiu, a partir d'un estudi de casos. Veurem alguns exemples de resolucions per cada problema on es poden apreciar millores qualitatives que fan els alumnes després de treballar els jocs. Els problemes 1, 2 i 4 són més rics des d'aquest punt de vista; en canvi, a l'estudiar les dades qualitativament ens adonem que el problema 3, o el fan bé o no, per tant, les millores són més quantitatives. Per aquest motiu, hem trobat més exemples dels problemes 1, 2 i 4. Seguidament veurem: quatre exemples pel problema 1, quatre pel problema 2, un pel problema 3 i quatre exemples pel problema 4. En tots ells observem que a la fase 2, després de treballar els jocs, les resolucions són més completes en alguns casos o, fins hi tot, sent incorrectes o inexistents a la fase 1 passen a ser resolucions correctes a la fase 2.

Problema 1: a) Suma els nombres de l'1 al 100.
b) Pots aplicar el que has fet a l'apartat anterior per sumar els nombres de 1 al 75? Fes-ho i explica les diferències.

-L'alumne 4 d'ESTALMAT, al problema 1: a la fase 1 utilitza l'estratègia de simetria numèrica parcialment i no obté la solució correcta, a la segona fase utilitza l'estratègia de simetria numèrica correctament i arriba a la solució del problema.



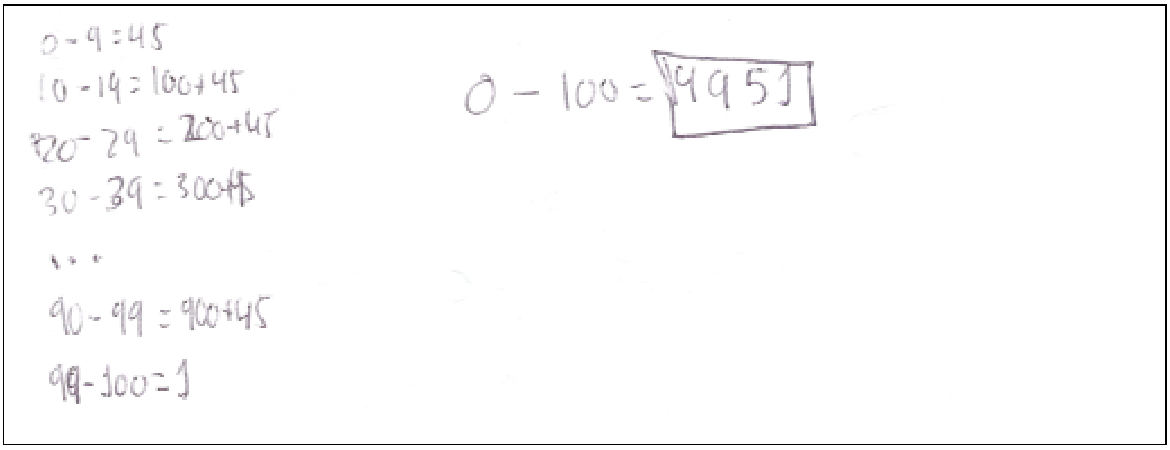
Imatge 5.4.1: Alumne 4, ESTALMAT, problema 1, fase 1



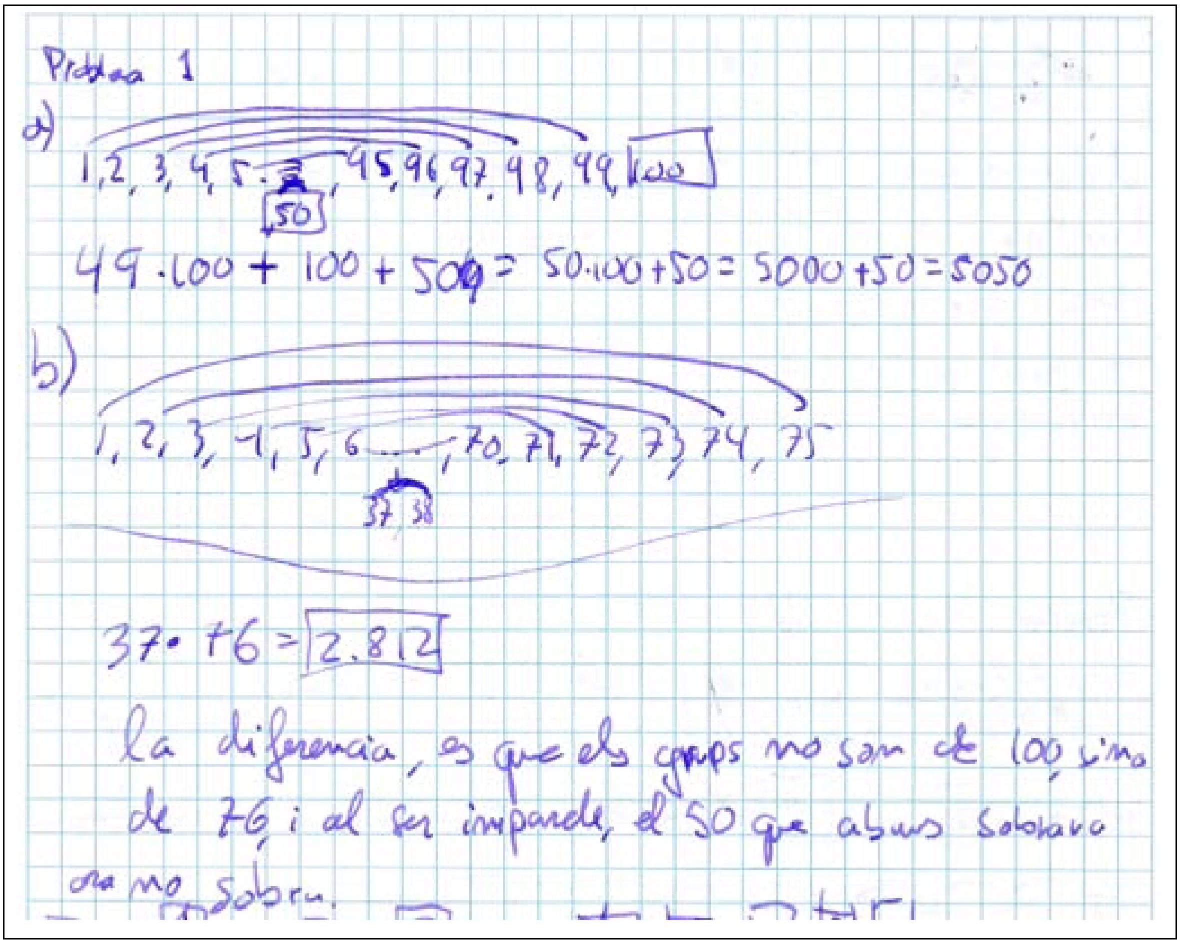
Imatge 5.4.2: Alumne 4, ESTALMAT, problema 1, fase 2

Aquest alumne, en l'enquesta per conèixer la seva opinió sobre si els jocs l'havien ajudat, ha respost: *M'ha ajudat el joc del 15.*

-L'alumne 9 d'ESTALMAT, al problema 1: a la fase 1 fa sumes parcials i no arriba a la solució correcta, a la fase 2 utilitza l'estratègia esperada, simetria numèrica, i arriba a la solució.



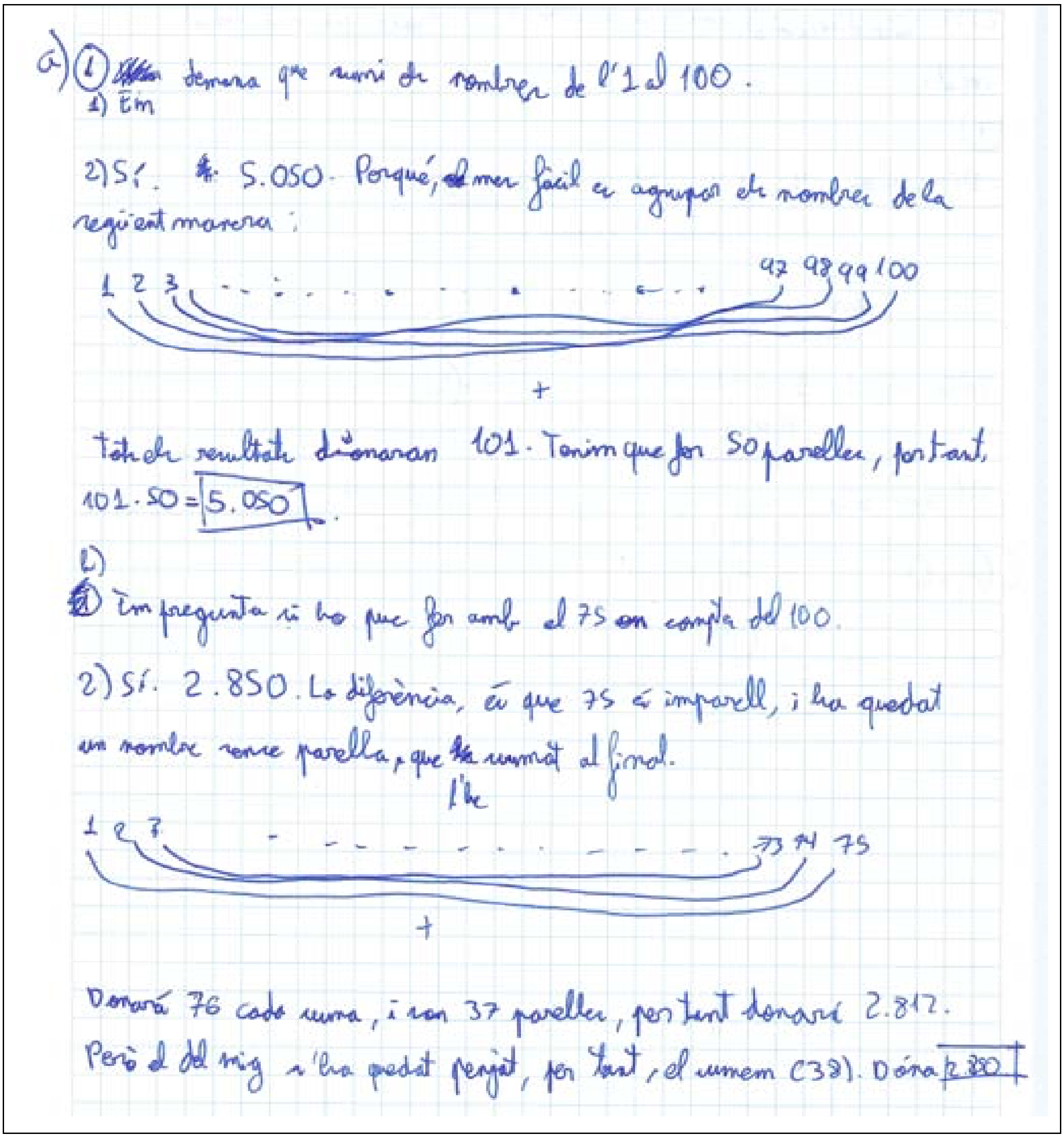
Imatge 5.4.3: Alumne 9, ESTALMAT, problema 1, fase 2



Imatge 5.4.4: Alumne 9, ESTALMAT, problema 1, fase 2

Aquest alumne, en l'enquesta per conèixer la seva opinió sobre si els jocs l'havien ajudat, ha respost: *M'ha ajudat el joc del 15.*

-L'alumne 22 d'ESTALMAT, al problema 1: a la fase 1 no fa cap resolució del problema, a la fase 2 el resol correctament.


a) 1) Em demana que sumi els nombres de l'1 al 100.

2) Sí. 5.050. Perquè, el més fàcil es agrupar els nombres de la següent manera:

1 2 3 . . . . 97 98 99 100

+

Tots els resultats donaran 101. Tenim que fer 50 parelles, per tant,
$101 \cdot 50 = \boxed{5.050}$.

b)
1) Em pregunta si ho puc fer amb el 75 en compte del 100.

2) Sí. 2.850. La diferència, és que 75 és imparell, i ha quedat un nombre sense parella, que l'he sumat al final.

1 2 3 . . . . 73 74 75

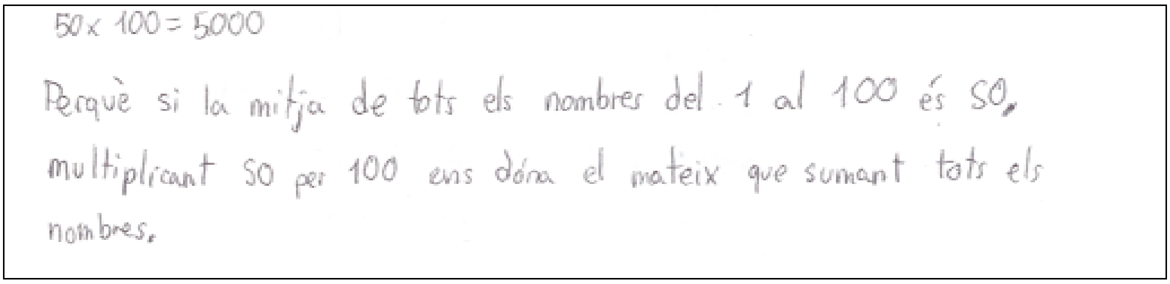
+

Donarà 76 cada suma, i són 37 parelles, per tant donarà 2.812.
Però el del mig s'ha quedat penjat, per tant, el sumem (38). Dóna $\boxed{2.850}$

Imatge 5.4.5: Alumne 22, ESTALMAT, problema 1, fase 2

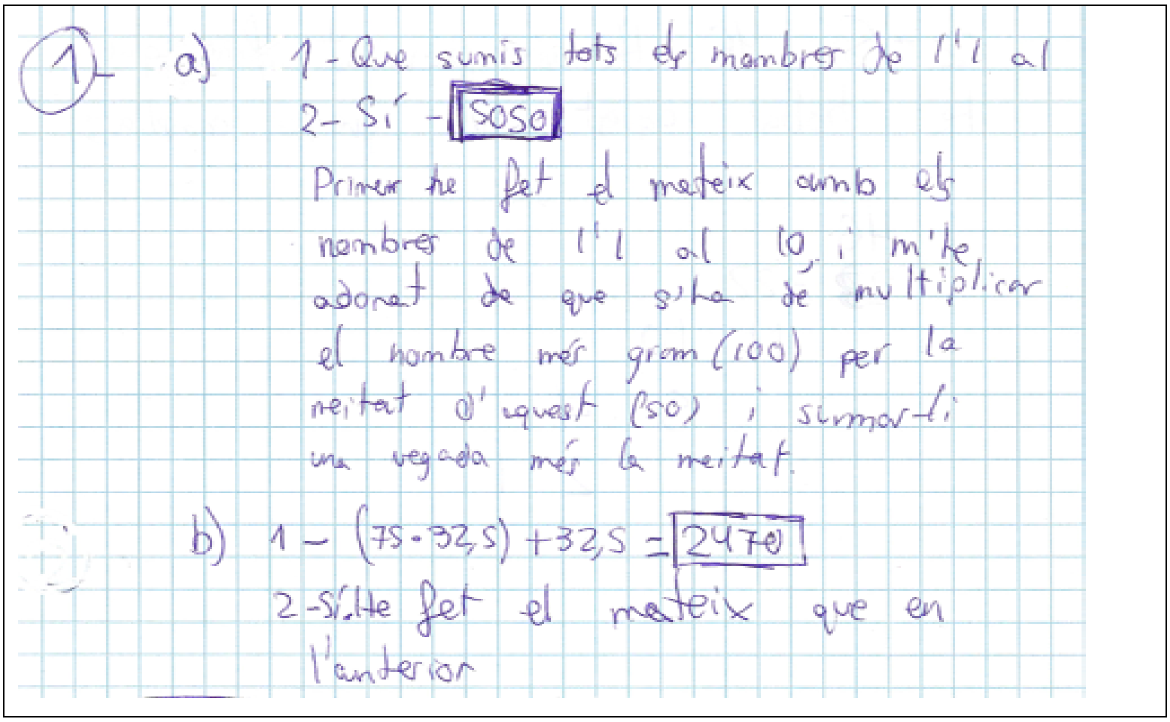
Aquest alumne, en l'enquesta per conèixer la seva opinió sobre si els jocs l'havien ajudat, ha respost: *No sé si m'han ajudat els jocs.*

-L’alumne 24 d’ESTALMAT, al problema 1: a la fase 1 fa un raonament incorrecte i a la fase 2 utilitza l’estratègia esperada, simetria numèrica i arriba a la solució del primer apartat.


50 × 100 = 5000

Perquè si la mitja de tots els nombres del 1 al 100 és 50, multiplicant 50 per 100 ens dóna el mateix que sumant tots els nombres.

Imatge 5.4.6: Alumne 24, ESTALMAT, problema 1, fase 1


1) a) 1- Que sumis tots els nombres de l'1 al

2- Sí - 5050

Primer he fet el mateix amb els nombres de l'1 al 10, i m'he adonat de que s'ha de multiplicar el nombre més gran (100) per la meitat d'aquest (50) i sumar-li una vegada més la meitat.

b) 1 - (75 · 32,5) + 32,5 = 2470

2- Sí. He fet el mateix que en l'anterior

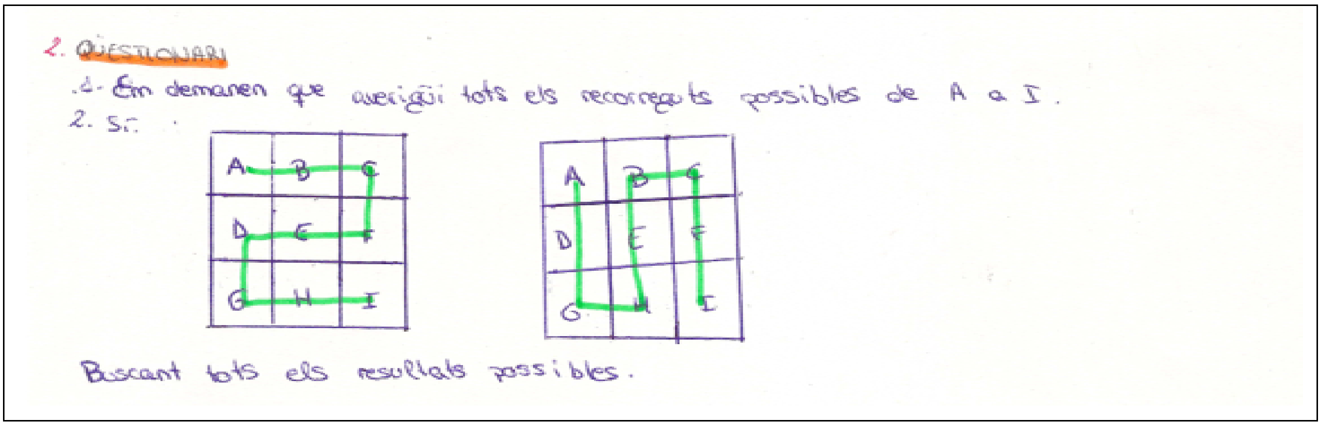
Imatge 5.4.7: Alumne 24, ESTALMAT, problema 1, fase 2

Aquest alumne, en l’enquesta per conèixer la seva opinió sobre si els jocs l’havien ajudat, ha respost: *Crec que m’han ajudat els jocs en general*.

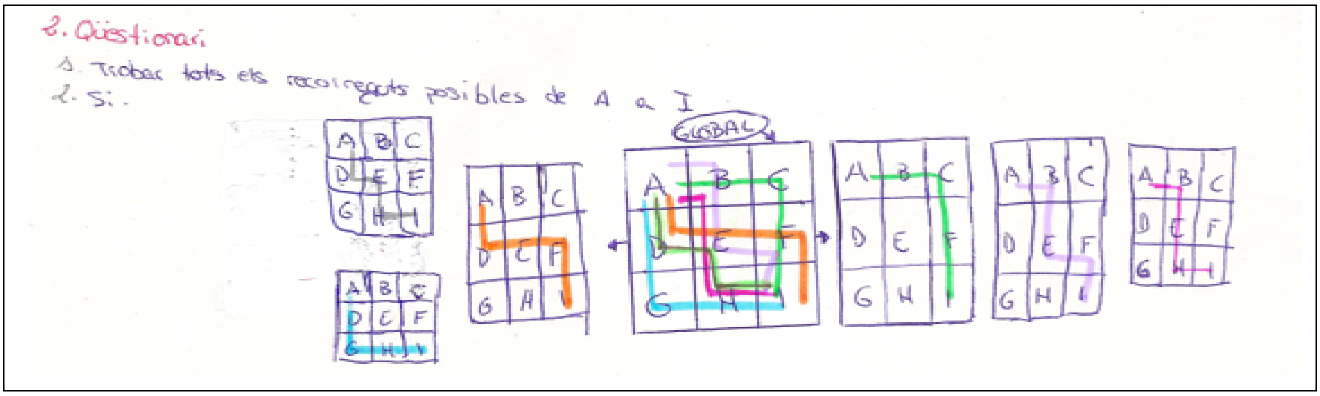
Problema 2: Si només podem anar a la dreta i a baix, quants recorreguts diferents hi ha per anar de A a I sense passar dues vegades pel mateix lloc?

A	B	C
D	E	F
G	H	I

-L'alumne 2 de 3r ESO, al problema 2: a la fase 1 no entén l'enunciat, a la segona fase sí que entén l'enunciat i el resol correctament.



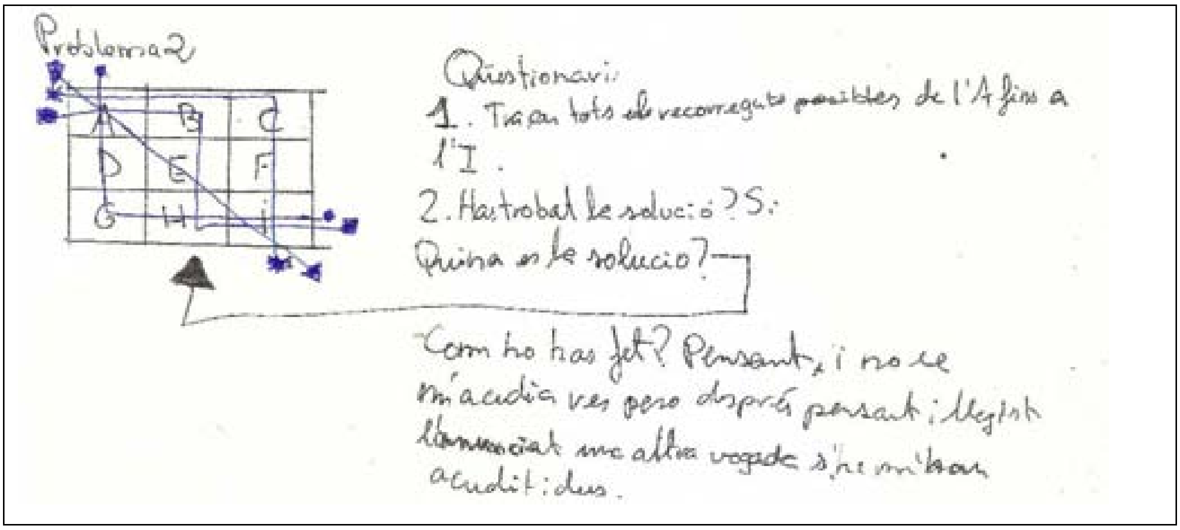
Imatge 5.4.8: Alumne 2, 3r ESO, problema 2, fase 1



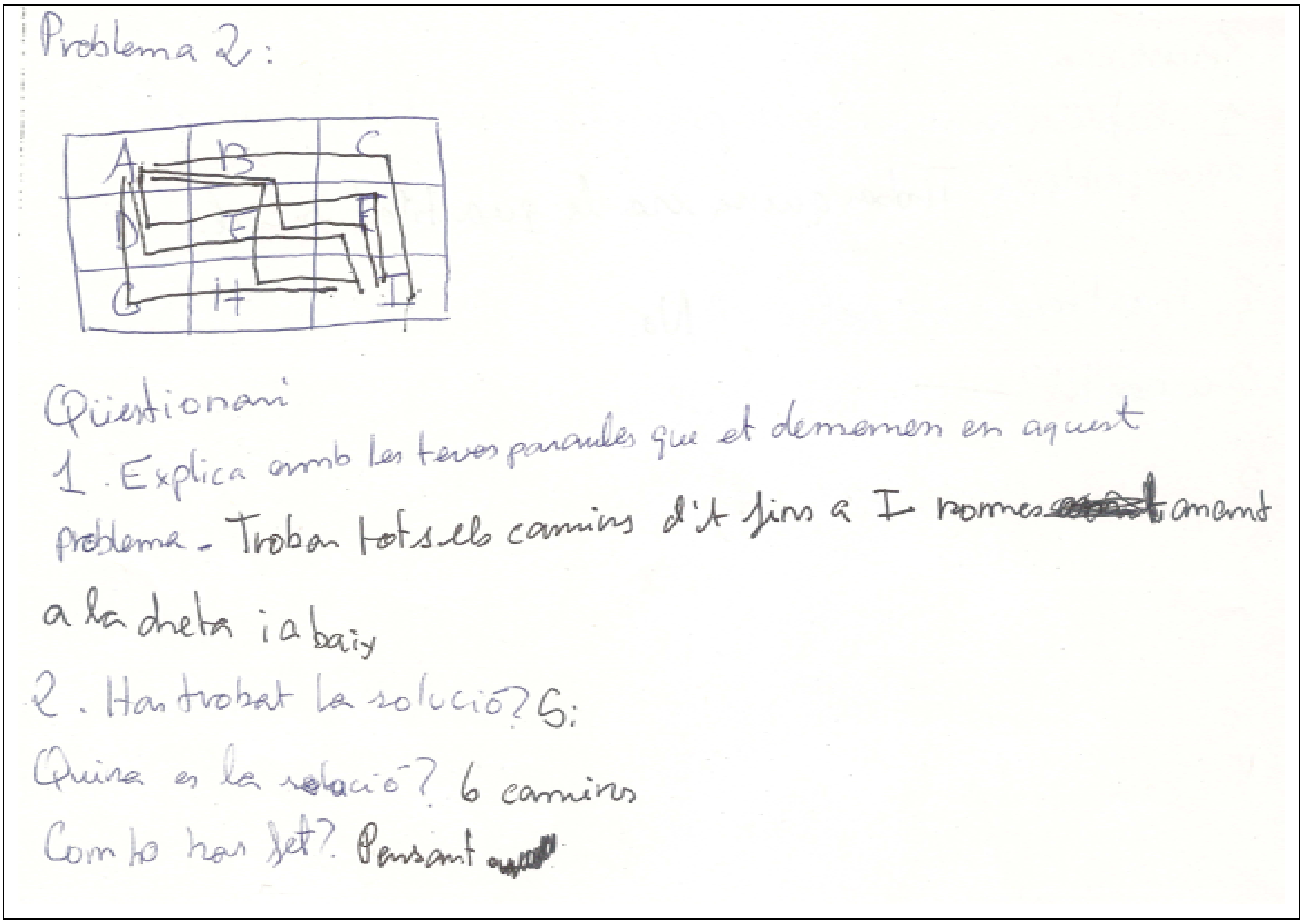
Imatge 5.4.9: Alumne 2, 3r ESO, problema 2, fase 2

Aquest alumne, en l'enquesta per conèixer la seva opinió sobre si els jocs l'havien ajudat, ha respost: *La segona vegada vaig llegir millor l'enunciat. No sé si m'han ajudat.*

-L’alumne 1 de 1r d’ESO, el problema 2: a la fase 1 no el resol correctament i a la segona fase sí.

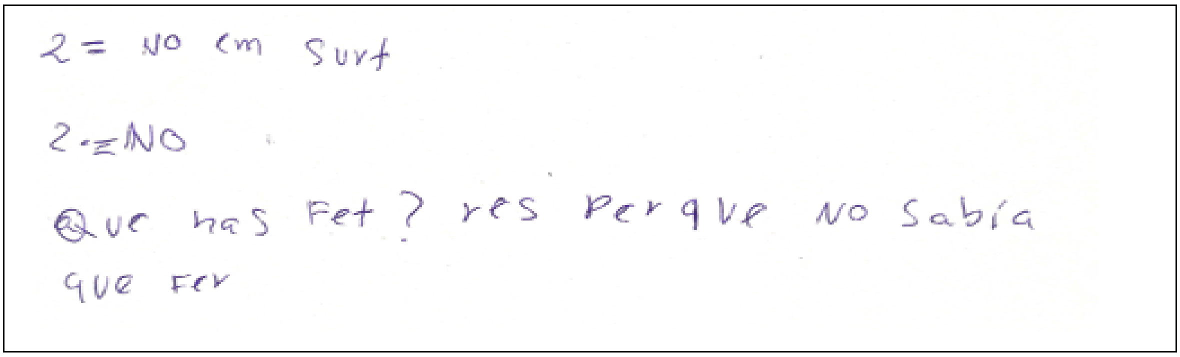


Imatge 5.4.10: Alumne 1, 1r ESO, problema 2, fase 1



Imatge5.4.11: Alumne 1, 1r d’ESO, problema 2, fase 2

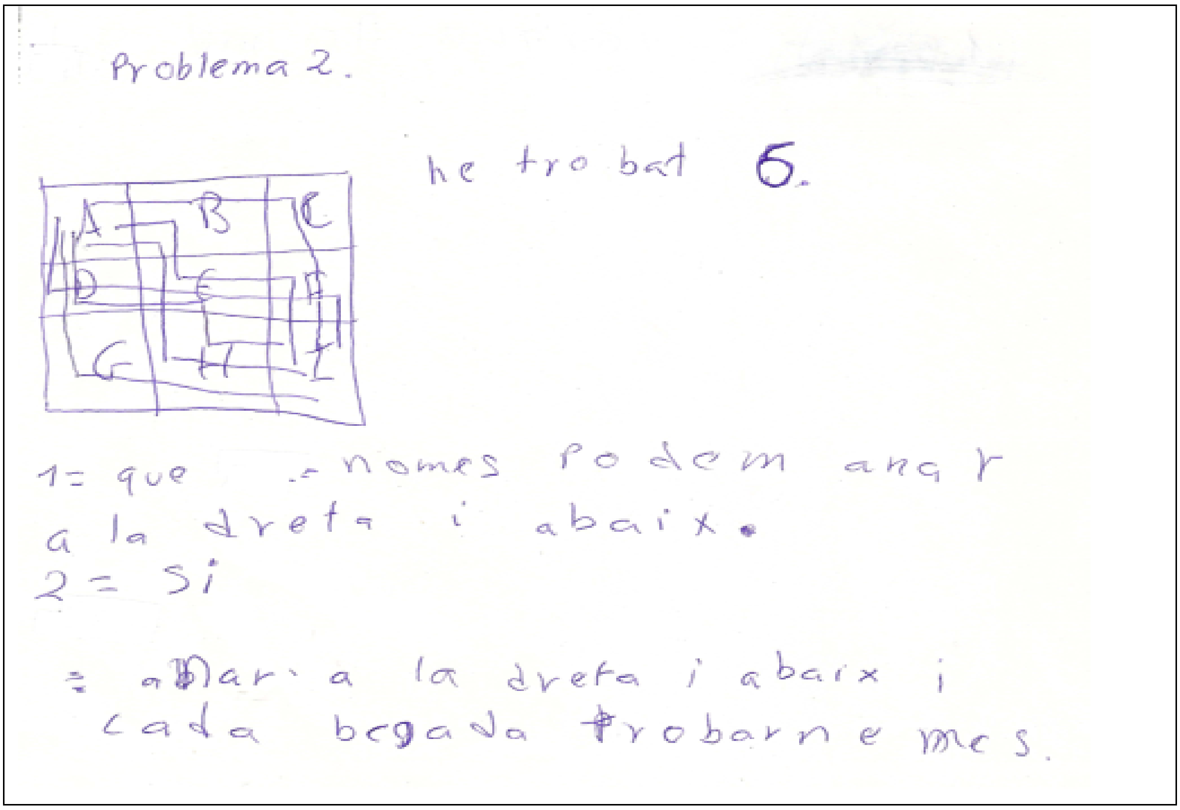
-L'alumne 3 de 1r d'ESO, el problema 2: a la fase 1 no sap abordar-lo i a la segona fase sí i el resol correctament.


2= NO em surt

2-= NO

Que has fet? res perque no sabía que fer

Imatge 5.4.12: Alumne 3, 1r d'ESO, problema 2, fase 1


Problema 2.

he trobat 6.

1= que nomes podem anar a la dreta i abaix.

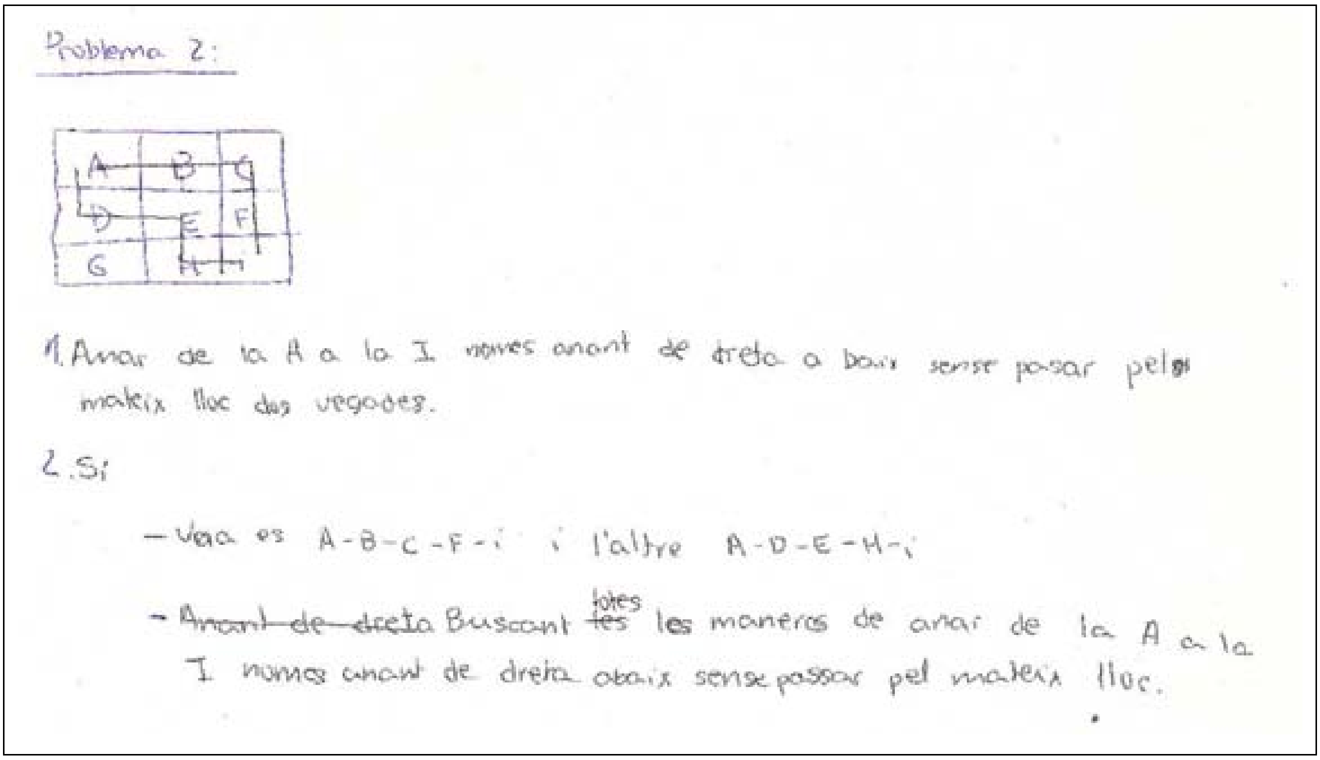
2= si

= anar a la dreta i abaix i cada begada trobarne mes.

Imatge 5.4.13: Alumne 3, 1r d'ESO, problema 2, fase 2

Aquest alumne, en l'enquesta per conèixer la seva opinió sobre si els jocs l'havien ajudat, ha respost: *Vaig llegir millor l'enunciat. Crec que m'han ajudat els jocs en general.*

-L'alumne 4 de 2n d'ESO, el problema 2: a la fase 1 no el resol correctament i a la segona fase sí.


Problema 2:

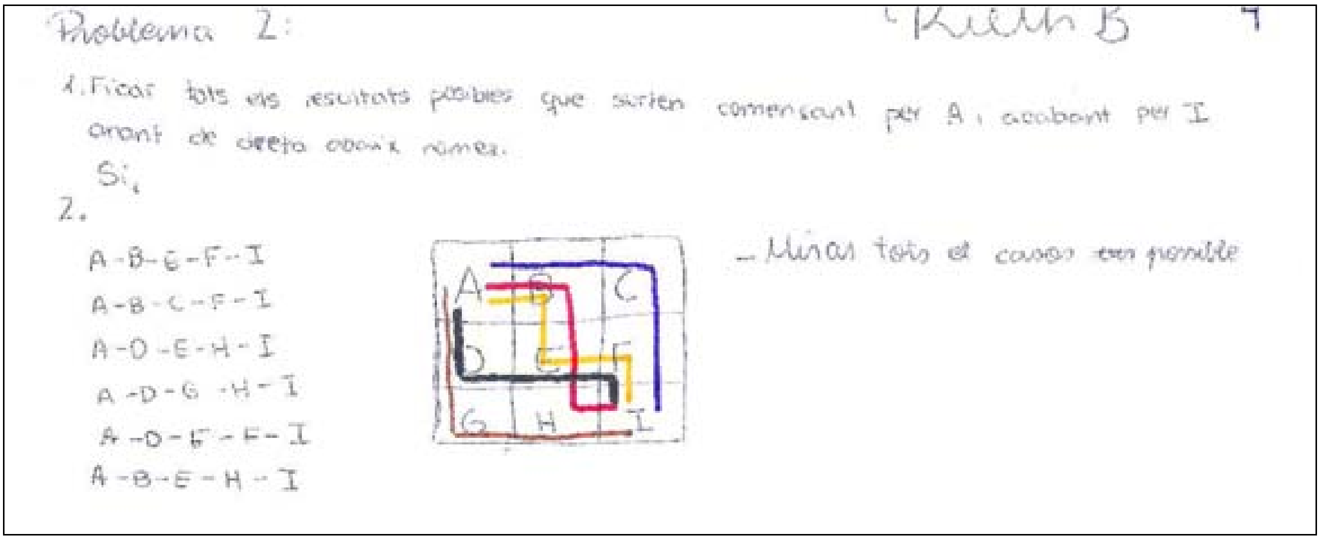
1. Anar de la A a la I nomes anant de dreta a baix sense pasar pel mateix lloc dos vegades.

2. Si

– Una es A-B-C-F-I i l'altre A-D-E-H-I

– ~~Anant de dreta~~ Buscant ~~tes~~ totes les maneres de anar de la A a la I nomes anant de dreta abaix sense passar pel mateix lloc.

Imatge 5.4.14: Alumne 4, 2n d'ESO, problema 2, fase 1


Problema 2:

1. Ficar tots els resultats posibles que serien començant per A i acabant per I anant de dreta abaix nomes.

Si

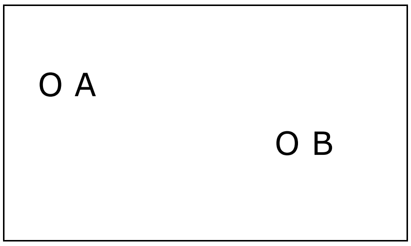
2.

A-B-E-F-I
A-B-C-F-I
A-D-E-H-I
A-D-G-H-I
A-D-E-F-I
A-B-E-H-I

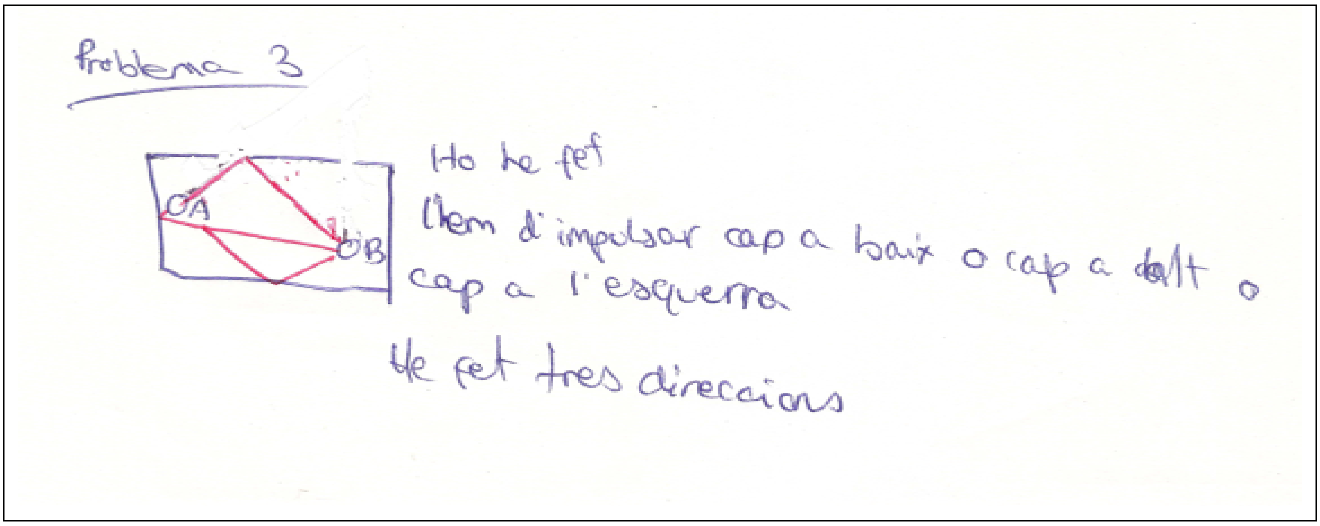
– Miras tots el casos posible

Imatge 5.4.15: Alumne 4, 2r d'ESO, problema 2, fase 2

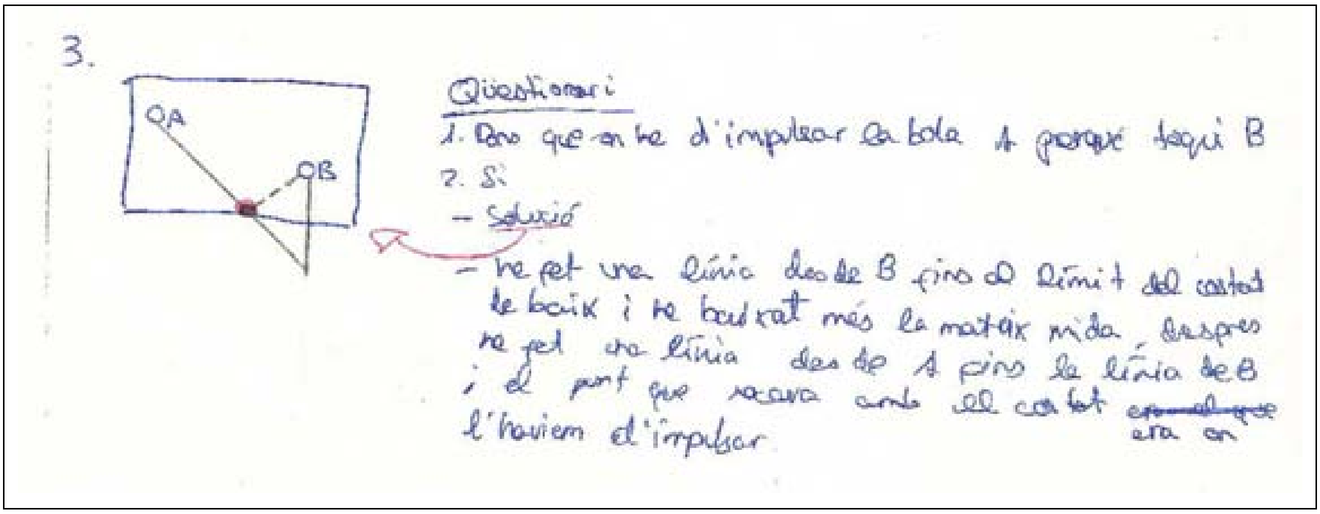
Problema 3: En quina direcció hem d'impulsar la bola A perquè toqui al costat i després toqui la bola B?



-L'alumne 4 de 1r d'ESO, el problema 3: a la fase 1 no el resol correctament i a la segona fase sí.



Imatge 5.4.16: Alumne 4, 1r d'ESO, problema 3, fase 1

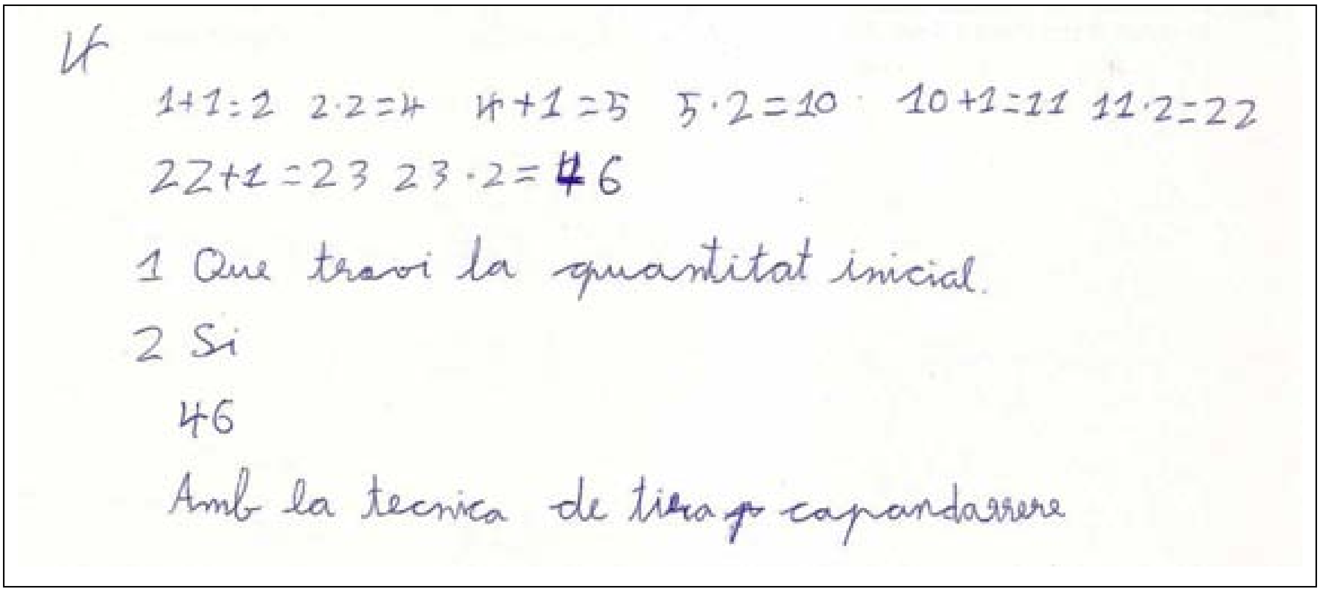


Imatge 5.4.17: Alumne 4, 1r d'ESO, problema 3, fase 2

Aquest alumne, en l'enquesta per conèixer la seva opinió sobre si els jocs l'havien ajudat, ha respost: *Vam treballar un problema semblant a classe de matemàtiques.*

Problema 4: D'una quantitat en traiem la meitat més un, del que queda en traiem la meitat més un, del que queda em traiem la meitat més un, del que queda, novament, traiem la meitat més 1 i en queda 1. Quina és la quantitat inicial?

-L'alumne 26 de 1r d'ESO, el problema 4: a la fase 1 no sap abordar-lo i a la segona fase sí.


4

1+1=2 2·2=4 4+1=5 5·2=10 10+1=11 11·2=22

22+1=23 23·2=46

1 Que trovi la quantitat inicial.

2 Si

46

Amb la tecnica de tira po capandarrere

Imatge 5.4.18: Alumne 26, 1r d'ESO, problema 4, fase 2

Aquest alumne, en l'enquesta per conèixer la seva opinió sobre si els jocs l'havien ajudat, ha respost*: M'han ajudat els jocs perquè m'han donat la idea de començar pel final.*

-L'alumne 8 de 2n, al problema 4: a la fase 1, dóna una quantitat inicial incorrecta i a la segona fase el resol correctament utilitzant l'heurística de començar pel final.

4 -

1- tens que buscar un numero que fent operacions et dona 1

2- Si

Resp Si   la solucio es -14

Imatge 5.4.19: Alumne 8, 3r d'ESO, problema 4, fase 1

$x-(\frac{x}{2}+1)=y \quad y-(\frac{y}{2}+1)=z \quad z-(\frac{z}{2}+1)=a \quad a-(\frac{a}{2}+1)=1$

a = 4   La solucció es 46

Es comença pel final hi vas trobant els nombres corresponents.

Sempre el nombre següent es el doble d'aquest + 2.

z = 10

y = 22

x = 46

Imatge 5.4.20: Alumne 8, 3r d' ESO, problema 4, fase 2

Aquest alumne, en l'enquesta per conèixer la seva opinió sobre si els jocs l'havien ajudat, ha respost*: M'han ajudat els jocs perquè m'han donat la idea de començar pel final.*

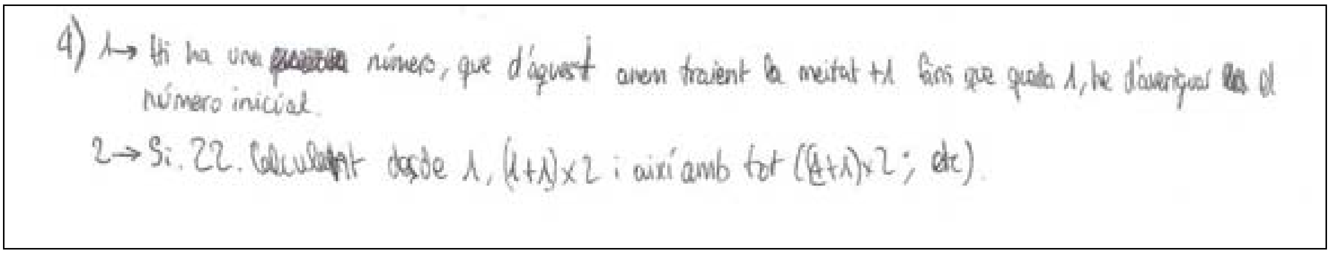
-L'alumne 24 de 2n d'ESO, al problema 4: a la fase 1 dóna una quantitat inicial, i a la segona fase utilitza l'heurística esperada començar el problema pel final; però el fa incomplet, li faltaria fer un pas més per obtenir la solució correcta.

Problema 4

1. Dir la quantitat del principi.

2. Si. 42. Calculant-ho

Imatge 5.4.21: Alumne 24, 2n ESO, problema 4, fase 1

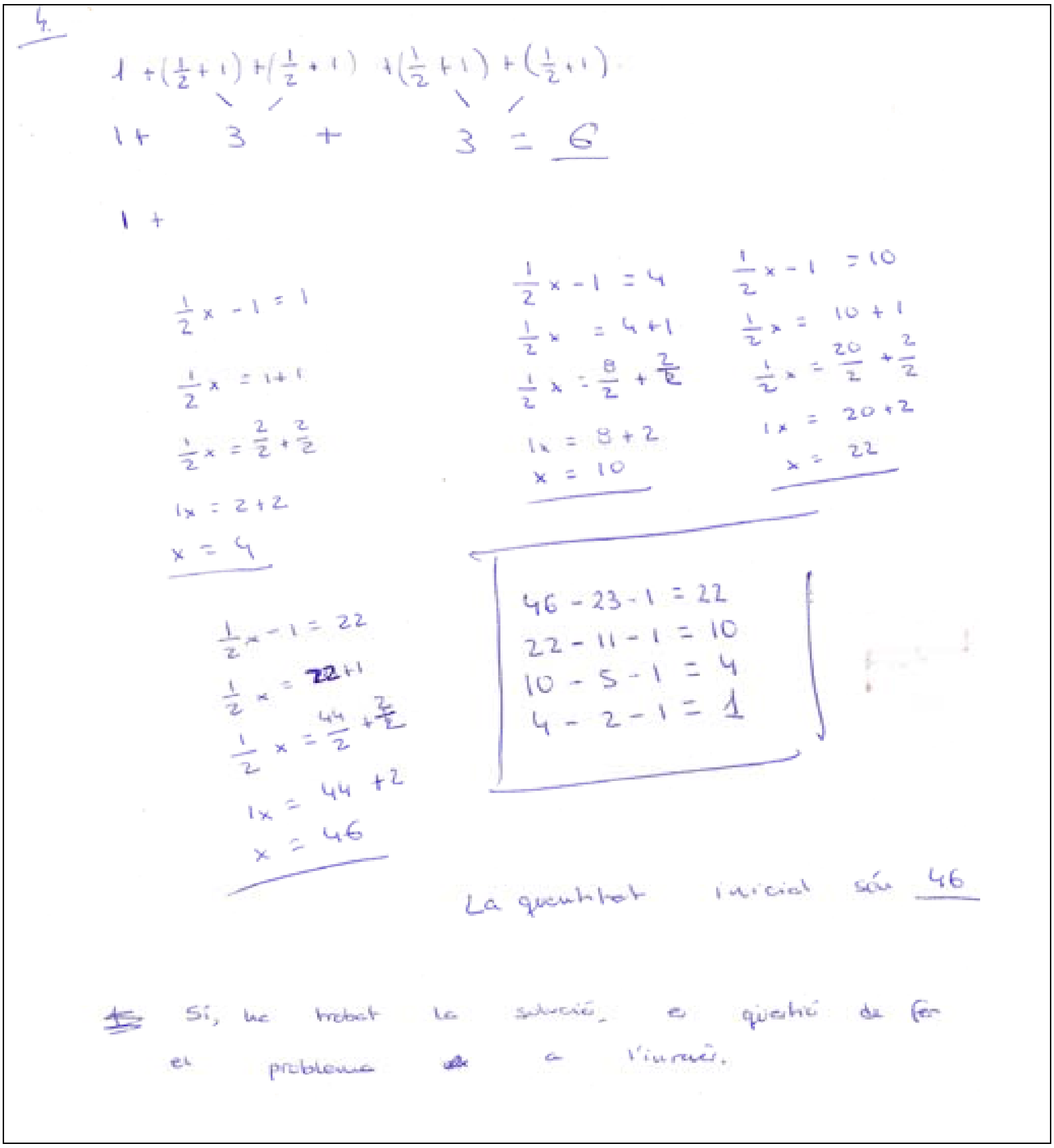


4) 1→ Hi ha un número, que d'aquest anem traient la meitat +1 fins que queda 1, he d'averiguar el número inicial.

2→ Sí. 22. Calculant des de 1, (1+1)x2 i així amb tot ((1+1)x2; etc)

Imatge 5.4.22: Alumne 24, 2n ESO, problema 4, fase 2

-L'alumne 2 de 2n d'ESO, el problema 4: a la fase 1, no sap abordar-lo (i ho deixa en blanc) i a la segona fase sí, i ho fa començant el problema pel final.



4.

$1+\left(\frac{1}{2}+1\right)+\left(\frac{1}{2}+1\right)+\left(\frac{1}{2}+1\right)+\left(\frac{1}{2}+1\right)$

$1+3+3=6$

1 +

$\frac{1}{2}x-1=1$; $\frac{1}{2}x=1+1$; $\frac{1}{2}x=\frac{2}{2}+\frac{2}{2}$; $1x=2+2$; $x=4$

$\frac{1}{2}x-1=4$; $\frac{1}{2}x=4+1$; $\frac{1}{2}x=\frac{8}{2}+\frac{2}{2}$; $1x=8+2$; $x=10$

$\frac{1}{2}x-1=10$; $\frac{1}{2}x=10+1$; $\frac{1}{2}x=\frac{20}{2}+\frac{2}{2}$; $1x=20+2$; $x=22$

$\frac{1}{2}x-1=22$; $\frac{1}{2}x=22+1$; $\frac{1}{2}x=\frac{44}{2}+\frac{2}{2}$; $1x=44+2$; $x=46$

$46-23-1=22$

$22-11-1=10$

$10-5-1=4$

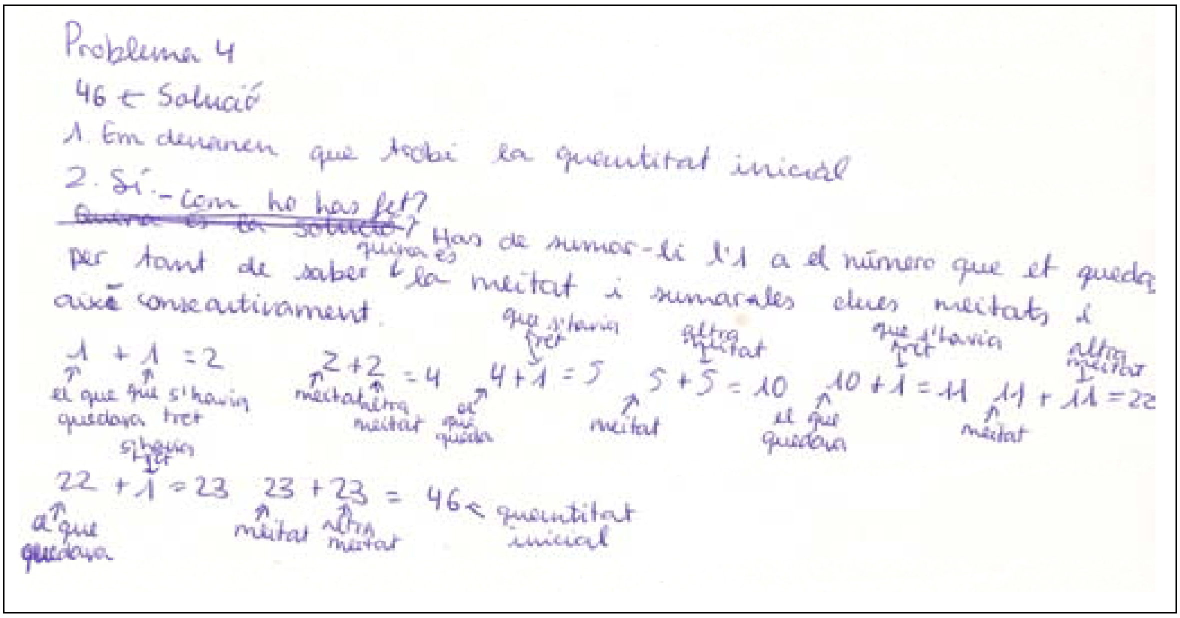
$4-2-1=1$

La quantitat inicial són 46

Sí, he trobat la solució, a què he de fer el problema a l'inrevés.

Imatge 5.4.23: Alumne 2, 2n ESO, problema 4, fase 2

-Alumne 21 de 3r d'ESO, el problema 4: a la fase 1 no sap abordar-lo (i ho deixa en blanc) i a la segona fase sí, i ho fa començant el problema pel final.


Problema 4
46 ← Solució
1. Em demanen que trobi la quantitat inicial
2. Sí. - Com ho has fet?
~~Quina és la solució~~?
Has de sumar-li l'1 a el número que et queda per tant de saber quina és la meitat i sumar-les dues meitats i així consecutivament.

1 + 1 = 2 (el que que s'havia quedava tret), 2 + 2 = 4 (meitat, altra meitat), 4 + 1 = 5 (el que queda, que s'havia tret), 5 + 5 = 10 (meitat, altra meitat), 10 + 1 = 11 (el que quedava, que s'havia tret), 11 + 11 = 22 (meitat, altra meitat)

22 + 1 = 23 (a que quedava, s'havia tret), 23 + 23 = 46 ← quantitat inicial (meitat, altra meitat)

Imatge 5.4.24: Alumne 21, 3r ESO, problema 4, fase 2

Aquest alumne, en l'enquesta per conèixer la seva opinió sobre si els jocs l'havien ajudat, ha respost: *No crec que m'hagin ajudat els jocs*.

5.4.2- La influència dels jocs en la resolució de problemes segons les opinions dels alumnes

Després de fer les dues fases de recollida de dades, abans i després de treballar els jocs, i analitzar les resolucions que han fet dels problemes, hem seleccionat els alumnes que a la segona fase han resolt algun problema que a la primera fase no l'havien resolt. Per tal de conèixer la opinió d'aquests alumnes hem fet una enquesta, les preguntes de la qual són les següents:

Preguntes:

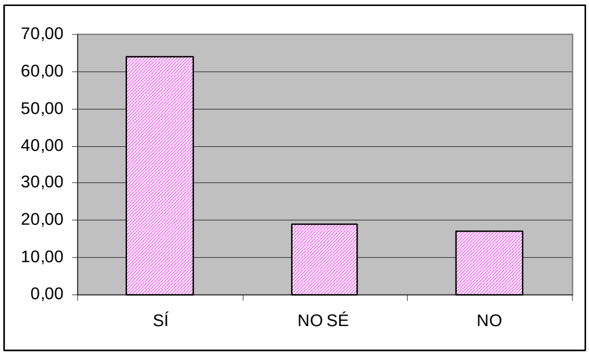
1. Creus que et va ajudar treballar els jocs?
2. Quin joc et va ajudar?

En concret ens interessa conèixer si els alumnes consideren que el treball amb els jocs els ha ajudat en la resolució dels problemes. A la taula 5.1.1, posem els resultats obtinguts a la pregunta 1.

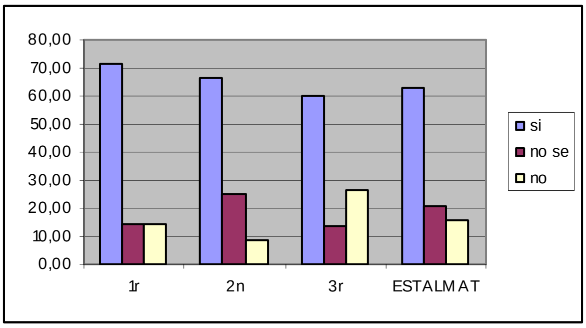
De les enquestes transcrites a l'annex 3 podem extreure els percentatges de les respostes en la taula següent:

	si	no sé	no
1r	71,43	14,29	14,29
2n	66,67	25,00	8,33
3r	60,00	13,33	26,67
ESTALMAT	63,16	21,05	15,79
Mostra Total	64,15	18,87	16,98

Taula 5.4.1: Creença de si els jocs han ajudat a la millora dels alumnes que realment han millorat



Gràfic 5.4.1: Creença de si els jocs han ajudat a la millora dels alumnes que realment han millorat



Gràfic 5.4.2: Creença de si els jocs han ajudat a la millora dels alumnes que realment han millorat, per grups

Observem que el 64,15% dels alumnes creuen que els jocs els han ajudat a resoldre algun dels problemes que a la primera fase no havien sabut afrontar. Els alumnes de 1r ESO són els que creuen més en aquesta influència (amb un 71,43% de respostes a favor de que els jocs els han ajudat).

Pel que fa als jocs concrets a la pregunta 2, els alumnes esmenten el joc de treure fitxes i concretament l'estratègia començar pel final pel problema 4. També esmenten el joc de la reina i l'estratègia simetria.

A banda d'aquests comentaris, també hem pogut constatar que alguns alumnes esmenten que al fer els problemes per segona vegada estaven més motivats.

6. CONCLUSIONS

6- CONCLUSIONS

En el present treball hem abordat la relació entre jocs i problemes i en particular hem estudiat quines són les influències de treballar amb jocs d'estratègia a l'hora de resoldre problemes de matemàtiques, per tal de veure si hi ha una millora en les resolucions dels problemes després d'utilitzar petits jocs d'estratègia. En concret, hem estudiat si hi ha canvis en la comprensió de l'enunciat, en la resolució del problema, en les estratègies heurístiques utilitzades i en el llenguatge utilitzat per expressar les resolucions dels problemes.

Recordem que els objectius del treball són:

- Estudiar si hi ha una millora en la comprensió de l'enunciat de determinats problemes de matemàtiques després de treballar amb jocs d'estratègia i, si és així, com és aquesta millora.

- Estudiar si els alumnes d'ESO resolen millor els problemes en el sentit d'un increment quantitatiu en l'obtenció d'un resultat correcte, després de treballar amb petits jocs d'estratègia.

- Estudiar si millora, i de quina manera, l'ús d'estratègies heurístiques en la resolució de problemes després de treballar amb jocs d'estratègia.

- Estudiar si hi ha diferències en l'expressió de la resolució dels problemes en el sentit d'un increment de l'ús de llenguatges adequats, després de treballar amb jocs d'estratègia.

Recordem que en el terreny metodològic, hem dissenyat un instrument de recollida de dades que consta de quatre problemes (veure 4.2.3), hem escollit una mostra d'alumnes de secundària (alumnes de 1r, 2n, 3r d'ESO i alumnes també de secundària però que segueixen un programa d'estimulació del talent en matemàtiques ESTALMAT). Hem passat els problemes a la mostra d'alumnes. Hem escollit quatre jocs d'estratègia (veure 4.2.2) la resolució dels quals és similar a la resolució d'alguns problemes. Hem fet quatre sessions per treballar els jocs i les heurístiques concretes per a cada joc en les quals hem verbalitzat les heurístiques amb els alumnes en cada cas. Després hem tornat passar els problemes. Per tant, hem recollit les dades del protocol de problemes en dues fases: la fase 1, abans de treballar els jocs i la fase 2, després de treballar-los. Entre la fase 1 i la fase 2 ha transcorregut un mes de temps aproximadament. Per poder comparar les dues fases i valorar la millora, no ens hem fixat només si han resolt el problema bé o no, sinó que hem considerat 5 aspectes diferents dels problemes per a l'anàlisi de les seves resolucions: la resposta subjectiva que cada alumne fa sobre si ha resolt el problema, la resposta objectiva de si han resolt el problema, la comprensió de l'enunciat, l'estratègia heurística, i l'expressió de la resolució. No només ens ha interessat quantificar quants ho han fet bé abans i després de treballar els jocs, és a dir la millora tant objectiva com subjectiva en les resolucions, sinó que hem estudiat els canvis que es produeixen al treballar els jocs i per això hem considerat tres aspectes més: comprensió, estratègia heurística i expressió de la resolució.

Pel tal de poder fer l'estudi i anàlisi de les resolucions dels problemes, hem definit i quantificat: la comprensibilitat, la facilitat, les estratègies heurístiques i la descripció de les resolucions dels problemes. Un estudi detallat d'aquests criteris es troba a l'apartat 5.4. D'aquesta manera hem pogut analitzar les resolucions dels problemes de cada grup i de la mostra total en cada fase i comparar les millores per grups, per fases i per cada problema. També hem fet, per cada característica definida, una anàlisi de la millora global de tots els problemes per cada nivell. Finalment, hem fet un estudi de casos per exposar exemples de millores de les resolucions dels problemes després de treballar els jocs i mostrar la influència de l'ús de jocs en la resolució dels problemes segons les opinions dels alumnes.

Exposarem les conclusions del treball d'acord amb els objectius del mateix. Pel que fa al **primer objectiu**: *Estudiar si hi ha una millora en la comprensió de l'enunciat de determinats problemes de matemàtiques* *després de treballar amb jocs d'estratègia i, si és així, com és aquesta millora*; hem obtingut pels diferents grups d'alumnes els següents resultats:

1r ESO: El problema més comprensible pels alumnes de 1r ESO, tant a la fase 1 com a la 2, és el 2n problema, seguit del 3r. Els problemes amb menys comprensibilitat són el 1r i el 4t. Podem observar un augment de l'índex de comprensibilitat en la fase 2 per a tots els problemes, sent l'augment major en el problema 2 i 4 (0,21 en els dos casos).

2n ESO: El problema més comprensible pels alumnes de 2n ESO a la fase 1 és el 2n problema, seguit del 3r. Els problemes amb menys comprensibilitat són el 1r i el 4t. Podem observar un augment de l'índex de comprensibilitat en la fase 2 per a tots els problemes, sent l'augment major en el problema 2 (0,41).

3r ESO: El problema més comprensible pels alumnes de 3r ESO a la fase 1 és el 2n problema, seguit del 1r i 3r. El problema amb menys comprensibilitat és el 4t. El problema més comprensible pels alumnes de 3r ESO a la fase 2 és el 2n problema, seguit del 3r. Els problemes amb menys comprensibilitat són el 1r i el 4t problema. Podem observar un augment de l'índex de comprensibilitat en la fase 2 per als problemes 2 i 4, sent l'augment major en el problema 2 (0,24). Pel problema 3, l'índex de comprensibilitat es manté a les dues fases. Pel problema 1, hi ha un petit descens. Creiem que aquest descens és degut a que a la primera fase, els alumnes és van capficar en trobar la suma, directament o amb estratègies poc eficients. En la segona fase, van comprendre que s'havia de buscar una manera de fer la suma sense fer-la directament, van comprendre millor la finalitat del problema, però no van trobar la manera de resoldre'l.

ESTALMAT: El problema més comprensible pels alumnes d'ESTALMAT a la fase 1 és el 2n problema, seguit del 1r. En aquests problemes, hi ha més alumnes que entenen els seus enunciats i més alumnes que diuen que els han resolt i efectivament és així, total o parcialment. El problema amb menys comprensibilitat és el 3r, seguit del 4t. El problema més comprensible pels alumnes d'ESTALMAT a la fase 2 és el 1r problema, seguit del 2r i 4t. El problema amb menys comprensibilitat és el 3r. Podem observar un augment de l'índex de comprensibilitat en la fase 2 per a tots els problemes, sent l'augment major en els problemes 4 (0,33) i 1 (0,31).

Mostra total: El problema amb l'índex de comprensibilitat més alt per la mostra total d'alumnes tant a la fase 1 com a la fase 2 és el 2n problema, seguit del 3r i el 1r. El problema amb menys comprensibilitat és el 4t. En tots els problemes augmenta la comprensibilitat en la segona fase. L'augment més significatiu es dóna en el problema 2 (0,24). En els problemes 3 i 4 també hi ha augments mentre que el problema 1, l'augment és menys significatiu.

Si considerem com a millora global de la comprensibilitat la suma de les millores de la comprensibilitat de cada problema obtenim que a ESTALMAT, 1r i 2n d'ESO les millores són molt més grans, i en aquest ordre, mentre que a 3r d'ESO la millora és menor.

Per tant, pel que fa al primer objectiu podem concloure:

La comprensibilitat augmenta per la mostra total d'alumnes en tots els problemes en la segona fase respecte a la primera. Per tant, podem concloure que, després de treballar els jocs, els alumnes entenen millor l'enunciat dels problemes i els resolen millor. Tanmateix, aquesta millora varia segons els problemes, essent especialment significatiu l'augment del problema 2. També varia segons els cursos. Considerant la millora global, a ESTALMAT, 1r i 2n d'ESO les millores són més grans i amb aquest ordre.

Pensem que un dels factors que ha pogut fer que augmentés la comprensibilitat és l'augment de la motivació de l'alumnat després de treballar els jocs. En augmentar la motivació estan més atents en la lectura i comprensió de l'enunciat dels problemes.

Pel que fa al **segon objectiu**: *Estudiar si els alumnes d'ESO resolen millor els problemes en el sentit d'un increment quantitatiu en l'obtenció d'un* *resultat correcte, després de treballar amb petits jocs d'estratègia*; hem obtingut, pels diferents grups d'alumnes, els següent resultats:

1r ESO: El problema amb l'índex de facilitat més alt pels alumnes de 1r ESO, tant a la fase 1 com a la fase 2, és el 2n problema, seguit del 3r. En aquests problemes, hi ha més alumnes que els han resolt total o parcialment. Els problemes amb menys índex de facilitat són el 1r i el 4t. Això vol dir que més alumnes no els han resolt. Podem observar un augment de l'índex de facilitat en la fase 2 per tots els problemes, sent l'augment major en el problema 3 (0,23).

2n ESO: El problema amb l'índex de facilitat més alt pels alumnes de 2n ESO a la fase 1 és el 2n problema. És l'únic problema que aquest grup d'alumnes l'ha resolt total o parcialment. Els altres problemes tenen índex de facilitat zero. Això vol dir que aquest grup d'alumnes no els han resolt en aquesta fase. El problema amb l'índex de facilitat més alt pels alumnes de 2n ESO a la fase 2 és el 2n problema. Els problemes 2 i 3 tenen un índex de facilitat baix. El problema 1 té índex de facilitat zero. Podem observar un augment de l'índex de facilitat en la fase 2 pels problemes 2, 3 i 4, sent l'augment major en el problema 2 (0,38).

3r ESO: El problema amb l'índex de facilitat més alt pels alumnes de 3r d'ESO a la fase 1 és el 2n problema, seguit del 1r. Els problemes amb menys índex de facilitat són el 3r i el 4t. El problema amb l'índex de facilitat més alt pels alumnes de 3r d'ESO a la fase 2 és el 2n problema. Els problemes 1,3 i 4 tenen menys índex de facilitat. Podem observar un augment de l'índex de facilitat en la fase 2 per als problemes 2 i 4, sent l'augment major en el problema 2 (0,34). Pel problema 3, l'índex de comprensibilitat es manté a les dues fases. Pel problema 1, hi ha un petit descens. Creiem que aquest descens és degut que a la primera fase, els alumnes és van capficar en trobar la suma, directament o estratègies poc eficients, però van resoldre algun apartat. En la segona fase, van comprendre que s'havia de buscar una manera de fer la suma, sense fer-la directament, i com no van trobar la manera, van deixar en blanc el problema.

ESTALMAT: El problema amb l'índex de facilitat més alt pels alumnes d'ESTALMAT a la fase 1 és el 2n problema, seguit del problemes 1. En aquests problemes, més alumnes els han resolt total o parcialment. El problemes amb menys índex de facilitat són el 3 i el 4. El problema amb l'índex de facilitat més alt pels alumnes d'ESTALMAT a la fase 2 és el 1r problema, seguit dels problemes 2n i 4t. En aquests problemes, més alumnes els han resolt total o parcialment. El problema amb menys índex de facilitat és el 3r. Podem observar un augment de l'índex de facilitat en la fase 2 pels problemes 1, 2 i 4, sent l'augment major en els problemes 1 (0,42) i 4 (0,39). No hi ha augment en el problema 3.

Mostra total: El problema amb l'índex de facilitat més alt per la mostra total dels alumnes tant a la fase 1 com a la 2 és el 2n problema. En tots els problemes augmenta la facilitat en la segona fase, sent l'augment major en el problema 2, seguit dels problemes 4 i 3.

Si considerem com a millora global de la facilitat la suma de les millores de la facilitat de cada problema obtenim que a ESTALMAT, 2n i 1r d'ESO, les millores de la facilitat són més grans i en aquest ordre. A 3r d'ESO la millora de la facilitat és menor.

Per tant, pel que fa al segon objectiu podem concloure:

La facilitat augmenta per a tot el grup d'alumnes en tots els problemes en la segona fase. Per tant, podem concloure que, després de treballar els jocs, els alumnes resolen millor els problemes. Tanmateix, aquesta millora varia segons els problemes, essent especialment significatiu l'augment en el problema 2. També varia segons els cursos, a ESTALMAT i 2n d'ESO les millores són més grans.

Pensem que un dels factors que ha pogut fer que augmentés la facilitat és degut a l'augment de la comprensibilitat dels enunciats dels problemes i l'augment de les heurístiques utilitzades per part dels alumnes després de treballar els jocs.

Pel que fa al **tercer objectiu**: *Estudiar si millora, i de quina manera, l'ús d'estratègies heurístiques en la resolució de problemes després de treballar amb jocs d'estratègia*; hem obtingut, pels diferents grups d'alumnes, els següents resultats:

1r ESO: L'índex d'anàlisi pels alumnes de 1r d'ESO en la fase 1 és més alt en el problema 2. Això vol dir que és el problema on més alumnes han utilitzat l'heurística esperada, en aquest cas, estudi de tots els casos, ja sigui mentalment, gràficament o mitjançant arbre de possibilitats, i diuen tots els camins possibles. En els problemes 2 i 3 algun alumne ha utilitzat l'heurística esperada. I en el problema 1, cap alumne l'ha utilitzat. L'índex d'anàlisi pels alumnes de 1r ESO en la fase 2 és més alt en el problema 2 i 3. Això vol dir que són els problemes on més alumnes han utilitzat l'heurística esperada. En el problema 4, algun alumne ha utilitzat l'heurística esperada. I en el problema 1, cap alumne ha utilitzat l'heurística esperada, ús de simetria numèrica. Podem observar un augment de l'índex d'anàlisi en la fase 2 per a tots els problemes, sent l'augment major en el problema 3 (0,18).

2n ESO: En aquesta primera fase, els alumnes de 2n d'ESO, han utilitzat poc les heurístiques esperades, els índexs d'anàlisi són baixos. En el problema 1 cap alumne les ha utilitzat. L'índex d'anàlisi, en la fase 2, és més alt en el problema 2. Això vol dir que és el problema on més alumnes han utilitzat l'heurística esperada, estudi sistemàtic de tots els casos. En els problemes 3 i 4, algun alumne ha utilitzat l'heurística esperada, simetria geomètrica i fer el problema a la inversa. I en el problema 1, cap alumne ha utilitzat l'heurística esperada, simetria numèrica. Podem observar un augment de l'índex d'anàlisi en la fase 2 per a tots els problemes, sent l'augment major en el problema 2 (0,33).

3r ESO**:** En la primera fase, els alumnes de 3r d'ESO, han utilitzat poc les heurístiques esperades. Al problema 2 és on més les han utilitzat. L'índex d'anàlisi pels alumnes de 3r d'ESO en la fase 2 és més alt en el problema 2. Això vol dir que és el problema on més alumnes han utilitzat l'heurística esperada. El segueixen el problema 4, 1 i finalment el problema 3, on han utilitzat poc les heurístiques esperades. Podem observar un augment de l'índex d'anàlisi en la fase 2 per a tots els problemes, sent l'augment major en el problema 2 (0,31).

ESTALMAT: Els alumnes d'ESTALMAT, en la fase 1, han obtingut un índex d'anàlisi més alt en el problema 2, per tant, vol dir que utilitzen l'heurística estudi de tots els casos per resoldre el problema. Després el segueixen el problema 4 utilitzant l'estratègia començar pel final i el problema 1 utilitzant l'estratègia simetria numèrica. El problema 3 té índex d'anàlisi zero, on cap alumne utilitza l'heurística de la simetria geomètrica. En la fase 2, han obtingut un índex d'anàlisi més alt en el problema 1, per tant, vol dir que utilitzen l'heurística de la simetria numèrica per resoldre el problema. Després el segueixen els problemes 2 i 4. El problema amb l'índex d'anàlisi més baix és el problema 3 on menys alumnes utilitzen l'heurística de la simetria geomètrica. Podem observar un augment de l'índex d'anàlisi en la fase 2 per a tots el problemes, sent l'augment major en els problemes 1 (0,49) i 4 (0,39).

Mostra total: Els alumnes tant en la fase 1 com en la fase 2, han obtingut un índex d'anàlisi més alt en el problema 2, per tant, vol dir que utilitzen l'heurística estudi de tots els casos per resoldre el problema. Després el segueixen el problema 1 amb simetria numèrica, el problema 4 amb resoldre a la inversa i finalment el problema 3, on menys alumnes utilitzen l'heurística de la simetria geomètrica. En tots els problemes augmenta índex d'anàlisi de les estratègies heurístiques en la segona fase, sent l'augment major en el problema 2 (0,21), seguit dels problemes 4 i 1.

Si considerem com a millora global de les estratègies heurístiques la suma de les millores de les estratègies heurístiques de cada problema obtenim que a ESTALMAT la millora és més gran. Segueixen les millores a 2n i 3r d'ESO i finalment de 1r d'ESO.

Per tant, pel que fa al tercer objectiu podem concloure:

L'índex d'anàlisi de les estratègies heurístiques augmenta per tot el grup d'alumnes en tots els problemes en la segona fase. Tanmateix, aquesta millora depèn dels grups i problemes. L'estratègia heurística que més utilitzen abans de treballar els jocs és l'estudi sistemàtic de tots els casos. Després de treballar els jocs, les estratègies heurístiques que augmenten són estudi sistemàtic de tots els casos, començar el problema pel final, simetria numèrica i simetria geomètrica, en aquest ordre. Per tant, podem concloure que, després de treballar els jocs, els alumnes, en general, utilitzen més estratègies heurístiques per resoldre els problemes.

Pensem que un dels factors que ha pogut fer que augmentes l'índex d'anàlisi de les estratègies heurístiques ha estat que al treballar amb els jocs han vist i verbalitzat diferents heurístiques de resolució de problemes que després han utilitzat. La millora és més gran al grup d'ESTALMAT tot i que parteix de resultats més alts. Creiem que això és degut a la alta capacitat d'aprenentatge d'aquests alumnes. Que la millora sigui més alta en el grup de 2n ESO que en els altres grups d'ESO ens diu que és un curs més adequat per aprendre aquelles heurístiques de resolució de problemes directament relacionades amb els jocs d'estratègia. Això concorda amb la recomanació de l'actual currículum que recomana utilitzar petits jocs d'estratègia al primer cicle de la ESO (Generalitat, 2007).

Pel que fa al **quart objectiu**: *Estudiar si hi ha diferències en l'expressió de la resolució dels problemes en el sentit d'un increment de l'ús de llenguatges adequats, després de treballar amb jocs d'estratègia*; hem obtingut pels diferents grups d'alumnes els resultats següents:

1r ESO: Podem observar que els alumnes de 1r ESO en la primera fase, pocs fan alguna resolució del problema 1 i aquests descriuen la resolució amb llenguatge numèric o amb llenguatge verbal. En la segona fase disminueix LL1 (cap descripció del problema) i augmenta l'ús del llenguatge verbal i del llenguatge numèric. En el problema 2 i 3, en les dues fases la majoria fa una resolució de tipus gràfica i els altres, s'expressen amb codificacions o

llenguatge verbal. Pocs alumnes fan alguna resolució del problema 4 en la primera fase i s'expressen amb llenguatge verbal o amb llenguatge numèric.
En tots els problemes a la fase 2 disminueix LL1 (cap descripció del problema). Això vol dir que alumnes que no escriuen res a la fase 1, sí ho fan a la fase 2.

2n ESO: Podem observar que els alumnes de 2n ESO en la primer fase, pocs fan alguna resolució el problema 1, i els que la fan, descriuen la resolució amb llenguatge verbal majoritàriament. En la segona fase, disminueix LL2 (llenguatge verbal) i augmenta LL4 (llenguatge numèric). En el problema 2, a la primera fase, la majoria fa una resolució de tipus gràfica i els altres, s'expressen amb codificacions o llenguatge verbal. En la segona fase, disminueix LL2 (llenguatge verbal) i LL3 (gràficament); i augmenta la LL4 (llenguatge numèric) i LL5 (altres codis). En el problema 3, en la primera fase, la resolució és majoritàriament també de tipus gràfic, seguida de l'expressió verbal. En la segona fase disminueix el llenguatge verbal i augmenta el gràfic. I en el problema 4, dels que el fan, la majoria s'expressa amb llenguatge verbal i la resta amb llenguatge numèric. En la segona fase augmenta el llenguatge verbal, llenguatge gràfic i llenguatge numèric. En tots els problemes a la fase 2 disminueix LL1 (cap descripció del problema). Això vol dir que alumnes que no escriuen res a la fase 1, sí ho fan a la fase 2.

3r ESO: Podem observar que en el problema 1, els que fan alguna resolució del problema, s'expressen amb llenguatge o amb llenguatge numèric. En la segona fase augmenta LL1 (cap resolució) i LL4 (llenguatge numèric) i disminueix LL2 (llenguatge verbal). En el problema 2, majoritàriament expressen la resolució gràficament, seguit d'expressió verbal i numèrica. El problema 3, el resolen la majoria gràficament. En el problema 4, o no el resolen o si ho fan s'expressen amb llenguatge verbal o llenguatge numèric. En la segona fase disminueix llenguatge verbal i augmenta llenguatge numèric. En els problemes 2, 3 i 4 a la fase 2 disminueix LL1 (cap descripció del problema). Això vol dir que alumnes que no escriuen res a la fase 1, sí ho fan a la fase 2.

ESTALMAT: Podem observar que en el problema 1 els alumnes d'ESTALMAT, en la primera fase, la majoria s'expressa amb llenguatge numèric. En la segona fase augmenta el llenguatge numèric. En problema 2, tant en la fase 1 com en la 2, dels que el resolen, majoritàriament expressen gràficament. En la segona fase augmenta el llenguatge verbal i altres codis. En el problema 3, el resolen la majoria gràficament. En el problema 4, s'expressen majoritàriament amb llenguatge numèric. En la segona fase, disminueix el llenguatge verbal i augmenta el llenguatge numèric. En tots els problemes en la fase 2 disminueix LL1 (cap expressió), és a dir, que en la segona fase hi ha més alumnes que resolen els problemes, independentment que la resposta sigui o no correcta.

Mostra total: Podem observar que en el problema 1, dels que el fan, la majoria s'expressa amb llenguatge numèric. En el problema 2 expressen la resolució gràficament majoritàriament, o amb llenguatge verbal. En la segona fase augmenta el llenguatge verbal i altres codis. En el problema 3, el resolen la majoria gràficament. El problema 4 s'expressa majoritàriament amb llenguatge numèric o llenguatge verbal. En la segona fase disminueix el llenguatge verbal i augmenta el llenguatge numèric. Per la mostra total d'alumnes, en tots els problemes en la fase 2 disminueix LL1 (cap expressió), és a dir, que en la segona fase hi ha més alumnes que resolen els problemes, independentment que la resposta sigui o no correcta.

Observem que les proporcions de cada resposta en cada problema són similars en les dues fases. El tipus d'expressió majoritària per resoldre els problemes es manté per tot el grup d'alumnes en tots els problemes en la segona fase. Per tant, el tipus d'expressió majoritària depèn bàsicament del problema. Tanmateix, hi ha una clara millora en el següent sentit: al passar a la fase 2 disminueix en tots els problemes l'ús del LL1 i LL2 (que són cap llenguatge i llenguatge verbal) mentre que augmenten els LL3 i LL4 (que són llenguatge gràfic i llenguatge numèric).

Per tant, pel que fa al quart objectiu podem concloure:

En la segona fase, hi ha una reducció important dels alumnes que no resolen els problemes, també hi ha un descens en l'expressió verbal i un augment important en la utilització del llenguatge numèric, seguit d'un augment en el llenguatge gràfic i un menor augment en la utilització d'altres codificacions. El descens d'alumnes que no resolen és major en percentatge en els alumnes de 1r, seguit dels alumnes de 2n i finalment alumnes de 3r. Podem concloure que hi ha alumnes que abans de treballar els jocs no s'expressaven de cap manera o ho feien verbalment i que després de treballar els jocs, s'expressen gràficament, amb llenguatge numèric o mitjançant codificacions, independentment de si resolen el problema o no. El tipus d'expressió majoritària per resoldre els problemes es manté per tot el grup d'alumnes en tots els problemes en la segona fase. Per tant, el tipus d'expressió majoritària depèn del problema. Tanmateix, hi ha una clara millora en el següent sentit: al passar a la fase 2 disminueix en tots els problemes l'ús del LL1 i LL2 (que són cap llenguatge i llenguatge verbal) mentre que augmenten els LL3 i LL4 (que són llenguatge gràfic i llenguatge numèric)

Pensem que el fet que abans de treballar els jocs no s'expressaven de cap manera o ho feien verbalment i que després de treballar els jocs, s'expressen gràficament, amb llenguatge numèric o mitjançant codificacions, independentment de si resolen el problema o no és degut a l'augment de la comprensibilitat dels problemes després de treballar els jocs d'estratègia. I el fet que augmentin l'ús del llenguatge gràfic i el llenguatge numèric creiem que és degut a que augmenta la facilitat i l'índex d'anàlisi després de treballar els jocs.

Finalment podem respondre a la nostra pregunta de recerca: **Treballar amb jocs d'estratègia amb alumnes de secundària obligatòria ens ajuda en el procés d'ensenyament aprenentatge de la resolució de problemes de matemàtiques?**

Treballar amb jocs d’estratègia amb alumnes de secundària és una bona eina per la millora de l’aprenentatge de la resolució de problemes de matemàtiques. D’acord amb les dades del nostre estudi, després de treballar amb petits jocs d’estratègia, els alumnes troben més fàcil els problemes, comprenen més bé l’enunciat, s’incrementa l’ús d’heurístiques apropiades, utilitzen llenguatges més adequats i resolen millor.

Els resultats obtinguts i exposats anteriorment corroboren quantitativament aquesta conclusió. Tanmateix, hi ha molts altres elements de caràcter qualitatiu que, al nostre entendre, reforcen aquesta idea.

- Increment de l’interès per resoldre problemes

Encara que no hem recollit dades quantitatives en aquest sentit, l’enquesta feta als alumnes que havien millorat clarament, ens dóna evidències qualitatives que els jocs van servir de motivació en el moment de resoldre els problemes per segona vegada (veure 5.4.2).

- Millora de l’ús d’heurístiques adequades

Més enllà dels resultats quantitatius que corroboren l’increment de l’ús d’heurístiques adequades, l’estudi de casos ens ha permès mostrar evidències des d’un punt de vista qualitatiu d’aquestes millores. Per exemple, d’acord amb l’estudi de casos (5.4.1) hem constatat que hi ha:

- Pas d’heurístiques incompletes a completes: estudi de casos i simetria numèrica
- Millora en l’aplicació d’heurístiques (passen d’incorrecte a correcte)
- Ús de noves heurístiques adequades (començar pel final, simetria geomètrica i simetria numèrica, absents en la primera fase i presents en la segona)

- Millores del llenguatge

Un resultat que no ens esperàvem és la millora en el llenguatge. Pensem que això està relacionat amb l’increment de l’ús d’heurístiques més adequades i el fet que aquestes admeten expressions més properes al llenguatge matemàtic.

Implicacions didàctiques:

En l'elaboració de la proposta de competències matemàtiques de l'ESO per part del Departament d'Ensenyament (Generalitat, 2012), s'ha optat per quatre dimensions que es corresponen amb els processos del currículum: resolució de problemes, raonament i prova, connexions i comunicació i representació. El nostre treball està centrat en la dimensió de resolució de problemes i també té relació amb la dimensió raonament i prova per les competències 2, 3 i 6 (2. Emprar conceptes, eines i estratègies matemàtiques per resoldre problemes. Resolució de problemes; 3. Mantenir una actitud de recerca davant d'un problema assajant estratègies diverses; 6. Emprar el raonament matemàtic en entorns no matemàtics). El document de Competències Bàsiques departament d'ensenyament dóna com a orientació metodològica de la competència 4 *Generar preguntes de caire matemàtic i plantejar problemes,* cercar estratègies guanyadores en jocs.

Una recomanació que es deriva del nostre estudi és que de les diferents tipologies de problemes per a treballar matemàtiques a l'ESO, els jocs d'estratègia són tipus de problemes adequats ja que permeten millorar la capacitat dels alumnes en la resolució de problemes de matemàtiques.

No tots els jocs serveixen de manera igual a tots els cursos. Les dades ens diuen que hi ha uns problemes en els quals la millora en la segona fase és més gran que en altres, segons els diferents grups d'alumnes. Si ens fixem en quin grup ha augmentat més l'índex d'anàlisi obtenim que: el problema 1 (la simetria numèrica) és més adequat per treballar amb el grup d'ESTALMAT; el problema 2 (estudi sistemàtic de tots els casos) és més adequat a 2n i 3r d'ESO; el problema 3 (simetria geomètrica) és més adequat a 1r ESO; el problema 4 (començar el problema pel final) és més adequat al grup d'ESTALMAT i 2n d'ESO.

Així doncs, encara que tots els problemes són adequats (sempre hi ha alguna millora per algun dels índexs estudiats) podem veure que uns són més adequats que altres d'acord amb els diferents índexs estudiats.

BIBLIOGRAFIA

7. BIBLIOGRAFIA

Alsina, A ; Burguès, C.; Fortuny i altres (1992). *Ensenyar matemàtiques*. Ed Graó.

Bishop, A. (1988). *Mathematical Enculturation. A cultural perspectiva on Mathematics Education*. Dordrecht, Kluver Academic Pubishers.

Bishop, A. (1998). El papel de los juegos en educación matemática. *UNO* 18, pàg. 9-19.

Blanco, L.J. (1993). Una clasificación de problemas matemáticos. *Epsilon* 25, pàg. 49-60.

Bloom, B. (1971). Taxonomy of Education Objectives: The classification of educational goals. New York: David McKay,1956. Versió castellana*: Tasonomia de los objetivos de la educación. La clasificación de las metas educacionales*. Buenos Aires: El Ateneo.

Borasi, R. (1986). On the nature of problems. *Educational Studies in Mathematics*, 2 (17), pàg. 125-141.

Bouvier, A.; Georg, M. (1979). *Diccionario de matemáticas*. AKAL, 2ª edició. Madrid.

Bouvier, A. (1981). *La mystification mathématiques*. Herman. París.

Bright, G.W.; Harvey, J.G. I Wheeler, M.M. (1985). Learning and mathematic Games, en *journal for Research in Mathematics Education, Monograph number 1, NCTM*.

Brownell, W.A. (1942). *Problem Solving*. Dins Henry, [ed.] The Psychology of Learning. Chicago: University of Chicago Press.

Butts, T. (1980). Posing problems Properly a Krulik,S.(Ed): *Problem Solving in School Mathematics.* Yearbook. NTCM. Reston, pàg. 22-33.

Callejo, M.L; Carrillo, J. (1998). Elementos *de Resolución de problemas cinco años después*. Ponència basada en el llibro de L. Puig (1996) sobre la seva Tesis Doctoral (1993).

Callejo, M.L. (1999). Investigar sobre la pròpia pràctica, un medio de desarrollo profesional. Ponència IX JAEM.

Callejo, M.L., Vila, A. (2004). *Matemáticas para aprender a pensar. El papel de las creencias en al resolución de problemas*. Narcea, S.A. Ediciones. Madrid.

Castro, E. (2008). Resolución de problemas. Ideas, tendencies e influencias en España. *Actas del XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Badajoz.

Carl, I. M. (1989). *Essential Mathematics for the Twenty-first Century: The Position of the National Council of Supervisors of Mathematics*. Mathematics Teacher, 82 (6), pàg. 470-474.

Carrillo, J. (1996). *Creencias Sobre la Resolución de Problemas. Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza de profesores de matemáticas de alumnos de más de 14 años. Algunas aportaciones a la metodología de la investigación y estudio de posibles relaciones*. Tesi Doctoral. Universitat de Sevilla.

Cobo, P. (1998). *Análisis de los procesos cognitivos y de las interacciones sociales entre alumnos (16-17) en la resolución de problemas que comparan áreas de superficies planas. Un estudio de casos*. Tesi Doctoral, Universitat Autònoma Barcelona.

Cockroft, W.H. (1985). Las matemáticas sí cuentan. *Informe Cockroft*. MEC, Madrid.

Contreras, L.C. (1999). *Concepciones de los profesores sobre la Resolución de Problemas*. Huelva: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Huelva.

Corbalán, F. (1994). *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato*. Síntesis, Madrid.

Corbalán, F. (1997). *Juegos de estrategia y resolución de problemas: análisis de estrategias y tipología de jugadores*. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Corbalán, F.; Deulofeu, J. (1998). Juegos manipulativos en la enseñanza de las matemáticas. *UNO* 7, pàg. 71-80.

Departament d'Educació. (2007). *Currículum educació secundària obligatòria*. Generalitat de Catalunya.

Departament d'Ensenyament. (2013). *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic. Identificació i desplegament a l'educació secundària obligatòria.* Generalitat de Catalunya.

Deulofeu, J. (1999). Recreaciones, juegos y actividades matemáticas. *UNO* 20, pàg. 89-101.

Deulofeu, J. (1995). *Los pequeños Juegos de Estrategia en la enseñanza de las matemàticas. ¿Por qué?, ¿para qué?* En Actas de las VII JAEM, Madrid.

Deulofeu, J. (1995). Jocs, recreacions i ensenyament de les matemàtiques a l'educació obligatòria. *BIAIX* 8, pàg. 16-19.

Deulofeu, J. (2001). *Una recreación matemàtica: historias, juegos y problemas*. Planeta. Barcelona.

Deuloferu, J., Mallart A. (2012). Estrategia para mejorar la comprensión de enunciados de problemas. *UNO* 59, pàg. 83-92.

Edo, M. (1998). Juegos y matemáticas. Una experiencia en el ciclo inicial de primaria. *UNO* 18, pàg. 21-37.

Edo, M. (2002). *Jocs, interacció i construcció de coneixements matemàtics. Tesi doctoral*. Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona.

Edo, M i Deulofeu, J. (2006). Investigación sobre juegos, interacciones y construcciones de conocimientos matemáticos. *Enseñanza de las Ciencias, 24 (II)*, pàg. 257-268.

Fayos, P. (1996). *Resolución de Problemas de matemáticas: un análisis cualitativo de la realidad en alumnos de segunda etapa de EGB desde un punto de vista cognitivo y del procesamiento de la información. Propuesta de innovación*. Tesi doctoral. Universitat Rovira i Virgili. Tarragona.

Fetcher J.L. (1971). The effectiviness of simulation game as learning environments. *Simulation games, 2*, pàg. 425-454.

Ferrero, L. (1998). Hagan juego! Juegos matemáticos para la educación primaria. *UNO* 18, pàg. 39-46.

Gairin J. (1990). Efectos de la utilización de los juegos educativos en la enseñanza de las matemáticas. *Educar* 17, pàg.105-188.

Gairín J.M. (1990). Efectos de la utilización de juwgos educativos en la enseñanza de las matemáticas. *Educar* 17, pàg.105-118.

Garcia Azcárate, A. (1998). Los juegos de conocimiento: un recurso para enseñar matemáticas. *UNO* 18, pàg. 47-57.

Gaulin, C. (1982). La resolution de problèmes: le mot d'ordre pour les années 1980-90. Quoi en penser? Dins La didactique mathematique au primaire. Actes du Colloque Mathématique. Departement des Sciences de l'Education. Université du Québec au Chicoutimi.
Gardner, M. (1983). *Circo matemático*. Madrid: Alianza.

Gardner, M.(1983). *Paradojas Ajá!*. Barcelona: Labor.

Gairín J.M. (1990). Efectos de la utilización de juegos educativos en la enseñanza de las matemáticas. *Educar* 17, pàg. 105-118.

Gil, D. (1988). La resolución de problemas de lápiz y papel como actividad de investigación. *Investigación en la escuela, 6*. Sevilla.

Goldin, G.A. (1982). The Measure of Problem Solving Outcome. Dins F.K. Lester i J. Garofalo [eds.]: Mathematical problem Solving. Issues in Research. *The Franklin Institute Press, Philadelphia*, pàg. 87-101.

Goleman, D. (1996). *Inteligencia emocional*. Barcelona: Kairós.

Gomez-Chacón, I.M. (1992). Los juegos de estrategia en el currículum de matemáticas. Apuntes I.E.P.S, 55. Madrid: Narcea.

Gomez-Chacón, I.M. (1997). La alfabetización emocional en educación matemàtica. Actitudes, emociones y creencias. *UNO* 13, pàg. 7-22.

Greenes, C. (1991). Identifying the gifted Student in Mathematics. *Arithmetics Teacher*, pàg. 14-17.

Guzmán, M. (1984). de Juegos matemáticos en la enseñanza. Actas de las IV JAEM. Sta. Cruz de Tenerife.

Guzmán, M. (1991). *Para pensar mejor*. Barcelona: Labor.

Guzmán, M. (1989). Juegos y matemáticas. *Suma* 4, pàg. 61-64.

Guzmán, M. (1984). *Cuentos con cuentas*. Barcelona: Labor.

Halmos, P. (1980). The heart of mathematics, *American Mathematical Mont*ly *87*, pàg. 519-524.

Huizinga, J. (1938). *Homo ludens*. Madrid: Alianza.

Katowsky, M.G. (1980): Some thoughts on Teaching for Problem Solving a Krulik, S. i Reys, R.E. (Eds) *Problem Solving in School Mathematics*. NCTM. Reston.

Kilpatrick, J. (1985). A Retrospective Account of the Past 25 Years of Research on Teaching Mathematical Problem Solving. Dins E.A. Silver [eds.]: Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives: 1- 15. Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Lesh, R. (1982). Modeling students'modeling behaviours. *Proceedings of PME-NA* 4, Athens, Georgia.

Lester, F.K. (1985). Methodological Considerations in research on Mathematical Problem-Solving Instruction. Dins E. Silver [ed.]: *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives*, p. 41-69. Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Lester, F.K. (1994). Musings about mathematical problem-solving research: 1970-1994. *Journal for Research in Mathematics Education vol 25 núm 6*, pàg. 660-675.

Mallart A. (2008). *Estratègies de millora per a la resolució de problemes amb alumnes de segon d'ESO: ús de la matemàtica recreativa a les fases d'abordatge i de revisió*. Tesi doctoral.

Mason J., Burton, L. i Stacey, K. (1982). *Pensar matemáticamente.* Labor-Mec. Madrid

McLeod, D.B. (1992). Research on Affect in Mathematics Education: A reconceptualization. Dins Grouws, D.A. [ed.]: Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning, pàg. 575-596. New York: MacMillan. MEC, 1989: 481.

McClintock, M.K. (1979). Innate behavior is not innate. *Signs* 4, pàg. 703-710.

Navarro, A. (2010). *Jocs d'estratègia i resolució de problemes de matemàtiques*. Treball de recerca del programa de doctorat en didàctica de les matemàtiques i les ciències. UAB (no publicat).

Newell, A i Simon, H. A. (1972). *Human problem solving.* New Jersey: Prentice Hall.

Pérez, A. i Sánchez, M. (2009). *Matemáticas para estimular el Talento. Actividades del proyecto ESTALMAT*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES.

Plata, M.A. (1998). *A aprendizaxe das matematicas dense os modelos de mediación cognitiva: a practica avaliativa dos profesores e as suas concepcions sobre a area e o seu ensino como contexto de interaccón.* Tesi doctoral. Universitat de Santiago de Compostela.

Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press. (Cómo plantear y resolver problemas. 18a reimpressió. Sèrie de matemàtiques, Trillas: Mèxic, 1994).

Pólya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Pólya, G. (1962). *Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving*. New York: Wiley.

Pólya, G. (1969). *The goals of mathematical education*. Mathematically Sane. Stanford University. Transcripció no editada d'una conferència. <http://mathematicallysane.com/goals-of-mathematical-education/> (consultat: 22/4/2013)

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Mathema, 6. Granada: Comares.

Puig, L. (2008). Presencia i ausencia de la resolución de problemas en la investigación i el currículo*. Actas del XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Badajoz.

Puig i Adam, P. (1960). *La matemática y su enseñanza actual*. Madrid: M.E.C.

Shoendfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando: Academic Press.

Shorndfeld, A. H. (1992). Learning to thin mathematically: Problem solving, metacognition, and Sense-Making in mathematics. En D.A. Grows (ed): *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning*, p. 334-389. New York: Mac Millan.

Vila, A. (2001). Resolució de problemes de matemàtiques: identificació, origen i formació dels sistemes de creences en l'alumnat. Alguns efectes sobre l'abordatge dels problemes. Tesi doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona. <www.tdx.cat/handle/10803/4687>. (consultat: 12/11/2012)

Wallas, G. (1926). *The Art of Thougt*. New York: Harcourt Brace.

Williford, H. (1992). Games for Developing Mathematical Strategy*. The Mathematics Teacher, 85* (2), pàg. 140-141.

Winter i Ziegler (1983). *Introducción al juego de los conjuntos.* Madrid: Interduc-Schroedel.

ANNEXOS

1. PROTOCOL DE PROBLEMES

RESOL AQUESTS PROBLEMES EXPLICANT EL QUE HAS PENSAT

Problema 1: a) Suma els nombres de l'1 al 100.
b) Pots aplicar el que has fet a l'apartat anterior per sumar els nombres de 1 al 75? Fes-ho i explica les diferències.

Qüestionari:
Explica què s'ha de fer en aquest problema.
Has trobat la solució?
resposta Sí
Quina és la solució?
Com ho has fet?
Resposta No
Què has fet?
Perquè has abandonat

Problema 2: Si només podem anar a la dreta i abaix, quants recorreguts diferents hi ha per anar de A a I sense passar dues vegades pel mateix lloc?

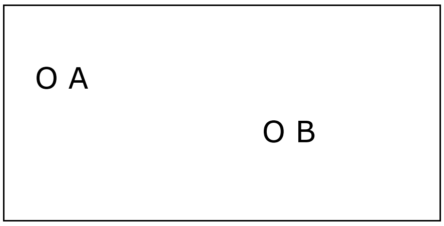
A	B	C
D	E	F
G	H	I

Qüestionari:
Explica què s'ha de fer en aquest problema.
Has trobat la solució?
resposta Sí
Quina és la solució?
Com ho has fet?
Resposta No

Què has fet?

Perquè has abandonat

Problema 3: En quina direcció hem d'impulsar la bola A perquè toqui al costat i després toqui la bola B?



Qüestionari:

Explica què s'ha de fer en aquest problema.

Has trobat la solució?

- resposta Sí
  - Quina és la solució?
  - Com ho has fet?
- Resposta No
  - Què has fet?
  - Perquè has abandonat

Problema 4: D'una quantitat en treiem la meitat més un, del que queda en treiem la meitat més un, del que queda em treiem la meitat més un, del que queda, novament, treiem la meitat més 1 i en queda 1. Quina és la quantitat inicial?

Qüestionari:

Explica què s'ha de fer en aquest problema.

Has trobat la solució?

- resposta Sí
  - Quina és la solució?
  - Com ho has fet?
- Resposta No
  - Què has fet?
  - Perquè has abandonat?

2. TAULES DE DADES DELS PROBLEMES

Alumnes de 1r ESO fase 1

Problema 1:

NOM ALUMNE	I RESPOSTA SUBJECTIVA	II RESPOSTA OBJECTIVA	III COMPRENSIÓ ENUNCIAT	IV ESTRATÈGIES HEURÍSTIQUES	V EXPRESSIÓ DE LA REALITZACIÓ
1	2	3	3	1	1
2	1	3	3	1	2
3	2	3	3	1	1
4	2	3	2	1	1
5	2	3	1	2	4
6	2	3	3	1	1
7	2	3	2	1	1
8	2	3	3	1	1
10	2	3	2	1	1
11	2	3	2	1	1
13	2	3	1	1	1
14	2	3	3	1	2
15	2	3	3	1	1
18	2	3	3	1	1
19	2	3	1	1	1
20	2	3	2	1	1
21	2	3	1	1	1
22	2	3	3	1	1
23	1	3	3	2	1
25	1	3	1	2	4
26	2	3	2	1	1
27	1	3	1	2	4
28	2	3	2	1	1
29	2	3	1	1	1
30	2	3	3	1	1
31	2	3	2	1	1

Taula 5.3.1: Dades del problema 1 dels alumnes 1r ESO fase 1

Problema 2

NOM ALUMNE	I RESPOSTA SUBJECTIVA	II RESPOSTA OBJECTIVA	III COMPRENSIÓ ENUNCIAT	IV ESTRATÈGIES HEURÍSTIQUES	V EXPRESSIÓ DE LA REALITZACIÓ
1	1	2	1	2	3
2	2	2	3	2	3
3	2	3	3	1	1
4	1	2	1	2	3
5	2	3	3	1	3
6	1	1	1	4	4
7	1	3	2	1	1
8	1	2	1	2	3
10	1	1	1	4	4
11	1	3	3	1	1
13	1	1	1	4	3
14	1	3	3	1	2
15	1	1	1	4	3
18	2	3	3	1	1
19	1	3	3	1	2
20	1	1	1	1	2
21	1	2	1	2	3
22	1	1	1	4	3
23	1	2	1	1	2
25	1	1	1	4	3
26	1	1	1	4	3
27	1	1	1	4	3
28	2	2	1	2	3
29	1	2	1	2	2
30	1	2	1	2	3
31	1	3	3	1	1

Taula 5.3.2: Dades del problema 2 dels alumnes 1r ESO fase 1

Problema 3

NOM ALUMNE	I RESPOSTA SUBJECTIVA	II RESPOSTA OBJECTIVA	III COMPRENSIÓ ENUNCIAT	IV ESTRATÈGIES HEURÍSTIQUES	V EXPRESSIÓ DE LA REALITZACIÓ
1	2	3	3	1	1
2	2	3	3	2	1
3	1	3	1	2	3
4	1	3	1	2	3
5	1	1	1	4	3
6	2	3	1	1	2
7	1	3	1	2	3
8	1	3	1	2	3
10	1	3	1	1	2
11	1	1	1	3	3
13	1	1	1	3	2
14	1	3	1	2	3
15	1	3	3	2	3
18	2	3	3	1	1
19	1	3	1	1	2
20	2	3	2	1	1
21	1	3	1	2	3
22	1	3	1	2	2
23	1	3	1	1	2
25	1	1	1	4	3
26	1	1	1	4	3
27	1	3	1	2	3
28	1	3	1	2	3
29	1	3	1	2	3
30	1	1	1	4	3
31	1	1	1	4	3

Taula 5.3.3: Dades del problema 3 dels alumnes 1r ESO fase 1

Problema 4

NOM ALUMNE	I RESPOSTA SUBJECTIVA	II RESPOSTA OBJECTIVA	III COMPRENSIÓ ENUNCIAT	IV ESTRATÈGIES HEURÍSTIQUES	V EXPRESSIÓ DE LA REALITZACIÓ
1	2	3	3	1	1
2	2	3	3	1	1
3	2	3	3	1	1
4	2	3	3	1	1
5	2	3	2	1	1
6	2	3	3	2	4
7	1	3	3	1	3
8	2	3	3	1	1
10	1	3	3	2	1
11	2	3	3	1	1
13	1	1	1	5	4
14	1	3	3	2	2
15	1	3	2	2	2
18	2	3	3	1	1
19	1	3	3	2	4
20	1	1	2	2	1
21	2	3	3	1	1
22	1	3	3	2	2
23	1	3	3	2	1
25	2	3	3	1	1
26	2	3	3	1	1
27	1	3	1	3	4
28	2	3	3	1	1
29	2	3	3	1	1
30	2	3	3	1	1
31	2	3	3	1	1

Taula 5.3.4: Dades del problema 4 dels alumnes 1r ESO fase 1

Alumnes de 1r ESO Fase 2

Problema 1:

NOM ALUMNE	I RESPOSTA SUBJECTIVA	II RESPOSTA OBJECTIVA	III COMPRENSIÓ ENUNCIAT	IV ESTRATÈGIES HEURÍSTIQUES	V EXPRESSIÓ DE LA REALITZACIÓ
1	2	3	1	1	1
2	2	3	2	1	1
3	2	3	3	1	1
4	2	3	3	1	1
5	1	1	1	2	4
6	2	3	3	1	1
7	2	3	3	1	1
8	2	3	1	1	2
10	2	3	3	2	2
11	2	3	1	1	1
13	1	3	1	2	2
14	2	3	1	1	1
15	2	3	2	1	1
18	2	3	3	1	1
19	2	3	1	1	1
20	2	3	1	1	1
21	1	2	1	2	1
22	1	3	1	2	2
23	1	3	3	2	2
25	2	3	3	1	1
26	2	3	3	1	1
27	2	3	1	1	1
28	2	3	3	1	1
29	1	3	1	2	2
30	2	3	3	1	1
31	2	3	3	1	1

Taula 5.3.5: Dades del problema 1 dels alumnes 1r ESO fase 2

Problema 2

NOM ALUMNE	I RESPOSTA SUBJECTIVA	II RESPOSTA OBJECTIVA	III COMPRENSIÓ ENUNCIAT	IV ESTRATÈGIES HEURÍSTIQUES	V EXPRESSIÓ DE LA REALITZACIÓ
1	1	1	1	4	3
2	1	3	3	2	3
3	1	1	1	4	3
4	1	2	1	2	3
5	1	2	1	2	3
6	1	2	1	2	2
7	1	2	1	2	3
8	1	1	1	4	3
10	1	1	1	3	4
11	1	1	1	3	2
13	1	1	1	4	3
14	1	1	1	4	2
15	1	2	1	2	3
18	1	2	3	2	3
19	1	1	1	4	3
20	1	2	1	2	3
21	2	3	3	1	1
22	1	2	1	2	3
23	1	2	1	2	4
25	1	1	1	4	3
26	1	2	1	2	3
27	1	2	1	4	3
28	1	1	1	4	3
29	1	1	1	4	4
30	1	1	1	4	3
31	1	1	1	4	4

Taula 5.3.6: Dades del problema 2 dels alumnes 1r ESO fase 2

Problema 3

NOM ALUMNE	I RESPOSTA SUBJECTIVA	II RESPOSTA OBJECTIVA	III COMPRENSIÓ ENUNCIAT	IV ESTRATÈGIES HEURÍSTIQUES	V EXPRESSIÓ DE LA REALITZACIÓ
1	1	3	1	2	3
2	1	3	1	1	2
3	1	1	1	4	3
4	1	1	1	4	3
5	1	1	1	4	3
6	1	1	1	4	2
7	1	1	1	4	3
8	1	1	1	4	3
10	1	3	1	1	2
11	1	3	1	1	2
13	1	1	1	3	3
14	1	3	1	3	3
15	1	3	1	2	3
18	1	3	1	2	3
19	1	1	1	4	3
20	1	3	1	2	2
21	2	3	3	1	1
22	1	3	1	2	2
23	1	3	1	2	3
25	1	1	1	4	3
26	1	1	1	4	3
27	1	3	1	2	3
28	1	3	1	2	3
29	1	1	1	4	3
30	1	1	1	4	3
31	1	1	1	4	3

Taula 5.3.7: Dades del problema 3 dels alumnes 1r ESO fase 2

Problema 4

NOM ALUMNE	I RESPOSTA SUBJECTIVA	II RESPOSTA OBJECTIVA	III COMPRENSIÓ ENUNCIAT	IV ESTRATÈGIES HEURÍSTIQUES	V EXPRESSIÓ DE LA REALITZACIÓ
1	2	3	3	1	1
2	1	3	1	3	2
3	2	3	3	1	1
4	2	3	3	3	1
5	2	3	3	1	1
6	1	3	1	2	2
7	1	3	3	2	2
8	1	3	1	3	2
10	1	3	3	2	2
11	1	3	1	2	2
13	1	1	1	5	4
14	2	3	3	1	1
15	2	3	3	1	1
18	1	3	3	2	2
19	1	3	1	2	4
20	2	3	1	1	1
21	2	3	3	1	1
22	1	3	1	3	4
23	2	3	3	1	1
25	1	1	1	5	4
26	1	1	1	5	4
27	1	3	1	1	2
28	2	3	1	1	1
29	1	3	3	2	2
30	2	3	3	1	1
31	2	3	3	1	1

Taula 5.3.8: Dades del problema 4 dels alumnes 1r ESO fase 2

Alumnes de 2n ESO fase 1

Problema 1:

NOM ALUMNE	I RESPOSTA SUBJECTIVA	II RESPOSTA OBJECTIVA	III COMPRENSIÓ ENUNCIAT	IV ESTRATÈGIES HEURÍSTIQUES	V EXPRESSIÓ DE LA REALITZACIÓ
1	2	3	2	1	1
2	2	3	3	1	1
3	2	3	1	1	1
4	2	3	3	1	1
5	2	3	3	1	1
6	2	3	3	1	1
7	2	3	3	1	1
8	2	3	1	2	2
10	2	3	1	1	1
11	2	3	3	1	1
12	2	3	3	1	1
13	2	3	3	1	1
14	2	3	3	1	1
15	2	3	3	1	1
16	2	3	3	1	1
17	2	3	3	1	1
18	2	3	3	1	1
19	2	3	3	1	1
20	2	3	3	1	1
21	2	3	2	1	4
22	2	3	3	1	1
23	2	3	3	1	1
24	1	3	1	2	2
25	2	3	2	1	1
26	1	3	3	2	2

Taula 5.3.9: Dades del problema 1 dels alumnes 2n ESO fase 1

Problema 2:

NOM ALUMNE	I RESPOSTA SUBJECTIVA	II RESPOSTA OBJECTIVA	III COMPRENSIÓ ENUNCIAT	IV ESTRATÈGIES HEURÍSTIQUES	V EXPRESSIÓ DE LA REALITZACIÓ
1	1	1	1	4	3
2	1	2	1	3	3
3	2	3	2	1	1
4	1	2	3	2	3
5	2	3	2	1	3
6	1	2	3	2	4
7	1	1	1	3	3
8	1	2	1	1	4
10	1	2	3	2	4
11	1	3	3	1	3
12	1	2	1	2	3
13	1	3	3	2	3
14	1	1	1	3	4
15	1	2	3	2	2
16	1	3	3	2	3
17	1	2	2	2	3
18	1	3	3	1	2
19	1	3	1	1	4
20	2	3	2	2	2
21	1	2	1	1	3
22	1	2	2	2	3
23	1	1	1	1	4
24	1	1	1	3	2
25	1	2	2	2	3
26	1	2	2	2	2

Taula 5.3.10: Dades del problema 2 dels alumnes 2n ESO fase 1

Problema 3:

NOM ALUMNE	I RESPOSTA SUBJECTIVA	II RESPOSTA OBJECTIVA	III COMPRENSIÓ ENUNCIAT	IV ESTRATÈGIES HEURÍSTIQUES	V EXPRESSIÓ DE LA REALITZACIÓ
1	1	3	1	2	3
2	1	3	1	1	2
3	1	3	1	1	2
4	1	3	1	2	3
5	2	3	3	1	1
6	1	3	3	1	2
7	1	3	1	3	3
8	1	3	3	1	2
10	1	3	1	2	3
11	1	3	2	3	3
12	1	3	1	2	3
13	1	3	1	2	3
14	1	3	1	2	3
15	1	3	1	2	2
16	1	3	1	2	3
17	1	3	3	2	2
18	1	3	2	1	2
19	2	3	3	1	1
20	1	3	3	2	2
21	1	3	1	1	3
22	1	3	1	2	3
23	1	3	1	1	3
24	1	3	1	2	2
25	2	3	3	2	2
26	1	3	1	2	3

Taula 5.3.11: Dades del problema 3 dels alumnes 2n ESO fase 1

Problema 4:

NOM ALUMNE	I RESPOSTA SUBJECTIVA	II RESPOSTA OBJECTIVA	III COMPRENSIÓ ENUNCIAT	IV ESTRATÈGIES HEURÍSTIQUES	V EXPRESSIÓ DE LA REALITZACIÓ
1	2	3	3	1	4
2	2	3	3	1	1
3	1	3	1	2	2
4	2	3	3	1	1
5	2	3	3	1	1
6	2	3	3	1	1
7	2	3	3	1	1
8	2	3	3	1	1
10	1	3	3	2	2
11	1	3	1	3	2
12	1	3	3	2	2
13	2	3	3	1	2
14	1	3	3	2	2
15	2	3	3	1	1
16	1	3	3	2	4
17	1	3	3	2	2
18	1	3	3	2	2
19	2	3	3	1	1
20	1	3	3	2	2
21	2	3	3	1	1
22	1	3	3	2	2
23	2	3	3	1	1
24	1	3	1	2	2
25	1	3	3	2	4
26	2	3	3	1	4

Taula 5.3.12: Dades del problema 4 dels alumnes 2n ESO fase 1

Alumnes de 2n ESO fase 2

Problema 1:

NOM ALUMNE	I RESPOSTA SUBJECTIVA	II RESPOSTA OBJECTIVA	III COMPRENSIÓ ENUNCIAT	IV ESTRATÈGIES HEURÍSTIQUES	V EXPRESSIÓ DE LA REALITZACIÓ
1	2	3	1	1	1
2	2	3	1	1	4
3	2	3	3	1	1
4	2	3	3	1	1
5	2	3	2	1	1
6	2	3	1	1	4
7	2	3	3	1	1
8	2	3	3	1	1
10	2	3	3	1	1
11	1	3	2	1	4
12	2	3	3	1	1
13	2	3	3	1	1
14	2	3	3	1	1
15	2	3	3	1	1
16	2	3	3	1	1
17	2	3	1	1	2
18	1	3	2	1	4
19	2	3	1	1	4
20	2	3	1	1	1
21	2	3	2	1	4
22	2	3	3	1	1
23	2	3	3	1	1
24	2	3	3	1	1
25	2	3	3	1	1
26	1	3	1	1	1

Taula 5.3.13: Dades del problema 1 dels alumnes 2n ESO fase 2

Problema 2:

NOM ALUMNE	I RESPOSTA SUBJECTIVA	II RESPOSTA OBJECTIVA	III COMPRENSIÓ ENUNCIAT	IV ESTRATÈGIES HEURÍSTIQUES	V EXPRESSIÓ DE LA REALITZACIÓ
1	1	1	1	4	3
2	1	1	1	4	4
3	1	1	1	4	5
4	1	1	1	4	4
5	2	3	3	2	3
6	1	1	1	4	4
7	1	1	1	4	4
8	1	2	1	4	3
10	1	1	1	4	5
11	1	1	1	4	3
12	1	2	3	2	2
13	1	1	1	3	4
14	1	1	1	3	1
15	1	1	1	3	4
16	1	1	1	3	3
17	1	1	1	3	4
18	1	3	2	1	3
19	1	1	1	3	4
20	1	1	1	3	4
21	1	1	1	3	4
22	1	2	1	4	4
23	1	1	1	3	4
24	1	1	1	3	4
25	1	1	1	3	4
26	1	3	2	1	2

Taula 5.3.14: Dades del problema 2 dels alumnes 2n ESO fase 2

Problema 3:

NOM ALUMNE	I RESPOSTA SUBJECTIVA	II RESPOSTA OBJECTIVA	III COMPRENSIÓ ENUNCIAT	IV ESTRATÈGIES HEURÍSTIQUES	V EXPRESSIÓ DE LA REALITZACIÓ
1	1	1	1	5	3
2	1	3	1	2	2
3	2	3	1	1	1
4	1	3	1	1	3
5	1	3	3	2	3
6	1	3	1	2	3
7	1	3	1	3	3
8	1	3	1	2	3
10	1	3	1	2	3
11	1	3	1	2	3
12	1	3	1	2	3
13	1	3	1	2	3
14	1	3	1	2	3
15	1	1	1	4	2
16	1	3	1	2	2
17	2	3	1	2	3
18	1	3	1	2	3
19	1	3	1	2	3
20	1	3	1	2	3
21	1	3	1	2	3
22	1	3	1	2	2
23	1	3	1	2	3
24	1	3	1	2	3
25	2	3	1	2	3
26	2	3	1	1	3

Taula 5.3.15: Dades del problema 3 dels alumnes 2n ESO fase 2

Problema 4:

NOM ALUMNE	I RESPOSTA SUBJECTIVA	II RESPOSTA OBJECTIVA	III COMPRENSIÓ ENUNCIAT	IV ESTRATÈGIES HEURÍSTIQUES	V EXPRESSIÓ DE LA REALITZACIÓ
1	2	3	3	1	4
2	1	1	1	5	4
3	2	3	3	3	4
4	1	3	1	3	4
5	1	3	3	2	3
6	2	3	3	1	1
7	1	3	3	2	4
8	1	1	1	5	4
10	1	3	3	2	2
11	2	3	3	1	1
12	1	3	3	2	4
13	1	3	1	3	2
14	1	3	3	2	1
15	1	3	3	2	2
16	1	3	3	2	2
17	1	3	3	2	4
18	1	3	3	2	2
19	2	3	1	3	2
20	1	3	3	3	4
21	2	3	3	1	1
22	1	3	1	2	4
23	2	3	1	3	3
24	2	2	1	4	4
25	2	3	3	1	1
26	2	3	3	1	4

Taula 5.3.16: Dades del problema 4 dels alumnes 2n ESO fase 2

Alumnes de 3r ESO fase 1

Problema 1:

NOM ALUMNE	I RESPOSTA SUBJECTIVA	II RESPOSTA OBJECTIVA	III COMPRENSIÓ ENUNCIAT	IV ESTRATÈGIES HEURÍSTIQUES	V EXPRESSIÓ DE LA REALITZACIÓ
1	2	3	3	1	1
2	2	3	1	1	1
3	1	2	1	2	2
4	2	3	3	1	1
5	1	3	3	2	2
6	1	3	1	2	2
7	2	3	1	1	1
8	1	1	1	4	4
9	1	3	1	2	2
10	2	3	1	1	1
11	2	3	3	1	1
12	1	2	1	3	2
13	2	3	1	2	2
14	1	3	1	2	2
15	1	1	1	1	2
16	1	2	1	2	2
17	2	3	3	1	1
18	1	2	2	2	4
19	1	2	1	2	4
20	2	3	1	3	4
21	1	2	1	2	4
22	2	3	3	1	1
23	2	3	1	1	1
24	2	3	1	1	1
25	1	3	1	2	4
26	1	1	1	5	4
27	1	3	3	2	2
28	1	2	1	2	2

Taula 5.3.17: Dades del problema 1 dels alumnes 3r ESO fase 1

Problema 2:

NOM ALUMNE	I RESPOSTA SUBJECTIVA	II RESPOSTA OBJECTIVA	III COMPRENSIÓ ENUNCIAT	IV ESTRATÈGIES HEURÍSTIQUES	V EXPRESSIÓ DE LA REALITZACIÓ
1	1	2	1	1	2
2	2	3	2	1	3
3	1	2	3	2	3
4	1	2	1	2	4
5	1	2	1	2	3
6	1	2	1	2	4
7	1	2	1	2	4
8	1	3	3	2	4
9	1	2	1	2	3
10	1	2	1	2	3
11	1	1	1	4	3
12	2	3	1	1	1
13	1	3	1	1	2
14	1	2	1	2	3
15	1	2	1	2	3
16	1	2	1	2	2
17	1	2	1	3	4
18	1	1	1	4	4
19	1	2	3	2	3
20	1	1	1	4	3
21	1	2	1	2	3
22	1	3	1	2	4
23	1	1	1	3	2
24	1	2	1	2	2
25	1	3	1	2	2
26	1	1	1	3	3
27	1	2	1	1	2
28	1	2	1	1	2

Taula 5.3.18: Dades del problema 2 dels alumnes 3r ESO fase 1

Problema 3:

NOM ALUMNE	I RESPOSTA SUBJECTIVA	II RESPOSTA OBJECTIVA	III COMPRENSIÓ ENUNCIAT	IV ESTRATÈGIES HEURÍSTIQUES	V EXPRESSIÓ DE LA REALITZACIÓ
1	1	3	1	2	3
2	1	3	1	2	3
3	1	3	1	2	3
4	1	3	1	1	2
5	2	3	1	2	3
6	1	3	1	2	3
7	1	3	1	2	3
8	1	3	1	2	3
9	1	3	1	2	3
10	1	3	2	1	2
11	2	3	3	2	1
12	2	3	1	1	1
13	1	3	1	2	3
14	1	3	1	2	3
15	1	3	1	2	3
16	1	3	1	1	3
17	1	3	1	2	3
18	1	3	1	2	3
19	1	3	1	2	3
20	1	3	1	2	3
21	2	3	3	1	1
22	1	3	1	2	3
23	2	3	3	1	1
24	1	3	1	2	2
25	1	3	1	2	3
26	1	3	1	1	2
27	1	3	1	1	3
28	1	1	1	3	2

Taula 5.3.19: Dades del problema 3 dels alumnes 3r ESO fase 1

Problema 4:

NOM ALUMNE	I RESPOSTA SUBJECTIVA	II RESPOSTA OBJECTIVA	III COMPRENSIÓ ENUNCIAT	IV ESTRATÈGIES HEURÍSTIQUES	V EXPRESSIÓ DE LA REALITZACIÓ
1	2	3	3	1	1
2	2	3	1	1	1
3	1	3	3	2	4
4	2	3	3	1	1
5	2	3	1	2	4
6	2	3	3	1	2
7	2	3	3	1	1
8	1	3	3	2	2
9	2	3	3	1	1
10	1	3	3	2	2
11	1	1	1	5	4
12	2	3	1	2	4
13	2	3	1	1	2
14	2	3	3	1	2
15	2	3	3	1	1
16	2	3	3	1	1
17	2	3	3	1	2
18	2	3	3	1	1
19	2	3	3	1	1
20	2	3	1	4	4
21	2	3	3	1	1
22	2	3	3	2	4
23	2	3	3	1	1
24	2	3	3	1	1
25	2	3	3	1	2
26	1	2	1	3	4
27	1	3	3	1	3
28	2	3	3	2	2

Taula 5.3.20: Dades del problema 4 dels alumnes 3r ESO fase 1

Alumnes de 3r ESO fase 2

Problema 1:

NOM ALUMNE	I RESPOSTA SUBJECTIVA	II RESPOSTA OBJECTIVA	III COMPRENSIÓ ENUNCIAT	IV ESTRATÈGIES HEURÍSTIQUES	V EXPRESSIÓ DE LA REALITZACIÓ
1	2	3	3	1	1
2	1	3	1	1	1
3	1	3	1	3	2
4	1	4	3	3	4
5	1	4	1	2	2
6	1	3	1	2	2
7	2	3	3	1	1
8	1	1	1	4	4
9	1	3	2	3	4
10	2	3	1	1	1
11	2	3	3	3	4
12	1	1	1	4	4
13	2	3	3	2	1
14	1	3	3	2	2
15	1	3	2	1	1
16	1	4	1	2	2
17	2	3	1	2	1
18	2	3	1	1	1
19	2	3	1	1	1
20	2	3	1	3	4
21	2	3	3	1	1
22	2	3	3	1	1
23	2	3	1	1	1
24	1	3	2	3	4
25	2	3	1	1	1
26	1	1	1	5	4
27	1	3	1	2	2
28	1	1	1	1	4

Taula 5.3.21: Dades del problema 1 dels alumnes 3r ESO fase 2

Problema 2:

NOM ALUMNE	I RESPOSTA SUBJECTIVA	II RESPOSTA OBJECTIVA	III COMPRENSIÓ ENUNCIAT	IV ESTRATÈGIES HEURÍSTIQUES	V EXPRESSIÓ DE LA REALITZACIÓ
1	1	2	1	1	2
2	1	1	1	4	3
3	1	1	1	3	4
4	1	4	1	4	3
5	1	2	1	2	3
6	1	2	1	2	4
7	1	1	1	4	4
8	1	1	1	2	3
9	1	1	1	4	3
10	1	1	1	4	3
11	1	1	1	4	3
12	1	1	1	5	5
13	1	2	1	2	3
14	1	1	1	4	4
15	1	1	1	4	3
16	1	1	1	4	3
17	1	1	1	3	4
18	1	1	1	4	4
19	1	1	1	3	3
20	1	1	1	4	3
21	1	1	1	4	3
22	1	2	1	2	3
23	1	1	1	4	3
24	1	1	1	4	3
25	1	2	1	2	3
26	1	1	1	3	3
27	1	2	1	2	3
28	1	2	1	2	3

Taula 5.3.22: Dades del problema 2 dels alumnes 3r ESO fase 2

Problema 3:

NOM ALUMNE	I RESPOSTA SUBJECTIVA	II RESPOSTA OBJECTIVA	III COMPRENSIÓ ENUNCIAT	IV ESTRATÈGIES HEURÍSTIQUES	V EXPRESSIÓ DE LA REALITZACIÓ
1	1	3	2	2	3
2	1	3	1	2	3
3	1	3	2	2	3
4	1	3	1	2	3
5	1	3	1	2	3
6	1	3	1	2	3
7	1	3	1	2	3
8	1	3	1	2	3
9	1	3	1	2	3
10	2	3	1	2	2
11	2	3	3	2	1
12	1	3	1	3	3
13	1	3	1	2	3
14	1	3	1	2	2
15	1	3	1	2	3
16	1	3	1	2	3
17	1	3	1	2	3
18	1	3	1	2	3
19	1	3	1	2	3
20	1	3	1	2	3
21	2	3	3	2	1
22	1	3	1	2	3
23	1	3	1	2	3
24	1	3	1	2	3
25	1	3	1	2	3
26	1	3	1	1	2
27	1	3	1	2	3
28	1	1	1	3	3

Taula 5.3.23: Dades del problema 3 dels alumnes 3r ESO fase 2

Problema 4:

NOM ALUMNE	I RESPOSTA SUBJECTIVA	II RESPOSTA OBJECTIVA	III COMPRENSIÓ ENUNCIAT	IV ESTRATÈGIES HEURÍSTIQUES	V EXPRESSIÓ DE LA REALITZACIÓ
1	2	3	3	1	1
2	2	3	3	2	4
3	1	3	3	2	4
4	1	3	3	2	2
5	2	3	3	2	4
6	2	3	3	1	2
7	2	3	3	1	1
8	1	1	1	5	4
9	2	3	3	1	1
10	1	3	3	2	4
11	1	1	1	5	4
12	1	2	1	4	4
13	2	3	3	1	1
14	2	3	1	1	2
15	2	3	3	1	1
16	2	3	3	1	1
17	2	3	3	1	4
18	2	3	3	1	1
19	1	3	3	3	4
20	1	3	1	4	4
21	1	1	1	5	4
22	1	3	3	2	2
23	1	3	3	2	4
24	2	3	3	3	2
25	2	3	3	1	1
26	1	1	1	4	4
27	1	3	3	2	3
28	1	3	1	2	2

Taula 5.3.24: Dades del problema 4 dels alumnes 3r ESO fase 2

Alumnes d'ESTALMAT fase 1

Problema 1:

NOM ALUMNE	I RESPOSTA SUBJECTIVA	II RESPOSTA OBJECTIVA	III COMPRENSIÓ ENUNCIAT	IV ESTRATÈGIES HEURÍSTIQUES	V EXPRESSIÓ DE LA REALITZACIÓ
1	2	3	2	1	1
2	2	3	2	1	1
3	1	1	1	2	4
4	1	3	1	3	4
5	1	1	1	2	4
6	1	1	1	3	4
7	1	3	1	2	4
8	1	3	1	2	4
9	1	3	1	2	3
10	1	1	1	4	4
11	1	1	1	4	4
12	2	3	2	1	1
13	1	1	1	4	4
14	2	3	2	1	1
15	1	1	1	4	5
16	1	3	1	2	4
17	1	1	1	2	4
18	1	3	1	2	4
19	1	1	1	4	4
20	1	1	1	2	5
21	1	1	1	3	2
22	2	3	2	1	1
23	1	1	1	2	4
24	1	3	1	2	4

Taula 5.3.25: Dades del problema 1 dels alumnes ESTALMAT fase 1

Problema 2:

NOM ALUMNE	I RESPOSTA SUBJECTIVA	II RESPOSTA OBJECTIVA	III COMPRENSIÓ ENUNCIAT	IV ESTRATÈGIES HEURÍSTIQUES	V EXPRESSIÓ DE LA REALITZACIÓ
1	2	2	1	2	3
2	2	3	2	1	1
3	2	3	2	1	1
4	2	3	2	1	1
5	1	2	1	2	3
6	2	3	2	1	1
7	1	1	1	3	4
8	1	1	1	4	5
9	1	1	1	4	5
10	2	3	1	2	3
11	1	1	1	4	3
12	1	1	1	5	5
13	1	1	1	5	5
14	1	1	1	3	2
15	1	1	1	4	3
16	1	1	1	4	3
17	1	1	1	5	5
18	1	1	1	5	5
19	1	3	2	2	3
20	1	1	1	4	3
21	1	1	1	4	2
22	2	3	2	1	1
23	1	1	1	5	5
24	1	1	1	4	4

Taula 5.3.26: Dades del problema 2 dels alumnes ESTALMAT fase 1

Problema 3:

NOM ALUMNE	I RESPOSTA SUBJECTIVA	II RESPOSTA OBJECTIVA	III COMPRENSIÓ ENUNCIAT	IV ESTRATÈGIES HEURÍSTIQUES	V EXPRESSIÓ DE LA REALITZACIÓ
1	2	3	1	1	4
2	2	3	2	1	1
3	2	3	2	1	1
4	2	3	2	1	1
5	2	3	2	1	1
6	2	3	2	1	1
7	2	3	2	1	1
8	1	3	1	2	3
9	1	3	2	2	3
10	2	3	2	1	1
11	1	3	2	2	3
12	1	3	1	2	2
13	1	3	1	2	3
14	1	3	1	2	2
15	1	3	1	2	3
16	2	3	2	1	1
17	2	3	2	1	1
18	1	3	1	2	3
19	1	3	1	2	3
20	2	1	1	2	3
21	1	3	1	2	2
22	2	3	2	1	1
23	1	3	1	2	2
24	2	3	1	2	2

Taula 5.3.27: Dades del problema 3 dels alumnes ESTALMAT fase 1

Problema 4:

NOM ALUMNE	I RESPOSTA SUBJECTIVA	II RESPOSTA OBJECTIVA	III COMPRENSIÓ ENUNCIAT	IV ESTRATÈGIES HEURÍSTIQUES	V EXPRESSIÓ DE LA REALITZACIÓ
1	2	3	2	2	4
2	2	3	1	3	4
3	1	3	1	3	3
4	1	1	1	5	4
5	2	3	2	1	1
6	2	3	2	1	1
7	1	3	3	2	4
8	2	3	2	1	1
9	2	2	1	3	4
10	2	3	2	1	1
11	1	1	1	5	3
12	2	3	2	1	1
13	2	3	3	2	4
14	2	3	2	1	4
15	2	3	2	1	1
16	2	3	2	1	1
17	2	3	1	1	4
18	1	1	1	5	4
19	2	3	1	2	4
20	2	3	1	2	4
21	1	2	1	3	4
22	2	3	2	1	1
23	2	3	2	1	1
24	1	2	1	3	4

Taula 5.3.28: Dades del problema 4 dels alumnes ESTALMAT fase 1

Alumnes d'ESTALMAT fase 2

Problema 1:

NOM ALUMNE	I RESPOSTA SUBJECTIVA	II RESPOSTA OBJECTIVA	III COMPRENSIÓ ENUNCIAT	IV ESTRATÈGIES HEURÍSTIQUES	V EXPRESSIÓ DE LA REALITZACIÓ
1	2	3	1	2	4
2	1	1	1	2	4
3	1	1	1	2	4
4	1	1	1	2	4
5	1	1	1	5	4
6	1	1	1	2	4
7	1	3	1	2	4
8	1	1	1	5	4
9	1	1	1	5	4
10	1	1	1	5	4
11	1	1	1	4	4
12	1	1	1	4	4
13	1	1	1	4	4
14	1	1	1	5	4
15	1	1	1	4	4
16	1	1	1	4	4
17	1	1	1	5	2
18	1	1	1	5	4
19	1	1	1	5	4
20	1	1	1	5	4
21	1	1	1	5	4
22	1	1	1	5	4
23	1	1	1	5	4
24	1	1	1	4	4

Taula 5.3.29: Dades del problema 1 dels alumnes ESTALMAT fase 2

Problema 2:

NOM ALUMNE	I RESPOSTA SUBJECTIVA	II RESPOSTA OBJECTIVA	III COMPRENSIÓ ENUNCIAT	IV ESTRATÈGIES HEURÍSTIQUES	V EXPRESSIÓ DE LA REALITZACIÓ
1	1	1	1	5	5
2	1	2	1	2	3
3	2	3	3	1	1
4	1	1	1	4	3
5	1	1	1	4	3
6	1	1	1	5	5
7	2	3	3	1	1
8	1	1	1	3	2
9	1	1	1	5	5
10	1	1	1	4	5
11	2	3	3	1	1
12	1	2	3	2	2
13	1	2	1	2	2
14	1	1	1	3	2
15	1	3	1	2	2
16	1	1	1	4	3
17	1	1	1	4	5
18	1	1	1	4	5
19	1	1	1	5	5
20	1	1	1	4	3
21	1	1	1	5	5
22	1	3	1	1	2
23	1	1	1	5	5
24	1	1	1	4	3

Taula 5.3.30: Dades del problema 2 dels alumnes ESTALMAT fase 2

Problema 3:

NOM ALUMNE	I RESPOSTA SUBJECTIVA	II RESPOSTA OBJECTIVA	III COMPRENSIÓ ENUNCIAT	IV ESTRATÈGIES HEURÍSTIQUES	V EXPRESSIÓ DE LA REALITZACIÓ
1	2	3	1	1	1
2	1	3	1	2	3
3	2	3	3	1	1
4	1	3	1	2	3
5	1	3	1	2	5
6	1	3	1	2	3
7	1	3	1	2	3
8	1	3	1	2	3
9	1	3	1	2	3
10	1	3	1	2	3
11	2	3	3	1	1
12	2	3	1	1	2
13	1	3	1	2	3
14	2	3	1	1	2
15	2	3	3	1	1
16	1	3	1	2	3
17	2	3	1	3	3
18	2	3	1	2	3
19	1	3	1	2	3
20	1	1	1	5	4
21	1	3	1	2	3
22	1	3	1	2	2
23	2	3	3	1	1
24	1	3	1	2	3

Taula 5.3.31: Dades del problema 3 dels alumnes ESTALMAT fase 2

Problema 4:

NOM ALUMNE	I RESPOSTA SUBJECTIVA	II RESPOSTA OBJECTIVA	III COMPRENSIÓ ENUNCIAT	IV ESTRATÈGIES HEURÍSTIQUES	V EXPRESSIÓ DE LA REALITZACIÓ
1	1	3	3	2	4
2	2	3	3	1	1
3	2	3	3	1	1
4	2	3	3	1	1
5	2	3	3	1	1
6	1	3	1	2	4
7	1	3	1	2	4
8	1	1	1	5	4
9	1	1	1	5	5
10	1	1	1	5	5
11	2	3	3	1	1
12	1	1	1	5	2
13	1	1	1	5	5
14	1	1	1	5	2
15	1	3	1	2	2
16	1	1	1	5	2
17	1	1	1	5	4
18	1	1	1	5	4
19	1	1	1	5	4
20	1	1	1	5	4
21	1	1	1	5	5
22	1	1	1	5	4
23	2	3	3	1	1
24	1	1	1	5	4

Taula 5.3.32: Dades del problema 4 dels alumnes ESTALMAT fase 2

3. ENTREVISTES PERSONALS

ENQUESTA ALS ALUMNES QUE HAN TROBAT LA SOLUCIÓ D'ALGUN PROBLEMA EN LA FASE 2 I NO L'HAVIEN TROBAT A LA FASE 1

Preguntes:

1. Creus que et va ajudar treballar els jocs?
2. Quin joc t'ha ajudat?

ALUMNES 1 ESO

Han resolt el problema 2 en la fase 2 i no en la fase 1

Alumne 3: Vaig llegir millor l'enunciat. No rec que m'hagin ajudat els jocs.
Alumne 11: Vaig llegir millor l'enunciat. Crec que treballar els jocs m'ha agilitzat mentalment.
Alumne 14: Em vaig fixar millor la segona vegada. No sé si m'han ajudat.
Alumne 19: La segona vegada em vaig concentrar més. Crec que m'ha ajudat pensar en el joc de la Reina.
Alumne 31: Crec que em van ajudar els jocs però no recordo quin.

Han resolt el problema 3 en la fase 2 i no en la fase 1

Alumne 4: Vam treballar un problema semblant a classe de matemàtiques.

Han resolt el problema 4 en la fase 2 i no en la fase 1

Alumne 25: M'han ajudat els jocs per haver treballat l'estratègia d'anar cap darrera.
Alumne 26: M'han ajudat els jocs perquè m'han donat la idea de començar pel final.

ALUMNES 2 ESO

Han resolt el problema 2 en la fase 2 i no en la fase 1

Alumne 2: Crec que m'han ajudat els jocs en general.
Alumne 4: M'ha ajudat el joc del 15.
Alumne 6: Em vaig fixar millor la segona vegada. No sé si m'han ajudat.
Alumne 10: La primera vegada no vaig entendre l'enunciat. No crec que m'hagin ajudat.
Alumne 11: Em vaig fixar millor la segona vegada. No sé si m'han ajudat.
Alumne 15: M'ha ajudat el joc del 15.
Alumne 16: Crec que m'han ajudat els jocs en general.
Alumne 17: M'ha ajudat el joc del 15.
Alumne 19: M'ha ajudat el joc de la reina.
Alumne 20: Em vaig fixar millor la segona vegada. No sé si m'han ajudat.
Alumne 21: No crec que m'hagin ajudat els jocs.
Alumne 25: M'ha ajudat el joc de la Reina.

ALUMNES 3 ESO

Han resolt el problema 2 en la fase 2 i no en la fase 1

Alumne 2: La segona vegada vaig llegir millor l'enunciat. No sé si m'han ajudat.
Alumne 3: M'ha ajudat el joc del 15.
Alumne 7: Em vaig concentrar més la segona vegada. M'han ajudat en general.
Alumne 9: M'ha ajudat el joc de la reina per veure els camins simètrics.
Alumne 10: La primera vegada no vaig entendre l'enunciat. No crec que m'hagin ajudat.
Alumne 11: Crec que m'han ajudat els jocs en general.
Alumne 14: M'ha ajudat el joc de la reina.
Alumne 15: Els jocs m'han ajudat en general però en aquest problema no.

Alumne 16: La segona vegada m'hi vaig fixar més. No sé si em van ajudar els jocs.
Alumne 17: Crec que m'han ajudat els jocs en general.
Alumne 19: M'ha ajudat el joc de la Reina.
Alumne 21: No crec que m'hagin ajudat els jocs.
Alumne 24: Gràcies als jocs estava més motivat per intentar-ho.

Han resolt el problema 4 en la fase 2 i no en la fase 1

Alumne 8: Crec que els jocs em van donar la idea de començar pel final.
Alumne 11: Crec que els jocs em van donar la idea de començar pel final.
Alumne 21: La primera vegada no me'l vaig mirar gaire perquè em vaig dedicar més al primer. Era fàcil, crec que m'hauria sortit la primera vegada.

ALUMNES ESTALMAT

Han resolt el problema 1 en la fase 2 i no en la fase 1

Alumne 2: No crec que m'hagin ajudat els jocs.
Alumne 4: M'ha ajudat el joc del 15.
Alumne 8: Crec que m'han ajudat els jocs en general.
Alumne 9: M'ha ajudat el joc del 15.
Alumne 12: No crec que m'hagin ajudat els jocs.
Alumne 14: Crec que m'han ajudat els jocs en general.
Alumne 16: No sé si m'han ajudat els jocs.
Alumne 18: M'ha ajudat el joc del 15.
Alumne 22: No sé si m'han ajudat els jocs.
Alumne 24: Crec que m'han ajudat els jocs en general.

Han resolt el problema 2 en la fase 2 i no en la fase 1

Alumne 1: No sé si m'han ajudat els jocs.
Alumne 4: M'ha ajudat el joc de la reina.
Alumne 5: La segona vegada m'hi faig fixar més, no m'han ajudat.

Alumne 6: M'ha ajudat el joc de la reina.
Alumne10: No sé si m'han ajudat els jocs.

Han resolt el problema 3 en la fase 2 i no en la fase 1

Alumne 20: No sé si m'han ajudat els jocs.

Han resolt el problema 4 en la fase 2 i no en la fase

Alumne 9: M'han ajudat en general.
Alumne10: No sé si m'han ajudat els jocs.
Alumne 12: No crec que m'hagin ajudat.
Alumne 13: M'han ajudat en general.
Alumne 14: M'han ajudat en general.
Alumne 16: No sé si m'han ajudat.
Alumne 19: Crec que els jocs em van donar la idea de començar pel final.
Alumne 20: M'han ajudat en general.
Alumne 21: Crec que els jocs em van donar la idea de començar pel final.
Alumne 22: No sé si m'han ajudat els jocs.
Alumne 24: M'han ajudat en general.