Aproximación a la relación entre el conocimiento del profesor y el establecimiento de conexiones en el aula

Autor:

Genaro de Gamboa Rojas

Directora:

Edelmira Badillo Jiménez

Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales

Facultad de Ciencias de la Educación

Universidad Autónoma de Barcelona

Tesis doctoral presentada para la obtención del título de Doctor en Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias por la Universidad Autónoma de Barcelona

Diseño de la portada:
Aikaterini Filippakopoulou Valenzuela

Idea original basada en recuerdos de la isla de Ikaria.

A mis padres

Tabla de contenidos

1 Introducción

El presente trabajo de investigación se enmarca dentro del Programa de Doctorado en Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales de la Universidad Autónoma de Barcelona. El interés por la temática del trabajo surge a partir de trabajos anteriores del autor (De Gamboa, 2011; De Gamboa, Deulofeu, y Figueiras, 2012), en el marco del Programa de Máster en Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, relacionados con el estudio del conocimiento del profesor, y en los que las conexiones aparecían relacionadas implícitamente con el conocimiento del profesor de maneras diversas.

En este trabajo de tesis doctoral se pretende mostrar una aproximación a la relación entre el conocimiento del profesor de matemáticas y el establecimiento de conexiones en el aula de matemáticas. El trabajo se estructura en seis partes, una introducción donde se presenta la pregunta y los objetivos de investigación; una discusión de la literatura relacionada con el establecimiento de conexiones en el aula y con el conocimiento del profesor; una justificación del diseño metodológico; una exposición detallada del análisis de los datos; una presentación de resultados; y finalmente la discusión de los resultados, las conclusiones finales, y una valoración de las limitaciones y la prospectiva del estudio.

En este primer capítulo se presenta la problemática que motiva este estudio y se detalla el planteamiento del mismo. En primer lugar, se relaciona la investigación con el campo de investigación en Didáctica de las Matemáticas que trabaja sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas. A continuación, se concreta la pregunta de investigación y se explican detalladamente los objetivos que se establecen.

1.1 Problemática y justificación de la relevancia del estudio

Diversos modelos del conocimiento del profesorado propuestos desde la investigación y el análisis de la práctica hacen referencia a la importancia de establecer conexiones en el aula de matemáticas. En el modelo MKT, Ball, Thames y Phelps (2008) se refieren a las conexiones en la categoría del Conocimiento del Horizonte Matemático como un indicador de la conciencia del profesor sobre cómo se relacionan los contenidos matemáticos a lo largo del currículo matemático escolar. Algunos autores (Por ejemplo, Martínez, Giné, Fernandez, Figueiras y Deulofeu, 2011) señalan que las conexiones van más allá de esta categoría y que permiten articular otros subdominios de conocimiento del profesor.

En el modelo del Conocimiento Especializado del profesor de matemáticas (Carrillo Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013), las conexiones aparecen también en la descripción de algunos de sus subdominios de conocimiento. En el caso del Conocimiento de la Estructura Matemática emergen como un aspecto esencial que hace énfasis en entender las matemáticas como un sistema de conexiones y, en el caso del Conocimiento de la Actividad Matemática, las conexiones permiten relacionar implícitamente diferentes formas de definir, argumentar o demostrar en matemáticas.

El modelo del Knowledge Quartet (Rowland, Twaites y Huckstep, 2009), considera que el establecimiento de conexiones en el aula representa un elemento clave en la práctica docente, que se relaciona con la capacidad del profesor para conectar diferentes lecciones, conectar ideas matemáticas o conectar diferentes partes de una lección. Respecto a su relación con la clasificación del conocimiento propuesta por Shulman (1986), la dimensión de conexión constituye una manifestación de diferentes tipos de conocimiento, como pueden ser los conocimientos de los contenidos o los conocimientos pedagógicos relacionados con los contenidos (Rowland et al, 2009).

Se observa que las conexiones aparecen, por un lado, como un conocimiento teórico del profesor en los modelos de Ball et al (2008) y Carrillo et al (2013), y por otro, como un tipo de acción del profesor que se puede observar en sus prácticas de aula, en el modelo de Rowland et al (2009). Esta perspectiva práctica sitúa a las conexiones en un contexto de aula y, por tanto, las relaciona con la construcción de conocimiento matemático que realizan los alumnos.

En este sentido, diversos autores señalan que el establecimiento de conexiones por parte de los alumnos los ayuda a construir un conocimiento matemático profundo y duradero (Bamberger y Oderdorf, 2007). Esta influencia, en clave positiva, de las conexiones en la construcción de conocimiento matemático de los alumnos coincide además con diversas directrices desde la política educativa que hacen énfasis en la importancia del establecimiento de conexiones en el aula para mejorar el conocimiento matemático de los estudiantes (Por ejemplo, NCTM, 2000; Generalitat de Catalunya, 2007).

Así pues, las conexiones aparecen, en la literatura sobre Didáctica de las Matemáticas, como un componente del conocimiento; como un indicador de conocimiento en el aula; como un proceso mental que realizan los alumnos y que favorece la construcción de un conocimiento matemático sólido y duradero; y, como una indicación curricular.

En consecuencia, se plantea una investigación dirigida, en primer lugar, a definir y caracterizar las conexiones que se producen en un contexto de aula, en una clase de matemáticas y, en segundo lugar, a explorar de qué manera el conocimiento de un profesor de matemáticas se moviliza de manera explícita para favorecer el establecimiento de una conexión en el aula.

1.2 Pregunta y objetivos de investigación

La problemática presentada sugiere la existencia de una relación entre el conocimiento del profesor y el establecimiento de conexiones en el aula. Con el objetivo de contribuir a la comprensión de dicha relación se plantea la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo influye el conocimiento matemático del profesor en el establecimiento de conexiones en el aula?

Tal y como se explica en el apartado anterior la relación que se pretende explorar relaciona elementos de naturaleza distinta, como son el conocimiento y las conexiones. La revisión de la literatura de investigación sobre conexiones en el aula de matemáticas no permitió establecer una definición ni una caracterización de las conexiones que se establecen en el aula de matemáticas por lo que se plantean, en una primera parte de la investigación, objetivos dirigidos a definir y clasificar las conexiones que se establecen en el aula. Dado que para el conocimiento sí que existen diversos modelos que los caracterizan, no se considera necesario un estudio empírico para la caracterización del mismo, y se plantean, en la segunda parte de la investigación, objetivos dirigidos a explorar cuáles son las características del conocimiento que intervienen en el establecimiento de conexiones y cómo se interrelacionan tales características.

Así pues, el interés de la investigación se dirige a la actividad de aula y se definen los siguientes objetivos de investigación:

O1. Identificar conexiones que se establecen en sesiones reales de aula y analizar sus características.

O2. Construir una definición de conexión matemática desde una perspectiva práctica en un contexto de aula y establecer criterios de clasificación para las conexiones en un contexto de aula.

O3. Relacionar tipologías de conocimiento matemático del profesor con las características de cada tipología de conexiones.

O4. Analizar las relaciones que se establezcan entre diferentes tipos de conocimiento del profesor, para el establecimiento de conexiones en el aula.

El primer objetivo se relaciona con la ausencia de una construcción teórica relacionada con la caracterización de las conexiones en el aula. Se parte de una definición cercana a su significado natural que se complementa con las características que se identifican en la literatura en investigación en Educación Matemática referida a conexiones. Una vez establecida esta definición preliminar realiza una aproximación a los datos de aula con el objetivo de establecer características de las conexiones que se producen en un contexto de aula y construir una caracterización que nos permita analizar la práctica de aula.

El segundo objetivo está estrechamente ligado al primero ya que para realizar la construcción teórica anterior es necesario realizar una primera aproximación a los datos de aula en busca de situaciones de aula en las cuales aparezcan conexiones –siguiendo la definición preliminar–. El análisis de estas situaciones nos permite pasar al tercer objetivo, que es la identificación de características claves de las conexiones en un contexto de aula. La identificación de estas características puede modificar la definición de conexión matemática (O1) y, por tanto, la identificación de relaciones en el aula que se puedan llamar conexiones (O2).

Por tanto, los dos primeros objetivos se desarrollan de manera cíclica. Partiendo de una definición teórica preliminar se analizan los datos de aula y se identifican conexiones. La identificación de estas conexiones en el aula nos permite analizar sus características básicas y, en consecuencia, afinar la definición inicial, lo que lleva una vez más a reconsiderar las situaciones susceptibles de presentar conexiones y mejorar la caracterización de las conexiones. Este proceso se explica de manera detallada en el apartado de análisis.

Los dos últimos objetivos pretenden relacionar las conexiones con el conocimiento del profesor. El tercer objetivo O3 tiene que ver con la identificación de características del conocimiento del profesor que aparezcan durante las situaciones de aula en las que se identifica que se han establecido conexiones. Así pues, se pretende relacionar, en nuestro contexto, tipologías de conexiones construidas en O2 con las tipologías del conocimiento del profesor que se proponen en el posicionamiento teórico sobre el conocimiento.

La identificación de estas relaciones introduce el cuarto y último objetivo, que consiste en analizar dichas relaciones con el objeto de explorar la relación general existente entre el establecimiento de conexiones en el aula y el conocimiento del profesor. En definitiva, se busca una aproximación a entender qué aspectos del conocimiento pueden favorecer más el establecimiento de conexiones y cómo dichas conexiones influyen en la forma en que el profesor coordina y estructura su propio conocimiento.

2. Marco teórico

En este capítulo se presenta el posicionamiento teórico, basado en la revisión de la literatura especializada, en relación a lo que entiende por conexión en el aula de matemáticas y por conocimiento del profesor de matemáticas. En el caso de las conexiones se analizan las conexiones matemáticas como relaciones entre contenidos matemáticos o entre contenidos matemáticos y contextos externos a las matemáticas que existen, a priori, en la actividad de aula. Después, se discute la importancia que tienen las conexiones en la construcción de conocimiento matemático por parte de los alumnos. A continuación, se presenta el posicionamiento inicial acerca del papel de las conexiones en el conocimiento matemático del profesor, así como algunas observaciones sobre las dificultades que encuentran los profesores para establecer y utilizar conexiones en el aula. Para la caracterización del conocimiento del profesor se analizan diferentes modelos (Ball et al, 2008; Petrou y Goulding, 2011; Carrillo et al, 2013; Rowland et al, 2009) basados en la propuesta de Shulman (1986). A partir del análisis y de la discusión teórica de los diferentes modelos se presenta una reinterpretación de dicha propuesta desde una perspectiva práctica.

2.1 El carácter conexo de la matemática escolar

La actividad matemática se caracteriza, entre otras cosas, por los fuertes vínculos que existen entre sus diferentes ramas, como por ejemplo entre el álgebra y la geometría, la geometría y el análisis, o entre la probabilidad y el análisis. Estos vínculos constituyen un factor decisivo en el desarrollo de nuevo conocimiento matemático, ya que permiten utilizar las definiciones y teoremas propios de una rama de las matemáticas en otra, así como aplicar dichos resultados a problemas de la vida real. De hecho, en muchos casos, las demostraciones de teoremas y conjeturas que se resisten por su dificultad inicial dentro de un campo determinado se resuelven cuando se establece una conexión entre lo que se quiere demostrar y otra rama de las matemáticas en la que se dispone del desarrollo teórico para demostrarlo, como en el caso el último teorema de Fermat y las curvas elípticas.

Además, las matemáticas se aplican a una gran variedad de campos de conocimiento, como son modelos económicos, modelos de evolución de epidemias, modelos para el control de incendios forestales, dinámica de fluidos o análisis y modelización de fenómenos biológicos. Las matemáticas permiten interpretar, analizar y operar sobre procesos muy diversos de la realidad, utilizando para ello múltiples conceptos y procedimientos, como pueden ser el álgebra lineal, las ecuaciones en derivadas parciales, el análisis numérico, el análisis armónico, o las ecuaciones no lineales entre muchos otros.

Las matemáticas son pues un tipo de conocimiento que presenta conexiones tanto entre los propios conceptos matemáticos como con problemas de la vida real. Los vínculos lógicos entre ideas matemáticas, y entre ideas matemáticas y situaciones no matemáticas, se definen de forma general como conexiones y constituyen un rasgo determinante del conocimiento matemático, de la actividad matemática y de sus aplicaciones. Se utiliza el término “ideas matemáticas” con el objeto de mantener la generalidad, ya que el término se puede referir a ramas del conocimiento matemático, a conceptos, a procedimientos de cálculo, a modelos matemáticos o a cualquier otro elemento de carácter matemático que pueda ser entendidos como una idea en un sentido amplio.

En el caso de las matemáticas escolares también existen diversas conexiones entre los conocimientos matemáticos que se trabajan en el aula. Por ejemplo, la proporcionalidad constituye un conocimiento presente a lo largo de la matemática escolar, que se inicia con la introducción del concepto de multiplicación al introducir situaciones del tipo tenemos a paquetes con b elementos cada uno; es la base de los porcentajes y la semejanza; se representa mediante las funciones lineales para variables continuas; y se asocia a problemáticas de los estudiantes como es la sobreutilización de la proporcionalidad en contextos en los que no se aplica (Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., Verschafel, L., 2005).

A la vista de este carácter conexo del conocimiento matemático en general y de las matemáticas escolares en particular, se considera que para desarrollar un conocimiento matemático profundo, el estudiante necesita establecer relaciones entre las diferentes ideas matemáticas que va construyendo. Además, si se pretende que el estudiante sea capaz de usar las matemáticas y aplicarlas en contextos diversos, es importante que pueda relacionar los conceptos matemáticos con situaciones en las que se aplican.

Si no se tiene en cuenta el carácter conexo de las matemáticas y su enseñanza se dirige únicamente a enseñar procedimientos matemáticos se produce una descontextualización de los contenidos, y se convierten las matemáticas escolares en una repetición mecánica de técnicas con una conexión muy reducida con el mundo real (Bishop, 2001). Si por el contrario, la matemática escolar se dirige únicamente a la interpretación y modelización del entorno, se puede generar un alejamiento del estudio profundo de las estructuras matemáticas y por tanto una importante omisión de su potencial. Así, los procedimientos matemáticos escolares solo adquieren significado si ayudan a los estudiantes a entender ideas matemáticas importantes y a analizar de forma rigurosa el mundo que los rodea.

En este sentido, la matemática escolar conjuga la construcción de conceptos matemáticos en su vertiente interna y en su vertiente externa (Onrubia, Rochera y Barberà, 2001). Desde una perspectiva interna, en las matemáticas escolares se conectan diferentes aspectos relacionados con la el conocimiento matemático, como son las relaciones profundas que existen entre conceptos diferentes y entre representaciones y procedimientos asociados a un mismo concepto. Estas relaciones se basan en el progresivo conocimiento de las estructuras subyacentes y de las leyes y propiedades que en ellas se aplican.

Desde una perspectiva externa, los conceptos abstractos y en especial las estructuras subyacentes a estos conceptos, permiten entender la matemática como un conocimiento aplicable en el mundo físico y social. Aún más, las situaciones cotidianas contextualizadas matemáticamente generan nuevos interrogantes y favorecen a su vez la puesta en marcha de procesos abstractos y descontextualizados desde un punto de vista aplicado (Arcavi, 2002).

Así pues, los conceptos de la matemática escolar no se presentan de forma aislada, sino que quedan definidos por sus relaciones con otros conceptos. Dichas relaciones se pueden establecer a partir de las representaciones que se utilizan, de las definiciones que se construyen, de las operaciones que se definen, de las propiedades que se explicitan, de los procedimientos que se utilizan o de los problemas en que se aplican los conceptos.

Esta definición estructural del contenido matemático escolar coincide con perspectivas didácticas y curriculares que dan valor explícito a las conexiones dentro y fuera de las matemáticas (Boaler, 2003) aduciendo que si a un alumno no se le ofrece la posibilidad de realizar conexiones, su conocimiento se verá restringido a procedimientos y unidades aisladas, y además, en muchos casos, dicho conocimiento puede ser menos duradero (Bamberger y Oderdorf, 2007). Por el contrario, si un alumno es capaz de construir conocimiento matemático interconectado, tendrá más herramientas para ampliarlo y profundizar en él. (Cobb, Wood, Yackel, Nicholls, Wheatley, Trigatti, y Perlwitz, 1991; Ma 1999; Sierpinska y Lerman, 1996).

Algunos estudios señalan que muchos alumnos perciben las matemáticas como una colección de procedimientos inconexos y que intentan asimilar un conjunto de métodos para resolver las cuestiones que se les plantean en los exámenes (Boaler, 2003). Por tanto, existe una contradicción entre el propio carácter de la actividad matemática y las matemáticas que en muchos casos se desarrolla en las aulas. Para poder evitar esta contradicción es necesario el establecimiento de conexiones explícitas entre conceptos, procedimientos, representaciones y situaciones de la vida real en el aula de matemáticas.

Diversos documentos curriculares reconocen la importancia de que se establezcan conexiones, como el sudafricano (Mwakapenda, 2008), el australiano (Sawyer, 2008), o el catalán (Departament d'Educació, 2007). De hecho, las conexiones constituyen uno de los 10 estándares para la educación matemática propuestos en los Principles and Standards for School Mathematics (NCTM, 2000), que representa una influencia fundamental para diversos documentos curriculares. En el documento se resalta que la capacidad de los alumnos para conectar ideas matemáticas se relaciona, en línea con los autores anteriores con un conocimiento más profundo y duradero de las matemáticas. En concreto, se resaltan el reconocimiento y el uso de conexiones entre ideas matemáticas, la comprensión de cómo las ideas matemáticas se conectan y se relacionan entre ellas y la aplicación de las matemáticas en contextos no matemáticos.

En la presente investigación se considera que estas conexiones, que se pueden considerar a priori como relaciones significativas e interesantes entre tópicos matemáticos, constituyen el verdadero currículum de matemáticas (Carreiras, 2010). Sin embargo, dada la cantidad de conexiones que existen entre diferentes tópicos matemáticos se antoja complicado pensar en un documento curricular que pueda definir de forma explícita las conexiones que se pueden establecer en el aula.

Si además se tiene en cuenta que muchas de estas conexiones surgen de la propia actividad de aula y de las intervenciones de los alumnos es aun más difícil de explicitar de forma detallada las conexiones en el aula. Por tanto, se consideran las conexiones como una característica de la actividad matemática que se desarrolla en el aula y como un elemento estructurador de la construcción del conocimiento matemático.

En un contexto de aula, la mayor o menor presencia de conexiones en la construcción de conocimiento puede depender de factores diversos, entre los que resaltan tres: el contenido matemático, los alumnos y el profesor. En primer lugar, las conexiones se pueden ver condicionadas por el propio contenido matemático que se enseña, ya que cada concepto matemático está conectado de una manera propia a otros conceptos matemáticos así como a diversos problemas externos a las matemáticas, y en consecuencia el tipo de conexiones que se puedan establecer en el aula variará en función de los conceptos que en ella se trabajen.

En segundo lugar, los alumnos son los sujetos que construyen conocimiento matemático, y por tanto deben ser ellos en última instancia quienes realicen las conexiones. Como se verá más adelante cada alumno se aproxima a los conceptos que se trabajan en clase estableciendo sus propias conexiones entre representaciones, contextos o experiencias. Esto implica que en las intervenciones de los alumnos aparezcan conexiones de diferentes tipos, y que dichas intervenciones determinen en parte las conexiones que se establecen en el aula.

Finalmente, el profesor, en tanto que gestor de la actividad matemática del aula, determina también cuáles son las conexiones que se establecen en el aula. Por un lado, al planificar y llevar a cabo la exposición de un contenido matemático, el profesor decide cuáles son las conexiones que quiere enfatizar. Por otro, al gestionar las intervenciones de los alumnos puede llamar su atención hacia las conexiones que considera más importantes para la construcción de conocimiento matemático, al tiempo que desestimar conexiones incorrectas o, a su juicio, poco relevantes.

Además, el conocimiento por parte del profesor de las conexiones existentes en relación a un contenido matemático concreto puede condicionar su capacidad para gestionar las conexiones propuestas por los alumnos en el aula. Por tanto, las conexiones relacionadas con contenidos matemáticos pueden modificar el conocimiento profesional del profesor.

En resumen, las conexiones que se producen en el aula se interpretan desde tres perspectivas interrelacionadas, a saber, las matemáticas, el alumno y el profesor. Por tanto, se propone una interpretación de las conexiones en un contexto de aula basada en el triángulo didáctico (Chevallard y Joshua, 1982), que se muestra en la Figura 1.

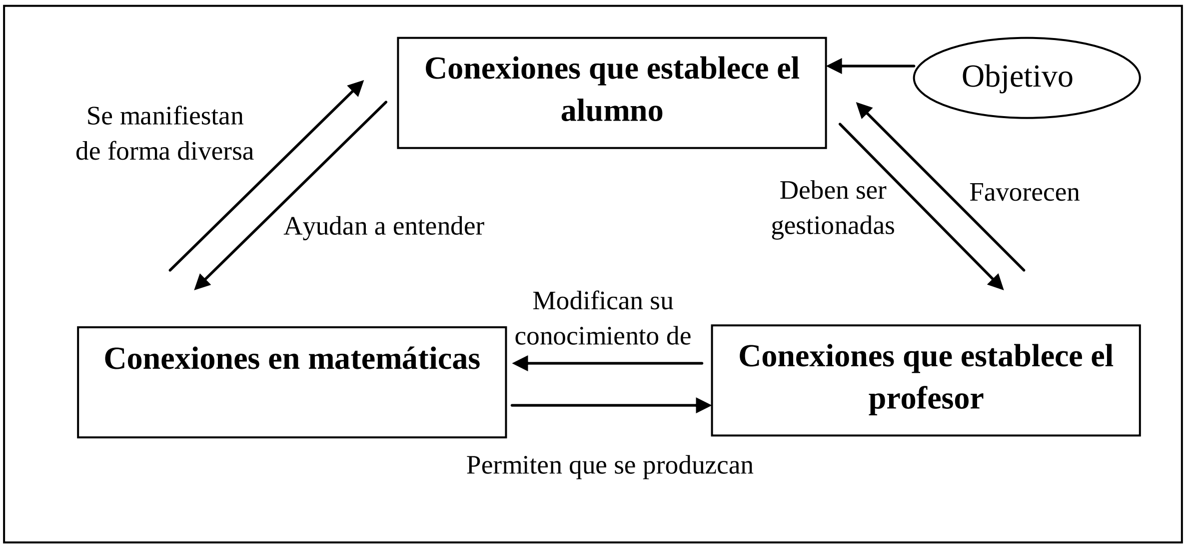

Figura 1. Las conexiones en el aula de matemáticas

2.2 Conexiones en la actividad matemática de aula

Las matemáticas son pues un tipo de conocimiento en el que se producen múltiples relaciones tanto dentro del conocimiento matemático, como relaciones entre las matemáticas y problemas no matemáticos. En el aula, se producen también relaciones de estos dos tipos.

Las relaciones que se producen dentro de las matemáticas involucran relaciones entre representaciones (p.e, la interpretación geométrica de un resultado analítico en el estudio de las funciones), operaciones (p.e, la relación entre el producto de potencias y la suma de exponentes), teoremas (p.e, el teorema del residuo y el cálculo de raíces mediante la aplicación de la regla de Ruffini), procedimientos (p.e, la aplicación de la factorización de polinomios a la resolución de ecuaciones de grado mayor o igual que dos), y muchas otras.

En el caso de las relaciones que se producen con problemas no matemáticos las relaciones se basan en la identificación de una estructura matemática en un problema de otro campo, como puede ser la relación entre la trigonometría y el cálculo de distancias astronómicas. La identificación de dichas estructuras permiten establecer relaciones entre operaciones, propiedades y teoremas de la estructura matemática, con fenómenos que ocurren en el contexto no matemático, que en muchos casos se rige por principios lógicos que pueden ser distintos a los de las matemáticas, y que por tanto generan tipos de relaciones diversos.

En este apartado se consideran las conexiones (entendidas como relaciones basadas en un principio de lógica y coherencia) sin tener en cuenta el tipo de contexto en el que se producen. Se busca describir y clasificar tipos de relaciones que se pueden establecer en las matemáticas para tener un marco de referencia para el posterior análisis de las conexiones en el aula.

Se parte del modelo preliminar propuesto por Businskas (2008) en el que propone siete categorías de conexiones matemáticas teniendo en cuenta únicamente las relaciones matemáticas que se establecen y no aspectos de carácter pedagógico. Considerando una conexión matemática como una relación verdadera entre diferentes ideas matemáticas, Businskas (2008) propone que existen los siguientes tipos de conexiones:

a) Representación alterna: dos ideas matemáticas A y B están relacionadas si A es una representación alterna de B. Es decir, A y B son dos representaciones de un mismo concepto dadas en registros diferentes, por ejemplo una ecuación con una gráfica, o con un enunciado textual.
b) Representación equivalente: dos ideas matemáticas A y B están relacionadas si son representaciones equivalentes de un mismo concepto. Es decir, A y B son representaciones diferentes de un mismo concepto dadas en un mismo registro, como pueden ser dos ecuaciones equivalentes de una misma función.
c) Rasgos comunes: dos ideas matemáticas A y B están relacionadas si comparten algún rasgo. Por ejemplo, un cuadrado y un pentágono están relacionados ya que son líneas poligonales cerradas.
d) Inclusión: dos ideas matemáticas A y B están relacionadas si A está incluida en B, o dicho de otra manera si B incluye A. Se trata de una relación jerárquica, por ejemplo el vértice es parte de la parábola, y la parábola contiene al vértice.
e) Generalización: dos ideas matemáticas están relacionadas si A es una generalización de B, o dicho de otra manera B es un ejemplo de A. Por ejemplo, una la ecuación general de la parábola $ax^2 + bx + c = 0$ es una generalización de cualquier ecuación particular de una parábola.
f) Implicación: dos ideas matemáticas A y B están relacionadas si A implica B mediante un razonamiento lógico. Por tanto, la relación entre A y B depende del establecimiento de un razonamiento deductivo, como por ejemplo, si un polinomio con coeficientes reales tienen grado n, tiene como máximo n raíces.
g) Procedimiento: A y B están relacionados si A es un procedimiento que se utiliza al trabajar con la idea B. Por ejemplo un diagrama de árbol es un procedimiento que se utiliza al definir un espacio muestral en probabilidad.

Esta clasificación que propone Businskas (2008) incluye relaciones de distinto tipo. Desde un punto de vista lógico hay relaciones de equivalencia (a y b) de orden (d y e), y otras más difíciles de definir como son la implicación (en las que hay premisas, leyes de inferencia y conclusiones) y los procedimientos, que conectan procedimientos con las ideas en que se aplican. Esta variedad de tipos de relación, y sobre todo de tipos de ideas que se conectan (representaciones, procedimientos, premisas y conclusiones) muestra la complejidad inicial que se nos presenta al analizar las conexiones.

Sin embargo, si se analizan las categorías anteriores buscando cuáles son los puntos en común de las relaciones anteriores desde la perspectiva de la construcción de conocimiento matemático se observa que las categorías a y b se refieren a relacionar representaciones de una idea matemática concreta; la categoría c se refiere a relacionar ideas diferentes que comparten alguna propiedad; las categorías d y e se refieren a relacionar ideas desde una perspectiva jerárquica; la categoría f se refiere a relacionar procedimientos a conceptos; y la categoría e se refiere a relacionar ideas mediante una relación de implicación.

En todos los casos anteriores, las conexiones buscan avanzar en la construcción de una idea o concepto matemático, ya sea relacionando representaciones o procedimientos de una misma idea, estableciendo relaciones de implicación que permitan profundizar en el conocimiento de una idea, o estableciendo relaciones entre diferentes ideas matemáticas, ya sea de forma jerárquica o por compartir alguna propiedad en concreto.

Hasta ahora se ha utilizado el término idea para referirse a elementos identificables en matemáticas (conceptos, representaciones, rasgos o propiedades, procedimientos y tipos de razonamiento lógico) en el sentido que pueden ser definidas o al menos claramente descritas, y a las cuales se asocian propiedades. Las conexiones son relaciones que se establecen a partir de características de estas ideas, que permiten construir un razonamiento lógico y coherente.

En lo que sigue, al tomar una perspectiva de aula, la investigación se centrará más en el papel que juega la relación que se establece que los elementos que se conectan. Esto no quiere decir que no interese analizar los elementos que se conectan, sino que se analizan los elementos que se relacionan así como los vínculos que permiten establecer la conexión para estudiar el papel que juega la conexión en la construcción de conocimiento matemático.

2.3 Conexiones desde la perspectiva de los alumnos

En el apartado anterior se consideraron las conexiones como relaciones que se establecen en las matemáticas, y que no dependen de una actividad de aula determinada. Sin embargo, el objetivo principal de la educación matemática es que los alumnos adquieran un conocimiento matemático. Cobb (1998) afirma que dicho conocimiento debe permitir a los alumnos construir estructuras matemáticas cada vez más complejas y abstractas, que a su vez, les permitan aproximarse y resolver problemas matemáticos cada vez más complejos; así como que los estudiantes se hagan autónomos y que encuentren una motivación propia hacia la actividad matemática.

Tal y como se explica más arriba, las matemáticas se pueden entender como una red de ideas a las cuales es posible aproximarse desde múltiples perspectivas. Por lo tanto, se considera también la enseñanza de las matemáticas como un proceso que debe responder a esta visión de las matemáticas, lo que a su vez implica descartar una concepción de las matemáticas escolares reducidas a la transmisión de ideas acabadas, con unas propiedades asociadas y unas aplicaciones determinadas. Más bien, se parte de la concepción de una enseñanza de las matemáticas en la que los alumnos jueguen un papel activo, construyendo sus propias ideas matemáticas, que van mucho más allá que métodos cerrados para la resolución de actividades automáticas (Clements y Battista, 1990).

Esta perspectiva no implica, sin embargo, que las matemáticas escolares deban ser desprovistas de métodos algorítmicos, sino que estos métodos deben aparecer para resolver una necesidad que aparezca en la actividad matemática, y en algunos casos se convierten en sí mismos en objeto de estudio en términos de eficiencia, aplicabilidad o transparencia, por poner algunos ejemplos.

De hecho, en relación al papel de las matemáticas como un conocimiento necesario para entender el mundo tecnológico actual, se asume que es de gran importancia para los alumnos entender el funcionamiento de diferentes algoritmos, para que los puedan aplicar con sentido y puedan incluso ser capaces de desarrollar sus propios métodos algorítmicos. En resumen, nuestra perspectiva consiste en ampliar y profundizar el conocimiento matemático escolar, centrándolo en la comprensión de los conceptos, problemas y procedimientos.

Von Glaserfeld (2002) hace énfasis, desde una perspectiva constructivista, en la diferencia entre enseñar y entrenar, entendiendo la enseñanza como una actividad dirigida a la comprensión, en oposición al entrenamiento, que es una actividad humana dirigida a la creación de respuestas conductuales automáticas en los individuos.

Sin embargo, aunque la visión de la matemática escolar que asume la presente investigación esté dirigida a la comprensión de los contenidos, es conveniente señalar que lo que Von Glaserfeld (1995) describe como entrenamiento hace también parte de la actividad matemática, ya que permite disponer de un abanico más amplio de herramientas que son útiles para operar con diversas ideas matemáticas. Por lo tanto, se persigue una enseñanza de las matemáticas centrada en la comprensión, pero que también utiliza elementos de aplicación de proceso algorítmicos en el proceso de construcción de conocimiento matemático.

A continuación se analiza cómo la construcción de conocimiento matemático por parte de los alumnos depende de las conexiones mentales que puedan establecer. En un primer nivel, la capacidad de los alumnos para entender contenidos matemáticos nuevos se relaciona con su capacidad para conectar la información que recibe con su propio conocimiento. En un segundo nivel, la capacidad de interconectar representaciones, definiciones, procedimientos, razonamiento, aplicaciones o problemas por parte de los alumnos se relaciona con la profundidad del conocimiento matemático que posean. Por tanto, la construcción de un conocimiento matemático profundo depende de la construcción de conexiones sólidas y duraderas que proporcionen a los estudiantes oportunidades para establecer nuevas conexiones que les permitan profundizar en su propio conocimiento y ampliarlo.

Las conexiones como proceso mental

Las conexiones además de ser relaciones que existen entre ideas matemáticas, pueden ser también consideradas como un proceso mental que realizan las personas al aprender matemáticas. Para que los alumnos aprendan matemáticas de una forma conectada, es necesario que establezcan mentalmente conexiones que les permitan relacionar sus conocimientos y construir otros nuevos relacionados con los ya existentes. Según Haylock y Thaganta (2007), la comprensión de conceptos matemáticos complejos puede ser concebida como un proceso de construcción gradual de redes de conexiones.

Las conexiones juegan también un papel importante en el análisis cognitivo de la construcción de conocimiento y aparecen de forma tanto implícita como explícita en diferentes modelos teóricos para el aprendizaje de las matemáticas (Haylock y Thaganta, 2007). En este sentido destaca la contribución de Piaget, que introduce el concepto de esquema, que son las estructuras mentales relacionadas con el conocimiento (Rathus, 2007).

Von Glaserfeld (1995) propone una interpretación de los esquemas que reporta como útil en la enseñanza de la física y de las matemáticas. En su interpretación construye una teoría de esquemas que es aplicable en líneas generales a las diferentes etapas propuestas por Piaget, y que además supone una herramienta para analizar el aprendizaje. Para Von Glaserfeld (1995) los esquemas se pueden entender como una estructura que consta de tres partes:

- Reconocimiento de una situación
- Una actividad específica asociada a dicha situación
- La expectativa del resultado de la actividad basada en experiencias anteriores

En este sentido, el aprendizaje se produce cuando un esquema produce un resultado no esperado (perturbación) que produce a su vez una acomodación dirigida a mantener el equilibrio. La acomodación significa que el esquema se modifica para dar sentido a la perturbación producida y el equilibrio es la eliminación de las perturbaciones. Al aumentar nuestro conocimiento –aprender– aumenta la capacidad del individuo para eliminar perturbaciones. Sin embargo, algunas acomodaciones pueden estar en contradicción con algunas ideas formadas previamente, lo que producirá una perturbación a un nivel más profundo. La eliminación de dicha perturbación es lo que permitirá profundizar en el conocimiento.

Como requisito previo al esquema se debe producir una asimilación, que es la adaptación de la información recibida a un esquema previamente formado por el individuo. Por tanto, desde esta perspectiva, el aprendizaje implica que se establezcan conexiones entre la información que recibe el alumno y su conocimiento previo. A partir de esta relación, al producirse actividades relacionadas con la situación identificada, se producen conexiones basadas en el conocimiento previo que llevan al individuo que aprende a prever un resultado. Cuando este resultado no se produce, la estructura del esquema se modifica mediante el establecimiento de nuevas conexiones, lo que produce el aprendizaje.

En palabras de Cross (1999), un esquema es una "estructura cognitiva consistente en hechos, ideas y asociaciones organizadas en un sistema de relaciones con significado. […]El esquema es una estructura en construcción permanente". Si los esquemas son las construcciones mentales a partir de las cuales se forma el conocimiento, es imposible que este conocimiento se transmita en una forma acabada, ya que el aprendiz ha de ser quien forme estas estructuras cognitivas. Por lo tanto, los estudiantes construyen su propio conocimiento matemático personal estableciendo conexiones dentro de sus propios esquemas (Cross, 1999).

Si los conceptos no se aferran al conocimiento previo mediante conexiones significativas, no podrán ser usados para articular nuevo conocimiento, y por tanto éste tenderá a perderse (Cross, 1999). La poca profundidad del enraizamiento de los conceptos unida a cantidades grandes de contenido a memorizar, implican una probabilidad menor para profundizar en tales conceptos. Esto liga con la tarea del profesor, que se debate entre dedicar más tiempo a un contenido que considera clave y continuar con un extenso temario que debe cubrir.

Una presentación de los contenidos demasiado ordenada por parte del profesor no permite a los alumnos formar sus propios esquemas, por lo que se hace necesario un equilibrio entre una presentación estructurada y dejar a los estudiantes que los construyan. En este sentido, es más importante dar una presentación ordenada en cursos introductorios que en cursos avanzados, en los que el alumno ya posee conocimientos y ha establecido relaciones que le permiten coordinar los nuevos conocimientos en relación a los primeros (Cross, 1999).

Por tanto, se entiende que para que se produzca un aprendizaje por parte de los alumnos es necesario que construyan las conexiones necesarias para poder dar soporte al conocimiento que se trabaja en el aula. La calidad de las conexiones y la densidad de la redes de conexiones se relacionan con la capacidad de los alumnos para construir nuevo conocimiento matemático y profundizar en el mismo.

La construcción de conceptos matemáticos

La teoría APOE (APOS por sus siglas en inglés) surge con la intención de profundizar en la idea de *abstracción reflexiva* introducida por Piaget y de ampliarla a conceptos matemáticos más avanzados (Dubinsky y McDonald, 2001). Esta teoría permite describir y delimitar el proceso por el cual un sujeto construye conceptos matemáticos. APOE es un acrónimo de Acción – Proceso – Objeto – Esquema, que es la secuencia desde la cual se interpreta la construcción de conocimiento matemático (Dubinsky y McDonald, 2001). Las *acciones* son transformaciones de objetos percibidos como externos por el sujeto y que se realizan a partir de instrucciones precisas sobre los pasos que se deben realizar. Los *procesos* son las construcciones mentales que se crean cuando una *acción* es repetida, el sujeto reflexiona sobre ella y puede llegar a interiorizarla. Los *objetos* se producen a partir de los procesos cuando el individuo adquiere conciencia del proceso como un todo y puede realizar transformaciones sobre el mismo. Los *esquemas* son una colección personal de acciones, procesos y objetos, que se relacionan por principios coherentes en la mente del sujeto.

Las cuatro construcciones se presentan en un orden jerárquico ya que cada uno debe ser construido antes de que se pueda construir el siguiente. En la realidad, sin embargo, cuando un individuo está desarrollando su comprensión de un concepto la construcción no sigue este modelo lineal (Dubinsky y McDonald, 2001). Más bien, se produce un proceso continuo de ida y vuelta entre las acciones y los procesos. Mediante esta ida y vuelta, el estudiante establece diferentes conexiones entre las acciones y sus diferentes concepciones intermedias del proceso que permiten que los procesos se formen.

Haylock y Cockburn (2003) proponen un modelo para entender la adquisición de un concepto matemático por parte de un estudiante (Figura 2). Este modelo muestra diferentes posibilidades de conexiones entre cuatro aspectos básicos relacionados con el concepto. En la interpretación propuesta por los autores, las conexiones que se producen entre los cuatro nodos no están jerarquizadas ni siguen un orden particular. Además, la comprensión de conceptos que se pretende modelizar en la Figura 2 no tiene un carácter absoluto, que se pueda considerar que o se da o no se da, sino que es un proceso gradual, que como se explica más arriba se relaciona con la cantidad y la calidad de conexiones que se establezcan.

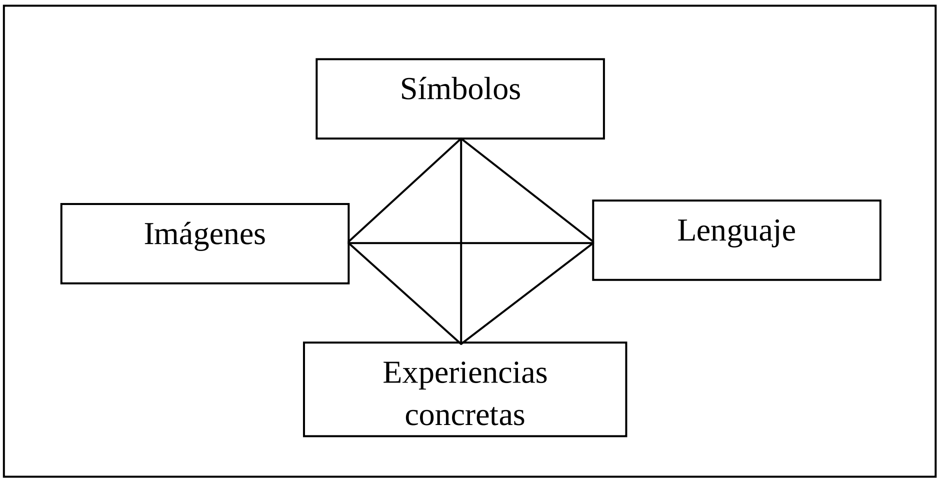

Figura 2: Modelo propuesto por Haylock y Cockburn (2003)

Por ejemplo, en el caso de la resta, cuando se opera $12 - 9 = 3$, se utiliza una simbología concreta que se relaciona con palabras que pueden tener diversos significados tanto en un contexto matemático como en un contexto cotidiano. Además, esta operación se corresponde con diferentes tipos de situaciones concretas (comparaciones, emparejamientos, situaciones de cambio creciente y decreciente…), en las que el alumno puede identificar que se debe realizar la operación anterior. Esta variedad de situaciones concretas pueden a su vez ser representadas gráficamente de manera diversa (diagramas de Venn, segmentos de diferentes longitud, movimientos en la recta real…). Por tanto, el grado de comprensión de la resta aumentará en tanto se formen más y mejores conexiones entre los aspectos anteriores.

Esta variedad de representaciones asociadas a un concepto matemático genera múltiples fórmulas de aproximación al mismo. Aunque es razonable pensar que en un grupo clase se compartan algunas interpretaciones asociadas a representaciones concretas, cabe también esperar que las ideas de los alumnos en relación a las representaciones asociadas a un concepto matemático sean diversas, ya que dichas ideas estarán fundamentadas en las conexiones que los alumnos hayan realizado entre algunas de las representaciones anteriores. Por tanto, la construcción de conocimiento que realizan los alumnos es personal y está determinada, entre otras cosas, por sus propias experiencias, que les permitirán realizar nuevas conexiones a partir del conocimiento ya existente.

2.4 Conexiones desde la perspectiva del profesor

Tal y como se puede observar en la Figura 1, se considera que el profesor constituye uno de los elementos clave en el establecimiento de conexiones en el aula, y el papel que juega se relaciona con la actividad matemática de los alumnos así como con la actividad matemática en general. Para poder utilizar las conexiones que existen entre conceptos matemáticos para favorecer el establecimiento de conexiones por parte de los alumnos, el profesor necesita conocimientos profundos relacionados con las matemáticas y su enseñanza. Estos conocimientos se pueden dividir en tres niveles: matemático, pedagógico (de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas) y curricular (Shulman, 1986).

Conocer de forma profunda los temas que enseña (o que pueda enseñar) en el aula puede ayudar al profesor a entender que existen conexiones entre diferentes tópicos matemáticos, así como a valorar la importancia de estas conexiones en la enseñanza de un tema en particular. Así, el conocimiento profundo de los contenidos matemáticos se debe complementar con un conocimiento del aprendizaje y de la enseñanza de las matemáticas que le permita valorar la importancia de hacer o no explícitas dichas conexiones en el aula, así como entender mejor las posibles dificultades de los estudiantes. Dado que la educación es un proceso continuo y que las matemáticas escolares se interconectan a lo largo del tiempo, es necesario que el profesor tenga un conocimiento del currículo y de los materiales de los que dispone para realizar su tarea en el aula para poder proponer de forma consciente conexiones que puedan ayudar a los estudiantes a entender conceptos futuros.

Por tanto, el papel de las conexiones queda en parte determinado por la forma en que el profesor es capaz de coordinar las matemáticas que conoce a un nivel avanzado con las matemáticas que está enseñando, entendiendo nivel avanzado como un conocimiento más profundo del tema que se enseña en el sentido de De Gamboa, Badillo y Ribeiro (2015). Además de poseer conocimientos sólidos sobre las matemáticas, sobre su enseñanza y su aprendizaje, y sobre el currículo, los profesores necesitan conocimientos prácticos relacionados con las capacidades para gestionar la construcción de conocimiento matemático en un contexto de práctica de aula.

Tal y como se explica en el apartado 2.3, las conexiones mentales que establecen los alumnos son personales, y por tanto las relaciones mentales sobre las que construyen conocimiento matemático serán también diversas. Es previsible que cada alumno asocie diferentes aspectos del concepto que se trabaja en el aula –representaciones, procedimientos o contextos en los que aparece– con sus propios conocimientos previos, que no siempre serán los mismos. Para que el profesor pueda afrontar esta diversidad en las ideas matemáticas que proponen los alumnos en clase, debe tener la capacidad de interpretar la aportación del alumno desde una perspectiva más avanzada (utilizando los conocimientos matemáticos, pedagógicos y curriculares) para aprovecharla en la actividad matemática del aula (De Gamboa et al, 2015). Este tipo de situaciones inesperadas que curren en el aula es lo que Rowland, Huckstep y Thwaites (2005) llaman situaciones de contingencia y constituyen un tipo de actividad común en la actividad matemática de aula.

La coordinación entre un conocimiento avanzado y un conocimiento práctico constituye la base sobre la cual el profesor construye las conexiones en el aula y las gestiona. Sin embargo, el conocimiento relacionado con los contenidos que se pretenden conectar no es el único factor a tener en cuenta en el establecimiento de conexiones y en algunos casos se muestra insuficiente (Frykholm y Glasson, 2005).

Las creencias y la experiencia

Además del conocimiento, que se analiza en profundidad en el próximo apartado, existen otros factores relacionados con el papel del profesor que pueden influir en el establecimiento de conexiones en el aula, como son las creencias y las experiencias previas.

La predisposición del profesor a hacer conexiones en el aula es determinante en su efectividad como profesor, entendida en términos de ayudar a los estudiantes a construir conceptos, dominar técnicas y aplicar sus conocimientos (Askew, 1997). Las creencias de los profesores sobre la importancia de establecer conexiones en el aula determinan y modifican su propia práctica (Sawyer, 2008; Frykholm y Glasson, 2005). La preocupación por presentar las matemáticas de forma conectada es uno de los prerrequisitos para que se puedan establecer conexiones matemáticas en el aula (Fernández, 2011). Así, para que los estudiantes tengan la oportunidad de establecer conexiones en el aula, es necesario que el profesor pueda y quiera establecer estas conexiones.

Sin embargo, aunque las creencias de los profesores pueden ser suficientes para modificar su práctica, no lo son para dotar a los profesores con la capacidad de establecer, valorar y gestionar conexiones en el aula. La relación entre el sistema de creencias del profesor y su conocimiento es un aspecto esencial en el establecimiento de conexiones en el aula. La conjunción de conocimientos y creencias interviene de forma determinante en la capacidad de los profesores para establecer conexiones en el aula, ya que un déficit de conocimiento puede implicar que no se den algunas conexiones en el aula, o que las que se den tengan poca profundidad desde la perspectiva del conocimiento matemático.

La importancia de esta relación entre conocimientos y creencias se hace también explícita al observar las dificultades que experimentan los profesores en relación con las conexiones en el aula. En general, los profesores manifiestan reconocer que las matemáticas son un conocimiento en el que se dan múltiples conexiones, aunque encuentran difícil dar ejemplos específicos de conexiones (Businskas, 2008) y además manifiestan dificultades para establecer conexiones en el aula (Fryckholm y Glasson, 2005).

Un factor determinante en la dificultad que encuentran los profesores para establecer conexiones en el aula es la propia experiencia. Fryckholm y Glasson (2005) informan de la falta de experiencia por parte de los profesores en relación a la participación en una construcción conectada de conocimiento matemático, lo que relacionan con una dificultad en el establecimiento de conexiones en el aula. De hecho, estos autores proponen integrar en el conocimiento de los profesores experiencias explícitas de construcción de conexiones entre las matemáticas y las ciencias experimentales, en las que se trabajan conceptos científicos amplios mediante la discusión en grupo. Los resultados de la investigación muestran que los profesores mejoraron su comprensión de las conexiones entre matemáticas y ciencia, así como su predisposición a proponer actividades dirigidas a establecer conexiones en el aula.

En resumen, se observa que existen diferentes factores que intervienen en el establecimiento de conexiones en el aula desde la perspectiva del profesor. El conocimiento aparece en primer lugar como elemento determinante que dote al profesor de herramientas para favorecer el establecimiento de conexiones en el aula. Sin embargo, se debe entender que este conocimiento no es un conocimiento únicamente teórico, sino que tiene un fuerte componente práctico. Además, en la actividad docente existen diferentes tareas y diferentes condicionantes que hacen que el establecimiento de conexiones dependa también de las creencias del profesor y de su capacidad para coordinar diferentes tipologías de conocimiento (teórico - práctico o elemental - avanzado).

2.5 Conocimiento del profesor de matemáticas

Parece claro que un conocimiento puramente matemático no es suficiente para el desarrollo de las capacidades necesarias para enseñar matemáticas. De la misma manera, un conocimiento puramente didáctico que pase de forma poco profunda por los contenidos matemáticos tampoco es suficiente. Por tanto, asumiendo que las dos componentes son necesarias se plantea la cuestión sobre qué tipo de contenido matemático es el más útil para la enseñanza, qué enfoque se le debe dar, y con qué elementos de la didáctica se debe relacionar. Aunque en esta investigación se está lejos de dar respuesta a estos interrogantes, se pretende hacer una aproximación desde el establecimiento de conexiones en el aula.

Existen diversos modelos del conocimiento matemático para enseñar (Ball et al, 2008; Petrou y Goulding, 2011; Carrillo et al, 2013; Rowland et al, 2009) que proponen diversas reinterpretaciones del modelo propuesto por Shulman (1986). En este capítulo se presenta una reinterpretación de este modelo que incorpora algunas aportaciones de los modelos posteriores y que está pensado para el análisis del conocimiento del profesor en el aula.

Se empieza presentando el modelo de Shulman (1986), para luego analizar las aportaciones que hacen Ball et al (2008) introduciendo una perspectiva práctica y describiendo tipologías de conocimiento que permiten profundizar en la comprensión del conocimiento del profesor. A continuación se analiza el modelo propuesto por Carrillo et al (2013), que basándose en el modelo anterior, proponen un modelo dirigido a aclarar algunos aspectos del modelo de Ball et al (2008), que por su propia fuerza pueden dar lugar a problemas de clasificación. En tercer lugar se analiza la propuesta de Rowland et al (2005) que proporciona un modelo para analizar aspectos del conocimiento que se identifican en un contexto de aula. Finalmente, se propone un modelo teórico para analizar el conocimiento inspirado en las aportaciones más importantes de los modelos anteriores.

El objetivo fundamental no es dar respuesta a las diversas problemáticas que surgen al proponer clasificaciones del conocimiento matemático para enseñar, sino proponer un modelo de análisis dirigido a entender cómo se relacionan algunos aspectos del conocimiento del profesor con el establecimiento de conexiones y, a partir del análisis de estas relaciones, aproximarnos a la relación entre diferentes tipologías de conocimiento en la práctica de aula.

El modelo de Shulman

Shulman (1986) introduce su propuesta de modelo para el conocimiento del profesor analizando el peso que han tenido en las evaluaciones de maestros la componente del contenido y la componente pedagógica a lo largo de la historia. Al comparar las evaluaciones de maestros que se realizaban en algunos estados de EEUU durante el S.XIX y los estándares de los años 80 del siglo XX encuentra que si en el primer caso las evaluaciones estaban centradas en más de un 90 % en el contenido, en el segundo caso los estándares propuestos se centraban casi en exclusivo en aspectos pedagógicos.

Este cambio de perspectiva está motivado por diferentes investigaciones dirigidas a encontrar las prácticas docentes que promovían mejor el aprendizaje de los alumnos. Sin embargo, Shulman (1986) señala que unos estándares basados de una forma tan directa en la investigación pueden contener serias falencias. En primer lugar, el carácter mismo de la investigación hace que sus resultados se deban entender en un contexto concreto y acotado, y que por tanto la generalización de estos resultados simplifica la complejidad de la construcción de conocimiento en el aula, y obvia un elemento esencial: el conocimiento de los contenidos.

La constatación de esta ausencia del contenido en la mayoría de las investigaciones es lo que Shulman (1986) llama *“missing paradigm”* que conlleva, según el autor, dejar de lado preguntas fundamentales sobre la forma en que el profesor decide lo que enseña, las explicaciones que da, las representaciones que utiliza, las preguntas que hace a los alumnos y la forma en que responde a las dudas y a las concepciones erróneas de los alumnos. En el caso de las matemáticas, se puede constatar la importancia del conocimiento del contenido al analizar la Figura 1, que se introdujo en el apartado 2.1.

Al considerar las matemáticas como un cuerpo de conocimiento interconectado, la construcción de conocimiento matemático que se produce en el aula queda determinada en parte por la gestión que hace el profesor de las conexiones que en ella se producen. Aunque los factores del conocimiento que determinan la aparición y el aprovechamiento de dichas conexiones no estén determinados –éste es en parte el objetivo de este trabajo– es evidente que la forma en que el profesor gestiona las conexiones en las que interviene conocimiento matemático queda determinada, al menos en parte, por el conocimiento que tenga el profesor de tal conocimiento matemático.

Shulman (1986) señala que hacer énfasis en el conocimiento del contenido no implica dejar de lado un conocimiento padagógico, sino señalar la importancia de que estos conocimientos se complementen. En resumen, y utilizando una terminología matemática, tanto poseer un sólido conocimiento del contenido como un sólido conocimiento pedagógico general son condiciones necesarias pero no suficientes para ser un profesor de matemáticas que promueva la construcción de conocimiento matemático de manera conectada.

El conocimiento del contenido, no se refiere únicamente a un conocimiento avanzado de matemáticas, sino a un conjunto de conocimientos asociados al conocimiento matemático que se relacionan con diferentes capacidades del profesor, como pueden ser transformar un conocimiento matemático avanzado en un conocimiento entendible por los alumnos; utilizar un libro de texto de forma crítica y adaptarlo a las necesidades de sus alumnos; o pensar ejemplos y representaciones.

Se reconocen tres tipos principales de conocimiento de la materia en el modelo de Shulman (1986): el conocimiento del contenido, el conocimiento pedagógico del contenido y el conocimiento curricular del contenido. El conocimiento del contenido se refiere al conocimiento de las matemáticas y de su organización, y no se refiere únicamente a conocer tópicos o conceptos matemáticos, sino a entender relaciones básicas entre estos conceptos así como los principios que permiten establecer la validez de los razonamientos en matemáticas.

El conocimiento pedagógico del contenido se refiere a conocimientos sobre cómo las matemáticas se enseñan y se aprenden. En lo que se refiere a la enseñanza incluye el conocimiento de las representaciones más útiles para presentar una idea, las mejores analogías, ilustraciones y ejemplos, o las demostraciones que ayudan a presentar un concepto de manera coherente. En cuanto al aprendizaje incluye un conocimiento de los conocimientos previos de los alumnos a edades determinadas, los errores más comunes que cometen estos alumnos, o las estrategias que les permitirán a los estudiantes organizar de una forma más sólida el conocimiento matemático.

El conocimiento del currículo se refiere a conocimientos relacionados con los documentos que regulan la enseñanza de las matemáticas a un nivel determinado y el conjunto de materiales relacionados con los temas que se enseñan a un nivel determinado. Además, este conocimiento también incluye un *conocimiento vertical* de los documentos y de los materiales que se usan para enseñar matemáticas a lo largo de la escolaridad –incluyendo la formación universitaria- así como un *conocimiento horizontal* de los contenidos y materiales utilizados para enseñar otras asignaturas a los alumnos de un nivel en particular.

Shulman (1986) propone además tres formas de conocimiento aplicables a cada una de las tipologías anteriores: un conocimiento proposicional, un conocimiento de casos y un conocimiento estratégico. El conocimiento proposicional consiste en el conocimiento de reglas simplificadas que Shulman (1986) divide a su vez en tres tipos: los principios, que se relacionan con conocimientos teóricos –por ejemplo, los estudiantes profundizan su conocimiento al explicar sus razonamientos a otros estudiantes–; las máximas, que se relacionan con conocimientos prácticos –dividir las sesiones en una parte teórica y una parte práctica–; y las normas, que se refieren a un posicionamiento ideológico o filosófico –los alumnos no deben avergonzarse por haberse equivocado–.

El conocimiento de casos se refiere a un conocimiento específico y está basado en sucesos representativos. Este tipo de conocimiento también se subdivide en tres tipologías: los prototipos, que son ejemplos claros de principios teóricos; los precedentes, que ilustran máximas sobre la práctica; y las parábolas, que se relacionan con las normas y permiten entenderlas mejor. Este conocimiento se inspira en el análisis de casos que se utiliza en la formación de abogados o médicos.

Finalmente, el conocimiento estratégico es el que permite al profesor posicionarse en situaciones en las que su conocimiento proposicional o de casos resulta insuficiente o incluso contradictorio. Es el tipo de conocimiento que permite al profesor desarrollar una estrategia de acción ante diferentes preguntas por parte de los alumnos, así como cambiar la planificación inicial de un tema con el objetivo de adaptarla a cambios inesperados relacionados con la disposición horaria, la disponibilidad de materiales, o las inquietudes de los alumnos.

Esta caracterización de las formas de conocimiento del profesor permite reflexionar de manera sistemática sobre la transformación del conocimiento del profesor en un sistema coherente de acciones en el aula, lo que nos parece interesante en tanto que nos puede ayudar a entender la relación entre tipologías de conocimiento y prácticas de aula. Sin embargo, algunos autores resaltan algunos problemas relacionados con su aplicabilidad a diferentes contextos normativos (Petrou y Goulding, 2011), a diferentes tipologías docentes o de organización de aula (Meredith, 1995), o a su aplicabilidad directa al análisis de la práctica de aula (Ball et al, 2008).

En el caso de esta investigación estas posibles falencias se ven minimizadas. En el caso del contexto normativo, nuestro caso difiere de forma clara con el marco de referencia para Shulman (1986). Mientras en EEUU no existe un documento curricular único, en España, y en particular en Cataluña –que es donde se realiza la investigación–, existe un documento curricular que establece los contenidos matemáticos que deben ser trabajados y además existen pruebas periódicas dirigidas a analizar el desempeño de los estudiante en Competencias Básicas. Por tanto, es necesario enfatizar dentro de la tipología de conocimiento del currículo, el conocimiento de los documentos vigentes, así como la tipología de las pruebas que se plantean. Este conocimiento puede favorecer la capacidad del profesor para conectar con conocimientos previos de los alumnos, allanar el terreno para la introducción de otros conceptos en otros cursos, así como utilizar los contenidos que estudian los alumnos en otras materias en el aprendizaje de las matemáticas. Cabe destacar en este apartado que el currículo vigente en Cataluña incluye a las conexiones como un proceso que debe aparecer en la enseñanza de las matemáticas.

En segundo lugar, Meredith (1995) afirma que el modelo de Shulman (1986) implica entender el conocimiento matemático de una forma estática que el profesor transmite a los alumnos. La perspectiva del presente estudio implica una concepción dinámica del conocimiento matemático, del conocimiento matemático del profesor y de la construcción que de este conocimiento hacen los alumnos. En este sentido, se considera que cualquiera que sea la forma de enseñar del profesor, un conocimiento de las matemáticas que le permita favorecer el establecimiento de conexiones por parte de los alumnos favorecerá la calidad de la práctica docente.

Finalmente, en relación al establecimiento de categorías que permitan analizar el conocimiento en el aula, desde la perspectiva de conexiones en el aula, se pretende entender la forma en la que estas distintas categorías interactúan, y por lo tanto entender mejor el carácter de cada una, y los lazos que se deben establecer entre ellas para que se produzcan conexiones. A continuación se analizan las contribuciones que a este respecto se hacen desde otros modelos teóricos.

El conocimiento matemático para enseñar: *Content Knowledge for Teaching*

Ball et al (2008) proponen un modelo de conocimiento del profesor llamado conocimiento matemático para enseñar (MKT, en sus siglas en inglés), basado en el modelo anterior. El MKT se divide en dos bloques, el conocimiento de los contenidos (SMK) y el conocimiento pedagógico de los contenidos (PCK).

El SMK se divide a su vez en tres tipologías. En primer lugar aparece el conocimiento matemático común del contenido (CCK) que se refiere a los conocimientos matemáticos que son utilizados en otras actividades además de la enseñanza. En segundo lugar aparece el conocimiento matemático especializado (SCK), que se relaciona con el dominio de conocimientos y habilidades que habilidades que se utilizan en un contexto de aula y que no son necesarias para poder utilizar las matemáticas en otro contexto. Finalmente se encuentra el conocimiento del horizonte matemático (HCK) que se refiere a la conciencia del profesor sobre cómo re relacionan los contenidos matemáticos a lo largo de la escolaridad.

El PCK se divide también en tres tipologías. En primer lugar aparece en conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS), que se relaciona con la capacidad para anticipar los errores y las dificultades de los estudiantes, responder adecuadamente a las intervenciones de los estudiantes y escoger los ejemplos y las representaciones adecuadas. En segundo lugar se encuentra el conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT) que se relaciona con la secuenciación de actividades y ejercicios, con el conocimiento sobre la adecuación de determinados ejemplos y representaciones, así como la capacidad para adaptar la gestión de la clase para aprovechar la intervención de un alumno y profundizar un contenido matemático importante. Finalmente, aparece el conocimiento del contenido y del currículum (KCC) que se relaciona con el conocimiento de los materiales relacionados con la enseñanza de un tema determinado.

Se considera que este modelo aporta dos elementos principales. Por un lado se enfatiza una tipología que no aparecía en el modelo de Shulman (1986), el Conocimiento Especializado del Contenido (SCK), que consiste en el conocimiento que se relaciona únicamente con la enseñanza, y que no es necesario para otros propósitos diferentes. La principal característica de esta tipología de conocimiento es que implica contemplar el conocimiento matemático simultáneamente de forma acabada y aplicable y de forma descomprimida, entendiendo cómo se forma el todo a partir de las partes.

Sin embargo, algunos autores (Petrou y Goulding, 2011; Carrillo et al, 2013) discuten la dificultad que existe para diferenciar el SCK de otros subdominios del MKT como son el conocimiento pedagógico del contenido (PCK) y el conocimiento común del contenido (CCK). Si se interpreta el SCK como un conocimiento que se caracteriza por ser un conocimiento único de la actividad docente, que se manifiesta en el aula y que es necesario para enseñar matemáticas de forma efectiva (Ball et al, 2008; Petrou y Goulding, 2011) se observan muchas similitudes con en PCK, que es también un conocimiento entendido desde una perspectiva docente y característico de los profesores. De hecho, algunos de los ejemplos de SCK que se dan en Ball et al (2008), son conocimientos en los que interviene de forma directa el PCK, como por ejemplo la mejor forma de explicar por qué es necesario tener denominadores comunes para sumar fracciones o qué representación se relaciona mejor con una operación determinada.

La segunda parte de la caracterización que dan Ball et al (2008), y que se refiere a un conocimiento que debe ser comprimido y descomprimido de forma simultánea, es especialmente relevante, y se considera como un conocimiento que hace parte del conocimiento del contenido. Las otras características dadas por Ball et al (2008) para este conocimiento se interpretan como parte de la interacción que existe entre este conocimiento y otras categorías como del PCK, o del conocimiento del contenido (SMK). De hecho, se considera que la interacción entre las diferentes categorías propuestas por Shulman (1986), así como entre las propuestas por Ball et al (2008), es lo que caracteriza el conocimiento del profesor, entendido como un conocimiento especializado.

En este sentido, Ball et al (2008) proponen otra categoría que es especialmente relevante respecto al modelo inicial de Shulman (1986), el conocimiento del horizonte matemático (HCK). Este tipo de conocimiento se relaciona con la conciencia del profesor de cómo se conectan los contenidos matemáticos a lo largo de la vida escolar. Por tanto, es un tipo de conocimiento que se relaciona con la capacidad del profesor para establecer puentes con los conocimientos previos de los alumnos, así como aprovechar las oportunidades que se presenten en el aula para abrir la puerta a conocimientos futuros (De Gamboa et al, 2015).

Existen diferentes autores (Zazkis y Mamolo, 2011; Jakobsen, Thames, Ribeiro y Delaney, 2012; Fernández y Figueiras, 2014) que analizan el HCK desde diferentes perspectivas, lo que evidencia el interés que genera este tipo de conocimiento en el análisis del conocimiento del profesor desde una perspectiva de aula. Zazkis y Mamolo (2011), proponen una interpretación del HCK que se relaciona con un conocimiento avanzado de las matemáticas, y en la que se traslada la responsabilidad de establecer conexiones a los alumnos, al comprender en profundidad un concepto. Jacobsen et al

(2012) incluyen además la capacidad del profesor para interpretar lo que dicen y hacen los alumnos y, en consecuencia, proponer formas de profundizar en el conocimiento matemático.

En el presente estudio se conjugan estas dos interpretaciones, ya que se considera importante un conocimiento avanzado de las matemáticas que permita al profesor tener una perspectiva global del contenido, pero al mismo tiempo interesa un conocimiento profundo del contenido que se enseña. Por ejemplo, al tratar la conmutatividad, el profesor debe tener en cuenta las diferentes operaciones que cumplen la propiedad así como las que no lo cumplen (Carrillo et al, 2013). Sin embargo, en este ejemplo no solo es relevante que el profesor sepa que la multiplicación de matrices o la composición de funciones no son conmutativas. También es necesario entender la dificultad que pueden experimentar los alumnos al intentar dar sentido a la conmutatividad de la multiplicación al pensar en un modelo de agrupación (no es lo mismo hacer tres grupos de dos que dos de tres).

Por tanto, el HCK no se relaciona solo con un conocimiento avanzado de las matemáticas, sino también con un conocimiento avanzado de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Fernández y Figueiras, 2014). Además, el HCK se relaciona de forma clara con lo que Shulman (1986) llama un conocimiento vertical del currículo de matemáticas, ya que se refiere explícitamente a ser consciente de las relaciones entre contenidos matemáticos a lo largo de la escolaridad. Así, se considera el HCK como la conjunción de elementos del conocimiento del contenido, del conocimiento pedagógico del contenido y del conocimiento curricular, en el sentido propuesto por Shulman (1986). Al mismo tiempo se resalta la importancia que tiene esta tipología de conocimiento, para entender la forma en que se relacionan las tres tipologías básicas propuestas (Fernández y Figueiras, 2014; De Gamboa et al, 2015).

El conocimiento avanzado para enseñar: *Mathematics Teacher Specialized Knowledge*

Carrillo et al (2013) proponen una reinterpretación del modelo propuesto por Ball et al (2008) que intenta dar respuesta a algunas dificultades que se han encontrado al utilizar este modelo en el análisis del conocimiento del profesor desde una perspectiva práctica. Esencialmente se identifican dos problemas, uno relacionado con la diferenciación entre SCK y CCK, y el otro relacionado con la diferencia entre SCK y HCK.

También existen problemas dentro de la delimitación interna entre las tres subtipologías del SMK, ya que el carácter especializado del SCK puede llevar a pensar en aspectos del CCK, así como del HCK (Carrillo et al, 2013). Se estima conveniente poner el foco en el conocimiento de carácter matemático que presenta el SMK, antes de pensar en las relaciones que lo hacen específico.

Carrillo et al (2013) proponen cambiar la clasificación dada por otra más relacionada con las matemáticas. De hecho, si se interpreta el SCK como un tipo de conocimiento que debía contemplar el todo y las partes en la construcción de conceptos matemáticos, se observa que se resalta un conocimiento matemático avanzado, acompañado de un conocimiento sobre cómo se construyen y se interconectan los contenidos matemáticos. En el caso del HCK, también se considera que existen aspectos relacionados con un conocimiento de cómo se construye el conocimiento matemático a partir de otros conocimientos.

Carrillo et al (2013) proponen tres sub tipologías para el contenido matemático: el conocimiento de los temas (KoT), que se pueden entender como un conocimiento de conceptos, procedimientos, propiedades o teoremas; el conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM), que se refiere a entender cómo se construyen algunas ideas matemáticas y cómo se relacionan; y el conocimiento de la práctica de las matemáticas (KPM), que se refiere a entender cómo se justifican propiedades en matemáticas, cómo se puede validar una afirmación, porqué se relacionan diferentes conceptos, o cómo se establecen las relaciones entre conceptos que aparecían en la tipología anterior. De forma muy simplificada se consideran estas tres tipologías del conocimiento matemático como *qué* matemáticas son importantes, *cómo* se relacionan entre ellas y *por qué* se producen estas relaciones.

Esto no quiere decir que se desechen el resto de características y de matices que introduce el SCK, sino que se interpreta que todas las características que hacen del conocimiento del profesor algo específico no se encuentran sólo en el dominio de las matemáticas, sino también en el de la didáctica. Algo similar ocurre con el HCK, que también se caracteriza por coordinar diferentes componentes del conocimiento del profesor, que le deben permitir desarrollar capacidades relacionadas con reconocer, interpretar, aplicar y ampliar los conocimientos matemáticos de los alumnos (De Gamboa et al, 2015).

En este sentido, se puede interpretar que las mayores fortalezas del modelo del equipo de Ball et al (2008) para entender el conocimiento del profesor (el SCK y el HCK) constituyen también su gran debilidad, si lo que se busca es una clasificación estrictamente disjunta de tipologías de conocimiento. Carrillo et al (2013) ayudan a esclarecer el modelo al focalizarse en aspectos relacionados con las matemáticas e introducir la idea de que la especificidad del conocimiento del profesor viene dada por la forma en que se conectan diferentes tipologías de conocimiento que se diferencia claramente de los conocimientos asociados tanto a otras profesiones como a la profesión docente en otras disciplinas.

En el caso del conocimiento pedagógico del contenido, Carrillo et al (2013) proponen también 3 tipologías. La primera es el conocimiento de los rasgos del aprendizaje de las matemáticas (KFLM), que se refiere a cómo los estudiantes aprenden matemáticas. Se trata de un conocimiento de tipo psicológico referido a conceptos matemáticos, y por tanto se apoya en el conocimiento de los tópicos que se pretende analizar desde el enfoque del aprendizaje. El segundo tipo de conocimiento es el Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT), que se refiere al conocimiento que activa capacidades relacionadas con escoger una representación, un material o secuencia didáctica determinada. Igual que en el caso anterior, aunque no se trate de un conocimiento estrictamente matemático, requiere de un conocimiento matemático para desarrollarse, ya que no se refiere a conocimientos pedagógicos generales sino a los que se ven determinados por un contenido matemático concreto. Finalmente, la tercera tipología es el Conocimiento de los Estándares para el Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS), que se refiere al conocimiento de especificaciones curriculares, la progresión a lo largo del tiempo, los materiales disponibles, o los tipos de evaluación convencionales. Se caracteriza por incluir objetivos y criterios de evaluación establecidos por instituciones de referencia.

Estas tres tipologías propuestas por Carrillo et al (2013), coinciden de forma básica con las tres categorías propuestas por Ball et al (2008). Así, la primera tipología coincide con el KCS, haciendo énfasis en el aprendizaje de las matemáticas. La segunda tipología coincide con el KCT, haciendo énfasis en que interesan los conocimientos pedagógicos que están determinados por el conocimiento matemático que se pretende enseñar, por lo que hay que entenderlos como un mismo conocimiento. Finalmente, la tercera tipología coincide con el KCC, aunque amplíe los conocimientos del currículo local con estándares propuestos por instituciones de referencia, como podría ser el NCTM.

Se considera que en estas tipologías propuestas por Carrillo et al (2013), se diferencian de manera más clara las sub tipologías del SMK y del PCK en comparación con el modelo del equipo de Ball et al (2008). Además, es un modelo que se acerca más a las propuestas originales de Shulman (1986), ya que las tipologías propuestas son más identificables desde el modelo original. Al interpretar la especificidad del conocimiento como una integración de las tipologías propuestas, el modelo revela que es la integración de los diferentes tipos de conocimiento la que hace que sea posible hablar de un conocimiento específico para el profesor de matemáticas.

Respecto al HCK, se considera que aunque se pueda dividir en otras tipologías, como son el conocimiento curricular –o de los estándares–, conocimiento pedagógico y conocimiento matemático avanzado, lo que hace que sea una construcción útil para entender el conocimiento que moviliza el profesor en el aula, es que explica de forma explícita cómo se conectan diferentes tipologías de conocimiento.

Por tanto, de la misma forma que se consideraba que las matemáticas son un conocimiento de carácter conexo, el conocimiento para enseñar matemáticas también está constituido por relaciones entre conocimientos de distinto tipo, sobre cómo enseñar matemáticas, cómo se aprenden las matemáticas, o conocimientos del currículo. Por tanto, no se busca encontrar una clasificación disjunta del conocimiento del profesor, sino una pseudoclasificación –en el sentido que las categorías no pueden ser disjuntas– que permita identificar elementos clave que ayuden a entender y organizar las conexiones que se producen entre estos conocimientos.

El Cuarteto de Conocimiento: *The Knowledge Quartet*

En el contexto de un proyecto colaborativo entre tres universidades del Reino Unido llamado SKIMA, se propone un modelo teórico para el conocimiento del profesor dirigido a analizar el conocimiento del profesor de matemáticas desde una perspectiva práctica. Este modelo se desarrolló analizando profesores de primaria en formación que cursaban un postgrado en educación. A partir del análisis de las sesiones de clase, que estos estudiantes realizaban dentro de su formación práctica, los investigadores identifican 18 códigos que describen momentos de la clase en que el conocimiento relacionado con el SMK o el PCK sean relevantes. Después de diversos análisis exhaustivos de las clases grabadas en video, los códigos fueron agrupados en cuatro categorías: Fundamento, Transformación, Conexión y Contingencia.

La categoría de fundamento se refiere a los contenidos que hacen parte del conocimiento previo a la práctica que los profesores llevan al aula. Es un conocimiento que incluye contenidos teóricos de contenidos matemáticos, conocimientos significativos y fundamentados en didáctica de las matemáticas y creencias sobre las matemáticas y sobre cómo deben ser enseñadas. Se caracteriza por ser de tipo proposicional (Shulman, 1986) y se adquiere durante la formación académica del profesor –incluyendo su experiencia como alumno de primaria y secundaria–. Es un tipo de conocimiento que se posee, independientemente de que se movilice o no en la práctica.

La categoría de fundamento se relaciona con la categoría del SMK propuesta por Shulman (1986), e incluye además rasgos del PCK así como creencias relacionadas con la naturaleza de las matemáticas; el propósito de la educación matemática o la adecuación de un currículo determinado; y las condiciones que más favorecen la construcción de conocimiento matemático.

La categoría de transformación se refiere a un conocimiento de tipo práctico, que se evidencia en la capacidad del profesor para planificar lo que enseña, así como para transformar su conocimiento matemático de forma clara y atractiva para los alumnos. Es un conocimiento que se caracteriza por *cómo* se presentan los conceptos a los alumnos y está determinado por la capacidad del profesor para decidir entre diferentes representaciones, analogías, ejemplos, razonamientos y justificaciones. Dado el carácter práctico de este conocimiento, requiere de un asidero teórico que es el conocimiento proposicional descrito en la categoría de fundamento.

La categoría de transformación se relaciona con la categoría de PCK propuesta por Shulman (1986), pero hace énfasis en una componente práctica, por lo que además de ser un conocimiento que puede ser adquirido desde la literatura didáctica, necesita también de una interiorización y de un análisis de casos por parte del profesor.

La categoría de conexión es también un conocimiento de tipo práctico que se evidencia en las decisiones que toma el profesor en relación a la presentación de las matemáticas como un conjunto de contenidos más o menos aislados. Se relaciona con la capacidad del profesor para presentar las matemáticas de forma coherente y conectada, lo que responde al carácter mismo de las matemáticas explicado en el apartado anterior, así como a aspectos psicológicos de la construcción de conocimiento matemático. Esta categoría se hace evidente mediante la capacidad del profesor para planificar la secuenciación de los temas, de los conceptos y de las tareas o ejercicios. Asimismo, se refiere a la capacidad del profesor para mostrar de forma explícita a los alumnos conexiones que se dan en matemáticas. Los autores hacen énfasis en que no se refieren únicamente a conexiones conceptuales, sino también a conexiones entre tareas que requieran demandas intelectuales similares.

Respecto al modelo de Shulman (1986), las conexiones se relacionan tanto con el conocimiento del contenido como con el conocimiento pedagógico del contenido (Rowland et al, 2009), ya que por un lado es necesario que el profesor conozca conexiones matemáticas, que se incluyen en un conocimiento sustantivo y sintáctico de las matemáticas, así como aspectos didácticos que permiten al profesor decidir sobre la relación existente entre diferentes tareas, o situaciones extramatemáticas.

La categoría de contingencia se relaciona con la gestión que hace el profesor de las situaciones no planificadas que ocurren en el aula y se manifiesta mediante la capacidad del profesor para responder a las ideas que proponen los alumnos, así como para desviarse de su planificación inicial con el objetivo de aprovechar las oportunidades inesperadas que se producen durante la clase, valorando la adecuación de hacer más énfasis en unas aportaciones que en otras. Este tipo de conocimiento es eminentemente práctico y se relaciona con la seguridad del profesor acerca de su conocimiento del contenido.

Según Rowland et al (2009), la categoría de contingencia se relaciona con todas las categorías de conocimiento propuestas por Shulman (1986) ya que en los factores que pueden determinar la capacidad y la disposición del profesor para aprovechar situaciones o intervenciones inesperadas se cuentan un conocimiento sólido del tema –en términos de un conocimiento tanto sustantivo como sintáctico–, de la didáctica de las matemáticas, y del currículo con el que trabaja.

A continuación se presenta, en la Tabla 1, un resumen de la tipología de acciones del profesor que se consideran indicadores de cada tipo de conocimiento. Este modelo se utiliza para en la aproximación a la práctica, ya que permite interpretar acciones concretas en el aula desde la perspectiva teórica del presente estudio.

Fundamento	Uso del libro de texto Conciencia del propósito Identificación de errores Conocimiento público de las matemáticas Concentración en los procedimientos Fundamentación teórica Uso de la terminología	Anticipación de la complejidad Decisiones sobre la secuenciación Establecimiento de conexiones entre procedimientos Establecimiento de conexiones entre conceptos Reconocimiento de la adecuación conceptual	**Conexión**
Transformación	Elección de ejemplos Elección de representaciones Justificación	Desviación de la agenda Respuesta a las ideas de los estudiantes Uso de oportunidades	**Contingencia**

Tabla 1. Códigos de identificación asociados al Knowledge Quartet

Propuesta de re conceptualización del modelo de Shulman

El análisis de los modelos anteriores permite entender mejor el modelo de Shulman (1986) desde una perspectiva práctica. Aunque los autores presentan diferentes variaciones del modelo inicial, se propone hacer énfasis en las aportaciones que profundizan la caracterización del conocimiento desde una perspectiva práctica. Como se comentó en los análisis anteriores, la actividad docente en matemáticas requiere de la coordinación de diferentes tipos de conocimiento, y es precisamente esta interrelación la que constituye la especificidad del conocimiento del profesor.

Así, se presenta un modelo construido con base en los análisis teóricos anteriores, y dirigido a presentar una caracterización simplificada con una estructura que permita aproximarse a las relaciones que se establecen entre las distintas tipologías en un contexto de práctica de aula. El modelo de conocimiento que se propone tiene tres tipologías que su vez se dividen en dos sub tipologías. En un primer nivel, se toma la propuesta de Petrou y Goulding (2011) acerca de mantener la estructura básica propuesta por Shulman (1986), dividida en un conocimiento de la materia (SMK), un conocimiento pedagógico o didáctico de la materia (PCK) y un conocimiento del currículo (CK).

El conocimiento de los contenidos se refiere a conocimientos de contenidos matemáticos y de su organización. Incluye conocimientos de definiciones, representaciones, técnicas, procedimientos, lemas, proposiciones y teoremas. También se refiere a un conocimiento de la forma en que estos resultados se relacionan y se estructuran, cómo se relacionan las distintas definiciones y representaciones de un mismo concepto, cómo se justifican y demuestran los teoremas que se utilizan, cómo se generaliza un resultado particular, o cómo se relacionan diferentes procedimientos relacionados con una misma tarea.

Así, se divide el SMK en dos subdominios. El primero es el conocimiento de los temas y de su estructura (KOTS) en el sentido propuesto por Carrillo et al (2013) para el KoT y KSM, que consiste en el conocimiento de los fundamentos conceptuales y procedimentales de las matemáticas a un nivel más avanzado que el que estrictamente corresponde al nivel educativo en que ejerce el profesor, así como el conocimiento de conexiones entre diferentes conceptos y procedimientos. El KOTS es lo que Schwab (1978) define como conocimiento sustantivo de una materia, que incluye la variedad de formas en que los conceptos y principios básicos de una disciplina se relacionan.

El segundo sub dominio es el conocimiento de la práctica matemática (KPM), en el mismo sentido de Carrillo et al (2013), y consiste en el conocimiento de cómo se crea y se construye el conocimiento en matemáticas, cómo se comunica el conocimiento matemático, cómo se construyen razonamientos, cómo se llevan a cabo pruebas y verificaciones, cómo se construyen y se utilizan las definiciones, y cómo se relacionan diferentes conceptos o propiedades. El KPM se entenderá como lo que Schwab (1978) llama conocimiento sintáctico de la materia, que incluye el conjunto de maneras en que se establece la verdad o la falsedad, la validez o la invalidez en una disciplina.

El PCK se divide también en dos subdominios que coinciden con dos de los subdominios que proponían Ball et al (2008). El primer subdominio es el conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS), que se refiere a conocimientos que relacionan el conocimiento de las matemáticas y el conocimiento de los estudiantes, como son anticipar lo que los alumnos pueden pensar o encontrar confuso, anticipar lo que los alumnos pueden encontrar interesante y motivador de un ejemplo determinado, anticipar las reacciones de los estudiantes cuando se les propone una tarea determinada en relación a la dificultad de la misma, escuchar e interpretar las ideas de los alumnos y conocer las ideas previas y las ideas erróneas de los alumnos.

El siguiente sub dominio es el Conocimiento del Contenido y de la Enseñanza (KCT) que se refiere al conocimiento que combina conocimiento sobre las matemáticas y conocimiento sobre la enseñanza, como son la secuenciación de contenidos para la instrucción, la elección de ejemplos para introducir o para profundizar conceptos, la evaluación de las ventajas y desventajas de algunas representaciones concretas para presentar un contenido en relación a los métodos y procedimientos que se les asocian, la decisión sobre qué contribuciones de los alumnos profundizar y cuáles desestimar o sobre cuándo parar la clase para volver a explicar, así como cuándo proponer ejercicios de profundización o cuándo usar la intervención de un alumno para resaltar una idea.

El CK se refiere al conocimiento de los marcos curriculares vigentes en un momento y sitio determinados, así como de los estándares internacionales de referencia. También incluye el conjunto de materiales asociados a dichos marcos curriculares (libros de texto, material físico o software). Esta categoría se divide a su vez en dos subdominios construidos a partir de la caracterización hecha por Shulman (1986) de esta categoría. El primer subdominio es el conocimiento lateral del currículo (LKC) que consiste en el conocimiento de los temarios y los materiales que están utilizando sus alumnos en otras asignaturas dentro de un mismo curso escolar. El segundo subdominio es el conocimiento vertical del currículum (VCK) que consiste en el conocimiento de los matemáticos que se estudian en diversos cursos escolares.

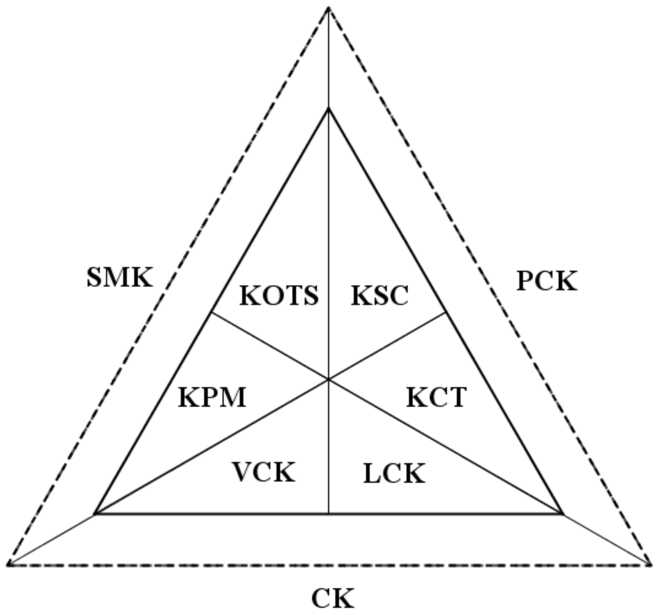

Figura 3. Modelo de referencia para el análisis del conocimiento de profesor

Respecto al modelo propuesto por Rowland et al (2005), se considera que este modelo teórico (Figura 3) permite interpretar la tipología de acciones que describen las cuatro dimensiones del conocimiento práctico propuestas en el *Knowledge Quartet*. En el apartado de metodología se explica cómo se aplica este modelo al análisis de los episodios de aula (Ver Apartado 3.5). El conjunto de códigos presentados en la Tabla 1, así como la caracterización de las cuatro dimensiones permiten relacionar acciones concretas del profesor en el aula con el modelo de conocimiento propuesto.

3 Metodología

En este capítulo se describen el diseño metodológico de la investigación, la recogida de datos y la metodología de análisis. Teniendo en cuenta el carácter exploratorio de la investigación, se toma un enfoque cualitativo e interpretativo. Para el diseño general de la investigación se tomó como referencia el estudio de casos, que se reveló como el enfoque más adecuado para un estudio en profundidad de un fenómeno en el contexto natural en el que se produce.

El análisis de los datos se divide en dos bloques. En el primer bloque se realiza un análisis de las sesiones de clase dirigido a identificar, definir y clasificar conexiones en el aula. En el segundo bloque se analiza el conocimiento del profesor que se relaciona con el establecimiento de las conexiones identificadas en el primer bloque. La metodología adoptada para el análisis de las conexiones se inspira en la teoría fundamentada, ya que durante todo el proceso de análisis se realizó una revisión constante tanto de la literatura relacionada con conexiones y conocimiento como de los datos empíricos que se recogieron.

En los siguientes cinco apartados se explica en detalle el enfoque metodológico usado en el diseño de la investigación, el contexto y los instrumentos de recogida de datos, y la metodología de análisis, que se divide en tres niveles de aproximación de los datos, dos de los cuales se basan en la identificación, análisis y caracterización de las conexiones, y un tercer que se basa en el análisis del conocimiento.

3.1 Enfoque metodológico del diseño de la investigación

Para aproximarnos a la relación entre el establecimiento de conexiones en el aula y el conocimiento del profesor se plantea una investigación centrada en el análisis de la actividad de aula de un grupo clase. Las conexiones, tal y como se han definido en el apartado anterior, dependen del contexto de aula y, en particular, quedan definidas por las intervenciones de los alumnos y de la profesora, así como por la estructura de los contenidos matemáticos que se trabajan en el aula.

Dado que los datos quedan determinados por la interacción entre profesora y alumnos, y dado que interesa realizar un análisis en profundidad, se optó por un enfoque cualitativo e interpretativo. En este sentido, tal y como señala Bryman (2004), existen tres niveles de interpretación en los datos que se analizarán. Por un lado, en un primer nivel se identifican las interpretaciones que hacen tanto los alumnos como la profesora de los conceptos matemáticos que se trabajan. En un segundo nivel, se analizan dichas interpretaciones caracterizando la actividad matemática que se observa en el aula. Finalmente, en un tercer nivel, los resultados de dichos análisis se reinterpretan desde el marco teórico y dando respuesta a los objetivos de la investigación.

Se establecen objetivos de investigación dirigidos a entender mejor la relación que existe entre el establecimiento de conexiones en el aula y el conocimiento del profesor. Basándonos en la literatura relacionada tanto con las conexiones como con el conocimiento del profesor desde una perspectiva práctica, se acepta como premisa que esta relación existe aunque no se pueda describirla ni caracterizarla en base a los resultados informados en la literatura.

Por tanto, no se cuenta con hipótesis predeterminadas sobre la relación entre las conexiones y el conocimiento del profesor en un contexto de aula, sino que se forman las primeras hipótesis sobre esta relación a partir de los datos. Este enfoque necesita un análisis en profundidad de los datos que permita construir gradualmente resultados teóricos a partir del análisis de datos concretos. En consecuencia, se plantea el estudio en profundidad de un grupo clase con una única profesora, ya que se considera que analizar más de una profesora o más de un grupo clase dificultaría la identificación de relaciones en los datos, así como la emergencia de resultados teóricos.

El diseño metodológico se inspira en el estudio de casos (Gerrin, 2004). Este autor define el estudio de casos como el estudio intensivo de una unidad con el propósito de entender un conjunto más amplio de unidades. En esta investigación se propone un estudio intensivo de una unidad –el grupo clase– dirigido a entender la relación entre el establecimiento de conexiones y el conocimiento del profesor en un contexto general de aula. Yin (2014), por su parte, define el estudio de casos como la investigación empírica que estudia un fenómeno contemporáneo (el caso) en profundidad y dentro de su contexto, especialmente cuando los límites entre el fenómeno y el contexto no están del todo claros. En la investigación que aquí se explica el caso es el fenómeno de la relación que se produce en un contexto de aula entre conexiones y conocimiento del profesor. Dicha relación, en línea con la definición de Yin (2014), puede estar en buena medida determinada por el contexto.

El caso que se define y se analiza es la relación entre el establecimiento de conexiones en el aula y el conocimiento del profesor y puede ser caracterizado, según la clasificación de Yin (2014), como de tipo común o, en la propuesta de Bryman (2004), como un caso ejemplificador. En las dos clasificaciones, se refieren a casos que no se caracterizan por su rareza o unicidad, sino por desarrollarse en una actividad cotidiana –la actividad cotidiana de aula– y proporcionar el contexto adecuado para aproximarse a la pregunta de investigación.

En resumen, la investigación consiste en el análisis en profundidad de un grupo clase durante un periodo limitado de tiempo definido por la unidad didáctica de introducción a los números enteros. Dicho análisis está dirigido a explorar la relación que existe entre las conexiones que se establecen en el aula y el conocimiento de la profesora. Dada la naturaleza de la pregunta de investigación el enfoque metodológico se basa en el estudio de casos.

Las razones por las cuales se considera que el enfoque metodológico es coherente con la pregunta de investigación y con los objetivos de la investigación se pueden resumir siguiendo la clasificación propuesta por Gerrin (2004). En primer lugar, el estudio de casos es especialmente útil para una inferencia de tipo descriptiva, en contraposición al establecimiento de relaciones causales. Esta investigación no pretende, en este nivel, establecer relaciones causales invariables entre tipologías de conocimiento del profesor y tipos de conexiones que se establecen en el aula, sino que se busca una aproximación a la relación subyacente para diseñar estudios posteriores que permitan profundizar en el conocimiento de dicha relación. Además, el hecho de que se tome como referencia una única unidad, hace que los resultados obtenidos tengan sentido en su contexto particular, lo que haría difícil su comparación con otros grupos clase y otros profesores, como se verá más adelante.

En segundo lugar, el estudio de casos es útil cuando se busca profundidad en el análisis, más que resultados que puedan ser aplicados de manera amplia a una gran variedad de grupos clase y de profesores. En esta investigación se pretende analizar un grupo clase en profundidad y aunque este análisis no permite hacer afirmaciones sobre los que pase con todos los profesores, sí se podrá identificar, a partir del análisis de una profesora, relaciones entre tipologías de conocimiento y conexiones en el aula.

En tercer lugar, el estudio de casos es útil para investigaciones en las que interese más tener datos homogéneos en contraposición a tener datos representativos de un conjunto más grande de grupos clase. Dado el carácter de la pregunta de investigación y de los objetivos que se plantean en esta investigación, se buscan datos que permitan comparar las características, tanto de las conexiones que se producen en el aula como las diferentes tipologías del conocimiento del profesor identificadas, para poder inferir patrones en la relación entre conexiones conocimiento.

En cuarto lugar, el estudio de casos es útil en investigaciones en las que se busque entender los mecanismos causales que se dan en la relación entre dos elementos. Así, en nuestro estudio, se busca comprender los mecanismos que determinan la relación que se analiza. No se pretende establecer una relación causa efecto absoluta entre tipologías de conocimiento y tipologías de conexiones que puedan establecerse en el aula, sino que se persigue entender cómo se pueden establecer estas relaciones en un contexto determinado.

Finalmente, el estudio de casos es útil para investigaciones de carácter exploratorio, en contraposición a investigaciones de carácter confirmatorio. En el presente estudio, dado que no se parte de ninguna hipótesis previa a confirmar, se plantea una investigación exploratoria, dirigida a profundizar en una relación que permita entender mejor tanto el conocimiento del profesor en un contexto de aula, como el papel que juegan las conexiones en la actividad de aula.

Los resultados que se espera obtener son relaciones entre conexiones identificadas en el aula y aspectos del conocimiento del profesor que se relacionen con la conexión identificada, también identificados a partir de los datos empíricos. En este sentido, los resultados se presentaran como descripciones detalladas de las conexiones y del conocimiento del profesor, así como de las relaciones que se producen entre conexiones y conocimiento. Estas descripciones dependen de las interpretaciones que se hacen de las intervenciones de la profesora, de los alumnos, y están determinadas por el contexto matemático en el que se producen.

Por tanto, la validez de los resultados quedará determinada por la actividad que se desarrolla en el aula. Se trata por tanto de una validez *ecológica* (Bryman, 2004), en tanto que los datos hacen parte de sesiones regulares de clase, en las cuales se intentó que la influencia de los investigadores fuera la mínima posible, por lo que los resultados se espera que sean aplicables, al menos parcialmente, a otras clases de matemáticas. Además, se busca aproximarse a una validez *interna* (Bryman, 2004), ya que los mecanismos causales entre el conocimiento del profesor y el establecimiento de conexiones serán interpretados teniendo en cuenta los aspectos matemáticos y didácticos de la relación.

3.2 Contexto y recogida de datos

Para la elección del grupo clase en el cual se recogerían los datos se tuvieron en cuenta tres aspectos: la profesora, los alumnos y el contenido matemático que se trabajaba. En primer lugar, se decidió que la profesora debía cumplir unas características básicas para que los datos pudiesen ser, al menos a priori, ricos desde el punto de vista del conocimiento. Por tanto, se buscaba una profesora que tuviera una formación de alto nivel en matemáticas y, a ser posible, un buen conocimiento didáctico-matemático y curricular.

La profesora

Se seleccionó una profesora experta desde el punto de vista de sus conocimientos de las matemáticas avanzadas. Además de tener formación universitaria especializada en matemáticas, posee experiencia como profesora de matemáticas en el ámbito universitario, tiene aprobada una oposición de profesora de secundaria y varios años de experiencia como profesora de secundaria. Por otro lado, los informes que se obtuvieron por parte de la dirección del centro reflejaban un alto reconocimiento de su labor. Finalmente, otro criterio de elección de la profesora es el hecho de que el equipo de investigación ya disponía de datos de clases, en los que se podía observar que permitía a los alumnos intervenir regularmente y plantear sus propias ideas.

Por otro lado, otro criterio de selección es que el centro en el que labora presentaba una buena disponibilidad para la recogida de datos, dado que formaba parte del grupo de centros que colaboraba con el proyecto '**Factores de influencia en la discontinuidad del aprendizaje matemático entre primaria y secundaria**', EDU2009-07298/EDUC, financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación, en el cual se inscribía la investigación durante los primeros 2 años. Esto facilitaba la recogida de datos, ya que otros miembros del mismo grupo de investigación estaban recogiendo datos en el mismo centro.

El grupo clase

Una vez elegidos el centro y la profesora, se pasa a elegir el grupo clase en que se recogerían los datos. Dentro de los grupos con los que trabajaba la profesora se consideró especialmente interesante el caso del primer curso de Educación Secundaria Obligatoria (12 años), ya que al estar en la transición entre dos etapas podrían favorecer el establecimiento de conexiones, tal y como se observa en algunas investigaciones (Fernández, 2011; De Gamboa, 2011).

El grupo clase está compuesto por 24 alumnos. La tipología del alumnado se consideró adecuada para la investigación, ya que los alumnos del grupo presentaban características diversas en cuanto a su entorno socioeconómico, así como a sus resultados académicos. Además, no se identificó ninguna situación de atención a necesidades educativas especiales en relación al grupo clase.

Unidad didáctica analizada: Introducción a los números enteros

La elección del contenido matemático que serviría de contexto se llevó a cabo mediante el análisis del currículo oficial del primer curso de Educación Secundaria Obligatoria. El análisis previo del currículo se centró en identificar la cantidad de relaciones que se podían establecer entre cada bloque temático y otros bloques temáticos presentes en los currículos escolares (primaria, secundaria y bachillerato). Como resultado de este análisis previo se decidió registrar en vídeo dos unidades didácticas: Proporcionalidad y Números enteros. Finalmente, se decidió centrarse en el análisis de la unidad didáctica de los números enteros por su riqueza desde el punto de vista de las conexiones y del conocimiento matemático relacionado, tal y como se explica a continuación.

En primer lugar, la introducción de la aritmética con enteros en este curso representa una ampliación de la aritmética con naturales. Las reglas que han sido válidas para los naturales a lo largo de la educación primaria deben mantenerse en el conjunto de los números enteros. Por tanto, es de esperar que se produzcan conexiones entre elementos que aparecen en los números enteros y elementos que se utilizaban en los números naturales. Un ejemplo claro es la multiplicidad de significados (operador binario, operador unario de elemento opuesto y elemento para denotar los números negativos) que tiene el signo – en los números enteros, en contraposición a un único significado en los números naturales.

Además, las operaciones adquieren una nueva dimensión, en tanto que pierden algunos referentes de acción real como es el caso de añadir o avanzar para la suma, o quitar y retroceder para la resta. De la misma manera, la multiplicación y la división requieren de una nueva interpretación que incluya una regla para operar los signos de positivo y negativo multiplicativamente. Por tanto, los alumnos deben construir un conjunto de hechos y de propiedades relacionadas con los números enteros manteniendo sus conocimientos e interpretaciones previas para los números naturales.

En segundo lugar, desde un punto de vista matemático, la introducción de los enteros implica la introducción implícita de la estructura de anillo aditivo, que aparece posteriormente en numerosos conceptos de la matemática escolar como son los números racionales, los números reales, los números complejos, los polinomios, las funciones, los vectores o las matrices. Por tanto, la estructura aditiva de los enteros abre la puerta de manera implícita a una estructura elemental para el estudio de las matemáticas en la educación secundaria, por lo que puede ser un contenido que potencie conexiones con conceptos matemáticos que aparecen en cursos posteriores en la educación secundaria.

Finalmente, se considera que desde el punto de vista didáctico se trata de un tema especialmente interesante, ya que existen diversas y discutidas propuestas sobre la enseñanza de los números enteros, sobre las dificultades que tienen los alumnos en su aprendizaje, así como en la propia epistemología de los números enteros (Cid, 2003).

Desde la perspectiva de la enseñanza de los números enteros existen tres tipos de propuestas, la inductiva, la deductiva, la constructiva y mediante la utilización de modelos (Arcavi y Bruckheimer, 1981; Cid, 2003). La introducción inductiva se basa en el descubrimiento y generalización de regularidades aditivas y multiplicativas (Cid, 2003). La introducción deductiva, por su parte, consiste en construir los simétricos de los números naturales y definir las operaciones de manera que se conserve la estructura de los naturales (Cid, 2003). La introducción constructiva consiste en construir los números enteros como el conjunto cociente de de pares de números mediante la relación $(a,b) \sim (a',b')\ si\ y\ solo\ si\ a+b'=a'+b$. Finalmente la introducción mediante el uso de modelos consiste en presentar los números enteros en base a su similitud con modelos reales de situaciones que comparten rasgos con la estructura de los enteros. Cabe resaltar que la mayoría de autores propone que la introducción se haga mediante modelos, lo que coincide también con la mayoría de las propuestas encontradas en los libros de texto, aunque, existen también otras propuestas basadas en la resolución de problemas (Pujol, 2008).

Desde la perspectiva de las dificultades que presentan los alumnos al trabajar con números enteros, existen diversos estudio que analizan la dificultad de los alumnos al realizar operaciones aditivas y multiplicativas con números enteros (Kücheman, 1981; Murray, 1985); comparaciones entre sumas con signo igual o diferente (Peled, 1991; Borba, 1995); análisis de las estrategias utilizadas por los estudiantes (Bell, 1986); y, análisis de la relación entre el conocimiento de las reglas de la multiplicación y la realización de operaciones aditivas (Leonard y Sackur, 1990; Iriarte, Jimeno, y Vargas-Machuca, 1991). Los resultados de los estudios anteriores muestran la dificultad asociada al aprendizaje de los números enteros y la dificultad para relacionar las variables que puedan mejorar la comprensión de este contenido por parte de los estudiantes.

Respecto al análisis epistemológico de la construcción del concepto de número entero y de su estructura, diferentes autores (Brousseau, 1983; Duroux, 1982) caracterizan la construcción que hacen muchos alumnos de los números enteros como un obstáculo epistemológico, en el sentido que funciona para algunos contextos pero genera respuestas falsas en otros contextos y además se resiste a las contradicciones y no evoluciona. Más allá del mismo concepto de obstáculo, nos parece interesante esta discusión en tanto que hace evidente una problemática profunda en la construcción conceptual de los números enteros. Esta dificultad aparece también si se analiza la construcción epistemológica del los números enteros desde una perspectiva histórica, en la que se observan dificultades no solo para operar con números negativos en el caso de Diofanto, así como para aceptarlas y darles estructura en el de D'Alembert o McLaurin (Gómez, 2001).

Así pues, la introducción en un aula de primer curso de ESO de los números enteros conlleva una complejidad didáctica y matemática importante. En primer lugar, ante la variedad de posibilidades para su introducción se hace evidente que la mayoría de las propuestas didácticas actuales se basan en la introducción mediante modelos. Sin embargo, existen resultados que muestran que la utilización de modelos no ayuda a los alumnos a entender los números enteros (Human y Murray, 1987). De hecho, la permanencia de estos modelos puede constituir un obstáculo para los alumnos, debido a que no son isomorfos a los números enteros (Brown, 1969; Freudenthal, 1973). Además, la propia génesis histórica de los números enteros muestra que su naturaleza no reside en el mundo físico, sino en el de las ideas matemáticas.

Estas tres dimensiones de los números enteros desde una perspectiva didáctico-matemática, están a su vez estrechamente relacionadas, ya que adoptar un enfoque epistemológico implica consideraciones didácticas, igual que el conocimiento de las dificultades de los alumnos puede ser mejor entendido desde una análisis epistemológico de los números enteros, y se pueden diseñar acciones didácticas para intentar disminuir la incidencia de estas dificultades en el aprendizaje de los alumnos. De hecho, se constata un vacío en la literatura en didáctica de las matemáticas acerca de la relación entre los conocimientos y/o dificultades relacionados con los números enteros y las características de la enseñanza recibida (Cid, 2003).

Por todos estos motivos, se considera que el tema de la introducción de los números enteros puede ser rico desde las dos perspectivas principales de esta investigación. En primer lugar, se trata de un tema que posee conexiones matemáticas intrínsecas con diferentes temas de la educación secundaria. Además, puede generar intervenciones diversas y ricas por parte de los alumnos y de la profesora. La complejidad didáctica y epistemológica de los números enteros requieren a su vez de un conocimiento sólido de los enteros como contenido matemático, así como de la didáctica de las matemáticas, ya que debe ser el profesor el que decida el camino a seguir para la construcción conceptual de los enteros y para ayudar a los alumnos a superar su dificultades.

Métodos de obtención de datos

Los datos sobre los que se desarrolla el análisis son registros en video y audio de sesiones regulares de clase y sus correspondientes transcripciones. Para minimizar la influencia de la presencia de los investigadores y de los aparatos electrónicos necesarios para el registro, se decidió que se registrarían todas las sesiones en las que se desarrollaban las unidades didácticas, y no situaciones diseñadas ad hoc especialmente para los fines de la investigación.

Durante el registro se intentó que la presencia tanto de la cámara como del técnico influyera lo mínimo posible en el desarrollo normal de las clases y en las intervenciones de los alumnos. El análisis inicial de las sesiones permitió la identificación de 14 episodios que se analizaron en más profundidad, tal y como se explica a continuación.

3.3 Primer nivel de aproximación a los datos

La primera aproximación a los datos consiste en el visionado de todas las 8 sesiones de clase de la unidad didáctica sobre números enteros. El objetivo de este primer visionado es identificar fragmentos en los que se den conexiones. La identificación inicial de las conexiones se realiza a partir de una definición natural, entendiendo las conexiones como relaciones entre dos elementos basadas en un principio de lógica, coherencia y continuidad. Estas relaciones pueden estar desencadenadas por el discurso de la profesora, por las intervenciones de los alumnos o incluso por la propia actividad matemática que se desarrolla. Al identificar una posible conexión se visualiza repetidamente el fragmento en el que aparezca, con el objetivo de identificar la primera y última intervención de la profesora y/o de los alumnos que esté relacionada con la conexión.

A estos fragmentos definidos en base a intervenciones relacionadas con una conexión se los llama episodios, y constituyen las unidades que se analizan en las siguientes etapas del análisis, tal y como se detalla en el Capítulo 4. Dado que la definición de estos episodios depende de la definición de conexión que se tenga en cuenta, su definición y delimitación puede variar a lo largo de la investigación, pudiéndose hacer más cortos o más extensos.

Se considera que un episodio comienza cuando se produce la primera intervención que aporta información significativa a la relación que se establece. Asimismo, un episodio termina cuando se produce la última intervención que aporte información significativa a la conexión. La significatividad de las intervenciones en relación a la conexión queda determinada por la aportación que haga a la coherencia y la lógica de la relación. En este sentido se analizaron las conexiones siguiendo los criterios de pertenencia –relación con el tema del que trata la conexión– y de relevancia (Cisterna, 2005)

Es importante señalar que las conexiones no siempre se producen de manera explícita. Tal y como se explica en el Capítulo 5, es posible que una conexión quede determinada por intervenciones de la profesora y/o de los alumnos que nos sugieran la existencia de una conexión subyacente al discurso que se produce en el aula. Por ejemplo, se dan momentos de la clase en los que se detecta que hay una conexión a partir de una intervención de los estudiantes o de la profesora pero en la discusión la conexión no se llega a hacer explícita (p.e., ver los subepisodios C1.2, C2.5 o C5.2 en el Capítulo 4). En estos momentos o episodios definidos, además de identificar que se produce la conexión, en el análisis se explicita la conexión identificada.

Dado que las conexiones iniciales pueden estar definidas por intervenciones de la profesora y de los alumnos, dentro de las conexiones identificadas inicialmente se producen relaciones diversas que constituyen en sí mismas conexiones más simples que definen subepisodios. A partir de los resultados obtenidos en los primeros niveles de análisis las conexiones identificadas inicialmente, que definían los episodios, se fueron fragmentando en subepisodios definidos por conexiones que se identificaron dentro del conjunto de intervenciones que definían la conexión inicial. Cada uno de los episodios iniciales quedó dividido en entre 1 y 6 subepisodios, que se denotaban CA.B donde la A denota el número del episodio, y la B el número del subepisodio. Este agrupamiento de las intervenciones en episodios y subepisodios se inspira en Shoenfeld (2011), aunque en nuestro caso no se trata de fases dentro de una sesión o fragmento de aula, sino que tanto los episodios como los subepisodios quedan definidos por relaciones matemáticas que se establecen en el aula, que pueden ser fragmentadas en relaciones matemáticas más elementales.

Una vez identificada una conexión durante el visionado de las sesiones de aula, y habiendo delimitado los episodios, se procede a la transcripción literal de los episodios identificados. Para la transcripción se utilizaron las grabaciones de vídeo de las sesiones completas registradas con una única cámara. En general, las intervenciones tanto de los alumnos como de la profesora se distinguían de manera clara en la grabación. Sólo en un caso (Capítulo 4, episodio 8, subepisodio 8.3) no se registró una interacción entre la profesora y un estudiante.

Las transcripciones se realizaron en tablas de tres columnas, tal y como se muestra en la Tabla 2. Las dos primeras columnas son identificativas. En la primera columna se identifica el número de la intervención dentro de todas las intervenciones recogidas en el apartado de análisis de esta investigación.

En la transcripción de cada subepisodio, la numeración de las intervenciones sigue un orden cronológico, y va aumentando según el número del subepisodio. Sin embargo, es posible que un subepisodio esté formado por intervenciones incrustadas en un subepisodio anterior (por ejemplo, subepisodios C8.2 y C8.1, Capítulo 4), y que por tanto la numeración de las intervenciones de un subepisodio (ver subepisodio C8.2, Capítulo 4) sea mayor a la de las intervenciones que se produjeron antes en tiempo real (ver C8.1, Capítulo 4).

La segunda columna muestra la identidad de la persona que realiza la intervención. Se utilizaron seudónimos para proteger la identidad de los alumnos y de la profesora. En la mayoría de los casos fue posible identificar la identidad de la persona que hablaba, ya fuera por una referencia directa de la profesora o por su tono de voz. En los casos en que esta identificación no fue posible, se optó por identificar a los alumnos con una letra y un número. Dicha numeración es exclusiva de cada subepisodio, por lo que el alumno A1 de una transcripción no se corresponde necesariamente con el alumno A1 de otra. En el caso de la profesora se optó por mantener la etiqueta profesora, salvo en los casos en que los alumnos hacían una referencia directa a su nombre. En estos casos se llamó a la profesora Victoria.

La tercera columna consiste en la transcripción de la intervención de cada persona. Las intervenciones de clase se produjeron en lengua castellana y en lengua catalana. Dado que la mayoría de las intervenciones eran en lengua castellana, y que esta tesis se escribe en castellano, se optó por traducir al castellano las intervenciones hechas en lengua catalana. Se mantienen las expresiones, repeticiones y errores sintácticos en las construcciones orales de las personas que intervienen. Se utilizan aclaraciones en paréntesis para expresar gestos y representaciones que se realizan en la pizarra. Se utilizan los símbolos […] para representar un conjunto de intervenciones que se consideran irrelevantes para la conexión que se produce. A continuación, en la Tabla 2, se muestra un ejemplo de la transcripción del subepisodio C5.1.

Número intervención	Participante	Transcripción literal de la intervención
[109]	Profesora:	Y ahora vamos a la parte que te preocupaba Miguel. ¿Qué estás leyendo tú aquí?
[110]	Miguel:	-2
[111]	Profesora:	¿Y quién es el número que se replica? ¿Cuál es el número que se seguirá replicando, que seguirá saliendo varias veces?
[112]	Miguel:	El 2
[113]	Profesora:	El 2. Atención todos a este problema Federico. Leamos lo que hay en la pizarra. El número que se replica es el 2. El menos no se replica. ¿Y por qué Anna la importancia de los paréntesis? Porque el – no está dentro del paréntesis. ¿Sí lo vemos? Si quisiéramos que fuera el – replicándose, tendríamos que haber puesto un paréntesis, pero en estos momentos lo único que se replica es el 2, o siendo purista el +2. ¿De acuerdo? El +2.
[114]	Anna:	¿Pero no es negativo?
[115]	Profesora:	Será negativo el resultado final, pero el número que se replica es el 2. Esto que tengo en la pizarra -(2)^5 y esto -(+2)^5 es lo mismo.
[116]	Anna:	¿Y por qué pone negativo?
[117]	Profesora:	Porque el número que se replica es el 2 y cuando tengamos este resultado replicado patapam, le cambiamos el signo.
[118]	Miguel:	(En voz baja): Porque no lleva el paréntesis
[119]	Profesora:	Mira lo que voy a hacer, para que te quede claro. Miguel, ya se lo explico yo. Anna, mira cómo lo voy a resolver este problema, a ver si resolviéndolo te queda claro. Tapo el signo. El número que se replica es el 2: (escribe en la pizarra) 2· 2· 2· 2· 2. Tú ahora te puedes quejar y decirme: “Victoria, llevo un lio cuando pones el signo + y cuando no lo pones, y tienes toda la razón de quejarte, porque aquí en realidad con el que estamos trabajando es con el +2 [se conecta con el resultado anterior]. ¿Me permites que no le ponga el signo + a este 2 –al del enunciado-? ¿Me lo permites? Vale, damos por entendido entre tú y yo que es un +2, perfecto.
[120]	Anna:	Ya pero no entiendo porqué es un + si pone un signo negativo.
[121]	Profesora:	Porque este - -el del enunciado- está fuera de la operación

		de potenciación. Está fuera. Tú dirás: ¿Cuándo estaría dentro, Victoria? Aquí –señala el caso en que el – hace parte del paréntesis- porque lo bloquea, lo hace entrar dentro de la potencia.

Tabla 2. Ejemplo de transcripción literal

A partir la transcripción de las conexiones se procede a la identificación de las características básicas de las conexiones identificadas. En cada intervención se busca identificar el contenido matemático al que hace referencia, y a continuación se identifican relaciones matemáticas que se establecen entre estos contenido matemáticos. Los contenidos matemáticos que se identificaron encada conexión se denominaron nodos. Las relaciones matemáticas que se identificaron entre los pares de nodos se denominaron enlaces. La caracterización detallada de los nodos y de los enlaces se expone más adelante. Debido a que la definición de estas características evoluciona en las sucesivas etapas del análisis, los criterios que definen el instrumento de observación lo hacen también, tal y como se detalla a continuación.

3.4 Segundo nivel de aproximación a los datos

El segundo nivel de aproximación a los datos se inspira en la teoría fundamentada (Corbin y Strauss, 1990), tal y como se detalla a continuación. Se realizó una comparación constante entre los datos y entre los resultados teóricos que se fueron obteniendo. Se divide esta segunda aproximación a los datos en tres etapas que se inspiran en los tres niveles de codificación de la teoría fundamentada (Corbin y Strauss, 1990), así: (1) *open coding* –codificación abierta–; (2) *axial coding* (codificación axial); y, (3) *selective coding* (codificación selectiva). En la primera etapa, codificación abierta, se identifica la estructura básica de cada conexión y se describen las características de cada una. En el segunda etapa, codificación axial, se detalla la estructura interna de cada conexión, los enlaces que la componen y se analiza la finalidad y la utilidad de la conexión en el contexto de aula en el que se produce. La tercera etapa, codificación selectiva, consiste en una reevaluación de los datos para profundizar en la categoría más numerosa. En todas las etapas del análisis se realizaba una revisión constante de los datos que iba acompañada de una revisión constante de la literatura relacionada con conexiones. Los constructos teóricos que se fueron desarrollando se evaluaban con base en

- su coherencia respecto a los datos

- la información que aportaba cada constructo para entender la construcción de conocimiento matemático que se realizaba en el aula
- la aplicabilidad del constructo a situaciones de aula diversas

A partir de esta segunda aproximación a los datos se desarrolló un instrumento analítico para el análisis de las conexiones. La construcción de este instrumento se detalla en las páginas siguientes y su presentación final, así como su procedimiento de aplicación, se muestran en las figuras 5 y 6 respectivamente. Una vez clasificadas todas las conexiones identificadas en base dicho instrumento, se procedió a analizar el conocimiento del profesor (ver Apartado 3.5).

La validación de los resultados parciales se realizó en diversos contextos. En primer lugar se realizaron reuniones periódicas de diferentes investigadores del departamento de Didáctica de las matemáticas y las Ciencias Experimentales de la Universidad Autónoma de Barcelona durante los dos primeros niveles de la investigación. También se realizaron presentaciones de los resultados parciales y del proceso de análisis en el contexto de los seminarios de investigación "Divendres de Recerca" en el mismo departamento. Finalmente, en el segundo y tercer nivel, se presentaron algunos resultados parciales en simposios de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (De Gamboa y Figueiras, 2013; De Gamboa y Figueiras, 2014).

En general, se siguió un procedimiento inferencial (Cisterna, 2005) en el que según se iban estableciendo las conclusiones parciales, se verificaba su coherencia respecto de las conclusiones anteriores. A lo largo del análisis de las conexiones se generan divisiones excluyentes entre tipologías de conexiones. En cada nivel del análisis se evaluó la coherencia de la división excluyente propuesta respecto a las divisiones anteriores, dando como resultado final la clasificación de la Figura 3.5.

Primera etapa: codificación abierta

Este primer nivel consiste en una codificación abierta ("open coding") en la cual se describían las diferentes relaciones identificadas en el aula en base a los elementos que se identificaban y al principio de lógica o coherencia que justificaba dicha relación. Se procedió a analizar los episodios 1, 2 y 3 identificando los dos elementos básicos que se conectaban y describiendo los principios que permiten establecer la conexión.

Este análisis dio como resultado conexiones entre procedimientos, conexiones entre conceptos, conexiones entre representaciones, conexiones entre conceptos y modelos, entre un procedimiento y su justificación, conexiones entre procedimientos y propiedades, conexiones entre operaciones, y conexiones entre propiedades. Los principios que permitían establecer las conexiones se basan en las propiedades matemáticas de los conceptos, en las definiciones de los conceptos, en rasgos comunes compartidos por las representaciones, los conceptos y los procedimientos.

Este primer análisis no permitió establecer características de las conexiones asociadas a los diferentes elementos que aparecieran en la conexión. Al buscar características comunes entre las conexiones que compartían elementos que se conectaban no se encontraron características que permitieran establecer grupos de conexiones que pudieran generan posteriormente categorías. Al hacer lo mismo teniendo en cuenta los principios que permitían establecer la conexión tampoco se encontraron características que permitieran establecer grupos en base a similitudes y diferencias entre conexiones.

De hecho, se identificó que en todas las conexiones aparecían representaciones simbólicas que eran esenciales para la conexión, por lo que todas las conexiones implicaban de alguna manera una conexión entre representaciones, o al menos una transformación basada en la representación utilizada. Por tanto, se optó por cambiar el enfoque que se estaba utilizando, y enfocar el análisis no solo en los elementos y los principios que forman la conexión sino también en el contexto de aula en que se produce y en su influencia en la construcción de conocimiento matemático en dicho contexto.

Se realizó una descripción global de la situación en la que se produce la conexión intentando entender cuál era el objetivo de dicha conexión en relación al concepto que se trabaja, y en qué contexto se producía. En base a los de la descripción global anterior y al análisis de la literatura relacionada con las conexiones (Mwakapenda, 2008; Lockwood, 2011), se construyó una primera clasificación para las conexiones identificadas: las intramatemáticas y las extramatemáticas.

Esta clasificación viene determinada por el objetivo de la conexión y por las representaciones que se utilizan. Cabe destacar que únicamente se identificó una conexión extramatemática en el análisis de los tres primeros episodios. Sin embargo, esta primera diferenciación permitió establecer una línea de análisis en la cual se interpretan las conexiones tanto globalmente, teniendo en cuenta su finalidad e influencia en el contexto de aula en el que aparecen, como de forma específica analizando la forma en que se relacionaba cada elemento que conformaba la conexión, y las representaciones que se utilizan.

Las conexiones extramatemáticas son las conexiones en las que se utilizan los principios de una situación extramatemática para explicar las características de un concepto matemático. Para que una conexión sea considerada como extramatemática, es necesario que se establezca una relación entre un concepto matemático y una situación externa a las matemáticas, en la que se pretenda que la lógica que se aplica en la situación extramatemática sirva para comprender mejor el contenido matemático. En las conexiones extramatemáticas se relacionan representaciones diferentes. Por un lado, una representación simbólica relacionada con el concepto matemático que se trabaja; y por otro lado, representaciones asociadas a la situación extramatemática. Por oposición, las conexiones intramatemáticas son las conexiones en las que no se produce esta relación entre un concepto matemático y una situación extramatemática.

A continuación se procedió a analizar las características de las conexiones intramatemáticas analizadas. Los resultados del primer análisis, que identificaban los tipos de elementos que se conectaban, así como la descripción global de la conexión no permitieron identificar características diferenciales entre las distintas conexiones analizadas. Con el objeto de entender mejor estas conexiones se decidió pasar a un segundo nivel de análisis en el que se detallaba cómo se construían los enlaces que aparecían en cada conexión.

Aunque el criterio de clasificación basado en el análisis de los elementos que se conectaban no permitió generar una clasificación inicial, sí permitió identificar subepisodios dentro de los episodios identificados anteriormente, basándonos en Shoenfeld (2011), tal y como se explica en el subapartado anterior "Primera aproximación a los datos".

Segundo nivel: codificación axial

Este segundo nivel de análisis se inspira en la codificación axial propuesta en la teoría fundamentada (Corbin y Strauss, 1990). Está dirigido a profundizar en las características de cada una de las categorías que se identificaron en el primer nivel de análisis, con el objeto de identificar nuevas subcategorías. Para cada conexión se tiene en cuenta el contexto en el que se produce la conexión, los principios en los que se basa cada enlace que forma la conexión y la finalidad de la conexión en términos de construcción de conocimiento matemático. Dado que en los episodios identificados únicamente aparecen tres conexiones extramatemáticas, este segundo nivel del análisis aporta sobre todo información sobre las conexiones intramatemáticas.

Este segundo nivel se divide en dos partes, una específica y una global. Inicialmente, en la parte específica, se analiza cada una de las intervenciones que constituyen una conexión, y se vuelven a visualizar los subepisodios. A continuación se pasa a identificar todos los nodos y todos los enlaces que componen la conexión y se construye la red de enlaces de cada conexión.

A continuación, en el análisis global, se relacionan todos los enlaces entre ellos en un todo coherente que es la red de enlaces que forma la conexión. También se hace un análisis del contexto en el que se da la conexión y, finalmente, de la finalidad y las posibles consecuencias del establecimiento de dicha conexión en la construcción de conocimiento matemático en el aula. Este enfoque global pretende identificar qué componentes del conocimiento matemático se enfatiza en cada conexión.

Respecto al lenguaje que se utiliza en el análisis, las conexiones iniciales son las conexiones identificadas en la primera aproximación a los datos y que definieron los episodios, mientras que las conexiones, a secas, son las conexiones que se identifican en la segunda aproximación a los datos, y que definen los subepisodios. Los enlaces son las relaciones básicas que se establecen entre dos nodos y que de forma coordinada conforman las conexiones. Dado que en las conexiones iniciales, las conexiones y los enlaces son relaciones entre dos o más elementos, el término relación se puede utilizar indistintamente en los tres casos, por lo que su significado en el análisis dependerá del contexto en el que se utilice.

Para la construcción de la red de enlaces se parte de Hall (2000) y de Presmeg (2006), aunque en esta investigación no se trata de una cadena semiótica, sino más bien de un mapa de las relaciones que constituyen la conexión. Dado que muchas conexiones se producen a partir de discusiones de aula en las que diversos alumnos dan su interpretación, este mapa de relaciones no tiene por qué ser siempre una secuencia lineal de relaciones, sino que en muchos casos se trata de diversos enlaces que se coordinan para formar un todo coherente. Dicha red de conexiones se representa gráficamente para visualizar mejor el carácter de la conexión. Para la representación de las conexiones se utilizó el software Cmaps que permite relacionar diferentes nodos mediante enlaces en múltiples direcciones.

Por ejemplo, en el subepisodio C5.1 se establece una conexión entre las operaciones -2^5 y $(-2)^5$. La conexión se produce a partir de la conversación sobre las operaciones entre la profesora y tres alumnos. La conexión no está formada por una secuencia lineal de enlaces, ya que ni las preguntas de una de las alumnas ni las respuestas que da la profesora siguen un razonamiento lineal. Los enlaces que forman la conexión se refieren a relaciones entre representaciones de las dos operaciones. A continuación en la Figura 4 se muestra la representación gráfica de la red de enlaces, que se denotan como e1, e2, e3, e4, e5 y e6:

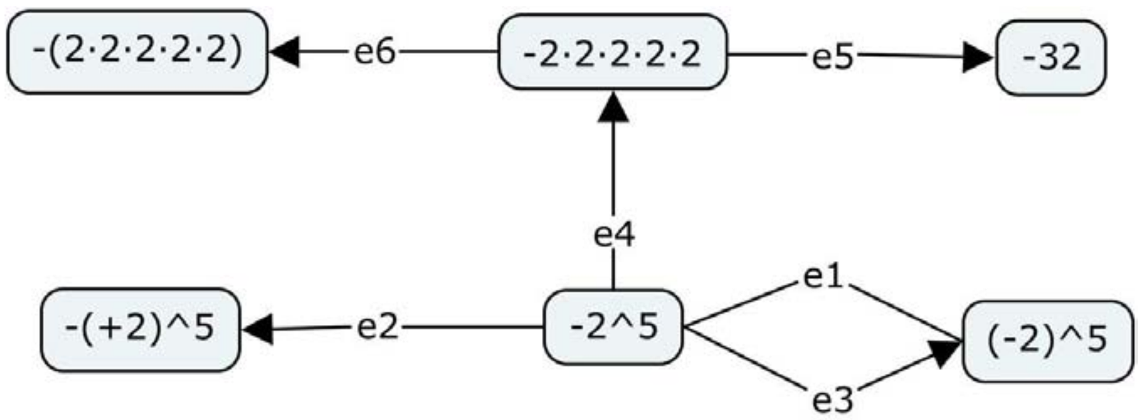

Figura 4. Red de enlaces para el subepisodio C5.1

Las redes de enlaces representan redes de enlaces entre nodos. En las representaciones gráficas de las redes de enlaces, los nodos se describen dentro de cuadros (que no cuadrados) que se unen entre sí mediante líneas que representan enlaces. Las flechas representan las premisas y las conclusiones al establecer los enlaces. Tal y como se introdujo anteriormente, lo nodos son una interpretación de las ideas matemáticas de los estudiantes. A continuación, en la Tabla 3 se describen los tipos de nodos que se identificaron.

Tipos de nodos	
(Inter) Concepto	El/la participante hace referencia a un concepto de

	manera global
Representación	El/la participante hace referencia a una representación de un concepto
Operación	El/la participante hace referencia a una operación
Procedimiento	El/la participante hace referencia a un procedimiento
Propiedad	El/la participante hace referencia a una propiedad
Justificación	El/la participante hace referencia a una justificación
Hipótesis	El/la participante propone una hipótesis
Valoración	El/la participante realiza una valoración basada en criterios matemáticos
Modelo	El/la participante hace referencia a un modelo
Lenguaje	El/la participante hace referencia a un lenguaje

Tabla 3. Tipos de nodos

Los enlaces fueron analizados en base a la interpretación que se hace de la clasificación propuesta por Businskas (2007). Sin embargo, un primer análisis reveló que esta clasificación era insuficiente, por lo que se añadieron tres tipos de enlace. Por ejemplo, en el subepisodio C1.1 (ver Capítulo 4) se estudia un caso particular especialmente relevante para el *m.c.m.* y el *m.c.d.* Ninguna de las categorías propuestas por Businskas (2007) permiten justificar esta relación, por lo que se incluye a la clasificación inicial la tipología "caso particular". También se añadió la tipología "justificación" para el caso en que una idea matemática justifica a otra. Finalmente se añadió la tipología "procedimientos equivalentes" cuando las dos ideas que se conectan son procedimientos equivalentes para relacionadas con un mismo concepto, como por ejemplo en el caso del episodio 8 (ver Capítulo 4). La Tabla 4 muestra los tipos de enlace identificados así como un resumen descriptivo de cada uno de ellos. Las letras A y B representan los elementos matemáticas que se conectan.

Tipos de enlaces	
Representación alterna	A y B son dos representaciones del mismo concepto en registros diferentes
Representación equivalente	A y B son dos representaciones del mismo concepto en el mismo registro
Procedimiento equivalente	A y B son procedimientos que permiten llegar a los

	mismo resultados partiendo de los mismos datos
Procedimiento	A es un procedimiento que se utiliza al trabajar con B
Caso particular	A es un caso particular de B
Generalización	A es la generalización de B
Implicación	A implica B mediante un razonamiento deductivo
Justificación	A es la justificación de B
Rasgo común	A y B comparten algún rasgo en común

Tabla 4. Tipos de enlace

Por ejemplo, en el caso del subepisodio C5.1 se presentan a continuación, en la Tabla 5, los enlaces identificados en la conexión:

Enlace	Descripción
e1: Rasgo común	La alumna establece un enlace implícito entre las dos operaciones que se representan en la red al preguntar por qué tiene un – la operación -2^5 si la base es positiva.
e2: Representación equivalente	Con el objetivo de dejar más claro que la base de la potencia es +2, la profesora introduce una nueva notación que hace énfasis en la positividad de la base: -(+2)^5
e3: Rasgo común	La profesora compara explícitamente -2^5 y (-2)^5 para dejar claro que existe una diferencia en las bases de cada operación.
e4: Representación equivalente	La profesora usa la representación de la potencia como producto repetido para mostrar que la base es +2
e5: Representación equivalente	La profesora muestra el resultado para mostrar que primero se debe calcular la potencia de +2 y luego aplicar el cambio de signo
e6: Representación equivalente	Finalmente, la profesora recurre a otra representación equivalente que refuerce la idea de que primero se realiza la potencia de +2 y a continuación se cambia el signo

Tabla 5. Descripción de los enlaces para el subepisodio 5.1

En este segundo nivel de análisis se toman dos enfoques diferentes para aproximarnos a los datos (Ball et al, 2008; y Fernández, 2011). En primer lugar, se parte de la concepción de horizonte matemático propuesto por Ball y Bass (2009). Estos autores proponen cuatro elementos que constituyen el conocimiento del horizonte matemático:

(1) un sentido del entorno matemático que rodea a un contenido concreto; (2) grandes ideas y estructuras matemáticas; (3) prácticas matemáticas clave; y, (4) valores y sensibilidades matemáticas centrales. Dado que, tal y como se explica en el Capítulo 2, se interpreta el horizonte matemático en términos de conexiones, se adaptaron estas características del conocimiento del profesor a características de las propias conexiones. Así, se analizaron las conexiones identificadas buscando una relación con los elementos (1), (2), (3) y (4), tal y como muestra el Cuadro 1.

Conexiones relacionadas con los contenidos matemáticos relacionados con el contenido que se trabaja
Conexiones relacionadas con ideas y estructuras clave en matemáticas
Conexiones relacionadas con prácticas matemáticas clave
Conexiones relacionadas con valores y sensibilidades matemáticas

Cuadro 1. Tipología de conexiones utilizada en el nivel 2 de análisis

Por otro lado, se utiliza la clasificación propuesta por Fernández (2011) de conexiones intraconceptuales y conexiones interconceptuales para clasificar las conexiones intramatemáticas. Las conexiones intraconceptuales son conexiones entre diferentes ideas relacionadas con un concepto matemático en particular, por ejemplo una conexión entre la ecuación de una función cuadrática y su representación gráfica. Las conexiones interconceptuales son conexiones entre conceptos matemáticos diferentes, como por ejemplo una conexión entre el área y el perímetro de un polígono.

Así, se procedió al análisis paralelo de los episodios 1, 2 y 3 con base en la clasificación del Cuadro 1 por un lado, y según la clasificación propuesta por Fernández (2011), por otro lado. Se analizaron todos los subepisodios utilizando las dos clasificaciones y los resultados fueron diversos (De Gamboa y Figueiras, 2013).

Los resultados obtenidos en este segundo nivel de análisis mostraron características determinantes de las conexiones analizadas. La aplicación de la propuesta de Ball y Bass (2009) mostró que no todas las conexiones eran de tipo conceptual. Se identificaron conexiones intramatemáticas basadas en enfatizar la importancia de las estructuras e ideas clave, así como de prácticas matemáticas clave. La finalidad de estas conexiones sobrepasa la construcción de un concepto matemático concreto y se dirige a enfatizar ideas y prácticas matemáticas transversales a todos los contenidos matemáticos.

Aparece así una nueva subcategoría dentro de las conexiones intramatemáticas. Se decidió llamar a estas conexiones relativas a procesos transversales (CRP) y se caracterizan por estar dirigidas a enfatizar procesos matemáticos transversales como son las heurísticas para la resolución de problemas, la comunicación y la justificación de los resultados obtenidos, o la validación de argumentos matemáticos. Para que una conexión sea incluida en esta subcategoría es necesario que se refiera a un proceso y no únicamente a acciones o procedimientos. Además, estos procesos deben ser transversales a la actividad matemática, es decir, deben ser aplicables en una amplia gama de conceptos, y no ser procesos limitados a algunos contextos. En el Capítulo 5 se detallan las características de este tipo de conexiones.

Sin embargo, la clasificación entre intraconceptual e interconceptual se reveló problemática en muchos casos, ya que es difícil decidir la frontera de los conceptos para poder afirmar que hay dos conceptos separados que se conectan. Para hacerlo, es necesario tener una definición de concepto que permita delimitar de forma clara la frontera entre dos conceptos relacionados. Dado que la investigación toma un enfoque basado en buscar y analizar las conexiones que existen entre los conceptos matemáticos a todos los niveles, después de diversas discusiones en grupos de expertos, se considera que en esta investigación no tenía sentido buscar una frontera artificial para conceptos que tienen elementos comunes y por tanto están conectados.

Se decidió eliminar la diferenciación de las conexiones en inter conceptuales e intraconceptuales y se optó por considerar una única categoría de conexiones conceptuales. Fruto de estas reflexiones surgió la idea de interconcepto, que tal y como se detalla en el Capítulo 4, consiste en entender los conceptos matemáticos como una red coordinada y coherente de definiciones, propiedades, representaciones, procedimientos y procesos relacionados (De Gamboa y Figueiras, 2014).

Al tomar la perspectiva de los interconceptos, se hace muy difícil aplicar la clasificación propuesta por Fernández (2011), que también aparece en la primera tipología del Cuadro 1, que consistía en buscar conexiones entre conceptos diferentes. Por ejemplo, se podría argumentar que las fracciones y la pendiente de las rectas en el plano son conceptos diferentes.

Sin embargo, existe una relación estrecha entre las rectas de pendiente racional y las fracciones, por lo que se podría argumentar que una conexión entre la pendiente de una recta y las fracciones es una conexión interconceptual. Sin embargo, desde la perspectiva del interconcepto dependiendo del contexto en el que se produzca la conexión, se puede considerar como una conexión conceptual que permite profundizar en el interconcepto recta o en el interconcepto fracción, dependiendo del contexto en el que se esté trabajando.

Respecto a las conexiones con valores y sensibilidades matemáticas se optó por no considerarlas como una categoría ya que a la vista de las categorías obtenidas hasta ahora no se observó como una categoría diferente a las anteriores, sino como una categoría complementaria a las tres categorías obtenidas hasta este nivel de análisis.

Esta segunda etapa de análisis dejó como resultado la división de las conexiones intramatemáticas en dos tipologías distintas. Cuando la conexión se basa y tiene por objetivo enfatizar en un proceso transversal a los contenidos se dice que se trata de una conexión relativa a procesos transversales (CRP). Si por el contrario la conexión se centra en discutir diferentes aspectos (definiciones, propiedades, representaciones…) relacionados con un interconcepto se dice que se trata de una conexión conceptual.

Tercera etapa: Codificación selectiva

La tercera etapa se centra en la profundización en las conexiones intramatemáticas de tipo conceptual –que el análisis de la segunda etapa reveló que eran las más numerosas– Dado que se entiende que estas conexiones se producen entre diferentes aspectos de un interconcepto (definición, propiedades, aplicaciones…), y que estas relaciones siempre implicaban una transformación entre representaciones, se decidió centrar la atención en cómo se transforman dichas representaciones para constituir los enlaces que forman finalmente la conexión y la forma en que esta transformación favorece la construcción de conocimiento matemático.

De acuerdo con Duval (2006) la construcción de cadenas de significado en matemáticas requiere del establecimiento de transformaciones entre representaciones. Estas transformaciones son de dos tipos: tratamientos y conversiones. Los tratamientos son las transformaciones que se producen dentro de un mismo registro, por ejemplo, al cambiar una determinada operación de su representación decimal a su representación fraccionaria. Las conversiones son las transformaciones que se producen entre registros diferentes, como por ejemplo transformar gráficos cartesianos en ecuaciones, o representar operaciones con enteros sobre la recta numérica. Cada una de estas tipologías se relaciona con una dificultad fundamental en la construcción de conocimiento matemático, en tanto que representan las tipologías de situaciones que emergen al construir conocimiento matemático.

Dado que todas las conexiones conceptuales identificadas consistían en transformaciones entre representaciones, se decidió adoptar la diferenciación entre conexiones conceptuales con tratamiento y conexiones conceptuales con conversión. Se consideró que si cada tipo de transformación (tratamiento y conversión) se relaciona con diferentes tipos de dificultades en la construcción de conocimiento matemático, desde la perspectiva de las conexiones la misma diferenciación puede informar sobre la relación que se establece desde el punto de vista de la construcción de conocimiento matemático.

Siguiendo el espíritu de la teoría fundamentada, en este tercer nivel se volvió a realizar el análisis del segundo nivel –red de enlaces, contexto, finalidad, y utilidad- diferenciando ahora las conexiones con tratamiento de las conexiones con conversión. En el caso de las conexiones relacionadas con procesos transversales se analizó si existía una transformación clasificable como tratamiento o conversión. En dichos casos hubo que volver a analizar si se trataba de una conexión conceptual, de una conexión relacionada con procesos transversales o si se podía subdividir en una conexión conceptual y otra relacionada con procesos transversales.

Esta tercera etapa también incluyó un análisis inspirado en el “selective coding” donde se realizó un análisis de la clasificación obtenida basado en la comparación entre categorías para evitar elementos comunes entre categorías y en la comparación con las descripciones de conexiones que aparecían en la literatura sobre conexiones. Así, se pudo construir una definición y una clasificación para las conexiones justificadas mediante una caracterización profunda de cada una de las categorías basada en el contexto práctico en que se produjeron, así como en su finalidad y en los principios que permiten el establecimiento de los enlaces que forman la conexión.

El proceso continuo de comparación entre categorías así como la justificación de cada una de ellas y de la relación jerárquica que existe entre ellas se explica en detalle en los Capítulos 4 y 5. El resultado de estas tres etapas de análisis es la definición de conexión dada en el apartado 5.2 del Capítulo 5 y la siguiente clasificación para las conexiones, que se muestra en la Figura 5.

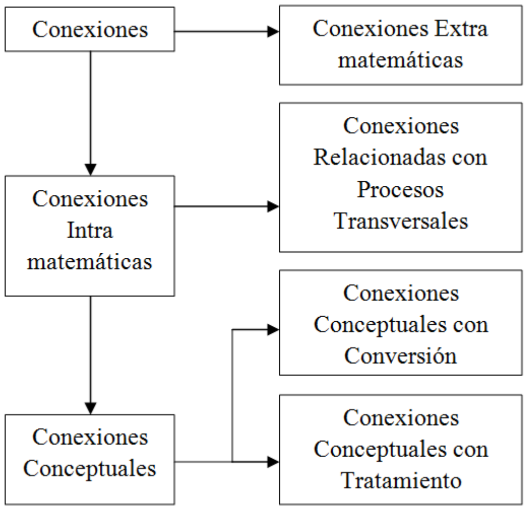

Figura 5. Clasificación de las conexiones

A continuación, en la Figura 6, se muestra esquemáticamente el proceso de decisión que se siguió para clasificar cada una de las conexiones:

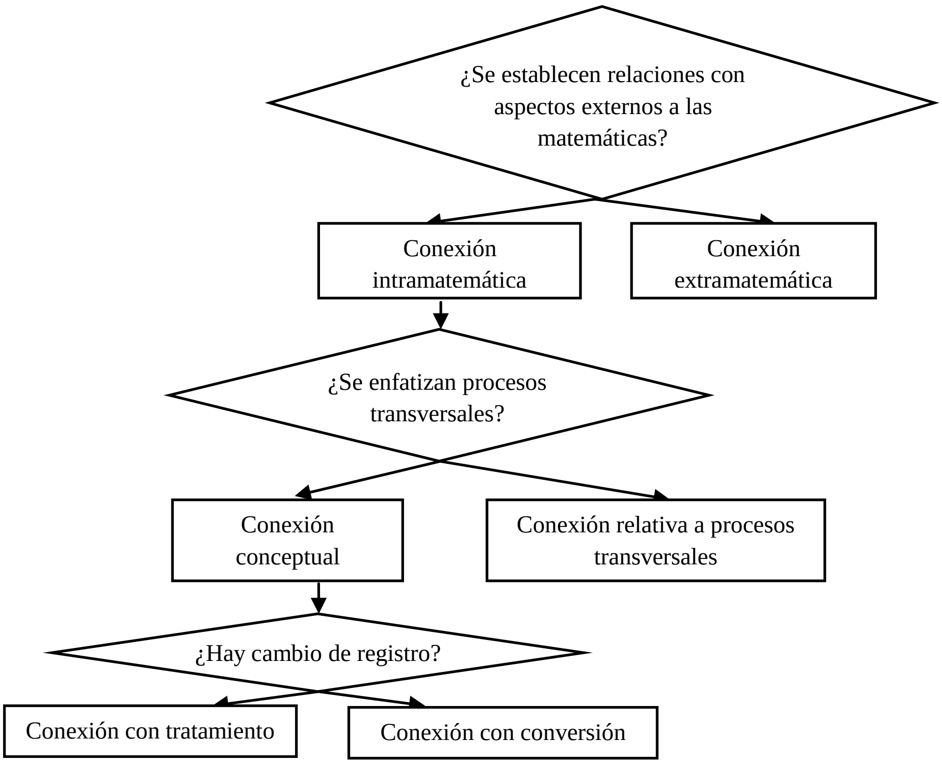

Figura 6. Secuencia de decisión para la clasificación de conexiones

3.5 Tercer nivel de aproximación: identificación y análisis del conocimiento del profesor

El tercer nivel de aproximación a los datos consiste en la identificación y el análisis del conocimiento del profesor. Se partió de la clasificación del conocimiento propuesta en el apartado 2.5. Para analizar el conocimiento se partió de los subepisodios identificados para cada una de las conexiones. Cada uno de estos episodios fue analizado en tres etapas:

1. Identificación de evidencias de conocimiento y análisis de su influencia en la actividad de aula
2. Análisis del conocimiento asociado a las oportunidades de aprendizaje que se generan
3. Análisis de las interacciones entre tipos de conocimiento asociadas a cada tipo de conexión

La primera etapa consistía en la identificación de acciones de la profesora que se pudieran considerar evidencia de conocimiento en un contexto de práctica de aula. Para ello se utilizaron los códigos de identificación propuestos por Rowland et al (2009) que se muestran en la Tabla 1. Sin embargo, no se utilizan las dimensiones que proponen el modelo del Knowledge Quartet, sino que se reinterpretan adaptando los indicadores de Knowledge Quartet a la clasificación de conocimiento presentada en la Figura 3. A continuación, en la Tabla 6 se detallan los indicadores que se utilizaron para cada tipo de conocimiento.

SMK	
KOTS	**KPM**
Conoce los fundamentos teóricos (los contenido y su estructura) Conoce los procedimientos y sus variantes	Posee un conocimiento público de las matemáticas Usa la terminología de forma rigurosa y enfatiza la importancia de hacerlo Hace justificaciones rigurosas y muestra su importancia
PCK	
KCS	**KCT**
Identifica errores Anticipa la complejidad Da respuesta a las ideas de los estudiantes	Muestra planificación en la secuenciación Reconoce la adecuación conceptual de la propuesta de un alumno Usa ejemplos adecuados a sus propósitos Usa representaciones coherentes con sus propósitos

	Cambia su planificación a partir de la actividad de aula Aprovecha las oportunidades que surgen en el aula
CK	
VCK	**LCK**
Conoce el material que utiliza	Establece conexiones con contenidos curriculares de otras áreas

Tabla 6. Indicadores utilizados para la identificación de conocimiento matemático en el aula

La inclusión de una acción de la profesora en una categoría determinada se hace teniendo en cuenta el contexto en el que se produce. Una vez identificado un tipo de actuación de la profesora se procedió al análisis del contexto en el cual se producía dicha actuación, para explorar la influencia del conocimiento evidenciado en la actividad matemática de los estudiantes. Los indicadores anteriores sirvieron de base para analizar las acciones –u omisiones– de la profesora en términos de conocimiento matemático. Sin embargo, en el capítulo de análisis, al analizar el conocimiento, no se utilizan estos indicadores de manera literal, sino que se realiza una descripción de la intervención de la profesora que justifica su pertenencia a una categoría de conocimiento determinada y teniendo en cuenta el contexto en que se produce.

La segunda etapa del análisis consiste en identificar oportunidades de aprendizaje en el episodio. Se considera que se da una oportunidad de aprendizaje cuando se da una situación en el aula en la que a los alumnos se les presenta una posibilidad de reorganizar sus estructuras conceptuales, es decir, de aumentar sus conexiones o de relacionarlas con el aprendizaje de nuevas formas de proceder (Morera, 2013). En este sentido, se considera que dichas estructuras conceptuales están determinadas por redes de conceptos, en el sentido definido en el apartado 2.3. Una vez identificadas estas oportunidades de aprendizaje, se procede a identificar las tipologías de conocimiento del profesor que puedan favorecer el aprovechamiento de dichas oportunidades.

Finalmente, se procede al análisis de las tipologías de conocimiento que se relacionan con cada tipo de conexión. En este análisis se relacionan las características de cada tipo de conexión tanto con el conocimiento explícito que se movilizó, como con el conocimiento que puede favorecer el aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje. Así, para cada tipología de conexión se caracterizarán elementos del conocimiento del profesor que favorecen que aparezcan estas conexiones y que los estudiantes tengan la posibilidad de ampliar su red particular de conceptos. Para ello, se detalla la oportunidad de aprendizaje que surge de la conexión y a continuación se describen de manera minuciosa las acciones que puede llevar a cabo la profesora para favorecer el aprovechamiento de dichas oportunidades. El proceso detallado de análisis, así como los resultados obtenidos se presentan en los Capítulos 4 y 5.

La Tabla 7 muestra el análisis del conocimiento identificado en el caso del subepisodio C5.1. Cada tabla de análisis se divide en dos bloques. El primer bloque se refiere a acciones explícitas de la profesora que indicaran la movilización de conocimiento matemático, mientras que el segundo bloque se refiere a acciones que podría realizar la profesora para poder aprovechar oportunidades de aprendizaje que surgen de la conexión analizada. La primera columna muestra los códigos relacionados con cada tipología de conocimiento, tal y como muestra la Figura 3. La segunda columna muestra, para el primer bloque del análisis, los números de las intervenciones explícitas en las que se identificó cada acción. En la tercera columna se describe la acción de la profesora y se justifica la relación entre las intervenciones señaladas y la tipología de conocimiento señalada en la primera columna. Previamente a la tabla se realiza una justificación más detallada de las acciones identificadas y de su inclusión en una categoría de conocimiento determinada.

Conocimiento explícito identificado		
Tipo de conocimiento	Número de intervención	Descripción de la acción de la profesora
KOTS	[113]	Muestra conocimiento profundo del tema y de la notación asociada
KCT	[113][115][117]	Hace énfasis en la definición de un concepto
KCS	[119][121]	Identifica el bloqueo de un/a estudiante
Conocimiento para el enriquecimiento de la conexión		
KCS		Explora diferentes interpretaciones de un concepto

Tabla 7. Análisis del conocimiento del profesor para el subepisodio C5.1

El análisis de las interacciones entre diferentes tipos de conexiones se muestra en el apartado de resultados (Capítulo 5), ya que hay que tener en cuenta los resultados del análisis de las conexiones así como del conocimiento asociado a cada conexión.

4 Análisis

En este capítulo se presenta el estudio detallado de los 14 episodios identificados. Para el análisis de cada uno de los episodios se sigue la misma estructura de presentación: (1) descripción del episodio y presentación de los subepisodios que incluye, y para cada subepisodio (2) justificación de la existencia del subepisodio y análisis de la conexión que lo define, lo cual incluye el análisis específico y el análisis global; (3) clasificación de la conexión; (4) análisis del conocimiento explícito identificado para el subepisodio; y (5) análisis del conocimiento para el enriquecimiento de la conexión.

El enriquecimiento de una conexión se define como el aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje que se producen cuando se establecen conexiones. Dichas oportunidades emergen cuando a los alumnos se les presenta una posibilidad de reorganizar sus estructuras conceptuales, de aumentar sus conexiones o de relacionarlas con el aprendizaje de nuevas formas de proceder.

4.1 Análisis del episodio 1

Al inicio de la unidad didáctica de números enteros se realiza un repaso de aritmética con naturales recordando conceptos como mínimo común múltiplo y máximo común divisor. A partir de un conjunto de problemas en los cuales se pide encontrar el *m.c.m.* y el *m.c.d.* para pares de números que tienen una relación de múltiplo-divisor, la profesora pregunta si hay algo que resaltar de cada problema y pide a los alumnos que lo digan.

En este episodio se identifican dos subepisodios. En el primer subepisodio C1.1 se produce una conexión entre el procedimiento general de cálculo del *m.c.m.* y del *m.c.d.* con la demostración de una propiedad del *m.c.m.* y del *m.c.d.* de parejas de números (*a*,*b*) donde *a* sea múltiplo de *b*. En el segundo subepisodio C1.2 se produce una conexión entre los conceptos de *m.c.m.* y *m.c.d.* y la idea de un mínimo común divisor.

Subepisodio C1.1

Definición del subepisodio y análisis de la conexión

En este subepisodio se produce una conexión que parte del conocimiento de los alumnos sobre cómo calcular el *m.c.m.* y el *m.c.d.* de dos números dados para acabar haciendo una demostración formal de una propiedad de las parejas de números naturales *(a,b)* donde *a* es múltiplo de *b*. A partir de un ejemplo propuesto por la profesora que hacía parte del libro de texto, se produce un enlace con un posible resultado (la hipótesis o sospecha) por parte de Asad [2]. Dicha sospecha es reforzada por Martí al plantear una generalización [5] de la propuesta de Asad. La profesora toma la hipótesis de Martí y propone una indagación profunda y rigurosa de dicha hipótesis. Mediante esta indagación guiada por la profesora se llega a la demostración de un resultado matemático surgido de la propia actividad de aula. A continuación, en la Tabla 8, se muestra la transcripción literal del subepisodio.

Núm	Participante	Transcripción literal de la intervención
[1]	Profesora:	¿A ti no te mosquea este problema?
[2]	Asad:	El pequeño es el *m.c.d.* y el grande es el *m.c.m.*
[3]	Profesora:	¿Siempre?
[4]	Asad:	Bueno, en estos casos.
[5]	Martí:	Cuando un número es múltiplo de otro también será el *m.c.m*.
[6]	Profesora:	Bueno, a ver lo que ha dicho el Martí. Tenemos una sospecha. No copiéis que solo es una sospecha. Martí, ¿me dictas? Todavía no lo hemos comprobado. Cuando un número es múltiplo de

		otro, ¿es este nuestro caso de a y de b? ¿Por qué es nuestro caso en a y en b?¿Qué dos números había involucrados en a?
[7]	Varios alumnos:	10 y 5.
[8]	Profesora:	¿Y cuál era múltiplo de cuál?
[9]	Marta:	El 5 era múltiplo de 10. No, el 10 era múltiplo de 5.
[10]	Profesora:	Buen, eso era lo que pasaba en a. ¿Y en b qué es lo que pasa? ¿Quién es múltiplo de quién? Clara. Primero, ¿son múltiplos? ¿Sí que son múltiplos, no? Porque si 15 lo multiplicamos por… ¿cuántas veces para obtener 60? Martí
[11]	Martí:	4.
[12]	Profesora:	4.
[13]	Profesora:	Ahora vamos a hacer el c y el d para ver si pasa lo mismo
[14]	A1:	Pero, una cosa, ¿para qué vamos a hacerlo si sabemos que va a dar lo mismo?
[15]	Profesora:	Pues porque tenemos que verificarlo. Hemos visto dos ejemplos pero hay que estar seguros. A continuación verifican los casos c y d.
[16]	Profesora:	Si un número a es divisor de otro número b, ¿quién es el *m.c.m. (a,b)*?
[17]	A1:	b.
[18]	Profesora:	¿Por qué? Porque una cosa es la sospecha, y otra estar seguros. Ahora todo el mundo deja la libreta, porque vamos a hacer nuestra primera demostración matemática. Vamos a comprobar que nuestras sospechas son ciertas. Empezamos por el *m.c.d.* Si yo busco los divisores de a tendré $\{1,\ldots..,a\}$ y en el medio habrá otros que no sabemos quiénes son. Y cuando pongamos los divisores de *b* tendremos $\{1,\ldots\ldots\ldots,b\}$. ¿Pero sabemos alguna cosa más? Lean su enunciado. O sea que nos hemos olvidado de poner el *a* en los divisores de b: $\{1,\ldots..,a,\ldots.,b\}$¿Cuáles son los comunes? $\{\mathbf{1},\ldots.,\boldsymbol{a},\}$ ¿Y ahora?
[19]	A1:	Ya está. Porque *a* es el más grande.
[20]	Profesora:	No puede haber más divisores comunes, o sea que *a* es el máximo de los divisores comunes. Sospecha comprobada. Ahora, una conclusión que me gusta mucho. Si una cosa se cumple una, dos o cuatro veces, no necesariamente tendrá que pasar siempre. La profesora continúa guiando la clase con el objeto de llegar a demostrar que en el caso de tener parejas en las condiciones de los problemas iniciales, el menor será el *m.c.d.* y el mayor será el *m.c.m.*

Tabla 8. Transcripción literal del subepisodio C1.1

En este subepisodio se observa que se establecen diferentes enlaces a partir de la resolución de un ejercicio de cálculo del *m.c.m.* y del *m.c.d.* de diferentes parejas de números. En primer lugar, la profesora llama la atención [1] sobre casos en los que el *m.c.d.* y el *m.c.m.* son uno de los dos números de la pareja. A continuación Asad responde que el *m.c.d.*es el más pequeño de los números de la pareja, mientras que el *m.c.m.*es el más grande [2]. Sin embargo, en respuesta a una pregunta de la profesora sobre si siempre se ha de cumplir esta propiedad [3], Asad responde que no, que se cumple solo en estos casos [4]. Se observa que Asad identifica un patrón en el ejercicio que se resuelve, aunque no llega a proponer una generalización. Seguidamente, Martí interviene afirmando que si un número es múltiplo de otro será también el *m.c.m.* de los dos [5], proponiendo como hipótesis que existe una propiedad general. La profesora lama la atención de los demás alumnos sobre la hipótesis que propone Martí y reformula la hipótesis [6], renombrándola como sospecha. Después de la resolución de dos casos más, que cumplen la propiedad propuesta en la hipótesis, la profesora procede a demostrar que si *a* es múltiplo de *b*, entonces *a* será el *m.c.d.* [18]. Finalmente, la profesora enfatiza que aunque una propiedad se cumpla muchas veces no se puede estar seguro de que se vaya a cumplir siempre [20]. A continuación, en la Figura 7, se muestra la red de enlaces (en este caso la cadena) asociada a esta conexión.

Figura 7. Red de enlaces asociada a la conexión C.1.1

En la Figura 4.1.1, se observa que se establece una conexión entre el procedimiento de cálculo general del *m.c.m.* del *m.c.d.* con la justificación de una regla general –el lema–. Además, se produce una generalización de la demostración concreta que se realiza a la relación entre razonamiento inductivo y razonamiento deductivo, y la importancia de estos en el razonamiento matemático. Dichas relaciones se establecen mediantes el encadenamiento de enlaces parciales que permiten reconocer un patrón; enunciar una hipótesis; demostrarla; y, finalmente, reflexionar sobre el razonamiento que se ha seguido. La Tabla 9 describe cada uno de los enlaces identificados en la conexión C.1.1

Tipo de enlace	**Descriptor del enlace**
e1: Caso particular	La profesora llama la atención sobre un caso particular.
e2: Generalización	Asad afirma que se debe cumplir que el menor sea el *m.c.d.* y que el mayor sea el m.cm, aunque solo en los casos que han aparecido en clase.

e3: Generalización	Martí afirma que siempre que un número es múltiplo de otro será también el *m.c.m.* de los dos.
e4: Generalización	La profesora realiza una demostración rigurosa de que la propiedad propuesta por los alumnos es correcta.
e5: Justificación.	La profesora realiza una valoración explícita sobre la forma de demostrar en matemáticas, mostrando la diferencia entre el razonamiento inductivo y el deductivo.

Tabla 9. Resumen de los enlaces para el subepisodio C1.1

La red de enlaces anterior presenta una conexión entre el procedimiento de cálculo del *m.c.m.* y del *m.c.d.,* y una propiedad relacionada con el *m.c.m.* y el *m.c.d.* de parejas de números, donde uno sea múltiplo del otro. El establecimiento de esta relación profundiza los conceptos de *m.c.m.* y *m.c.d.,* ya que se analizan de manera exhaustiva tanto los múltiplos como los divisores de ambos números. Además, al profundizar en la relación que existe entre los múltiplos y divisores de dos cantidades dadas, se potencia que los alumnos puedan calcular mentalmente algunos múltiplos recurrentes que surgen al realizar operaciones aritméticas en secundaria. Finalmente, mediante el establecimiento de esta conexión, se favorece que los alumnos sean capaces de entender que para estar seguros de que se cumple una propiedad matemática se debe realizar una justificación rigurosa en todos los casos y no limitarnos a aceptar un resultado inductivo, que se cumple para algunos casos particulares.

Según la clasificación de referencia presentada en el Capítulo 2, esta conexión podría ser clasificada en dos categorías diferentes. Por un lado es una conexión intramatemática, que ayuda a profundizar en los conceptos de *m.c.m.* y *m.c.d.,* por lo que se podría calificar como conexión intramatemática con tratamiento, ya que no se produce un cambio de registro durante el razonamiento. Sin embargo, se considera que la aportación fundamental de esta conexión a la construcción de conocimiento matemático por parte de los alumnos es la construcción de un razonamiento matemático riguroso. En el enlace e4, la profesora realiza un razonamiento deductivo que demuestra que si a es múltiplo de b, entonces el *m.c.d.* de (a,b) será a. A continuación, en e5, realiza una valoración sobre cuándo se puede estar seguro de un resultado en matemáticas, comparando de forma implícita un razonamiento de tipo inductivo con un razonamiento de tipo deductivo. Por tanto, la conexión que se realiza muestra a los alumnos la forma en que se procede en matemáticas para justificar propiedades, por lo que se considera que se trata de una conexión intramatemática relativa a procesos transversales.

Análisis del conocimiento en el subepisodio C1.1

Se identifican tres tipologías de conocimiento a partir de las intervenciones de la profesora (ver Tabla 10). En primer lugar, la profesora muestra un conocimiento profundo de los contenido con que trabaja (KOTS), ya que no sólo evidencia saber la propiedad básica del *m.c.m.* y el *m.c.d.* de *(a,b)* cuando *b* es múltiplo de *a*, sino que justifica de manera detallada por qué esta relación se cumple en todos los casos en que *a* divida a *b*. Además, se identifica un conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT) que se evidencia cuando la profesora utiliza la palabra sospecha, [6] y [18], para referirse a una hipótesis. Finalmente se identifica un conocimiento de la práctica matemática (KPM) que se evidencia tanto en la conclusión sobre la validez de la comprobación, [15] y [20], como en la rigurosidad del razonamiento aplicado en la justificación de la sospecha [18].

En este subepisodio se produce una conexión que enriquece la construcción del conocimiento matemático ya que la demostración se completa de manera explícita y no se identifica la emergencia de otras oportunidades de aprendizaje. Por tanto, no se identifican tipologías de conocimiento del profesor que enriquezcan dicha construcción. A continuación, en la Tabla 10, se muestra un resumen del conocimiento identificado en este subepisodio.

Conocimiento explícito identificado		
KOTS	[6][18]	Muestra un conocimiento profundo de los contenidos matemáticos con que trabaja y su estructura
KPM	[15][20][18]	Plantea una justificación rigurosa Muestra la importancia de una justificación rigurosa
KCT	[6][18]	Gradúa el vocabulario matemático que usa al dirigirse a los alumnos
Conocimiento para el enriquecimiento de la conexión		
-	-	-

Tabla 10. Resumen de conocimiento del subepisodio C1.1

Subepisodio C1.2

Definición del subepisodio y análisis de la conexión

En el subepisodio C.1.2 se produce una conexión entre los conceptos de *m.c.m.* y *m.c.d.* con la idea de un mínimo común divisor. La conexión se produce cuando la alumna manifiesta no entender el mínimo común divisor. A continuación la profesora le responde haciendo referencia a la teoría trabajada en clase y, más concretamente, a el procedimiento de cálculo del *m.c.d*. A continuación en la Tabla 11, se muestra la transcripción literal del subepisodio.

Núm	**Participante**	**Transcripción literal de la intervención**
[21]	Marta:	No entiendo el mínimo común divisor.
[22]	Profesora:	Es que el mínimo común divisor no lo hemos hecho. De hecho no lo hemos hablado a la clase. ¿A ver, qué no entiendes? ¿Tienes tu chuleta? Bien, en la chuleta dice, tienes que coger los comunes con el exponente más pequeño.

Tabla 11. Transcripción literal del subepisodio C1.2

En este subepisodio, transcrito en la Tabla 11, se observa que Marta relaciona los conceptos que se trabajan en el aula, el *m.c.m.* y *m.c.d.*, con una definición propuesta por ella: el mínimo común divisor [21]. Al proponer esta definición, la alumna establece un vínculo entre los dos conceptos que se estudian –*m.c.m.* y *m.c.d.* – y un concepto propuesto por ella que comparte rasgos comunes, en tanto que utiliza la definición de divisor, de ser común y de ser mínimo. En respuesta a la confusión manifestada por Marta, la profesora le pide que vuelva a los apuntes de clase y que revise el procedimiento para calcular el *m.c.d.* [22].

En la conexión se pueden observar dos enlaces (ver Figura 8). En primer lugar, Marta propone el concepto de mínimo común divisor al manifestar su incomprensión. A continuación la profesora le responde que dicho concepto no ha sido trabajado en clase, y que vuelva a mirar los apuntes para recordar cómo se calculaba el máximo común divisor. En la Figura 8 y la Tabla 12 se muestra la red de enlaces asociada a esta conexión así como un resumen de estos enlaces.

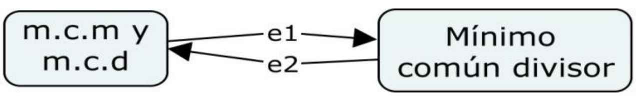

Figura 8. Red de enlaces asociada a la conexión C.1.2

Tipo de enlace	**Descripción**
e1: Rasgo en común	La alumna propone una definición que comparte rasgos con el *m.c.m.* y con el

	m.c.d.
e2: Rasgo en común	La profesora asume que la alumna se refiere al cálculo del máximo común divisor y le pide que repase el procedimiento de cálculo. No se explora la definición que propone la alumna ni su pertinencia

Tabla 12. Resumen de los enlaces para el subepisodio C1.2

La respuesta de la profesora establece un enlace explícito entre el máximo común divisor y el mínimo común divisor propuesto por la alumna. Sin embargo, no se produce una indagación más profunda que permita establecer cuáles son los rasgos de comunes que la alumna identifica. Tanto si se trata simplemente de un *lapsus linguae* como si existe una falta de comprensión del *m.c.m.* o del *m.c.m.* por parte de la alumna, el error de la alumna puede ser una oportunidad para profundizar en el conocimiento de la divisibilidad y entender la necesidad conceptual de cada definición.

Según la clasificación propuesta, la conexión descrita es una conexión de tipo intramatemático, ya que no se establece ninguna relación con ninguna situación extramatemática. Además, se trata de una conexión intraconceptual, ya que no se produce ninguna referencia explícita a un proceso transversal en matemáticas. Finalmente, es una conexión con tratamiento, ya que no se realiza ningún cambio de registro en los enlaces que la constituyen.

Análisis del conocimiento en el subepisodio C1.2

Se identifica un tipo de conocimiento explícito en este subepisodio. Cuando la profesora decide llamar la atención de la alumna sobre la definición y el proceso de cálculo del *m.c.m.* y del *m.c.m.* muestra la decisión de ajustarse a la definición para facilitar la comprensión de la alumna, por lo que moviliza conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT). Sin embargo, se identifica que la conexión que se produce a partir de la intervención de Marta, se podría enriquecer si la profesora indaga en los motivos de la pregunta de la alumna, podrían aparecer aspectos relevantes de la dificultad que encuentra la alumna al manifestar que no entiende. Por tanto, aparece una acción relacionada con el conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS) que podría enriquecer la conexión que define este subepisodio. A continuación se muestra en la Tabla 13 el resumen del conocimiento identificado en el subepisodio C1.2.

Conocimiento explícito identificado		
KCT	[22]	Decide enfatizar la definición y el procedimiento de cálculo
Conocimiento para el enriquecimiento de la conexión		
KCS	-	Usa la intervención de un estudiante para profundizar en un (inter) concepto

Tabla 13. Resumen de conocimiento del subepisodio C1.2

4.2 Análisis del episodio 2

Durante la resolución de la operación *"Quita los paréntesis y calcula:* $-8-(-4)+(-6)-(+2)-(-9)$" se produce una conexión entre la aritmética con naturales y la aritmética con enteros a diferentes niveles. Se relacionan las funciones de los símbolos que se utilizan en cada caso; los modelos reales para su introducción; la justificación de los procedimientos que se emplean; y, la validez de métodos alternativos.

A lo lago de la resolución se identifican seis subepisodios. En el primer subepisodio C2.1 se conectan las secuencias de sumas y restas con naturales con las secuencias de sumas y restas con enteros. En el segundo subepisodio C2.2 se conectan las secuencias de sumas y restas con enteros con un modelo de desplazamiento. En el tercer subepisodio C2.3 se conectan la regla de los signos y su justificación. En el cuarto subepisodio C2.4 se conectan dos procedimientos para restar números enteros del mismo signo. En el quinto subepisodio C2.5 se conectan un procedimiento de cálculo de validez parcial con su generalización. Finalmente, en el sexto subepisodio C2.6 se conectan un procedimiento de cálculo con su validez en un contexto determinado.

Subepisodio C2.1

Definición del subepisodio y análisis de la conexión

En este subepisodio se produce una conexión entre la aritmética de los números naturales y la aritmética de los números enteros. La conexión surge de la dificultad que identifica la profesora, asociada a las diferentes funciones que puede cumplir el paréntesis en los números enteros, que contrasta con el papel único que tenía en los números naturales –el de priorizar una operación–. La profesora hace explícito que el paréntesis puede ser problemático al operar con números enteros, y propone a continuación una forma de evitar esta problemática: la aplicación de la regla de los signos [23]. Al aplicar esta regla, la profesora muestra cómo reducir una secuencia de sumas y restas de enteros, a una secuencia de sumas y restas de naturales (salvo el primer número de la secuencia). De esta forma resuelve el problema, ya que este caso ya ha sido explicado en clase. A continuación, en la Tabla 14, se muestra la transcripción literal de la intervención de la profesora.

Núm	**Participante**	**Transcripción literal de la intervención**
[23]	Profesora:	A veces los paréntesis parece que nos molestaban. Pensábamos qué es lo que hacen aquí. Los paréntesis, en ocasiones, como es este problema, nos indican la dirección de la resta o la dirección de la suma. Y nosotros ya sabemos que estos paréntesis con direcciones de restas y de sumas los solucionamos de una manera más o menos fácil, Laia, con la regla de los signos, que ahora recordaremos en nuestra teoría que todo el mundo la tiene. [...]

Tabla 14. Transcripción literal del subepisodio C2.1

En la intervención de la profesora [23], se identifican dos enlaces, tal y como se ilustra en la Figura 9. El primer enlace relaciona la secuencia de sumas y restas de números enteros con la aritmética de los números naturales en base a un elemento en común, la utilización del paréntesis. La profesora establece esta relación al hacer explícito que el paréntesis puede ser conflictivo –*los paréntesis parece que nos molestan*- en este tipo de operaciones, ya que puede representar la dirección de las sumas y las restas –mientras que antes solo representaba una operación prioritaria. Para resolver esta problemática la profesora establece un segundo enlace entre la operación que se pretende resolver y la misma operación representada como una secuencia de sumas y restas de números naturales, salvo el primer elemento de la secuencia. En la Tabla 15 se analizan estos enlaces.

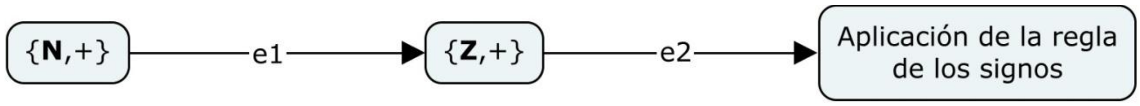

Figura 9. Red de enlaces para el subepisodio C2.1

Enlace	**Descripción**
e1: Rasgos comunes	La profesora introduce una problemática que se produce al trabajar con paréntesis en las operaciones con números enteros. Se amplía el significado del paréntesis introduciendo la idea de la dirección de las operaciones. Esto entra en contradicción con el significado que tenían en la aritmética con números naturales, donde

	representaban una operación que debía realizarse antes del resto.
e2: Procedimiento	Se aplica la regla de los signos para eliminar los paréntesis. Al eliminar los paréntesis la combinación de sumas y restas de enteros se reduce a una representación conocida, en la que solo aparece una secuencia de naturales, que puede ser resuelta agrupando y aplicando una regla básica de neutralización.

Tabla 15. Resumen de los enlaces para el subepisodio C2.1

La conexión anterior busca resolver dos problemáticas. En primer lugar, al establecer e1, la profesora explicita que la dualidad en el significado del paréntesis implica una problemática al operar con números enteros que no existían al operar únicamente con números naturales. Los alumnos tienen como referencia el significado trabajado en primaria, según el cual los símbolos $+$ y $-$ simbolizan las operaciones de suma y resta, mientras que el paréntesis sirve para establecer un orden en las operaciones. Sin embargo, con la introducción de los enteros, los alumnos se encuentran con nuevos significados para los tres símbolos: paréntesis que no corresponden a ordenación de operaciones, $+$ y $-$ que no simbolizan operaciones, sino direcciones de las mismas (un razonamiento de una complejidad considerable para alumnos de 12 años) o el carácter positivo o negativo de los números enteros.

En segundo lugar, la profesora propone la aplicación de la regla de los signos para reducir representaciones de operaciones con enteros en las que aparezcan expresiones del tipo $a-(-b)$ a una representación en la que solo aparecen sumas y restas de números naturales. Una vez se ha eliminado el problema de los paréntesis se puede aplicar cualquier procedimiento conocido para sumar enteros, cuando dicha suma se presenta como una secuencia de sumas y restas de números naturales.

Por tanto, las secuencias de sumas de enteros pueden ser entendidas como una generalización de las sumas y restas con naturales. La conexión busca evitar contradicciones entre la aritmética de los naturales y los símbolos que se utilizan, y la aritmética con números enteros y los símbolos que utiliza. En otras palabras, se busca que los alumnos construyan la aritmética con enteros de forma que se introduzcan operaciones y procedimientos para la aritmética con enteros que mantengan su validez en el caso restringido de los números naturales.

Se considera que se trata de una conexión intramatemática, ya que no interviene ningún elemento extramatemático. Dentro de esta categoría se trata de una conexión conceptual ya que no se enfatiza ningún proceso transversal, sino que se profundiza en el conocimiento de la estructura aditiva de los números enteros y de los símbolos y las representaciones que se les asocian.

Análisis del conocimiento en el subepisodio C2.1

Se identifican tres indicadores de conocimiento matemático (ver Tabla 16). En primer lugar, la profesora muestra un conocimiento de las diferentes funciones de los paréntesis al trabajar con números enteros [23], lo que se relaciona con el conocimiento de los contenidos con los que trabaja y con su estructura (KOTS). En segundo lugar, la profesora muestra haber previsto la dificultad que pueden experimentar los estudiantes al trabajar con símbolos de diferente significado –los paréntesis parece que nos molestaban– lo que se relaciona con un conocimiento de los contenidos y de los estudiantes (KCS). Finalmente, la profesora muestra tener planificada una secuencia dirigida a superar las dificultades de los estudiantes, lo que se relaciona con el conocimiento del contenido y de la enseñanza (KST).

En este subepisodio se produce una conexión que enriquece la construcción del conocimiento matemático, por lo que no se identifican tipologías de conocimiento del profesor que enriquezcan dicha construcción. A continuación se muestra en la Tabla 16 el resumen del conocimiento identificado en este subepisodio.

Conocimiento explícito identificado		
KOTS	[23]	Conoce en profundidad el tema y la notación que se emplea
KCS	[23]	Prevé una dificultad de los estudiantes
KCT	[23]	Evidencia tener una planificación dirigida a superar dificultades en los alumnos
Conocimiento para el enriquecimiento de la conexión		
-	-	-

Tabla 16. Resumen de conocimiento del subepisodio C2.1

Subepisodio C2.2

Definición del subepisodio y análisis de la conexión

En este subepisodio se produce una conexión entre sumas y restas de números enteros y un modelo de desplazamiento (Cid, 2003) que permite interpretarlas (ver Tabla 17). Mientras se resuelve $(-8) - (-4)$ surgen en el aula diferentes interpretaciones de esta operación. La profesora intenta reforzar un procedimiento de resolución consistente en aplicar la regla de los signos e interpretar la operación resultante en un modelo de desplazamiento. Durante la discusión, dos alumnos proponen dudas acerca del significado de quitar una cantidad negativa o sobre cómo una resta se convierte en subir en el modelo de desplazamiento. A continuación, en la Tabla 17, se presenta la transcripción literal del episodio.

Núm	**Participante**	**Transcripción literal de la intervención**
[24]	Profesora:	Cuéntamelo, cuál sería el resultado, a -8 quitarle, porque le estoy quitando, a -8 quitarle -4.
[24]	Igor:	El resultado es -4.
[25]	Profesora:	¿Por qué?
[26]	Igor:	Porque a 8 le quitas 4.
[27]	Profesora:	A 8 no, porque yo no tengo 8.
[28]	Igor:	Bueno, a -8 le quito -4.
[29]	Claudia:	No, porque estás en el sótano 8 y tienes que subir 4, y te quedas en el -4. (La profesora refuerza con gestos la respuesta de Claudia)
[30]	Profesora:	¿Y por qué subes4? Así es como lo explicamos el otro día.
[31]	Claudia:	Porque son 2 signos “–“ y te dice que es “+”, o sea que tienes que subir, no bajar. No es porque sean resta.
[32]	Miguel:	Pero si lo hacemos en la vida real no sería así.
[33]	Profesora:	¿Ah no?
[34]	Miguel:	Estamos en el -8 y te dice que bajes -4…
[35]	Profesora:	Bueno, es que aquí está el truco que discutimos en la clase del lunes. Me gusta que haya salido esta discusión. Vamos a imaginar por un momento que tuviéramos $-8-(-4)$.Y así es como empezamos nuestra discusión, y lo que ha dicho Claudia me parece genial, en realidad, Claudia, no te dicen que estás en el piso -8, ¿te acuerdas, que había como dos etapas? Yo estaba en el -8, y entonces, o bien bajaba, voy para allá o bien subía, voy para allá .En este caso bajaría, porque este –señalando el signo fuera de los paréntesis– es el que me indica. Pero bajaría en la dirección contraria.
[36]	Miguel:	¿Por?
[37]	Profesora:	Porque tengo otro signo menos. […]
[38]	Miguel:	¿Y en la vida real?
[39]	Profesora:	En la vida real te mareas, ya te lo digo yo, pero aparte de eso, en la vida real es lo que ha dicho Claudia. No hay tantas indicaciones. Es como si alguien te estuviera dando muchas indicaciones. Baja en la dirección contraria. Tú en la vida real no dices eso. Miguel te estoy viendo, ahora mismos voy por ti.

		Dices sube.
[40]	Miguel:	¿Se puede poner el resultado directamente?
[41]	Profesora:	Por supuesto que sí, pero nosotros ya sabes que vamos por etapas. Entonces Claudia, en lugar de hacer bajar en la dirección contraria. Sube en la dirección…
[42]	Claudia:	Directamente dices subes.
[43]	Profesora:	Directamente dices subes.
[44]	Claudia:	Porque para decir baja en la dirección contraria…[…]
[45]	Igor:	Yo no entiendo por qué si le resta, porque aquí hay un símbolo de restar, subes.
[46]	Profesora:	Porque no le resta, es decir, le restaría, Igor, si le restara algo en la dirección…vamos a…a ver…Resto, ¿sí? Estoy restando, con lo cual cuando resto es que bajo, está diciendo que bajas, pero baja en la dirección contraria (hace un remolino), y si bajas en la dirección contraria te vas para arriba.
[47]	Igor:	No, porque bajas.
[48]	Varios alumnos:	Algunos alumnos: pero en la dirección contraria.
[49]	Profesora:	No, bajas en la dirección contraria.
[50]	Igor:	Pero bajar en la dirección contraria es bajar por las escaleras de la derecha.
[51]	Profesora:	Sólo hay dos dimensiones. Ahora estoy viviendo en un espacio de 2 dimensiones, no tengo 3. Dirección hacia abajo, dirección hacia arriba. Entonces, nosotros el primer día que hablamos de esto decíamos, bajo hacia abajo (brazo hacia la izquierda), bajo hacia arriba (brazo hacia la derecha). En este caso te dicen baja, es como si te dieran dos órdenes. Eres un robot y te dicen baja en la dirección contraria (remolino). Vamos a ver Igor. Si yo tuviera esto en el piso -8 y me dijeran $-8-(-4)$ baja, ahora tienes dos direcciones para escoger. De momento me ha dicho baja, pero ahora tengo dos direcciones para escoger. Baja en la dirección de abajo, de los negativos o baja en la otra dirección, la de los positivos. […]

Tabla 17. Transcripción literal del subepisodio C2.2

En primer lugar, Igor interpreta la operación como quitar -4 a -8. En segundo lugar, Claudia la interpreta como bajar al sótano *8* y subir cuatro plantas. A continuación, Miguel se queja de que la explicación de los sótanos no se corresponde con la realidad, ya que bajar -4 no tiene mucho sentido. Se produce así una discusión en la clase sobre el significado de la operación representada por $(-8)-(-4)$, en la que intervienen diferentes significados del signo *“$-$“:* como una notación de número negativo, como resta, o como dirección de suma o de resta (que son los movimientos en un modelo unidimensional).

Se identifica una conexión entre la aritmética aditiva con enteros y un modelo de desplazamiento (Cid, 2003). Esta conexión se produce mediante el establecimiento de dos enlaces básicos, y se refuerza con la aparición de otros dos enlaces complementarios. Los dos enlaces básicos son los que permiten coordinar los diferentes significados del signo menos en los números enteros con acciones en el modelo de desplazamiento. El primero de estos enlaces (e1) consiste en realizar la composición de signos consecutivos mediante la aplicación de la regla de los signos. Una vez se han eliminado los signos consecutivos, la operación en Z queda reducida a una expresión del tipo

$$a \pm b_1 \pm b_2 \pm \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots .. \pm b_n$$

donde a es un número entero y b_i es un número natural para $i = 1, \ldots \ldots, n$. En esta representación basta situarse en la posición correspondiente al valor a y realizar movimientos de b_i unidades en sentido positivo para el signo + y en sentido negativo para el signo –, por lo que se produce un enlace (e2) entre la representación

$$a \pm b_1 \pm b_2 \pm \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots .. \pm b_n$$

y el modelo de desplazamiento.

Los dos enlaces complementarios se relacionan con el significado del signo menos en los números naturales y en los números enteros. El primer enlace (e3) se produce entre el signo menos entendido como quitar en los números naturales, y el hecho de quitar una cantidad negativa en los números enteros. La forma de dar sentido al hecho de quitar una cantidad negativa pasa por aplicar la regla de los signos, dejando así un único signo que puede ser interpretado como quitar o como añadir. Por tanto, mediante la aplicación de la regla de los signo es posible reducir la polisemia del signo "−" en los números enteros al significado que tenían en los números naturales, que era el de quitar (salvo para el primer número de la operación, al cual el signo "−" lo determina como número negativo), con lo que se establece un enlace auxiliar e3'. El segundo enlace (e4) se produce entre el signo menos entendido como bajar en un modelo de desplazamiento vertical restringido a los números naturales y el hecho de bajar una cantidad negativa de posiciones o bajar en dirección contraria. En este caso, también se da sentido a esta situación problemática mediante la aplicación de la regla de los signos, que permite dejar un único signo entre cada par de signo numéricos, que simbolice un único movimiento, con lo que se establece un enlace auxiliar e4'. Sin embargo, en la sesión de clase, la traducción que permite aplicar la regla de los signos en los modelos de desplazamientos no queda clara [48]. A continuación se muestra la red de enlaces (Figura 10) asociada a esta conexión y la Tabla 18, resumen de los enlaces que la constituyen.

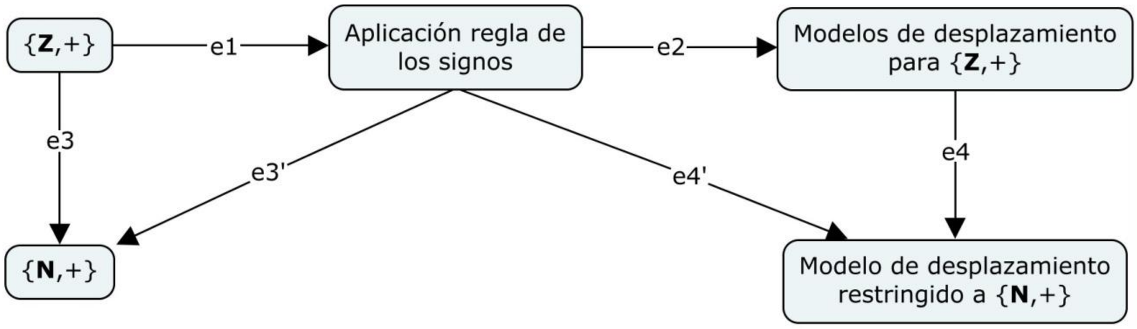

Figura 10. Red de enlaces para el subepisodio C2.2

Enlace	Descripción
e1: Procedimiento	Restar un número negativo no tiene sentido. Se le debe dar otro significado.
e2: Rasgo común	Si se restringe a una representación de signo único los signos que aparecen pueden ser entendidos como desplazamientos en un espacio unidimensional.
e3: Generalización	Se pretende mantener para los números enteros el significado de la resta como quitar que existe en los números naturales. Para ello se da sentido a la resta de un negativo aplicando la regla de los signos.
e4: Generalización	Se mantiene, para los números enteros, la aplicación del modelo de desplazamiento a la aritmética con naturales mediante la aplicación de la regla de los signos.

Tabla 18. Resumen de los enlaces del subepisodio C2.2

La conexión que se establece es entre {Z,+} y su estructura aditiva, y un modelo de desplazamiento en el cual existe una dirección positiva (ya sea hacia la derecha o hacia arriba) y una dirección negativa (la contraria a la anterior respectivamente). En este contexto sumar naturales es avanzar en dirección positiva un determinado número de casillas y restar avanzar en dirección negativa. Sin embargo, cuando se opera con números negativos es necesario que se defina el avance definido por números negativos. Para resolver este problema la profesora propone que se haga uso de la regla de los signos. Sin embargo, esta solución genera una confusión en los alumnos, ya que al tener como referencia un modelo concreto, con una lógica de avances y retrocesos buscan adaptar la regla de los signos al modelo en el que trabajan, y se encuentran con la dificultad de avanzar una cantidad negativa de unidades. Además, se hace especialmente relevante el hecho de "bajar en dirección contraria" ya que una resta de un negativo pasa a ser una suma, resultado que no cuenta con una claridad intuitiva que justifique la utilización de un modelo concreto.

Se clasifica esta conexión como una conexión extramatemática. Aunque la discusión de clase se centre en aspectos internos a la estructura aditiva de los enteros, se considera que la clave del episodio es que se busque justificar de alguna manera un resultado de {Z,+} en base a un modelo, que se rige por principios físicos e intuitivos que no hacen parte de las matemáticas, ya que las distancias a avanzar deben ser positivas y en Z intervienen cantidades tanto positivas como negativas

Análisis del conocimiento en el subepisodio C2.2

Se identifican dos indicadores de conocimiento matemático. En primer lugar, la profesora muestra un conocimiento de los modelos didácticos asociados a la enseñanza de la aritmética con números negativos [30], [39], [46] y [51], lo que se relaciona con el conocimiento del contenido y de su enseñanza (KCT). En segundo lugar, la profesora muestra conocer los materiales de los que dispone, en este caso el libro de texto y los modelos que en él se utilizan [30] que se relaciona con un conocimiento vertical del currículo (VCK), ya que se refiere únicamente a un conocimiento en el ámbito de las matemáticas.

Además, se identifica que la conexión que se produce a partir de las intervenciones de Igor, Claudia y Miguel se podría enriquecer si la profesora movilizara un conocimiento relacionado con la conveniencia de la utilización de modelos en la explicación de la regla de los signos. Conocer resultados relacionados con las dificultades que experimentan los estudiantes al relacionar diferentes modelos asociados a los enteros con la regla de los signos podría ayudar a la profesora a modificar la presentación que se hace de la regla de los signos en este subepisodio, que tal y como manifiestan los alumnos [48], genera confusión. Por tanto, se identifican aspectos relacionados con el conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS) que podría enriquecer la conexión que se produce. A continuación se muestra en la Tabla 19 un resumen del conocimiento identificado en este subepisodio.

Conocimiento explícito identificado		
KCT	[30][39][46][51]	Evidencia conocer los modelos didácticos que utiliza
VCK	[51]	Conoce el libro y los modelos que en él se emplean
Conocimiento para el enriquecimiento de la conexión		
KCS		Evidencia conocer los problemas asociados a los modelos que utiliza

Tabla 19. Resumen de conocimiento del subepisodio C2.2

Subepisodio C2.3

Definición del subepisodio y análisis de la conexión

En este subepisodio se produce una conexión entre la regla de los signos y su justificación. Durante la discusión que se produce en la resolución de la operación $(-8)-(-4)$ dos alumnos discuten sobre el hecho de que al operar dos signos negativos resulte un signo positivo. En respuesta a la incomprensión de este hecho por parte de Igor, Laia le dice que simplemente es así, que no tiene explicación. A continuación interviene la profesora para dejar claro que sí que tiene explicación aunque pueda ser complicada, estableciendo una conexión entre la regla de los signos y su justificación. A continuación, en la Tabla 20, se presenta la transcripción literal del subepisodio.

Núm	Participante	Transcripción literal de la intervención
[52]	Laia:	En el -8 estás en el piso -8, y después antes del paréntesis hay un menos, y en el 4 hay otro – delante, y mira aquí en la regla hay dos menos, que entonces hacen un más.
[53]	Igor:	Lo que no entiendo es por qué dos menos hacen un más. […]
[54]	Laia:	Porque sí, no tiene explicación.
[55]	Profesora:	Ahí intervengo yo, si que tiene un poquito de explicación, lo que pasa es que no es fácil, pero sí que tiene explicación.

Tabla 20. Transcripción literal del subepisodio C2.3

En su intervención, Laia explica a Igor cómo pasar de la expresión $(-8)-(-4)$ a la expresión $-8+4$ utilizando el modelo de desplazamiento y la regla de los signos. Sin embargo, Igor manifiesta no entender, a la vista de las explicaciones que ha recibido durante la clase, por qué dos signos menos pueden producir un signo +. En su respuesta, Laia responde al problema propuesto por Igor afirmando que no hay que buscar una explicación, ya que ésta no existe. En ese momento interviene la profesora para dejar claro que sí existe una explicación de regla de los signos, aunque no sea fácil.

En este diálogo se identifican dos enlaces (Figura 10). El primer enlace se produce entre la aplicación de la regla de los signos y la afirmación de Laia sobre el hecho de que la regla de los signos pueda no tener justificación. El segundo enlace se produce entre la falta de justificación de la regla de los signos y la afirmación de la profesora de que esta justificación existe, aunque no sea fácil. A continuación, en la Figura 11, se muestra la red de enlaces asociada a esta conexión y en la Tabla 21 se describen los tres enlaces.

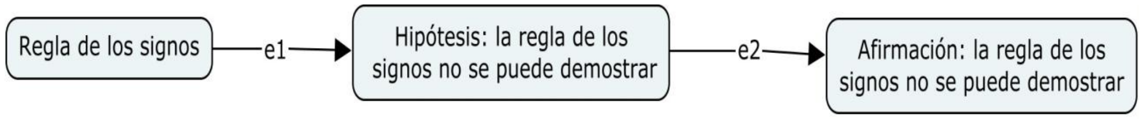

Figura 11. Red de enlaces para el subepisodio C2.3

Enlace	Descripción
E1: Justificación	Ante la incomprensión de Igor, Laia propone que dado que la regla de los signos no tiene explicación (según ella), el problema que plantea no se puede resolver y por lo tanto no tiene sentido
e3: Justificación	Aunque la regla de los signos sí tiene explicación y por tanto el problema propuesto por Igor sí tiene sentido, la profesora justifica que no se ha hecho esta explicación por su dificultad.

Tabla 21. Resumen de los enlaces del subepisodio C2.3

Esta conexión muestra la relación existente entre la estructura de los números enteros y los diferentes modelos reales que se utilizan para su enseñanza y aprendizaje. En el primer enlace se hace evidente que la definición que el concepto de número entero que se ha trabajado en el aula no proporciona a Igor herramientas para poder dar un sentido lógico y coherente a la regla de los signos. De hecho, el segundo enlace confirma que la forma en que se han introducido los números enteros en el aula no permite justificar la regla de los signos.

Dado que la conexión se centra en la existencia de una justificación de la regla de los signos, se considera que se trata de una conexión intramatemática relativa a procesos. Aunque se trate de un aspecto que se refiere a la aritmética de los enteros, el fragmento trata de la justificación de la técnica, y por tanto se relaciona con un proceso transversal en el conocimiento matemático y no únicamente un aspecto privativo de la aritmética con enteros. Además, el hecho de que la última intervención de la profesora se refiera a que la explicación sí existe, aunque no sea fácil, muestra que desde una perspectiva de práctica de aula la justificación de la regla de los signos es algo que no queda incluido dentro del tema de la aritmética con enteros, sino que lo trasciende y cobra una importancia fundamental en la idea que tienen los alumnos de que los resultados matemáticos no son arbitrarios.

Análisis del conocimiento en el subepisodio C2.3

Se identifican dos indicadores de conocimiento matemático. En primer lugar, la profesora muestra un conocimiento de la existencia de una justificación de la regla de los signos [55], lo que se relaciona con el conocimiento del contenido y de su estructura (KOTS). En segundo lugar, la profesora muestra un conocimiento relacionado con la dificultad que pueden experimentar los estudiantes para comprender la justificación de la regla de los signos [55], lo que se relaciona con un conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS).

Además, se identifica que la conexión que se produce a partir de las intervenciones de Igor y Laia se podría enriquecer si la profesora movilizara de manera explícita un conocimiento sobre la importancia de entender las matemáticas como un tipo de conocimiento en el que los resultados que se utilizan pueden y deben estar justificados –demostrados–, lo que se relaciona con un conocimiento de la práctica matemática (KPM). A continuación, en la Tabla 22, se muestra el resumen del conocimiento identificado en este subepisodio.

Conocimiento explícito identificado		
KCS	[55]	Evidencia conocer en profundidad los contenidos que enseña
KCS	[55]	Conoce dificultades de los estudiantes
Conocimiento para el enriquecimiento de la conexión		
KPM		Evidencia conocer los problemas asociados a los modelos que utiliza

Tabla 22. Resumen de conocimiento del subepisodio C2.3

Subepisodio C2.4

Definición del subepisodio y análisis de la conexión

En este subepisodio se produce una conexión entre dos procedimientos para realizar en Z operaciones del tipo $(-a)-(-b)$, donde a y b son números naturales. El primer procedimiento es el que propone la profesora y consiste en aplicar la regla de los signos y reducir la operación a su representación reducida $-a+b$. El segundo procedimiento es el que propone Igor, y consiste en realizar $(-a)-(-b)=-(a-b)$ cuando a y b son enteros negativos. A continuación, en la Tabla 23, se muestra la transcripción literal del subepisodio.

Núm	Participante	Transcripción literal de la intervención
[56]	Igor:	Pero yo no quito esos signos. Yo quito los signos del $-8, -4, -6, +2, -9$.
[57]	Profesora:	Igor, vamos a ver, tranquilos. No pasa nada, Igor, ¿qué signos quitas?
[58]	Igor:	Los de los números, los del -8, los que están detrás del paréntesis.
[59]	Profesora:	Igor, el del -8, es un signo que acompaña al -8, que indica que está a la izquierda del 0.
[60]	Igor:	No, pero luego lo añado. Sabiendo que es un -8.
[61]	Profesora:	¿Lo añades a dónde?
[62]	Igor:	Al resultado. Es decir, $-8-(-4)$.
[63]	Profesora:	Explícaselo a todos, yo me pongo de alumna.
[64]	Igor:	(Escribe en la pizarra $-8-(-4)$) Yo lo que hago es quitar estos signos (quita el signo negativo a -8 y -4) y acordándome que era un -8. Hago $8-4$, me da 4 y el menos.
[65]	Profesora:	¿Por qué puedes quitar los dos signos asociados al 8 y al 4? ¿Por qué los puedes quitar? Explícanoslo.
[66]	Igor:	Porque son iguales.
[67]	Profesora:	Ok Igor, siéntate. Vale, Igor, es cierto, debido a que los dos signos son iguales, y utilizo tu mismo argumento, se puede hacer, si los dos signos no son iguales no se puede hacer.
[68]	Claudia:	Sí, sí se puede hacer porque…
[69]	Profesora:	Bueno, sí se puede hacer con otro truco, pero yo ya no voy a entrar a explicarlo de más maneras, ¿vale? Quisiera que todo el mundo retenga esta técnica de los signos porque a partir de ahora se va a empezar a complicar y con esta técnica de los signos estamos salvados.

Tabla 23. Transcripción literal del subepisodio C2.4

Cuando Igor propone un método alternativo se produce un enlace implícito entre el procedimiento propuesto por la profesora y el método alternativo propuesto por el alumno (ver Figura 11). Dicho enlace se hace explícito cuando la profesora pide a Igor que salga a la pizarra, y acaba aceptando que la propuesta de Igor es válida en el caso que los números que se restan sean del mismo signo. En la interacción entre la profesora y Claudia se hace evidente que existe una generalización de la propuesta de Igor, aunque la profesora decide no explicitar dicha generalización y por tanto no establecer el enlace explícitamente. A continuación, en la Figura 12, se muestra la red de enlaces asociada a esta conexión y en la Tabla 24, se describen los dos enlaces.

Figura 12. Red de enlaces asociada a la conexión C2.4

Enlace	Descripción
e1: Rasgo común	Los dos procedimientos están relacionados en tanto que producen el mismo resultado cuando los elementos que se restan o suman tienen el mismo signo
e2: Generalización	La propuesta alternativa se puede generalizar al caso en que los números que se operan tengan diferente signo.

Tabla 24. Resumen de los enlaces para el subepisodio C2.4

La técnica alternativa propuesta por el alumno es parcialmente correcta. Sin embargo, la reacción de la profesora procura que no se discutan más formas de realizar la operación. Así, aunque se produce una conexión entre la técnica y el procedimiento alternativo propuesto por el alumno, la forma en que la profesora gestiona la propuesta del alumno deja la conexión sin establecer (e2), ya que no se indaga en la validez de la propuesta ni en el caso en que los signos sean diferentes. Además, en el contexto del episodio, esta conexión inconclusa puede contribuir a que los alumnos perciban un cierto caos y arbitrariedad en la introducción de la aritmética con enteros.

Se considera que se trata de una conexión intramatemática ya que se refiere únicamente utiliza la lógica de las matemáticas y su lenguaje. Además, dado que la conexión es entre diferentes técnicas aplicables a {Z,+}, queda claro que se trata de una conexión conceptual. Dentro de las conexiones conceptuales se trata de una conexión con tratamiento, ya que las transformaciones que se realizan son entre representaciones que pertenecen al mismo registro.

Análisis del conocimiento en el subepisodio C2.4

Se identifican tres indicadores de conocimiento matemático. En primer lugar, la profesora muestra un conocimiento de las técnicas alternativas propuestas por Igor [65], [67] y [69], lo que se relaciona con el conocimiento del contenido y de su estructura (KOTS). En segundo lugar, la profesora muestra un conocimiento relacionado con la decisión de utilizar un único criterio para que sea más claro para todos los alumnos [69], lo que se relaciona con un conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCS). Finalmente, la profesora muestra un conocimiento relacionado con las dificultades que puedan experimentar los alumnos con los contenidos posteriores [69], lo que se relaciona con un conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS).

Además, se identifica que la conexión que se produce a partir de las intervenciones de Igor y Claudia se podría enriquecer si la profesora movilizara de manera explícita un conocimiento relacionado con la indagación de otros procedimientos para resolver un problema y comparar los diferentes procedimientos. Este conocimiento se relacionaría con un conocimiento de la práctica matemática, ya que se refiere a conocer que existen múltiples procedimientos equivalentes que se pueden utilizar para resolver un mismo problema y que el análisis de esta equivalencia es interesante y en muchos casos puede profundizar el conocimiento del concepto que se estudia (KPM). Además, dado que se trata de indagar en propuestas hechas por los alumnos en clase, se relaciona también con un conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT). A continuación, en la Tabla 25, se muestra el resumen del conocimiento identificado en este subepisodio.

Conocimiento explícito identificado		
KOTS	[65][67][69]	Conoce técnicas alternativas que proponen los alumnos
KCT	[69]	Decide unificar criterios procedimentales
KCS	[69]	Prevé dificultades posteriores de los alumnos
Conocimiento para el enriquecimiento de la conexión		
KPM		Indaga nuevas forma de resolver problemas
KCT		Aprovecha las preguntas de los alumnos para profundizar en un concepto

Tabla 25. Resumen de conocimiento del subepisodio C2.4

Subepisodio C2.5

Definición del subepisodio y análisis de la conexión

Este subepisodio tiene lugar durante el subepisodio C2.4, aunque se presentan de manera separada dada la naturaleza de la conexión que se produce. Si bien es cierto que se produce también una conexión entre la propuesta P2 del alumno y su generalización, en este caso la profesora introduce un juicio de valor al cuestionarle al alumno para qué busca más formas de resolverlo si ya existe una que funciona. A continuación, en la Tabla 26, se presenta la transcripción literal del subepisodio.

Núm	Participante	Transcripción literal de la intervención
[70]	Profesora:	Porque son iguales. Sí. ¿Quién te ha explicado eso?
[71]	Igor:	Yo…Es que además no sé si es verdad.
[72]	Profesora:	Entonces, si hay algo que sabes que es verdad, mi pregunta es, si hay algo que sabes que es verdad, que es lo que hemos aprendido en clase, que todos los compañeros ha estado explicándotelo. Si hay algo que tu sabes que es verdad, que todos tus compañeros entienden. ¿Por qué no lo haces? Ahora te explicaré por qué es verdad, pero mi pregunta es…
[73]	Igor:	Es que no he entendido tu pregunta.
[74]	Profesora:	Tal y como tú me lo has presentado es cierto. Pero tal y como tú me lo has presentado… claro, si aquí hubiera un signo menos y aquí hubiera un signo más. Entonces tú no me has dado una razón para decir que esto se puede hacer.
[75]	Igor:	Sí, que son iguales.
[76]	Profesora:	Entonces aquí yo diría, pues porque estos dos son diferentes lo puedo quitar. Es una razón tan válida como la tuya. ¿O no te parece que es una razón tan válida como la tuya? ¿O no te parece a ti una razón tan válida?
[77]	Igor:	Pues eso, que a mí me va mejor así. De la otra forma, así, me lio mucho, con tanto signos raros. Quitando los signos y haciéndolo como lo he hecho siempre.

Tabla 26. Transcripción literal del subepisodio C2.5

Cuando la profesora le explica a Igor que el procedimiento que ha propuesto no está sustentado sobre un argumento sólido [74] y le pregunta qué pasaría si fueran de signo contrario [76], se establece un enlace entre la propuesta de Igor y el caso en que los signos son diferentes (ver Figura 12). Sin embargo, este enlace no se produce explícitamente, y el discurso de la profesora [72], [74] y [76] se centra en quitar validez a la propuesta de Igor centrando la atención en el procedimiento P1 que se ha trabajado en el aula. Por tanto, existe un segundo enlace que no se llega a producir explícitamente entre la propuesta P2 del alumno y su generalización al caso en que los números tengan signo diferente. A continuación, en la Figura 13, se muestra la red de enlaces asociada a esta conexión y en la Tabla 27 se describen los dos enlaces definidos.

Figura 13. Red de enlaces asociada a la conexión C2.5

Enlace	Descripción
e1: Caso particular	La profesora pregunta qué pasaría en el caso particular en que los números fueran del mismo signo.
e2: Generalización	Estudiar el caso en que los dos números tengan signo diferente constituiría una generalización del procedimiento P2 propuesto por el alumno.

Tabla 27. Resumen de los enlaces para el subepisodio C2.5

Durante la discusión sobre la validez del método propuesto por el alumno, y descrito en el fragmento anterior, la profesora decide cortar la indagación sobre la validez del nuevo método e introduce una valoración sobre los procedimientos válidos en matemáticas. En esta valoración la profesora introduce valores de consenso y de autoridad para sugerir la mayor adecuación de la regla de los signos sobre la técnica alternativa propuesta por el alumno.

Se considera que se trata de una conexión intramatemática conceptual relativa a procesos, ya que los comentarios de la profesora se centraban en discutir la validez del procedimiento propuesto por el alumno. La discusión que se produce entre el alumno y la profesora supera los límites de los procedimientos particulares que se discuten, y tiene que ver con la validación de procesos y la búsqueda de nuevas formas de resolución de problemas en general.

Análisis del conocimiento en el subepisodio C2.5

Se identifican dos indicadores de conocimiento matemático. En primer lugar, igual que en el caso anterior, la profesora muestra un conocimiento de las técnicas alternativas propuestas por Igor en el subepisodio anterior [72], lo que se relaciona con el conocimiento del contenido y de su estructura (KOTS). En segundo lugar, la profesora muestra un conocimiento relacionado con la decisión de utilizar un único criterio para que sea más claro para todos los alumnos [72], lo que se relaciona con un conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCS).

Además, se identifica que la conexión que se produce a partir de las intervenciones de Igor y Claudia se podría enriquecer de tres maneras. En primer lugar, igual que en el subepisodio anterior, si la profesora movilizara de manera explícita un conocimiento relacionado con la indagación de otros procedimientos para resolver un problema y comparar los diferentes procedimientos los alumnos tendrían la oportunidad de comparar los dos métodos, y la profesora tendría la oportunidad de justificar por qué es más clara la regla de los signos, lo que se relaciona con un conocimiento de la práctica matemática (KPM). Dado que los procedimientos a indagar han surgido en la práctica de clase, la indagación anterior también se relaciona con un conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT). En segundo lugar, la profesora podría mostrar de forma explícita que existen diferentes formas de proceder en matemáticas, y que hay que analizar cuál es la mejor en cada contexto, lo que se relaciona con un conocimiento de la práctica matemática (KPM). Finalmente, la profesora podría proporcionar una justificación rigurosa o convincente de la conveniencia de su propuesta, en detrimento de la propuesta de Igor, lo que se relaciona con un conocimiento de los contenidos y de los estudiantes (KCS), ya que se relaciona con la capacidad de responder de manera adecuada a las ideas de los estudiantes. A continuación, se muestra la Tabla 28 que resume el conocimiento identificado en este subepisodio.

Conocimiento explícito identificado		
KOTS	[72]	Conoce la técnicas alternativas que proponen los alumnos
KCT	[72]	Decide unificar criterios procedimentales
Conocimiento para el enriquecimiento de la conexión		
KPM		Indaga en la validez procedimientos alternativos
KCT/KPM		Muestra diferentes formas de proceder en matemáticas
KCS		Proporciona una respuesta adecuada a las ideas de los estudiantes

Tabla 28. Resumen de conocimiento del subepisodio C2.5

Subepisodio C2.6

Definición del subepisodio y análisis de la conexión

Este subepisodio concluye el episodio 2. Al final de la discusión sobre el procedimiento alternativo propuesto por Igor, otro alumno vuelve a preguntar si el procedimiento es o no correcto. Se produce así una conexión entre el procedimiento P2 propuesto por el alumno con la validez del mismo. A continuación, la Tabla 29, muestra la transcripción literal del subepisodio.

Núm	Participante	Transcripción literal de la intervención
[78]	Joan:	¿Pero al final está bien?
[79]	Profesora:	Es correcto pero es más liado, no nos ayuda para lo que viene ahora.

Tabla 29. Transcripción literal del subepisodio C2.6

En esta conexión se produce un enlace entre el procedimiento P2 propuesto por Igor y la validez de dicho procedimiento. La respuesta de la profesora [79] a la pregunta de Joan [78] establece un enlace explícito entre el procedimiento P2 y la validez y pertinencia de P2. Aunque la profesora explicite una vez más que el método funciona en el caso de restas de números del mismo signo, le dice a Joan que es un método menos claro –*más liado*- y que teniendo en cuenta lo que viene a continuación es mejor aplicar la regla de los signos. Se establece así un segundo enlace entre el método propuesto por el alumno y el método propuesto por la profesora que consiste en justificar que la regla de los signos es más apropiada. A continuación, la Figura 14, muestra la red de enlaces asociada a esta conexión y la Tabla 30 describe los dos enlaces definidos.

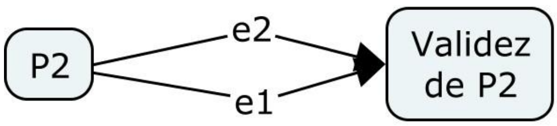

Figura 14. Red de enlaces asociada a la conexión C2.6

Enlace	Descripción
e1: Justificación	La profesora confirma que el método propuesto por Igor es correcto
e2: Justificación	Aunque la propuesta del alumno se muestre como un procedimiento correcto, la profesora valora que es mejor continuar todos con el procedimiento que ella ha introducido.

Tabla 30. Resumen de los enlaces del subepisodio C2.6

Después de la discusión sobre la validación de la regla de los signos, así como de otros métodos alternativos, la profesora concluye que, aunque existan otros procedimientos o "trucos" posibles, el método que mejor se adapta a los contenidos que vienen a continuación es la regla de los signos. La conexión que define este subepisodio se relaciona por tanto con la existencia de métodos alternativos y con su justificación en el aula.

Se trata de una conexión de tipo intramatemática ya que no se hace ninguna referencia a la utilización de situaciones externas a las matemáticas para justificar los métodos que se discuten. Además, se trata de una conexión conceptual, ya que aunque la conexión se produzca entre el método alternativo y su validez, la conexión se centra en la adecuación de la regla de los signos para los contenidos que se trabajarán a continuación. Se trata de una conexión con tratamiento, ya que ambos métodos se producen en el mismo registro.

Análisis del conocimiento en el subepisodio C2.6

Se identifican dos indicadores de conocimiento matemático. En primer lugar, la profesora muestra un conocimiento relacionado con la dificultad que puede representar de cada procedimiento para los alumnos en las sesiones posteriores [79], lo que se relaciona con el conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS). En segundo lugar, la profesora muestra un conocimiento de los temas que aparecerán a continuación [79], lo que se relaciona con un conocimiento vertical del currículum (VCK), ya que la profesora muestra conocer los contenidos matemáticos que los alumnos trabajarán a continuación.

En este subepisodio se produce una conexión que enriquece la construcción del conocimiento matemático, por lo que no se identifican tipologías de conocimiento del profesor que enriquezcan dicha construcción, además de las ya descritas en el subepisodio anterior. A continuación, la Tabla 31 muestra el resumen del conocimiento identificado en este subepisodio.

Conocimiento explícito identificado		
KCS	[79]	Prevé dificultades posteriores de los alumnos
VCK	[79]	Prevé contenidos posteriores
Conocimiento para el enriquecimiento de la conexión		
-	-	-

Tabla 31. Resumen de conocimiento del subepisodio C2.6

4.3 Análisis del episodio 3

A partir de la corrección de -2^5, la profesora pregunta a los alumnos cómo resolverían $(-2)^5$, para a continuación proponerles resolver $(-2)^6$. En el primer subepisodio se conectan diferentes procedimientos para resolver $(-2)^5$, mientras que en el segundo subepisodio se conecta la resolución de $(-2)^6$ con la resolución anterior.

Subepisodio C3.1

Definición del subepisodio y análisis de la conexión

Después de resolver en clase -2^5, la profesora pregunta a los alumnos cómo resolverían $(-2)^5$. Tres alumnos proponen tres procedimientos diferentes, todos ellos correctos, produciéndose una conexión entre los tres procedimientos. Además durante la resolución detallada de la operación surge una conexión con la propiedad asociativa que permite a la profesora proponer una regla general para el cálculo de potencias de base negativa. A continuación, en la Tabla 32, se muestra la transcripción literal del subepisodio.

Núm	Participante	Transcripción literal de la intervención
[80]	Profesora:	¿Y si en lugar de hacer el apartado (a) nos piden hacer este problema $(-2)^5$? ¿Qué, qué creéis que tenemos que hacer?
[81]	Lucas:	Multiplicaría 5 veces $-2, -2, -2$ .... y sumaria los signos.
[82]	Profesora:	Guardo en memoria, eh, guardo en memoria.
[83]	Dimitri:	Harías primero -2, con el -2 del otro sería $+2$, que con el -2 del otro daría menos, y entonces así acabaría menos.
[84]	Profesora:	Bien, es bastante parecido a lo que ha dicho Lucas, sólo quiero puntualizar una cosita Lucas, pero vamos bien, vamos por esa línea. Marta y acabamos.
[85]	Marta:	Pues hacemos todo, todo el 2, $2 \cdot 2$, $2 \cdot 2 \cdot 2$, y el resultado que nos de ponemos menos y el resultado.
[86]	Profesora:	Bien, me gustan los tres. Lo único que no me gusta tuyo, Lucas, es que has dicho que se suma el signo, y los signos no se suman, se aplican, se operan de acuerdo con la regla de los signos. Es la única puntualización. En realidad, los 3 han dicho lo mismo, estamos todos de acuerdo. Hemos quedado en que teníamos nuestra base, y ahora sí que voy a marcar aquí un circulito y vamos a quedar en que esta será nuestra base. Tenemos la base y la base la replicamos, tantas veces como nos indique el exponente, ¿cierto? Lo que pasa es que ahora, oye, la base está viviendo en otro sitio, está viviendo en el mundo de los que tienen signo. Por eso nosotros somos cuidadosos (empieza a escribir signos en los doses de la parte derecha de la expresión),

		y si estuviera aquí Anna, ah sí que está Anna, que siempre quiere quitar el paréntesis y el signo, pues hoy tenemos que mantenerlo, no tenemos otra opción ¿vale? Para tener bien claro que hoy el que se repite es el -2, no es el 2, ¿todos de acuerdo? Y ahora como nos ha dicho Marta, que nos lo ha dicho perfecto, cuando nosotros hacemos multiplicaciones de números, nosotros lo que hacemos es multiplicar por un lado las magnitudes y por otra los signos. Vamos con la magnitud Marta.
[87]	Marta:	Ehhhh, $2 \cdot 2 = 4$, $4 \cdot 2 = 8$, $8 \cdot 2 = 16$, $16 \cdot 2 = 32$.
[88]	Profesora:	32, genial, venga 32. Y ahora Iván nos va a decir el signo.
[89]	Iván:	Es menos.
[90]	Profesora:	Es menos, ¿por qué?
[91]	Iván:	Porque 2 menos hacen un más, otros dos menos hacen un más, más, más y más hacen más y todavía queda un menos que hace menos. […] Sería como si tuviéramos un poco de propiedad asociativa entre los signos.
[92]	Profesora:	Me gusta esa idea. Propiedad asociativa entre los signos. ¿Alguien se acuerda de lo que era la propiedad asociativa?
[93]	Anna	Pero también es más fácil hacer menos y menos son más y otro menos son menos…
[94]	Profesora:	Vamos por etapas. Vamos primero a la sociedad asociativa y luego vemos si hay otras maneras más fáciles. Propiedad asociativa lo que decía es que si yo tengo dos números que se están multiplicando y le pongo un tercero: $a \cdot b \cdot c = \cdots$pues estos (señalando las letras) los puedo agrupar 2 a 2 como yo quiera. Pues entonces puedo ponerlo así o puedo ponerlo así. Es decir, que podemos asociar los signos como queramos. Podemos operar, lo que ha dicho Marta, lo que ha dicho Dimitri, podemos operar el signo. Vamos a ver ahora cómo sale y luego utilizaremos la técnica de Iván. $- \cdot -$ chicos, $+$; $+ \cdot - = -$; $- \cdot - = + \, y \, + \cdot - = -$. Vale, ya sabemos que nos tienen que salir un menos. Pero esta manera de hacerlo es un poco rollo, porque te tienes que acordar cual es el que viene antes o el que viene después, ¿cierto? ¿sí? Y entonces nos cuesta. Entonces tenemos que encontrar una forma más fácil de hacerlo. Aunque si en algún momento estamos bloqueados ya sabemos que opera el signo, pan pan pan. Y cuál es la manera más fácil, pues aplicar la propiedad asociativa pero con los signos. Iván ya nos ha dicho, cuando tú tienes muchas cosas sucesivas, cuando tienes muchos números que se están multiplicando sucesivamente, los puedes agrupar. Pues oye, vamos a agrupar todos estos menos que tenemos aquí. Fíjate, tengo este, tengo este, tengo cuatro y tengo cinco. Vale David, estos dos primeros los voy a agrupar, y tengo un más, ahora agrupo los dos segundos los voy a agrupar y tengo otro más, y ahora tengo uno que me queda solo, un menos. Y ahora David, a ti te parece bien agrupar estos 2 (los 2 más)?

		Por qué agrupo estos dos y no agrupo este y este $(+ \text{ y } -)$?
[95]	David:	Porque da más.
[96]	Profesora:	Porque estos 2 me dan un menos y en cambio estos 2 juntos dan más, y el signo más no molesta. ¿Todos? Tenemos nuestra estrategia es ir a buscar signos más, ¿estamos todos de acuerdo? Bien, ahora en un segundo nivel, agrupo este más y tengo aquí este menos. Entonces ahora yo me tengo que ocupar de la última línea, y ¿cuál es el resultado, Eric? Menos, genial. Ya tenemos el signo, entonces yo ya me he dado cuenta que cuando hay un exponente impar, cuando hay un exponente impar, ¿si te estás dando cuenta? Y la base tiene un signo menos, ¿el resultado final qué va a ser Miguel? A ver si me explico otra vez. Tengo un exponente impar, y la base tiene signo menos, al final será un menos, ¿todos? Siempre. Tengo una base con signo menos, base con signo menos, y un exponente que es impar, al final, no hace falta que yo haga todo este rollo, al final me va a dar un signo menos, ¿todos?

Tabla 32. Transcripción literal del subepisodio C3.1

En la Figura 15 se ilustran los enlaces definidos en el subepisodio. Los alumnos proponen tres procedimientos diferentes para realizar $(-2)^5$. En primer lugar, Lucas propone escribir cinco veces el -2 y a continuación sumar los signos (P1) [81]. Dimitri propone también escribir $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$ y realizar la operaciones de izquierda a derecha, empezando por los dos primeros y multiplicando a continuación por cada factor (P2) [83]. Marta propone (P3) calcular por un lado las magnitudes y a continuación poner un signo “-” [85]. Al afirmar que los tres procedimientos son equivalentes [86] –*los tres han dicho lo mismo*– la profesora establece tres enlaces entre los 3 procedimientos, aunque no sean explícitos. A continuación, la profesora resuelve en la pizarra la operación, operando por un lado las magnitudes y por el otro los signos, proponiendo así un método P4 que corrige a los anteriores. Al buscar el signo, Iván explica que basta con agrupar los signos de los números que se multiplican, lo que le recuerda a la propiedad asociativa [91]. Se produce así un enlace entre la operación de signos en la multiplicación de enteros con la propiedad asociativa, que permite a la profesora llamar la atención sobre un patrón que permite establecer una regla general para calcular el signo de cualquier potencia impar de base negativa: toda potencia impar de base negativa es negativa [96].

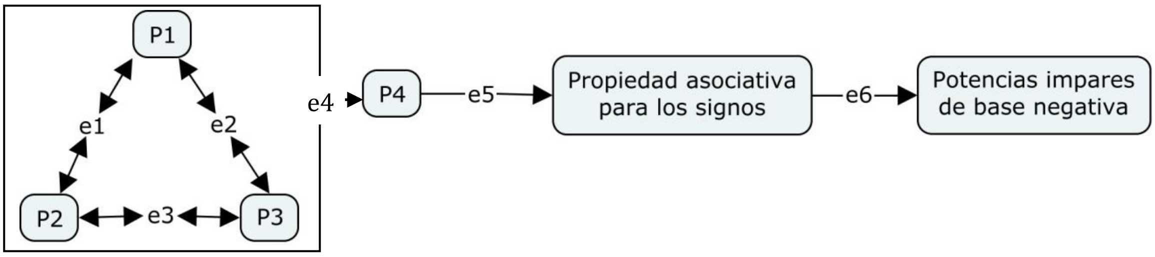

Figura 15. Red de enlaces asociada a la conexión C3.1

Enlace	**Descripción**
e1: Procedimiento equivalente	P1 se puede entender como una generalización parcial de P2, ya que si al multiplicar 2 números se separa magnitud y signo, al multiplicar 5 números también será posible. En sentido inverso P2 es una particularización de P1.
e2: Procedimiento equivalente	P1 y P3 son equivalentes si por sumar signos se entiende operar signos, y si se explicita que el menos de P3 proviene de operar los cinco signos menos.
e3: Procedimiento equivalente	P2 y P3 son equivalentes por transitividad.
e4: Procedimiento equivalente	P4 es un resumen de P1, P2 y P3 en el que se explicita que se operan las magnitudes y los signos por separado, por tanto es un procedimiento equivalente a los anteriores.
e5: Representación equivalente	A la operación de los cinco signos se aplica la propiedad asociativa, buscando así hacer parejas que den como resultado un signo más.
e6: Generalización	El razonamiento de buscar parejas de signos menos para obtener signos más permite formular una regla general para las potencias impares de base negativa.

Tabla 33. Resumen de los enlaces para el subepisodio C3.1

En la conexión que define este subepisodio destacan tres bloques principales, tal y como se describe en la Tabla 33. En primer lugar, los enlaces e1, e2, e3 muestran algunas interpretaciones que pueden darse a las potencias de enteros, como una secuencia de multiplicaciones de la misma base, o como una potencia natural –la magnitud- y un signo asociado que hay que calcular. En el enlace 4 la profesora resume estas dos interpretaciones de las potencias de números enteros y propone un procedimiento unificador.

En segundo lugar, al realizar el razonamiento detallado de la equivalencia entre realizar la operación de los cinco signos de manera sucesiva de izquierda a derecha con la agrupación de los signos se establece una analogía entre multiplicar magnitudes y multiplicar signos (e5). Sin embargo, esta analogía no es trivial, ya que no se ha definido la propiedad asociativa para los signos, sino únicamente una regla de operación. De hecho, se ha dicho explícitamente que los signos no se pueden sumar, y además la regla de multiplicación de los signos no ha sido justificada.

Finalmente, la profesora busca aprovechar la idea surgida con la aplicación de la propiedad asociativa (e5) a la búsqueda de un patrón que permita predecir el signo de cualquier potencia impar de base negativa (e6). Esta relación implica, por parte de los alumnos, la capacidad de identificar un patrón y a partir de analizar cómo se produce el cambio de signos ser capaces de realizar predicciones y finalmente, de generalizar un resultado en matemáticas.

Se clasifica esta conexión como una conexión intramatemática ya que no se refiere a situaciones externas a las matemáticas. Dentro de la categoría de intramatemáticas se considera que es una conexión conceptual, ya que se refiere a buscar una técnica concreta para calcular potencias de números negativos. Conviene señalar que el hecho de que la propiedad asociativa tenga un papel tan importante en esta conexión no implica que se trate de una conexión relativa a procesos, ya que en este caso se trata de una aplicación de la propiedad en base a su definición general y no se trata de construir la idea de propiedad asociativa en base a diferentes ejemplos, en cuyo caso se tendría una conexión relativa a procesos. Se utiliza la definición de la propiedad para construir una técnica dentro del contexto de la aritmética con enteros. Por tanto, se trata de una conexión conceptual con tratamiento.

Análisis del conocimiento en el subepisodio C3.1

Se identifican cuatro indicadores de conocimiento matemático (ver Tabla 33). En primer lugar, la profesora muestra tener un objetivo claro con la secuencia que propone para que los alumnos vean que se cumple un patrón en las potencias de números enteros [80], lo que se relaciona con un conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT). En segundo lugar, la profesora muestra comprender las diferentes propuestas de los alumnos [86] y [92], lo que se relaciona con un conocimiento del contenido y de su estructura (KOTS). En tercer lugar, la profesora aprovecha la intervención de un alumno para profundizar en el conocimiento matemático que se está trabajando en el aula [92][94], lo que se relaciona con un conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT). Finalmente, la profesora construye un razonamiento riguroso que permite generalizar un resultado empírico identificado en el aula [94] y [96], lo que se relaciona con un conocimiento de la práctica matemática (KPM), ya que no se trata únicamente de un conocimiento relacionado únicamente con los contenidos que se enseñan, sino que se hace énfasis en el proceso que permite generalizar.

En este subepisodio se produce una conexión que enriquece la construcción del conocimiento matemático, por lo que no se identifican tipologías de conocimiento del profesor que enriquezcan dicha construcción. A continuación se muestra la Tabla 34 se resume el conocimiento identificado en este subepisodio.

Conocimiento explícito identificado		
KCT	[80]	Evidencia tener unos objetivos claros para la sesión respecto al conocimiento matemático que pretende trabajar.
KOTS	[86][92]	Evidencia conocer en profundidad el tema que enseña desde el punto de vista del contenido
KCT	[92][94]	Aprovecha la intervención de un alumno para profundizar en la construcción de conocimiento matemático
KPM	[94][96]	Generaliza un resultado de clase de manera rigurosa y sistemática
Conocimiento para el enriquecimiento de la conexión		
-	-	-

Tabla 34. Resumen de conocimiento del subepisodio C3.1

Subepisodio C3.2

Definición del subepisodio y análisis de la conexión

En este subepisodio se produce una conexión entre la propiedad deducida en el subepisodio anterior relacionada con las potencias impares de exponente negativo, y la generalización de esta propiedad para cualquier potencia natural de base negativa. A continuación de $(-2)^5$ la profesora propone a los alumnos que resuelvan $(-2)^6$. Tanto en el cálculo de la magnitud como en el cálculo del signo se aplica la propiedad asociativa. A continuación, en la Tabla 35, se muestra la transcripción literal del subepisodio.

Núm	Participante	Transcripción literal de la intervención

[97]	Profesora:	[…] en el apartado d si tú haces $(-2)^6$ ¿qué va a pasar con el signo?
[98]	Anna:	Pero Victoria, si tu cuentas, si sale 5 te va a salir menos y si sale 6 te va a salir más.
[99]	Profesora:	Eso es lo que estoy preguntando justamente. ¿Sí? Por eso estamos haciendo la misma base, ¿sí Anna?, estamos haciendo la misma base, pero el exponente uno impar y otro par. Vale, para que veamos la diferencia. Total, que el signo nos va a salir al final más, porque el exponente es par, y la magnitud qué va a salir?
[100]	Varios alumnos:	34, no 64.
[101]	Profesora:	¿Y por qué lo habéis dicho tan rápido?
[102]	Varios alumnos:	Porque lo multiplicamos por 2.
[103]	Profesora:	Muy bien, no es necesario volver a hacer $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$...seis veces, porque ya lo tenemos hecho 5 y lo que nos sale lo multiplicamos una vez más por 2. ¿Todos?

Tabla 35. Transcripción literal del subepisodio C3.2

Cuando la profesora pregunta sobre qué pasará con el signo [97] Anna responde que si con un exponente 5 sale menos, con un exponente 6 saldrá un más [98]. En respuesta a la intervención de Anna, la profesora aprovecha para generalizar la propiedad que se había introducido en el subepisodio anterior a cualquier potencia natural de base negativa. Al hacer énfasis en la propiedad asociativa aplicada al cálculo de 2^6, la profesora refuerza la idea que introdujo para la propiedad general para las potencias de base negativa. A continuación, la Figura 16, muestra la red de enlaces asociada a esta conexión y la Tabla 36 describe el enlace definido en el subepisodio.

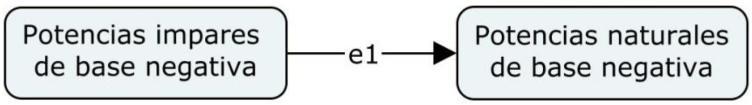

Figura 16. Red de enlaces para el subepisodio 3.2

Enlace	Descripción
e1: Generalización	Se generaliza la propiedad para potencias impares de base negativa al caso de cualquier potencia natural de base negativa

Tabla 36. Resumen de los enlaces para el subepisodio C3.2

El enlace e1 constituye el corolario a la propiedad deducida en el subepisodio C3.1, ya que para su demostración se aplican las mismas propiedades que se aplicaron en la justificación de la propiedad anterior: la propiedad conmutativa para separar el cálculo de magnitudes y signos, y la propiedad asociativa para identificar el patrón que permite establecer un resultado general de las potencias de base negativa.

Se clasifica esta conexión como una conexión intramatemática ya que no se hace ninguna referencia a ningún elemento extramatemático. Dentro de esta categoría se trata de una conexión conceptual, ya que no se hace ninguna referencia a procesos transversales. Finalmente se trata de una conexión con tratamiento, ya que no se produce ninguna conversión entre registros.

Análisis del conocimiento en el subepisodio C3.2

Se identifican dos indicadores de conocimiento matemático. En primer lugar, la profesora hace evidente tener unos objetivos claros en relación a los contenidos que están trabajando [97] y [99], lo que se relaciona con el conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT). En segundo lugar, la profesora generaliza un resultado obtenido en el aula [99] y [103], lo que se relaciona con un conocimiento de la práctica matemática (KPM), ya que se hace énfasis no solo en el contenido sino también en prácticas matemáticas clave como el descubrimiento de patrones y la generalización de resultados.

En este subepisodio se produce una conexión que enriquece la construcción del conocimiento matemático, por lo que no se identifican tipologías de conocimiento del profesor que enriquezcan dicha construcción, además de las ya descritas en el subepisodio anterior. A continuación se muestra la Tabla 37 resumen del conocimiento identificado en este subepisodio.

Conocimiento explícito identificado		
KCT	[97][99]	Evidencia tener unos objetivo claros
KPM	[99][103]	Generaliza resultados obtenidos en el aula
Conocimiento para el enriquecimiento de la conexión		
-	-	-

Tabla 37. Resumen de conocimiento del subepisodio C3.2

4.4 Análisis del episodio 4

Definición del episodio y análisis de la conexión

Este episodio se produce también al realizar cálculos con potencias naturales de base entera. Si bien en el caso anterior se conectan diferentes formas de realizar potencias de base negativa, en este episodio se produce una conexión errónea entre las potencias de base positiva y las de base negativa. Esta conexión errónea que realizan los estudiantes es un síntoma de una conexión entre las potencias naturales de base negativa y cualquier potencia natural de base entera. La identificación de una única conexión A continuación, en la Tabla 38, se muestra la transcripción literal de esta conexión, que define el episodio.

Núm	Participante	Transcripción literal de la intervención
[104]	Profesora:	Bueno Asad, ¿entonces cómo queda eso?
[105]	Asad:	32.
[106]	Profesora:	32, porque eso es la magnitud, y el signo ¿qué?
[107]	Asad:	Negativo.
[108]	Profesora:	¿Cómo negativo? + por +, +. + por +, más; tengo dos +, ¿y qué queda suelto? Un más, con lo cual aquí...genial positivo.

Tabla 38. Transcripción literal del episodio C4

Al responder que el signo de 2^5 es negativo [107] Asad está estableciendo un enlace entre la regla para calcular el signo de potencias naturales de base negativa y el cálculo de una potencia natural de base entera. Sin embargo, la respuesta de la profesora [108] permite establecer un enlace coherente entre el cálculo que se pretende hacer (2^5) y la regla deducida en el episodio anterior. Al aplicar la propiedad asociativa al cálculo de la potencia de base positiva se hace evidente que al aplicar el mismo razonamiento que a las potencias de base negativa, se obtiene siempre un resultado positivo para cualquier exponente natural. A continuación, en la Figura 17, se muestra la red de enlaces asociada a esta conexión y en la Tabla 39 se describe los dos enlaces definidos.

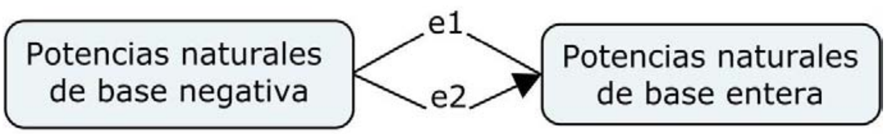

Figura 17. Red de enlaces del episodio C4

Enlace	Descripción
e1: Caso particular	Se interpreta erróneamente 2^5 como un caso particular de potencia de exponente impar de base negativa.
e2: Rasgo común	Se utiliza un elemento común (la

	propiedad asociativa) a las potencias de base entera, para hacer patente que en el caso de potencias de base positiva, el resultado será siempre positivo.

Tabla 39. Resumen de los enlaces para el episodio C4

La intervención del alumno muestra la sobre aplicación de una regla a un caso en el que no se aplica. Este tipo de errores forman parte de las conexiones inadecuadas que se pueden producir en el aula de matemáticas (Van Dooren et al, 2005). La respuesta de la profesora establece un enlace entre la técnica desarrollada anteriormente y la propiedad asociativa. Sin embargo, la conexión es parcial, ya que no se aprovecha el momento y la aplicación de la propiedad asociativa para hacer explícita la propiedad de las potencias de base positiva (o natural): toda potencia de base positiva es positiva. Tampoco se aprovecha el enlace para hacer énfasis en diferenciar las reglas que se aplican a bases negativas de las que se aplican a bases positivas.

Se considera que esta conexión es del tipo intramatemática, ya que no se refiere a ninguna situación exterior a las matemáticas, y conceptual, ya que se aplica una técnica desarrollada para los enteros negativos a los enteros positivos. Dado que el razonamiento se produce dentro de un registro simbólico se trata de una conexión con tratamiento.

Análisis del conocimiento en el episodio C4

Se identifican un indicador de conocimiento matemático (ver Tabla 40). La profesora proporciona una explicación clara basada en un razonamiento explicado previamente en la misma sesión de clase [108], lo que se relaciona con un conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT), ya que se hace énfasis en el razonamiento que se ha explicado anteriormente y por tanto muestra una conciencia de una representación adecuada para resolver la duda del alumno.

Además, se identifica que la conexión que se produce a partir de la intervención de Asad [107] se podría enriquecer si la profesora aprovechara el error del alumno para hacer énfasis en la propiedad general que se construyó en el fragmento anterior de la misma sesión de clase que se describe en el episodio 3. El error del alumno constituye una oportunidad para que se vuelva sobre la propiedad deducida anteriormente para las potencias de base negativa y se comparen con las potencias de base positiva. El aprovechamiento de la intervención del alumno se relaciona con un conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT) y el hecho de que esta intervención sea una concepción errónea del alumno se relaciona con el conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS).

Conocimiento explícito identificado		
KCT	[108]	Da una explicación clara
Conocimiento para el enriquecimiento de la conexión		
KCT		Aprovecha una intervención de los estudiantes para profundizar en un contenido
KCS		Identifica un error de un alumno

Tabla 40. Resumen de conocimiento del episodio 4

4.5 Análisis del episodio 5

Este episodio está definido por la conexión que se produce entre dos operaciones: -2^5 y $(-2)^5$. A raíz de la similitud en las representaciones de las dos operaciones –solo difieren en un paréntesis– se produce una discusión en clase en la que se identifican 5 subepisodios. En el primer subepisodio se produce una discusión sobre la identificación de la base de la potencia en la que se conectan diversas representaciones de las dos operaciones. En el segundo subepisodio se establece un símil entre la notación y el lenguaje matemático con la notación y el lenguaje musical. En el tercer subepisodio se conectan diferentes representaciones equivalentes de -2^5 y crece la confusión entre algunos alumnos. En el cuarto subepisodio, se conectan explícitamente las dos operaciones con la jerarquía de las operaciones. Finalmente, en el quinto subepisodio se produce una conexión entre las dos operaciones basada en el hecho de que dan el mismo resultado.

Subepisodio C5.1

Definición del subepisodio y análisis de la conexión

En el trascurso de la clase se produce una confusión entre -2^5 y $(-2)^5$. Se produce una conversación entre Anna y la profesora sobre cuál es el número que se replica en el caso -2^5 y cuál es la diferencia con $(-2)^5$. Para visualizar la diferencia la profesora utiliza otra representación equivalente a -2^5, que es $-(+2)^5$. Sin embargo, esta nueva representación no permite a Anna comprender la diferencia entre las dos operaciones. A continuación, la Tabla 41, muestra la transcripción literal de este subepisodio.

Núm	Participante	Transcripción literal de la intervención
[109]	Profesora:	Y ahora vamos a la parte que te preocupaba Miguel. ¿Qué estás leyendo tú aquí?
[110]	Miguel:	-2.
[111]	Profesora:	¿Y quién es el número que se replica? ¿Cuál es el número que se seguirá replicando, que seguirá saliendo varias veces?
[112]	Miguel:	El 2.
[113]	Profesora:	El 2. Atención todos a este problema Federico. Leamos lo que hay en la pizarra. El número que se replica es el 2. El menos no se replica. ¿Y por qué Anna la importancia de los paréntesis? Porque el menos no está dentro del paréntesis. ¿Sí lo vemos? Si quisiéramos que fuera el menos replicándose, tendríamos que haber puesto un paréntesis, pero en estos momentos lo único que se replica es el 2, o siendo purista el $+2$. ¿De acuerdo? El $+2$.
[114]	Anna:	¿Pero no es negativo?
[115]	Profesora:	Será negativo el resultado final, pero el número que se replica es el 2. Esto que tengo en la pizarra $-(2)^5$ y esto $-(+2)^5$ es lo mismo.
[116]	Anna:	¿Y por qué pone negativo?
[117]	Profesora:	Porque el número que se replica es el 2 y cuando tengamos este resultado replicado patapam, le cambiamos el signo.
[118]	Miguel:	(En voz baja): Porque no lleva el paréntesis.
[119]	Profesora:	Mira lo que voy a hacer, para que te quede claro. Miguel, ya se lo explico yo. Anna, mira cómo lo voy a resolver este problema, a ver si resolviéndolo te queda claro. Tapo el signo. El número que se replica es el 2: (escribe en la pizarra) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$. Tú ahora te puedes quejar y decirme: “Victoria, llevo un lio cuando pones el signo más y cuando no lo pones, y tienes toda la razón de quejarte, porque aquí en realidad con el que estamos trabajando es con el $+2$ [se conecta con el resultado anterior]. ¿Me permites que no le ponga el signo más a este 2 –al del enunciado–. ¿Me lo permites? Vale, damos por entendido entre tú y yo que es un $+2$, perfecto.
[120]	Anna:	Ya pero no entiendo porqué es un más si pone un signo negativo.
[121]	Profesora:	Porque este menos –el del enunciado– está fuera de la operación de potenciación. Está fuera. Tú dirás: ¿Cuándo estaría dentro, Victoria? Aquí –señala el caso en que el menos hace parte del paréntesis– porque lo bloquea, lo hace entrar dentro de la potencia.

Tabla 41. Transcripción literal del subepisodio C5.1

La profesora intenta relacionar diferentes operaciones con potencias naturales de enteros (ver Figura 18), lo que se puede ver de manera explícita cuando pregunta cuál es el elemento que se replica [111]. De hecho, durante todo el subepisodio queda patente que el objetivo de la profesora es dejar clara la base de cada potencia. Cuando Anna pregunta por qué la base ha de ser positiva si se está escribiendo con un signo negativo [114] y [116] establece un enlace entre dos operaciones -2^5 y $(-2)^5$, pero sobre todo entre diferentes formas de representar si se hace primero la potencia de 2 y después el opuesto, o si bien se hace la potencia de un número negativo (que es el opuesto de 2). De esta manera, la profesora establece cinco enlaces diferentes, uno para diferenciar los dos casos de manera explícita [113] y cuatro para mostrar representaciones equivalentes de la operación que se pretende realizar. A continuación, la Figura 18, muestra la red de enlaces asociada a esta conexión y en la Tabla 42 se describen los seis enlaces definidos.

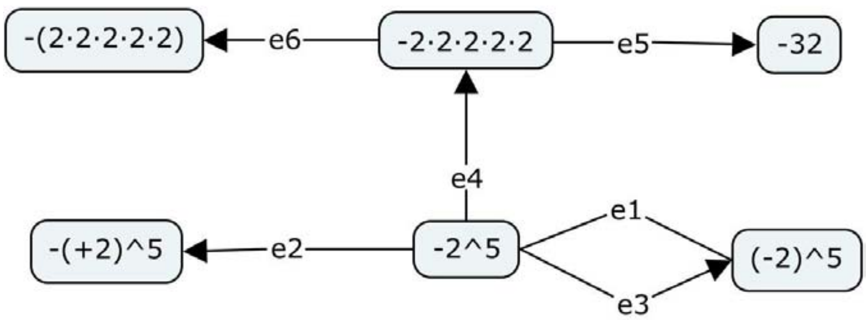

Figura 18. Red de enlaces asociada a la conexión C5.1

Enlace	Descripción
e1: Rasgo común	Anna establece un enlace implícito entre las dos operaciones que se representan en la red al preguntar por qué tiene un menos la operación -2^5 si la base es positiva.
e2: Representación equivalente	Con el objetivo de dejar más claro que la base de la potencia es $+2$, la profesora introduce una nueva notación que hace énfasis en la positividad de la base: $-(+2)^5$.
e3: Rasgo común	La profesora compara explícitamente -2^5 y $(-2)^5$ para dejar claro que existe una diferencia en las bases de cada operación.
e4: Representación equivalente	La profesora usa la representación de la potencia como producto repetido para mostrar que la base es $+2$.
e5: Representación equivalente	La profesora muestra el resultado para mostrar que primero se debe calcular la potencia de $+2$ y luego aplicar el cambio de signo.
e6: Representación equivalente	Finalmente, la profesora recurre a otra representación equivalente que refuerce la idea de que primero se realiza la potencia de $+2$ y a continuación se cambia el signo

Tabla 42. Resumen de los enlaces para el subepisodio C5.1

Estas dos operaciones tienen una coincidencia evidente desde el punto de vista de la notación, lo que produce en algunos alumnos un problema para diferenciarlas. En este fragmento la profesora pretende diferenciar las operaciones haciendo énfasis en diferenciar la base de la potencia. Así, busca que los alumnos vean que en el caso de $(-2)^5$ el elemento que se "replica" es el -2, mientras que en el caso de -2^5 el elemento que se replica es el $+2$. Sin embargo, aunque la profesora hace énfasis en esta diferencia, se producen intervenciones de los alumnos que hacen pensar que la relación existente entre -2^5; $-(+2)^5$ y $(-2)^5$ no queda del todo clara.

En el primer caso se trata de una potencia a la que se le cambia posteriormente el signo, en el segundo caso se trata la misma operación aunque en la representación aparecen dos signos, y en el tercer caso se trata únicamente de una potencia. El hecho de que las dos primeras representaciones coincidan establece enlaces (e2, e4, e5, e6) entre representaciones de una misma operación (y en consecuencia de un mismo concepto, la potenciación de números enteros).

Para que estos enlaces constituyan de forma explícita una conexión se debe establecer un vínculo de coherencia entre ellas. Para la profesora, el vínculo de coherencia consiste en identificar el elemento que se "replica". Esta interpretación es correcta, pero lleva a otra pregunta: ¿cómo identificar cuál es el elemento que se replica? Para ello, es necesario tener clara la jerarquía de las operaciones, que nos permite establecer reglas para que la escritura matemática sea inequívoca. Así pues, la profesora relaciona de forma adecuada las representaciones, pero no explicita la regla que nos permite identificar la base de la potencia.

Se considera que esta conexión es del tipo intramatemática, ya que no se refiere a ninguna situación exterior a las matemáticas, y conceptual, ya que se aplica una técnica desarrollada para los enteros negativos a los enteros positivos. Dado que la conexión surge de una confusión relacionada con la notación que se utiliza para diferenciar las dos operaciones, se trata de una conexión con tratamiento.

Análisis del conocimiento en el subepisodio C5.1

Se identifican tres indicadores de conocimiento matemático. En primer lugar, la profesora muestra conocer los contenidos que está trabajando y la notación asociada [113], ya que su explicación es siempre correcta desde un punto de vista matemático, lo que se relaciona con el conocimiento del contenido y de su estructura (KOTS). En segundo lugar, la profesora enfatiza la definición de potencia para que los alumnos empiecen por identificar la base [113], [115] y [117], lo que se relaciona con un conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT). Finalmente, la profesora identifica el bloqueo de Anna relacionado con el signo de la base [119] y [121], lo que se relaciona con un conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS).

Además, se identifica que la conexión que se produce a partir de la duda de Anna [114] se podría enriquecer si la profesora aprovechara la pregunta de la alumna para explorar otras perspectivas relacionadas con la dificultad de Anna. Aunque la profesora identifica que la alumna presenta un bloqueo relacionado con el signo de la base, no intenta explicar la composición de operaciones que se realizan desde otras perspectivas, como puede ser explicitar que hay dos operaciones que se pueden realizar en distinto orden, y que cada orden se expresa con una simbología diferente. Dicha exploración de diversas formas de entender las operaciones se relaciona con un conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS), ya que se relaciona de manera directa con bloqueos recurrentes en el tema de la aritmética con números enteros. A continuación, en la Tabla 43, se presenta un resumen del análisis del conocimiento para este subepisodio.

Conocimiento explícito identificado		
KOTS	[113]	Muestra conocimiento profundo del tema y de la notación asociada
KCT	[113][115][117]	Hace énfasis en la definición de un concepto
KCS	[119][121]	Identifica el bloqueo de un/a estudiante
Conocimiento para el enriquecimiento de la conexión		
KCS		Explora diferentes interpretaciones de un concepto problemático

Tabla 43. Resumen de conocimiento del subepisodio 5.1

Subepisodio C5.2

Definición del subepisodio y análisis de la conexión

Durante la discusión analizada en el subepisodio anterior la profesora establece una conexión entre la música y las matemáticas basada en la forma en la que se deben leer. A continuación, en la Tabla 44, se muestra la transcripción literal de este subepisodio.

Núm	Participante	Transcripción literal de la intervención
[122]	Profesora:	Por eso le he dicho a Pedro, es que esto es como la música, hay que saberlo leer.

Tabla 44. Transcripción literal del subepisodio C5.2

La profesora establece un enlace entre la música y las matemáticas que se basa en que ambos dominios de conocimiento comparten un rasgo en común, que es poseer un lenguaje propio y unas reglas que determinan la forma en que este lenguaje debe ser escrito y leído. A continuación, en la Figura 19 se muestra la red de enlaces asociada a esta conexión y en la Tabla 45 se describen los dos enlaces definidos.

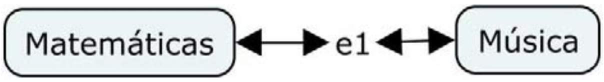

Figura 19. Red de enlaces asociada a la conexión C5.2

Enlace	Descripción
e1: Rasgo común	El enlace se produce al señalar una característica común de las matemáticas y de la música, que es poseer un lenguaje propio con unas reglas propias.

Tabla 45. Resumen de los enlaces para el subepisodio C5.2

La profesora introduce una referencia al lenguaje musical que puede ayudar a algunos alumnos (los que sepan algo sobre cómo funciona el lenguaje musical) a entender que es muy importante saber interpretar los símbolos en matemáticas. En este caso concreto, la introducción de un paréntesis permite diferenciar dos operaciones diferentes, en el caso de -2^5 realizar la potencia y después cambiar el signo y en el caso de $(-2)^5$ cambiar de signo y después realizar la potencia.

Se clasifica esta conexión como una conexión extramatemática, ya que relaciona un aspecto del funcionamiento de las matemáticas con un aspecto del funcionamiento de otro campo del conocimiento humano como es la música.

Análisis del conocimiento en el subepisodio C5.2

Se identifica un indicador de conocimiento matemático (ver Tabla 46). La profesora llama la atención de los alumnos sobre la similitud que existe entre las matemáticas y la música, ya que en ambos casos es necesario aprender una simbología y unas reglas de utilización de esta simbología para ser capaces de leer correctamente las expresiones escritas de ambas disciplinas [122]. Esta intervención de la profesora está relacionada con un conocimiento lateral del currículo (LCK), ya que relaciona el conocimiento de dos disciplinas que estudian los alumnos en la misma etapa escolar y en el mismo curso académico.

En este subepisodio se produce una conexión que enriquece la construcción del conocimiento matemático, por lo que no se identifican tipologías de conocimiento del profesor que enriquezcan dicha construcción, además de las ya descritas en el subepisodio anterior. A continuación se muestra la Tabla resumen 46 para el conocimiento identificado en este subepisodio.

Conocimiento explícito identificado		
LCK	[122]	Relaciona las matemáticas con otras disciplinas escolares que estudian los alumnos
Conocimiento para el enriquecimiento de la conexión		
-	-	-

Tabla 46. Resumen de conocimiento del subepisodio C5.2

Subepisodio C5.3

Definición del subepisodio y análisis de la conexión

En este caso, el foco deja de estar en la base, y pasa a ser qué es lo que está representando -2^5. La profesora establece una conexión entre tres representaciones de 2^5 y las tres representaciones correspondientes a -2^5. Ante esta propuesta de la profesora Anna muestra una interpretación procedimental. Finalmente, más alumnos muestran su falta de comprensión del significado de la conexión propuesta por la profesora. A continuación, en la Tabla 47, se muestra la transcripción literal de este subepisodio.

Núm	Participante	Transcripción literal de la intervención
[123]	Profesora:	Estábamos tú y yo Anna trabajando. Este resultado Anna, estamos de acuerdo las dos, nosotras dos que da 32. Bueno, vamos a poner el 32 y ahora este signo que llevamos tapando todo el rato se lo voy a añadir, pero se lo voy a añadir al resultado final. Y el resultado vuelve a ser el mismo pero por razones diferentes. $-2^5 = -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = -32$.
[124]	Anna:	¿Pero por qué se lo pones sólo al 2 del principio?
[125]	Profesora:	No se lo estoy poniendo al 2 del principio, se lo estoy poniendo al resultado (pone un paréntesis que agrupa los 5 doses). A ver si

		así te ayuda más.
[126]	Anna:	Ahh, vale. Tenemos que poner todos los doses entre paréntesis.
[127]	Profesora:	¿Todos lo doses? No, solamente el resultado de la multiplicación de todos los doses. No todos, no cada uno de los doses.
[128]	Varios alumnos:	No lo entiendo. [No acaba de estar claro si hay o no conexión]

Tabla 47. Transcripción literal del subepisodio C5.3

En primer lugar, la profesora establece enlaces entre tres representaciones equivalentes de 2^5. A continuación se establece un enlace entre tres representaciones de 2^5 y tres representaciones de -2^5. En respuesta a la explicación de la profesora Anna pregunta por qué se le pone un signo "-" solo al primer 2 del producto $-2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, estableciendo un enlace implícito con la operación $(-2) \cdot (-2) \cdot\ (-2) \cdot\ (-2) \cdot\ (-2)$. Finalmente, la profesora establece un nuevo enlace entre $-2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ y $-\ (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)$ con el objetivo de hacer énfasis en que el menos afecta a todo el producto (a la potencia 2^5). En la Figura 20 y la Tabla 48 se muestra la red de enlaces asociada a esta conexión y la tabla que describe los dos enlaces.

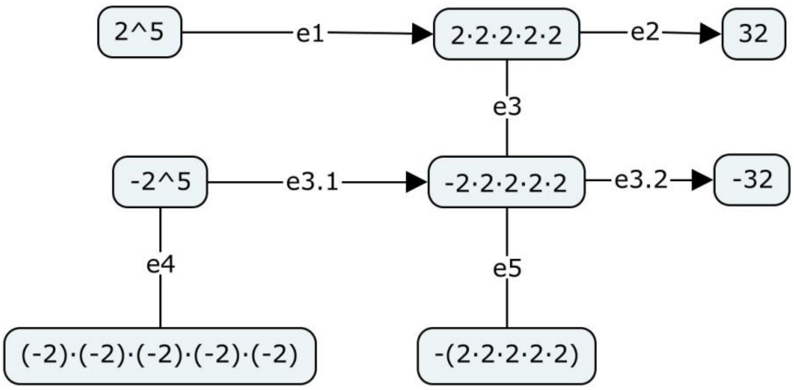

Figura 20. Red de enlaces del subepisodio C5.3

Enlace	Descripción
e1: Representación equivalente	Es la definición de potencia
e2: Representación equivalente	Se realiza el cálculo representado
e3: Implicación	La profesora establece una relación de implicación. Si tres representaciones son equivalentes, al añadir un signo "-" a la izquierda de todos ellos se obtienen también representaciones equivalentes.
e4: Rasgo común	Anna manifiesta no comprender la equivalencia entre -2^5 y $-2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$. Por tanto, evidencia no comprender la regla de implicación propuesta por la

	profesora. Implícitamente plantea la duda de por qué no cambiar el signo a todos los 2.
e5: Representación equivalente	Para reforzar la idea de la regla de implicación anterior, la profesora introduce una representación equivalente de $-2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)$ que refuerza la idea de un cambio de signo posterior a la multiplicación.

Tabla 48. Resumen de los enlaces para el subepisodio C5.3

La profesora intenta conectar tres representaciones diferentes de -2^5 (e2.1 y e2.2) volviendo al caso de las potencias de números naturales (e1 y e2), ya estudiado por los alumnos. Sin embargo, vuelve a aparecer el problema del fragmento anterior para definir el orden en que se deben realizar las operaciones. La profesora presenta tres representaciones equivalentes, que relaciona mediante una regla de implicación que depende de la identificación del orden en el que se realizan las operaciones de potenciación y de cambio de signo. En este caso se pone de manifiesto que la multiplicidad de las representaciones utilizadas hace que el tema sea más oscuro para los alumnos, tal y como se constata al final del episodio. Dado que este problema relacionado con el orden de las operaciones persiste, continúan apareciendo evidencias de la incomprensión de Anna y de otros alumnos de la clase [126] y [128].

Se clasifica esta conexión como una conexión de tipo intramatemática ya que no se introducen elementos externos a las matemáticas. Además, se trata de una conexión conceptual, ya que se intentan caracterizar dos operaciones en base a su representación. Dado que el registro utilizado al establecer los enlaces es siempre el mismo, se trata de una conexión con tratamiento.

Análisis del conocimiento en el subepisodio C5.3

Se identifican dos indicadores de conocimiento matemático. En primer lugar, la profesora muestra conocer los contenidos que está trabajando y la notación asociada [123], lo que se relaciona con el conocimiento del contenido y de su estructura (KOTS). En segundo lugar, la profesora utiliza diferentes representaciones de la operación -2^5 [123] con el objetivo de dar una explicación más clara a Anna, lo que se relaciona con un conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT).

Además, se identifica que la conexión que se produce a partir de la nueva explicación de la profesora [123] se podría enriquecer si la profesora explorara otras perspectivas relacionadas con la dificultad de Anna, como la que se identifica en el subepisodio 5.1. Igual que el caso 5.1 la exploración de diversas formas de entender las operaciones se relaciona con un conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS). A continuación se presenta una Tabla resumen 49, con el análisis del conocimiento para este subepisodio.

Conocimiento explícito identificado		
KOTS	[123]	Muestra conocimiento profundo del tema y de la notación asociada
KCT	[123][125][127]	Hace énfasis en la definición de un concepto
Conocimiento para el enriquecimiento de la conexión		
KCS		Explora diferentes interpretaciones de un concepto

Tabla 49. Resumen de conocimiento del subepisodio 5.3

Subepisodio C5.4

Definición del subepisodio y análisis de la conexión

En este subepisodio se establece una conexión entre las operaciones $(-2)^5$ y -2^5 y su interpretación en un modelo de desplazamiento. La profesora establece una interpretación en el modelo para cada una de las operaciones. $(-2)^5$ se corresponde así con bajar a sótano -2 y después elevar a 5, mientras que la operación -2^5 se corresponde con hacer la potencia y a continuación bajar al sótano correspondiente al resultado obtenido. La respuesta de la alumna no muestra referencias explícitas a que haya comprendido que existen dos operaciones diferentes que se realizan en orden inverso, sino que más bien parece una respuesta de tipo procedimental. A continuación, en la Tabla 50, se muestra la transcripción literal de este subepisodio.

Núm	**Participante**	**Transcripción literal de la intervención**
[129]	Profesora:	A ver Anna, todos tranquilos. Anna, este – (refiriéndose al $(-2)^5$) ¿a quién le cambia el signo? ¿A quién afecta? Al 2. Es decir, ya te estoy diciendo baja al sótano -2, y luego, cuando ya hayas bajado al sótano -2 haz la operación de elevar a la 5a. Ahora mi pregunta para ti es, este menos (refiriéndose al de -2^5) ¿a quién afecta? Le está afectando a todo este número, no sabes a qué sótano tienes que bajar, no lo sabes, hasta que no sepas cuánto vale este número.

[130]	Anna:	Ah vale, o sea, tienes que, ese menos es como si lo borraras, y queda sólo el 2^5 y cuando haces el 2^5 le pones el menos.

Tabla 50. Transcripción literal del subepisodio C5.4

La profesora empieza por establecer dos enlaces explícitos entre cada una de las dos representaciones que están causando dificultades a los alumnos (-2^5 y $(-2)^5$) y su interpretación en un modelo de desplazamiento, que ya ha sido utilizado durante la misma unidad didáctica. Mediante el establecimiento de estos enlaces se refuerza la idea de que la diferencia entre las dos representaciones consiste en el orden en el cual se realizan las operaciones de potenciación y de cambio de signo. Así, se establecen dos enlaces, uno explícito entre las dos operaciones que se realizan en el modelo de desplazamiento y otro implícito entre las dos operaciones representadas respectivamente por -2^5 y $(-2)^5$. En la Figura 21 se muestra la red de enlaces asociada a esta conexión y en la Tabla 51 se describen los dos enlaces definidos.

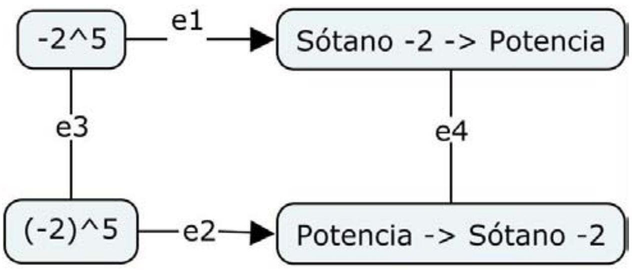

Figura 21. Red de enlaces del subepisodio C5.4

Enlace	Descripción
e1: Rasgo común	Se establece una relación entre (-2)^5 y su correspondencia en un modelo de desplazamiento, que es bajar al sótano -2 y a continuación realizar la potencia (que no se corresponde con ningún movimiento en el modelo)
e2: Rasgo común	Se establece una relación entre -2^5 y realizar la operación de potencia antes de bajar sótano correspondiente al resultado según el modelo de desplazamiento
e3: Rasgo común	Se comparan las dos operaciones que se realizan en el modelo. En cada caso las operaciones se realizan en un orden inverso
e4: Rasgo común	Se comparan dos representaciones de operaciones diferentes que comparten elementos comunes: realizar una potencia y un cambio de signo -2^5 (y a la inversa

	(-2)^5)

Tabla 51. Resumen de los enlaces para el subepisodio C5.4

La introducción por parte de la profesora del modelo de desplazamiento permite reforzar la idea de que hay dos operaciones diferenciadas que se comparten en las dos representaciones (el rasgo común del enlace 3). La operación de cambio de signo se corresponde con bajar al sótano correspondiente a la magnitud a la que precede el signo menos, mientras que la potenciación mantiene su significado en términos aritméticos. Aunque al introducir un nuevo significado para el cambio de signo se muestre que existen dos operaciones diferentes, el hecho de no introducir un significado coherente para la potenciación en el modelo de desplazamiento hace que la relación entre las representaciones simbólicas y el modelo no se pueda acabar de establecer.

Se considera que la conexión que se produce en este subepisodio permite establecer la diferencia entre las representaciones simbólicas asociadas a dos operaciones. Aunque se utilice un modelo de desplazamiento para hacer evidente la diferencia entre las operaciones, la lógica interna del modelo no es lo que determina que se pueda identificar que se producen dos operaciones diferenciadas, como queda evidenciado por el hecho de que no se le dé un significado coherente a la potenciación dentro del modelo. Por tanto, aunque se utilice un modelo extramatemático la conexión que se produce es intramatemática, conceptual con conversión, ya que se utilizan dos registros diferentes.

Análisis del conocimiento de episodio C5.4

Se identifica un indicador de conocimiento matemático. La profesora muestra conocer modelos reales relacionados con el tema que enseña [129], lo que se relaciona con el conocimiento del contenido y de su enseñanza (KCT). Sin embargo, se identifica que la conexión que se produce a partir de la utilización de un modelo de desplazamiento por parte de la profesora se podría enriquecer si la profesora estableciera diferencias lógicas claras entre el modelo que utiliza y las operaciones con números enteros. La multiplicación de números enteros entendida desde la perspectiva de modelos de desplazamiento o neutralización es problemática para los alumnos (Cid, 2003). Por tanto, se identifica que un conocimiento de las dificultades que tienen los alumnos al intentar establecer una relación lógica entre los modelos reales y la multiplicación de números enteros (KCS) podría ayudar a la profesora a usar los modelos de forma que no generen confusión en los alumnos (ver Tabla 52).

Conocimiento explícito identificado		
KCT	[129]	Conoce diferentes modelos asociados al tema que enseña
Conocimiento para el enriquecimiento de la conexión		
KCS		Conoce las dificultades que experimentan los alumnos al trabajar con algunas representaciones

Tabla 52. Resumen de conocimiento del subepisodio 5.4

Subepisodio C5.5

Definición del subepisodio y análisis de la conexión

En este subepisodio se produce una conexión entre -2^5 y $(-2)^5$ mediante un principio de transitividad. Un alumno pregunta por qué si las dos operaciones son diferentes dan el mismo resultado. La profesora propone al alumno un contraejemplo de más operaciones que sin ser idénticas producen el mismo resultado. A continuación, en la Tabla 53, se muestra la transcripción literal de este subepisodio.

Núm	Participante	Transcripción literal de la intervención
[131]	Federico:	Lo que no entiendo es por qué da el mismo resultado. O sea -32 en el b y en el c.
[132]	Profesora:	Porque hay muchas operaciones en mates que dan el mismo resultado y vienen de sitios diferentes, ¿te digo una? ¿2 y 2?
[133]	Federico:	4.
[134]	Profesora:	¿$10 - 6$?
[135]	Federico:	4.
[136]	Profesora:	Oye, tienes el mismo resultado, pero vienen de signos, de cosas diferentes. Bien pues este es un ejemplo. Dimitri, y la última.
[137]	Dimitri:	Pero al fin y al cabo es lo mismo que hacer lo de arriba.
[138]	Profesora:	No, no, no....Estoy totalmente en desacuerdo, porque, ¿aquí (b) la base es? -2, y en cambio. ¿aquí la base es…? 2. Son dos potencias totalmente diferentes, qué bueno, por alguna razón dan el mismo resultado.

Tabla 53. Transcripción literal del subepisodio C5.5

Las dos operaciones sobre cuya diferencia se lleva discutiendo a lo largo del episodio, producen el mismo resultado, lo que confunde a Federico. Su pregunta establece de manera implícita un enlace entre las dos operaciones que se representan mediante una relación de equivalencia: dos operaciones se relacionan si dan el mismo resultado. En respuesta a la pregunta del alumno la profesora afirma que esta relación no es válida, ya que hay muchas operaciones que dan el mismo resultado aunque la operación que se realiza no sea la misma. De esta manera se establece otro enlace entre el par de operaciones que se han discutido durante el episodio y otro par de operaciones que dan el mismo resultado: $2 + 2 = 4$ y $10 - 6 = 4$. En la Figura 22 se muestra la red de enlaces asociada a esta conexión y en la Tabla 54 se describen los dos enlaces definidos.

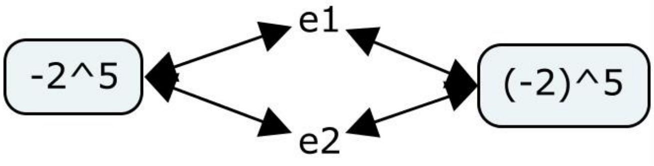

Figura 22. Red de enlaces del subepisodio C5.5

Enlace	Descripción
e1: Implicación	Se establece un enlace entre (-2)^5 y (-2)^5 por el hecho de dar el mismo resultado. Así, se establece una relación de equivalencia implícita mediante la cual dos representaciones están relacionadas si producen el mismo resultado numérico.
e2: Rasgo común	Se establece un enlace entre la relación propuesta por el alumno y otra relación entre operaciones que también producen el mismo resultado 2+2=4 y 10 – 6 = 4.

Tabla 54. Resumen de los enlaces para el subepisodio C5.5

El enlace propuesto por Federico se basa en un principio lógico y coherente como es la propiedad transitiva. Si las dos operaciones que se han analizado durante el episodio dan el mismo resultado es posible escribir $-2^5 = -32 = (-2)^5$ por lo que es lógico y coherente pensar que de alguna manera las dos operaciones son la misma. En efecto, es posible establecer una relación de equivalencia entre operaciones que produzcan un mismo resultado numérico. Sin embargo, la discusión de la clase iba dirigida a entender la diferencia de orden en las operaciones, independientemente del resultado.

Aparecen aspectos relevantes relacionados con la importancia que dan los alumnos a la obtención de un resultado numérico, y a la dificultad que encuentran en diferenciar procedimientos que producen el mismo resultado. Por tanto, se produce una conexión entre dos representaciones asociadas a operaciones diferentes que producen un mismo resultado. Esta conexión se produce de dos maneras diferentes (los dos enlaces). Por un lado las operaciones se relacionan al dar el mismo resultado, y por otro se diferencian por el hecho de ser la composición de dos operaciones (potenciación y cambio de signo) en orden inverso. Así, la conexión permite analizar las diferencias entre dos representaciones que han generado una discusión matemática profunda durante todo el episodio por lo que se trata de una conexión intramatemática conceptual con tratamiento.

Análisis del conocimiento en el subepisodio C5.5

Se identifican dos indicadores de conocimiento matemático. En primer lugar, la profesora muestra conocer en profundidad el tema que trabaja [132] y [136], lo que se relaciona con el conocimiento del contenido y de su estructura (KOTS). En segundo lugar, la profesora propone un caso equivalente para intentar resolver el bloqueo del alumno [132] y [134], lo que se relaciona con el conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT). Finalmente, la profesora responde a Dimitri haciendo énfasis en la definición de potencia y llamando la atención sobre la base de cada potencia [138], lo que se relaciona también con un conocimiento de los contenidos y de la enseñanza (KCT).

Además, se identifica que la conexión que se produce a partir de la intervención de Federico se podría enriquecer si la profesora identificara que el argumento de Federico es lógico y coherente y respondiera a su pregunta explicitando las similitudes y diferencias entre las dos operación que el alumno identifica como equivalentes. La capacidad para responder adecuadamente a las ideas que proponen los alumnos en el aula se relaciona con el conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS). A continuación se muestra una la Tabla 55 que resume el análisis del conocimiento para este subepisodio.

Conocimiento explícito identificado		
KOTS	[132][136]	Conoce en profundidad el tema que trabaja
KCT	[132][134]	Propone un caso equivalente
KCT	[138]	Hace énfasis en la definición de un concepto
Conocimiento para el enriquecimiento de la conexión		
KCS		Responde adecuadamente a una propuesta coherente de un alumno

Tabla 55. Resumen de conocimiento del subepisodio 5.5

4.6 Análisis del episodio 6

Este episodio se produce durante una sesión posterior a la del episodio 3. Mientras se resuelve en la pizarra la operación $(-1)^6$, se identifican tres subepisodios. En el primer subepisodio se conectan dos justificaciones de la regla general para las potencias de base negativa analizada en el episodio 5. En el segundo subepisodio se conecta la operación $(-1)^{36}$ con una interpretación errónea de la misma. Finalmente, en el tercer subepisodio se conectan dos procedimientos diferentes para la resolución de $(-1)^{36}$.

Subepisodio C6.1

Definición del subepisodio y análisis de la conexión

Durante la resolución de $(-1)^{36}$ la profesora pregunta a los alumnos si recuerdan la regla para calcular potencias naturales de base entera negativa. Lucas responde a la demanda de la profesora diciendo correctamente la regla. Dado que Lucas no da una explicación a la regla, la profesora hace énfasis en que las reglas tienen una explicación. A continuación, Pedro da una justificación, basada en la operación sucesiva de los 36 signos. La profesora responde recordando la justificación propuesta por Iván en el episodio 3, por lo que se genera una conexión entre la justificación propuesta por Pedro y la justificación propuesta por Iván. A continuación, en la Tabla 56, se muestra la transcripción literal del subepisodio.

Núm	Participante	Transcripción literal de la intervención
[138]	Lucas:	Siempre que te den el exponente, que es muy muy grande tienes que fijarte si es par o impar. Si es par, el número será con el signo más y si es impar pues menos.
[139]	Profesora:	¿Y por qué?
[140]	Lucas:	Porque es así la regla
[141]	Profesora:	Bien, pero las regla también las podemos explicar. La regla te la tienes súper bien sabida, pero Anna, explícale por qué, ¿tú te acuerdas? […]
[142]	Pedro:	Por ejemplo, ponemos los $36\ -1$. Y por ejemplo sería menos por menos igual a más, más por menos igual a menos, menos por menos igual a más, y así.
[143]	Profesora:	Yo quiero recordar el truco de Iván que a mí me moló un montón cuando nos lo explicó el otro día. Venga Iván recuérdanoslo.
[144]	Iván:	Que vas uniendo de 2 en 2, que es la propiedad asociativa. Vas uniendo de 2 en 2 los signos y te van saliendo.
[145]	Lucas:	Entonces es mejor haciéndolo así. Con este…
[146]	Profesora:	Claro, pero el truqui de Iván y el tuyo son el mismo, porque en

		realidad como tenemos 36 signos +, ¿cuántas parejas podemos hacer?
[147]	A1:	2.
[148]	Profesora:	Bueno, 18 parejas de 2. Es verdad, entonces con el truqui de Iván, resulta que oye…Lo que dice Pedro es cierto, pero es como mucho más pesado. Entonces con estos 2 (señalando los 2 primeros paréntesis nos fabricamos 2 signos más) y sabemos que los más, en términos de regla de los signos es de lo mejor que nos podría pasar, porque no afectan casi en nada, ¿verdad? Y con estos otros 2 menos (señalando el 3º y 4º) me haré con otro signo más. ¿Y cuántos signos más me puedo fabricar? 18. Bueno, pues tenemos 18, y como todos son mas, lo que podemos hacer es la regla asociativa de los signos Pedro y entonces nos quedan sólo más, entonces al final el resultado es más y la magnitud es 1 y por eso esto es +1.

Tabla 56. Transcripción literal del subepisodio C6.1

La justificación que propone Pedro de la regla propuesta por Lucas [142] establece un enlace entre la regla y su justificación, que se mantiene implícito hasta la última intervención, en tanto que la profesora ni valida ni rechaza dicha justificación al escuchar la propuesta de Pedro. Seguidamente, la profesora explicita a Iván que repita su truco [143], estableciendo así un segundo enlace entre la regla enunciada por Lucas y una segunda justificación. Este enlace se hace explícito en la última intervención de la profesora en que explica detalladamente la justificación del método a partir de la idea de Iván. Existe un tercer enlace entre las dos justificaciones ya que se explicita que el "truco" de Pedro también es válido aunque sea más pesado [148]. En la Figura 23 se muestra la red de enlaces asociada a esta conexión y la Tabla 57 los describe.

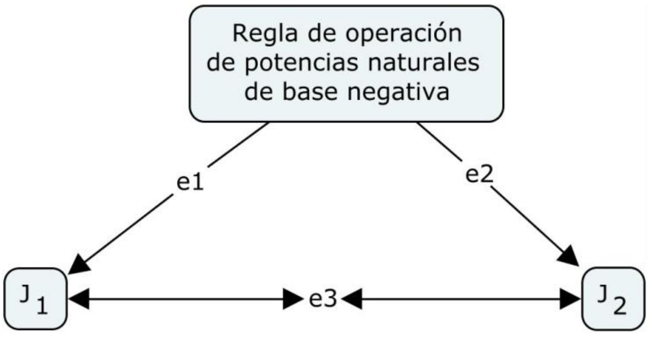

Figura 23. Red de enlaces del subepisodio C6.1

Enlace	Descripción
e1: Justificación	La justificación J1 que propone Pedro permite justificar la regla expuesta por Lucas, ya que establece un patrón que se puede generalizar por inducción.

e2: Justificación	La justificación J2 de Iván permite justificar la regla sin utilizar una regla de inducción.
e3: Justificación	Las justificaciones J1 y J2 son justificaciones de la regla, aunque se valora más positivamente J2.

Tabla 57. Resumen de los enlaces para el subepisodio C6.1

Los tres enlaces que definen esta conexión tienen un papel diferente en la construcción de conocimiento matemático que se produce en el aula. Por un lado, los enlaces e1 y e3 se establecen de manera superficial, a partir de una única frase de la profesora que valida la justificación J1 propuesta por Pedro [148]. Sin embargo, el segundo enlace tiene una especial relevancia, ya que la profesora pide explícitamente a Iván que le recuerde al resto del grupo su “truco”, para luego hacer un razonamiento detallado del mismo.

La profesora hace una valoración explícita [148] sobre la conveniencia de J2 en comparación con J1 *–es mucho más pesado*- por lo que el énfasis de la conexión recae en la comparación de diferentes procedimientos asociados a una operación concreta en base a un criterio de generalización. De manera explícita, la profesora da más valor a la justificación J2 ya que permite justificar de manera transparente una regla general para el cálculo de potencias naturales de enteros negativos.

Se clasifica esta conexión como una conexión intramatemática dado que no interviene ningún elemento extramatemático. Dentro de esta categoría se trata de una conexión relativa a procesos, ya que aunque la conexión ayude a profundizar en el conocimiento de las potencias de números enteros, las valoraciones que hace la profesora en e3 indica que el énfasis de la conexión recae en la generalización de resultados, lo que constituye un proceso transversal en matemáticas.

Análisis del conocimiento en el subepisodio C6.1

Se identifican tres indicadores de conocimiento matemático. En primer lugar, la profesora muestra identificar la validez de procedimientos alternativos [146], lo que se relaciona con un conocimiento de los contenidos y de su estructura (KOTS). En segundo lugar la profesora hace referencia a un resultado obtenido previamente [143] en clase, lo que se relaciona con un conocimiento de los contenidos y de su enseñanza (KCT). Finalmente la profesora compara las dos justificaciones J1 y J2 en base las posibilidades que brindar para establecer un resultado general [148], lo que se relaciona con un conocimiento de la práctica matemática (KPM).

En este subepisodio se produce una conexión que enriquece la construcción del conocimiento matemático, por lo que no se identifican tipologías de conocimiento del profesor que enriquezcan dicha construcción. A continuación se muestra la Tabla 58 resumen del conocimiento identificado en este subepisodio.

Conocimiento explícito identificado		
KOTS	[146]	Identifica la validez de procedimientos alternativos
KCT	[143]	Hace referencia a un resultado obtenido previamente en clase
KPM	[148]	Compara dos justificaciones en base a un criterio de generalización.
Conocimiento para el enriquecimiento de la conexión		
-	-	-

Tabla 58. Resumen de conocimiento del subepisodio C6.1

Subepisodio C6.2

Definición del subepisodio y análisis de la conexión

Este subepisodio se encuentra incrustado en el subepisodio anterior. Cuando la profesora pregunta por la justificación de la regla enunciada por Lucas, Anna interviene estableciendo una conexión entre dos operaciones diferentes: $(-1)\cdot 36$ y $(-1)^{36}$. Durante su propia intervención, Anna afirma haberse dado cuenta del error, a lo que la profesora responde que no se preocupe, que es un error común, lo que también establece una conexión entre las dos operaciones. A continuación, en la Tabla 59, se muestra la transcripción literal del subepisodio.

Núm	**Participante**	**Transcripción literal de la intervención**
[149]	Profesora:	Bien, pero las reglas también las podemos explicar. La regla te la tienes súper bien sabida, pero Anna, explícale por qué, ¿tú te acuerdas?
[150]	Anna:	O sea, yo iba a decir otra cosa, pero ahora me he dado cuenta que no. Yo he hecho 1 por 36 y luego lo he hecho 36 veces el – y me ha dado +. Pero no era así.
[151]	Profesora:	No te preocupes, nos pasa a todos.

Tabla 59. Transcripción literal del subepisodio C6.2

La intervención de Anna [150] establece un enlace entre $(-1) \cdot 36$ y $(-1)^{36}$ basado en la confusión del papel multiplicativo que tiene el 36 en las dos operaciones, que es multiplicar por 36 en la primera y multiplicar 36 veces en la segunda. Al expresar que ya sabe que lo que había pensado no es correcto establece un segundo enlace entre las dos operaciones. Este segundo enlace es explícito ya que aunque se acepta la similitud de las dos representaciones se explicita que las operaciones son correctas. La intervención posterior de la profesora [151] refuerza este segundo enlace. La Figura 24 muestra la red de enlaces que define la conexión y la Tabla 60 el resumen de la descripción de cada enlace.

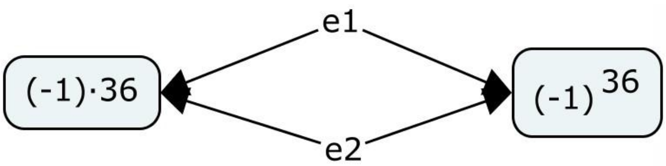

Figura 24. Red de enlaces para el subepisodio C6.2

Enlace	Descripción
e1: Rasgo común	La alumna describe una confusión entre $(-1) \cdot 36$ y $(-1)^{36}$ en la que se confunde el papel del 36 en la multiplicación que se realiza en cada caso
e2: Rasgo común	La clarificación de la alumna y la respuesta de la profesora relacionan las dos operaciones por tener diferentes elementos en común pero manifiestan que hay una diferencia, aunque ésta no se describa de forma explícita

Tabla 60. Resumen de los enlaces del subepisodio C6.2

En el enlace e1 propuesto por Anna [150], se puede detectar una dificultad común relacionada con confundir potencias con multiplicaciones. Por lo tanto, aunque se trate de una relación errónea, el enlace e1 representa un síntoma de una conexión más profunda entre las dos operaciones. Al establecerse un segundo enlace, la intervención de la alumna [150] y la posterior respuesta de la profesora [151] hacen explícito que la relación establecida en e1 es errónea, aunque no se profundice para el resto del grupo en la importancia de evitar esta confusión.

Se clasifica esta conexión como intramatemática, ya que no se hace ninguna referencia a aspectos extramatemáticos. Dentro de esta categoría se trata de una conexión conceptual, ya que no se hace énfasis en ningún proceso transversal. Finalmente se trata de una conexión con tratamiento, ya que no se producen cambios de registro.

Análisis del conocimiento en el subepisodio C6.2

Se identifica un indicador de conocimiento matemático. Cuando la profesora manifiesta que el error de Anna es algo que nos pasa a todos, muestra conocer que lo identifica como un error común en las matemáticas escolares, lo que se relaciona con un conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS).

Además, se identifica que la conexión que se produce a partir de la intervención de Anna [150] se podría enriquecer si la profesora aprovechara el error de la alumna para hacer énfasis a toda la clase sobre la importancia de no confundir exponentes con factores multiplicativos. El error de la alumna constituye una oportunidad para profundizar en un error que la profesora identifica como común, por lo que es posible que más alumnos de la clase lo hayan cometido durante la unidad didáctica que se trabaja, lo que se relaciona con un conocimiento del contenido y de la enseñanza. A continuación se muestra la Tabla 61 como resumen del conocimiento identificado en este subepisodio.

Conocimiento explícito identificado		
KCS	[151]	Identifica un error común de los estudiantes
Conocimiento para el enriquecimiento de la conexión		
KCT	-	Aprovecha un error de un/a estudiante para resolver un error común

Tabla 61. Resumen de conocimiento del subepisodio C6.2

Subepisodio C6.3

Definición del subepisodio y análisis de la conexión

En este subepisodio se produce una conexión entre dos procedimientos para resolver la operación $(-1)^6$. A continuación de la resolución analizada en el subepisodio C6.1 un alumno pregunta que si era necesario poner $(-1)(-1)$ ... 36 veces, por lo que se produce una conexión entre el procedimiento P1, de aplicar directamente la regla general y el procedimiento P2 de escribir la operación que representa $(-1)^{36}$ y a continuación resolverla. A continuación se muestra, en la Tabla 62, la transcripción literal del subepisodio.

Núm	Participante	Transcripción literal de la intervención
[152]	A1:	Pero una cosa, ¿en este problema no teníamos que poner $(-1)(-1)(-1)$ 36 veces?
[153]	Profesora:	No era necesario.

Tabla 62. Transcripción literal del subepisodio C6.3

La intervención del alumno [152] muestra que no entiende como equivalente el procedimiento de aplicar directamente el método general P1 discutido en el subepisodio C6.1 con el método P2 en el que se escriben todos los factores de la potencia. Se establece así un enlace entre dos procedimientos equivalentes en base a la diferencia en los pasos que se llevan a cabo. La intervención de la profesora [153] está dirigida a que el alumno vea que no es necesario escribir todos los factores, ya que se dispone de un método general que hace que este paso no sea necesario, por lo que se produce un enlace basado en la equivalencia de los dos procedimientos. A continuación, la Figura 25 y la Tabla 63 muestran la red de enlaces y el resumen de los mismos.

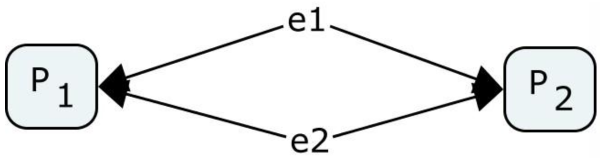

Figura 25. Red de enlaces para el subepisodio C6.3

Enlace	Descripción
e1: Rasgo común	El estudiante establece un enlace entre el procedimiento P1 y el procedimiento P2 basado en resaltar las diferencias entre los dos métodos
e2: Procedimientos equivalentes	La intervención de la profesora indica implícitamente al alumno que los dos procedimientos que describe son equivalentes

Tabla 63. Resumen de los enlaces para el subepisodio C6.3

La conexión que se produce entre los dos procedimientos se relaciona directamente con la aplicación y la justificación de la regla discutida en el episodio C6.1 ya que la equivalencia entre P1 y P2 se basa en la aplicación de la regla general que se ha justificado en el aula en dos ocasiones diferentes. Por tanto, la incomprensión del alumno está relacionada con la comprensión profunda de la regla general para las potencias naturales de base negativa.

Se clasifica esta conexión como una conexión intramatemática ya que no se hace referencia a ningún aspecto externo a las matemáticas. Dentro de esta categoría se trata de una conexión conceptual, ya que no se centra en la justificación de la equivalencia entre métodos, sino en un caso particular en que una regla general permite ahorrase pasos en un procedimiento de resolución. Finalmente, se trata de una conexión con tratamiento, ya que no se produce ninguna transformación entre registros diferentes.

Análisis del conocimiento en el subepisodio C6.3

Se identifica un indicador de conocimiento matemático. Cuando la profesora responde directamente al alumno que no es necesario poner todos los factores de la potencia [153] muestra entender los contenidos que trabaja y su estructura (KOTS).

Además, se identifica que la conexión que se produce a partir de la intervención del alumno [152] se podría enriquecer si la profesora aprovechara la pregunta del alumno para hacer énfasis en que la regla general que se ha justificado anteriormente, en la misma sesión, sirve para obviar algunos pasos que se llevaban a cabo en el procedimiento inicial P1. El aprovechamiento de la pregunta del alumno se relaciona con un conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT). A continuación, en la Tabla 64, se muestra un resumen del conocimiento identificado en este subepisodio.

Conocimiento explícito identificado		
KOTS	[152]	Muestra conocer en profundidad los contenidos con los que trabaja
Conocimiento para el enriquecimiento de la conexión		
KCT		Aprovecha una intervención de un alumno para hacer énfasis en la aplicación de un procedimiento

Tabla 64. Resumen de conocimiento del subepisodio C6.3

4.7 Análisis del episodio 7

Durante la corrección de un control sobre potencias enteras la profesora se produce una discusión en clase relacionada con la división de potencias de la misma base, en la que se identifican dos subepisodios. En el primer subepisodio se conecta la regla de cálculo para la división de potencias de la misma base con la definición de potencia. En el segundo subepisodio se conecta la regla estudiada para el caso en que el exponente del numerador es mayor al exponente del denominador con el caso en que es mayor el exponente del denominador.

Subepisodio C7.1

Definición de subepisodio y análisis de la conexión

Al corregir en clase el ejercicio $3^3 \cdot 3^2$, que hacía parte de un control, la profesora conecta la técnica para el producto de potencias de la misma base (que era lo que se pedía en el control) con la propia definición de potencia, que permite realizar el cálculo sin aplicar la regla, teniendo en cuenta la jerarquía de las operaciones. La profesora hace énfasis en que si no se recuerda una regla o un procedimiento se debe buscar formas alternativas de resolver las actividades, aplicando los conocimientos que se posean. A continuación, en la Tabla 65, se muestra la transcripción literal del subepisodio.

Núm	Participante	Transcripción literal de la intervención
[154]	Profesora:	Entonces ustedes, esto ya lo sabían desde el tema 1, y yo no veo cuál es la dificultad en ver que $3^3 \cdot 3^2$ es 3 elevado a (dibuja un 5).
[155]	A1:	232, yo lo he hecho diferente…….
[156]	Profesora:	Claro, pero es que hay muchas maneras de hacerlo. Yo he hecho una. Tranquilos, tranquilos…Bajamos las manos, acabo la explicación. ¿Estamos todos? Esto era la manera pam, la manera más directa aplicando las potencias. Porque tú estás en el tema de potencias. Bien. Pero tú estás el día del examen y dices ostras es que estoy muy apurado y tengo que dar este dato, tengo que dar este resultado…oye, si tú estás apurado y tú no te acuerdas de esta regla espabila, y no quiero ver a nadie Héctor, que me diga ohh es que yo no lo sabía hacer. ¿Cómo que yo no lo sabía hacer? ¿Tú no sabes cuánto es 3^2, Federico? ¿Cuánto es? Dímelo.
[157]	Federico:	$3 \cdot 3 \cdot 3$.
[158]	Profesora:	3^2 te pedí solamente.
[159]	Federico:	$3 \cdot 3$.
[160]	Profesora:	$3 \cdot 3$. Y esto da…9. 3 por 3 genial 9. ¿Y tú sabes cuánto es 3^3 Oriol?
[161]	Oriol:	$3 \cdot 3 \cdot 3$.
[162]	Profesora:	¿Y esto cuánto da, Oriol?
[163]	Oriol:	27.
[164]	Profesora:	27, perfecto. Y entonces aquellas personas que no supieron hacer este primer apartado. Mi pregunta para ellos es ¿tú no sabes hacer $9 \cdot 27$? (La profesora pone la multiplicación en la pizarra de la forma tradicional de primaria) ¿Tú no sabes hacer esto? (Hace la multiplicación en la pizarra) ¿Y tú no sabes poner que esto era 243? ¡Espabila! Los dos resultados son válidos. Son lo mismo, son la misma cosa. Si os soy sincera quería que lo hicierais de esta primera manera (3^5) ya que estamos en el tema de potencias. Pero tú tienes que ser resolutivo, ¿vale? Tú tienes que ser resolutivo, y si tú no te acuerdas de las potencias, bien,

		no pasa nada, pero imagina y échale horas.

Tabla 65. Transcripción literal del subepisodio C7.1

Cuando la profesora hace explícito que existen muchas maneras de hacerlo [156] se abre la posibilidad de establecer diferentes enlaces entre diferentes procedimientos equivalentes. En concreto, al preguntar a Héctor si sabe cuánto es 3^2 establece un enlace entre el procedimiento consistente en sumar los exponentes (P1) y el procedimiento consistente en calcular cada potencia por separado y a continuación hacer la multiplicación (P2). A continuación, en la Figura 26 se muestra la red de enlaces asociada a esta conexión y en la Tabla 66 se describe el enlace definido.

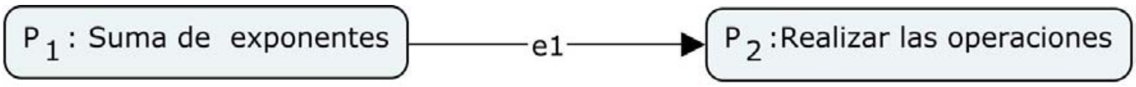

Figura 26. Red de enlaces asociada a la conexión C7.1

Enlace	Descripción
e1: Procedimientos equivalentes	La intervención de la profesora relaciona los procedimientos P1 y P2.

Tabla 66. Resumen de los enlaces para el subepisodio C7.1

Después de hacer la explicación del procedimiento P1 para toda la clase, la profesora enfatiza que siempre se debe buscar alguna forma de proceder a partir de los conocimientos que se posean –espabila, hay que ser resolutivo– [156] y [164]. Así, se considera la conexión como una conexión intramatemática, ya que no interviene ningún elemento extramatemático. Dentro de esta categoría se trata de una conexión relativa a procesos, ya que la profesora enfatiza en el hecho de buscar procedimientos alternativos para avanzar en un cálculo o en la resolución de un problema. La profesora transmite una forma de actuar en matemáticas que consiste en ser capaz de relacionar diferentes representaciones de un concepto para conseguir avanzar en un problema o en un cálculo. Por tanto, la conexión trasciende el caso concreto de las operaciones con potencias, por lo que no se considera que sea únicamente una conexión conceptual.

Análisis del conocimiento en el subepisodio C7.1

Se identifican dos indicadores de conocimiento matemático. En primer lugar, la profesora muestra identificar procedimientos alternativos relacionados con un concepto [156], lo que se relaciona con un conocimiento de los contenidos y de su estructura

(KOTS). En segundo lugar la profesora hace énfasis en la utilización de las diferentes interpretaciones y representaciones de un concepto [164], lo que se relaciona con un conocimiento de la práctica matemática (KPM).

En este subepisodio se produce una conexión que enriquece la construcción de conocimiento matemático, por lo que no se identifican indicadores de conocimiento del profesor que enriquezcan dicha construcción. A continuación se muestra la Tabla 67, resumen del conocimiento identificado en este subepisodio.

Conocimiento explícito identificado		
KOTS	[146]	Identifica procedimientos alternativos
KPM	[148]	Hace énfasis en la utilización de las diferentes interpretaciones y representaciones de un concepto
Conocimiento para el enriquecimiento de la conexión		
-	-	-

Tabla 67. Resumen de conocimiento del subepisodio 7.1

Subepisodio C7.2

Definición de subepisodio y análisis de la conexión

Al resolver un ejercicio sobre la división de potencias de la misma base, Iván pregunta si cuando la p es más pequeña que la q en la fórmula a^p/a^q queda una potencia de exponente negativo. Esta intervención establece una conexión entre la división de potencias de la misma base en la que el exponente del numerador sea mayor que el exponente del denominador, y el caso general de cualquier división de potencias de la misma base de exponentes naturales. La profesora responde al alumno que aunque se trate de un contenido que se trabajará en el curso siguiente se puede demostrar de forma rápida, y procede a realizar la demostración. A continuación, la Tabla 68 muestra la transcripción literal del subepisodio.

Núm	**Participante**	**Transcripción literal de la intervención**
[165]	Iván:	Si en el de división…
[166]	Profesora:	Ahora llegaremos, ahora llegaremos.
[167]	Iván:	No pero es una cosa de esto (refiriéndose a la fórmula). ¿Si la p es más pequeña que la q, en ese caso sería número negativo?
[168]	Profesora:	Y eso lo veremos en segundo. Es decir, tu pregunta es. Lo hago para Iván y quien me siga perfecto. Tu pregunta es, si yo tengo, si yo tuviera, Victoria, si estoy entendiendo bien. Si yo tuviera por ejemplo $2^3/2^7$, oye Victoria, ¿esto es realmente 2^{-4}? ¿Sí?

		¿Eso es lo que diciendo? Y mi respuesta para ti es que sí. ¿Quieres que te lo demuestre? En un momento, muy rápido. Vamos a seguir por este lado (refiriéndose a la izquierda), ya sabes que nosotros lo matemáticos vamos a derecha izquierda según queramos. ¿2^3 qué era Eric? $2 \cdot 2 \cdot 2$. ¿Y 2^7? $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$. $2 \cdot 2 \cdot 2/2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ ¿Y ahora qué?
[169]	Alumna A1:	Los 2 de la …ehhh, tachas los 2 de arriba y de abajo: 1,2,3 y 1,2,3.
[170]	Profesora:	Iván, ¿qué queda en el numerador? Yo te ayudo. Escribe un 1 en el numerador. ¿Qué queda en el denominador?
[171]	Iván:	$2 \cdot 2 = 4; 4 \cdot 2 = 8, 16.$
[172]	Profesora:	O 2^4 no? Pues ahora acabas de ver una cosa que tú verás en segundo. Y quiero que te acuerdes cuando llegues a segundo que un exponente negativo, y me ha gustado mucho tu aportación, un exponente negativo, un exponente negativo es lo mismo que poner 1 partido entre el exponente en positivo (señalando la pizarra). Vale, pero eso ya lo trabajaremos en segundo.

Tabla 68. Transcripción literal del subepisodio C7.2

La intervención de Iván [165] inicia un enlace entre las divisiones de potencias de la misma base en que el exponente del numerador es mayor al exponente del denominador y las divisiones de potencias de la misma base en que el exponente del denominador es mayor al exponente del denominador. La respuesta de la profesora [168] refuerza este enlace ya que confirma la hipótesis que plantea el estudiante, con lo que establece otro enlace con las potencias de exponente negativo [172]. En la Figura 27 se muestra la red de enlaces asociada a esta conexión y la Tabla 69 que describe los dos enlaces definidos.

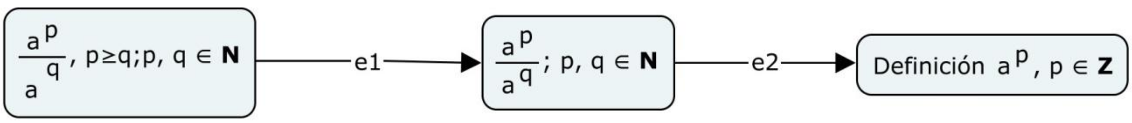

Figura 27. Red de enlaces asociada a la conexión C7.2

Enlace	Descripción
e1: Generalización	La intervención inicial de Iván junto con la respuesta de la profesora generalizan el cálculo de la división de potencias de la misma base
e2: Justificación	La justificación que hace la profesora de la regla general, implica la definición de las potencias de exponente negativo

Tabla 69. Resumen de los enlaces para el subepisodio C7.2

Los dos enlaces que constituyen esta definición se relacionan con la profundización en el conocimiento de las operaciones con potencias enteras de la misma base. La justificación que hace la profesora de la hipótesis planteada por Iván le permite introducir un concepto de forma significativa, conectando las potencias de base natural con la suma y resta de números enteros al operar los exponentes. Por tanto, se considera que se trata de una conexión intramatemática ya que no interviene ningún elemento extramatemático.

Dentro de esta categoría se considera que se trata de una conexión conceptual, ya que no se hace énfasis en una forma general de proceder en matemáticas, sino que se trata de un caso particular. Dado que no se realiza ningún cambio de registro, se considera que se trata de una conexión conceptual con tratamiento.

Análisis del conocimiento en el subepisodio C7.2

Se identifican tres indicadores de conocimiento matemático. En primer lugar, la profesora muestra conocer los contenidos que enseña a un nivel avanzado, ya que propone demostrar la hipótesis del alumno, dominando los contenidos y las formas de proceder desde una perspectiva avanzada. En segundo lugar, los contenidos del curso siguiente, lo que se relaciona con un conocimiento vertical del currículo (VCK). En tercer lugar, la profesora aprovecha la intervención de un alumno para introducir de forma significativa y justificada las potencias de exponente negativo, lo que se relaciona con un conocimiento del contenido y de la enseñanza.

Además, se identifica que la conexión que se produce a partir de la intervención de Iván [165], se podría enriquecer si la profesora llamara la atención del resto de los alumnos sobre la aparición justificada de los exponentes negativos. La intervención del estudiante constituye una oportunidad para introducir las potencias negativas de manera significativa. Este aprovechamiento de la intervención del alumno para enfatizar y justificar un resultado que los alumnos pueden encontrar arbitrario se relaciona con un conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS). A continuación, en la Tabla 70, se muestra un resumen del conocimiento identificado en este subepisodio.

Conocimiento explícito identificado		
KOTS	[168][172]	Conoce los contenidos de manera profunda
VCK	[172]	Prevé contenidos de cursos posteriores

KCT	[168][172]	Aprovecha la intervención de un alumno para enfatizar un contenido matemático importante
Conocimiento para el enriquecimiento de la conexión		
KCS	-	Llama la atención de los alumnos sobre un hecho

Tabla 70. Resumen de conocimiento del subepisodio C7.2

4.8 Análisis del episodio 8

Este episodio se produce durante la corrección en clase del ejercicio $(-5)^7/(-5)^7$ que los alumnos debían haber hecho de deberes. En esta corrección se identifican tres subepisodios. En el primer subepisodio se conectan tres procedimientos para realizar la operación. En el segundo subepisodio, se conectan los elementos neutros de la suma y de la multiplicación. Finalmente, en el tercer episodio se conecta la operación que se pretende resolver con la regla para calcular el signo de una potencia impar de base negativa.

Subepisodio C8.1

Definición de subepisodio y análisis de la conexión

Durante la resolución de $(-5)^7/(-5)^7$ la profesora pregunta a los alumnos de qué manera se puede resolver esta operación. En primer lugar A1 propone realizar el cálculo del numerador y el denominador y a continuación realizar la división (P1). A continuación A2 propone restar los exponentes y usar el resultado $a^0 = 1$ (P2). A3 propone escribir todo los factores de la multiplicación que se representa en cada potencia y a continuación simplificar factor a factor (P3). Finalmente, Martí propone usar el resultado $a/a = 1$, ya que independientemente del resultado del numerador y del denominador, serán resultados iguales, por lo que el cociente ha de ser 1 (P4). La profesora valida las cuatro propuestas de los alumnos como procedimientos equivalentes, y enfatiza la propuesta de Martí. A continuación, en la Tabla 71, se muestra la transcripción literal del subepisodio.

Núm	Participante	Transcripción literal de la intervención
[173]	A1:	Averiguar primero que da cada uno.
[174]	Profesora:	Vale.
[175]	A1:	Y después, o sea y el restar los exponentes que para uno, me daría cero y al final daría uno.
[176]	Profesora:	Guardo memoria eh de lo que me has dicho.
[177]	A2:	Yo iba a hacer como había dicho Marta, poner los números así

		(indica con la mano arriba y abajo) y tacharlos.
[178]	Profesora:	Vale ¿qué más cosas? Yo creo que todos tenemos razón ¿verdad?
[179]	Martí:	No, yo… Pues como eran dos números iguales, es como hacer 2 entre 2 y da 1.
[180]	Profesora:	A mí de todas las opciones, que todas son buenas, yo creo que la de Martí es como muy sensata, porque Martí nos está diciendo en realidad: me da igual lo que sea $(-5)^7$, me da exactamente lo mismo. ¿Todo el mundo lo ve? ¿Por qué le da lo mismo a Martí? Porque dice: como en el numerador y el denominador voy a tener la misma cosa, voy a tener la misma magnitud, resulta que cuando cancele, resulta que cuando cancele, me va a salir arriba o abajo exactamente lo mismo (-5) con (-5)…. Y abajo tengo exactamente los mismos (-5) ¿Sí, todos? ¿Vale? Entonces, ¿qué es lo que dice, Marta? Marta dice, cojo uno de aquí y lo cancelo con uno de aquí (cada -5 del numerados con cada -5 del denominador), pun pun, tin tin, perfecto… y entonces arriba ¿qué me queda, Marta? ¿Marta? 1.

Tabla 71. Transcripción literal del subepisodio C8.1

Cuando la profesora dice que todas las opciones son buenas está estableciendo enlaces implícitos entre los cuatro procedimientos. En el caso de P1, P3 y P4 el enlace que permite ver la equivalencia entre los procedimientos es el propio procedimiento P4, que garantiza que dividir un número entero entre sí mismo da 1 como resultado. La diferencia entre P1, P3 y P4 está en el momento en el que se aplica la propiedad. En P4 la propiedad se aplica de manera directa, en el caso de P3 se escriben todos los factores y a continuación se aplica la propiedad factor a factor, y en el caso de P1 se realiza previamente el cálculo de la potencia a continuación se aplica la regla. El único enlace que aparece explícitamente es el que se produce entre P3 y P4 por parte de la profesora [180].

Sin embargo, los enlaces que se producen entre P1, P3 y P4 por una lado y P2 por otro son de una naturaleza diferente. En este caso la regla $a/a = 1$ se relaciona con la regla para la división de potencias de la misma base $a^p/a^q = a^{p-q}$, ya que es a partir de esta regla que se justifica la propiedad $a^0 = 1$. Estos enlaces no aparecen de forma explícita en el episodio. En la Figura 28 y en la Tabla 72 se muestra la red de enlaces asociada a esta conexión sus descriptores.

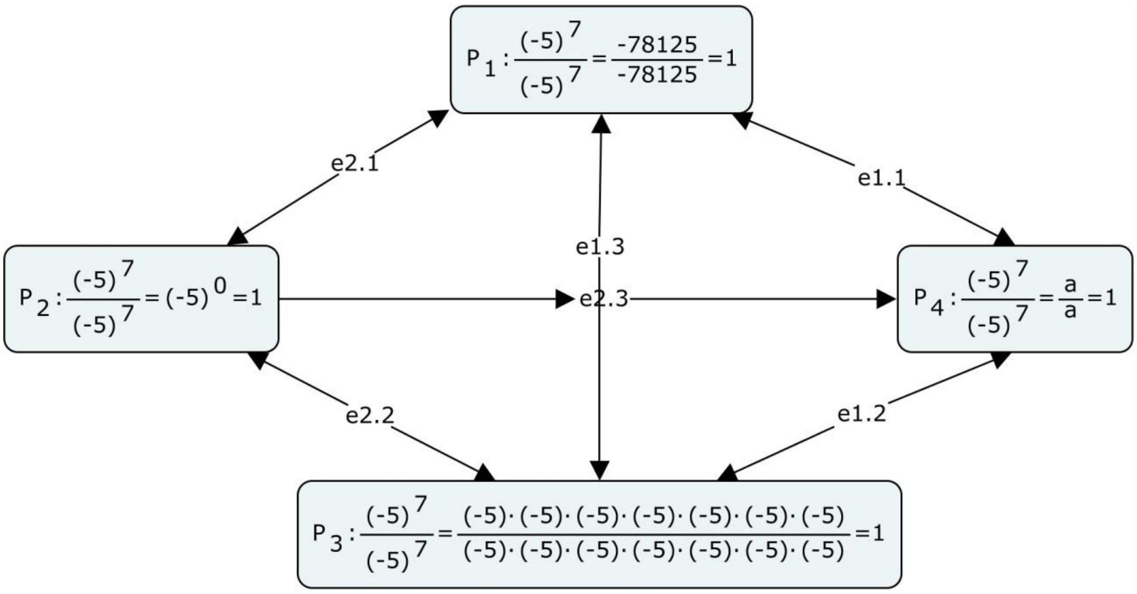

Figura 28. Red de enlaces asociada a la conexión C8.1

Enlace	Descripción
e1 (e1.1, e1.2 y e1.3): Procedimientos equivalentes	Los tres enlaces se basan en la propiedad $a/a = 1$
e2 (e2.1, e2.2 y e2.3): Procedimientos equivalentes	Los tres enlaces se basan en la justificación de $a^0 = 1$

Tabla 72. Resumen de los enlaces para el subepisodio C8.1

La conexión que define este subepisodio se divide en dos partes, definidas por cada uno de los enlaces. El primer enlace, aunque no se haga explícito en cada caso, queda claro con la explicación que hace la profesora de la propuesta de Marta [180]. El segundo enlace, sin embargo no se explicita, por lo que se identifica que se pierde una oportunidad para justificar la regla $a^0 = 1$, que causa dificultades entre los estudiantes, como todas las reglas que no tienen una justificación trivial, y que se asocian con la idea que tienen algunos alumnos de que las matemáticas son un conocimiento basado en la aplicación arbitraria de procedimientos.

Se considera que se trata de una conexión intramatemática, ya que no interviene ningún elemento extramatemático. Dentro de esta categoría se trata de una conexión conceptual, ya que no se enfatiza en un proceso transversal. Finalmente, se trata de una conexión con tratamiento, ya que no se produce un cambio de registro.

Análisis del conocimiento en el subepisodio C8.1

Se identifican tres indicadores de conocimiento matemático. En primer lugar, la profesora muestra un conocimiento profundo del tema (KOTS) al pedir más formas de resolución y hacer explícito que son todas equivalentes [180]. En segundo lugar, la profesora aprovecha la intervención de Martí para remarcar un resultado importante en matemáticas [180], lo que se relaciona con un conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT). En tercer lugar la profesora establece un juicio de valor sobre los cuatro procedimientos equivalentes *–lo que dice Martí es como muy sensato-* [180], lo que se relaciona con un conocimiento de la práctica matemática (KPM), ya que se resalta el resultado que permite ver con más claridad la relación entre los 4 procedimientos.

Además, se identifica que la conexión que se produce a partir de las propuestas de los alumnos, se podría enriquecer si la profesora aprovechara las intervenciones de los alumnos para profundizar en la justificación de un resultado ($a^0 = 1$), lo que se relaciona con un conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT). Dado que el resultado anterior es un resultado que causa dificultades en los estudiantes, la profundización en la justificación anterior se relaciona también con un conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS). También se podría enriquecer si la profesora hiciera referencia a la discusión analizada en el episodio 7, donde se trató la justificación de la regla operación para divisiones de potencias de la misma base, lo que se relaciona con un conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT). A continuación, en la Tabla 73, se muestra un resumen del conocimiento identificado en este subepisodio.

Conocimiento explícito identificado		
KOTS	[180]	Conoce los contenidos de manera profunda
KCT	[180]	Aprovecha la intervención de un alumno para remarcar un resultado matemático
KPM	[180]	Establece una valoración de diferentes procedimientos en base a su “sensatez”
Conocimiento para el enriquecimiento de la conexión		
KCT	-	Aprovecha las intervenciones de los alumnos para remarcan un contenido matemático importante
KCS	-	Aprovecha las intervenciones de los alumnos para enfatizar un resultado que puede ser problemático para los alumnos
KCT	-	Hace referencia a discusiones que se han hecho antes en el aula

Tabla 73. Resumen de conocimiento del subepisodio C8.1

Subepisodio C8.2

Definición de subepisodio y análisis de la conexión

Este subepisodio está incrustado en el subepisodio C8.1, ya que las intervenciones que permiten identificar la conexión están intercaladas en las intervenciones del subepisodio anterior. El subepisodio queda definido por una conexión entre el elemento neutro para la multiplicación en Z y el elemento neutro para la suma en Z. Al explicitar el procedimiento P3 del subepisodio C8.1 la profesora pregunta a Anna qué queda en el denominador al eliminar todos los factores del denominador. Después de unos segundos de duda, Anna responde "*cero*", con lo que establece una conexión entre el uno como elemento neutro de la multiplicación con el cero como elemento neutro de la suma. A continuación, la profesora explica a la alumna por qué no puede ser cero el factor que quedar en el denominador. En la Tabla 74 se muestra la transcripción literal del subepisodio.

Núm	Participante	Transcripción literal de la intervención
[181]	Profesora:	Entonces, ¿qué es lo que dice Marta? Marta dice, cojo uno de aquí y lo cancelo con uno de aquí (cada -5 del numerador con cada -5 del denominador), pun pun, tin tin, perfecto… y entonces, arriba, ¿qué me queda Marta? ¿Marta? 1 ¿y abajo?
[182]	Anna:	(Duda)… ¿0?
[183]	Profesora:	No, no queda 0.
[184]	A1:	Creo que es como lo de los primeros meses que nos enseñaste que no se ponía 0 se ponía 1.
[185]	Profesora:	Son unos, cierto. Anna, son 1, porque en realidad lo que estas teniendo… Si aquí yo dejara un 0, quiere decir que está como escondido ¿verdad?
[186]	Anna:	Sí.
[187]	Profesora:	Sí, y tendrás cero por todo este carro $(-5 \cdot -5 \cdot -5 \cdot -5 \ldots)$ y ¿Cero por cualquier cosa que es?
[188]	Anna:	0.
[189]	Profesora:	Pero aquí no tengo cero, tengo todo este carro ¿si? Entonces tengo un 1. De todas formas es mucho más fácil verlo de la siguiente manera. Si yo tengo 5 pizzas elevado a la 7 y las divido entre 5 elevado a la 7 niños. A cada niño le toca una pizza ¿no? Pues si las tengo con un signo negativo, eso tampoco va cambiar mucho ¿no? ¿Todos entendidos?

Tabla 74. Transcripción literal del subepisodio C8.2

Al responder cero a la pregunta de la profesora [182], Anna establece un enlace entre el uno como elemento neutro para la multiplicación y el cero como elemento neutro de la suma. Este enlace se establece en base a un rasgo común de los dos elementos neutros: ambos aparecen en contextos en los que los alumnos pueden interpretar que no queda nada. En el caso del uno, al simplificar una fracción, o al resolver una ecuación nos aparecen casos en los que "desaparecen" todos los factores multiplicativos, y por tanto queda únicamente el elemento neutro para la multiplicación. En el caso del cero, al resolver una ecuación existen casos en que "desaparecen" todos los sumandos a un lado de la ecuación, por lo que queda únicamente el elemento neutro para la suma. Además, hay que tener en cuenta que si desaparecen todos los factores, es lógico pensar que no queda nada, lo que se puede asociar más directamente con el cero que con el uno.

La respuesta de la profesora a la intervención de Anna [185] y [189] establece también un enlace entre el uno y el cero basado en sus diferencias. La profesora hace énfasis en que las operaciones con las que se trabaja al hacer la simplificación son la multiplicación [185] y la división [189]. Por un lado muestra a la alumna que dado que el cero en una multiplicación anula al resto de factores no puede ser que haya un cero dentro de los factores [185]. Por otro lado justifica que al dividir un número entre sí mismo el resultado siempre es uno a partir de un ejemplo de reparto. La Figura 29 y la Tabla 75 muestran la cadena de enlaces que define la conexión y el resumen de la descripción de cada enlace.

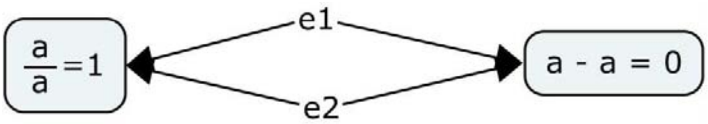

Figura 29. Red de enlaces asociada a la conexión C8.2

Enlace	Descripción
e1: Rasgo común	La intervención de Anna establece un enlace entre el 1 y el 0 basado en el hecho de no quedar "nada" en una multiplicación o en una suma.
e2: Rasgo común	La profesora aclara la diferencia en base a dos razonamientos. Por un lado muestra que el 0 anula todas las multiplicaciones y por otro recurre a un modelo de reparto para justificar que $a/a = 1$

Tabla 75. Resumen de los enlaces para el subepisodio C8.2

Al explicar que no puede quedar cero en la simplificación de una fracción, la profesora utiliza un razonamiento de reversibilidad [185] que se utiliza en muchas situaciones en matemáticas. Para verificar la validez de un resultado, comprueba si este resultado es coherente con la situación inicial. Si al simplificar queda un cero, quiere decir que el cero era uno de los factores, por lo que todo el denominador era cero desde el principio, lo cual no tiene ningún sentido. Sin embargo, el énfasis del enlace que propone la profesora no está en la utilización de este principio de reversibilidad, sino en la diferencia entre el cero y el uno.

Se considera que la conexión es una conexión intramatemática, ya que no intervienen elementos extramatemáticos, aunque se utilice un modelo de reparto, la lógica de la situación de reparto no es la que determina las similitudes o diferencias entre el 1 y el 0. Dentro de esta categoría se trata de una conexión conceptual, dado que el razonamiento transversal que se utiliza no tiene un papel protagonista. Dentro de las conexiones conceptuales se trata de una conexión con tratamiento, ya que no se produce ningún cambio de registro

Análisis del conocimiento en el subepisodio C8.2

Se identifican tres indicadores de conocimiento matemático. En primer lugar la profesora muestra conocer profundamente el tema que enseña al mostrar diversas interpretaciones de las operaciones [189] y al realizar el razonamiento de reversibilidad [185], lo que se relaciona con un conocimiento del contenido y de su estructura (KOTS). En segundo lugar, la profesora aprovecha la intervención de Anna para remarcar un resultado matemático importante [185] y [189], lo que se relaciona con un conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT). En tercer lugar, la profesora hace énfasis en un resultado problemático para los alumnos en general [185] y [189] lo que se relaciona con un conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS).

En este subepisodio se produce una conexión que enriquece la construcción de conocimiento matemático, por lo que no se identifican indicadores del conocimiento del profesor que enriquezcan dicha construcción. A continuación, en la Tabla 76 se muestra el resumen del conocimiento identificado en este subepisodio.

Conocimiento explícito identificado		
KOTS	[185]	Conoce los contenidos de manera profunda

KCT	[185][189]	Aprovecha la intervención de un alumno para remarcar un resultado matemático
KCS	[185][189]	Hace énfasis en un resultado problemático para los alumnos
Conocimiento para el enriquecimiento de la conexión		
-	-	-

Tabla 76. Resumen de conocimiento del subepisodio C8.2

Subepisodio C8.3

Definición de subepisodio y análisis de la conexión

Al finalizar la corrección de la operación $(-5)^7/(-5)^7$ un alumno pregunta si el resultado final no debería ser negativo, estableciendo así una conexión entre la operación que se resuelve y la regla para el cálculo del signo de potencias impares de base negativa. A continuación, la profesora responde que hay la misma cantidad de signos en el denominador y en el numerador por lo que el resultado es positivo, reinterpretando la conexión surgida por la intervención del alumno. A continuación, en la Tabla 77 se muestra la transcripción literal del subepisodio.

Núm	Participante	Transcripción literal de la intervención
[190]	Profesora:	Pues ya tenemos los deberes corregidos. Y ahora sacan la libreta y apuntan la teoría.
[191]	A1:	¿No da menos?
[192]	Profesora:	No, porque tiene la misma cantidad de signos negativos arriba y abajo.
[193]	A1:	(llama a la profesora para enseñarle su ejercicio, esta se acerca y le resuelve la duda)

Tabla 77. Transcripción literal del subepisodio C8.3

La intervención del alumno [191] establece un enlace implícito entre la operación $(-5)^7/(-5)^7$ y la regla para calcular el signo de las potencias de base negativa. Si se realizan las operaciones en el numerador y en el denominador habría que aplicar la regla de los signos para potencias naturales de base negativa, y en tal caso, quedaría negativo tanto el numerador como el denominador. Al responder al alumno [192], la profesora pretende que el alumno vea que hay la misma cantidad de signos negativos tanto en el numerador como en el denominador, por lo que se pueden eliminar aplicando la propiedad del subepisodio C8.1. La Figura 30 y la Tabla 78 muestran la red de enlaces que define la conexión y el resumen de la descripción de cada enlace.

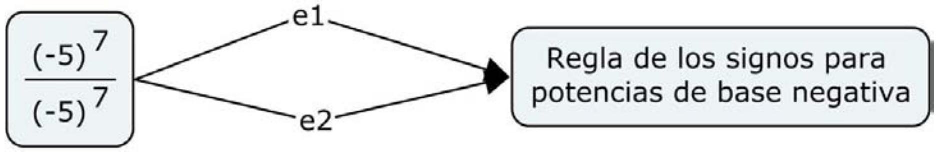

Figura 30. Red de enlaces asociada a la conexión C8.3

Enlace	Descripción
e1: Rasgo común	La intervención de A1 establece un enlace entre $(-5^7)/(-5^7)$ y la regla de cálculo para las potencias naturales de base negativa. La aplicación de esta regla no había aparecido en ninguno de los procedimientos alternativos analizados en el subepisodio C8.1.
e2: Rasgo común	La profesora establece un enlace entre la aplicación de la regla y el procedimiento de simplificar factores aplicado a los signos. Se extiende la simplificación de factores numéricos a la simplificación de signo negativo.

Tabla 78. Resumen de los enlaces para el subepisodio C8.3

En el enlace que se establece a partir de la intervención de A1 [191], no queda claro si el alumno se refiere al resultado final o al cálculo del numerador i/o del denominador. En cada uno de estos casos la relación que define el enlace sería diferente. En el primer caso se trataría de una aplicación errónea de la regla para el cálculo del signo de potencias naturales de base negativa, ya que estaría extendiendo el signo del numerador y del denominador al resultado de calcular toda la fracción. En el segundo caso se trataría de una propuesta de cálculo de la división similar a la propuesta en el procedimiento P1 del subepisodio C8.1. El enlace que se establece a partir de la respuesta de la profesora no hace explícita la relación entre la simplificación de factores numéricos y la factorización de signos.

Se clasifica esta conexión como intramatemática, ya que no se hacen referencias a aspectos extramatemáticos. Dentro de esta categoría se trata de una conexión conceptual, ya que no se hace énfasis en ningún proceso transversal. Finalmente, se trata de una conexión con tratamiento, ya que no se producen cambios de registro.

Análisis del conocimiento en el subepisodio C8.3

Se identifican dos indicadores de conocimiento matemático. Cuando la profesora manifiesta que no da negativo ya que hay la misma cantidad de signos arriba y abajo, introduce una forma de simplificar símbolos que no se había introducido antes y que hace patente que la profesora conoce en profundidad el contenido que enseña (KOTS). Además, al aprovechar la intervención del alumno para enfatizar un resultado matemático (que los signos también se pueden simplificar) la profesora muestra un conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT).

Además, se identifica que la conexión que define el subepisodio se puede enriquecer si la profesora indaga en qué quiere decir exactamente el estudiante cuando se refiere a que debe dar un resultado negativo, lo que se relaciona con un conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT). También se identifica que la conexión se podría enriquecer si la profesora hiciera explícita para el resto de los alumnos la justificación de la simplificación de signos, que puede generar problemas de cálculo (KCS). Esto se relaciona con un conocimiento del contenido y de los alumnos. A continuación, en la Tabla 79 se muestra el resumen del conocimiento identificado en este subepisodio.

Conocimiento explícito identificado		
KOTS	[193]	Conoce los contenidos de manera profunda
KCT	[193]	Aprovecha la intervención de un alumno para remarcar un resultado matemático
Conocimiento para el enriquecimiento de la conexión		
KCT	-	Aprovecha la intervención de un alumno para remarcar un resultado matemático
KCS	-	Justifica un resultado que puede ser problemático para los alumnos

Tabla 79. Resumen de conocimiento del subepisodio C8.3

4.9 Análisis del episodio 9

Definición del episodio y análisis de la conexión

Este episodio se produce durante un repaso de las raíces cuadradas de números naturales. Asad [194] pregunta qué pasa cuando las raíces cuadradas no son exactas. A partir de su intervención, se produce una conversación con la profesora en la que se conectan diferentes procedimientos para calcular raíces no exactas de números naturales. A continuación, en la Tabla 80, se muestra la transcripción literal del subepisodio.

Núm	Participante	Transcripción literal de la intervención
[194]	Asad:	¿Hay una raíz cuadrada, pero que no es un número por ejemplo el 49?
[195]	Profesora:	Aja… Un cuadrado perfecto.
[196]	Asad:	¿Cuando no es un cuadrado perfecto qué pasa?
[197]	Profesora:	Se pueden hacer las raíces cuadradas, lo que pasa…
[198]	Asad:	¿Es decimal?
[199]	Profesora:	Sí, sí salen decimales, eh… a veces salen decimales que los veremos en el tema siguiente un poco más o menos complicados si? Pero, antiguamente cuando mis padres estudiaban en el colegio sí que es verdad que les explicaban cómo hacer las raíces cuadradas, yo también fui de las últimas que enganché, me explicaron cómo hacer las raíces cuadradas, pero ahora dijéramos los que más o menos ordenan lo que tenemos que estudiar, parece ser que han decidido que esto no lo expliquemos, porque estamos en una era con mucha tecnología, que si lo necesitamos, utilizamos las calculadoras y nosotros nos dedicaremos a otras cosas, sabes?, pero bueno todo está bien eh… saber, si tuviéramos tiempo claro que lo haríamos. Se puede hacer, existe un procedimiento para explicarlo.
[200]	Asad:	Sí, es que…
[201]	Profesora:	Nos coge demasiado tiempo, dime!
[202]	Asad:	Es que vi en un libro, creo que fue el mates del año pasado, que si era por ejemplo 40… 40, pues sería entre, ponía 6 más pequeño que *x*.
[203]	Profesora:	Ah!... Pero eso es otra cosa, eso es por aproximación entonces eso sí que lo veremos, pero no calcularemos el valor exacto con decimales.
[204]	Asad:	Ah vale.
[205]	Profesora:	Que se puede calcular también.

Tabla 80. Transcripción literal del episodio C9

La respuesta de la profesora [197] y [199] a la primera pregunta de Asad [196] y [198] establece un enlace entre las raíces cuadradas de cuadrados perfectos y el algoritmo estándar para el cálculo de raíces cuadradas para cualquier número natural. Posteriormente, el alumno establece un segundo enlace, también implícito, con otro procedimiento para el cálculo aproximado de raíces cuadradas de cualquier número natural [202]. Este segundo enlace es reforzado por la profesora al afirmar que ese procedimiento sí que lo trabajarán posteriormente. La Figura 31 y la Tabla 81 muestran la red de enlaces que define la conexión y el resumen de la descripción de cada enlace.

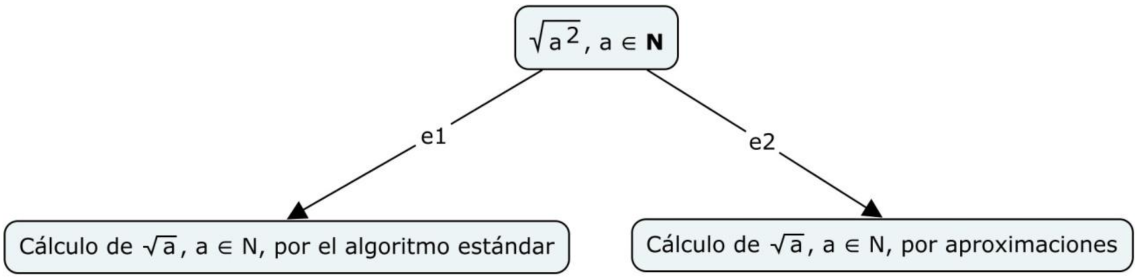

Figura 31. Red de enlaces asociada a la conexión C.9

Enlace	Descripción
e1: Procedimiento equivalente	La profesora establece un enlace explícito entre el cálculo de las raíces cuadradas de números cuadrados perfectos con el algoritmo estándar para el cálculo de la raíz cuadrada de cualquier número natural.
e2: Procedimiento equivalente	El alumno establece un enlace entre el cálculo de de las raíces cuadradas de números cuadrados perfectos con la aproximación decimal de la raíz para cualquier número natural.

Tabla 81. Resumen de los enlaces para el episodio C9

Los dos enlaces que se producen en este episodio conectan el cálculo de raíces cuadradas de cuadrados perfectos con el cálculo de raíces cuadradas para cualquier número natural. Esta ampliación del concepto de raíz cuadrada es relevante en dos sentidos. Por un lado, mediante el cálculo de raíces cuadradas de números naturales aparecen de manera natural los números irracionales ($\sqrt{2}, \sqrt{3}$ ...). En segundo lugar, la generalización de la raíz cuadrada a cualquier natural abre la puerta a la generalización de la raíz cuadrada para cualquier racional positivo y posteriormente para cualquier real positivo. Además, es relevante la valoración que hace la profesora sobre la evolución de los contenidos curriculares y su relación con la tecnología.

Se clasifica esta conexión como intramatemática, ya que los aspectos extramatemáticos que aparecen (curriculares) no son determinantes en los enlaces que se establecen. Dentro de esta categoría, se trata de una conexión conceptual, ay que no se hace énfasis en ningún proceso transversal. Finalmente, se trata de una conexión con tratamiento, ya que no se producen cambios de registro.

Análisis del conocimiento en el episodio C9

Se identifican dos indicadores de conocimiento matemático. Cuando la profesora valora la evolución muestra un conocimiento vertical del currículo ya que conoce cómo evolucionan los contenidos matemáticos a lo largo del currículo (VCK). Cuando la profesora afirma que el procedimiento propuesto por el alumno lo estudiarán posteriormente, evidencia una vez más un conocimiento relacionado con los conocimiento matemáticos que se trabajan en el aula de secundaria, lo que se relaciona con un conocimiento vertical del currículo (VCK).

Además, se identifica que la conexión que se produce a partir de la conversación entre Asad y la profesora se podría enriquecer si la profesora aprovechara para mostrar a los alumnos que al calcular raíces cuadradas de números naturales, en muchos casos se obtienen números decimales con infinitos decimales diferentes, lo que constituye una introducción significativa a los números irracionales, y se relaciona con un conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCS). También se podría enriquecer la conexión si la profesora explicitara a qué se refiere al decir que se puede calcular el valor exacto de las raíces, ya que tal y como lo dice en clase puede dar a pensar a los alumnos que todas las raíces dan un resultado exacto, lo que genera confusión en el caso de las raíces que son irracionales. Esta explicitación se relaciona con un conocimiento de los contenidos y de los estudiantes (KCS). A continuación, se muestra una Tabla 82 que resume del conocimiento identificado en este subepisodio.

Conocimiento explícito identificado		
VCK	[199]	Conoce la evolución del currículo
VCK	[203]	Conoce la progresión de los contenidos matemáticos a lo largo del currículo
Conocimiento para el enriquecimiento de la conexión		
KCT	-	Aprovecha la intervención de un alumno para introducir un concepto matemático
KCS	-	Explica detalladamente afirmaciones que pueden ser problemáticas para los estudiantes

Tabla 82. Resumen de conocimiento del episodio C9

4.10 Análisis del episodio 10

Definición de episodio y análisis de la conexión

Este episodio se produce durante la corrección de $\sqrt{100}$ en la pizarra. Cuando la profesora pregunta el resultado de esta operación, una aluna responde que el resultado es 50. A partir de aquí se producen diferentes intervenciones en las que tanto otros alumnos como la profesora hacen énfasis en la definición de la raíz para mostrar a la alumna su error. Así, se produce un enlace entre la operación raíz cuadrada y la operación dividir entre dos. A continuación, en la Tabla 83, se muestra la transcripción literal del episodio.

Núm	Participante	Transcripción literal de la intervención
[206]	Profesora:	Lo vamos a trabajar… ¿Y la de 100, chicos?
[207]	A1:	10.
[208]	Anna	50.
[209]	Varios alumnos:	¡ 10!
[210]	Profesora:	50 dicen por aquí…
[211]	Varios alumnos	¡ 10!
[212]	Anna:	¡ 50!
[213]	Profesora:	10 ... 10 ¡Anna!
[214]	A2:	(Le comenta a Anna): ¿50 por 50?
[215]	Anna	¡Ah! Claro.
[216]	Profesora:	Es lo que te pasó entes con el exponente, haces 50 por 2 pero es 10 por 10 ¿eh?
[217]	A3:	Yo sabía eso, yo en un examen…
[218]	A4:	¡Ala! ¡10 por 10 = 100!

Tabla 83. Transcripción literal del episodio C10

La primera intervención de Anna [208] establece un enlace entre la raíz cuadrada y la división entre 2. Este enlace se produce por el rasgo que comparten la potencia y la multiplicación. Para resolver una raíz cuadrada, se debe encontrar un número que multiplicado por sí mismo (apareciendo así dos veces tal número en la multiplicación) dé el radicando, mientras que en el resultado de Anna propone un número que multiplicado por 2 da el radicando. La pregunta de A2 [214] establece también un enlace entre la raíz cuadrada y la división entre dos que se centra en la definición de raíz cuadrada para hacer evidente la diferencia entre las dos operaciones. La intervención de la profesora [216] refuerza este último enlace. La Figura 32 y la Tabla 84 muestran la red de enlaces que definen la conexión y el resumen de la descripción de cada enlace.

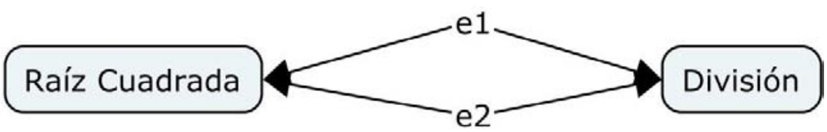

Figura 32. Red de enlaces asociada a la conexión C.10

Enlace	Descripción
e1: Rasgo común	Anna establece un enlace implícito entre la raíz cuadrada y la división entre 2 basado en la similitud que hay entre multiplicar dos factores iguales y multiplicar un factor por 2.
e2: Rasgo común	Un alumno hace énfasis en la definición de raíz cuadrada para mostrar a la alumna la diferencia entre multiplicar dos factores iguales y multiplicar un factor por 2.

Tabla 84. Resumen de los enlaces para el episodio C10

En esta conexión se producen intervenciones de diferentes alumnos y de la profesora que ayudan a aclarar para todo el grupo clase la diferencia entre multiplicar dos factores iguales y multiplicar un factor por 2. La confusión entre estas dos operaciones es común en los alumnos, por lo que la intervención de la profesora, reforzando la diferencia entre las dos operaciones es especialmente importante para minimizar la aparición de este error en los alumnos.

Se considera que se trata de una conexión intramatemática, ya que no intervienen aspectos extramatemáticos. Dentro de esta categoría se trata de una conexión conceptual, ya que no se hace énfasis en ningún proceso transversal. Finalmente, se trata de una conexión con tratamiento, ya que no se producen cambios de registro.

Análisis del conocimiento en el episodio C10

Se identifican dos indicadores de conocimiento matemático. Cuando la profesora le recuerda a la alumna que ya ha cometido ese error antes, está aprovechando una discusión de clase para hacer énfasis en un error de un alumno, lo que se relaciona con un conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS). Además, al permitir y propiciar, que los alumnos discutan sobre la diferencia entre las dos operaciones, la profesora está aprovechando el error de una alumna para favorecer una discusión matemática entre los alumnos, lo que se relaciona con un conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT).

En este episodio se produce una conexión que enriquece la construcción de conocimiento matemático, por lo que no se identifican indicadores de conocimiento matemático del profesor que enriquezcan dicha construcción. A continuación se muestra la Tabla 85 resumen del conocimiento identificado en este episodio.

Conocimiento explícito identificado		
KCS	[216]	Aprovecha la aparición de un error para recordar a una estudiante otro error anterior
KCT	[210]	Aprovecha el error de un alumno para introducir una discusión matemática en la clase
Conocimiento para el enriquecimiento de la conexión		
-	-	-

Tabla 85. Resumen de conocimiento del episodio C10

4.11 Análisis del episodio 11

Este episodio se produce durante la discusión en clase sobre la diferencia entre $\sqrt{a+b}$ y $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. En dicha discusión se identifican dos subepisodios. El primer subepisodio está definido por la conexión aplicación de la jerarquía de las operaciones y la justificación de dicha aplicación. El segundo subepisodio está definido por la conexión entre las dos operaciones descritas.

Subepisodio C11.1

Definición de subepisodio y análisis de la conexión

Cuando la profesora pregunta por qué se debe aplicar la jerarquía de las operaciones, establece una conexión entre la aplicación de esta regla y la justificación de dicha aplicación en un contexto determinado. La última intervención de la profesora refuerza la idea de que es necesario conocer dicha justificación y saberla explicar. A continuación, en la Tabla 86, se muestra la transcripción literal del subepisodio.

Núm	Participante	Transcripción literal de la intervención
[219]	Profesora:	¿Por qué?
[220]	A1:	Porque si no, o sea, daría igual el orden.
[221]	A2:	No.
[222]	Profesora:	¿Federico?
[223]	Federico:	Eh… Porque si no sumas primero no sabes el resultado final y no puedes hacer el digo el…
[224]	Profesora:	Porque si no, no sabes de qué número estás haciendo la raíz cuadrada, no tienes uno un número tienes una operación sobre la cual haces la raíz cuadrada.
[225]	Miguel:	Bueno, sí, yo lo que he hecho es eso pero no sabía cómo explicarlo.
[226]	Profesora:	Bueno, pero tenemos que aprender también a explicar las cosas ¿verdad? ¿Sí? No pasa nada Miguel, nos vamos enterando, pero si no te pregunto y no lo intentas… ¿Sí?

Tabla 86. Transcripción literal del subepisodio C11.1

La primera intervención de la profesora [219] establece un enlace implícito entre la aplicación de la jerarquía de los signos en una operación determinada y la justificación de dicha aplicación. En las siguientes intervenciones de [220] a [225] se dan justificaciones de la necesidad de aplicar la jerarquía de las operaciones. Finalmente, la profesora hace énfasis en que las cosas además de saberlas hay que saberlas explicar [226] reforzando así el enlace entre la aplicación de la jerarquía de las operaciones y la justificación de su aplicación. En la Figura 33 y la Tabla 87 se muestra la red de enlaces asociada a esta conexión y el resumen de la descripción de cada enlace.

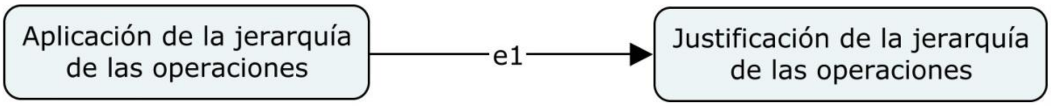

Figura 33. Red de enlaces asociada a la conexión C11.1

Enlace	**Descripción**
e1: Justificación	Se discute la justificación de la aplicación de una regla para una operación determinada. Finalmente, la profesora hace énfasis en la necesidad de saber la justificación de lo que se hace y de saberlo explicar.

Tabla 87. Resumen de los enlaces para el subepisodio C11.1

En esta conexión, la última intervención de la profesora [226] hace que el énfasis pase de la diferencia entre $\sqrt{a+b}$ y $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ a la importancia de entender la justificación de las reglas y los procedimientos que se aplican y de ser capaz de comunicar esta justificación. Este énfasis de la profesora se relaciona con la visión que tienen algunos estudiantes (e incluso profesores) de las matemáticas como un conjunto de reglas y procedimientos a los cuáles no les encuentran un sentido claro, sino que lo aplican de forma mecánica y automatizada.

Se clasifica esta conexión como una clasificación intramatemática, ya que no apareces aspectos extramatemáticos. Dentro de esta categoría, se trata de una conexión relativa a procesos transversales, ya que el énfasis de la conexión supera la operación concreta que se quiere resolver y se convierte en una reflexión sobre el conocimiento matemático razonado.

Análisis del conocimiento en el subepisodio C11.1

Se identifica un indicador de conocimiento matemático. Cuando la profesora pregunta por qué se debe aplicar la jerarquía de las operaciones [219] y acaba enfatizando la importancia de entender el por qué de los procedimientos que se aplican en matemáticas y en la importancia de ser capaz de explicarlo [226], la profesora muestra un conocimiento de la práctica matemática (KPM), en la que cada paso que se realiza en un razonamiento debe responder a un motivo lógico y se debe realizar con un objetivo determinado.

En este subepisodio se produce una conexión que enriquece la construcción de conocimiento matemático, por lo que no se identifican indicadores de conocimiento del profesor que enriquezcan dicha construcción. A continuación se presenta la Tabla 88, resumen del conocimiento identificado en este subepisodio.

Conocimiento explícito identificado		
KPM	[219][226]	Valora la importancia de saber por qué funcionan los procedimientos
Conocimiento para el enriquecimiento de la conexión		
-	-	-

Tabla 88. Resumen de conocimiento del subepisodio C11.1

Subepisodio C11.2

Definición de subepisodio y análisis de la conexión

Este subepisodio queda definido por la conexión que se establece en una única intervención de la profesora en la que resume la discusión anterior haciendo énfasis en las diferencias que existen entre $\sqrt{a+b}$ y $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. A continuación, en la Tabla 89, se muestra la transcripción literal del subepisodio.

Núm	Participante	Transcripción literal de la intervención
[227]	Profesora:	Oye, ¿tú sabes lo que he aprendido de este problema? He aprendido que donde está el signo + es importante, porque aquí el signo + está dentro de la raíz y lo que me estaba indicando es que lo tengo que saber, de quién tengo que hacer la raíz, como me hubiera dicho Federico, en cambio aquí tengo que hacer una raíz por una lado y luego sumarlas. Y fíjate que estas dos cosas ¿son? ¿Cuál era este símbolo ≠?

Tabla 89. Transcripción literal del subepisodio C11.2

La profesora hace énfasis [227] en la diferencia de la posición del signo +, estableciendo así un enlace entre las dos operaciones basado en identificar la posición del signo más, lo que establece un enlace entre las dos operaciones basado en identificar las diferencias entre dos representaciones casi idénticas, y que por tanto comparten bastantes rasgos comunes. La Figura 34 y la Tabla 90 muestran la red de enlaces que asociada a esta conexión y el resumen de la descripción del enlace.

$$\boxed{\sqrt{a+b}} \xrightarrow{\text{e1}} \boxed{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

Figura 34. Red de enlaces asociada a la conexión C11.2

Enlace	Descripción
e1: Rasgo común	La profesora justifica la diferencia entre las dos operaciones que tienen representaciones muy similares.

Tabla 90. Resumen de los enlaces para el subepisodio C11.2

La conexión que se produce en este episodio se relaciona con el orden en que se realizan las operaciones en las dos representaciones anteriores. La capacidad de decidir en qué orden se deben realizar las operaciones para cada representación es una de las habilidades que se deben desarrollar a lo largo de la educación matemática que se recibe en la escuela. Además, la realización en un orden erróneo de las operaciones genera un problema no sólo de cálculo, sino relacionado con la capacidad de entender la simbología matemática, y por tanto de ser capaz de comunicar resultados matemáticos.

Se considera que se trata de una conexión intramatemática, ya que no se hace ninguna referencia a aspectos extramatemáticos. Dentro de esta categoría se trata de una conexión conceptual, ya que no se hace énfasis en un proceso transversal sino en una habilidad concreta relacionada con la aritmética de los números enteros. Finalmente, se trata de una conexión con tratamiento, ya que no se producen cambios de registro.

Análisis del conocimiento en el episodio C11.2

Se identifica un indicador de conocimiento matemático. Cuando la profesora hace énfasis en la capacidad de diferenciar qué significa la posición del signo más en las dos representaciones, está haciendo énfasis en un error recurrente en los alumnos al calcular con números enteros, lo que se relaciona con un conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS).

En este subepisodio se produce una conexión que enriquece la construcción de conocimiento matemático, por lo que no se identifican indicadores de conocimiento matemático del profesor que enriquezcan dicha construcción. A continuación, en la Tabla 91, se muestra un resumen del conocimiento identificado en este subepisodio.

Conocimiento explícito identificado		
KCS	[227]	Enfatiza un error recurrente en los alumnos
Conocimiento para el enriquecimiento de la conexión		
-	-	-

Tabla 91. Resumen de conocimiento del subepisodio C11.2

4.12 Análisis del episodio 12

Definición del episodio y análisis de la conexión

Este episodio se produce durante la corrección de la operación $(-(+9):(+3))((+3)\cdot(-7))$. Al discutir sobre cómo resolver la operación, la profesora presenta dos formas de resolver la operación. Por un lado, plantea aplicar la jerarquía de las operaciones, haciendo cada paréntesis por separado, y luego multiplicando los dos resultados. Por otro lado, plantea realizar primero la división del paréntesis de la izquierda y a continuación aplicar la propiedad asociativa y realizar las multiplicaciones de izquierda a derecha. De esta manera, se produce una conexión entre la aplicación de la jerarquía de las operaciones y la aplicación de la propiedad asociativa. A continuación, la Tabla 92, muestra la transcripción literal del episodio.

Núm	Participante	Transcripción literal de la intervención
[228]	Profesora:	Negativo, tendría este resultado que es 21, lo multiplicaría por 3 y ahora arreglaría los signos, ¿Todos me entienden lo que estoy diciendo? Esto es una posibilidad, ¡excelente! ¡fabuloso! Me daría 63 y 63 positivo que es el resultado positivo. Perfecto. Otra posibilidad es que yo he estudiado la propiedad asociativa del producto y tú también la has estudiado en el primer tema, lo has estudiado en el tercero y tú sabes que la propiedad asociativa de los números lo que te está diciendo es Clara… ¿Clara?
[229]	Clara:	Mmmm.
[230]	Profesora:	Que puedo asociarlos, la propiedad dice que puedo asociar la multiplicación 2 a 2 como yo quiera, es lo que dice la propiedad

		asociativa, asocio, agrupo y la conmutativa qué dice Iván?
[231]	Iván:	Cambio el orden.
[232]	Profesora:	Que puedo cambiar el orden cuando yo quiera. En este momento yo creo que tenemos uno en el que ti y a Clara les convendría asociar de manera diferente. Porqué esto que tú tienes aquí es lo mismo que decir: menos 3 por mas tres, Asocio $((-3)\cdot(3))$ y por -7 : ((-3) · (3)) · (-7). Mira Clara, y hemos hecho este cambio, he hecho este cambio porque ¿3 por 3 cuánto es?
[233]	Clara:	9.
[234]	Profesora:	9, ¿positivo o negativo Clara? ¿Clara? Negativo. ¿Y tú te sabes la tabla del 9?
[235]	Clara:	63.
[236]	Profesora:	63. A mí me resulta un poco más fácil y por eso se los he manifestado, pero no es necesario, el 21 por 3 también nos daba 63, pero lo que está claro es que la operación hay que hacerla. ¿Está claro todo el mundo?

Tabla 92. Transcripción literal del episodio C12

La primera intervención de la profesora establece un enlace entre la aplicación directa de la regla sobre la jerarquía de los signos, o razonar de qué manera puede ser más fácil realizar el cálculo aplicando la propiedad asociativa [228]. A continuación, después de repasar para los alumnos las propiedades asociativa y conmutativa, y preguntar cada paso a los alumnos, termina haciendo una valoración que refuerza el enlace entre los dos procedimientos equivalentes [236]. La Figura 35 y la Tabla 93 muestran la red de enlaces asociada a esta conexión y el resumen de la descripción de cada enlace.

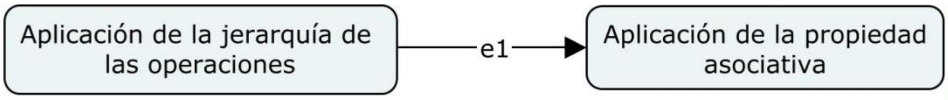

Figura 35. Red de enlaces asociada a la conexión C12

Enlace	Descripción
e1: Procedimiento equivalente	La profesora justifica la equivalencia entre dos procedimientos e introduce criterios de valoración para la aplicación de cada uno.

Tabla 93. Resumen de los enlaces para el episodio C12

Los criterios de validación que introduce la profesora [236] hacen que la conexión no se refiera únicamente a este tipo de operaciones entre números enteros, sino que sea aplicable a cualquier operación en la que se aplique la propiedad asociativa, y más en general a ser capaz de valorar qué procedimiento es más adecuado en cada situación, lo que se relaciona con una actitud general que se debe aplicar en toda la actividad matemática.

Se considera que se trata de una conexión intramatemática, ya que no se hace ninguna referencia a aspectos extramatemáticos. Dentro de esta categoría se trata de una conexión relacionada con procesos transversales, ya que la valoración que hace la profesora trasciende el contenido particular que se trabaja y hace énfasis en una actitud general hacia las matemáticas.

Análisis del conocimiento en el episodio C12

Se identifican dos indicadores de conocimiento matemático. Cuando la profesora explica que hay diferentes posibilidades para realizar la operación de una manera tan clara, muestra un conocimiento profundo de los temas que enseña y de su estructura (KOTS). En la valoración sobre la aplicación de la propiedad asociativa que hace al final del subepisodio muestra un conocimiento de la importancia de evaluar diferentes alternativas de resolución de un problema en matemáticas, lo que se relaciona con un conocimiento de la práctica matemática (KPM).

Además, se identifica que la conexión se podría enriquecer si la profesora hiciera una reflexión más profunda sobre la jerarquía de las operaciones, el orden de aplicación de las operaciones, la propiedad asociativa y la utilización del paréntesis para representar un orden determinado en para realizar operaciones. Dado que la interpretación de representaciones similares de operaciones distintas es un tema que causa dificultades a los alumnos, profundizar en esta relación se relaciona con el conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS). A continuación se muestra la Tabla 94 resumen del conocimiento identificado en este subepisodio.

Conocimiento explícito identificado		
KOTS	[228]	Muestra conocer de manera profunda de los temas que enseña
KPM	[232][236]	Evalúa diferentes alternativas de resolución de un problema
Conocimiento para el enriquecimiento de la conexión		
KCS	-	Profundiza en un contenido problemático para los alumnos

Tabla 94. Resumen de conocimiento del episodio C12

4.13 Análisis del episodio 13

Este episodio se produce durante la corrección de la operación $\sqrt{3^2+4^2}$ que había aparecido en el examen. Durante la corrección se identifican dos subepisodios. En el primer episodio se conecta la operación con la jerarquía de las operaciones. En el segundo episodio se conecta en lenguaje matemático con el lenguaje informático.

Subepisodio C13.1

Definición de subepisodio y análisis de la conexión

La profesora explica la solución correcta y a continuación explica un error que ha visto en algunas respuestas de los alumnos, estableciendo una conexión entre la operación anterior y otras dos interpretaciones erróneas de la representación de la operación anterior. A continuación, en la Tabla 95, se presenta la transcripción literal del subepisodio.

Núm	Participante	Transcripción literal de la intervención
[237]	Profesora:	En este ejercicio he visto algunas respuestas curiosas. Pero bueno, en este lo acepto. […]. Qué le voy a hacer estamos en un examen y estamos nerviosos. Primero les comento cuál era la solución. ¿Tú sabes de quién tienes que hacer la raíz cuadrada aquí? No tengo ni idea. Tengo que hacer las operaciones. Porque yo no tengo ni idea, porque yo veo 3^2 + 4^2 que no sé lo que es. Entonces preocúpate primero por lo que hay dentro del argumento, porque en caso contrario no sabes de lo que tienes que hacer la raíz. ¿Entendidos todos? Vale, 3^2 es 9, porque es $3 \cdot 3$, y 4^2 es 16, porque es $4 \cdot 4$. ¿Tú sabes ahora de quién tienes que hacer la raíz? Lo sospechas, pero todavía no, porque ahora tienes que hacer la raíz de $9+16$. Bien operemos, $9+16$ es 25. Ahora ya sí sé de quién tengo que hacer la raíz. Tengo que hacer la raíz de 25. Y tienes que buscar un número que cuando lo elevas al cuadrado de 25 ¿y ese quién es? 5.
[238]	Varios alumnos:	5.
[239]	Profesora:	5, excelente, muy bien. ¿Qué tengo que acordarme de este problema? Tengo que acordarme que en este momento (señala el inicio de la operación) yo no tengo ni idea de a quién tengo que hacer la raíz. Tengo que llegar hasta el final. ¿Vale? Respuestas que he visto. Bueno, alguien, alguno dijo, bien esto es un 3, esto es un 4. Esto suma siete. Entonces alguien me dio como respuesta 7. No, porque tú bien sabes que la raíz es una operación que involucra multiplicación. ¿Cierto? Entonces no puedes conmutar la multiplicación con la suma. Porque en

		realidad aquí has hecho un 3 más un 4. Es como si hubieras hecho lo siguiente éste (exponente del 3) se va con esta (símbolo de raíz) y éste (exponente del 4) se va con esta (símbolo de raíz). Has dicho, bueno, yo tengo aquí cuadrados. Como aquí, en el apartado anterior, Victoria me puso un 16, que es 4^2, si éste (exponente del 4) y éste (símbolo de la raíz) los quito me sale 4, entonces hacemos así. Ah pues aquí también. No, no, no, no. Porque aquí tenemos la suma. Y la suma con la multiplicación no se conmutan. Hay un cierto orden, hay unas ciertas propiedades, ¿verdad? Entonces antes de la multiplicación. Es como si tuviera otra liga. Es como la NBA y la ACB. Primero están los de la NBA, van antes, y luego los de la ACB. Anna.
[240]	Anna:	Pero se puede hacer $3 + 4 = 7$, y $2 + 2 = 4$, $4 \cdot 7$ y se hace la raíz de 28.
[241]	Profesora:	Explícalo a la clase, sal. Claro que sí, se puede hacer. Tú explícalo, que así lo vemos todos. […]
[242]	Anna:	Se puede hacer $3 + 4 = 7$, luego sumas los dos doses y queda $7 = 7 \cdot 4 = 28$.
[243]	Profesora:	A ver, preguntas.
[244]	Marta:	No puede ser porque la raíz no da exacta.
[245]	Profesora:	Mira Anna, te rebobino lo que tú has dicho, a ver si esto te ayuda a entenderlo. Te rebobino. Anna ha dicho, por una parte voy a trabajar las bases, eso es lo que yo he oído, no se vosotros. Y luego ha dicho, por otra parte voy a trabajar los exponentes. ¿Si? Y luego, voy a multiplicar la base por el exponente. Bueno, es creativo, pero no se utiliza…están perdiendo su papel, está perdiendo su papel cada uno de los elementos. La base es el elemento que replicamos. El exponente no es el elemento por el que multiplicamos, está en otro nivel, sino estaría como aquí, es el número de veces que replicaríamos la base, está perdiendo su… Es como si a un actor le haces hacer otro papel que no es el suyo, ¿de acuerdo?

Tabla 95. Transcripción literal del subepisodio C13.1

En las dos primeras intervenciones de la profesora [237] y [239] se establece un enlace entre la operación representada por $\sqrt{3^2 + 4^2}$ y la representada por $\sqrt{3^2} + \sqrt{4^2}$. La profesora explicita la diferencia entre las dos operaciones y propone además una interpretación de la causa de la interpretación errónea [239]. Este enlace se basa en diferentes interpretaciones de la jerarquía de las operaciones. En la primera, se realizan las potencias, luego la suma y luego la raíz. En la segunda se aplica la raíz a cada sumando (lo que la profesora relaciona con el ejercicio anterior) y a continuación se realiza la suma. Por tanto, se relaciona una representación con las interpretaciones de la misma en base a la jerarquía de las operaciones, que surgen de conmutar la suma y la raíz.

La intervención de Anna [240], establece un segundo enlace entre la operación representada por $\sqrt{3^2 + 4^2}$ y la representada por $\sqrt{(3 + 4)^{(2+2)}}$. En este caso la alumna propone hacer antes la operación del radicando, pero interpreta que en esta representación se debe hacer antes la suma que las potencias, sin embargo aplica de manera errónea las propiedades de las potencias y realiza la operación de manera incorrecta, ya que en ningún caso una suma de potencias se realiza de esta manera. La Figura 36 y la Tabla 96 muestran la red de enlaces que define la conexión y el resumen de la descripción de cada enlace.

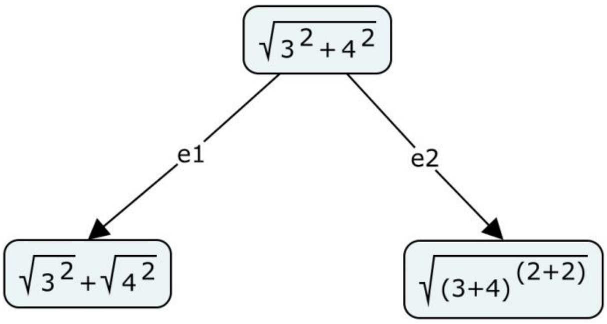

Figura 36. Red de enlaces asociada a la conexión C13.1

Enlace	Descripción
e1: Rasgo común	La profesora muestra dos posibles interpretaciones de una representación, y justifica detalladamente las diferencias.
e2: Rasgo común	La alumna propone una interpretación de la representación de la operación basada parcialmente en la explicación de la profesora.

Tabla 96. Resumen de los enlaces para el subepisodio C13.1

Los dos enlaces que determinan esta conexión evidencia las dificultades a las que se enfrentan los alumnos al aprender a realizar operaciones combinadas de números enteros. Los alumnos deben identificar las operaciones que se representan e interpretar en qué orden deben ser realizadas. En cada uno de estos pasos, además, se deben aplicar de manera correcta las propiedades de cada operación. Esta conexión se relaciona por tanto con una comprensión profunda de las operaciones combinadas con números enteros.

Se clasifica esta conexión como una conexión intramatemática, ya que no interviene ningún aspecto extramatemático. Dentro de esta categoría se trata de una conexión conceptual, ya que no se enfatiza ningún proceso transversal a los contenidos matemáticos en general. Finalmente, se trata de una conexión con tratamiento, ya que no se produce un cambio de registro.

Análisis del conocimiento en el subepisodio C13.1

Se identifican tres indicadores de conocimiento matemático. En primer lugar, al explicar detalladamente la diferencia entre las dos interpretaciones de la operación representada por $\sqrt{3^2 + 4^2}$ la profesora muestra conocer de manera profunda los contenidos que está trabajando en clase, lo que se relaciona con un conocimiento de los temas y de su estructura (KOTS). En segundo lugar, la profesora aprovecha los errores que identificó en los exámenes para enfatizar contenidos matemáticos importantes, lo que se relaciona con un conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT). Finalmente, cuando la profesora propone una explicación a la interpretación errónea de Anna y además valora la dificultad añadida de estar haciendo un examen la profesora muestra un conocimiento de las dificultades que pueden experimentar los estudiantes al trabajar con operaciones combinadas de números enteros, lo que se relaciona con un conocimiento de los contenidos y de los estudiantes (KCS).

Además se identifica que la conexión que se produce se podría enriquecer si la profesora indagara más profundamente en la propuesta creativa de Anna [242], ya que se podría interpretar que Anna sigue las indicaciones de la profesora en cuanto a hacer antes la operación del radicando. Sin embargo, la propuesta errónea que hace se refiere a la suma de potencias y muestra la dificultad que pueden encontrar los estudiantes para construir un conocimiento claro que les permita interpretar de manera correcta la simbología matemática en un contexto de operaciones combinadas. La indagación por parte de la profesora de estas dificultades se relaciona con un conocimiento de los contenidos y de los estudiantes (KCS). A continuación se muestra la Tabla 97, resumen del conocimiento identificado en este subepisodio.

Conocimiento explícito identificado		
KOTS	[237]	Muestra un conocimiento profundo de los contenidos
KCT	[239][245]	Aprovecha los errores de los alumnos para enfatizar un contenido importante
KCS	[239][245]	Da una interpretación de los motivos de los errores de os alumnos.

Conocimiento para el enriquecimiento de la conexión		
KCS	-	Indaga en las interpretaciones de un contenido problemático para los alumnos.

Tabla 97. Resumen de conocimiento del subepisodio C13.1

Subepisodio C13.2

Definición de subepisodio y análisis de la conexión

Cuando Anna sale a explicar su resolución en la pizarra, en el episodio anterior, escribe $3 + 4 = 7 \cdot 4 = 28$. La profesora llama la atención de la alumna sobre este error de escritura, afirma que hay un problema matemático, y establece una conexión con el lenguaje informático, o al menos con el funcionamiento de un ordenador. A continuación, en la Tabla 98 se muestra la transcripción literal del subepisodio.

Núm	Participante	Transcripción literal de la intervención
[246]	Profesora:	Aparte Anna hay un problemita aquí en la escritura. Fíjate que esto es 3 más 4 entonces tu me has dicho es 3 más 4 que es 7 es igual a 28, ups… Matemáticamente ahí tenemos un problema.
[247]	Anna:	No pero 7 por 4.
[248]	Profesora:	Ah, pero es que yo ahora soy un ordenador, yo ahora soy un ordenador y entonces estoy corrigiendo y esto si soy un ordenador (y aparte de esto que nos los dejamos medio en pausa) me pongo a leer 3 más 4, 7 continuo siguiente línea, 7 igual a 7 por 4 igual a 28 ¿7 igual a 28? ¡Error! Porque en el fondo un ordenador lee aquí 7 igual a 28. Entonces cuidado con las escrituras, no pasa nada estamos aprendiendo, te lo explico para que lo entiendas ¿vale? Dos confusiones. El papel del exponente y de la base y después esta escritura. ¿Vale?

Tabla 98. Transcripción literal del subepisodio C13.2

La primera intervención de la profesora [246] explica que hay un error matemático en la escritura de la alumna. A continuación, en la segunda intervención [248], establece el enlace entre el lenguaje matemático y el lenguaje informático al mostrarle a Anna que ha escrito que $7 = 28$, lo que es un error. La Figura 37 y la Tabla 99 muestran la red de enlaces que define la conexión y el resumen de la descripción del enlace.

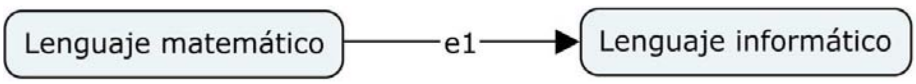

Figura 37. Red de enlaces asociada a la conexión C13.2

Enlace	Descripción
e1: Rasgo común	La profesora enfatiza la importancia del signo igual a partir de una relación con otro dominio de conocimiento.

Tabla 99. Resumen de los enlaces para el subepisodio C13.2

La conexión que define el subepisodio muestra la importancia de la rigurosidad en la escritura de las matemáticas, ya que la falta de precisión en la simbología puede llevar a interpretaciones erróneas de las operaciones, como en el subepisodio 13.1 o a errores lógicos, como en este caso. El error que comete Anna en este subepisodio, es un error común en los estudiantes, que algunas veces utilizan el igual como una orden de ejecución y no como una relación lógica entre dos cantidades (ser iguales, ser la misma cosa).

Se considera que se trata de una conexión extramatemática, ya que la profesora utiliza un ejemplo externo a las matemáticas para explicar el error a la alumna. El argumento que la profesora le da a la alumna para que vea su error está basado en la lectura de la información "como un ordenador", por lo que es la lógica de los ordenadores la que da el argumento que permite conectar la información matemática que ha representado la alumna con la interpretación informática de la información.

Análisis del conocimiento en el subepisodio C13.2

Se identifican tres indicadores de conocimiento matemático. En primer lugar, la profesora aprovecha el error de la alumna para hacer énfasis en un aspecto importante en las matemáticas, como es el uso correcto de la notación matemática, lo que se relaciona con un conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT). En segundo lugar, la profesora identifica un error común en los estudiantes –la utilización errónea del signo igual– y hace énfasis en mostrar a la alumna por qué se trata de una escritura errónea, lo que se relaciona con un conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS). Finalmente, la profesora utiliza los principios de otro contenido escolar –la informática- para mostrar a los alumnos que la escritura propuesta por Anna era errónea, lo que se relaciona con un conocimiento lateral del currículo (LCK).

Además, se identifica que la conexión que se produce a partir del error de Anna se podría enriquecer si la profesora relacionara el error de la alumna con la utilización de la calculadora. Al utilizar la calculadora, los alumnos realizan operaciones en una secuencia lineal, y si estas operaciones se escribieran en el papel de manera secuencial, el papel del signo igual deja de ser el de una relación lógica de igualdad y pasa a ser el de orden de ejecución. La reflexión sobre la diferencia entre el signo igual de la calculadora –ejecuta- y signo igual como relación de igualdad a ambos miembros puede ayudar a los alumnos a entender que las representaciones secuenciales de operaciones no son correctas. Realizar esta conexión entre la representación en papel y el uso de la calculadora para tratar un error común en los estudiantes se relaciona con un conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS). A continuación, en la Tabla 100, se resume el conocimiento identificado en este subepisodio.

Conocimiento explícito identificado		
KCT	[239][245]	Aprovecha los errores de los alumnos para enfatizar un contenido importante
KCS	[239][245]	Identifica un error común de los estudiantes y hace énfasis en él
LCK		Establece una relación con otros contenidos curriculares
Conocimiento para el enriquecimiento de la conexión		
KCS	-	Aprovecha el error de una alumna para hacer énfasis en un contenido problemático para los estudiantes.

Tabla 100. Resumen de conocimiento del subepisodio C13.2

4.14 Análisis del episodio 14

Este episodio se produce durante la resolución de un ejercicio que consistía en identificar cocientes de números enteros, representados en forma de fracción, que dieran como resultado un número entero. Se identifican tres subepisodios en este episodio. En primer lugar se produce un subepisodio en el que se conectan los números enteros con los números racionales mediante su representación decimal. En segundo lugar, se produce una conexión entre la resolución de la actividad y la comunicación rigurosa de información matemática. Finalmente se produce una conexión implícita entre la división de números enteros y el elemento inverso en el conjunto de los números racionales.

Subepisodio C14.1

Definición de subepisodio y análisis de la conexión

Durante la resolución de una actividad en la que se pide identificar cocientes enteros. La profesora realiza una introducción a la actividad que consiste en repasar el concepto de número entero. A continuación, varios alumnos preguntan por algunos aparatados de la actividad en los que el resultado es un número decimal, lo que conecta los números enteros con los números racionales. Al final del ejercicio, la profesora introduce la idea de decimal periódico, con lo que conecta los números decimales y los números enteros con los posibles resultados de realizar la división representada en una fracción de números enteros. Por lo tanto, se produce una conexión implícita entre los números decimales y los números racionales. A continuación, en la Tabla 101, se muestra la transcripción literal del subepisodio.

Núm	Participante	Transcripción literal de la intervención
[249]	Profesora:	Los números naturales son los que surgen del conteo. En esta clase hay 22 personas, ¿sí? Después dijimos que a continuación aparece el cero, porque el 0 dice que en esta clase no hay nadie, y después en los procesos como la temperatura, o subir y bajar escaleras, o estar en un edificio y bajar al sótano aparecen los números negativos. Los enteros, te recuerdo, son este conjunto, Z, los que vienen desde el menos infinito, pam, pam, pam, por ejemplo $-3, -2, -1, 0, 1$ y ahora continúas hacia adelante, son todos estos números, ¿entendidos? ¿Sí? Entonces quieres que tu cociente sea uno de estos números, y solo en este caso podrás solucionar el (ejercicio) 3.33. ¿Todos entendidos? Solo en este caso podemos resolver el 3.33 y ya les aviso que hay algún apartado en que eso no pasa.
[250]	A1:	Una cosa, en el apartado c te da decimal.
[251]	Profesora:	En el apartado c te da decimal…
[252]	A2:	Y en el f también.
[253]	A1:	¿Lo ponemos también el decimal?
[254]	Profesora:	Ponemos: no es entero. Héctor, vamos a acabar con el nuestro. La magnitud es 3, ¿y el signo?
[255]	Héctor:	Menos. […]
[256]	Profesora:	Hombre, porque ha dicho que no lo entendía (Ainhoa). Y el -4 entre -3. ¿Qué le pasa Clara?
[257]	Clara:	Que sale, que no sale un número entero.
[258]	Profesora:	Que no sale un número entero. Vamos a verlo por un momento, si yo hago 4 entre 3, porque esa es la parte de la magnitud. Entonces si yo hago 4 entre 3 fíjate. Vamos a hacer la división clásica que nosotros la sabemos hacer desde hace bastante tiempo. Clara, ¿cómo lo harías?
[259]	Clara:	3 por 1, a 4 1 y pongo un 0.
[260]	Profesora:	Fenomenal. Venga.
[261]	Clara:	Y pongo un 0.
[262]	Profesora:	Pongo un 0, y si pongo un 0, ¿qué precio tengo que pagar?
[263]	Clara:	Una coma.
[264]	Profesora:	Una coma, esto nos lo estamos adelantando al tema siguiente. Porque en realidad esto quiere decir que si yo tengo 4 pizzas y

		las reparto entre 3 personas me toca a un poquito más de una pizza. ¿Todo el mundo de acuerdo? Y el poquito más de 1 pizza es lo que viene ahora, a continuación. ¿Todos de acuerdo? Bien, vamos a intentar aproximarlo para hacer un pequeño repaso de lo que hemos visto, pero repito, en el tema 4 ya iremos. ¿Qué pondría ahora Clara?
[265]	Clara:	3.
[266]	Lucas:	Un 0.
[267]	Profesora:	Un cero Lucas? Yo creo que un 3. ¿Sí?
[268]	Lucas:	Sí.
[269]	Profesora:	¿Y luego qué?
[270]	Lucas:	Un 1.
[271]	Profesora:	¿Y luego qué?
[272]	Lucas:	Un cero, y así todo el rato.
[273]	A3:	Habría otro 0, bajarías otro 0, y después otro 3, otro 1, otro 0… (intervienen muchos alumnos)
[274]	Profesora:	Y esto continúa repetidamente. Podemos poner estos puntitos para… Pero para simbolizar este resultado, nosotros los matemáticos, porque aquí estamos unos muy buenos matemáticos, ponemos que nos da una pizza y un poquito más. Entonces este poquito más, en lugar de poner 3333…ponemos un 3 y le ponemos un sombrerito aquí arriba, y eso se llama que tenemos un número que tiene varias cosas. Cuando tiene una coma se llama número decimal. Y como después de la coma tengo un patrón que se repite, porque eso es lo que hemos visto en la división, se llama decimal periódico. Vale, lo veremos en el tema 4. De momento nos quedamos con eso. ¿Y este paso se adapta a un cociente entero? La respuesta es que no. No se adapta a un cociente entero.
[275]	Laia:	¿Y lo que hay antes no es un cociente entero?

Tabla 101. Transcripción literal del subepisodio C14.1

En las intervenciones [250] y [252] de los alumnos se produce un enlace entre los números enteros y los números decimales, ya que los alumnos llaman la atención sobre el hecho de que salga decimal implica un problema si se buscan resultados enteros. La respuesta de la profesora [251] y [254] refuerza esta relación, ya que confirma que no da decimal y que se debe responder que no es un cociente entero, por lo que se establece consistente en identificar los números decimales con parte decimal no nula como los números que no son enteros.

A continuación, la profesora realiza el cálculo de las cifras decimales del caso $\frac{4}{3}$. Este cálculo la lleva a explicar a los alumnos que existen dos tipos diferentes de números decimales, los periódicos y los no periódicos. Con esta explicación aparecen tres posibles resultados para las divisiones de números enteros, y por lo tanto para las fracciones de números enteros, lo que establece un enlace implícito entre los números decimales y los números racionales, que se pueden definir tanto como fracciones de enteros o como números enteros, decimales exactos o decimales periódicos. En resumen, la explicación de la profesora generaliza el resultado de cualquier fracción de números enteros en su representación como número decimal. La Figura 38 y la Tabla 102 muestran la red de enlaces que define la conexión y el resumen de la descripción de cada enlace.

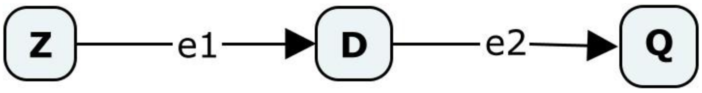

Figura 38. Red de enlaces asociada a la conexión C14.1

Enlace	Descripción
e1: Rasgo común	Se caracterizan los números decimales como los números no enteros
e2: Generalización	La profesora generaliza implícitamente las representaciones decimales de las fracciones de números enteros

Tabla 102. Resumen de los enlaces para el subepisodio C14.1

La conexión anterior constituye una excelente oportunidad para la introducción de los números racionales. En la primera intervención la profesora explica y caracteriza el conjunto de los números naturales, así como el conjunto de los números enteros. La propia actividad genera la necesidad de hablar de un nuevo conjunto de números. Si existe un conjunto de números que no son enteros, surge una necesidad lógica de darles un nombre, una identidad. Además, los números racionales se pueden identificar claramente en este contexto con las fracciones y relacionarlos además con sus representaciones decimales.

Se clasifica esta conexión como una conexión intramatemática, ya que no se hace ninguna referencia a aspectos extramatemáticos. Dentro de esta categoría se trata de una conexión conceptual, ya que no se hace énfasis en ningún proceso transversal. Finalmente se trata de una conexión con tratamiento, ya que no se producen cambios de registro.

Análisis del conocimiento en el subepisodio C14.1

Se identifica un indicador de conocimiento matemático. En primer lugar, la profesora aprovecha la actividad para enfatizar un contenido matemático, en este caso, los números enteros y las tipologías de números decimales, lo que se relaciona con un conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT).

Además, se identifica que la conexión que define este subepisodio se podría enriquecer si la profesora aprovechara la actividad para profundizar en la relación entre los números naturales, enteros y racionales, así como en sus respectivas representaciones decimales, lo que se relaciona con un conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT). También se identifica que se podría enriquecer la conexión si la profesora aprovechara para conectar explícitamente las fracciones con la división, y por lo tanto, para construir los números racionales de manera significativa para los alumnos, lo que también se relaciona con un conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT). A continuación, la Tabla 103, muestra un resumen del conocimiento identificado para este episodio.

Conocimiento explícito identificado		
KCT	[239][245]	Aprovecha la actividad para enfatizar un contenido importante
Conocimiento para el enriquecimiento de la conexión		
KCT	-	Aprovecha la actividad para profundizar en un contenido importante
KCT	-	Aprovecha la actividad para introducir un concepto matemático nuevo

Tabla 103. Resumen de conocimiento del subepisodio C14.1

Subepisodio C14.2

Definición de subepisodio y análisis de la conexión

Este subepisodio se produce también durante la resolución de la misma actividad que le subepisodio anterior. Cuando la profesora realiza el cálculo de la división $\frac{4}{3}$ una alumna pregunta si debe responder que no es un cociente entero o si debe responder 1,3. Seguidamente, la profesora le responde que se debe responder en los mismo términos que pregunta la actividad, estableciendo así una conexión entre la resolución de la actividad y la comunicación rigurosa de información matemática. A continuación, en la Tabla 104, se muestra la transcripción literal del subepisodio.

Núm	Participante	Transcripción literal de la intervención

[276]	A1:	Pero ponemos que es una división que no es un cociente entero o ponemos 1,3?
[277]	Profesora:	Esto lo hemos hecho porque nos hemos adelantado, pero estrictamente, deberíamos responder en los mismos términos que el problema nos pide. Cuando el problema nos pide haz las divisiones que sean de cociente entero entonces nosotros hablamos ese lenguaje. No nos ha dicho nada de decimales. Eso viene en el tema 4.
[278]	Miguel:	Y si ponemos por ejemplo 1, que es lo que sería en este caso, ¿no sería una división entera?
[279]	Profesora:	No. Porque no es uno el resultado de la división. El resultado de la división es 1.33…Si fuera 1, la división sería un cociente entero. En este caso no le es. Bien vamos al siguiente Oriol, 15 negativo entre 3 negativo, ¿qué?

Tabla 104. Transcripción literal del subepisodio C14.2

Las dos intervenciones de la profesora [277] y [279] establecen un enlace entre la actividad que se resuelve y la comunicación rigurosa de información matemática. En la primera intervención [277] la profesora hace énfasis en que se debe responder en los mismos términos en los que se ha hecho la pregunta. Esta afirmación establece una generalización, ya que es un principio que se puede extrapolar a cualquier tarea matemática (e incluso extramatemática): responder en los mismos términos en los que se hace la pregunta y valorar los resultados de las operaciones en relación al problema que se pretende resolver. En la segunda intervención [279] se refuerza la generalización anterior, ya que se debe responder exactamente en los términos de la pregunta. La Figura 39 y la Tabla 105 muestran la red de enlaces que define la conexión y el resumen de la descripción del enlace.

Figura 39. Red de enlaces asociada a la conexión C14.2

Enlace	Descripción
e1: Generalización	La profesora hace una consideración general sobre la comunicación rigurosa de resultados matemáticos.

Tabla 105. Resumen de los enlaces para el subepisodio C14.2

La conexión que se produce en este subepisodio es aplicable a cualquier otra disciplina: responder en los términos en los que se hace la pregunta. Sin embargo, en el caso de las matemáticas se trata de un aspecto especialmente relevante desde dos perspectivas. Por un lado, es importante que los alumnos aprendan a comunicar –así como a interpretar-la información matemática de forma rigurosa, ya que en la práctica matemática las definiciones, las propiedades, las proposiciones y los teoremas que constituyen su base teórica, han de estar formulados en términos exactos y precisos. Por otro lado, la falta de precisión en los alumnos cuando responden tareas matemáticas es común, por lo que esta conexión se relaciona también con una dificultad común entre los estudiantes como es dar respuestas que no se corresponden de manera exacta y precisa con la pregunta o no interpretar los resultados numéricos obtenidos en base a problema que se quería resolver.

Se clasifica esta conexión como una conexión intramatemática, ya que no se hace referencia a aspectos extramatemáticos. Dentro de esta categoría se trata de una conexión relativa a procesos transversales, ya que se hace énfasis sobre un proceso fundamental en toda la actividad matemática, como es la comunicación de información matemática.

Análisis del conocimiento en el subepisodio C14.2

Se identifican dos indicadores de conocimiento matemático. En primer lugar la profesora enfatiza la importancia de responder en los mismos términos que la pregunta, introduciendo palabras como estrictamente y haciendo énfasis en que no se habla de decimales, lo que se relaciona con un conocimiento de la práctica matemática (KPM). En segundo lugar, estas mismas consideraciones, y la respuesta que da a Miguel [279] sugieren una conciencia de la dificultad que encuentran los alumnos para dar respuestas rigurosas en matemáticas, lo que se relaciona con un conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS).

En este subepisodio se produce una conexión que enriquece la construcción de conocimiento matemático, por lo que no se identifican indicadores de conocimiento del profesor que enriquezcan dicha construcción. A continuación, en la Tabla 106 se resumen del conocimiento identificado en este subepisodio.

Conocimiento explícito identificado		
KPM	[277][279]	Enfatiza una práctica importante en la actividad matemática de forma transversal

KCS	[277][279]	Enfatiza un contenido problemático para los estudiantes
Conocimiento para el enriquecimiento de la conexión		
-	-	-

Tabla 106. Resumen de conocimiento del subepisodio C14.2

Subepisodio C14.3

Definición de subepisodio y análisis de la conexión

En este subepisodio se produce una conexión implícita entre la división de números enteros y el elemento inverso en los números racionales. La conexión es implícita porque queda como una oportunidad que surge en el aula pero que no se llega a hacer explícita ni por los alumnos ni por la profesora. Cuando el alumno [283] dice “lo mismo pero al revés” está identificando que $\frac{8}{32}$ tiene algo que ver con $\frac{32}{8}$. Sin embargo, la resolución de la profesora se centra en justificar que se trata de una división no entera. A continuación, en la Tabla 107, se muestra la transcripción literal del subepisodio.

Núm	Participante	Transcripción literal de la intervención
[280]	Profesora:	8 entre 32, ¿y qué? ¿Qué hago con este? ¿Qué hago…?
[281]	A1:	Lo mismo pero al revés.
[282]	Profesora:	Lo mismo pero al revés. Bueno, díctame.
[283]	A1:	Me refiero a que hay lo mismo pero al revés.
[284]	Profesora:	Vale, pero ¿cuál es el resultado?
[285]	A1:	+4.
[286]	Profesora:	+4, ¿todo el mundo está de acuerdo?
[287]	Varios alumnos:	No……
[288]	Profesora:	Leo, magnitud. La magnitud cómo la encuentras. Olvidándote del signo y haciendo la división 8 entre 32. Leo, cuantos tocan? No cabe, si no cabe ponemos 0 y un cero aquí (en el 80). Es igual que el caso b. Es un caso en el cual la división no es un cociente entero. Y ahora me quedaría…, bueno y eso continuaría (la división), ¿de acuerdo? No continuo con la división, pero con lo que yo me quedo es con que no es cociente entero. No es un número entero. Por lo tanto, la respuesta es la misma que en b. No es una división entera.

Tabla 107. Transcripción literal del subepisodio C14.3

Las tres intervenciones del alumno [281], [283] y [285] establecen un enlace entre $\frac{8}{32}$ y $\frac{32}{8}$. En las dos primeras intervenciones relaciona las dos divisiones en base a los elementos que tienen en común. En la tercera intervención afirma que el resultado de la división debe ser el mismo basándose en el enlace que ha establecido antes. La respuesta de la profesora busca hacer evidente para los alumnos que el resultado no es 4, y que el resultado no es números entero. La Figura 40 y la Tabla 108 muestran la red de enlaces que define la conexión y el resumen de la descripción del enlace.

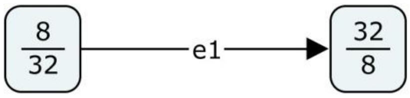

Figura 40. Red de enlaces asociada a la conexión C14.3

Enlace	Descripción
e1: Rasgo común	EL alumno sugiere que existe una relación entre $\frac{8}{32}$ y $\frac{32}{8}$, los que genera un enlace implícito entre la división de números enteros, que es lo que trata la actividad, y el elemento inverso en los números racionales.

Tabla 108. Resumen de los enlaces para el subepisodio C14.3

En este episodio se pierde la oportunidad de relacionar funciones inversas. Aunque no se definan los elementos inversos ni se profundice en sus propiedades, se considera que en este episodio se podría haber aprovechado las intervenciones del alumno para relacionar más profundamente $\frac{8}{32}$ y $\frac{32}{8}$. Por ejemplo, si el alumno propone que el resultado es 4, sería interesante simplificar las dos fracciones y ver que son equivalentes a $\frac{1}{4}$ y $\frac{4}{1}$, lo que permitiría abrir la puerta de la noción de elemento inverso. Además, en este caso particular puede ser más significativo calcular el valor decimal de $\frac{1}{4}$ que de $\frac{8}{32}$, ya que por un lado se hace énfasis en la simplificación y por otro se repasa un resultado común $\frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$.

Se clasifica esta conexión como una conexión intramatemática, ya que no se hace referencia a aspecto extramatemáticos. Dentro de esta categoría se trata de una conexión conceptual, ya que no se hace énfasis en un proceso transversal a las matemáticas.

Finalmente se trata de una conexión con tratamiento, ya que no se produce un cambio de registro.

Análisis del conocimiento en el subepisodio C14.3

No se identifican indicadores explícitos de conocimiento matemático. Sin embargo, se identifica que la conexión implícita que define este subepisodio se podría enriquecer si la profesora aprovechara la intervención del alumno para introducir un concepto importante, como es el elemento inverso, lo que se relaciona con un conocimiento del contenido y de la enseñanza. A continuación se muestra la Tabla 109, resumen del conocimiento identificado en este subepisodio.

Conocimiento explícito identificado		
-	-	-
Conocimiento para el enriquecimiento de la conexión		
KCT	-	Aprovecha la intervención del alumno para introducir un concepto matemático nuevo

Tabla 109. Resumen de conocimiento del subepisodio C14.3

5 Resultados

En este capítulo se presentan los resultados relativos a los objetivos de la investigación. En relación al primer objetivo, se muestran características generales de las conexiones identificadas en el aula, y a continuación, se muestran los resultados de los análisis específico y global de las conexiones. En el tercer apartado se exponen los resultados para el segundo objetivo que consistía en la definición de conexión un contexto de aula, así como una clasificación para las conexiones. Posteriormente se presentan los resultados relacionados con el tercer objetivo, que consistía en la identificación de relaciones entre diferentes tipologías del conocimiento del profesor y los cuatro tipos de conexiones caracterizadas en el apartado anterior. Finalmente, se presentan interacciones entre diferentes tipos de conocimiento, lo que se relaciona con el cuarto y último objetivo.

5.1 Conexiones matemáticas en el aula

El primer objetivo de esta investigación consiste en la identificación de conexiones en el aula y en el análisis de sus características. Las primeras aproximaciones a los datos revelaron algunos aspectos clave de las conexiones que se producen en el aula de matemáticas. En primer lugar, el análisis de los datos empíricos reveló que la idea de conexión que se maneja en gran parte de la literatura no responde a las conexiones que se establecen en el aula.

La mayoría de la literatura consultada utiliza una idea implícita de conexión como una relación entre dos elementos de forma que el enlace se basa en un principio de lógica, coherencia y continuidad (Frykholm y Glasson, 2005; Rowland et al., 2009; Lockwood, 2011). Esta definición de conexión permite una aproximación a la matemática escolar en la que se enfatiza la importancia de establecer relaciones entre aspectos diferentes de un mismo concepto, entre conceptos diferentes o entre un concepto matemático y una situación extra matemática.

Esta definición impersonal y objetiva de conexión no incluye de manera clara a las conexiones que se producen en el aula, que aunque respondan a relaciones lógicas, coherentes o continuas, no son acertadas. Por ejemplo, en el subepisodio C5.1 la profesora propone a los alumnos dos ejercicios, dirigidos a estudiar las técnicas y las notaciones implicadas en la potenciación. Después de estudiar las propiedades de las potencias positivas y negativas, surge una discusión sobre la diferencia entre -2^5 y $(-2)^5$. Ante la dificultad de diferenciar las dos expresiones anteriores, un alumno fija su atención en el resultado y encuentra que los resultados de ambas operaciones son iguales. Aquí aparece una conexión basada en el principio de transitividad: si $-2^5 = -32$ y $-32 = (-2)^5$, por tanto $-2^5 = (-2)^5$.

Aunque la relación establecida por el alumno entre los dos resultados sea lógica y coherente, es errónea, y representa un síntoma de la conexión entre las dos operaciones basada en realizar las mismas dos operaciones en orden inverso. Así, cuando se pone de manifiesto una relación errónea como la anterior, se interpreta esta relación como un síntoma de que existe otra conexión no explícita, que es la que permitiría corregir el error y que es la que nos interesa.

Otro ejemplo de relación errónea en el subepisodio anterior se encuentra en la intervención de otra alumna, que pregunta si la base de la potencia $-2^5 = -32$ era negativa. La conexión errónea de la alumna es un síntoma de la conexión entre los distintos significados del signo menos –como operador y como indicador de número negativo. Restringiéndose a la definición general anterior, el error de la alumna no se consideraría una conexión en tanto que no es una relación basada en un principio matemático correcto, pero la explicitación de ese error nos permite detectar que existe una conexión que permite relacionar los diferentes significados del signo menos.

El enfoque que se presenta incluye en la conceptualización de conexión aquellas que no siendo explícitas conducen a corregir errores –estos sí explícitos en la práctica– que se producen al establecer relaciones coherentes y continuas, pero que no están bien construidas matemáticamente. De las 34 conexiones identificadas 10 de ellas están relacionadas con una interpretación errónea de los alumnos (C1.2, C2.3, C4, C5.5, C6.2, C8.2, C10, C13.1, C13.2 y C14.3), lo que evidencia que las concepciones erróneas pueden ser un desencadenante para las conexiones, y que las conexiones están estrechamente relacionadas con las concepciones erróneas de los estudiantes y su establecimiento puede favorecer la eliminación de errores y el establecimiento de conexiones correctas.

5.2 Caracterización global y específica de las conexiones

Las conexiones se analizaron desde una perspectiva específica y desde una perspectiva global. La perspectiva específica consiste en el análisis exhaustivo de las intervenciones que definen cada subepisodio. En dicho análisis se identificaron relacionas básicas –los enlaces– entre diferentes elementos – los nodos– que se coordinaba en una red para formar la conexión. La perspectiva global consistió en el análisis de toda la conexión, teniendo en cuenta el contexto en el que se producía, una interpretación de su finalidad y una interpretación de la utilidad de la conexión para la construcción de conocimiento matemático. El objetivo último de este análisis global fue identificar cuál era el aspecto matemático que se enfatizaba.

5.2.1 Análisis específico de las conexiones

El análisis específico dio como resultado la identificación de nodos relacionados por enlaces y coordinados de forma coherente en una red de enlaces. La relación nodo-enlace es intrínseca, ya que no puede haber nodo sin enlace ni enlaces sin nodos. A continuación se detallan los resultados del análisis de los tipos de nodos que se identificaros, de los tipos de enlaces, de la relación entre los tipos de nodos y los tipos de enlace y, finalmente, se muestran los resultados relacionados con las redes que conformaban las conexiones.

Nodos

Los nodos son los contenidos matemáticos que se relacionan mediante un enlace. La caracterización de los mismos depende del contexto matemático en que se produce. El análisis mostrado en el Capítulo 4 dio como resultado la identificación de nodos de distinto tipo, cuyas características se detallan más adelante. Algunos nodos están relacionados con los conceptos que se trabajan en clase, con sus representaciones, con operaciones aritméticas, con procedimientos y con propiedades. Otros están relacionados con la justificación de resultados, con el establecimiento de hipótesis, con el establecimiento de definiciones y con valoraciones sobre la adecuación de procedimientos o sobre la necesidad de la rigurosidad en la comunicación de resultados matemáticos. También se identificaron nodos relacionados con modelos didácticos asociados a los contenidos que se trabajaban en el aula y otros relacionados con el lenguaje matemático, con el lenguaje informático y con el lenguaje musical. A continuación, en la Tabla 110, se muestran las tipologías de nodos identificadas, la frecuencia absoluta de aparición de los mismos a lo largo del análisis, así como el porcentaje de aparición sobre un total de 102 nodos.

Tipología de los nodos	Frecuencia	Porcentaje
Concepto	10	9,8 %
Representación	12	11,8 %
Operación	18	17,6 %
Procedimiento	34	33,3 %
Propiedad	8	7,8 %
Justificación	7	6,9 %

Hipótesis	3	2,9 %
Valoración	2	2 %
Modelo	4	3,9 %
Lenguaje	4	3,9 %

Tabla 110. Tabla de frecuencias para los nodos identificados

Tal y como se explicó en el Capítulo 3, los nodos se identifican a partir del análisis de las intervenciones de la profesora y de los alumnos. A continuación se explica brevemente en qué consiste cada nodo teniendo en cuenta la diversidad de estas intervenciones, así como la diversidad de los descriptores que se utilizan para los nodos durante el análisis.

Interconcepto

Es un tipo de nodo que se identifica a partir de situaciones en las que se establece un enlace con la globalidad de un interconcepto y no únicamente con un aspecto particular. Para etiquetar un nodo como interconcepto se interpreta que el enlace se refiere a múltiples aspectos del interconcepto, como son sus representaciones, las operaciones que se pueden definir, las propiedades o los procedimientos. Entre las 10 ocasiones que se identificaron nodos de tipo interconcepto se encuentran conjuntos numéricos (N, Z, D y Q), el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor.

Representación

Se identifican a partir de situaciones en las que se establece un enlace con representaciones simbólicas concretas. Para etiquetar un nodo como representación se interpreta que el elemento relevante para el enlace que se establece no es la globalidad del concepto que se trata, sino que lo que aporta significado al enlace es la representación particular que se utiliza. Entre las 12 ocasiones que se identificaron nodos de tipo representación hay diferentes representaciones de potencias naturales de números enteros que determinan la relación que define el enlace.

Operación

Se identifican a partir de situaciones en las que se establece un enlace con operaciones concretas que aparecen al resolver una actividad o bien con operaciones aritméticas en general. Al etiquetar un nodo como operación se interpreta que la operación (y no únicamente la representación y sin llegar a ser todo el interconcepto) es la que aporta significado y coherencia al enlace. Entre las 18 ocasiones que se identificaron nodos de tipo operación, 14 fueron operaciones concretas, como en el subepisodio 5.1, y en otras 4 se trató de operaciones aritméticas en general como la división y la raíz cuadrada.

Procedimiento

Se identifican a partir de situaciones en las que se establece un enlace con procedimientos, entendidos como secuencias de acciones relacionadas con operaciones matemáticas. Al etiquetar un nodo como procedimiento se interpreta que es la secuencia de acciones la que aporta significado y coherencia al enlace. Entre las 34 ocasiones que se identificaron nodos de tipo procedimiento aparecen secuencias de acciones relacionadas con sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, potencias, raíces cuadradas y combinaciones de todas las operaciones anteriores en los números enteros.

Propiedad

Se identifican a partir de situaciones en las que se establece un enlace con propiedades de las operaciones o más en general de los interconceptos. Al etiquetar un nodo como procedimiento se interpreta que es la aplicación explícita de la propiedad la que permite establecer el enlace. Entre las 8 ocasiones que se identificaron nodos de tipo propiedad aparecen la propiedad asociativa, propiedades relacionadas con el signo de las potencias de base entera las propiedades del elemento neutro para la suma y el elemento neutro para la multiplicación en los números enteros.

Justificación

Se identifican a partir de situaciones en las que se establece un enlace con la justificación de un procedimiento o de una propiedad. Al etiquetar un nodo como justificación se interpreta que lo que aporta significado y coherencia al enlace no es el procedimiento o la propiedad en cuestión, sino que es la justificación lo que define el enlace. Por ejemplo, de los 7 nodos identificados como justificación, 6 se relacionan con la justificación de procedimientos y 1 se relaciona con la justificación de una propiedad.

Hipótesis

Se identifican a partir de situaciones en las que se establece un enlace con la formulación de una hipótesis relacionada con resultados obtenidos en el aula. Al etiquetar un nodo como hipótesis se interpreta que lo que aporta significado y coherencia al enlace no es el resultado obtenido, sino el patrón que subyace al resultado y la hipótesis que se puede formular a partir del descubrimiento de dicho patrón. Por ejemplo, en dos de los tres nodos identificados como hipótesis aparece el descubrimiento de un patrón y la formulación de una hipótesis para el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de parejas de números (a, b) donde uno sea múltiplo del otro.

Definición

Este caso es el más difícil de caracterizar debido a que únicamente se identifica un nodo como definición. Se identifica a partir de una situación en la cual se construye la definición de un nuevo concepto matemático a partir de una discusión de aula. Al etiquetar un nodo como definición se interpreta que los que aporta significado y coherencia al enlace es la construcción de la definición más que los resultados previos que permiten construir dicha definición. El único caso identificado consiste en la construcción de la definición de potencias enteras de número enteros a partir de la exploración de las relaciones entre los exponentes en los cocientes de potencias enteras de exponente natural.

Valoración

Se identifican a partir de situaciones en las que se establece un enlace con juicios valorativos o creencias sobre las matemáticas en general, sobre cómo afrontar los problemas matemáticos o sobre la forma de justificar y comunicar resultados matemáticos propios o conocidos. Al etiquetar un nodo como valoración se interpreta que lo que aporta significado y coherencia al enlace es la propia valoración y su implicación a la forma en que los alumnos entienden la actividad matemática más que el contenido concreto que se esté trabajando. En los dos casos identificados se realizaron valoraciones sobre la justificación y la demostración de resultados en un caso y sobre la rigurosidad al comunicar información matemática en el otro.

Modelo

Se identifican a partir de situaciones en las que se establece un enlace con un modelo didáctico para la enseñanza y el aprendizaje del contenido que se trabaja en el aula. Al etiquetar un nodo como modelo se interpreta que se está utilizando la lógica propia del modelo para aportar significado al contenido matemático que se trabaja. Por ejemplo, en los dos casos identificados se utiliza un modelo de desplazamiento unidireccional para interpretar sumas, restas y potencias de números enteros.

Lenguaje

Se identifican a partir de situaciones en las que se establece un enlace con el lenguaje matemático o con otro tipo de lenguaje diferente al lenguaje natural. Al etiquetar un nodo como lenguaje se interpreta que lo que aporta significado y coherencia al enlace son el conjunto de símbolos y las reglas que los rigen en cada lenguaje. Por ejemplo, en la investigación se identifican enlaces con el lenguaje matemático, el lenguaje musical y el lenguaje informático.

Enlaces

De la misma manera que los nodos se definen a partir del enlace que se establece, los enlaces se caracterizan a partir del par de nodos que conectan. Los tipos de enlaces que se detectaron son los descritos en la Tabla 4, en el Capítulo 3. Algunos enlaces tienen un nombre que coincide con el de un nodo, más adelante se explica la relación entre nodos y enlaces. A continuación se muestra, en la Tabla 111, las frecuencias absolutas y los porcentajes de aparición de cada tipo de enlace en la investigación y, seguidamente, se detallan las características de los enlaces identificados dentro de cada tipología.

Tipología de los enlaces	Frecuencia	Porcentaje
Representación alterna	0	0 %
Representación equivalente	8	10,3 %
Procedimiento equivalente	9	11,5 %
Procedimiento	2	2,6 %
Caso particular	3	3,8 %
Generalización	14	18 %
Implicación	2	2,6 %
Justificación	10	12,8 %
Rasgo común	30	38,4 %

Tabla 111. Tabla de frecuencias para los enlaces identificados

Representación alterna

Las representaciones alternas son enlaces que se establecen entre nodos de tipo representación diferentes de un mismo concepto que se producen en registros diferentes. No se identificó ningún enlace de este tipo en esta investigación ya que en la unidad didáctica se utilizan mayoritariamente representaciones numéricas de números enteros y racionales. El único caso en que aparece otro tipo de representación es el caso en el que se utilizan modelos reales para representar las operaciones con números enteros. Sin embargo, en los casos en que se hace referencia a los modelos didácticos relacionados con los números enteros, los enlaces identificados en el contexto del aula no fueron representaciones alternas sino generalizaciones o rasgos comunes.

Representación equivalente

Las representaciones equivalentes son enlaces en los que se relacionan dos nodos que son representaciones diferentes de un mismo concepto en un mismo registro. En la investigación se identifican representaciones equivalentes de potencias de números enteros. La comparación entre representaciones intenta aclarar la relación existente entre la base y el exponente.

En el subepisodio (C3.1) se separa el signo de la magnitud para realizar en la operación de potenciación por separado. Como resultado se produce la generalización del patrón observado para la multiplicación sucesiva de signos negativos, que es la regla de cálculo para las potencias impares de base negativa. En el segundo subepisodio (C5.3) en el que se identifican representaciones equivalentes se comparan diferentes representaciones de $(-2)^5$ y de -2^5 para dejar claro a los estudiantes la diferencia entre estas dos operaciones concretas, y más en general, la diferencia entre potencias de base negativa y potencias de base positiva cambiadas de signo. En el tercer subepisodio (C5.3) en el que se identifican representaciones equivalentes se comparan diferentes representaciones de 2^5 y de -2^5 con el objeto de entender lo significa matemáticamente poner un singo "-" delante de la potencia.

Procedimiento equivalente

Los procedimientos equivalentes son enlaces entre dos nodos de tipo procedimiento que son igual de válidos para obtener el mismo resultado a partir de la misma información. En todos los ejemplos identificados durante el análisis de los datos se identificaron enlaces entre secuencias de acciones que permitían obtener un mismo resultado a partir de los mismos datos. En el subepisodio C3.1 se relacionan diferentes formas de realizar la operación $(-2)^5$. En el subepisodio C6.3 se relacionan dos formas de realizar la operación $(-1)^{36}$. En el subepisodio C7.1 se relacionan cuatro formas diferentes de realizar la operación $\frac{(-5)^7}{(-5)^7}$. Finalmente en el episodio 12 aparecen dos formas diferentes de resolver una operación combinada con números enteros. En todos los casos, el objetivo de la conexión es comparar diferentes formas de resolver una misma operación y en todas ellas se añade algún tipo de valoración sobre la conveniencia de utilizar un procedimiento determinado en un contexto determinado, lo que puede ayudar a los estudiantes a desarrollar un control sobre los procedimientos que aplican, evitando que tengan la sensación de aplicar métodos sin sentido.

Procedimiento

Los enlaces de tipo procedimiento son enlaces entre un nodo de tipo procedimiento y un nodo de tipo interconcepto en el cual se aplica. A lo largo del análisis de los datos únicamente se identificaron dos enlaces de esta tipología. En ambos casos se trataba de la aplicación de la regla de los signos a secuencias de sumas y restas de números enteros. En este caso los enlaces de tipo procedimiento se asociaron a la aplicación de un procedimiento que permite a los alumnos tener un criterio procedimental para superar la introducción de un inter concepto que causa dificultades en muchos estudiantes.

Caso particular

Los enlaces incluidos en la tipología de caso particular son enlaces en los que aparece un subconjunto definido por una propiedad clara y el enlace toma sentido al considerar la relación entre el subconjunto y alguna propiedad suya. A lo largo del análisis de los datos se identificaron tres enlaces de este tipo. En los dos primeros (C1.1 y C2.5) aparecen subconjuntos de N y de Z respectivamente definidos por propiedades claras. En el primer caso se trata de parejas de números en que uno es múltiplo del otro y, en el segundo caso, se consideran únicamente parejas de números del mismo signo. En el tercer caso (C4), se produce la inclusión errónea de un elemento en un subconjunto, definido por la propiedad de ser una potencia impar de base negativa.

Generalización

Los enlaces incluidos en la categoría de generalización son enlaces en los que se justifica que una propiedad se cumple en un subconjunto más amplio que el considerado inicialmente o que un procedimiento se puede aplicar a un rango más amplio de situaciones. A lo largo del análisis se identificaron 14 enlaces de este tipo. En el subepisodio C1.1 aparecen tres generalizaciones relacionadas con el reconocimiento de un patrón, el establecimiento de una hipótesis y la demostración de que la propiedad identificada se cumplía para cualquier pareja de números que cumplieran las condiciones iniciales. En el subepisodio C.2 se consideraba la ampliación de una interpretación de la resta en los números naturales a los números enteros. En los subepisodios C2.4 y C2.5 se consideraba la aplicación de un procedimiento a un caso más amplio. En los episodios C3.1 y C3.2 se consideraba una regla general que se aplicaba a las potencias impares de base negativa y a las potencias naturales de base negativa respectivamente. En los subepisodios C7.2 y C7.1 la generalización se da mediante la eliminación de restricciones en una operación. En el episodio 14.1 se da una consideración de todos los casos posibles para representar una operación. Finalmente en el subepisodio C14.2 se hace una consideración general sobre la rigurosidad en la comunicación de resultados matemáticos a partir de una actividad particular.

Implicación

La tipología implicación consiste en el establecimiento de un enlace mediante la aplicación de un razonamiento deductivo. En el subepisodio C5.3 se relacionan tres representaciones equivalentes de una operación con otras tres representaciones equivalentes de otra operación aplicando el siguiente principio: si se realiza la misma operación a expresiones iguales, los resultados serán también iguales. En el subepisodio C5.5 se establece una relación entre dos operaciones mediante una regla de transitividad: si dos operaciones dan el mismo resultado son la misma operación.

Justificación

Los enlaces incluidos en la categoría justificación son enlaces que justifican una definición, un procedimiento, la pertinencia de la aplicación de un procedimiento, la diferencia entre demostrar e inducir, y la equivalencia entre diferentes justificaciones. Cuando se produce un enlace de tipo justificación, uno de los dos nodos que se relacionan ha de ser una justificación. A lo largo de la investigación se identificaron 10 enlaces de este tipo. En los subepisodios C2.3 y C2.6 se justifica la corrección de un procedimiento. En los subepisodios C6.1 y C11.1 se justifica la pertinencia de la aplicación de de un procedimiento. En el subepisodio C7.2 se justifica la definición de un nuevo concepto. Finalmente en el subepisodio C1.1 se justifica la utilidad de la demostración y su diferencia con el razonamiento inductivo.

Esta caracterización empírica de las justificaciones no coincide de manera exacta con la idea previa de justificación que había para el análisis y que se presentó en la Tabla 4 del Capítulo 3, en cual se definían los enlaces del tipo justificación como un enlace entre dos elementos en el cual uno de los dos elementos era la justificación del otro. El análisis de los datos muestra que no siempre uno de los elementos justifica al otro, sino que es la propia relación que se establece la que constituye la justificación. Por ejemplo en el caso de los subepisodios C2.6 y C6.1 no sólo se produce una justificación de la corrección de los procedimientos sino que además se justifica por qué es mejor usar un procedimiento en una situación determinada. En estos casos no se identifica un nodo A que sea justificado por otro nodo B, sino que se justifica algún aspecto de la relación entre los nodos A y B.

Rasgo común

Los enlaces incluidos en la categoría rasgo común son enlaces que consisten en la relación entre dos elementos en base a alguna de sus características. Se trata de un tipo de enlace con unas características diversas, dado que el rasgo común puede estar relacionado con la representación, con las propiedades, con las aplicaciones, con los procedimientos, con los interconceptos, con las definiciones, etc. Al tratarse de un tipo de enlace con unas características tan diversas aumenta su presencia en la actividad de aula. En el caso de esta investigación se identificaron 30 enlaces de este tipo.

El rasgo común puede ser una representación parecida (C2.1, C5.1, C5.3, C6.2, C8.3, C10, C11.2, C13.1, C14.2 y C14.3), una definición parecida (C1.2), procedimientos que se aplican en las mismas operaciones (C2.4 y C6.3), una propiedad común (C4 y C5.5), la relación entre una operación y su interpretación en un modelo real (C2.2 y C5.4), el vocabulario utilizado para ambos elementos (C8.2) y el tipo de lenguaje utilizado (C5.2 y C13.2).

En el caso de los enlaces que surgen a partir de la relación entre representaciones parecidas, se identifica una mayoría de casos en los que el enlace que se establece se relaciona con una situación en que los estudiantes manifiestan no comprender la relación entre las representaciones. Esta incomprensión tiene que ver con la dificultad que experimentan los alumnos para entender la relación existente entre cambios en la representación de las operaciones y cambios en las propias operaciones. Asimismo, se detectan faltas de comprensión asociadas a la aplicación de procedimientos diferentes para una misma operación y al vocabulario que se utiliza al aplicar dichos procedimientos.

Relación nodos-enlaces

Llama la atención que la tipología procedimiento para enlaces y la tipología procedimiento para nodos aparezcan en una cantidad tan dispar. En el primer caso se identifican dos enlaces de tipo procedimiento y 9 enlaces de tipo procedimiento equivalente. Sin embargo, en el caso de los nodos se identifican 34 nodos como procedimientos. Esto muestra que no siempre que aparezca un procedimiento como nodo debe haber un enlace tipo procedimiento, o procedimiento equivalente.

De hecho, dada la naturaleza de la unidad didáctica analizada, se dedica una proporción alta del tiempo de clase a realizar operaciones aritméticas y por tanto a aplicar diferentes tipos de procedimientos, por lo que aparecen muchos nodos del tipo procedimiento. Sin embargo, los enlaces que se identifican pueden ser de distinto tipo, como caso particular, generalización, justificación, rasgo común, procedimiento o procedimiento equivalente. En el caso de los enlaces de tipo procedimiento o procedimiento equivalente sí que es necesario que aparezcan nodos de tipo procedimiento.

En el caso de los nodos de tipo representación y de los enlaces de tipo representación equivalente sí que existe una relación directa. En general, hay una correspondencia biunívoca entre los enlaces de tipo representación equivalente y los nodos tipo representación. Únicamente se identifica un caso en el que hay un enlace de tipo representación equivalente entre nodos que no son representaciones, sino un procedimiento y una propiedad (C3.1). Este caso revela la importancia de entender la globalidad de la conexión incluso para la clasificación de los enlaces, ya que los que se produce al enlazar el procedimiento con la propiedad asociativa es una representación equivalente de la operación que se trabaja.

Algo similar pasa con los nodos de tipo justificación y los enlaces de tipo justificación. En todos los subepisodios en que se identificó un enlace de tipo justificación aparece al menos un nodo de tipo justificación. Sin embargo, se identifican 10 enlaces por 7 nodos. Esto se debe a que para un único nodo de tipo justificación se pueden producir diferentes enlaces o formas de llegar a la justificación. Además, se pueden realizar otras justificaciones, como pueden ser valoraciones sobre la propia justificación o sobre el proceso de justificación basadas en el mismo nodo.

En el caso de los enlaces tipo generalización se presentaron dificultades para la clasificación, ya que en algunos casos parecía que podía ser una justificación (C3.1) o un procedimiento equivalente (C9.1). En el caso del subepisodio C3.1 se produce una generalización de una propiedad que se observa en un caso particular que se trabaja en el aula, al caso general de todas las potencias de base negativa, lo que constituye la justificación de la propiedad para todas las potencias impares de base negativa. En el caso del subepisodio C9.1 se produce generalización del cálculo de las raíces cuadradas de cuadrados perfectos al caso general de cualquier número natural, para lo que se introducen procedimientos que se basan en el procedimiento inicial. En ambos casos se considera que, analizando el contexto en que se producen los enlaces, lo que caracteriza el enlace es la generalización que se produce.

En general, la identificación y clasificación de los enlaces depende de múltiples factores que se observan en la práctica de aula y, más concretamente, en las transcripciones literales de los subepisodios. La cantidad de intervenciones que se dan en muchos de los subepisodios y la variedad de dichas intervenciones, especialmente de las de los alumnos, hacen que aparezcan tipologías diversas de nodos y de enlaces, que a su vez pueden ser también diversos, como en el caso de los enlaces de tipo rasgo común.

Tipos de red

Debido a la diversidad de aspectos de la práctica a tener en cuenta en el análisis de los nodos y de los enlaces, la estructura de la conexión se reveló compleja. Los nodos y los enlaces se coordinan de formas diversas respecto a la linealidad de la conexión, a la relación entre el número de enlaces y al número de nodos, y a la direccionalidad de la conexión.

Se dice que una red de enlaces es lineal si consiste en una secuencia lineal de enlaces en una única dirección y con un único enlace entre cada par de nodos, en otro caso se dice que la red de enlaces es no lineal. Se identifican 16 conexiones lineales y 18 conexiones no lineales. Dentro de las redes lineales se identifica una red de 6 nodos y 5 enlaces (Capítulo 4, subepisodio C1.1), seis de 3 nodos y 2 enlaces (Capítulo 4, subepisodios C2.1, C2.3, C2.4, C2.5, C7.2, y C14.1), y nueve de 2 nodos y 1 enlace (Capítulo 4, subepisodios C3.2, C5.2, C7.1, C11.1, C11.2, C12, C13.2, C14.2 y C14.3).

Las redes no lineales son más diversas. Hay una red de 8 nodos y 5 enlaces multidireccional (Capítulo 4, subepisodio C5.3), dos redes de 6 nodos y 6 enlaces multidireccional (Capítulo 4, subepisodios C3.1 y C5.1), una red de 5 nodos y 4 enlaces multidireccional (Capítulo 4, subepisodio C2.2), una red de 4 nodos y 4 enlaces multidireccional (Capítulo 4, subepisodio C5.4), una red de 4 nodos y 2 enlaces multidireccional (Capítulo 4, subepisodio C8.1), una red de 3 nodos y 3 enlaces multidireccional (Capítulo 4, subepisodio C6.1), dos redes de 3 nodos y 2 enlaces multidireccional (Capítulo 4, subepisodios C9, C13.1), siete redes de 2 nodos y 2 enlaces bidireccional (Capítulo 4, subepisodios C1.2, C5.5, C6.2, C6.3, C8.2, C8.3 y C10), y dos redes de 2 nodos y 2 enlaces unidireccional (Capítulo 4, subepisodio C2.6 y episodio C4).

La direccionalidad de los enlaces intenta recrear de la forma más fiel posible la forma en la que se estableció la conexión en el aula. Las conexiones multidireccionales se relacionan con intervenciones de la profesora y de los alumnos que, sin dejar de tratar la relación que define la conexión, se refieren a otros aspectos, lo que añade nodos, enlaces y direcciones a la red de enlaces.

5.2.2 Análisis global de las conexiones

Una vez analizada en detalle la red de enlaces y los elementos que la conforman se pasó a analizar la globalidad de la conexión. Para este análisis se toma como criterio el contexto de aula en el que se produce la conexión, se intenta dar una interpretación a la finalidad de la conexión en dicho contexto y la utilidad de la conexión para la construcción de conocimiento matemático por parte de los estudiantes. Finalmente, la idea es identificar cuál es el énfasis que propone la conexión en el contexto en el que se produce.

A lo largo del análisis se identifican cuatro tipos de conexiones que representan el germen de la clasificación que se presenta más adelante. En primer lugar se identifican conexiones que tienen que ver con la construcción de los números enteros desde una perspectiva del conocimiento de los temas, de las representaciones que se utilizan, de las operaciones y sus propiedades, de los procedimientos que se aplican, o de las regularidades que existen. A lo largo del análisis se identificaron 7 conexiones relacionadas con las representaciones (C2.1, C5.1, C5.3, C7.2, C11.2, C13.1 y C14.1), 8 conexiones relacionadas con las operaciones (C1.2, C5.5, C6.2, C8.1, C8.2, C8.3, C10, C14.3), 4 conexiones relacionadas con los procedimientos (C2.4, C2.6, C4, C9) y 3 conexiones relacionadas con la identificación y generalización de regularidades para el descubrimiento de propiedades (C3.1, C3.2 y C6.3).

En segundo lugar se identifican conexiones que hacen énfasis en la comprensión profunda del contenido para la construcción de un conocimiento razonado y no sólo un conocimiento algorítmico de los números enteros. Se identificaron 4 conexiones relacionadas con la justificación y la demostración de resultados (C1.1, C2.3, C6.1 y C11.1), 3 conexiones relacionadas con la valoración de la adecuación de un procedimiento en un contexto determinado (C2.5, C7.1 y C12) y 1 conexión relacionada con la rigurosidad en la comunicación de contenidos matemáticos (C14.2).

En tercer lugar se identifican conexiones que hacen énfasis en la relación existente entre las matemáticas en general y los números enteros en particular con conceptos y contextos extramatemáticos. Se identificaron 2 conexiones relacionadas con el lenguaje matemático y su relación con otros lenguajes específicos como el musical o el informático (C5.2 y C13.2), y una conexión entre los números enteros y un modelo de desplazamiento (C2.2 y C5.4).

Las conexiones están estrechamente relacionadas con el carácter inter relacional de la matemática escolar, donde los conceptos quedan constituidos por una red de definiciones y de propiedades que los relacionan, las representaciones que se les asocian, los procedimientos que permiten operar con ellos y el método que permite avanzar en el conocimiento de la estructura global. Cuando los conceptos de la matemática escolar son entendidos así, como una red coordinada y coherente, se denominan *interconceptos* para recoger el conjunto de las definiciones concretas que forman su estructura. Por ejemplo, el área de un cuadrado de lado n y el cuadrado de un número n son, desde esta perspectiva, un mismo interconcepto que en la matemática escolar se presentan a menudo con un significado independiente. La noción de interconcepto es central en lo que sigue para referirnos a la estructura de la matemática escolar, en tanto que a menudo es en la escuela donde se fragmenta esta red conceptual.

5.3 Definición de conexión y clasificación

Nuestro segundo objetivo era construir una definición de conexión basada en las características observadas en los resultados del análisis relacionado con el primer objetivo. Tal y como se muestra en el apartado anterior, este análisis muestra diferentes características de las conexiones. Las conexiones no siempre son relaciones correctas matemáticamente, sino que en muchos casos se establecen en el aula relaciones coherentes que conducen a suposiciones erróneas y que constituyen un síntoma de la existencia de una conexión explícita que permita corregir, usando criterios matemáticos, la suposición errónea.

El análisis específico reveló que, aunque en esencia una conexión sea una relación entre dos elementos, en su estructura interna presenta una estructura compleja que consiste en la construcción de significados. Presmeg (2006), al analizar el establecimiento de conexiones en el aula por parte del profesor desde una perspectiva semiótica revela su complejidad, ya que la forma en que se construye la cadena de significados que permite establecer una conexión implica la construcción parcial de significados, que a su vez se conectan con otros y construyen sucesivamente otros nuevos.

Sin embargo, el análisis de los enlaces reveló que esta construcción de significado se produce mediante el establecimiento de redes de enlaces que no tienen una estructura lineal sucesiva. Esto se debe a que las redes de enlaces pretenden reproducir la secuencia de intervenciones que permiten establecer los enlaces, y no la forma en que se produce el significado. Las cadenas de significado no se construyen explícitamente en esta investigación, sino que se describen de manera general en el análisis global de las conexiones.

En consecuencia, se entenderán las conexiones como redes de enlaces que coordinan definiciones, representaciones, operaciones, propiedades, procedimientos, modelos, valoraciones y justificaciones para construir interconceptos. Dichos enlaces son vínculos lógicos y coherentes entre representaciones, que pueden estar basadas en la equivalencia entre representaciones o procedimientos, en la aplicación de procedimientos, en justificaciones, en generalizaciones, en implicaciones, en la enfatización en un caso particular o en la existencia de un rasgo común. La interpretación errónea o incompleta de estos enlaces da lugar a errores comunes en la matemática escolar.

Las características de las conexiones, y por tanto la clasificación que se ofrece, dependen de la relación última que se quiere establecer así como del proceso de construcción parcial de significados que la constituye, tal y como se describe en el análisis global de la conexión. La clasificación de las conexiones depende de los referentes que se utilicen, de de las representaciones utilizadas y del nivel de profundidad en la construcción de conocimiento matemático. La clasificación obtenida consiste en cuatro categorías que se detallan a continuación.

5.3.1 Conexiones extramatemáticas

Aparece una primera diferenciación entre conexiones que se producen en la vertiente interna de las matemáticas, que se denominarán conexiones intramatemáticas, y conexiones que establecen una relación con una situación de un contexto extramatemático, que son las extramatemáticas. En esta categoría se incluyen las conexiones entre contenidos matemáticos y situaciones de la vida diaria, conexiones entre contenidos matemáticos y otras disciplinas curriculares y, conexiones entre contenidos matemáticos y modelos que se les asocian construidos a partir de referentes reales, como pueden ser los modelos de desplazamiento asociados a la aritmética con enteros.

A lo largo del análisis se identificaron 3 conexiones extramatemáticas. Dos de ellas (C5.2 y C13.2) se refieren a conexiones que hizo la profesora entre el lenguaje matemático y el lenguaje informático y entre el lenguaje matemático y el lenguaje musical. En ambos casos se utilizaban las características del lenguaje no matemático para mostrar la importancia de entender y usar adecuadamente el lenguaje matemático. La tercera conexión extramatemática (C2.2) se refiere a la relación entre la aritmética de los números enteros y un modelo didáctico de desplazamiento unidimensional materializado en la idea de subir y bajar pisos en un edificio. En esta conexión se utilizaba la lógica propia de la situación de subir y bajar escaleras a la suma y resta de números enteros.

5.3.2 Conexiones intramatemáticas relacionadas con procesos transversales

Dentro de las conexiones intramatemáticas, aparecen a su vez dos sub tipologías: las conexiones relacionadas con procesos transversales y las conexiones conceptuales. Las conexiones relacionadas con procesos transversales son las relaciones que se establecen entre un concepto matemático y un proceso matemático transversal a la actividad matemática. En concreto, se consideran las conexiones que establecen relaciones con el razonamiento y la justificación, con la comunicación de información matemática y con las heurísticas relacionadas con la resolución de problemas. Para la identificación de estas conexiones es esencial el análisis global, ya que es necesario identificar algún elemento explícito que permita interpretar que la conexión va más allá de considerar un interconcepto y se centra en un proceso más general en las matemáticas que se aplica a una amplia variedad de interconceptos.

Aparecen 8 conexiones intramatemáticas, entre las que se diferencian tres bloques: las relacionadas con la explicación, la justificación y la demostración; las relacionadas con la rigurosidad en la utilización del lenguaje matemático; y, las que se relacionan con la capacidad de decidir de manera razonada por qué y cuándo utilizar un procedimiento o una propiedad.

En el primer grupo, relacionado con la explicación, la justificación y la demostración se identificaron 5 conexiones. En 3 casos (C1.1, C2.3 y C11.1) se enfatiza la importancia de saber explicar las cosas, de entender lo que es una demostración y un razonamiento deductivo. En otro caso (C6.1), se comparan diferentes justificaciones. Finalmente, en la conexión (C2.5), se valora la necesidad de buscar procedimientos alternativos.

El segundo grupo está formado por una única conexión (C14.2), en la que se enfatiza la importancia de la rigurosidad en la comunicación de información matemática. En este caso particular, se enfatiza la importancia de responder en los términos en los que se pregunta, lo cual se relaciona con una utilización rigurosa del lenguaje matemático que es necesaria para entender la información matemática que se recibe y ser capaz de comunicar los resultados propios.

El tercer grupo está formado por dos conexiones relacionadas con la toma de decisiones durante la resolución de una actividad matemática en relación a qué procedimientos utilizar en cada momento de la resolución. En la conexión del subepisodio C7.1 se enfatiza en la idea de que si no se conoce el procedimiento "estándar" que se está utilizando en clase, se debe siempre buscar una alternativa basada en nuestros conocimientos de la operación, como su propia definición u otras interpretaciones de la operación diferentes a las que se está utilizando. En la conexión del subepisodio C12, se comparan dos procedimientos equivalentes y se discute la utilidad de utilizar cada uno de ellos dependiendo del tipo de operación y de lo que le resulte más cómodo a cada persona.

5.3.3 Conexiones intramatemáticas con conversión

Las conexiones conceptuales son las relaciones que se establecen entre representaciones, definiciones, operaciones, propiedades, procedimientos, justificaciones, o modelos asociados a un interconcepto. Estas conexiones se diferencian a su vez en dos tipologías, las que implican conversiones y las que únicamente implican que aparezca un tratamiento, en el sentido propuesto por Duval (2006).

A lo largo del análisis se identificó una única conexión de este tipo (C5.4) en la que se pretende coordinar operaciones de potenciación y de cambio de signo con un modelo real. En este caso la lógica del modelo no determina la interpretación de las operaciones sino que se utiliza el modelo para introducir un cambio de registro que permita mostrar la diferencia entre el orden en el que se deben aplicar las dos operaciones en cada caso.

5.3.4 Conexiones intramatemáticas conceptuales con tratamiento

Las conexiones con tratamiento constituyen la mayoría de las conexiones que se identificaron en el aula. En general, las conexiones conceptuales con tratamiento son las más comunes en el aula de matemáticas, ya que al no producirse cambios de registro, muchos tratamientos pueden presentarse de forma algorítmica (Duval, 2006). A lo largo del análisis se identificaron 22 conexiones intramatemáticas conceptuales con tratamiento. Estas 22 conexiones con de tipología diversa e incluyen la mayoría de las tipologías de nodos y todas las tipologías de enlaces. Sin embargo, se identifican algunas características que permiten describir características de este tipo de conexiones.

En primer lugar se identifican conexiones hacen énfasis en las representaciones que se utilizan. Aunque todas las conexiones implican una transformación entre representaciones, hay algunas conexiones que hacen énfasis en las características de las representaciones utilizadas. En 4 casos (C5.1, C5.3, C11.2 y C13.1) se hace énfasis en la comprensión de diferencias entre operaciones que tienen representaciones similares, ya que en el tema de la aritmética con enteros se trabaja con muchas representaciones similares que representan operaciones diferentes. En otros dos casos (C7.2 y C14.1) se introducen nuevos conceptos a partir de una discusión sobre las representaciones utilizadas. En el subepisodio C7.2 se introducen explícitamente las potencias de exponente negativo, mientras que en el subepisodio C14.1 se introducen de manera implícita los números racionales mediante la exposición exhaustiva de los tipos de decimales que representan las fracciones. Finalmente, en el caso (C2.1) se discuten nuevos significados que adquieren símbolos que ya se utilizaban en la educación primaria, como es el caso del símbolo de resta.

En segundo lugar se identifican conexiones que hacen énfasis en las operaciones y sus propiedades. La conexión del subepisodio C2.1 trata de las nociones de múltiplo y divisor y la propiedad de ser máximo o mínimo. La conexión del subepisodio C5.5 hace énfasis en la relación que existe entre las operaciones que dan el mismo resultado. Las conexiones de los subepisodios C6.2 y C10 se hace énfasis en la comprensión de la definición de las potencias y de las raíces cuadradas, ya que aparecen concepciones erróneas de los alumnos al aplicar los exponentes como factores multiplicativos y las raíces como divisiones entre 2. En las conexiones de los subepisodios C8.1, C8.2 y C8.3 se discuten diferentes procedimientos para el cálculo de divisiones de potencias de enteros relacionados con las propiedades de la división. En dicha discusión se enfatiza la propiedad $\frac{a}{a} = 1$ desde diversas perspectivas y se relaciona con la definición del exponente *0* para cualquier potencia de base no nula. También se relacionan explícitamente el *0* y el *1* como elementos neutros de la suma y de la multiplicación, y se aplica la propiedad $\frac{a}{a} = 1$ a la división de los signos negativos. Finalmente, en la conexión del subepisodio C14.3 se hace énfasis de manera implícita en el elemento inverso para las fracciones.

En tercer lugar se identifican 4 conexiones que hacen énfasis en la utilización de procedimientos. Las conexiones de los subepisodios C2.4 y C2.6 se centran en la discusión de la validez de un método alternativo propuesto por un alumno, la comparación de su utilidad respecto a la regla de los signos. La conexión del subepisodio C4 hace énfasis en la verificación de que se cumplen las condiciones que permiten aplicar una regla procedimental, ya que un alumno aplica erróneamente la regla de las potencias naturales de base negativa a una potencia positiva. En la conexión del subepisodio C9, se presentan nuevos procedimientos relacionados con el cálculo de raíces cuadradas de números naturales.

En cuarto lugar se identifican 3 conexiones en las que se enfatiza el descubrimiento de una regularidad, el descubrimiento de una regla general y su aplicación. En las conexiones de los subepisodios C3.1 y C3.2 se identifica un patrón basado en la aplicación de la propiedad asociativa a factores y símbolos en una potencia de base entera, y a continuación se enuncia una regla general sobre las potencias naturales de base entera. En la conexión del subepisodio C6.3 se enfatiza la utilidad de la utilización de la regla anterior, que permite el cálculo de cualquier potencia natural de base entera únicamente a partir de la identificación del signo de la base y de si el exponente es par o impar.

5.4 Conocimiento matemático asociado a las conexiones

5.4.1 Conocimiento matemático en el aula

Los resultados del análisis del conocimiento matemático en el aula dieron como resultado la identificación de indicadores de acciones de la profesora que, evidencian la movilización de alguno de los tipos de conocimiento conocimiento considerados para el análisis (Ver Capítulo 2, Figura 3). Estos indicadores surgieron de la aplicación de la adaptación de los indicadores de Rowland et al (2009) y del análisis de los datos empíricos, por lo que no coinciden con los indicadores teóricos presentados en el Capítulo 3 (Tabla 6). A continuación, en el Cuadro 2, se muestran los distintos indicadores identificados.

Indicadores de conocimiento matemático del profesor identificados en el análisis
KOTS (Conocimiento de los temas y de su estructura)
Conoce en profundidad el contenido que enseña Conoce procedimientos alternativos

Identifica la validez de procedimientos alternativos propuestos por los alumnos
KPM (Conocimiento de la práctica matemática)
Plantea justificaciones rigurosas y muestra su importancia Indaga diferentes interpretaciones, representaciones y procedimientos de resolución muestra su validez y enfatiza la importancia de saber por qué funcionan Indaga y evalúa diferentes alternativas de resolución de problemas Generaliza resultados de clase de manera rigurosa Hace énfasis en la importancia de la rigurosidad en el lenguaje matemático
KCS (Conocimiento del contenido y de los estudiantes)
Conoce dificultades asociadas a los conceptos y sus representaciones Conoce dificultades asociadas a modelos didácticos Identifica dificultades de los estudiantes y las prevé Enfatiza, explica detalladamente y justifica resultados problemáticos para los estudiantes Aprovecha la intervención de un estudiante para enfatizar un resultado problemático para los estudiantes Interpreta los errores de los alumnos Indaga en diferentes interpretaciones de contenidos problemáticos para los alumnos
KCT (Conocimiento del contenido y de la enseñanza)
Muestra tener objetivos claros para superar las dificultades de los estudiantes Conoce diferentes modelos didácticos relacionados al tema que enseña Hace énfasis en la definición de un concepto Unifica criterios procedimentales Muestra diferentes formas de proceder Realiza explicaciones claras y concisas Aprovecha la intervención de un estudiante para profundizar un contenido matemático importante Hace referencia a resultados obtenidos previamente en clase
VCK (Conocimiento vertical del currículo)
Conoce el material que utiliza y los modelos didácticos que en ellos se emplean Prevé contenidos posteriores Conoce la evolución histórica del currículo Conoce la progresión de los contenidos matemáticos a lo largo del currículo Aprovecha la intervención del alumno para introducir un concepto matemático nuevo
LCK (Conocimiento lateral del currículo)
Relaciona las matemáticas con otras disciplinas escolares

Cuadro 2. Tipos de indicadores identificados en el análisis

5.4.2 Conocimiento asociado a cada tipo de conexión

El análisis de los datos empíricos permitió identificar para cada conexión las tipologías de conocimiento relacionadas con su establecimiento. Dado que el tercer objetivo de la investigación consiste en relacionar las características de cada tipología de conexiones con las tipologías de conocimiento matemático que se les relacionan, a continuación se muestran los resultados para cada una de las categorías de conexión identificadas. En los resultados se muestra la frecuencia de aparición de indicadores de cada tipo de conocimiento al establecerse cada tipo de conexión. Las cantidades no se refieren a identificadores distintos, sino que para cada tipo conexión, se puede identificar un mismo indicador en varias ocasiones. Se presentan en primer lugar los indicadores identificados de manera explícita y a continuación los indicadores relacionados con el enriquecimiento de las conexiones, que es el aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje que surgen al establecerse la conexión (Ver Capítulo 3).

Conocimiento relacionado con las conexiones extramatemáticas

En las tres conexiones de tipo extra matemático se identificaron 8 indicadores de conocimiento. En el análisis del conocimiento evidenciado explícitamente en el aula se identificaron 2 indicadores de conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT), 1 indicador de conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS), 1 indicador de conocimiento vertical del currículo (VCK) y 2 indicadores de conocimiento lateral del currículo (LCK). En el análisis del conocimiento que podría enriquecer la conexión se identifican 2 indicadores de conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS).

El KCT identificado en el análisis del conocimiento explícito se relaciona con el conocimiento de los modelos didácticos que utiliza –que en este caso eran modelos que utilizaban elementos extramatemáticos– y con el aprovechamiento de errores para la enfatización en un contenido importante, en este caso la utilización rigurosa del lenguaje matemático. El KCS identificado se relaciona con la identificación de un error común en los estudiantes relacionado con la utilización del signo “=” y con el énfasis que hace la profesora en la utilización correcta de este símbolo. El VCK identificado en el análisis del conocimiento explícito se relaciona con el conocimiento del libro y de los modelos que en él se proponen. En este caso, la profesora sigue la misma secuencia del libro y utiliza los mismos modelos. El LCK identificado en el análisis explícito se relaciona con el conocimiento del lenguaje musical y del lenguaje informático.

El KCS identificado en el análisis del enriquecimiento de la conexión se relaciona con el conocimiento de las dificultades del modelo de desplazamiento unidimensional utilizado, y con la utilización de la calculadora para mostrar la diferencia entre el signo “=” como igualdad en valor numérico a ambos lados del signo y como orden de ejecución de una operación en el caso de la calculadora. Si se transcriben literalmente las órdenes que se introducen en la calculadora para operaciones sucesivas se obtienen igualdades matemáticamente incorrectas, como la que propone la estudiante.

Por tanto, se identifica que, en el contexto particular de la investigación, cuando se trabajan las conexiones extramatemáticas aparecen indicadores de conocimiento relacionados con situaciones extramatemáticas, ya sean modelos didácticos u otros dominios de conocimientos. Se identificó que para enriquecer la conexión, este conocimiento debe estar complementado por un conocimiento asociado con la enseñanza, que permita aprovechar las relaciones que se establecen al introducir situaciones extramatemáticas, así como un conocimiento de los estudiantes que permita aprovechar dichas situaciones para intentar resolver las dificultades comunes que encuentran los estudiantes.

Conocimiento relacionado con las conexiones relativas a procesos transversales

En las 8 conexiones relativas a procesos transversales se identificaron 21 indicadores de conocimiento. En el análisis del conocimiento detectado explícitamente en el aula se identificaron 6 indicadores de conocimiento de los temas y de su estructura (KOTS), 6 indicadores de conocimiento de la práctica matemática, 3 indicadores de conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT) y 2 indicadores de conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS). En el análisis del conocimiento que podría enriquecer la conexión se identifican 2 indicadores de conocimiento de la práctica matemática, 1 indicador de conocimiento de la enseñanza (KCT) y 2 indicadores de conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS).

El KOTS identificado en el análisis del conocimiento explícito se relaciona con el conocimiento de contenidos, de procedimientos alternativos asociados a tales contenidos y de su validez. Se identifica la deducción de una regla general para el máximo común divisor y del mínimo común múltiplo de parejas de números en que uno divida al otro. Aparecen también diferentes procedimientos relacionados con la resta de números enteros, con multiplicaciones de enteros y con la deducción de una regla general para el cálculo de potencias naturales de números enteros. Se trata de un conocimiento profundo de las definiciones, las operaciones, las propiedades y los procedimientos.

El KPM identificado en el análisis del conocimiento explícito se relaciona con la capacidad de la profesora para demostrar, comparar justificaciones en base a un criterio de generalización, indagar en procedimientos y representaciones alternativas, reflexionar sobre la validez de los procedimientos y establecer criterios de valoración para dichos procedimientos. Se trata por tanto de un conocimiento que excede el conocimiento de los contenidos y de su estructura, ya que se refiere a un conocimiento transversal, enfocado en la rigurosidad, en la justificación clara de resultados, en la búsqueda de la generalización, y en la comprensión de los procedimientos para poder decidir qué procedimiento es más adecuado en cada situación.

El KCT identificado en el análisis del conocimiento explícito se relaciona con la capacidad de la profesora para graduar el vocabulario matemático que utiliza, para unificar criterios procedimentales y utilizar resultados obtenidos previamente en clase. Por ejemplo, al realizar una demostración, la profesora utiliza la palabra sospecha para hacer referencia a la hipótesis que se quiere probar y usa la expresión estar seguros para referirse a la demostración finalizada. Se trata de un conocimiento relacionado con el uso de herramientas didácticas dirigidas a presentar los contenidos matemáticos de un forma clara, y evitando de manera explícita la creación de dificultades en los estudiantes.

El KCS identificado en el análisis del conocimiento explícito para las CRP se relaciona con el conocimiento de las dificultades de los alumnos y con la forma en que la profesora maneja estas dificultades. En el caso de las CRP identificadas se identifica conocimiento relacionado con la dificultad que tienen los alumnos para comprender la justificación de la regla de los signos, así como conocimiento relacionado con el error común en los estudiantes al responder a las actividades matemáticas sin tener en cuenta la pregunta inicial.

En el análisis del enriquecimiento de las conexiones de tipo CRP se identificaron indicadores de conocimiento en 3 de las 8 conexiones. Se identificaron indicadores de 3 tipologías. En primer lugar se identificaron dos indicadores de KPM relacionados con la voluntad de enfatizar en la importancia tanto de poder justificar los procedimientos así como poder indagar en procedimientos alternativos. En segundo lugar, se identificó un indicador de KCT relacionado con la capacidad para mostrar diferentes formas de proceder en matemáticas. Finalmente, se identificó un indicador de KCS relacionado con la capacidad para responder de manera adecuada a las propuestas de los estudiantes para evitar que desarrollen concepciones erróneas.

Por tanto, se identifica que, en el contexto particular de la investigación, cuando se trabajan las conexiones de tipo CRP tienen una especial relevancia el KOTS y el KPM, que aparecen cada uno en 6 y en 8 conexiones respectivamente. Estos dos tipos de conocimiento, son complementados por un conocimiento de tipo de didáctico que se relaciona con la forma en que se introducen los conceptos transversales, con la aproximación a diferentes procedimientos y con la identificación de las dificultades de los estudiantes y las acciones que se llevan a cabo para superarlas.

Conocimiento relacionado con las conexiones intramatemáticas conceptuales con conversión

El análisis de los datos arrojo como resultado una única conexión intramatemática conceptual con conversión (C5.4). En esta conexión se identificó un indicador de conocimiento en el análisis del conocimiento explícito. Esta conexión se relaciona con el conocimiento de los modelos asociados al contenido que enseña (KCT). El análisis del conocimiento para el enriquecimiento de la conexión permitió identificar un conocimiento asociado con las dificultades que encuentran los alumnos al trabajar con tales modelos (KCS). Por tanto, se observa que las conexiones conceptuales con conversión requieren del profesor un conocimiento de los dos registros que se utilizan así como un conocimiento de las dificultades que encuentran los alumnos al cambiar de registro.

Conocimiento relacionado con las conexiones intramatemáticas conceptuales con tratamiento

En las 22 conexiones intramatemáticas conceptuales con tratamiento se identificaron 68 indicadores de conocimiento. En el análisis del conocimiento detectado explícitamente en el aula se identificaron 12 indicadores de conocimiento de los temas y de su estructura (KOTS), 3 indicadores de conocimiento de la práctica matemática (KPM), 18 indicadores de conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT), 10 indicadores de conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS), y 4 indicadores de conocimiento vertical del currículo (VCK). En el análisis del conocimiento que podría enriquecer la conexión se identifica 1 indicador de conocimiento de la práctica matemática (KPM), 11 indicadores de conocimiento de la enseñanza (KCT) y 10 indicadores de conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS).

El KOTS identificado en el análisis del conocimiento explícito se relaciona con el conocimiento de contenidos, de las representaciones utilizadas y de procedimientos alternativos asociados a tales contenidos. En 5 de los 12 casos identificados los indicadores se relacionan con un conocimiento profundo de las representaciones asociadas a operaciones aritméticas con números enteros y sus diferencias (C2.1, C5.3, C8.2, C8.3 y C13.1). En 3 casos se trata de un conocimiento de diferentes procedimientos equivalentes para la resolución de una operación (C3.1, C6.3 y C8.1). En 2 casos se trata de conocimiento relacionado con la capacidad para realizar razonamientos lógicos rigurosos basados en la comprensión profunda de las operaciones, sus representaciones y sus propiedades (C5.5 y C7.2). Finalmente, en un caso se trata de un conocimiento relacionado con la capacidad de la profesora para identificar la validez de procedimientos propuestos por los alumnos que no hayan sido trabajados en el aula (C2.4).

El KPM identificado en el análisis del conocimiento explícito se relaciona con la capacidad de la profesora para realizar razonamientos rigurosos, identificando patrones, estableciendo generalizaciones y valorando la utilización de un procedimiento en un contexto determinado. En 2 de los indicadores identificados el conocimiento se relaciona con la capacidad para generalizar un resultado obtenido en el aula. En el tercer caso, se trata de un conocimiento relacionado con la capacidad para valorar la utilización de diferentes procedimientos en un contexto determinado.

El KCT identificado en el análisis del conocimiento explícito consiste en acciones de la profesora relacionadas con la planificación de las sesiones y de la presentación de los contenidos a lo largo de la unidad didáctica; en acciones dirigidas a realizar una exposición clara y concisa de los contenidos; en acciones dirigidas a aprovechar las intervenciones de los estudiantes para enfatizar conocimientos importantes o para introducir nuevas definiciones. En 3 de los indicadores identificados se identifica que la profesora ha planificado de manera detallada y progresiva la presentación de los contenidos y de las actividades con el objetivo de evitar el desarrollo de dificultades en los alumnos (C2.1, C3.1 y C3.2). En 5 de los indicadores el conocimiento se hace referencia a la presentación clara y concisa de los contenidos, que incluye el énfasis en las definiciones de los conceptos y la unificación de criterios procedimentales (C1.2, C2.4, C4, C5.1 y C5.3). En 8 de los indicadores se identificó conocimiento relacionado con el aprovechamiento de las intervenciones de los estudiantes para la introducción o la enfatización de conceptos matemáticos importantes (C3.1, C7.2, C8.1, C8.2, C8.3, C10, C13.1 y C14.1).

El KCS identificado en el análisis del conocimiento explícito consiste en la previsión de errores de los estudiantes, en la identificación de errores en la actividad de aula, en la capacidad para aprovechar los errores para mostrar estas dificultades a los estudiantes, y en la capacidad para interpretar los errores de los estudiantes. En 3 de los indicadores identificados la profesora prevé dificultades de los estudiantes como pueden ser los diferentes significados del paréntesis o del signo menos en la aritmética de los enteros (C2.1, C2.4 y C2.6). En 2 de los indicadores identificados la profesora identificó errores de los estudiantes (C5.1 y C6.2). En 3 de los indicadores la profesora aprovecha las intervenciones de los alumnos para enfatizar contenidos problemáticos para los estudiantes (C5.5, C8.2 y C10). Finalmente, en un indicador la profesora realiza explícitamente una interpretación de los errores de los estudiantes.

El VCK identificado en el análisis del conocimiento explícito consiste en la previsión de contenidos posteriores, en el conocimiento de la evolución histórica del currículo y en la progresión que siguen los contenidos matemáticos a lo largo del currículo escolar. En 2 casos se identificó una previsión de contenidos posteriores por parte de la profesora (C2.6 y C7.2). En 1 caso se identificó un conocimiento relacionado con la evolución histórica del currículo (C9). En 1 caso se identificó un conocimiento relacionado con la progesión de los contenidos matemáticos a lo largo del currículo escolar.

En el análisis del posible enriquecimiento de las conexiones intramatemáticas conceptuales con tratamiento se identificaron indicadores de conocimiento en 15 de las 22 conexiones. Se identificaron un total de 22 indicadores de 3 tipologías diferentes: 1 de KPM, 11 de KCT, y 10 de KCS. El indicador de KPM se refiere a un mejor aprovechamiento de una conexión si la profesora indagara nuevas formas de resolver problemas propuestas por un alumno.

Los 11 indicadores de KCT identificados en el análisis del posible enriquecimiento de las conexiones de tipo conceptual con tratamiento se refieren a la capacidad de la profesora para aprovechar discusiones de aula, o intervenciones de los alumnos para profundizar en un concepto, para resolver un error común, para hacer énfasis en un procedimiento, o para introducir un concepto nuevo.

Los 10 indicadores de KCS son de tipología diversa, pero todos se relacionan con dificultades que encuentran los estudiantes. En 2 casos se identifica que se podría enriquecer la conexión establecida si la profesora aprovechara la intervención de un alumno para profundizar en un contenido problemático para ellos (C1.2 y C8.1). En 3 casos se identifica que la conexión se podría enriquecer si la profesora explorara diferentes interpretaciones de un concepto problemático (C5.1, C5.3, y C13.1). En 2 casos se identifica que la explicación y la justificación de un resultado problemático para los alumnos podría enriquecer la conexión (C8.3 y C9). En 1 caso se identifica que se podría la conexión se enriquecería si la profesora identificara un error (C4), en otro caso si la profesora respondiera adecuadamente a la propuesta de un alumno (C5.5), y en otro caso si la profesora hiciera énfasis en un contenido problemático para los estudiantes (C7.2).

Por tanto, se identifica que, en el contexto particular de la investigación, cuando se trabajan las conexiones de tipo conceptual con tratamiento tienen una especial relevancia el KOTS, el KCT, y el KCS, que aparecen cada uno en 12, 29 y en 20 casos respectivamente. En líneas generales se identifica que las conexiones conceptuales con tratamiento identificadas están relacionadas con operaciones de números enteros, y al establecerse conexiones aparecen indicadores de conocimiento del profesor relacionados con la comprensión de las operaciones, sus representaciones, sus propiedades, y los procedimientos que se utilizan. También aparecen indicadores de conocimiento relacionado con la planificación de la unidad didáctica, la claridad al ponerla en práctica y la capacidad de la profesora para aprovechar las intervenciones de los estudiantes para profundizar algunos procedimientos y algunas representaciones. Finalmente, resaltan indicadores relacionados con la capacidad de la profesora para la previsión, la identificación y las acciones que lleva a cabo en relación a las dificultades que experimentan los estudiantes al trabajar la aritmética de los números enteros.

En cuanto al conocimiento que podría favorecer una construcción profunda de conocimiento matemático en los subepisodios definidos por estas conexiones se identifica una presencia mayoritaria del KS (KCT y KCS). En general, se detecta que se podría mejorar el aprovechamiento de las oportunidades que surgen en los subepisodios si la profesora moviliza un conocimiento relacionado con indagar en las razones por las que los alumnos encuentran dificultades, así como poder enfatizar en dar razones claras y coherentes que disminuyan una visión confusa o arbitraria de las matemáticas por parte de los alumnos.

5.5 Interacciones entre diferentes tipos de conocimiento

El cuarto objetivo de esta investigación es explorar las relaciones que existen entre diferentes tipos de conocimiento y su incidencia en el establecimiento de conexiones. A lo largo del análisis aparecen diferentes tipologías de conocimiento relacionadas con el establecimiento de conexiones, por lo que nos interesa analizar si existen patrones de interacción entre diferentes categorías de conocimiento. A continuación se muetran las interacciones identificadas.

5.5.1 LCK – KCT

Esta interacción consiste en la suma de un conocimiento de los contenidos de otras disciplinas curriculares y un conocimiento relacionado con la elección de ejemplos, de representaciones y de procedimientos. La coordinación de estos dos tipos de conocimiento puede mejorar la capacidad del profesor para utilizar en la clase de matemáticas conocimientos relacionados con otras disciplinas curriculares, como la música, las ciencias sociales o la informática, como se observó en las conexiones de los subepisodios C5.2 y C13.2.

5.5.2 KOTS – KPM

Esta interacción aparece explícitamente en 6 conexiones (C1.1, C3.1, C6.1, C7.1, C8.1, y C12), y en 3 conexiones aparece en el análisis del posible enriquecimiento de la conexión (C2.3, C2.4 y C2.5). Esta interacción consiste en la coordinación entre un conocimiento profundo de los contenidos (definiciones, representaciones, operaciones, propiedades, y procedimientos) y de su estructura con un conocimiento de la práctica matemática relacionado con cómo se crea, se comunica y se justifica el conocimiento matemático.

Esta coordinación se relaciona con el establecimiento de conexiones de tipo CRP, y en menor medida con conexiones de tipo conceptual con tratamiento. En el caso de las conexiones relativas a procesos transversales, es necesario que la profesora pueda utilizar la actividad de aula para hacer énfasis en un proceso transversal. Para ello, es necesario que se conozcan estos procesos transversales y que se conozcan en profundidad los contenidos que se trabajan para que la conexión sea explícita y pueda favorecer la construcción de conocimiento matemático por parte de los estudiantes. En el caso de las conexiones conceptuales en las que aparece esta coordinación ocurre algo similar, aunque por el contexto y el énfasis de la conexión no se clasifique como una CRP.

Dado que estas conexiones se producen en un contexto de aula, y que se relacionan con el aprovechamiento de la resolución de una actividad o de una discusión de clase que n muchos casos se relaciona con concepciones erróneas de los estudiantes, existe una relación entre la interacción KOTS – KPM y un conocimiento de la enseñanza, así como de los estudiantes (KCT y KCS).

5.5.3 KCT – KCS

Esta interacción aparece explícitamente en 6 conexiones (C2.1, C2.4, C5.1, C8.2, C10, y C13.1), y en 12 conexiones aparece en el análisis del posible enriquecimiento de la conexión (C1.2, C2.2, C2.5, C4, C5.3, C5.4, C5.5, C6.2, C7.2, C8.1, C8.3, y C9). Esta interacción consiste en la coordinación entre un conocimiento relacionado con la planificación de la secuencia didáctica, de la elección de ejemplos o representaciones y un conocimiento de los errores de los alumnos, de lo que encuentran motivador, así como interpretar la ideas de los alumnos.

Esta interacción entre los dos tipos de conocimiento de tipo pedagógico se identifica sobre todo en las conexiones conceptuales con tratamiento, en las que se discuten representaciones, propiedades y procedimientos asociados a las operaciones con números enteros. La coordinación de estas dos tipologías de conocimiento se relaciona con la capacidad de la profesora de planificar la secuencia didáctica a partir de la previsión de dificultades por parte de los alumnos (C2.1). También se relaciona con la capacidad de la profesora para decidir unificar criterios procedimentales en previsión de contenidos posteriores (C2.4), o aprovechar la intervención errónea de un alumno para hacer énfasis en una idea matemática importante (C8.2).

Cabe destacar que en 11 de las 18 conexiones en que se coordinan el KCT con el KCS aparece también el KOTS (C2.1, C2.4, C2.5, C5.1, C5.3, C5.5, C7.2, C8.1, C8.2, C8.3 y C13.1). Esto se debe a que para que la profesora sea capaz de planificar una secuencia para superar errores, o justificar la equivalencia de procedimientos y unificar criterios procedimentales, o reconocer errores y aprovecharlos para enfatizar contenidos matemáticos es necesario que la profesora conozca de manera profunda el contenido que está trabajando y su estructura, ya que es necesario que identifique errores, conozca diferentes representaciones y procedimientos, y pueda relacionar las dificultades de los estudiantes con otros contenidos en los que aparezcan situaciones similares.

Esta interacción se produce a diferentes niveles que se relacionan con los propios niveles de cada una de las tipologías de conocimiento. En un primer nivel la profesora prevé dificultades de los alumnos. En un segundo nivel, la profesora planifica la secuencia, decide ejemplos y representaciones en base a las dificultades identificadas en el primer nivel. En un tercer nivel, la profesora interpreta tanto los errores de los estudiantes como las ideas correctas que proponen durante la actividad de aula, y en base a esta interpretación modifica su planificación inicial.

5.5.4 Otras interacciones

Los tres casos anteriores son los casos más significativos desde la perspectiva del establecimiento de conexiones. Sin embargo, se identifican muchas más interacciones entre tipos de conocimiento. Dependiendo de la complejidad de la conexión, pueden aparecer combinaciones diversas, que suelen incluir alguna de las dos tipologías de conocimiento pedagógico del contenido (KCT y KCS), en combinación con alguna de las otras 4 tipologías, como por ejemplo el caso en que se produce una conexión con otros contenidos de la matemática escolar, que incluyen la aparición del VCK.

6 Discusión y conclusiones

Las conclusiones que se describen a continuación se basan en los resultados empíricos que se detallan en el Capítulo 5 y son aportaciones novedosas al estudio del establecimiento de conexiones en el aula y de su relación con el conocimiento del profesor.

Se presentan aportaciones relevantes relacionadas con la caracterización de las conexiones en un contexto de práctica de aula. Se identifican tipologías del conocimiento del profesor relacionadas con el establecimiento de conexiones y con el aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje asociadas que emergen cuando se establecen conexiones. Finalmente, se identifican distintos niveles de profundidad en el conocimiento relacionado con el establecimiento de conexiones en el aula.

La aproximación a la respuesta de la pregunta de investigación *¿Cómo influye el conocimiento matemático del profesor en el establecimiento de conexiones en el aula?* se expone en dos etapas. En primer lugar, se discuten los resultados con la caracterización y la clasificación de las conexiones teniendo en cuenta su relación con la construcción de conocimiento matemático por parte de los alumnos. En segundo lugar, se discuten los resultados asociados al que se asocia a cada tipo de conexión y a las interacciones que se producen entre los diferentes tipos de conocimiento, proporcionando una interpretación integrada de los resultados que representa la respuesta a la pregunta de investigación.

Posteriormente, se discute la idoneidad de la propuesta de investigación en relación a los resultados obtenidos, así como la adecuación del marco teórico y del enfoque metodológico. A continuación se exponen diferentes recomendaciones relacionadas con las implicaciones de esta investigación para la didáctica y para la formación del profesorado. Finalmente, se discuten las limitaciones propias del estudio y se proponen líneas futuras de investigación.

6.1 Discusión sobre la caracterización de las conexiones en el aula

Las conexiones en el aula

La definición de conexión construida a partir del análisis de los datos empíricos reveló que las conexiones matemáticas que se establecen en el aula muchas veces se relacionan con problemas de comprensión y errores de los estudiantes. En aproximadamente un tercio de las conexiones identificadas en los episodios de aula el contexto en el que se producía la conexión era la discusión en clase de un error de un estudiante, lo cual revela que cuando se discuten los errores de los estudiantes se pueden desencadenar conexiones cuyo establecimiento explícito puede ayudar a resolver sus problemas de comprensión.

A priori se pensaba que un entorno en que los estudiantes pueden intervenir y proponer ideas se producen potencialmente más conexiones que uno en el que los estudiantes no intervengan. El análisis de los datos empíricos confirmó esta premisa y reveló, además, que en un entorno en que los estudiantes tienen un papel activo sus errores generan conexiones que de otra forma difícilmente se darían. El establecimiento de estas conexiones a partir de la aparición explícita de un error puede favorecer la comprensión de por qué se produce el error por parte del alumno y, por tanto, mejorar su comprensión de las matemáticas.

La conjunción de los análisis específico y global para la caracterización de las conexiones revela que las conexiones que se producen en el aula se deben entender desde dos perspectivas. En primer lugar, las conexiones tienen una dimensión específica que consiste en la coordinación de enlaces en estructuras diversas que dependen de las intervenciones tanto de los alumnos como de la profesora. En segundo lugar, las conexiones tienen una dimensión global que las sitúa en el contexto de construcción del conocimiento matemático que se produce en el aula y se refiere a la construcción de significado, a la finalidad de la conexión y a los aspectos matemáticos que enfatiza.

Muchas de las conexiones identificadas se producen a partir de las intervenciones de los alumnos y de la profesora en discusiones que se producen en el aula, abiertas a todo el grupo clase. En cada intervención, los participantes construyen argumentaciones, basadas en su propia interpretación de los contenidos que se discuten, que buscan influir en la construcción colectiva de significado. Este tipo de interacción múltiple implica una elevada complejidad en las acciones de los estudiantes (Chico, 2014), lo que hace que en muchos casos las redes de enlaces que describen dichas acciones –las intervenciones– sean también complejas, ya que dependen de diferentes variables como son la cantidad de participantes, sus propias interpretaciones de los contenidos, la interrelación entre las intervenciones previas y cada intervención que se produce, o la gestión de la profesora como gestor de la actividad de aula.

La complejidad de las redes hace que sea muy importante la enfatización que realiza la profesora, ya que de lo contrario la conexión puede no tener una influencia en la comprensión del conocimiento matemático por parte de los estudiantes. Esto se relaciona con la capacidad de la profesora para tratar los conceptos matemáticos desde una perspectiva específica (definiciones, representaciones, propiedades, o procedimientos) y desde una perspectiva global (con qué conceptos se relaciona o en qué contextos se aplica).

Aunque se considera que el peso de la gestión de la profesora como reguladora de las dimensiones internas y externas de las conexiones puede variar dependiendo de la organización de aula (grupos cooperativos, clases magistrales participativas o clases magistrales no participativas). Se observa que uno de los papeles de la profesora como guía en la construcción de conocimiento matemático por parte de los alumnos es el de ser capaz de aprovechar las conexiones que se producen en la actividad matemática de los estudiantes para llamar la atención sobre conceptos importantes, así como profundizar en conceptos problemáticos para los alumnos.

Clasificación de las conexiones

Las conexiones quedan caracterizadas con base en los referentes que se utilizan; en cómo aporta significado al interconcepto (ver Capítulo 3) que se trabaja; y, en las representaciones utilizadas. Estas tres variables se analizan teniendo en cuenta los análisis específico y global discutidos en el Capítulo 5. La clasificación de las conexiones informa sobre aspectos esenciales en la construcción de conocimiento matemático como son los sistemas de signos que se utilizan, así como en nivel de generalidad y abstracción que se persigue. Se considera que la clasificación construida para las conexiones tiene una validez externa (Bryman, 2004), ya que se establecen unos criterios claros para ser aplicada a cualquier conexión que se produzca en el aula.

A continuación se discute la aportación a la construcción de conocimiento matemático de cada tipo de conexión, a la luz de los resultados del Capítulo 5. En primer lugar, se identifica una división entre conexiones extramatemáticas y conexiones intramatemáticas.

Conexiones extramatemáticas

Las conexiones extramatemáticas son conexiones en las que se establece una relación entre un referente extramatemático y algún contenido matemático. Se definen dos tipos de conexiones principales: conexiones que muestran aplicaciones de las matemáticas a situaciones extramatemáticas y conexiones en las que aparecen situaciones curriculares que ya han sido modelizadas matemáticamente de una manera implícita y que pueden servir para mejorar la comprensión de los conceptos matemáticos. En el primer caso son conexiones desde las matemáticas hacia el conocimiento de aspectos de la vida real; mientras que en el segundo caso, se trata de situaciones bien conocidas que ayudan a dar sentido a nuevos contenidos matemáticos.

Estos resultados son consistentes con la diferenciación propuesta por Walkerdine (1998) entre actividades cotidianas y actividades matemáticas, según la cual las actividades cotidianas se distinguen de las matemáticas porque: (a) tienen unos objetivos claramente diferentes a los de la actividad matemática escolar; (b) utilizan una tipología de discurso diferente a la que se utiliza en el aula de matemáticas; y, (c) requieren de una simbología y un lenguaje que difieren de forma marcada de la simbología y la terminología utilizada en matemáticas.

En el caso de las conexiones extramatemáticas, hay que añadir a las actividades cotidianas los contenidos de otras disciplinas curriculares como son las artes plásticas, las ciencias sociales, las ciencias experimentales, la economía, la tecnología o la música, que en líneas generales comparten estas tres características. En algunas disciplinas científicas estas tres características se cumplen de una manera menos marcada, ya que algunas veces –como al resolver problemas de física– los objetivos pueden coincidir parcialmente, la tipología del discurso tiene coincidencias y se usan algunas simbologías comunes, pero el fenómeno que se analiza desde la física sí tiene unas características marcadamente diferentes a las matemáticas según los criterios (a), (b) y (c).

Se considera que las situaciones externas a las matemáticas pueden ser una fuente de situaciones matemáticas significativas y que los alumnos deben tener la oportunidad de utilizar las matemáticas para comprender mejor el mundo que los rodea, como ocurre con actividades como "Mountain Bike Mathematics" o "Symmetries of the tennis court", analizadas en Presmeg (2006), así como de explorar diferentes representaciones de los conceptos matemáticos que construyen. Además, la capacidad de comprender cambios de registro de representación es una de las claves de la comprensión de las matemáticas (Por ejemplo, Duval, 2006; Font, 1999).

No obstante, los resultados sugieren que conviene evitar relaciones que dificulten la comprensión por parte de los alumnos al pretender establecer isomorfismos inexistentes. El establecimiento explícito de conexiones extramatemáticas puede favorecer la construcción de un conocimiento más profundo por parte de los alumnos en tanto que deberán coordinar representaciones de un mismo interconcepto en diferentes registros, siempre y cuando esta coordinación no sea forzada, como ocurre en el caso de la utilización de las escaleras como ejemplo de esquema aditivo para los números enteros.

Conexiones intramatemáticas relativas a procesos transversales

Las conexiones intramatemáticas se dividen a su vez en dos tipologías: las conexiones relativas a procesos transversales y las conexiones conceptuales. Las conexiones relativas a procesos transversales son conexiones que además de profundizar en el conocimiento del contenido matemático profundizan en un conocimiento sobre las matemáticas. Este conocimiento, por su carácter transversal, puede ser utilizado en diferentes contextos y, por tanto, hace parte de un conocimiento general de las matemáticas que puede servir para la regulación de la propia actividad matemática.

Las conexiones relativas a procesos transversales identificadas informan del paso de actividades de tipo algorítmico y mecanizado a razonamientos de un nivel de abstracción superior. Por ejemplo, la rigurosidad en la representación y en la comunicación de resultados matemáticos, la justificación y demostración, o la comparación entre justificaciones de un mismo resultado con base en su claridad y a su aplicabilidad.

Estas conexiones pueden ayudar a los alumnos a mejorar la comprensión de los procedimientos particulares que se trabajaban y, por tanto, se produce una vuelta de lo más general y abstracto a lo más particular y procedimental. Los resultados sugieren que dicho dinamismo entre un contexto técnico o procedimental y otro más abstracto o general es el que precisa de las conexiones, se puede ver reforzado cuando se establecen conexiones en el aula.

Las conexiones de este tipo que se identificaron informan de la importancia del establecimiento de conexiones, en tanto que favorecen un nivel más elevado de abstracción en el cuál se identifican regularidades. Se trata la información de manera rigurosa y se desarrolla un conocimiento estratégico para valorar la idoneidad de un procedimiento en un contexto concreto.

Las conexiones relativas a procesos transversales tienen además una dimensión metacognitiva. En este contexto, se entiende la metacognición como el conocimiento de los propios procesos cognitivos y sus productos y se relaciona con la monitorización y regulación de dichos procesos cognitivos (Flavell, 1976). Las conexiones relativas a procesos transversales no solo se refieren a desarrollar un conocimiento de los procesos, sino a la utilización de estos procesos para poder tener criterios de auto regulación al trabajar las matemáticas.

Conexiones intramatemáticas conceptuales con conversión

Las conexiones conceptuales se dividen en dos tipos: las conexiones en las que se produce una conversión –transformación entre representaciones con cambio de registro– y las conexiones en que se produce un tratamiento –transformación entre representaciones en un mismo registro. Las conexiones en las que se produce una conversión son conexiones que relacionan representaciones en registros diferentes, como es el caso de la relación entre la ecuación de una función y su gráfica.

En el contexto de esta investigación, únicamente se identificó una conexión de este tipo. Igual que en el caso de las conexiones extramatemáticas esta escasez de conexiones conceptuales con conversión se relaciona con el carácter de la unidad didáctica que se analiza. En el grupo clase en el que se realizó la recogida de datos, el tema de la introducción a la aritmética con números enteros se aborda principalmente desde la representación simbólica de los números y el único cambio de registro que se produce al representar los números y sus operaciones es la recta numérica. De hecho, la única conexión conceptual con conversión que se identificó se relaciona con la utilización de la representación de los números enteros en la recta numérica.

Conexiones intramatemáticas conceptuales con tratamiento

Las conexiones conceptuales con tratamiento son, por el contrario, las más numerosas dentro del conjunto de conexiones identificadas en el análisis. Todas las conexiones conceptuales con tratamiento identificadas se producen en un registro mono funcional (Duval, 2006), que en este caso era la representación simbólica de los números enteros. Esto es coherente con la afirmación hecha por Duval (2006) referente a la tendencia de los profesores a evitar registros multifuncionales. Esto se debe a que en los registros monofuncionales los tratamientos pueden tomar la forma de algoritmos, lo que evita las confusiones asociadas a la multifuncionalidad.

En todas las conexiones conceptuales con tratamiento identificadas, las representaciones utilizadas determinaron la relación lógica que constituía la conexión. A pesar de trabajar en un registro monofuncional se identificaron dificultades de los alumnos al relacionar algunas representaciones. En varios casos se produjeron confusiones relacionadas con la comprensión de la diferencia entre representaciones. Esto confirma la idea de Duval (2006) de que las propias transformaciones simbólicas son una fuente de incomprensión para los alumnos. Igualmente remarca que es necesario tener en cuenta la relación entre los diferentes registros en los que se pueden representar los conceptos matemáticos y las transformaciones entre los mismos.

También se puede observar que el establecimiento de conexiones intramatemáticas con tratamiento contribuye a que los alumnos no construyan un conocimiento matemático disjunto. Entendido éste como un conjunto de procedimientos aislados que en muchos casos no tienen una justificación clara y que se relaciona con una comprensión superficial de las matemáticas (Duval, 2006).

El establecimiento explícito de conexiones conceptuales con tratamiento se asocia a discusiones sobre la comprensión de los símbolos y los conceptos que representan, sus propiedades y los procedimientos asociados. Cuando se producen de manera explícita conexiones conceptuales con tratamiento, los alumnos tienen la oportunidad de coordinar operaciones entre símbolos con operaciones entre construcciones mentales, lo que puede favorecer una construcción de un conocimiento conexo y más profundo.

6.2 Discusión sobre la relación entre el conocimiento del profesor y las conexiones

Conocimiento del profesor asociado a los diferentes tipos de conexiones

Tal y como se discute más arriba el papel de la profesora es esencial en el establecimiento de conexiones en el aula, siempre que la profesora tenga un rol activo y protagonista en la gestión de la construcción de conocimiento matemático. En particular, es esencial el conocimiento de la profesora, ya que es lo que le permite desarrollar capacidades relacionadas con la generación y el aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje.

Los resultados mostraron que cada tipología de conexión identificada tiene asociado un conjunto de capacidades relacionadas con diferentes tipologías de conocimiento del profesor. Asimismo, se observaron patrones de interacción entre diferentes tipos de conocimiento que se asociaban al enriquecimiento de las conexiones.

En el caso de las conexiones extramatemáticas destaca la relación con el conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT) y el conocimiento lateral del currículo (LCK). El conocimiento asociado con las conexiones extramatemáticas se asocia con el conocimiento de modelos didácticos que utilizan referentes extramatemáticos, así como con la capacidad para aprovechar situaciones extramatemáticas para trabajar conceptos matemáticos. Además, el conocimiento lateral del currículo se relaciona con la capacidad de utilizar contenidos de otras disciplinas curriculares para mejorar la comprensión de un concepto matemático por parte de los estudiantes o bien utilizar las matemáticas para comprender mejor el fenómeno extramatemático al que se refiera dicho contenido.

En el caso las conexiones intramatemáticas relativas a procesos transversales, destaca la relación con el conocimiento de los temas y de su estructura (KOTS) y con el conocimiento de la práctica matemática (KPM). El primer tipo de conocimiento se relaciona con una comprensión profunda de los conceptos y de la forma en que éstos se relacionan. Esta comprensión es necesaria para identificar la validez de procedimientos alternativos o patrones que puedan ayudar a formular una regla general. El segundo tipo de conocimiento se relaciona con la capacidad para poder proponer, gestionar y valorar en el aula generalizaciones, justificaciones o demostraciones.

En las conexiones conceptuales con conversión se identificó una relación con el conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCS) que consistía en el conocimiento de los modelos didácticos asociados a la enseñanza de los números enteros. En general, a la vista de la caracterización que se ha realizado de este tipo de conexiones así como de este tipo de conocimiento se considera previsible que esta relación exista en una mayoría de casos, ya que para que se puedan establecer conexiones conceptuales con conversión es necesario que el profesor tenga la capacidad de realizar cambios de registro. Esto se relaciona con el indicador "muestra diferentes formas de proceder" del Cuadro 2 del Capítulo 5.

En el caso de las conexiones conceptuales con tratamiento resalta una relación con el conocimiento de los temas y su estructura (KOTS) y con el conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT). El primer tipo de conocimiento se relaciona con el conocimiento profundo de los contenidos, de las posibles forma de representarlos, de las operaciones que definen y de sus propiedades y de los procedimientos que se pueden utilizar así como de la validez de los procedimientos alternativos que proponen los alumnos; mientras que el segundo se relaciona con la planificación y la claridad de la explicación, para evitar bloqueos y faltas de comprensión por parte de los estudiantes.

En general, llama la atención que en la mayoría de las conexiones se identificó algún indicador explícito de conocimiento de los temas y de su estructura. Este hecho muestra que este tipo de conocimiento es una condición necesaria para el establecimiento cotidiano de conexiones en el aula. Sin embargo, en ningún caso se evidenció que este conocimiento fuera suficiente para el establecimiento de una conexión, como sí ocurrió con otros tipos de conocimiento.

Lo anterior confirma que el conocimiento de los temas y de su estructura (KOTS) es un componente indispensable y fundamental en la formación del profesorado de matemáticas, que debe ser complementado por otras tipologías de conocimiento para que se pueda dar en el aula una construcción conectada y profunda de conocimiento matemático. En el caso de las conexiones conceptuales con conversión, aunque no se dispone de evidencias empíricas explícitas en esta investigación, es previsible que exista también una fuerte relación con el conocimiento de los temas y de su estructura (KOTS), ya que tiene que ver con un conocimiento profundo de los conceptos y por lo tanto de los diferentes registros en los que se pueden representar.

La validez interna (Bryman, 2004) de estas relaciones entre combinaciones de conocimiento y el establecimiento de conexiones debe ser estudiada con más profundidad. Aunque los datos sugieren relaciones causales entre combinaciones de ciertos tipos conocimiento y establecimiento de ciertos tipos de conexiones, la emergencia de las conexiones en el aula está influenciada por otros factores cuya existencia conviene considerar y profundizar con mayor detenimiento.

El conocimiento del profesor para el enriquecimiento de las conexiones

El enriquecimiento de las conexiones se define como el aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje (Morera, 2013) que emergen en el establecimiento de conexiones. Los resultados del análisis del conocimiento del profesor asociado con el enriquecimiento de las conexiones revelaron una presencia mayoritaria de un conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS), así como del conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT). Estas dos tipologías de conocimiento pedagógico del contenido (PCK) aparecen, en la práctica de aula, ligadas al aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje que surgen cuando se produce una conexión. En particular, se relacionan especialmente con la capacidad, por parte del profesor, para aprovechar las intervenciones de los alumnos y discusiones de aula para profundizar en conceptos o hacer énfasis en la corrección de errores recurrentes de los estudiantes.

La identificación de relaciones estrechas entre diferentes tipos de conocimiento muestra que el conocimiento matemático del profesor tiene un carácter conexo y que en un contexto de práctica de aula el conocimiento del profesor se moviliza mediante coordinación de elementos de tipologías diversas. Las relaciones más numerosas se dieron entre tipologías del mismo grupo (conocimiento de los temas y de su estructura con el conocimiento de la práctica matemática; y del conocimiento de la enseñanza con el conocimiento de los estudiantes). Sin embargo, en la mayoría de conexiones se producen combinaciones diversas de conocimiento, lo que sugiere que para que se establezcan conexiones en el aula el profesor debe poseer conocimientos sólidos de todas las tipologías y sobre todo debe ser capaz de movilizar conocimientos de distinto tipo de manera coordinada.

Niveles de profundidad en el conocimiento del profesor

De la misma manera que la clasificación de las conexiones informa sobre diferentes tipologías de conexiones que se pueden dar en el aula y sus características, la identificación de tipologías de conocimiento asociadas a estas conexiones informa sobre diferentes niveles en las capacidades para establecer conexiones matemáticas en el aula.

Para empezar, el desarrollo progresivo de capacidades asociadas al conocimiento de los temas y de la estructura (KOTS), al conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT) y al conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS), pueden permitir al profesor, tanto establecer conexiones explícitas en el aula, como aprovechar los errores y las intervenciones de los estudiantes para profundizar en la comprensión de un concepto matemático. Se estima que las conexiones que el profesor pueda establecer serán más ricas en tanto su conocimiento de las tres tipologías anteriores sea más profundo, ya que por ejemplo, para el establecimiento de conexiones conceptuales con conversión el profesor necesita un conocimiento profundo de las diferentes representaciones de un concepto en diferentes registros.

El desarrollo progresivo de capacidades relacionadas con el conocimiento de la práctica matemática puede permitir al profesor establecer conexiones relativas a procesos transversales, que implican un aumento en el nivel de abstracción respecto de las conexiones puramente conceptuales. Se considera que este proceso se produce de manera progresiva y que el profesor va adquiriendo paulatinamente la capacidad de transformar algunas conexiones conceptuales en conexiones relativas a procesos y de identificar cuáles son los momentos más idóneos para que se produzcan estas conexiones.

Paralelamente, el desarrollo de un conocimiento lateral del currículo puede permitir al profesor el establecimiento de conexiones extramatemáticas. Aunque en este caso, las conexiones extramatemáticas no constituyen una abstracción de las conexiones conceptuales, se estima que para que se puedan establecer estas conexiones es necesario que el profesor tenga unos conocimientos sólidos de los temas y de su estructura, de la enseñanza y del aprendizaje.

Tanto si las conexiones extramatemáticas se refieren a la utilización de un referente no matemático para la mejor comprensión de un concepto matemático, como si las conexiones extramatemáticas se refieren al estudio desde una perspectiva matemática de un fenómeno extramatemático, es necesario que el profesor cuente con las herramientas matemáticas (conocimiento de los temas y de la estructura [KOTS] y conocimiento de la práctica matemática [KPM]), así como con las herramientas didácticas (conocimiento del contenido y de la enseñanza [KCT] y conocimiento del contenido y de los estudiantes [KCS]) para favorecer la construcción de conocimiento matemático profundo por parte de los estudiantes.

Por tanto, los resultados de la investigación muestran que el establecimiento de conexiones requiere de un nivel elevado de conocimiento matemático de todos los tipos. Estos resultados están en sintonía con los niveles de conocimiento propuestos por De Gamboa et al (2015), en los que la capacidad para establecer conexiones aparece en el nivel más alto e incluye las anteriores capacidades consideradas en los dos primeros niveles, a saber: reconocer y relacionar; interpretar y transferir; y, ampliar y conectar.

En resumen, como respuesta a la pregunta de investigación, se puede afirmar que existe una relación estrecha entre el establecimiento de conexiones en el aula y el conocimiento del profesor, que se basa en la correspondencia entre tipos de conexiones en el aula y combinaciones de capacidades por parte del profesor. Esta relación queda parcialmente caracterizada, en base a una investigación empírica, mediante la clasificación de las conexiones en tipologías a las cuales se asocian combinaciones de diferentes tipologías de conocimiento explícitamente detalladas.

6.3 Discusión sobre los objetivos de la investigación y el marco teórico utilizado

La pregunta de investigación –que se vuelve a formular al inicio de este capítulo– se refiere a la exploración de la relación entre las conexiones que se producen en el aula y el conocimiento del profesor de matemáticas. Para poder abordar esta relación, antes es necesario establecer qué se entiende por conexiones en el aula y por conocimiento del profesor de matemáticas. La revisión de la literatura permitió la construcción de un marco teórico, basado en los resultados de investigaciones anteriores, en el que se propone un modelo argumentado de lo que se entiende por conocimiento del profesor de matemáticas.

Sin embargo, en el caso de las conexiones no se disponía de un marco teórico que permitiera caracterizar las conexiones en el aula, por lo que se decidió establecer dos objetivos iniciales en la investigación. El primero consistía en identificar conexiones que se establecen en el aula, a partir de una definición básica inspirada en la literatura. El segundo consistía en establecer una definición y una caracterización de las conexiones en el aula basados en las conexiones identificadas y descritas en el primero. Los resultados obtenidos para estos dos objetivos muestran que fue acertado buscar una caracterización con unas bases empíricas, más que construir a priori una noción de conexión basada en la literatura consultada. Esta opción metodológica permitió, tanto identificar características determinantes en la posterior exploración de la relación con el conocimiento, como construir una clasificación que permite aproximarse de manera fundamentada a las conexiones que se dan en el aula de matemáticas.

El tercer objetivo se centró de manera explícita en caracterizar la relación entre las conexiones y el conocimiento del profesor. El nivel de detalle de los resultados y la profundidad del análisis realizado para los dos primeros objetivos permitió la identificación de tipos de acciones de la profesora asociadas a tipologías concretas de conexiones, así como a la emergencia de patrones de combinación de tipos de conocimiento relacionados con cada tipo de conexión.

Finalmente, el cuarto objetivo buscaba explorar la interacción entre las diferentes tipologías de conocimiento. Este objetivo se alcanza a un nivel incipiente y requiere profundización, ya que se observan múltiples interacciones en el conocimiento, pero las conclusiones que se infieren son todavía de carácter general.

En relación al marco teórico utilizado se considera que la interpretación de las conexiones en el aula desde las perspectivas de las matemáticas, el alumno y el profesor (Ver Figura 1) permitió seguir un esquema analítico en la interpretación de los datos. En primer lugar, la identificación inicial de conexiones en el aula se basó en relaciones puramente matemáticas. En segundo lugar, la interpretación de dicha conexión desde el aprendizaje de los estudiantes permitió realizar el análisis global de las conexiones, que las situaba con base en su aportación a la construcción de conocimiento matemático de los estudiantes. Esta perspectiva también permitió analizar el posible enriquecimiento de las conexiones. Finalmente, la perspectiva del profesor, permitió relacionar el conocimiento del profesor con la construcción de conocimiento matemático por parte de los alumnos al interpretar los resultados.

La clasificación de conexiones propuesta por Businskas (2007) sirvió como referencia para la identificación de tipos de enlaces, aunque posteriormente la lista de tipos de conexiones se amplió al encontrar relaciones que no hacían parte de la clasificación. Esta nueva clasificación ampliada sirvió como base para organizar los tipos de enlaces que se identificaron e inspiró el enfoque que se tomó para la clasificación de los nodos que se conectaban (ver Capítulo 5).

Los marcos teóricos sobre la construcción de conocimiento matemático (Von Glasefeld, 1995; Dubinsky y McDonald, 2001; Haylock y Cockburn, 2003) sirvieron de base para la interpretación de la construcción de conocimiento matemático que se produce en el aula y permitieron identificar posibilidades para enriquecer las conexiones.

La reinterpretación de los diferentes modelos para el conocimiento del profesor que se tomaron como referencia, permitieron construir un modelo para la interpretación del conocimiento del profesor desde una perspectiva práctica. El análisis del conocimiento matemático para enseñar (MKT) permitió prever la existencia de relaciones entre diferentes tipologías de conocimiento en relación con el establecimiento de conexiones. En el caso particular el análisis sobre el carácter del conocimiento del horizonte matemático (HCK) mostró su relación con un conocimiento vertical del currículo, con un conocimiento avanzado (Zazkis y Mamolo, 2011) y con un conocimiento de la enseñanza y del aprendizaje (Fernández y Figueiras, 2014).

El HCK es un tipo de conocimiento relacionado con la capacidad de profesor para conexiones entre diferentes contenidos matemáticos. Considerar el HCK como la coordinación de conocimiento de diferente tipo ayudó a interpretar las interrelaciones entre diferentes tipos de conocimiento que se observaron en los resultados. Además, el establecimiento de niveles para el HCK (De Gamboa et al, 2015) permite la identificación de diferentes niveles de profundidad en el conocimiento matemático del profesor que se relaciona con el establecimiento de conexiones en el aula.

Del modelo propuesto por Carrillo et al (2013) se tomó una tipología de conocimiento del profesor: el conocimiento de la práctica matemática. La consideración explícita de un tipo de conocimiento relacionado con la justificación y la comunicación rigurosa del conocimiento matemático permitió la identificación de acciones del profesor en el aula que favorecieron discusiones de un alto grado de abstracción, y que se relacionaban principalmente con las conexiones intramatemáticas relativas a procesos transversales.

La reinterpretación de la clasificación de indicadores de conocimiento propuesta por Rowland et al (2009) permitió identificar tipos de acciones como indicadores de conocimiento en el aula. Esta reinterpretación fue el marco de referencia para la identificación de conocimiento en el análisis de los datos empíricos, y sirvió de base para la identificación de otras acciones que se consideraron también indicadores de conocimiento (ver Cuadro 2 en el Capítulo 5).

6.4 Discusión sobre el diseño experimental

Los resultados que se detallan en el Capítulo 5 así como las conclusiones expuestas en el apartado anterior muestran que los objetivos que se definieron fueron acertados para responder a la pregunta de investigación. La secuencia de los objetivos se planteó de lo más concreto a lo más abstracto, partiendo de la identificación concreta de conexiones en el aula, para acabar proponiendo relaciones entre tipologías de conexiones y tipologías de conocimiento. Este enfoque se reveló útil en tanto que los resultados de los dos primeros objetivos fueron la base sobre la que se obtuvieron resultados para los dos últimos.

El contexto en el que se recogieron los datos se reveló adecuado para la identificación de abundantes de conexiones y para la caracterización del conocimiento del profesor activado en la gestión en el aula de dichas conexiones. El tema de introducción a los números enteros y el tipo de interacción de aula que planteaba la profesora, proporcionaron situaciones ricas para la identificación, análisis y caracterización de conexiones en el aula. Se resaltan algunos matices que se comentan en el Apartado 6.5 sobre limitaciones de este estudio. El tema y la organización de aula fueron especialmente relevantes en la identificación de la relación de las conexiones con los errores de los alumnos y con las dificultades asociadas con las representaciones que se utilizan. Además, la formación y la experiencia de la profesora se consideran adecuadas para la investigación, ya que fue posible identificar indicadores de conocimiento de todas las tipologías previstas.

La utilización del estudio de casos como herramienta metodológica se considera adecuada teniendo en cuenta el enfoque cualitativo interpretativo de la investigación y los objetivos que se perseguían. La definición de la relación entre el conocimiento del profesor y el establecimiento de conexiones en el aula como caso a estudiar y la planificación del estudio intensivo de una unidad –un grupo clase durante una unidad didáctica completa– permitieron la obtención de datos homogéneos. El análisis profundo de los mismos dio como resultado la descripción de relaciones entre el conocimiento de la profesora y el establecimiento de conexiones en el aula, lo que permitió además identificar la emergencia de relaciones causales.

La utilización de algunos elementos de la teoría fundamentada se reveló adecuada de acuerdo con el carácter exploratorio del estudio que se planteaba, ya que la revisión constante y minuciosa de los resultados que se iban obteniendo así como el contraste con los resultados reportados por la literatura sobre conexiones permitió realizar un análisis de ida y vuelta entre el primer y el segundo objetivo.

La identificación y el análisis de las características de las conexiones en el aula –primer objetivo– iban acompañados de una revisión de la literatura sobre conexiones. A partir de los resultados de estos análisis se construyeron definiciones de conexión en el aula –segundo objetivo– cuya adecuación se evaluaba con base en los resultados de los análisis del primer objetivo, y en última instancia con base en los datos de aula. Para la construcción de la clasificación de las conexiones en el aula –segundo objetivo– también se realizó una revisión constante de los resultados del primer objetivo, de la literatura y de los datos empíricos. Los resultados relacionados con el segundo objetivo, permitieron construir un instrumento de análisis para las conexiones en el aula que permite a su vez realizar una clasificación jerárquica y dicotómica, tal y como se explica en la Figura 6.

La reinterpretación de diversos modelos de referencia para el conocimiento del profesor –propuesta en la Figura 3– permitió la identificación de patrones de interacción entre diferentes tipologías de conocimiento relacionadas con tipologías de conexiones concretas. Además, se identificaron indicadores de conocimiento plenamente coherentes con la reinterpretación de conocimiento, tal y como se muestra en la Cuadro 2.

6.5 Implicaciones didácticas y en la formación del profesorado

Los resultados expuestos en los apartados anteriores sugieren tanto implicaciones didácticas como consideraciones y recomendaciones para la formación del profesorado.

A continuación se presentan las reflexiones que nos siguieren los resultados de la investigación respecto a la actividad de aula y a la formación del profesorado.

En primer lugar, la definición que se construye de conexión en el aula que en muchas ocasiones los errores de los alumnos desencadenan el establecimiento de conexiones en el aula. Esta relación muestra la importancia de animar a los estudiantes a perder el miedo a equivocarse y a valorar las equivocaciones como oportunidades para mejorar su comprensión de las matemáticas, y la de sus compañeros.

Al establecerse conexiones se producen transformaciones entre representaciones que están muchas veces relacionadas con las dificultades que experimentan los estudiantes. Tal y como señala Duval (2006), es importante que los estudiantes tengan la oportunidad de trabajar con representaciones en distintos registros de un concepto. Sin embargo, los resultados mostraron que los alumnos experimentan dificultades al realizar estas transformaciones, por lo que es importante que los profesores presten una atención especial a las representaciones que utilizan con el fin de disminuir las dificultades en la comprensión de los alumnos, al tiempo que bridar la posibilidad de trabajar en registros diferentes.

El establecimiento de conexiones extramatemáticas se relaciona con estos cambios de registro. Sin embargo, se observa que es importante establecer conexiones matemáticas significativas y no buscar situaciones que, aunque compartan rasgos comunes con el concepto matemático, puedan generar problemas de comprensión en los alumnos. Por ejemplo, el caso de los modelos de desplazamiento para los números enteros. Se considera que existen contextos en los que es más significativo para los estudiantes que se les presente un tema desde una problemática matemática que desde una problemática extramatemática construida de manera ficticia.

El establecimiento de conexiones relativas a procesos transversales implica la discusión explícita de razonamientos de un alto nivel de abstracción. En este sentido, se considera que es importante tener presente, como profesores, que se debe dar a los alumnos la posibilidad de hacer demostraciones, de explorar distintas formas de resolver problemas y distintas formas de justificar procedimientos. Para ello, es recomendable que el profesor analice previamente los contenidos e identifique las actividades más adecuadas para establecer estas conexiones, así como que tenga la capacidad de aprovechar situaciones contingentes para mejorar la comprensión de los estudiantes.

La dimensión metacognitiva de las conexiones relativas a procesos transversales hace que éstas sean de vital importancia para que los alumnos aprendan a autoregular su conocimiento al resolver problemas. Por lo tanto, es importante que cuando se den estas conexiones, al menos en algunos casos, se establezcan discusiones explícitas sobre la idoneidad de un procedimiento o de una representación cuando se persigue un objetivo concreto.

El conocimiento que se relaciona con la capacidad de establecer conexiones en el aula es diverso y cubre toda la variedad de conocimiento para enseñar que se consideró desde la construcción del marco teórico. Así pues, se considera que la formación inicial del profesorado de matemáticas en la educación secundaria debe incluir elementos de las seis tipologías de conocimiento descritas. Además las interacciones entre diferentes tipos de conocimiento muestran la importancia de que el profesor establezca conexiones para mejorar su propio conocimiento, como sugieren De Gamboa et al (2012).

La identificación de diferentes niveles en las capacidades del profesor muestra que el fundamento del conocimiento matemático para enseñar es el conocimiento de los temas y de su estructura, que se erige como condición necesaria, pero no suficiente (Sánchez-Matamoros, Fernández, Llinares, y Valls, 2013), para el establecimiento de conexiones (y es una condición necesaria para el desarrollo profundo de un conocimiento pedagógico del contenido). A partir del establecimiento de bases sólidas es este conocimiento es recomendable que los profesores construyan también unas bases sólidas de conocimiento del contenido y de la enseñanza, y de conocimiento del contenido y de los estudiantes, que son los tipos de conocimiento que permiten situar los conceptos en el contexto particular de aula en el que se trabajarán.

Para el establecimiento de conexiones relativas a procesos transversales, que son las que se asocian a niveles de razonamiento abstracto más elevados, así como al desarrollo de una capacidad de autoregulación del conocimiento por parte de los alumnos, se recomienda profundizar en el conocimiento de la práctica matemática, que se fundamenta en el conocimiento de los temas y de su estructura y que se complementa en el aula con el conocimiento de la enseñanza y el conocimiento de los estudiantes.

El conocimiento que se asocia a las conexiones extramatemáticas es un conocimiento más difícil de abordar desde la formación del profesorado de matemáticas, ya que se asocia tanto con el conocimiento de otras disciplinas curriculares como de situaciones no curriculares. En este sentido se recomienda un tipo de formación continua, que estimule la formación del profesor de matemáticas en otras disciplinas curriculares, así como el diseño de programas de formación específicos centrados en trabajar la capacidad para estudiar diferentes fenómenos desde una perspectiva matemática (Frykholm y Glasson, 2005). Este tipo de conocimiento se complementa con un conocimiento de la enseñanza y de los estudiantes para su aplicación en el aula.

Finalmente, teniendo en cuenta la complejidad de situaciones que se producen en el aula y la diversidad del conocimiento implicado en el establecimiento de conexiones, se observa que en el caso del currículo catalán, de la misma manera que señala Mwakapenda (2008) en el caso del currículo sudafricano, los profesores no tienen unas indicaciones suficientemente claras cumplir con las indicaciones sobre conexiones incluidas en el currículo. Además, los programas de formación del profesorado no llegan a cubrir todos los tipos de conocimiento necesarios para el establecimiento de conexiones, y no cuentan con una experiencia como alumnos en el trabajo de conexiones extramatemáticas en el aula, tal y como señalan Fryckholm y Glasson (2005). Por tanto, se muestra conveniente la exploración de programas de formación dirigidos a generar práctica de referencia y criterios para poder valorar las conexiones.

6.6 Limitaciones y prospectiva

En este último apartado se presentan diversas limitaciones del estudio y algunas propuestas de investigación que se derivan de dichas limitaciones. Las limitaciones del estudio se relacionan con la posibilidad de generalización de los resultados y de las conclusiones de este estudio, y tienen que ver principalmente con el contexto de la investigación, con la caracterización de algunos tipos de conexiones y con la caracterización del conocimiento del profesor.

El contexto en el que se desarrolló esta investigación presentaba unas características que tuvieron consecuencias en los resultados de la investigación. El tema que se eligió para realizar la recogida de datos consistía principalmente en actividades relacionadas con el estudio de operaciones aritméticas con números enteros y de sus propiedades. Esto hizo que la variedad de los registros que se utilizaban fuera reducida y, en consecuencia, la cantidad de conexiones extramatemáticas y de conexiones conceptuales con conversión fue muy baja. Se considera por tanto adecuado, aplicar el modelo de conexiones propuesto a otros temas para poder analizar la riqueza de estos dos tipos de conexiones.

Respecto al curso académico en el que se recogieron los datos, se considera oportuno analizar otros cursos en educación secundaría para explorar cómo evoluciona la distribución de las conexiones a lo largo de la educación secundaria y del bachillerato. También se considera adecuado analizar situaciones de aula en educación primaria aplicando el modelo propuesto en esta investigación para poder establecer comparaciones con la educación secundaria así como analizar las posibles influencias en el establecimiento de conexiones en el aula asociadas a diferentes tipos de formación en los profesores de primaria y los profesores de secundaria.

Respecto a las conexiones se observa que la variedad de situaciones analizadas en los episodios identificados son una buena muestra de las prácticas matemáticas que se producen al trabajar la mayoría de conceptos que aparecen en el currículo de matemáticas. Sin embargo, hay dos tipos de conexiones cuya descripción desde los resultados experimentales es pobre: las conexiones extramatemáticas y las conexiones conceptuales con conversión. En consecuencia, se considera necesario diseñar investigaciones dirigidas a analizar en profundidad las características de estos tipos de conexiones en el aula, partiendo de otros estudios como Presmeg (2006), así como a estudiar la relación entre el establecimiento de dichas conexiones y el conocimiento del profesor.

Las conexiones relativas a procesos transversales se revelaron como potencialmente útiles para el desarrollo de capacidades metacognitivas por parte de los alumnos. Esto muestra que conviene profundizar en esta relación en contextos en los se requiera a los alumnos decidir entre diferentes procedimientos o valorar diferentes justificaciones.

En relación al conocimiento del profesor, se considera que el modelo teórico propuesto, basado en Shulman (1986), Ball et al (2008) y Carrillo et al (2013), recubre las diferentes acciones y capacidades del profesor que se identificaron durante el análisis de los datos empíricos. Sin embargo, para poder generalizar los resultados a una gama más amplia de profesores de secundaria conviene analizar la relación entre el conocimiento y el establecimiento de conexiones en profesores con otros perfiles formativos.

Entender mejor la relación entre el conocimiento y el establecimiento de conexiones en el caso de profesores con distinta formación puede ayudar a responder preguntas que surgen en relación con la planificación de programas de formación dirigidos a aumentar la presencia de las conexiones en el aula y a mejorar su calidad, como son: ¿Cómo identificar las necesidades en términos de conocimiento de un profesor en activo? ¿De qué forma modifican las conexiones el conocimiento del profesor? o ¿Qué mecanismos determinan que un profesor que posee los conocimientos teóricamente necesarios (desde la perspectiva de este estudio) para establecer una conexión no lo haga?

Referencias bibliográficas

Arcavi, A. (2002). The Everyday and the Academic in Mathematics. En Brenner, M. E., y Moschkovich, J. (Eds.), *Everyday and academic mathematics in the classroom. Journal of Research in Mathematics Education Monograph 11* (pp.12-29). Reston, VA: NCTM.

Arcavi, A. y Bruckheimer, M. (1981). How Shall We Teach the Multiplication of Negative Numbers? *Mathematics in School*, *10*(5), 31-33.

Askew, M., Brown, M., Rhodes, V., Johnson, D., y Wiliam, D. (1997). *Effective teachers of numeracy*. London: Kings College.

Ball, D. L., y Bass, H. (2009). *With an eye on the mathematical horizon: Knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures*. Comunicación presentada en el 43 Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, Oldenburg, Germany. Recuperado el 17 de noviembre de 2012 de www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/BzMU/BzMU2009/BzMU2009-Inhalt-fuer-Homepage.htm

Ball, D.L., Thames, M.H., Phelps, G. (2008). Content knowledge for Teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*. *59* (5), 389-407.

Bamberger, H., y Oderdorf, C. (2007) *Introduction to Connections Grades 3–5*. Portsmouth: Heinemann.

Bell, A. (1986). Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros. *Enseñanza de las Ciencias*, *4*(3), 199-208.

Borba, R.E. (1995). Understanding and operations with integers: difficulties and obstacles. En L. Meira y D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the 19th International Conference of PME* (vol. 2, pp. 226-231) Brasil: PME.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *4*(2), 165-198.

Brown, S.I. (1969). Signed Numbers: A "Product" of Misconceptions. *The Mathematics Teacher*. *62*(3), 183-195.

Bryman, A. (2004). *Social Research Methods*. Nueva York: Oxford.

Businskas, A. M. (2008). *Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections.* Tesis doctoral. Universidad Simon Fraser.

Carreira, S. (2010). Conexões matemáticas. Ligar o que se foi desligando. *Educação e Matemática 110*. 13-18-

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Mathematics teacher specialized knowledge. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.) *Procceedings of Eight CERME Congress*, 2985-2994. Anatalya, Turkey: ERME.

Chevallard Y., Joshua M.A. (1982). Un exemple d'analyse de la transposition didactique: la notion de distance. *Recherches en didactique des Matématiques*, *3, 1*, 159-239.

Chico, J. (2014). *Impacto de la interacción en grupo en la construcción de argumentación colectiva en clase de matemáticas*. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Cid, E. (2003). La investigación didáctica sobre los números negativos: estado de la cuestión. *Seminario Matemático Garcia de Galdeano*. Universidad de Zaragoza.

Cisterna, F. (2005). Categorización y triangulación como procesos de validación del conocimiento en investigación cualitativa. *Theoria*, *14*. (1), 61-71.

Clements, D. H. y Battista, M. T. (1990). Constructivist Learning and Teaching. *Arithmetic Teacher, 38*(1), 34-35. National Council of Teachers of Mathematics.

Cobb, P (1998). The Tension between Theories of Learning and Instruction in Mathematics Education. *Educational Psychologist 23*, 87-103.

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., Nicholls, J., Wheatley, G., Trigatti, B., y Perlwitz, M. (1991). Assessment of a problem-centered second-grade mathematics project. *Journal for research in mathematics education*, *22*(1), 3-29.

Corbin, J. M., y Strauss, A. (1990). Grounded theory research: Procedures, canons, and evaluative criteria. *Qualitative sociology, 13*(1), 3-21.

Cross, P. (1999). *Learning is about connections*. League for innovations in the community college.

De Gamboa y Figueiras, (2013). De Gamboa, G., y Figueiras, L. (2013). El papel de las conexiones en el conocimiento matemático para enseñar: análisis de un episodio. En A. Estepa, y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XVI Simposio de la SEIEM* (pp.53-58). Baeza: SEIEM.

De Gamboa, (2011). *El Conocimiento del Horizonte Matemático y la reflexión sobre la propia práctica docente: el caso de la proporcionalidad en 1º de ESO*. Trabajo de fin de máster. Universidad Autónoma de Barcelona, Bellaterra.

De Gamboa, Deulofeu, y Figueiras, (2012). Hypothetical Teaching Trajectories: Analysing contingency events in Secondary Mathematics Teachers' practice. En S. Je Cho (Ed.), *Proceedings of 12th International Congress on Mathematical Education.* (pp.4792-4798) Seoul, Korea: ICME.

De Gamboa, G., Badillo, E. y Ribeiro, M. (2015). El horizonte matemático en el conocimiento para la enseñanza del profesor: geometría y medida en educación primaria. *PNA*, *10*(1), 1-24.

Departament d'Educació (2007). *Currículum d'Educació Secundària Obligatòria.* Barcelona: Generalitat de Catalunya.

Dubinsky, E. y McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. En D. Holton (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level. An ICMI Study. Series: New ICMI Study Series, Vol.7* (pp. 273–280). Dordrechet: Kluwer.

Duroux, A. (1982). *La valeur absolue: difficultés majeures pour une notion mineure*. Tesis Doctoral. Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques, Burdeos.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*. *61*: 103-131.

Fernández, S y Figueiras, L. (2014). Horizon Content Knowledge: Shaping MKT for a Continuous Mathematical Education. *Redimat. 3*(1), 7-29.

Fernández, S. (2011). *Continuity in Mathematics Education. Mathematics Teachers in the transition to Secondary School*. Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona, Bellaterra.

Font,V. (1999). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a les derivades*. Tesis doctoral. Universitat de Barcelona, Barcelona.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Springer Science y Business Media.

Frykholm, J. A., Glasson, G. E. (2005). Connecting Science and Mathematics instruction: Pedagogical content knowledge for teachers. *School Science and Mathematics, 105*(3), 127-141.

Gamboa, G. de, Figueiras, L. (2014). Conexiones en el conocimiento matemático del profesor: propuesta de un modelo de análisis. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 337-344). Salamanca: SEIEM.

Gerring, J. (2004). What is a case Study and what is it good for? *American Political Science Review, 98* (2). 342-354.

Gómez, B. (2001). La justificación de la regla de los signos en los libros de texto: ¿Por qué menos por menos es más? En Pedro Gómez y Luis Rico (Eds.) *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*, (pp. 257-275). Granada: Universidad de Granada.

Hall, M. (2000). *Bridging the gap between everyday and classroom mathematics: An investigation of two teachers' intentional use of semiotic chains*. Tesis doctoral. The Florida State University.

Haylock, D y Taganta, F. (2007). *Key concepts in teaching primary mathematics*. Londres: Sage.

Haylock, D. W y Cockburn A. D. (2003). *Understanding mathematics in the lower primary years. A Guide for Teachers 3-8.* London: Paul Chapman Publishing.

Human, P. y Murray, H. (1987). Non concrete approaches to integer arithmetic, En J. Bergeron, N. Herscovics y C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th International Conference of PME* (vol 2, pp 437-443). Montreal: PME.

Iriarte, M.D., Jimeno, M. y Vargas-Machuca, I. (1991). Obstáculos en el aprendizaje de los números enteros. *Suma, 7,* 13-18.

Jakobsen, A., Thames, M. H., Ribeiro, C. M., y Delaney, S. (2012). Using Practice to Define and Distinguish Horizon Content Knowledge. En ICME (Ed.), *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (4635-4644). Seoul, Corea: ICME.

Küchemann, D. (1981), Positive and negative numbers. En Hart, K.M. (ed.), *Children's Understanding of Mathematics: 11-16* (82-87). Londres: John Murray.

Léonard, F. y Sackur, C. (1990). Connaissances locales et triple approche, une méthodologie de recherche. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10*(2/3), 205-240.

Lockwood, E. (2011). Student connections among counting problems: an exploration using actor-oriented transfer. *Educational Studies in Mathematics*, *78*(3), 307-322.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Martínez, M., Giné, C., Fernández, S., Figueiras, L., y Deulofeu, J. (2011). El conocimiento del horizonte matemático: más allá de conectar el presente con el pasado y el futuro. En M, Marín, G. Fernández, L.J. Blanco, M. Palarea (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XV.* (pp. 429-438) Ciudad Real: SEIEM.

Meredith, A. (1995). Terry's learning: Some limitations of Shulman's pedagogical content knowledge. *Cambridge Journal of Education, 4*(3), 3-11.

Morera, L. (2013). *Contribución al estudio de la enseñanza y del aprendizaje de las isometrías mediante discusiones en gran grupo con el uso de tecnología.* Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona, Bellaterra.

Murray, J.C. (1985). Children’s informal conceptions of integer arithmetic. En H. L. Chick y J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 9th International Conference of PME* (vol.1, 147-153). Utrecht: PME.

Mwakapenda, W. (2008). Understanding connections in the School Mathematics Curriculum. *South African Journal of Education (28),* 2. 189-202.

NCTM (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.

Onrubia, J., Rochera, MJ., y Barberà, E. (2001). La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva psicológica. En Coll, C., Palacios, J., Marchesi, A. (Coords). *Desarrollo psicológico y educación 2: Psicología de la educación escolar.* Madrid: Alianza.

Peled, I. (1991). Levels of knowledge about signed numbers: effects of age and ability, *Proceedings of the 15th International Conference of PME* (vol 3, pp.145-152). Assisi, Italia: PME.

Petrou, M y Goulding, M. (2011). Conceptualising Teachers’ Mathematical Knowledge in Teaching. En Rowland, T y Ruthven, K. (Eds). *Mathematical Knowledge in Teaching.* Springer.

Presmeg, N (2006). Semiotics and the “connections” standard: Significance of semiotics for teachers of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*. *61*. 163-182.

Pujol, R. (2008). *Una reconsideració dels nombres enters per a l’ensenyament postobligatori.* Tesis Doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra.

Rathus, S (2007). *Psichology: concepts, connections*. Belmont, CA: Cengage Learning.

Rowland, T., Huckstep, P., y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8,* 255-281.

Rowland, T., Turner F., Thwaites, A. y Huckstep, P. (2009). *Developing primary mathematics teaching*. London: SAGE publications.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2013). El desarrollo de la competencia de estudiantes para profesor de matemáticas de educación secundaria en identificar la comprensión de la derivada en estudiantes de Bachillerato. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 501-509). Bilbao: SEIEM.

Sawyer, A. (2008). Making connections: Promoting Connectedness in Early Mathematics Education. En Goos, M., Brown, R y Makar, K (Eds), *Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Group of Australasia* (pp. 429-435). Brisbane: MERGA.

Schoenfeld, A. H. (2011). *How we think: A theory of goal-oriented decision making and its educational applications*. Routledge.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15* (2), 4-14.

Sierpinska, A., y Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, C. Laborde. *International handbook of mathematics education* (pp. 827-876). Netherlands: Springer.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., Verschafel, L. (2005). Students' overreliance on proportionality: evidence from primary school pupils solving arithmetic word problems. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* (vol. 4, pp 385-392). Bergen: PME.

Von Glasserfeld, E. (1995). *Radical Constructivism: A Way of Knowing and Learning. Studies in Mathematics Education Series:6*. London: The Falmer Press.

Von Glasserfeld, E. (Ed) (2002). Radical Constructivism in Mathematics Education. *Mathematics Edication Library. Vol 7*. Kluwer Academic Publishers.

Walkerdine, V. (1988). *The mastery of Reason: Cognitive Developments and the Production of Rationality*. New York: Routlege.

Yin, R. (2014). *Case Study Research*. EEUU: Sage.

Zazkis, R., y Mamolo, A. (2011). Reconceptualizing knowledge at the mathematical horizon. *For the Learning of Mathematics*, *31*(2), 8-13.