Universitat Autònoma de Barcelona

Estudio sobre la actuación docente y la interacción en la creación y aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje en el aula de matemáticas

Miquel Ferrer Puigdellívol

ADVERTIMENT. L'accés als continguts d'aquesta tesi queda condicionat a l'acceptació de les condicions d'ús establertes per la següent llicència Creative Commons: http://cat.creativecommons.org/?page_id=184

ADVERTENCIA. El acceso a los contenidos de esta tesis queda condicionado a la aceptación de las condiciones de uso establecidas por la siguiente licencia Creative Commons: http://es.creativecommons.org/blog/licencias/

WARNING. The access to the contents of this doctoral thesis it is limited to the acceptance of the use conditions set by the following Creative Commons license: https://creativecommons.org/licenses/?lang=en

Universitat Autònoma
de Barcelona

Estudio sobre la actuación docente y la interacción en la creación y aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje en el aula de matemáticas

Miquel Ferrer Puigdellívol

Directores:

Josep Maria Fortuny Aymemí

Lluís Bibiloni Matos

Doctorat en Didàctica de les Matemàtiques i de les Ciències

Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals
Facultat de Ciències de l'Educació
Universitat Autònoma de Barcelona

Tesis doctoral presentada para obtener el título de Doctor Internacional por la Universitat Autònoma de Barcelona

Diciembre de 2015

A mis padres

Agradecimientos

Mi más sincero agradecimiento a mis directores de tesis, Josep Maria Fortuny y Lluís Bibiloni, por todas sus recomendaciones, orientaciones, revisiones, ayuda y apoyo a lo largo de todos estos años, ya que sin ellos no hubiera sido posible finalizar este trabajo de tesis doctoral.

Agradezco a Michiel Doorman, profesor del Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education de la Universidad de Utrecht (Países Bajos), su cálida acogida durante mi estancia en este centro. También le agradezco especialmente haberme ofrecido la posibilidad de compartir un espacio de trabajo con su grupo de investigación; y haber podido participar en interesantes debates y discusiones que me ayudaron a avanzar en mi investigación.

Doy las gracias a Itziar García por su dedicación y por el gran esfuerzo realizado en la lectura y revisión de este trabajo; y también por darme la oportunidad de construir un puente entre la didáctica de la matemática y la lógica borrosa.

Agradezco a los profesores Luis, Pilar y Sara haberme dejado acceder a sus clases de matemáticas y, así, poder obtener los datos de esta investigación. Asimismo agradezco a todos sus alumnos la implicación en la resolución de las actividades matemáticas y la buena predisposición para participar en las grabaciones de clase.

Doy las gracias a Laura Morera por haberme dado la oportunidad de continuar el trabajo de investigación iniciado en su tesis doctoral; por su ayuda desinteresada en el proceso de recogida de datos; y por su colaboración en las publicaciones conjuntas que hemos realizado.

Agradezco a todos los compañeros del "Grup d'Investigació en Pràctica Educativa i Activitat Matemàtica" su participación activa en los seminarios de investigación en los que hemos colaborado. Especialmente, agradezco a Núria Planas, coordinadora de este grupo, haberme dado la oportunidad de participar en seminarios formativos, ya que estos me han aportado ideas necesarias para definir la investigación y poder avanzar en la elaboración de este trabajo de tesis doctoral. También agradezco su ayuda y colaboración en todos los congresos que hemos compartido.

Doy las gracias a todos los miembros del Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals de la Facultat de Ciències de l'Educació de la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB) por haberme dado la oportunidad de compartir almuerzos, debates, reflexiones, congresos y publicaciones a lo largo de todos estos años. En particular, agradezco a mis compañeras de despacho, Kaouthar Boukafri e Isabel Pau, los ánimos infinitos que me han transmitido durante la elaboración de este trabajo.

Agradezco la financiación recibida por la beca doctoral BES-2012-053575 del Ministerio de Economía y Competitividad de España y por la ayuda EEBB-I-14-08541 que el mismo Ministerio me concedió para realizar una estancia en el Freudenthal Institute. También agradezco el apoyo económico recibido por el Proyecto "Momentos clave en el aprendizaje de la geometría en un entorno colaborativo y tecnológico" (EDU2011-23240), financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España, y por el "Grup d'Investigació en Pràctica Educativa i Activitat Matemàtica" (SGR-2014-972), financiado por la Generalitat de Catalunya. Asimismo, agradezco a la UAB haberme proporcionado un entorno de trabajo favorable para desarrollar esta investigación.

Por último, doy las gracias a mi familia y a mis amigos por el apoyo incondicional recibido durante todos estos años, especialmente en los momentos más difíciles de la elaboración de este trabajo de tesis doctoral.

Tabla de contenidos

Lista de Figuras

Lista de Tablas

1. Introducción

Este trabajo de tesis doctoral, "Estudio sobre la actuación docente y la interacción en la creación y aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje en el aula de matemáticas", se ha realizado en el marco del Programa de Doctorat en Didàctica de les Matemàtiques i de les Ciències de la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB). El autor se ha beneficiado de la beca doctoral BES-2012-053575, financiada por el Ministerio de Economía y Competitividad de España. El trabajo se ha ubicado en el Proyecto "Momentos clave en el aprendizaje de la geometría en un entorno colaborativo y tecnológico" (EDU2011-23240), financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España, y en el "Grup d'Investigació en Pràctica Educativa i Activitat Matemàtica" (SGR-2014-972), financiado por la Generalitat de Catalunya. Entre septiembre y diciembre de 2014, el autor realizó una estancia formativa en el Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education, de la Universidad de Utrecht (Países Bajos). Esta estancia, EEBB-I-14-08541, que fue tutorizada por el Dr. Michiel Doorman, también recibió financiación del Ministerio de Economía y Competitividad de España.

Durante todo el periodo de formación, el autor ha podido participar en seminarios de investigación en educación matemática, así como en congresos específicos de ámbito nacional e internacional. Estas actividades han contribuido a revisar y mejorar el proceso de investigación y han sido una motivación importante para finalizar este trabajo. Más concretamente, se han presentado comunicaciones en los seminarios "Divendres de recerca", de la UAB y en los Encuentros de Estudiantes organizados por esta misma universidad. También se han elaborado informes que han sido presentados en los XVII y XVIII Simposios de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, organizados en Bilbao y Salamanca, respectivamente; en el XVII Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy, celebrado en Zaragoza; en el Cuarto Simposio Internacional ETM, Espacio de Trabajo Matemático, organizado en San Lorenzo del Escorial; y en los congresos 38 y 39 del International Group for the Psychology of Mathematics Education, celebrados en Vancouver (Canadá) y Hobart (Australia). El autor también ha participado en jornadas formativas para profesores de matemáticas de secundaria, las cuales han ayudado a divulgar la investigación que se estaba realizando. Por ejemplo, se han presentado comunicaciones en las XVI Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas, organizadas en Palma de Mallorca; y en las VI Jornadas de la Asociación Catalana de GeoGebra, celebradas en Barcelona. Además, con el fin de aumentar la difusión del trabajo, también se han elaborado algunos artículos de investigación y de divulgación en educación matemática, los cuales han sido publicados en distintas revistas de ámbito nacional. Estos artículos figuran en las referencias bibliográficas de esta memoria y han resultado especialmente útiles para redactar el trabajo.

En los próximos apartados de este capítulo introductorio presentamos la motivación del estudio y la justificación, definimos la pregunta y los objetivos de la investigación y, por último, resumimos la estructura de la memoria.

1.1. Motivación del estudio y justificación

En primer lugar, señalamos que este estudio pretende dar continuidad al trabajo iniciado por Morera (2013) en el marco del mismo proyecto de investigación. Entre otros aspectos, los resultados de su trabajo presentaron una sistemática para la preparación docente de discusiones en gran grupo. Además, determinaron un instrumento metodológico para detectar oportunidades de aprendizaje matemático durante las discusiones en gran grupo de problemas de isometrías utilizando soporte tecnológico. Estos elementos se han incluido como parte del marco teórico de la presente investigación.

En segundo lugar, queremos remarcar el papel que adopta el profesor en la gestión de discusiones en gran grupo. Por este motivo, decidimos focalizar una parte importante de nuestra investigación en el estudio de la actividad del profesor durante estas discusiones. Con este fin seleccionamos tareas matemáticas de semejanza, las cuales se planteaban en el currículo inmediatamente después del tema de las isometrías (Departament d'Ensenyament, 2007).

Por último, destacamos la problemática que supone para la investigación determinar cómo los alumnos son capaces de lograr aprendizaje matemático a través de las oportunidades que se les presentan durante las discusiones en gran grupo de tareas matemáticas. En este sentido señalamos la investigación de Yackel, Cobb y Wood (1991) sobre interacción y creación de oportunidades de aprendizaje matemático. También remarcamos los trabajos de Boston (2012) y Jackson, Garrison, Wilson, Gibbons y Shahan (2013) sobre la utilización de un sistema de rúbricas para detectar oportunidades de aprendizaje durante las clases de matemáticas.

1.2. Pregunta y objetivos de la investigación

La problemática planteada en el apartado anterior de este trabajo establece nuestro punto de partida para delimitar el presente estudio. En él procuramos relacionar la actividad del profesor, cuando gestiona discusiones en gran grupo de tareas de semejanza, con las oportunidades de aprendizaje que se generan en clase, las cuales pueden ser aprovechadas por los estudiantes. En concreto, nuestra pregunta de investigación es la siguiente:

> *¿Cómo la actividad docente es capaz de fomentar el aprendizaje matemático de los alumnos mediante discusiones en gran grupo de tareas de semejanza?*

Para dar respuesta a esta pregunta definimos dos objetivos de investigación, los cuales pretenden caracterizar tanto la actividad docente del profesor como el efecto de las discusiones en gran grupo en el aprovechamiento que los alumnos hacen de las oportunidades de aprendizaje matemático que se generan. Más concretamente, nuestros objetivos específicos de investigación son los siguientes:

> *Objetivo 1: Caracterizar la actividad docente de un profesor de secundaria cuando gestiona discusiones en gran grupo sobre tareas de semejanza que pueden crear oportunidades de aprendizaje matemático.*

> *Objetivo 2: Analizar cuál es el efecto de las discusiones en gran grupo sobre la habilidad de los alumnos para aprovechar oportunidades de aprendizaje durante la resolución de tareas de semejanza.*

Para la consecución de los dos objetivos, planteamos un estudio experimental con datos empíricos de aula y métodos cualitativos de análisis.

El primer objetivo del estudio está centrado en el papel que realiza el profesor durante la gestión de discusiones matemáticas en gran grupo sobre tareas de semejanza. Para ello estudiamos la preparación desarrollada por el profesor para las sesiones de clase, haciendo hincapié en la preparación de las discusiones en gran grupo. También analizamos la actuación del profesor en la gestión de estas discusiones, teniendo en cuenta tanto aspectos instrumentales como discursivos. Además, estudiamos la interacción que se establece entre todos los participantes de las discusiones en gran grupo, focalizando en el análisis de las acciones discursivas que se producen. Consideramos que todos estos elementos contribuyen a la creación de oportunidades de aprendizaje matemático, las cuales se postulan como un nexo de unión entre los dos objetivos del trabajo.

El segundo objetivo está centrado en los alumnos y en el aprovechamiento que logran de las oportunidades de aprendizaje creadas en las sesiones de clase. Con este fin, caracterizamos diferentes oportunidades de aprendizaje matemático y obtenemos datos de las resoluciones de los alumnos a las tareas de semejanza. En concreto, planteamos un ciclo de trabajo que combina resolución por parejas, discusión en gran grupo y posterior reflexión individual. Así, podemos comparar los protocolos escritos de resolución, antes y después de las discusiones en gran grupo, con el fin de obtener evidencias de aprovechamiento de distintas oportunidades de aprendizaje matemático.

Por último, señalamos que nuestra hipótesis del trabajo es la siguiente:

> *La gestión docente de discusiones matemáticas en gran grupo, en las que participan activamente tanto el profesor como los alumnos, fomenta la creación de un mayor número de oportunidades de aprendizaje matemático, las cuales pueden ser mejor aprovechadas por los estudiantes de la clase.*

En los próximos capítulos planteamos un marco teórico, una metodología y un análisis de datos con el fin de obtener resultados y conclusiones que determinen hasta qué punto se confirma nuestra hipótesis del trabajo.

1.3. Estructura de la memoria

Esta memoria de tesis doctoral se ha estructurado en varios capítulos que detallamos a continuación. En este primer capítulo se presenta la introducción del trabajo, donde se justifica la investigación y se definen tanto la pregunta como los dos objetivos.

En el segundo capítulo se plantea el marco teórico, en el que se introduce el concepto de oportunidad de aprendizaje matemático y se sitúa en un contexto de discusión en gran grupo. Se presentan consideraciones sobre el conocimiento del alumno, con base en los contenidos de semejanza que constan en el currículo de matemáticas para la educación secundaria; y sobre el conocimiento del profesor, teniendo en cuenta tanto aspectos matemáticos como pedagógicos.

En el tercer capítulo se propone la metodología del trabajo, la cual se incluye en el paradigma cualitativo de las investigaciones en educación matemática. Se introduce el contexto y diseño del experimento de enseñanza, y se seleccionan tres tareas matemáticas de semejanza, las cuales se resuelven desde la perspectiva de un resolutor experto.

Luego se detalla la implementación del experimento, en dos fases, haciendo hincapié en la dinámica de trabajo y en la obtención de datos. Por último, se presentan los métodos de análisis de las dos fases de la experimentación.

En el cuarto capítulo se desarrolla el análisis de datos de las dos fases de la experimentación. En la primera fase, estudio piloto, se analiza la implementación en clase de la primera tarea de semejanza. Se introduce el análisis de la preparación de la discusión en gran grupo, el análisis de episodios y acciones, y se determinan oportunidades de aprendizaje matemático. Luego se presenta el análisis de la segunda fase de la experimentación. En esta fase se analiza la preparación de las discusiones en gran grupo de las tres tareas de semejanza y, para cada tarea, se analizan los modos de actuación docente e interacción, se ejemplifican oportunidades de aprendizaje matemático y se examina el aprovechamiento que los alumnos logran de algunas de estas oportunidades.

En el quinto capítulo se presentan los resultados de la investigación, los cuales proporcionan respuestas a los dos objetivos de este trabajo. En primer lugar, se detallan los resultados de la primera fase de la experimentación, el estudio piloto. A continuación se muestran los resultados de la segunda fase, partiendo de las evidencias obtenidas en el análisis de datos.

Finalmente, en el sexto capítulo se retoma la pregunta de investigación para elaborar las conclusiones del trabajo. Se discute la adecuación del marco teórico seleccionado y del diseño metodológico de la investigación. Se comentan las implicaciones didácticas del estudio y, por último, se señalan limitaciones del trabajo y su prospectiva.

2. Marco teórico

Numerosas investigaciones en educación matemática se han centrado en el estudio de la interacción como un facilitador en la generación de conocimiento durante el trabajo por parejas (véase, por ejemplo, Hitt y Kieran, 2009; Sfard y Kieran, 2001). Sin embargo, consideramos que poco se conoce aún sobre la construcción de conocimiento matemático durante las discusiones en gran grupo, las cuales se postulan como un recurso importante para la enseñanza de las matemáticas (Krummheuer, 2011; Saxe y otros, 2009; Yackel, 2001). Investigaciones sistemáticas sobre el potencial de las discusiones en gran grupo y cómo gestionarlas para que sean matemáticamente productivas para los alumnos son notoriamente necesarias (Stein y Smith, 2011). De hecho, es frecuente que los docentes tengan dificultades para gestionar discusiones en gran grupo de calidad y, por lo general, no saben en qué elementos centrarse ni cómo hacerlo (Smit, Van Eerde y Bakker, 2013).

En este capítulo presentamos nuestro posicionamiento teórico para este estudio. En primer lugar, introducimos el concepto de oportunidad de aprendizaje matemático y lo situamos en un contexto de discusión en gran grupo. A continuación introducimos nociones teóricas sobre el conocimiento del alumno y el conocimiento del profesor, basándonos en la selección y uso de recursos didácticos utilizados clase y describiendo una sistemática de seis fases para preparar discusiones en gran grupo. Finalmente, nos centramos en el desarrollo real de la discusión y consideramos tanto elementos instrumentales como el papel que adoptan las acciones discursivas.

2.1. Oportunidades de aprendizaje matemático

El aprendizaje es un proceso social que se produce gracias a la interacción de todos los agentes que participan en una clase de matemáticas (Ellis, 2011) y, en particular, en una discusión en gran grupo. Las acciones que se desarrollan en clase son una combinación de múltiples procesos de interacción, donde estudiantes, profesor y artefactos contribuyen conjuntamente en la creación y desarrollo de situaciones que favorecen el aprendizaje matemático de los alumnos.

En este trabajo consideramos que los artefactos son “todas las herramientas utilizadas durante el transcurso de la clase que pueden facilitar la interacción entre dos participantes y pueden fomentar el desarrollo de aptitudes, procedimientos y contenidos matemáticos" (Ferrer, García-Honrado y Fortuny, 2015, p. 502). Algunos artefactos son tecnológicos (por ejemplo, un software de geometría dinámica) y otros son manipulativos (por ejemplo, el material manipulativo o la pizarra ordinaria).

También es importante que los docentes utilicen recursos didácticos adecuados y apliquen estrategias didácticas que ayuden a los alumnos a construir sus propios conocimientos matemáticos (Mayer, 2004; Palincsar, 1998). Algunos ejemplos son: la creación de situaciones de interacción entre estudiantes y con el profesor para desarrollar habilidades de pensamiento matemático más extensas y favorecer que el profesor gestione el andamiaje del proceso de aprendizaje de los alumnos (Anghileri, 2006); el planteamiento de actividades abiertas, enmarcadas en un contexto realista (Gravemeijer y Doorman, 1999; Van den Heuvel-Panhuizen, 2003), para que los alumnos puedan explorar y analizar en profundidad cuestiones matemáticas; y la creación de situaciones durante la clase para que los alumnos puedan presentar y compartir sus trabajos con otros compañeros (Vermont, 2000).

Muchos autores han investigado la generación de oportunidades de aprendizaje en las clases de matemáticas (véase, por ejemplo, Abedi y Herman, 2010; Andrews, 2003; Brewer y Stasz, 1996; Cobb y Whitenack, 1996; Floden, 2002; Jackson y otros, 2013; Liu, 2009; Törnroos, 2005; Wijaya, Van den Heuvel-Panhuizen y Doorman, 2015; Yackel y otros, 1991), aunque el significado del término «oportunidad de aprendizaje» sigue siendo una cuestión problemática (Abedi y Herman, 2010). En particular, Brewer y Stasz (1996) consideran tres aspectos para definir las oportunidades de aprendizaje que se crean en un aula: contenido curricular, recursos didácticos y estrategias didácticas. Estos aspectos han de entenderse como una estructura conectada y no como elementos aislados, ya que el desarrollo productivo de una sesión de clase depende de que el profesor sea capaz de gestionar las interacciones que se producen entre los participantes; de identificar los aspectos curriculares que deben desarrollarse en clase; y de emplear recursos didácticos que tengan efectos positivos para el aprendizaje de los alumnos. Además, la calidad de las oportunidades de aprendizaje depende directamente de la calidad de la enseñanza que reciben los alumnos, de su relación con las normas sociomatemáticas establecidas en el aula y de lo que se evalúa durante las clases de matemáticas (Abedi y Herman, 2010; Marzano, 2000).

En este trabajo estudiamos las oportunidades de aprendizaje matemático de una discusión en gran grupo focalizando nuestro análisis en dos de los tres aspectos anteriores:

– Recursos didácticos, los cuales están relacionados con el planteamiento de las tareas matemáticas y con el uso de los artefactos disponibles en clase. Estos recursos permiten tratar contenidos de conocimiento matemático, tanto procedimentales como conceptuales (Niss y Højgaard, 2011).
– Estrategias didácticas, entendidas como conjuntos de acciones instrumentales y discursivas relacionadas con los procesos de interacción creados entre los participantes de una discusión en gran grupo.

Por consiguiente, entendemos las oportunidades de aprendizaje matemático como relaciones que se producen entre contenidos de conocimiento matemático y acciones que contribuyen a facilitar el aprendizaje de dichos contenidos en los alumnos (Ferrer, Doorman y Fortuny, 2015; Ferrer, Fortuny y Morera, 2014a; Ferrer, Fortuny, Morera y Planas, 2014). Estas oportunidades son identificables mediante el estudio de acciones generadas por diversas situaciones desarrolladas en los procesos de interacción de una clase de matemáticas. Por este motivo, la interacción social producida en las discusiones en gran grupo constituye un elemento decisivo en el logro del aprendizaje de las matemáticas (Yackel y otros, 1991).

2.1.1. *Sistemas de rúbricas para detectar oportunidades de aprendizaje*

El uso de rúbricas para realizar investigaciones en didáctica de las matemáticas es frecuente y útil en muchos contextos. Podemos entenderlas como conjuntos de criterios y estándares que se utilizan para medir el nivel de desarrollo de una tarea matemática y permiten homogeneizarla de acuerdo a unos criterios específicos y preestablecidos. En particular, el instrumento IQA (Instructional Quality Assessment), elaborado en el marco del proyecto MIST de la Universidad de Vanderbilt, presenta un conjunto de diez rúbricas ampliamente validadas (Boston, 2012; Boston y Wolf, 2006; Jackson y otros, 2013) que determinan, de un modo global, las oportunidades de aprendizaje que se presentan a los estudiantes durante una clase de matemáticas.

Estas rúbricas están planteadas para medir el grado de demanda cognitiva de una tarea tal y como aparece en los materiales curriculares que se distribuyen a los alumnos; la demanda cognitiva de la tarea cuando se implementa en clase; y la calidad de la discusión en gran grupo posterior a la resolución por parejas. El IQA no mide directamente lo que los alumnos aprenden a través de la instrucción, pero sí que puede determinar las oportunidades que se crean a los estudiantes para aprender matemáticas en una clase. En el sentido de Jackson y otros (2013) consideramos que cuanto mayor sea la puntuación en cada una de las rúbricas del instrumento, más probable es que los alumnos se vean inmersos en discusiones en gran grupo en las que se generen oportunidades de aprendizaje matemático.

Las rúbricas del IQA, que se evalúan con valores discretos entre 0 y 4, se encuentran agrupadas en dos bloques: rigor académico y efectividad de la discusión en gran grupo. El primer bloque, sobre el rigor académico, contiene cinco rúbricas: «Potencial de las tareas», es decir, la demanda cognitiva de las tareas tal y como se plantean curricularmente; «Implementación de las tareas en clase», es decir, la demanda cognitiva de las tareas cuando son propuestas en clase y una vez los estudiantes empiezan a resolverlas; «Discusión de los estudiantes durante la implementación de las tareas», esta rúbrica mide hasta qué punto los alumnos son capaces de exponer y discutir sus resoluciones de las tareas y explicar cómo comprenden los contenidos matemáticos más importantes con los que están trabajando; «Rigor de las preguntas del profesor», es decir, el tipo y cantidad de preguntas que el profesor propone a los estudiantes a lo largo de la sesión de clase; y «Huella matemática que queda en los alumnos», es decir, el grado en el que la discusión en el aula es capaz de crear nuevas ideas matemáticas en los alumnos.

El segundo bloque, sobre la efectividad de la discusión en gran grupo, contiene otras cinco rúbricas: «Participación de los estudiantes en la comunidad de aprendizaje», es decir, el porcentaje de alumnos que participan en la discusión en gran grupo; «Conexiones del profesor entre las contribuciones de los alumnos», es decir, el modo en que el profesor conecta las aportaciones de los estudiantes durante la sesión de clase; «Conexiones de los alumnos entre las contribuciones de todos los participantes», es decir, el modo en el que los estudiantes conectan distintas contribuciones durante la discusión; «Preguntas del profesor a los alumnos», es decir, el grado en el que el docente solicita explicaciones a los estudiantes sobre procedimientos o conceptos matemáticos durante la clase; y «Respuestas de los estudiantes», es decir, el tipo de explicaciones sobre temas matemáticos que proporcionan los alumnos a lo largo de la discusión en gran grupo.

A continuación nos apoyamos en Boston (2012) para describir con más detalle las diez rúbricas del instrumento, las cuales ejemplificaremos con datos concretos de aula más adelante en este trabajo.

Potencial de las tareas. Una puntuación de 0 indica que no se requieren conocimientos matemáticos para resolver las tareas. Se obtiene 1 punto si el potencial de las tareas se limita a la memorización y reproducción de fórmulas o definiciones matemáticas. Una puntuación de 2 sugiere que las tareas inducen a la aplicación de procedimientos y algoritmos que los alumnos ya conocen y su principal objetivo recae en la obtención de resultados correctos. Se obtienen 3 puntos si las tareas permiten que los estudiantes den significado a los procedimientos y conceptos matemáticos, aunque sin preguntar por pruebas de razonamientos o demostraciones precisas. Por último, se asignan 4 puntos a las tareas que fomentan la exploración y comprensión matemática de la naturaleza de los procedimientos y conceptos, así como de las relaciones que se establecen entre ellos.

Implementación de las tareas en clase. Una puntuación de 0 indica que los alumnos no se implican en las actividades matemáticas propuestas en clase. Se obtiene 1 punto si los estudiantes se involucran en la memorización y reproducción de hechos matemáticos, reglas, fórmulas o definiciones, pero no realizan conexiones con los conceptos matemáticos subyacentes. Una puntuación de 2 indica que la implementación de las tareas se centra en elaborar respuestas correctas en lugar de desarrollar su comprensión matemática. Se obtienen 3 puntos si los alumnos se implican en la resolución de tareas que proporcionan significado matemático a conceptos y procedimientos, aunque no realizan conexiones entre diferentes representaciones o estrategias de resolución. Por último, una puntuación de 4 indica que la implementación de las tareas permite explorar y comprender la naturaleza de conceptos y procedimientos matemáticos, así como establecer conexiones entre ellos.

Discusión de los estudiantes durante la implementación de las tareas. Una puntuación de 0 indica que no hay discusión de las tareas en clase. Se obtiene 1 punto si los alumnos proporcionan respuestas muy breves, o bien si sus respuestas no están relacionadas con las matemáticas. Una puntuación de 2 indica que los estudiantes solo realizan explicaciones procedimentales durante la discusión de las tareas y no hacen conexiones con conceptos matemáticos. Se obtienen 3 puntos si los alumnos exponen las ideas matemáticas más relevantes involucradas en la resolución de las tareas, aunque no proporcionan explicaciones precisas sobre la validez de los procedimientos que utilizan para resolverlas. Por último, se obtienen 4 puntos si los estudiantes se involucran en discusiones detalladas sobre la resolución de las tareas y logran establecer conexiones explícitas entre diferentes estrategias y representaciones.

Rigor de las preguntas del profesor. Una puntuación de 0 indica que el profesor no formula preguntas durante la discusión de las tareas, o bien que sus preguntas no están relacionadas con las matemáticas. Se obtiene 1 punto si el profesor pregunta por cuestiones esencialmente procedimentales, que requieren respuestas muy breves de los estudiantes. Una puntuación de 2 indica que el profesor formula preguntas superficiales para pedir a los alumnos que expliquen sus razonamientos. Se obtienen 3 puntos si al menos dos veces durante las discusiones en gran grupo, el profesor formula preguntas académicamente relevantes para generar discusión y poder explorar conceptos o procedimientos matemáticos. Por último, una puntuación de 4 significa que el profesor formula consistentemente, es decir, casi siempre, preguntas relevantes que proporcionan oportunidades a los estudiantes para explicar las resoluciones de las tareas matemáticas.

Huella matemática que queda en los alumnos. Una puntuación de 0 indica que no se realiza una discusión de las tareas matemáticas en clase. Se obtiene 1 punto si en la discusión en gran grupo posterior al trabajo de los alumnos no surgen ideas matemáticas importantes para resolver las tareas; o bien si la discusión no trata temas matemáticos que puedan dejar huella en los estudiantes. Una puntuación de 2 indica que el profesor es quien expone mayoritariamente los conceptos matemáticos asociados a la resolución de las tareas y quien realiza conexiones entre los diferentes elementos matemáticos. Se obtienen 3 puntos si durante la discusión en gran grupo los estudiantes exponen ideas matemáticas, conceptos y realizan conexiones, pero no todos los alumnos logran desarrollarlos por completo. Por último, una puntuación de 4 indica que la discusión en gran grupo logra ampliar y consolidar la comprensión de ideas y conceptos matemáticos y, en esencia, que esta discusión deja una huella matemática importante en los alumnos de la clase.

Participación de los estudiantes en la comunidad de aprendizaje. Si ningún alumno participa en la discusión en gran grupo, la puntuación es de 0. Se obtiene 1 punto si menos del 25% de los estudiantes participan en la discusión. Una puntuación de 2 indica que entre el 25% y el 50% de los alumnos participan en la discusión. Se obtienen 3 puntos si entre el 50% y el 75% de los estudiantes participan en la discusión. Finalmente, una puntuación de 4 muestra que más del 75% de los alumnos de la clase han participado en la discusión en gran grupo. Como mencionamos en Ferrer y García-Honrado (2014) consideramos que un alumno participa en la discusión en gran grupo si realiza cualquier tipo de intervención oral que esté relacionada con la resolución de las tareas matemáticas que se están discutiendo en clase.

A continuación presentamos una descripción conjunta de las dos siguientes rúbricas del IQA: *Conexiones del profesor entre las contribuciones de los alumnos* / *Conexiones de los alumnos entre las contribuciones de los participantes*. Una puntuación de 0 indica que no se realiza la discusión en gran grupo, o bien que esta no está relacionada con las matemáticas. Se obtiene 1 punto si el profesor / los alumnos no hacen esfuerzos para conectar las contribuciones expuestas por los participantes de la discusión en gran grupo. Una puntuación de 2 sugiere que el profesor / los alumnos conectan las intervenciones de los participantes al menos una vez durante la discusión en gran grupo, pero no logran relacionar las distintas ideas matemáticas. Se obtienen 3 puntos si el profesor / los alumnos conectan las contribuciones de los participantes al menos dos veces durante la discusión y logran relacionar las distintas ideas matemáticas. Por último, una puntuación de 4 indica que el profesor / los alumnos realizan consistentemente conexiones entre las contribuciones de todos los participantes.

Preguntas del profesor a los alumnos. Una puntuación de 0 indica que no se realiza la discusión en gran grupo, o bien que esta no está relacionada con las matemáticas. Se obtiene 1 punto si el profesor no realiza esfuerzos para preguntar a los estudiantes sobre pruebas de sus contribuciones, ni tampoco formula preguntas para que expliquen sus ideas matemáticas. Una puntuación de 2 indica que el profesor pregunta esencialmente por cuestiones relativas a explicaciones procedimentales sobre hechos memorizados a priori. Se obtienen 3 puntos si una o dos veces durante la clase se pregunta a los estudiantes por pruebas argumentadas sobre sus contribuciones orales y razonamientos matemáticos. Finalmente, se obtienen 4 puntos si el profesor invita consistentemente a los alumnos a que expliquen oralmente sus razonamientos, aportando pruebas empíricas o razonamientos deductivos.

Respuestas de los estudiantes. Una puntuación de 0 indica que no se realiza la discusión en gran grupo, o bien que esta no está relacionada con las matemáticas. Se obtiene 1 punto si los estudiantes no aportan argumentos a las afirmaciones que realizan. Una puntuación de 2 indica que los alumnos hacen explicaciones incompletas sobre procedimientos y contenidos matemáticos. Se obtienen 3 puntos si los estudiantes una o dos veces en la discusión en gran grupo realizan explicaciones razonadas sobre los elementos matemáticos que se están debatiendo. Por último, una puntuación de 4 indica que los alumnos consistentemente proporcionan evidencias razonadas de sus afirmaciones.

2.1.2. *Aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje matemático*

Además de identificar oportunidades de aprendizaje matemático, que según Törnroos (2005) son un prerrequisito para que se produzca aprendizaje, se debe estudiar cómo conectar las oportunidades que se crean en una discusión en gran grupo con el aprendizaje real que adquieren los alumnos. Abedi y Herman (2010) concluyen, en un estudio cuantitativo, que ciertas medidas relacionadas con la creación de oportunidades de aprendizaje matemático (por ejemplo, el grado de cobertura en el currículo del tema estudiado, la exposición y énfasis en los contenidos y la calidad de las estrategias de enseñanza) presentan correlación con el rendimiento del estudiante. Sin embargo los autores no clarifican cómo identificar si una determinada oportunidad de aprendizaje puede haberse transformado, o no, en aprendizaje real para un alumno concreto.

En este estudio consideramos que una oportunidad de aprendizaje matemático es aprovechada por un alumno si se obtienen evidencias de que el estudiante ha cambiado la comprensión matemática de un concepto o procedimiento, ya sea a través de sus afirmaciones durante la discusión en gran grupo, o bien por escrito en su protocolo de resolución individual (Boukafri, Ferrer y Planas, 2015; Ferrer, Doorman y Fortuny, 2015). En consecuencia, es razonable plantear el estudio de las oportunidades de aprendizaje con base en el análisis de situaciones de enseñanza centradas en la gestión de discusiones en gran grupo, y que este análisis a su vez esté centrado en el estudio de las acciones con mayor peso en el proceso de resolución de las tareas matemáticas. Para ello, el estudio de oportunidades de aprendizaje requiere de un análisis de situaciones de instrucción, que se centre tanto en aspectos instrumentales como discursivos y que tenga en cuenta el papel de las acciones derivadas de los procesos de interacción surgidos en clase.

2.2. Consideraciones sobre el conocimiento del alumno

El conjunto de prácticas de los *Principios y Estándares para la Educación Matemática* del National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000) recomienda que en los programas de geometría de los niveles medios, los alumnos investiguen relaciones dibujando, midiendo, visualizando, comparando, transformando y clasificando objetos geométricos. En particular, en el estudio de la semejanza de figuras poligonales (véase la Tabla 1), los estudiantes deben analizar características y propiedades de figuras geométricas de dos y tres dimensiones y desarrollar razonamientos matemáticos sobre relaciones geométricas. En concreto, deben experimentar con la semejanza de figuras geométricas, considerando que dos figuras poligonales son semejantes si sus ángulos homólogos son iguales y sus lados homólogos se relacionan por un factor de escala. Investigar en clase sobre propiedades de figuras semejantes y sobre las relaciones entre estas, proporciona muchas oportunidades para desarrollar y evaluar conjeturas inductiva y deductivamente. Así, los alumnos pueden conjeturar que la razón de los perímetros es igual que la razón de semejanza de los lados, y que el cociente entre las áreas de dos figuras semejantes es igual que el cuadrado de la razón de semejanza.

Por otra parte, los estudiantes deben aplicar transformaciones geométricas para analizar situaciones matemáticas. En concreto, trabajar con ampliaciones y reducciones puede servir de apoyo al desarrollo de la comprensión de la semejanza. Por ejemplo, la dilatación de una figura afecta a la longitud de cada lado según un factor de escala constante, pero no afecta a la orientación de la figura ni a la amplitud de sus ángulos.

Tabla 1. Síntesis sobre contenidos de semejanza según los *Principios y Estándares*

Analizar las características y propiedades de figuras geométricas de dos y tres dimensiones y desarrollar razonamientos matemáticos sobre relaciones geométricas.	Comprender las relaciones entre los ángulos, las longitudes de los lados, los perímetros, las áreas y los volúmenes de figuras semejantes. Crear y criticar argumentos inductivos y deductivos concernientes a conceptos y relaciones geométricas como la semejanza.
Aplicar transformaciones para analizar situaciones matemáticas.	Examinar y describir los tamaños, las posiciones y las orientaciones de figuras geométricas sometidas a transformaciones de semejanza.

Respecto de los conocimientos sobre el tema de semejanza que deben adquirir los estudiantes cuando finalizan la Educación Secundaria Obligatoria, el currículo de matemáticas de Catalunya vigente en el momento de realizar este trabajo (Departament d'Ensenyament, 2007) establece que los alumnos deben ser capaces de:

- Establecer relaciones entre los ángulos y las longitudes de los lados de figuras semejantes de dos y tres dimensiones.
- Relacionar perímetros, áreas y volúmenes de figuras semejantes.
- Crear y utilizar argumentos inductivos y deductivos sobre proporcionalidad geométrica y semejanza para resolver problemas en diferentes contextos.
- Aplicar el teorema de Tales para resolver problemas sobre la obtención de medidas.
- Relacionar la semejanza con las ampliaciones, reducciones y escalas.

2.3. Consideraciones sobre el conocimiento del profesor

Según Shulman (1986), la noción del conocimiento matemático que debe tener un profesor comprende dos niveles: el «conocimiento del contenido matemático» y el «conocimiento del contenido pedagógico».

2.3.1. *Conocimiento del contenido matemático*

Más allá del conocimiento de los contenidos curriculares básicos que deben tratarse en una clase de secundaria, que en el caso de este estudio son contenidos sobre semejanza y vienen determinados por el currículo de matemáticas para la Educación Secundaria Obligatoria en Catalunya, el profesor debe disponer de un abanico más amplio de conocimientos sobre el tema. De esta forma será más consciente de todo el panorama matemático en el que se sitúa la experiencia didáctica que está llevando a cabo en su aula (Ball y Bass, 2009). En los siguientes párrafos introducimos algunos conceptos matemáticos importantes para la comprensión del tema de semejanza.

El estudio de las transformaciones geométricas entre ciertas estructuras algebraicas adquiere importancia gracias a la conferencia que Félix Klein dio en 1872, con motivo de su admisión a la Universidad de Erlangen, con el título "Una revisión comparativa de investigaciones recientes en geometría". Los puntos de vista expresados en esta conferencia se conocen hoy como Programa de Erlangen. La idea básica de Klein era que toda geometría se podía caracterizar por un grupo de transformaciones y que la geometría trataba esencialmente de los invariantes por este grupo de transformaciones. Así, la geometría afín quedaba caracterizada por el grupo de las afinidades, es decir, por el estudio de los invariantes de este grupo[1].

Definición. Un «espacio afín» sobre un cuerpo *K* es un conjunto $A \neq \emptyset$, un espacio vectorial *E* y una aplicación $\varphi : A \times A \longrightarrow E$ que cumple las siguientes dos condiciones:

i. $\begin{aligned} \varphi_p : A &\longrightarrow E \\ q &\longmapsto \varphi(p,q) \end{aligned}$ es biyectiva $\forall\, p \in A$.

ii. $\varphi(p,q) + \varphi(q,r) = \varphi(p,r) \;\; \forall\, p,q,r \in A$.

Habitualmente se escribe $\varphi(p,q) = \overrightarrow{pq}$ y se dice que p es el «origen» y q es el «extremo» del vector $\overrightarrow{pq}$. Con esta notación, la segunda condición anterior se escribe $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}$. A los elementos de *A* se les llama puntos; *E* es el espacio vectorial asociado al espacio afín A; y se define la dimensión de A como la dimensión del espacio vectorial E.

Definición. Sean A_1 y A_2 dos espacios afines sobre un cuerpo *K*, con espacios vectoriales asociados E_1 y E_2, y con aplicaciones φ_1 y φ_2. Una «aplicación afín» o «afinidad» entre estos dos espacios es una aplicación $f : A_1 \longrightarrow A_2$, tal que para una aplicación lineal $\tilde{f} : E_1 \longrightarrow E_2$, que se denomina «aplicación lineal asociada a la afinidad f», se cumple: $\tilde{f} \circ \varphi_1 = \varphi_2 \circ (f \times f)$. Es decir,

$$\forall\, a,b \in A_1,\;\; \tilde{f}\left(\overrightarrow{ab}\right) = \overrightarrow{f(a)f(b)}$$

Proposición. Sean A_1 y A_2 dos espacios afines sobre un cuerpo *K* con espacios vectoriales asociados E_1 y E_2. Las dos condiciones siguientes son equivalentes:

i. $\tilde{f}\left(\overrightarrow{ab}\right) = \overrightarrow{f(a)f(b)} \;\; \forall\, a,b \in A_1$.

ii. $f(a+u) = f(a) + \tilde{f}(u) \;\; \forall\, a \in A_1, \forall\, u \in E_1$.

Demostración. En primer lugar veamos que (i) ⇒ (ii). Dados $a \in A_1, u \in E_1$, sea $b \in A_1$ tal que $\overrightarrow{ab} = u$. Entonces, por (i) se cumple: $\tilde{f}\left(\overrightarrow{ab}\right) = \overrightarrow{f(a)f(b)}$ y, por tanto,

$$f(a+u) = f(b) = f(a) + \tilde{f}\left(\overrightarrow{ab}\right) = f(a) + \tilde{f}(u).$$

[1] La información de este subapartado, sobre homotecia y semejanza, se obtuvo de Castellet, M., y Llerena, I. (2000). *Àlgebra lineal i geometria*. Bellaterra, España: UAB.

En segundo lugar probemos que (ii) $\Rightarrow$ (i). Dados $a, b \in A_1$, de $b = a + \overrightarrow{ab}$ se deduce que $f(b) = f(a) + \tilde{f}(\overrightarrow{ab})$ y, por tanto, $\overrightarrow{f(a)f(b)} = \tilde{f}(\overrightarrow{ab})$.

Homotecias

Definición. Una afinidad $f : A \longrightarrow A$ se denomina «homotecia» de razón $r \neq 0{,}1$ si $\tilde{f} = rI_E$, siendo I_E la matriz identidad asociada al espacio vectorial E.

Para estudiar los posibles puntos fijos de una homotecia, escogemos un punto auxiliar $p \in A$. Entonces, $a \in A$ es un punto fijo de la homotecia f si se cumple:

$$a = f(a) = f(p + \overrightarrow{pa}) = f(p) + r\,\overrightarrow{pa} \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{pa} = \overrightarrow{pf(p)} + r\,\overrightarrow{pa} \;\Leftrightarrow$$
$$\overrightarrow{pa} = \frac{1}{1-r}\,\overrightarrow{pf(p)} \;\Leftrightarrow\; a = p + \frac{1}{1-r}\,\overrightarrow{pf(p)}$$

Por lo tanto, a es el único punto fijo de f, que se denomina «centro de la homotecia». La imagen de cualquier otro punto $b \in A$ es $f(b) = a + r\,\overrightarrow{ab}$. A modo de ejemplo, la Figura 1 ejemplifica una homotecia de centro O y razón $r = 2$ en un triángulo:

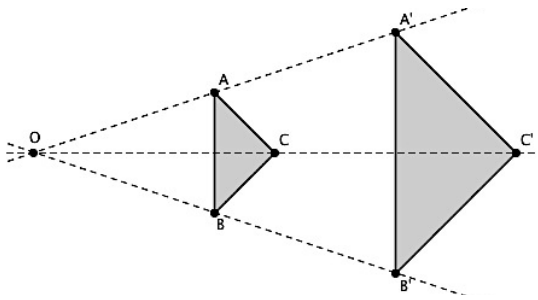


Figura 1. Homotecia de centro O y razón $r = 2$ en el triángulo ABC

Semejanzas

Definición. Un espacio afín real A, con espacio vectorial asociado E, se denomina «espacio afín euclídeo» si E tiene asociado un producto escalar, es decir, si E es un espacio vectorial euclídeo. Dados dos puntos de un espacio afín euclídeo, $p, q \in A$, se define la distancia entre p y q como el número real: $d(p,q) = \|\overrightarrow{pq}\|$.

Definición. La aplicación $d : A \times A \longrightarrow \mathbb{R}$ que asigna a cada par $(p,q) \in A \times A$ el número real $d(p,q)$ se denomina «aplicación distancia» y cumple las siguientes propiedades, $\forall\, p, q, r \in A$:

i. $d(p,q) \geq 0\,;\; d(p,q) = 0 \Leftrightarrow p = q$

ii. $d(p,q) = d(q,p)$

iii. $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$

iv. $d(p,q) \geq |d(p,r) - d(r,q)|$

Definición. Una «semejanza» es una aplicación $f : A \longrightarrow A$ de un espacio afín euclídeo en sí mismo que cumple:

$$d\big(f(a), f(b)\big) = r\, d(a,b) \quad \forall\, a, b \in A,$$

donde r es un número real fijo ($r > 0$) que se llama «razón de semejanza». En particular, las isometrías o desplazamientos son semejanzas de razón $r = 1$.

Partiendo de esta definición es inmediato comprobar que la composición de dos semejanzas f_1 y f_2 de razones r_1 y r_2 es una semejanza de razón $r_1 r_2$. En efecto, se cumplen las siguientes igualdades:

$$d\Big(f_1\big(f_2(a)\big), f_1\big(f_2(b)\big)\Big) = r_1\, d\big(f_2(a), f_2(b)\big) = r_1 r_2\, d(a,b) \quad \forall\, a, b \in A.$$

Proposición. Una aplicación $f : A \longrightarrow A$, donde A es un espacio afín euclídeo, es una semejanza si, y solo si, f es una afinidad y $\tilde{f}$ descompone en un producto de una aplicación ortogonal[2] y una homotecia vectorial.

Demostración. Para probar la primera parte de la proposición supongamos que f es una semejanza de razón r. Sea h la homotecia de centro $p \in A$ y razón r^{-1}. Entonces, las siguientes igualdades:

$$d\big(h(a), h(b)\big) = \left\|\overrightarrow{h(a)h(b)}\right\| = \left\|\tilde{h}\big(\overrightarrow{ab}\big)\right\| = \left\|r^{-1}\,\overrightarrow{ab}\right\| = r^{-1}\, d(a,b) \quad \forall\, a, b \in A$$

demuestran que h es una semejanza de razón r^{-1} y, por tanto, $g = h \circ f$ es una semejanza de razón $r^{-1} \cdot r = 1$, es decir, es un desplazamiento. Así, $f = h^{-1} \circ g$ es una afinidad, ya que es producto de dos afinidades, y $\tilde{f} = \tilde{h}^{-1} \circ \tilde{g}$, con $\tilde{g}$ ortogonal y $\tilde{h}^{-1} = r\, I$, es una homotecia vectorial.

Para probar la segunda parte, supongamos que f es una afinidad y $f = h \circ g$, con h una homotecia de razón r y g un desplazamiento.

[2] Una aplicación $f : E \longrightarrow E$, siendo E un espacio vectorial con un producto escalar, se llama «ortogonal» si $\forall\, u, v \in E$ se cumple $f(u) \cdot f(v) = u \cdot v$.

Entonces, $\forall\, a, b \in A$, f también es una semejanza, ya que se cumple lo siguiente:

$$d\big(f(a), f(b)\big) = d\Big(h\big(g(a)\big), h\big(g(b)\big)\Big) = r\, d\big(g(a), g(b)\big) = r\, d(a, b).$$

2.3.2. *Conocimiento del contenido pedagógico*

La preparación de discusiones matemáticas en gran grupo a través de ciertas técnicas y recursos es útil para promover discusiones productivas (Stein, Engle, Smith y Hughes, 2008; Stein y Smith, 2011). Además, la preparación que realiza el profesor resulta esencial para fomentar la creación de momentos de *insight* en los alumnos (Barnes, 2000; Burton, 1999) y generar oportunidades de aprendizaje en las discusiones de tareas matemáticas abiertas (Viseu y Oliveira, 2012). Estas discusiones también son útiles para que los alumnos construyan su propio conocimiento matemático, ya que "ellos tienen la autoría de sus propias ideas" (Barnes, 2000, p. 39).

Del mismo modo, los estudiantes están más motivados para participar en actividades de resolución de problemas cuando se ven inmersos en discusiones en gran grupo interactivas (Boaler, 1997). La orquestación de discusiones participativas también genera oportunidades de aprendizaje, ya que permite a los alumnos plantearse otras formas de abordar las tareas matemáticas y tomar contacto con el descubrimiento de nuevos conceptos y procedimientos (Barnes, 2000; Ferrer, Fortuny y Morera, 2014a; Ferrer, Fortuny, Planas y Boukafri, 2014).

A continuación presentamos algunos aspectos que un profesor debe tener en cuenta para seleccionar adecuadamente las tareas matemáticas y los recursos didácticos que utilizará en su clase con el propósito de gestionar, de un modo eficiente, las sesiones de discusión en gran grupo.

Consideraciones sobre la definición de problema en educación matemática[3]

Varios autores han realizado investigaciones sobre la resolución de problemas (véase, por ejemplo, Mason, Burton y Stacey, 1988; Pólya, 1970, 1981; Puig, 1996; Schoenfeld, 1985, 1992) y presentan distintas consideraciones respecto del término «problema» en

[3] En este subapartado incluimos consideraciones sobre resolución de problemas que publicamos en Boukafri, K., y Ferrer, M. (2015). Resolución de problemas de geometría con material manipulativo o soporte tecnológico. *Épsilon. Revista de Educación Matemática*, *89*, 49-65.

educación matemática, las cuales introducen desde múltiples perspectivas. En concreto, Pólya considera que "tener un problema significa buscar de manera consciente una acción apropiada para conseguir un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de manera inmediata" (Pólya, 1981, p. 117). Interpretando esta definición podemos llegar a la consideración de que un problema debe cumplir tres condiciones: aceptación, es decir, la persona o grupo deben aceptar la tarea como un reto y establecer un compromiso formal para resolverla; bloqueo, es decir, los intentos iniciales no dan buen resultado y las técnicas habituales para abordar la tarea no funcionan; y exploración, es decir, se indaga en nuevos métodos para resolver satisfactoriamente la tarea.

Pólya centró su modelo sobre la resolución de problemas en la idea de un «resolutor ideal», es decir, un individuo que cuando resuelve un problema avanza linealmente desde el enunciado hasta la solución. El objetivo del modelo de Pólya era conseguir que cualquier persona, con la ayuda de un tutor, aprendiera técnicas de resolución efectivas y, así, se pudiera convertir en un buen resolutor de problemas. Pólya consideraba que un alumno aprende por imitación y práctica y, por lo tanto, se debía combinar la orientación del profesor con el uso personal de las estrategias heurísticas. Para ello, presentó una serie de indicaciones con el fin de que el resolutor pudiera afrontar con mayor facilidad el problema y sugirió estrategias que favorecían el proceso de resolución. Además planteó cuatro fases que intervenían en una buena resolución de un problema matemático:

- «Comprensión del problema», es decir, determinar cuál es la incógnita y cuáles son los datos y las condiciones que hay que satisfacer. Conviene plantearse si datos y condiciones son suficientes para determinar la incógnita, o bien son redundantes o contradictorios. En esta fase puede ser útil hacer un dibujo o simbolizar el problema de forma adecuada.
- «Concepción de un plan», es decir, encontrar la relación entre los datos del problema y la incógnita, y reformular el enunciado si es necesario. Considerar problemas parecidos, más simples, que el resolutor ya sabe resolver.
- «Ejecución del plan», es decir, comprobar que cada paso que se sigue en la resolución es correcto y, si es necesario, demostrarlo.
- «Visión retrospectiva o revisión de la solución obtenida», es decir, verificar la solución y el razonamiento utilizado. Pensar si se puede obtener el resultado de alguna

> forma diferente y si la misma técnica de resolución se puede aplicar en un problema distinto.

Por otra parte, diferenciar un verdadero problema matemático de un mero ejercicio es una cuestión compleja y depende del sujeto a quien va dirigida la experiencia:

> "Ser un problema no es una propiedad inherente de una tarea matemática. Más bien es una relación particular entre el individuo y la tarea lo que hace de esta un problema para aquella persona. La palabra 'problema' se utiliza en un sentido relativo, para designar una tarea que es difícil para el individuo que está intentando resolverla. Asimismo, esta dificultad debe representar un enredo intelectual más allá que un mero cálculo." (Schoenfeld, 1985, p. 74).

A diferencia de lo que sucede cuando se resuelve un ejercicio, el proceso de resolución de un problema no suele producirse según unas reglas preestablecidas. Schoenfeld (1985, p. 15) considera que tanto el conocimiento como el comportamiento matemático de quien resuelve problemas se puede clasificar en función de: los recursos, es decir, el conjunto de conocimientos matemáticos básicos y necesarios para que el resolutor se enfrente al problema; las heurísticas, es decir, las técnicas generales de resolución; el control, es decir, la forma como cada persona se enfrenta a la resolución de problemas, teniendo en cuenta los recursos y las heurísticas que conoce; y el sistema de creencias, es decir, la perspectiva del resolutor respecto de la matemática y de cómo se trabaja con ella. El cumplimiento, o no, de estos componentes por parte del resolutor es lo que determinará la dificultad del problema. Así, por ejemplo, un sujeto puede presentar unos recursos adecuados y un buen dominio de la heurística, pero la falta de seguridad en su sistema de creencias puede no permitir que alcance la solución del problema. Por lo tanto, comprender y analizar estos elementos es importante para entender cómo se enfrenta cada resolutor a un problema, pero también para ser capaz de entender las dificultades que se le presentan.

Preparación de la selección y uso de recursos didácticos

La selección minuciosa de tareas matemáticas es importante para incidir en el pensamiento de los alumnos durante una discusión en gran grupo (Viseu y Oliveira, 2012). Como se sugiere en los *Principios y Estándares* del NCTM (2000), la selección de problemas que supongan un desafío para los estudiantes (Barnes, 2000) y que se planteen en un contexto realista tiene el potencial suficiente para desarrollar conceptos clave sobre el tema matemático estudiado (por ejemplo, la semejanza). Además, los problemas deben presentar una demanda cognitiva adecuada (Stein y Smith, 1998) para proporcionar puntos de partida óptimos que permitan al grupo trabajar con las nociones básicas del tema estudiado (por ejemplo, forma, razón o proporción, y transformación geométrica) y, siempre que sea posible, que los resultados del trabajo ofrezcan una amplia variedad de respuestas que supongan potenciales puntos de partida para iniciar un debate en el aula (Osana, Lacroix, Tucker y Desrosiers, 2006).

Por otro lado, la selección de diferentes artefactos, como un software de geometría dinámica, y la orquestación de discusiones en grupo utilizando estos artefactos (Smetana y Bell, 2014) también son aspectos a tener en cuenta en la preparación de la sesión de clase.

Sistemática para la preparación de discusiones en gran grupo

Entendemos por «orquestación» el modo que tiene un profesor para gestionar los elementos singulares de una discusión en el aula: alumnos, profesor y artefactos, y producir resultados compartidos (Morera, 2013; Trouche y Drijvers, 2010). En particular, para las discusiones en gran grupo, Morera (2013) elaboró una sistemática de seis fases para prepararlas y gestionarlas: «anticipación a través del árbol», «configuración didáctica ampliada», «modo de explotación», «monitorización», «selección de situaciones» y «secuenciación de la implementación didáctica». Estas fases se obtuvieron realizando una mirada conjunta a las prácticas de Stein y Smith (2011), y a los elementos de la orquestación instrumental de Trouche (2004) y Drijvers, Doorman, Boon, Reed y Gravemeijer (2010). Todas las fases de la sistemática favorecen la gestión eficiente de una discusión en gran grupo y pueden contribuir a la creación de oportunidades de aprendizaje, ya que se potencia que los alumnos adquieran habilidades matemáticas de alta riqueza cognitiva, procedimental y de autorregulación. Las tres primeras fases de la sistemática hacen referencia a la actividad del profesor previa a la implementación de la actividad matemática en el aula y las tres últimas fases se producen durante la discusión en gran grupo. A continuación introducimos brevemente las seis fases de la sistemática:

- La «anticipación a través del árbol» describe la importancia de prever las respuestas de los alumnos, hecho que incluye pensar cómo pueden interpretar la resolución de las tareas y tener un amplio estudio de todas las posibles formas de resolverlas. Para ello se utiliza el «árbol del problema» (Boukafri y Ferrer, 2015; Ferrer, Fortuny y Morera, 2013; Ferrer, Fortuny y Morera, 2014b; Morera, 2013; Morera, Chico, Badillo y Planas, 2012), el cual se presenta como una herramienta que permite anticipar las estrategias de resolución que seguirán los alumnos en el abordaje de las tareas matemáticas y sistematizar aspectos que el profesor desea tratar durante la discusión en gran grupo. Consiste en una estructura en forma de árbol cuyas ramas muestran diferentes estrategias, correctas e incorrectas, que un estudiante podría seguir para resolver la tarea. Para las estrategias incorrectas incluye posibles comentarios del profesor orientados a dirigir el proceso de resolución del alumno. Para las estrategias correctas, el árbol propone preguntas al estudiante para que se plantee nuevos retos, como el estudio de casos extremos o la generalización de propiedades.

– La «configuración didáctica ampliada» consiste en decidir con antelación qué artefactos, tanto tecnológicos como manipulativos, entrarán en juego en el aula. La selección de artefactos y la utilidad de estos en una clase requiere de una minuciosa preparación y estudio previo.

– El «modo de explotación» está íntimamente ligado a la primera fase, en la que se ha elaborado el árbol del problema. Trata de decidir las actuaciones del profesor cuando gestiona la discusión en gran grupo para guiar a los alumnos y, así, conseguir que estos lleguen lo más lejos posible en la estructura del árbol. En otros términos, el modo de explotación hace referencia a la forma en la que el profesor, en una situación concreta de aula, interpreta una configuración didáctica para atender a sus intenciones didácticas.

– La «monitorización» se basa en el seguimiento de los pensamientos matemáticos y las estrategias de resolución de los alumnos que realiza el profesor mientras estos trabajan la tarea en el aula. El profesor debe hacer preguntas para conseguir centrar la atención en los aspectos matemáticos importantes de la tarea y para ayudar a clarificar las ideas de los estudiantes.

– La «selección de situaciones» es el proceso mediante el cual el profesor elige de manera particular algunos alumnos para que compartan con el resto del grupo su interpretación o solución de la tarea matemática.

– La «secuenciación de la implementación didáctica» es el reflejo de la preparación previa de la sesión de discusión y su puesta en práctica en el aula. Para ello el profesor debe tomar decisiones sobre cómo secuenciar las presentaciones de los alumnos seleccionados previamente y, de esta forma, favorecer las conexiones de sus soluciones con las de otros compañeros.

Episodios de una discusión en gran grupo y acciones discursivas

Los episodios de una discusión en gran grupo orquestada por el profesor quedan caracterizados, en este trabajo, a través de dos dimensiones: la instrumental, que se centra el uso de artefactos y en el modo en el que estos se emplean en clase, y la discursiva, que contempla un conjunto de patrones de interacción que ayudan a entender el desarrollo genérico de los episodios y las particularidades compartidas entre ellos.

Con el fin de estudiar el papel que adoptan los artefactos y sus usos en una discusión en gran grupo, consideramos seis tipos de orquestación instrumental:

– «Explorar el artefacto», es decir, el conjunto de comentarios técnicos e indicaciones sobre el funcionamiento del artefacto que realiza el profesor durante la clase.
– «Explicar a través del artefacto», es decir, las explicaciones que el profesor elabora al grupo apoyándose en algún artefacto.
– «Enlazar artefactos», donde se enfatiza la relación entre lo ocurrido en dos entornos distintos en los que se utilizan diversos artefactos.
– «Discutir el artefacto», es decir, se produce una discusión conjunta, entre profesor y alumnos, de lo que se observa a través del artefacto.
– «Descubrir a través del artefacto», donde se utiliza un artefacto para que un alumno, con el apoyo del profesor, muestre un hallazgo matemático (por ejemplo, un procedimiento, un razonamiento o un resultado) al grupo. Aunque este hallazgo puede surgir espontáneamente a lo largo de la discusión en gran grupo, también es posible que el profesor lo hubiera identificado en la preparación de la sesión de clase.
– «Experimentar el instrumento», es decir, uno o varios alumnos utilizan un artefacto para presentar su trabajo ante el resto de participantes o para dar respuesta a las preguntas del profesor.

Los tres primeros tipos de orquestación instrumental están centrados en las acciones del profesor y los tres últimos en las acciones de los alumnos. Todos ellos están inspirados en los tipos iniciales diseñados por Drijvers y otros (2010), aunque se han generalizado para situaciones de enseñanza en las que el diseño e implementación de las discusiones en gran grupo no contiene, necesariamente, un uso intensivo de artefactos tecnológicos (Morera, Planas y Fortuny, 2013).

Las elecciones discursivas que hace un profesor en su clase de matemáticas se estudian según los estadios de la discusión de un problema, los cuales se presentan como una secuencia de pautas de actuación que ilustran el proceso que sigue el docente para gestionar una discusión en gran grupo hacia la resolución de una tarea matemática (Morera, 2013; Morera y Fortuny, 2012). Los estadios se organizan según un desarrollo sistemático del proceso de resolución y se agrupan en ocho fases:

– «Situación del problema», donde se presenta y se recuerda el enunciado o los objetivos de la tarea antes de empezar la discusión, con el fin de situar a los alumnos en la actividad matemática que se les plantea.

– «Presentación de una solución», es decir, se muestra al grupo una solución de la tarea, correcta o incorrecta, y puede iniciarse un debate a partir de ella.

– «Estudio de estrategias para resolver o argumentar», donde se exponen y se discuten diversas formas de resolver una tarea matemática o de argumentar la solución presentada; los estudiantes muestran sus estrategias aunque el profesor puede intervenir y plantear las que no hayan considerado.

– «Estudio de casos particulares o extremos», donde se hace hincapié en los casos singulares de la tarea para estudiarlos individual y específicamente.

– «Contraste entre soluciones», es decir, la realización de una comparativa entre las diversas formas de resolver la tarea o de interpretar el enunciado de la actividad matemática; no se busca la misma solución mediante diferentes estrategias, sino que se comparan las soluciones obtenidas aplicando cada una de ellas.

– «Conexiones con otras situaciones», es decir, el establecimiento de vínculos entre las diferentes soluciones e interpretaciones de la tarea, incluyendo conexiones entre otros conceptos matemáticos y con las demás áreas del conocimiento.

- «Generalización y conceptualización», donde se emplea la discusión en gran grupo como detonante para generalizar un resultado encontrado, el cual puede generar una nueva tarea matemática.
- «Reflexión sobre progreso matemático», es decir, la clausura de la discusión con un balance reflexivo, verbalizado o por escrito, sobre los aspectos matemáticos trabajados en la sesión de clase.

Por último, en cada episodio también se consideran acciones discursivas que han tenido lugar en un estadio específico de la discusión de una tarea matemática, con dominio de un tipo específico de orquestación. Nuestro interés recae en los efectos relativos al aprendizaje de dichas acciones, las cuales son susceptibles de fomentar conocimiento matemático, tanto procedimental básico como conceptual (Niss y Højgaard, 2011). Estas acciones se vinculan al participante que las realiza, ya sea un estudiante o el profesor, con atención al papel que ejercen en la organización de la participación matemática durante la discusión en gran grupo. Siguiendo a Schoenfeld (2011) podemos clasificar las acciones realizadas por el profesor en: acciones de gestión de la clase, acciones de discusión y acciones de contenido matemático, según hagan referencia a la organización del aula y de sus participantes; a los aspectos relativos al desarrollo de actividades matemáticas, o bien a los contenidos matemáticos de las actividades y a la habilidad del profesor para escuchar a los alumnos, darse cuenta de sus dificultades y de aquellos aspectos que comprenden mejor o peor.

3. Metodología

La metodología elegida para realizar este estudio forma parte del paradigma cualitativo de las investigaciones en educación matemática y, en concreto, se incluye en el *design research*. El estudio trata de identificar y explicar patrones que surgen en el análisis de la conexión entre las discusiones en gran grupo y el aprendizaje real que adquieren los alumnos (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer y Schauble, 2003). La posición que adopta el investigador es subjetiva y se estudian las interacciones que se producen entre los sujetos analizados. El origen de los datos es cualitativo y los métodos de análisis que se aplican son esencialmente interpretativos[4].

En este capítulo presentamos el contexto y diseño del experimento de enseñanza y la selección de las tareas matemáticas, las cuales resolvemos desde la perspectiva de un resolutor experto. Luego detallamos la implementación del experimento y exponemos cómo hemos obtenido los datos de investigación. Finalmente, hacemos referencia a los métodos de análisis, de acuerdo con los objetivos de esta investigación.

3.1. Contexto y diseño del experimento de enseñanza

Bajo el enfoque de los diseños experimentales en educación matemática, hemos elaborado una secuencia instructiva con tareas de semejanza dirigida a estudiantes de tercer curso de la Educación Secundaria Obligatoria (14 y 15 años). El diseño de la secuencia se trianguló con tres investigadores de nuestro grupo y con dos profesoras de secundaria que tenían una amplia trayectoria profesional en el ámbito de la educación.

La secuencia instructiva pretende que los alumnos establezcan relaciones entre ángulos, longitudes, perímetros y áreas de figuras semejantes y creen argumentos orientados a la resolución de problemas de semejanza. La secuencia está planteada para ser trabajada en ocho sesiones de clase. Se compone de tres sesiones preliminares, con actividades introductorias del tema, y de cinco sesiones más abiertas, donde los alumnos deben resolver cinco problemas de semejanza (véase la Tabla 2). En el Anexo I figuran los enunciados de todas las actividades y problemas matemáticos de la secuencia instructiva sobre tareas de semejanza.

[4] Para más información consultar Arnal, J. (1997). *Metodologies de la investigació educativa*. Barcelona, España: Publicacions de la Universitat Oberta de Catalunya.

El objetivo principal de las actividades introductorias es que los alumnos se inicien en los conceptos matemáticos básicos del tema, los cuales se desarrollan con más detalle a lo largo de los cinco problemas. El Anexo II incluye una guía para el profesorado con más información sobre la preparación de la secuencia de tareas de semejanza.

Tabla 2. Estructura de la secuencia didáctica

Sesión	*Organización*	*Tareas matemáticas*
1	Trabajo por parejas	Actividades introductorias del tema de semejanza, Tales y homotecia
2	Discusión en gran grupo y reflexión individual	Actividades introductorias 1 (*¡Doblar figuras!*) y 2 (*Rectángulos semejantes*)
3	Discusión en gran grupo y reflexión individual	Actividades introductorias 3 (*Ampliar y reducir fotocopias*), 4 (*Cambiar las medidas de los polígonos*) y 5 (*Recordemos el teorema de Tales*)
4	Trabajo por parejas	Problema 1: *Relacionar perímetros y áreas*
		Problema 2: *La semejanza en las hojas de un árbol*
5	Discusión en gran grupo y reflexión individual	Problemas 1 y 2
6	Trabajo por parejas	Problema 3: *Transformaciones geométricas*
		Problema 4: *Una propiedad de los puntos medios*
7	Discusión en gran grupo y reflexión individual	Problemas 3 y 4
8	Trabajo por parejas y discusión en gran grupo	Problema 5: *Investigar con los espejos*

En el diseño instructivo hemos incluido actividades relacionadas con situaciones reales y cotidianas (por ejemplo, estudiar la semejanza en la ampliación y reducción de fotocopias, o en las hojas de un árbol) y otras actividades con un contexto estrictamente matemático (por ejemplo, representar una figura poligonal el doble de grande a partir de una original, o aplicar la semejanza de triángulos y el teorema de Tales para obtener medidas desconocidas). También hemos tenido en cuenta que el término 'semejante' constituye una noción matemática difícil (Freudenthal, 1983), ya que gran número de alumnos lo asocian al mantenimiento de la forma de una figura geométrica (Gómez, 2007). Además, como mencionan Hart, Brown y Küchemann (1981), el concepto de forma es muy complejo, especialmente cuando se trata de figuras rectilíneas porque, por ejemplo, para algunos estudiantes todos los rectángulos tienen la misma forma, en el sentido de que son rectángulos, pero no todos son semejantes ya que no mantienen necesariamente las proporciones con los correspondientes lados homólogos.

El diseño de las actividades y problemas hace posible un ciclo de trabajo que combina la resolución por parejas, la discusión en gran grupo y la reflexión escrita e individual después de la discusión de las tareas. Además, permite utilizar en clase dos tipos de artefactos: tecnológicos, como GeoGebra, que es un programa de geometría dinámica con código abierto y que se encuentra disponible en línea: <http://www.geogebra.org>, y no tecnológicos, como el lápiz y papel, la pizarra ordinaria o el material manipulativo.

3.1.1. *Selección de tres tareas de semejanza*

En este trabajo hemos seleccionado dos actividades introductorias (primera y segunda tarea), que los alumnos deben resolver con lápiz y papel, y un problema (tercera tarea), que debe ser resuelto con GeoGebra. Las tres tareas definen una trayectoria hipotética de aprendizaje (Simon, 1995; Simon y Tzur, 2004) sobre el tema de semejanza. En primer lugar se pretende que los alumnos sean capaces de reconocer figuras semejantes y puedan elaborar una definición de semejanza a partir de la igualdad de ángulos y la proporcionalidad entre los lados homólogos. Luego, se plantea la homotecia como un caso particular de la semejanza y, finalmente, se estudia la composición entre una transformación isométrica y una homotecia de razón positiva. A continuación introducimos las tres tareas y las resolvemos desde la perspectiva de un resolutor experto.

Primera tarea: ¡Doblar figuras!

La primera tarea es la actividad inicial de la secuencia y se presenta a los alumnos a través del dibujo de una figura bidimensional (véase la Fig. 2). La tarea favorece el estudio de la proporcionalidad entre figuras poligonales; la elaboración conjunta de una definición de semejanza basada en la igualdad de ángulos y la proporcionalidad de lados homólogos; y el análisis de la relación entre perímetros y áreas de figuras semejantes.

Dada la siguiente letra del abecedario, representa otras que sean el doble de grandes. Explica brevemente cómo las has obtenido y compáralas con la original.

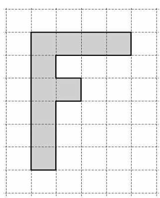


Figura 2. Enunciado de la primera tarea

La indefinición de la frase 'el doble de grande' en el enunciado es intencionada para enriquecer la discusión. Algunos alumnos pueden representar una figura que tenga cada lado el doble de grande respecto el original y, por tanto, el perímetro de la nueva imagen queda multiplicado por 2 (véase la Fig. 3). Así, pueden observar que los ángulos de ambas figuras son iguales, pero los lados son proporcionales con razón 2 y pueden llegar a la definición de figuras poligonales semejantes[5].

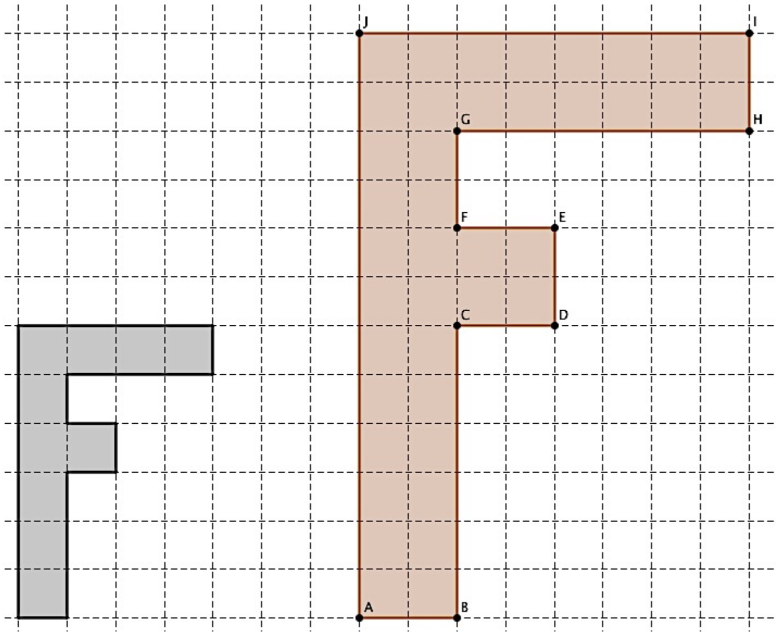


Figura 3. Construcción de una figura con el doble de perímetro y semejante a la original

En cambio otros alumnos pueden asociar la representación de una figura el doble de grande con una figura que tenga el doble de área, la cual únicamente es semejante a la original si la razón entre los lados homólogos es $\sqrt{2}$.

Es probable que se produzca un cambio en la forma de la figura poligonal original si se construye un polígono con el doble de área ($20u^2$) sin preservar la semejanza (véase el polígono 1 en la Fig. 4). También se puede conseguir una figura con un área de $20u^2$ duplicando las longitudes de todos los lados situados en posición vertical (véase el polígono 2 en la Fig. 4), o bien multiplicando por dos las longitudes de todos los lados que se encuentran en posición horizontal (véase el polígono 3 en la Fig. 4).

[5] Publicamos esta revisión didáctico-matemática sobre la primera tarea de la secuencia en Ferrer, M., Fortuny, J. M., y Morera, L. (2014). Sobre las discusiones en gran grupo: Ejemplificación en un problema de semejanza. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 67, 57-66.

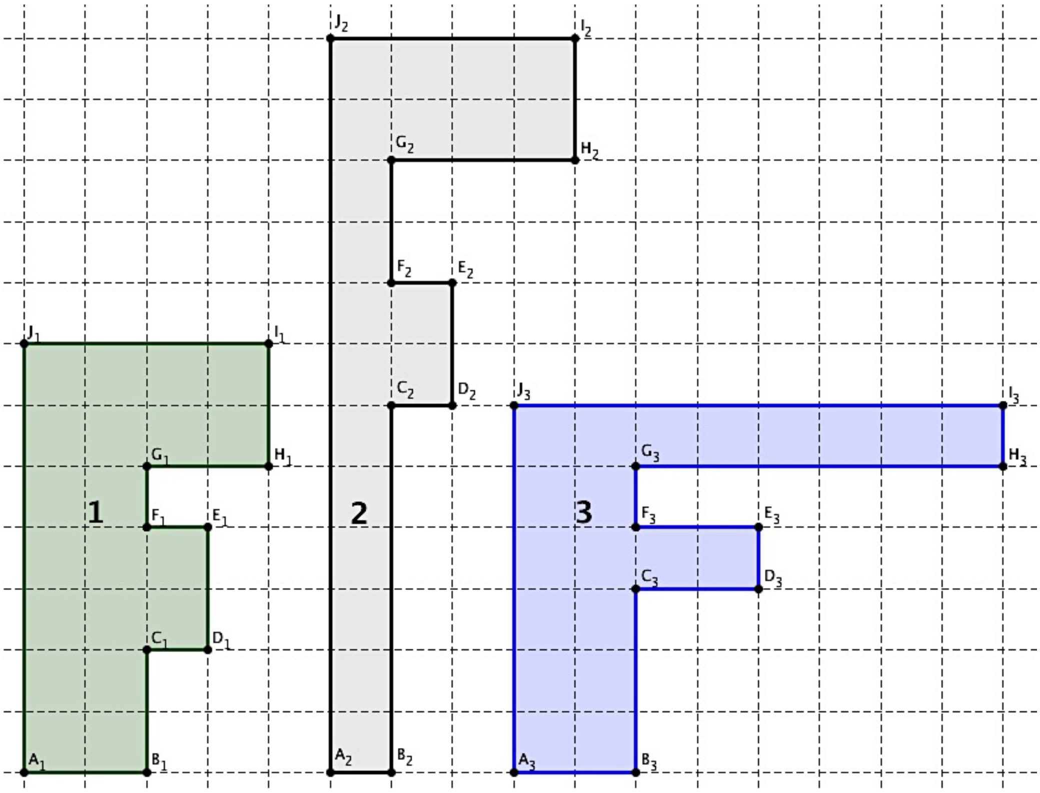


Figura 4. Construcción de polígonos con el doble de área sin preservar la semejanza

La representación de una figura con el doble de área y que mantenga las proporciones con la figura original es una cuestión compleja para la mayoría de estudiantes. Emplear una cuadrícula con cuadrados de dimensiones $1u^2$ x $1u^2$ puede simplificar notablemente esta cuestión, ya que el uso de sus diagonales permite obtener fácilmente la $\sqrt{2}$ (véase la Fig. 5). De esta forma, construir la figura con el doble de área preservando la semejanza se convierte en una tarea más asequible para los alumnos.

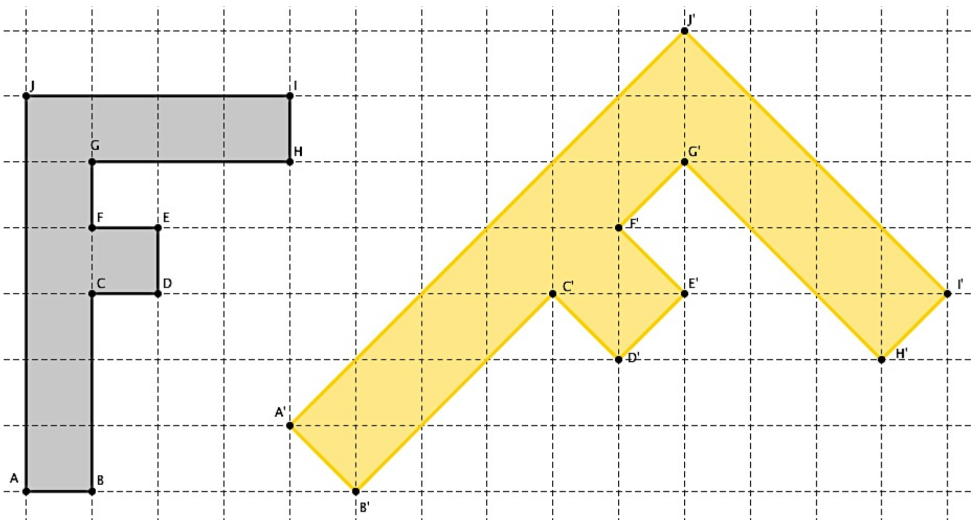


Figura 5. Construcción de una figura con el doble de área y semejante a la original

Segunda tarea: Cambiar las medidas de los polígonos[6]

La segunda tarea induce la construcción de una transformación geométrica que convierta un triángulo en otro con el doble de perímetro y que lo traslade en el plano (véase la Fig. 6). Así se inicia a los alumnos en el concepto de homotecia de razón positiva, como una transformación geométrica que combina una ampliación y una traslación.

¿Cómo transformarías el polígono 1 de la izquierda para conseguir el 2 de la derecha? ¿Y el polígono 2 para conseguir el 1? Explica ambas respuestas con detalle.

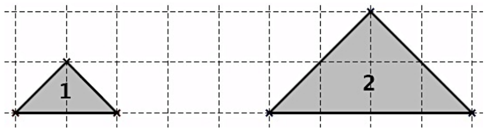


Figura 6. Enunciado de la segunda tarea

Por un lado, para resolver esta actividad los alumnos pueden determinar la razón de semejanza entre los dos triángulos, midiendo las longitudes de los lados, y trasladándolos un determinado número de cuadrados por encima de la cuadrícula. Además tienen la oportunidad de formalizar los razonamientos que realizan. Por ejemplo, si razonan por semejanza, cuya definición habrán obtenido en la resolución de la primera tarea, deben mencionar que los triángulos son semejantes porque los tres ángulos homólogos son iguales y todos los lados homólogos son proporcionales (véase la Fig. 7). En concreto, para transformar el primer triángulo en el segundo, la razón de semejanza es 2 y hay que trasladar el primer triángulo cinco unidades hacia la derecha, respecto del vértice situado más a la izquierda del dibujo. Análogamente se realiza la transformación del segundo triángulo en el primero, aunque en este caso la razón de semejanza es 1/2.

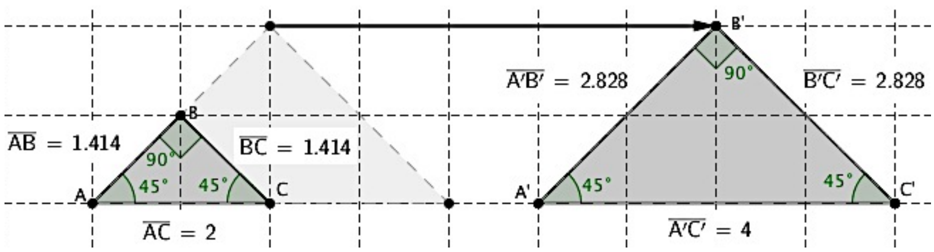


Figura 7. Semejanza entre los triángulos de la segunda tarea

6 El enunciado de la segunda tarea corresponde al primer apartado de la cuarta actividad introductoria de la secuencia completa de tareas de semejanza (véase el Anexo I). Debido a la larga extensión de esta actividad, en este trabajo solo consideramos su primer apartado.

Por otro lado, la tarea también puede resolverse aplicando una homotecia de razón 2, cuyo centro es el punto de intersección de las rectas que definen los vértices homólogos. Así se obtiene el segundo triángulo aplicando una única transformación geométrica al primer triángulo (véase la Fig. 8). Análogamente, se puede aplicar una homotecia de razón 1/2 al segundo triángulo para obtener el primero. De todas formas, es improbable que los alumnos sean capaces de llegar a este razonamiento si no están familiarizados con la transformación de homotecia. Por este motivo, la discusión en gran grupo puede ser una buena oportunidad para iniciar una discusión conjunta sobre esta transformación.

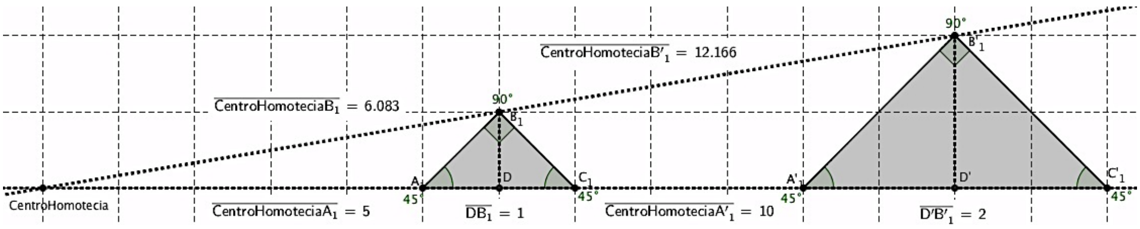


Figura 8. Triángulos homotéticos

Tercera tarea: Transformaciones geométricas

La tercera tarea pregunta por la composición de dos transformaciones geométricas: una homotecia de razón positiva y un giro (véase la Fig. 9). La actividad está planteada para ser resuelta con el apoyo de GeoGebra. En primer lugar, hay que identificar las dos transformaciones, luego se tiene que decidir el orden en el que se aplican y, finalmente, se debe obtener un procedimiento para componerlas. Para ello hay que encontrar los elementos característicos de la homotecia: razón y centro, y los elementos que definen el giro: centro y ángulo de la rotación.

¿Cómo transformarías el polígono 1 de la izquierda para conseguir el 2 de la derecha? Explica con detalle tu respuesta.

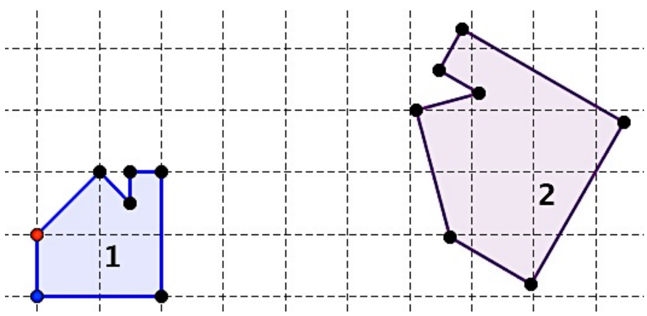


Figura 9. Enunciado de la tercera tarea

Supongamos que primero se aplica un giro al polígono 1 y después una homotecia. Para determinar el ángulo de la rotación basta con trazar dos rectas que pasen por dos lados homólogos de los polígonos 1 y 2, observar que las dos rectas se cortan en un punto y utilizar GeoGebra para verificar que la amplitud del ángulo de corte es de 60º. A continuación se puede utilizar el punto de corte entre las dos rectas como centro de la rotación y hacer uso de GeoGebra para girar el polígono 1 un ángulo de 60º (véase la Fig. 10). Luego tenemos que comprobar que este nuevo polígono, girado 60º, y el polígono 2 son semejantes. Para ello, solo hay que verificar que todos los ángulos homólogos son iguales y que las medidas de los lados homólogos de los dos polígonos preservan una razón de 3/2, si consideramos el polígono 2 respecto del polígono girado; o una razón de 2/3 si lo hacemos al revés. Utilizar GeoGebra para medir los lados y determinar la amplitud de los ángulos interiores de cada polígono simplifica bastante estas comprobaciones. Por último, se unen con rectas los vértices homólogos de los dos polígonos y se obtiene el centro de la homotecia.

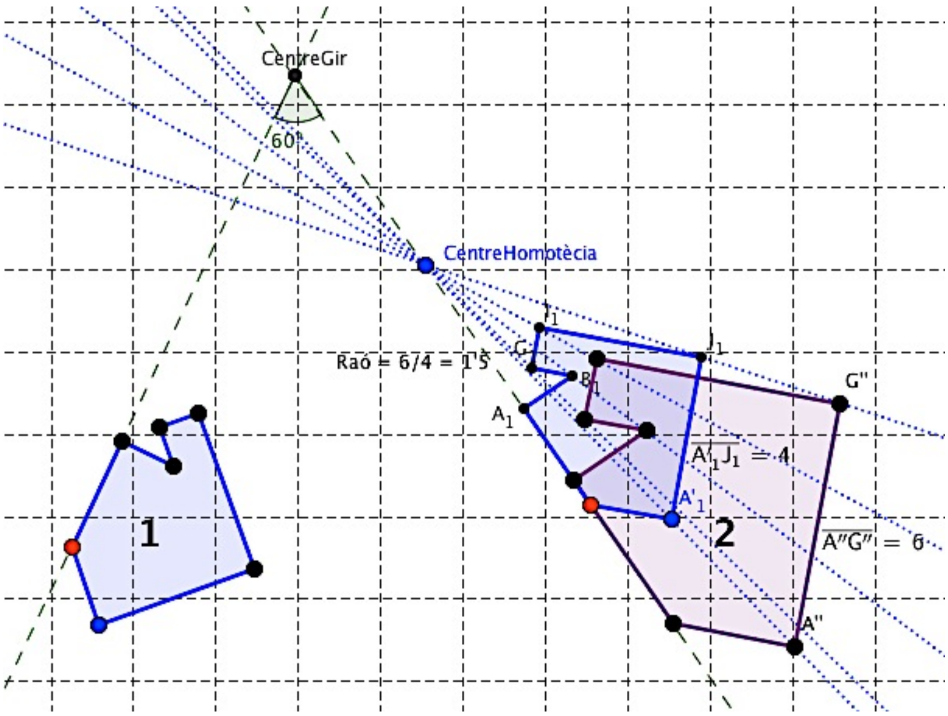


Figura 10. Composición de un giro y una homotecia

Supongamos ahora que en primer lugar se aplica una homotecia al polígono 1 y después un giro. Con GeoGebra construimos una homotecia del polígono 1 cuyo centro sea cualquier punto del plano y que tenga una razón de 3/2 (véase la Fig. 11). Luego hay que aplicar un giro a este nuevo polígono ampliado, es decir, se tiene que determinar el centro y el ángulo de la rotación. Para ello consideramos dos lados homólogos, un lado en el polígono ampliado y otro lado en el polígono 2, y trazamos rectas mediatrices entre dos vértices homólogos. Estas rectas se cortan en un punto, que es el centro de la rotación. Para determinar el ángulo de giro basta con prolongar con rectas dos lados homólogos y utilizar GeoGebra para verificar que se cortan formando un ángulo de 60º.

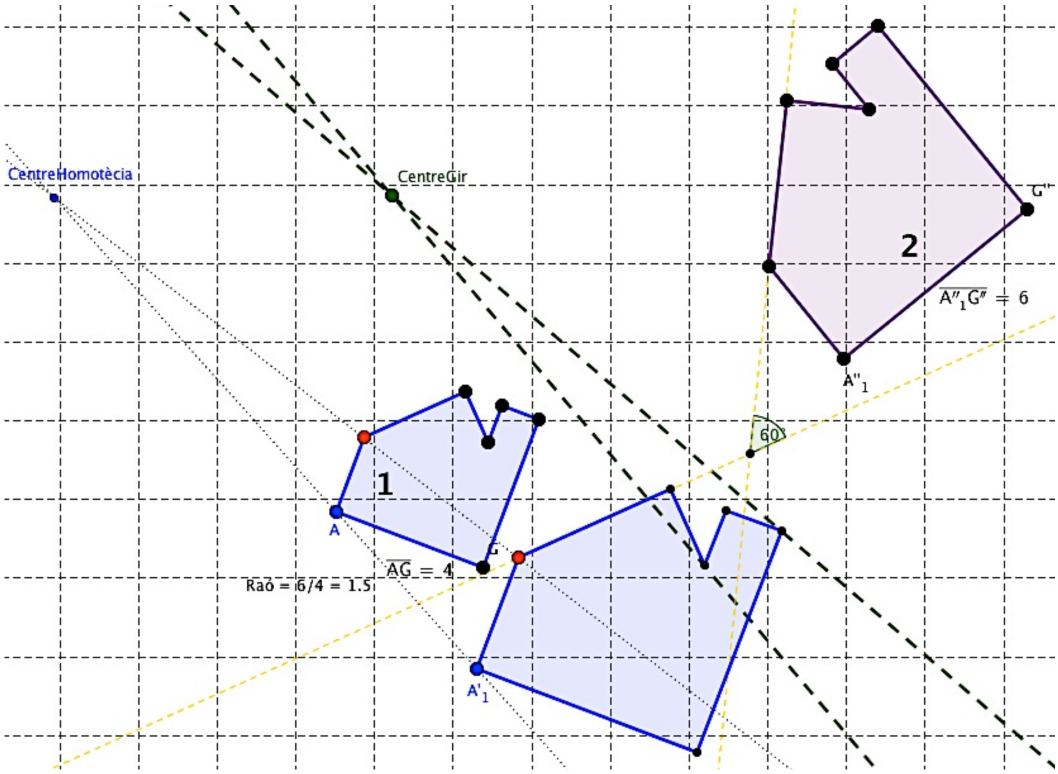


Figura 11. Composición de una homotecia y un giro

3.2. Implementación del experimento

La investigación se llevó a cabo durante los cursos 2012-13 y 2013-14 en dos centros de secundaria (centros A y B) con estudiantes de tercer curso de la Educación Secundaria Obligatoria. En el experimento se implicaron tres profesores de matemáticas cuyos pseudónimos son: Luis, del centro A; y Pilar y Sara, del centro B.

Los centros A y B están situados en la provincia de Barcelona, pertenecen a un ámbito sociocultural medio-alto y se rigen por el currículo normativo de matemáticas del Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya. Su lengua vehicular es el catalán y su línea pedagógica se caracteriza por desarrollar el espíritu crítico y la formación de los alumnos. El tipo de enseñanza que se proporciona en los dos centros no admite distinción entre chicos y chicas y se desarrolla en un marco de coeducación, ya que se intenta educar en igualdad y sin ningún tipo de distinción por razón de sexo, raza, lengua o creencia. Además, desde los departamentos de matemáticas de estos centros se fomenta que los alumnos resuelvan problemas de matemáticas y que argumenten, oralmente y por escrito, el procedimiento que han seguido para encontrar la solución de los problemas que resuelven.

El profesor Luis, del centro A, fue seleccionado porque aceptó participar en nuestra investigación con la premisa de que no colaboraría en la elaboración de la secuencia de actividades y problemas matemáticos, aunque le proporcionaríamos la secuencia antes de iniciar la experimentación. Luis debía implementar las tareas en clase siguiendo su criterio personal y profesional. En el momento que realizamos la investigación, Luis presentaba diez años de experiencia como profesor de secundaria y en su labor docente ponía especial énfasis en los algoritmos y en la aplicación de resultados en la enseñanza de las matemáticas.

Las profesoras Pilar y Sara, del centro B, fueron seleccionadas porque tenían muy buena predisposición para participar en un trabajo de investigación que ayudase a mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas de sus alumnos. En el momento que realizamos la investigación, Pilar tenía seis años de experiencia como profesora de secundaria y Sara presentaba ocho años de experiencia como docente. Tanto Pilar como Sara estaban preocupadas por ser capaces de anticipar el aprendizaje matemático de sus alumnos y poder gestionar discusiones en gran grupo lo más eficientes posible. Las dos profesoras participaron en el diseño de la secuencia instructiva, en la selección del tipo de artefactos que se utilizarían en clase (por ejemplo, lápiz y papel, pizarra ordinaria y GeoGebra) y en la dinámica de trabajo que se seguiría en el aula.

3.2.1. *Dinámica de trabajo*

La dinámica de trabajo fue mayoritariamente colaborativa y comprendió un total de cuatro sesiones de clase para realizar la secuencia de las tres tareas de semejanza que hemos seleccionado anteriormente. En la primera sesión, los alumnos trabajaron por parejas, con lápiz y papel, y resolvieron, entre otras, las dos primeras tareas (*¡Doblar figuras!* y *Cambiar las medidas de los polígonos*). En la segunda sesión, cada profesor dirigió con sus alumnos una discusión en gran grupo para la primera tarea y otra discusión para la segunda tarea. Luego se pidió a los alumnos que reflexionasen individualmente sobre las dos tareas. En esta reflexión debían incluir en su protocolo escrito los elementos tratados en la discusión que ellos no habían considerado en la resolución por parejas. En la tercera sesión, los alumnos trabajaron nuevamente por parejas y resolvieron la tercera tarea (*Transformaciones geométricas*) utilizando GeoGebra. Por último, en la cuarta sesión, cada profesor gestionó una discusión en gran grupo sobre la tercera tarea y, a continuación, pidió a los alumnos que reflexionasen individualmente sobre su resolución inicial.

3.2.2. *Obtención de datos*[7]

Las intervenciones de todos los participantes de los centros A y B en las discusiones en gran grupo de las tres tareas se registraron con tres videocámaras y se transcribieron posteriormente para su análisis. Al finalizar cada discusión se recogieron los protocolos escritos de resolución de los alumnos, producidos tanto en el trabajo por parejas como individualmente después de las discusiones en gran grupo. Ambas resoluciones estaban en el mismo documento escrito o fichero de GeoGebra, aunque se pidió a los alumnos que escribiesen en dos colores distintos: azul o negro para el trabajo en pareja, y rojo o verde para la reflexión individual.

Realizamos la experimentación en dos fases, correspondientes a los cursos académicos 2012-13 y 2013-14. En ambas fases tuvimos que respetar la política educativa de los centros A y B. En concreto, la secuencia instructiva debía comprender todos los ítems del currículo de matemáticas para el tema de semejanza, tenía que promover sesiones de resolución de problemas y debía involucrar a los alumnos en un entorno de trabajo colaborativo. Además, garantizamos tanto a la dirección de los centros como a todos los participantes que mantendríamos la confidencialidad de los datos obtenidos durante la investigación. También pedimos autorización escrita a las familias de los alumnos para

[7] Debido a que la lengua vehicular de las clases de matemáticas de los centros A y B es el catalán, los enunciados de todas las tareas de semejanza (Anexo I), la guía para el profesorado (Anexo II), las discusiones en gran grupo (Anexos IV, V, VI, VIII y X) y las respuestas de los alumnos en sus protocolos escritos (Anexos VII, IX y XI) se diseñaron u obtuvieron en lengua catalana. No obstante, para preservar la coherencia lingüística de este trabajo, en esta memoria se han traducido a la lengua castellana las transcripciones de las discusiones en gran grupo de las tres tareas seleccionadas y las respuestas escritas de los alumnos a estas tareas.

poder registrar en vídeo las sesiones de clase y utilizar los protocolos escritos con el propósito de nuestra investigación (véase el Anexo III para consultar el documento de autorización distribuido a las familias).

En la primera fase, que se realizó en febrero de 2013, obtuvimos datos de las clases de matemáticas de los profesores Luis (centro A), en cuya aula había veinticuatro alumnos; y Pilar (centro B), en cuya aula había veintidós alumnos. En esta primera fase se realizó una prueba piloto de la secuencia completa de actividades y problemas, la cual permitió validar la secuencia instructiva; modificar algunos enunciados para mejorar su comprensión; identificar estrategias y dificultades que presentaban los alumnos en la resolución de las actividades matemáticas; y validar los métodos de análisis que se describen en el siguiente apartado de este trabajo.

En la segunda fase, que se realizó en febrero de 2014, obtuvimos datos de la secuencia definitiva de las tres tareas de semejanza en la clase de la profesora Sara (centro B), en cuya aula había dieciséis alumnos. Los datos obtenidos en esta segunda fase, que fueron analizados posteriormente, permitieron obtener los resultados definitivos de este trabajo de investigación.

Finalmente, tanto en la primera como en la segunda fase, los tres profesores nos comentaron que sus alumnos presentaban un desarrollo medio-alto de las habilidades matemáticas y, en general, mostraban una actitud positiva frente de las matemáticas.

3.3. Métodos de análisis

En este apartado relacionamos los objetivos del trabajo con los métodos de análisis utilizados en las dos fases de la experimentación. Recordemos que los objetivos de este trabajo son los siguientes:

1. *Caracterizar la actividad docente de un profesor de secundaria cuando gestiona discusiones en gran grupo sobre tareas de semejanza que pueden crear oportunidades de aprendizaje matemático.*
2. *Analizar cuál es el efecto de las discusiones en gran grupo sobre la habilidad de los alumnos para aprovechar oportunidades de aprendizaje durante la resolución de tareas de semejanza.*

3.3.1. *Métodos de análisis para la primera fase de la experimentación*

En relación con la primera fase de la experimentación, que pretende proporcionar una respuesta inicial al primer objetivo, destacamos que en este trabajo únicamente analizamos la implementación de la primera tarea de la secuencia instructiva, *¡Doblar figuras!*, que se produjo en las clases de matemáticas de los profesores Luis, del centro A, y Pilar, del centro B.

En primer lugar, analizamos la aplicación de las seis fases de la sistemática para la preparación de discusiones en gran grupo: «anticipación a través del árbol», «configuración didáctica ampliada», «modo de explotación», «monitorización», «selección de situaciones» y «secuenciación de la implementación didáctica», que siguieron los profesores Luis y Pilar para preparar e implementar la discusión en gran grupo de la primera tarea. De esta forma podemos analizar y comparar el efecto de la preparación de la discusión en gran grupo con relación a la creación de oportunidades de aprendizaje matemático en los alumnos.

En segundo lugar, analizamos el modo de actuación de los dos profesores en la gestión de la tarea de *¡Doblar figuras!*. Para ello, dividimos las discusiones en gran grupo de Luis y Pilar en episodios, que caracterizamos según un tipo de orquestación instrumental y un estadio de la discusión del problema. La distribución de episodios en una tabla de doble entrada, la cual relaciona tanto aspectos instrumentales como discursivos, define el modo de actuación de cada profesor en la gestión de su discusión en gran grupo. En esta tabla los episodios se codificaron de acuerdo con la siguiente notación: e_i, donde el subíndice i indica la distribución cronológica de los episodios a lo largo de la discusión en gran grupo.

En tercer lugar, estudiamos los episodios de la discusión en gran grupo de la primera tarea de cada profesor con más profundidad, analizando y codificando las acciones discursivas que se produjeron en ellos. La codificación de acciones se realizó sobre la base de las acciones identificadas en el trabajo de Morera (2013), aunque adaptándolas para los datos de la presente investigación. La distribución de estas acciones en los episodios y su representación en diagramas, detallando tanto las intervenciones del profesor como las intervenciones de los alumnos, determinó la interacción entre todos los participantes de cada discusión en gran grupo. La interacción entre participantes y la caracterización de acciones discursivas es especialmente importante para la siguiente fase del análisis, donde se determinan oportunidades de aprendizaje matemático.

Por último, analizamos y caracterizamos las oportunidades de aprendizaje matemático de los episodios de las discusiones en gran grupo de Luis y Pilar. Para ello relacionamos los aspectos matemáticos de cada oportunidad con las acciones discursivas que favorecieron su aparición en la discusión. Además, agrupamos las oportunidades de aprendizaje matemático según sean conceptuales, procedimentales o argumentativas.

3.3.2. *Métodos de análisis para la segunda fase de la experimentación*

En relación con la segunda fase de la experimentación, que pretende dar respuesta tanto al primero como al segundo objetivo, destacamos que en este trabajo analizamos la implementación de la secuencia de tres tareas de semejanza: *¡Doblar figuras!; Cambiar las medidas de los polígonos;* y *Transformaciones geométricas;* que puso en práctica la profesora Sara en el centro B.

En primer lugar, analizamos la aplicación de la sistemática de seis fases para la preparación de discusiones en gran grupo que siguió la profesora para preparar e implementar en clase las tres tareas de semejanza. Recordemos que las fases de la sistemática son las siguientes: «anticipación a través del árbol», «configuración didáctica ampliada», «modo de explotación», «monitorización», «selección de situaciones» y «secuenciación de la implementación didáctica». De esta forma podemos estudiar el efecto de la preparación de las discusiones en gran grupo con relación a la creación y posible aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje matemático a lo largo de una secuencia de tres tareas de semejanza.

En segundo lugar, dividimos las transcripciones de las discusiones en gran grupo de las tres tareas en episodios, que caracterizamos según un tipo de orquestación instrumental y un estadio de la discusión del problema. Utilizamos la codificación y distribución de episodios en las tres discusiones en gran grupo para analizar qué tipos de orquestación instrumental utilizó la profesora Sara y cómo se relacionaron estas orquestaciones con sus elecciones discursivas. La distribución de episodios en tablas de doble entrada, que relacionen tanto aspectos instrumentales como discursivos, define los modos de actuación de Sara en la gestión en el aula de una secuencia de tareas de semejanza. En esta tabla los episodios se codificaron de acuerdo con la siguiente notación: ${}^{j}e_{i}$, donde el superíndice *j* indica el número de la tarea analizada y el subíndice *i* indica la distribución cronológica de los episodios a lo largo de la discusión en gran grupo.

En tercer lugar, analizamos y codificamos las acciones discursivas que se produjeron en los episodios de las discusiones en gran grupo de las tres tareas. El proceso de codificación se realizó con base en las acciones identificadas durante la primera fase de la experimentación, aunque introduciendo algunos nuevos códigos específicos para esta segunda fase. La distribución de estas acciones en diagramas, que relacionan tanto las acciones de la profesora como las acciones de los alumnos, define los modos de interacción entre los participantes de las discusiones en gran grupo a lo largo de la secuencia de tres tareas de semejanza. Como ya se comentó en los métodos de análisis de la primera fase de la experimentación, la interacción entre participantes y la caracterización de acciones discursivas es fundamental para ejemplificar oportunidades de aprendizaje matemático.

En cuarto lugar, ejemplificamos oportunidades de aprendizaje matemático relacionando contenidos del conocimiento matemático, tanto procedimentales como conceptuales, con conjuntos de acciones instrumentales y discursivas producto de los procesos de interacción creados durante las clases de matemáticas. Nuevamente, agrupamos las oportunidades de aprendizaje matemático según sean conceptuales, procedimentales, o bien argumentativas.

En quinto lugar, mostramos evidencias de aprovechamiento que obtuvieron los alumnos de algunas oportunidades de aprendizaje matemático. Tal y como explicamos en el marco teórico de este trabajo (véase el subapartado 2.1.2), consideramos que una oportunidad de aprendizaje es aprovechada por un alumno si se obtienen evidencias concretas de que el estudiante ha cambiado la comprensión matemática de un concepto o procedimiento después de la discusión en gran grupo. Por este motivo, comparamos los protocolos escritos de los alumnos antes y después de cada discusión en gran grupo y, así, determinamos elementos nuevos que los estudiantes incluyeron en sus reflexiones individuales, después de haber trabajado por parejas y de haber participado en la discusión en gran grupo.

En sexto lugar, seleccionamos el caso de una alumna que manifestó aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje matemático conceptual a lo largo de la secuencia de tres tareas de semejanza. En concreto, profundizamos en el estudio de los protocolos escritos de esta alumna, antes y después de las discusiones en gran grupo, con el fin de analizar la evolución que siguió la estudiante en las resoluciones de las tres tareas. Interpretamos que esta evolución puede entenderse como un cambio en la trayectoria hipotética de aprendizaje de esta alumna, que le permitió incorporar nuevas nociones matemáticas en su conocimiento conceptual.

Por último, utilizamos las diez rúbricas del IQA para realizar un análisis conjunto de las oportunidades de aprendizaje matemático que se generaron en las discusiones en gran grupo de la secuencia de tareas de semejanza. Recordemos que en este trabajo consideramos que cuánto mayores son las puntuaciones en las rúbricas del instrumento, más probable es que los alumnos se vean inmersos en discusiones en gran grupo en las que se generen oportunidades de aprendizaje matemático.

Además, como explicamos en los párrafos siguientes, utilizamos conjuntos borrosos, propios de la lógica borrosa o *fuzzy*, para flexibilizar las escalas de las rúbricas del instrumento y, así, obtener una descripción más fiel a la realidad del estudio.

Algunas consideraciones sobre el uso de la lógica borrosa como método de análisis

La lógica borrosa permite flexibilizar la frontera con la que se definen los conjuntos. Este hecho la diferencia de la lógica clásica, la cual afirma que un conjunto se establece, en un universo de discurso, X, a partir de un predicado que solo puede tomar dos valores: verdadero o falso. En cambio, la lógica borrosa permite definir un conjunto en un universo de discurso, X, a partir de un predicado gradual que puede tomar valores en el intervalo unidad, $[0,1]$.

La eficacia de la lógica borrosa para representar con rigor nuestra propia percepción de un suceso ha quedado validada en la resolución de una gran variedad de problemas, desde su aparición en la década de los sesenta (Zadeh, 1965). En cuestiones de valoración, la lógica borrosa consigue representar más fielmente que la lógica clásica la percepción del evaluador. No obliga a proporcionar un valor concreto, sino que permite dar un intervalo de valores y, además, permite hacer distinciones entre valores del intervalo.

Los conjuntos borrosos o *fuzzy* pueden ser discretos o continuos, en función de cómo sea el universo de discurso sobre el que se definen (véase la Fig. 12).

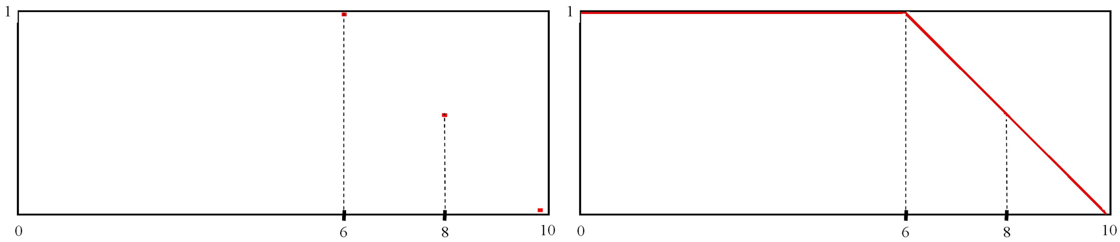


Figura 12. Ejemplos de dos conjuntos borrosos, uno discreto ($X = \{0,1,2, \dots ,10\}$) y otro continuo ($X = [0,10]$)

Con relación a los conjuntos borrosos continuos, podemos distinguir una gran variedad de posibles formas, tanto lineales como no lineales (véase la Fig. 13).

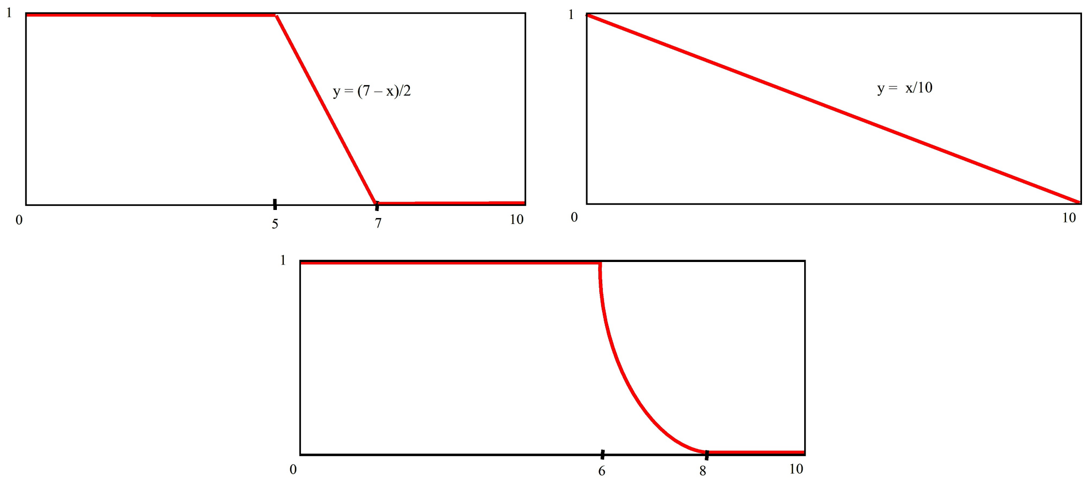


Figura 13. Algunos ejemplos de conjuntos borrosos

De todos modos, por su simplicidad para el posterior manejo de datos, en distintos estudios se trabaja con conjuntos borrosos lineales a trozos, como son los triangulares o los trapezoidales (véase la Fig. 14).

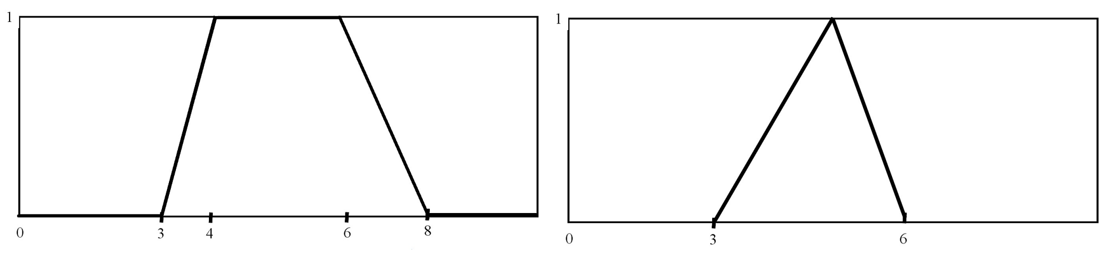


Figura 14. Dos conjuntos borrosos, uno trapezoidal y otro triangular

Para ayudar en el diseño de conjuntos borrosos podemos apoyarnos en las etiquetas lingüísticas de Zadeh (Zadeh, 1975). Existen varias etiquetas para describir un concepto concreto y cada etiqueta está representada por un conjunto borroso distinto. Un ejemplo es el caso de la 'participación', que es una de las rúbricas del IQA. Este concepto puede tener las cinco etiquetas siguientes: muy baja, baja, media, alta o muy alta. A la hora de hacer una valoración de la participación en las discusiones en gran grupo, ayudándonos de las etiquetas, podemos representar el conjunto borroso que muestra nuestra valoración concreta de determinados aspectos de estas discusiones, permitiéndonos darle un valor lingüístico. Por ejemplo, al conjunto *fuzzy* de la Figura 15 se le puede asignar el valor lingüístico 'entre medio y alto'.

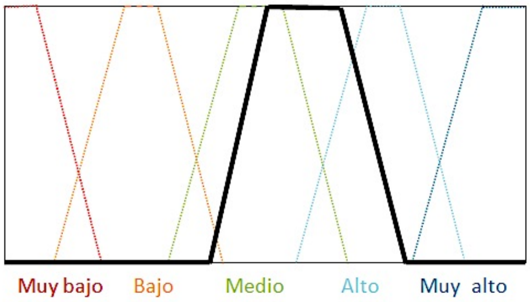


Figura 15. Etiquetas lingüísticas

Finalmente, en este trabajo nos apoyamos en las consideraciones anteriores sobre el diseño de conjuntos borrosos, con el fin de redefinir los niveles de las diez rúbricas del IQA. De esta forma podemos obtener interpretaciones graduales de los diversos elementos que analizan todas estas rúbricas.

4. Análisis de datos

En este capítulo presentamos el análisis de datos de la investigación. En primer lugar, analizamos la primera fase del experimento con datos de aula de los profesores Luis, del centro A, y Pilar, del centro B. En esta fase solo analizamos la primera tarea de la secuencia instructiva. En concreto, introducimos el análisis de la preparación de las discusiones en gran grupo, el análisis de episodios y acciones, y determinamos oportunidades de aprendizaje matemático. A continuación, analizamos la segunda fase del experimento con datos de aula de la profesora Sara, del centro B, implementando la secuencia de tres tareas de semejanza. En particular, analizamos la preparación de las discusiones en gran grupo de las tres tareas y, para cada tarea, introducimos el análisis de los modos de actuación e interacción, ejemplificamos oportunidades de aprendizaje matemático y analizamos el aprovechamiento de algunas de estas oportunidades. Además, profundizamos en el caso de una alumna que manifestó aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje a largo de la secuencia de tres tareas de semejanza. Por último, presentamos un análisis conjunto de las oportunidades de aprendizaje matemático según las rúbricas del IQA y aplicamos la lógica borrosa para flexibilizar las escalas que definen las diez rúbricas de este instrumento.

4.1. Análisis de la primera fase de la experimentación: profesores Luis y Pilar[8]

El análisis de datos de la primera fase de la experimentación, que corresponde a las clases de matemáticas de los profesores Luis y Pilar, lo planteamos en cuatro etapas: en primer lugar, estudiamos las fases de la sistemática para la preparación de discusiones en gran grupo, las cuales se introdujeron en el subapartado 2.3.2, y determinamos cómo cada profesor preparó su sesión de clase. En segundo lugar, dividimos las discusiones en episodios y obtenemos una descripción de los modos de actuación de los dos profesores. En tercer lugar, analizamos con más profundidad todos los episodios y determinamos acciones que los caracterizan. Finalmente, detectamos y clasificamos oportunidades de aprendizaje matemático que se crearon en las discusiones en gran grupo.

[8] En este apartado incluimos el análisis de datos que publicamos en Ferrer, M., Fortuny, J. M., y Morera, L. (2014). Efectos de la actuación docente en la generación de oportunidades de aprendizaje matemático. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(3), 385-405.

En esta primera fase del análisis estudiamos la tarea de *¡Doblar figuras!*, que es la primera actividad matemática de la secuencia y los alumnos tuvieron que resolverla con lápiz y papel. La tarea pregunta por la representación de figuras el doble de grandes respecto de una figura poligonal dada en el enunciado. Luego, los alumnos deben explicar cómo las han obtenido y realizar comparaciones entre ellas (véase el subapartado 3.1.1 para una descripción detallada de la primera tarea de la secuencia instructiva).

4.1.1. *Análisis de la preparación de las discusiones en gran grupo*

Realizamos un estudio inicial para analizar la preparación de la discusión en gran grupo de la primera tarea que siguieron los profesores Luis y Pilar. Para ello, estudiamos las cinco primeras fases de la sistemática, las cuales se desarrollaron antes de la discusión en gran grupo.

Observamos diferencias relevantes en la fase de «anticipación a través del árbol», ya que Luis realizó una preparación tradicional de la tarea, únicamente la resolvió y, una vez encontrada una solución factible, no profundizó en la búsqueda de nuevas interpretaciones y estrategias, ni tampoco preparó mensajes para ayudar a los alumnos a avanzar en la resolución de la actividad matemática. En cambio Pilar desarrolló la resolución de la tarea siguiendo el «árbol del problema» (véase la Fig. 16) y pensó en las diferentes soluciones e interpretaciones del enunciado de la actividad. También anticipó mensajes que podía dar a los alumnos en el trabajo por parejas, con la intención de hacerlos avanzar en el proceso de resolución. De esta forma contribuyó al andamiaje de la actividad de matematización de los alumnos (Anghileri, 2006).

La primera posibilidad que se contempló en el «árbol del problema» consistía en que los alumnos comprendiesen erróneamente el enunciado de la tarea y que representasen una figura que no fuese el doble de grande. En este caso, el profesor les ayudaría para seguir con la resolución. La segunda posibilidad se basaba en la construcción de una figura que duplicase el área del polígono original y, por último, la tercera posibilidad consistía en la duplicación del perímetro. En ambos casos se debía conseguir que los alumnos realizasen razonamientos basados en la semejanza entre figuras poligonales.

En lo relativo a la fase de «configuración didáctica ampliada», el profesor Luis preparó la sesión considerando exclusivamente la pizarra ordinaria como artefacto. En cambio

Pilar planeó utilizar tanto la pizarra como un proyector y GeoGebra, ya que consideró que estos artefactos tecnológicos le serían útiles para ilustrar en la pantalla diferentes interpretaciones de la actividad matemática. Además, estas representaciones podrían ayudar en la discusión de las diferentes estrategias que habían seguido los alumnos para resolver la tarea.

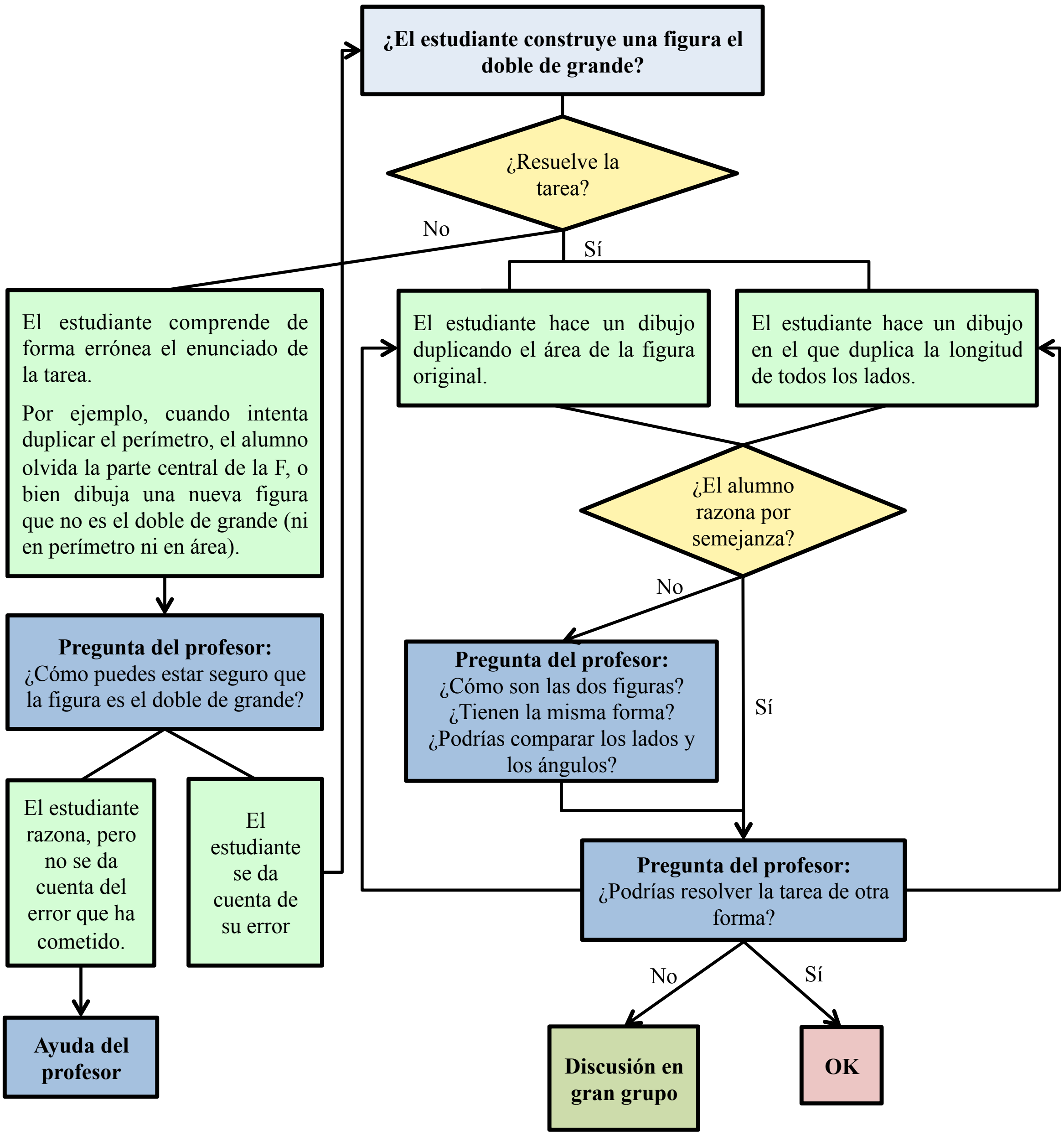


Figura 16. Árbol del problema asociado a la primera tarea

Los dos profesores realizaron el mismo «modo de explotación» porque esta variable, junto con la tarea matemática, se fijó a priori para la investigación. Así se pudo introducir una dinámica de trabajo susceptible de ser favorable para la creación de oportunidades de aprendizaje matemático.

En la fase de «monitorización», Luis se centró en resolver dudas formuladas por sus estudiantes mientras trabajaban por parejas y no intervenía si no era preguntado. Por otro lado, Pilar utilizó el «árbol del problema» para monitorizar la sesión de resolución por parejas. De este modo, a parte de resolver preguntas de sus alumnos, la profesora les proporcionó indicaciones adicionales y les preguntó por nuevas interpretaciones del enunciado de la actividad. También formuló preguntas sobre nuevas estrategias de resolución de la tarea, con el propósito de que los alumnos profundizasen más en la interpretación y resolución de la actividad matemática.

Por último, los dos profesores siguieron criterios distintos en la fase de «selección de situaciones». Luis decidió no seleccionar a priori a los estudiantes que debían participar en la discusión en gran grupo. Solo formuló preguntas concretas para que cualquier alumno de la clase pudiera responderlas y, después, él completó las explicaciones de sus estudiantes. En cambio Pilar seleccionó a ciertos participantes de la discusión en gran grupo antes de la sesión de clase, partiendo de las soluciones que habían obtenido durante la resolución por parejas. Su intención era tener previstas unas intervenciones fijas, pero dejando cierto margen para que todos los alumnos voluntariamente pudiesen realizar aportaciones en el transcurso de la clase.

4.1.2. *Análisis de los episodios de las discusiones en gran grupo*

La última fase de la sistemática de preparación de discusiones en gran grupo, es decir, la fase de «secuenciación de la implementación didáctica» es el reflejo de la preparación previa de la sesión de discusión y su puesta en práctica en el aula por parte del profesor. Para estudiarla hemos determinado los episodios de cada discusión en gran grupo, que hemos caracterizado según un tipo de orquestación instrumental y un estadio de la discusión del problema. Con este fin hemos analizado las grabaciones de clase de los profesores Luis y Pilar y nos hemos apoyado en las transcripciones escritas.

Para ejemplificar el proceso de análisis de los episodios, hemos seleccionado el quinto episodio, de una serie de nueve, de la discusión en gran grupo de la profesora Pilar (véase el Anexo IV para consultar la transcripción completa). En la línea 1 del primer extracto, que se detalla a continuación, se observa que la profesora dirige una pregunta a un estudiante del grupo para iniciar una discusión que finaliza en la construcción de la definición matemática de figuras poligonales semejantes. Tanto en las preguntas que realiza la profesora como en las explicaciones de los alumnos y en el debate que se establece, se comparan dos construcciones que se visualizan en la pantalla de GeoGebra y se utiliza una de ellas para obtener la definición de semejanza (véanse las líneas 2-9 de la transcripción del primer extracto). Además, para estudiar con detalle cada episodio interpretamos las líneas de la transcripción sobre la base de las acciones de participación que realizan los alumnos y las acciones de intervención llevadas a cabo por el profesor. Todas las acciones se muestran en cursiva debajo de la transcripción del extracto correspondiente. Hay que señalar que más adelante en este trabajo se realiza un estudio en profundidad de las acciones de los episodios (véase el subapartado 4.1.3).

Primer extracto. Quinto episodio de la discusión en gran grupo de Pilar

1. Pilar:	¿José, tú qué entendiste, es decir, por qué construiste esta [señalando sobre el proyector una figura que tiene el doble de perímetro] y no esta otra [señalando una figura con el doble de área]? [*Intervención: petición de explicación*]
2. José:	Porque estas dos son semejantes [refiriéndose a la ‘F’ del enunciado y a otra que tiene el doble perímetro] [*Participación: exposición de evidencia empírica*]
3. Pilar:	Vale, por tanto, la definición de semejanza. ¿Qué creéis que son dos figuras semejantes? [*Intervención: petición de explicación*]
4. José:	Todos los lados multiplicados por un número, siempre el mismo. [*Participación: justificación empírica*]
5. Pilar:	Vale, es decir, ¿cómo son los lados? [*Intervención: petición de formalización*]
6. José:	Proporcionales. [*Participación: formalización*]
7. Pilar:	1. Proporcionales, vale. [*Intervención: validación*]

2. ¿Y además qué hace falta?
[*Intervención: petición de explicación*]

8. Pedro: Que todos los ángulos sean iguales.
[*Participación: exposición de evidencia empírica*]

9. Pilar: Es decir, aquí, chicos, los ángulos no los comprobamos porque se trata de una 'F' y es evidente que todos son de 90º, pero se debería hacer.
[*Intervención: complemento de la explicación*]

En el inicio del episodio la profesora, Pilar, realiza una petición de explicación (línea 1) a José, ayudándose de la representación de la pantalla del GeoGebra, con la intención de que el estudiante explique los motivos por los que ha construido una figura con el doble de perímetro y no el doble de área. El alumno observa las dos representaciones que están proyectadas en la pantalla y evidencia que su elección se basa en la semejanza de la figura cuyos lados son proporcionales, con razón 2, a la original. Interpretamos esta acción como una exposición de evidencia empírica (línea 2), ya que el alumno se ayuda de la información visual que le proporciona el artefacto para constatar un hecho concreto, pero sin que este acto implique justificación alguna. A continuación, la profesora utiliza la situación para introducir el concepto de figuras semejantes y realiza una petición de explicación (línea 3) para que algún alumno defina este concepto. De nuevo, José se apoya en la representación de la pantalla para explicar que dos figuras semejantes deben tener todos los lados multiplicados por un número y que este debe ser siempre el mismo. Aún así, en este caso interpretamos la acción como una justificación empírica (línea 4) porque el alumno utiliza la representación proyectada en el artefacto como complemento de su explicación oral. En concreto, Hanna (2000) constata que las representaciones visuales pueden emplearse como justificación matemática más allá de evidenciar hechos concretos, ya que los diagramas son componentes legítimos de un argumento matemático y pueden transmitir *insight* así como conocimientos. Después, Pilar hace una petición de formalización (línea 5) para precisar el lenguaje matemático y que aparezca el término 'proporcionales' (línea 6). La profesora valida (línea 7.1) la afirmación del estudiante y realiza una nueva petición de explicación (línea 7.2) para que los alumnos completen la definición. Pedro se basa en la construcción que figura en la pantalla para exponer la evidencia empírica (línea 8) de que dos figuras semejantes deben tener, además, todos los ángulos iguales. Interpretamos que el estudiante no utiliza el artefacto para sustentar un razonamiento matemático, sino para evidenciar un hecho concreto. Por último, Pilar complementa la explicación del alumno (línea 9) y constata la importancia de la igualdad de ángulos en la definición de semejanza.

Analizando las líneas de la transcripción anterior inferimos que el tipo de orquestación instrumental del quinto episodio de la discusión en gran grupo de Pilar es «discutir el artefacto», mientras que el estadio de la discusión es «contraste entre soluciones» porque se consideran y discuten dos soluciones posibles para la tarea, las cuales se originan a partir de dos interpretaciones distintas del enunciado.

La caracterización completa de la discusión de Pilar se detalla en la Tabla 3, la cual muestra que la discusión en gran grupo se inició pidiendo a un estudiante que leyera el enunciado de la tarea (e_1). El alumno mostró una primera solución, que consistía en duplicar el área de la figura original, y la representó con el GeoGebra (e_2). Se estudió la estrategia y se discutió con los alumnos de la clase la construcción proyectada en la pantalla (e_3). Luego, otro alumno presentó una nueva solución duplicando el perímetro, y la profesora realizó explicaciones apoyándose en la construcción del GeoGebra (e_4). Se discutieron y contrastaron las dos soluciones representadas en la pantalla (e_5) y, a petición de un alumno, Pilar realizó diversas aclaraciones relacionadas con la definición de semejanza y la solución de duplicar el perímetro (e_6). Entonces, la profesora expuso a los alumnos la relación entre los perímetros y las áreas de figuras semejantes y realizó anotaciones en la pizarra basándose en la información de la pantalla (e_7). Nuevamente, se contrastaron las dos soluciones y Pilar realizó explicaciones diversas para establecer consenso entre los alumnos (e_8). Finalmente, la profesora planteó una generalización de la actividad matemática que consistía en duplicar el área de la figura manteniendo la semejanza con la original, y utilizó la pizarra y el GeoGebra para realizar explicaciones apoyándose en los razonamientos de los estudiantes (e_9).

En la Tabla 3 podemos observar que la gestión de la discusión que realiza Pilar está centrada equilibradamente entre la profesora y los alumnos, ya que el número de episodios correspondientes a los tres primeros tipos de orquestación es casi el mismo que el de los tres últimos. El tratamiento de los estadios es bastante completo y su distribución es secuencial, porque se progresa de los estadios correspondientes a momentos iniciales de la discusión hasta los más avanzados.

Tabla 3. Análisis de los episodios de la discusión en gran grupo de la primera tarea de la profesora Pilar

Pilar — **Tipo de orquestación** / **Estadio de la discusión**	Situación del problema	Presentación de una solución	Estudio de estrategias para resolver o argumentar	Estudio de casos particulares o extremos	Contraste entre soluciones	Conexiones con otras situaciones	Generalización y conceptualización	Reflexión sobre progreso matemático
Explorar el artefacto								
Explicar a través del artefacto		**e_4**	**e_6**		**e_8**			
Enlazar artefactos							**e_7, e_9**	
Discutir el artefacto			**e_3**		**e_5**			
Descubrir a través del artefacto								
Experimentar el instrumento	**e_1**	**e_2**						

Analizando de forma análoga el modo de actuación del profesor Luis, detectamos que la gestión de su discusión en gran grupo está centrada principalmente en la figura del docente, como se observa en la transcripción del segundo extracto que corresponde al quinto episodio de la discusión en gran grupo de la primera tarea (véase el Anexo V para consultar la transcripción completa).

Segundo extracto. Quinto episodio de la discusión en gran grupo de Luis

10. Claudia: Entonces, ¿qué sería correcto? Porque una tiene 40 y la otra tiene 20.
[*Participación: petición de aclaración*]

11. Luis: 1. A ver, con respecto a cuestiones lingüísticas, el doble de grande se refiere al doble de superficie. ¿Vale? Por lo tanto, la opción esta es correcta, pero tampoco nos quedaba demasiado claro si se debían respetar las mismas proporciones.
[*Intervención: realización de explicación*]

2. Aquí nadie al parecer… yo tampoco lo he hecho, ¿eh? Intentar conseguir el doble de área respetando las proporciones. De todos

modos, es que el enunciado tampoco nos dice que tengamos que respetar las proporciones. Solo nos dice que sea el doble de grande.

[*Intervención: invitación a la generalización*]

3. Entendemos otra 'F' el doble de grande. Yo lo veo así, vosotros parece que también.

[*Intervención: establecimiento de consenso*]

4. ¿Y el resto de la gente lo que ha hecho al final es…?

[*Intervención: invitación a la participación*]

12. Claudia: Doblar el perímetro.

[*Participación: exposición sin argumentación*]

13. Aitor: Cada cuadradito hacer un cuadro grande, hacer cuatro.

[*Participación: exposición sin argumentación*]

14. Luis: Es decir, habéis doblado directamente; es decir, habéis mantenido las proporciones con respecto a los lados.

[*Intervención: complemento de la explicación*]

El profesor Luis centró la implementación de su discusión en gran grupo en realizar explicaciones orales ayudándose de anotaciones en la pizarra y realizó un tratamiento insuficiente de los estadios de la discusión (véase la Tabla 4).

Tabla 4. Análisis de los estadios de la discusión de la primera tarea de Luis y Pilar

Profesor	*Estadios de la discusión*									*Interpretación*
Luis	*B*	*B*	*E*	*C*	*E*	*G*				Distribución secuencial y tratamiento incompleto de los estadios de la discusión.
Pilar	*A*	*B*	*C*	*B*	*E*	*C*	*G*	*E*	*G*	Distribución secuencial y tratamiento bastante completo de los estadios de la discusión.

(A. Situación del problema; B. Presentación de una solución (argumentada); C. Estudio de estrategias para resolver o argumentar; E. Contraste entre soluciones; G. Generalización y conceptualización)

La mayoría de tipos de orquestación de Luis se concentran en «explicar a través del artefacto». Además, es remarcable la poca participación de sus estudiantes, hecho que dificulta la exposición y discusión conjunta de sus «estrategias para resolver o argumentar» la tarea durante la sesión de clase. Como se observa en la Tabla 4, que resume las cadenas discursivas correspondientes a los estadios de la discusión, la distribución de los episodios según los estadios es secuencial; no se producen agrupaciones relevantes de episodios en ningún estadio de la discusión y el tratamiento que se hace de estos es bastante incompleto y superficial.

4.1.3. *Análisis de las acciones de las discusiones en gran grupo*

Una vez hemos caracterizado los episodios de las discusiones en gran grupo de Luis y Pilar, según un tipo de orquestación instrumental y un estadio de la discusión, hay que analizar las acciones de todos los participantes y estudiar los efectos de estas acciones sobre el tipo de aprendizaje que pueden promover.

Para profundizar en el estudio de las acciones que realiza el profesor a lo largo de la discusión en gran grupo, establecemos un paralelismo con Schoenfeld (2011) y clasificamos las acciones según sean: acciones de gestión de clase, de discusión, o de contenido matemático.

A continuación mostramos un resumen de todas las acciones de participación, realizadas por los alumnos, y de intervención, realizadas por el profesor, que hemos detectado en el análisis de las discusiones en gran grupo de Luis y Pilar. También incluimos una breve descripción de cada tipo de acción e ilustramos la proporción con la que estas acciones aparecen en la discusión en gran grupo.

Tabla 5. Resumen del análisis de acciones de participación realizadas por alumnos

Acciones de participación	*% Luis*	*% Pilar*
• *Petición de aclaración*. El estudiante pregunta al profesor o a otro compañero una puntualización o especificación sobre la cuestión que se está tratando en la discusión en gran grupo.	8,8	24,6
• *Exposición de evidencia empírica*. El alumno se ayuda de una información visual proporcionada por el artefacto para constatar algún hecho concreto, pero sin que este acto implique ninguna justificación.	65,2	23,2
• *Exposición sin argumentación*. El estudiante expone algún hecho, en general de forma breve, pero no lo evidencia experimentalmente a través del artefacto y no realiza ninguna justificación o argumentación al respecto.	17,4	20

• *Justificación empírica o deductiva*. El alumno emplea la representación proyectada en el artefacto como complemento justificativo de su explicación oral. Como en Hanna (2000), en este tipo de acción se constata que los diagramas son componentes legítimos de un argumento matemático y pueden transmitir tanto *insight* como conocimientos.	-	13,8
• *Formalización*. El estudiante realiza una aclaración que da mayor solvencia y rigor matemático a una exposición previa.	4,3	1,5
• *Recapitulación*. El alumno sintetiza ordenadamente lo que se ha debatido durante una fase de la discusión en gran grupo.	4,3	1,5
• *Establecimiento de conjetura*. El estudiante formula una conjetura matemática centrándose en observaciones hechas durante la discusión de la tarea.	-	7,7
• *Asentimiento*. El alumno admite como verdadero lo que el profesor u otro compañero han propuesto a priori.	-	4,6
• *Búsqueda de alternativas*. El estudiante determina una nueva propuesta para abordar o resolver una tarea matemática.	-	3,1

La Tabla 5 muestra diferencias en la distribución de las acciones de participación. En concreto, en el caso del profesor Luis, los alumnos centran sus acciones en realizar exposiciones de evidencias empíricas y algunas exposiciones sin argumentación. En cambio, la distribución de las acciones de los alumnos en la discusión en gran grupo de Pilar es más homogénea en los diversos tipos.

El profesor Luis utiliza las observaciones de sus alumnos para iniciar las explicaciones, que están orientadas mayoritariamente a la formulación de preguntas de las cuales espera comprobaciones sencillas o explicaciones muy cortas (véase la Tabla 6). En cambio, Pilar también realiza bastantes peticiones de comprobación o de explicación, pero las intervenciones de sus estudiantes son más extensas. Frecuentemente, Pilar utiliza estas acciones para realizar nuevas preguntas, o bien concluir la correspondiente etapa del debate completando las descripciones de sus estudiantes, realizando nuevas explicaciones y formalizaciones. La proporción con la que se distribuyen las diferentes intervenciones en las discusiones en grupo de ambos profesores es bastante parecida. Luis realiza un porcentaje ligeramente mayor de acciones de gestión de clase, hecho que compensa Pilar efectuando un mayor número de acciones de discusión.

Tabla 6. Resumen del análisis de acciones de intervención realizadas por el profesor

Acciones de intervención	*% Luis*	*% Pilar*
Acciones de gestión de clase	19	12
• *Invitación a la participación*. El profesor invita a los estudiantes a comunicar alguna observación o razonamiento.		
• *Petición de atención*. El profesor reclama la atención de un alumno, o de todo el grupo, para que escuche las explicaciones del docente o de otro compañero.		
Acciones de discusión	6	12
• *Establecimiento de consenso*. El docente realiza una breve explicación o pregunta para conseguir acuerdo y centrar la atención del grupo.		
• *Recapitulación*. El profesor sintetiza ordenadamente lo que se ha debatido durante una fase de la discusión en gran grupo.		
Acciones de contenido matemático	75	76
• *Petición de comprobación, de explicación, de argumentación, de generalización, de solución, o de formalización*. El profesor pregunta por algún suceso (matemático), con el fin de que los alumnos lo comprueben, expliquen, argumenten, generalicen o formalicen.		
• *Validación*. El docente remarca la aprobación de una explicación o comentario de un estudiante realizado durante la discusión en gran grupo.		
• *Realización de explicación* (por petición de un alumno o en el contexto de la discusión). El profesor lleva a cabo una exposición para introducir o profundizar en algún hecho matemático o para responder a la petición de un alumno.		
• *Complemento de la explicación* (de un alumno). El docente completa o amplia la exposición de un alumno con el fin de dar mayor profundidad matemática a la cuestión que se está debatiendo en la discusión en gran grupo.		
• *Invitación a la búsqueda de alternativas, a la reflexión y a la generalización*. El profesor induce a los estudiantes a que profundicen matemáticamente en estos aspectos durante la discusión en gran grupo de la tarea matemática.		

El análisis de las dos discusiones en gran grupo evidencia que, por un lado, diversas acciones de participación realizadas por los alumnos pueden promover aprendizaje procedimental, centrado en la realización de puntualizaciones técnicas sobre ciertos aspectos de la discusión (por ejemplo, peticiones de aclaración); en la realización de síntesis sobre exposiciones de otros alumnos y la aceptación de explicaciones de los demás compañeros (por ejemplo, recapitulaciones y asentimientos). Las acciones de participación también promueven precisiones formales sobre elementos matemáticos (por ejemplo, formalizaciones); o bien, pueden basarse en procesos matemáticos centrados en la exposición de evidencias concretas realizadas por alumnos en el transcurso de la discusión en gran grupo (por ejemplo, exposiciones de evidencias empíricas o establecimientos de conjetura). Por otro lado, hay acciones de participación que promueven aprendizaje conceptual, centrado en exposiciones, razonamientos y justificaciones de los alumnos, que se focalizan en el desarrollo de conceptos matemáticos (por ejemplo, exposiciones sin argumentación y justificaciones empíricas o deductivas).

Análogamente, analizamos las acciones de intervención, realizadas por el profesor, y observamos que algunas de ellas se centran en aspectos organizativos sobre la gestión de la clase (por ejemplo, peticiones de atención e invitaciones a la participación de los alumnos); o bien, se centran en la realización de síntesis para establecer consenso en el grupo (por ejemplo, recapitulaciones y establecimientos de consenso). En cambio, las acciones de contenido matemático pueden promover aprendizaje procedimental si hacen referencia a peticiones sobre la explicación de procedimientos matemáticos, la realización de comprobaciones, o la búsqueda de soluciones adicionales a la tarea matemática (por ejemplo, peticiones de comprobación, de explicación, validaciones o invitaciones a la reflexión). Aún así, este tipo de acciones también pueden promover aprendizaje conceptual si se relacionan con los contenidos matemáticos, se centran en el desarrollo de explicaciones sobre las soluciones de la tarea y hacen referencia a conceptos matemáticos específicos (por ejemplo, peticiones de solución y de generalización, realización de explicaciones matemáticas y complementos de las explicaciones de los alumnos).

La distribución de las acciones de cada episodio se representa en forma de diagrama, el cual muestra la interacción entre los participantes de cada discusión en gran grupo. La Figura 17 muestra el diagrama de sucesión de acciones de los quintos episodios de Luis y Pilar. Ambos episodios tienen una duración parecida y el punto de partida es el mismo ya que se dispone de dos soluciones posibles a la tarea: duplicar el perímetro o el área de la figura original.

Luis no aprovecha la discusión para introducir el concepto matemático de semejanza, sino que realiza explicaciones generales y extensas sobre el significado del enunciado de la tarea y las posibles soluciones que se pueden obtener. Hay poca participación de los alumnos y el diagrama de acciones tiene una estructura centrada en las explicaciones del docente (véase la Fig. 17). En ocasiones, el origen y final de las flechas recae sobre el profesor, hecho que ilustra poca interacción entre los estudiantes y el docente.

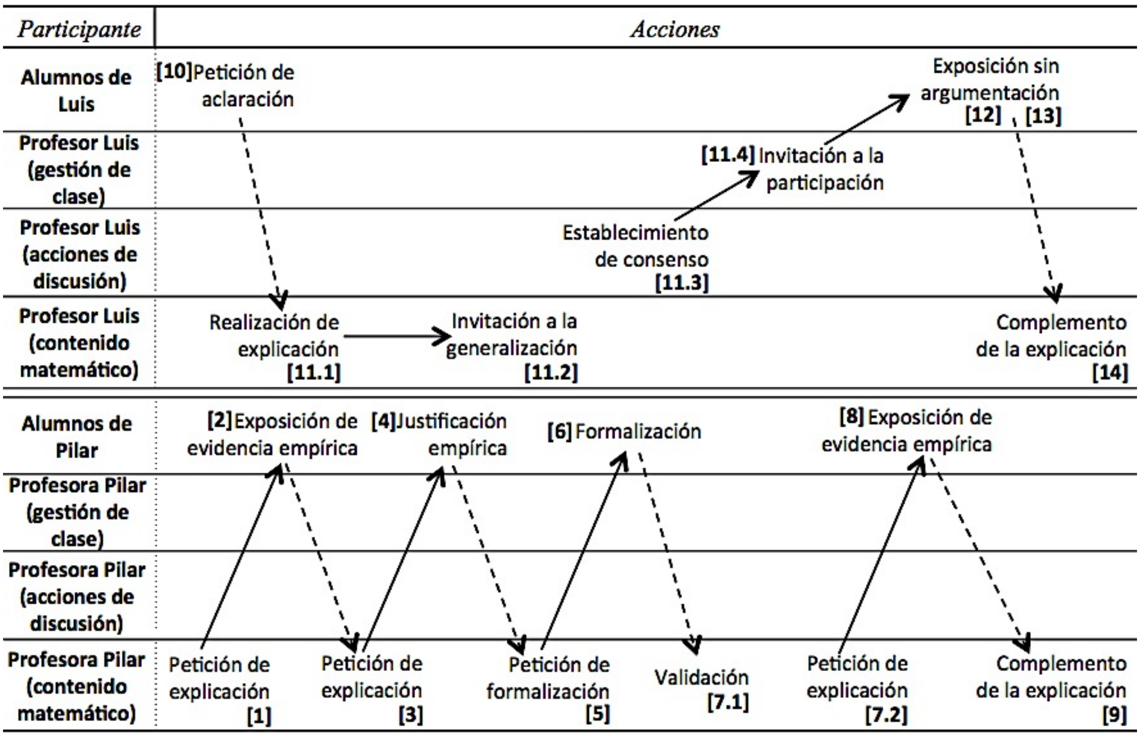


Figura 17. Diagrama de sucesión de acciones en los quintos episodios de Luis y Pilar

En cambio Pilar utiliza las dos soluciones de la tarea, es decir, duplicar el perímetro o el área de la figura, para introducir preguntas que lleven a los estudiantes a la definición de semejanza. La profesora no realiza explicaciones, sino que a través de las preguntas que formula y las respuestas de sus alumnos consigue que se enuncie esta definición. La estructura del diagrama presenta una sucesión encadenada de intervenciones entre la profesora y sus estudiantes. A diferencia de Luis, las soluciones se encuentran representadas en la pantalla del GeoGebra en lugar de la pizarra.

4.1.4. *Análisis de las oportunidades de aprendizaje matemático*

Caracterizamos las oportunidades de aprendizaje relacionando los aspectos matemáticos de cada oportunidad con las acciones que favorecen su aparición en la discusión en gran grupo. Ejemplificamos este proceso detallando las oportunidades de aprendizaje de los quintos episodios de las discusiones en gran grupo de Luis y Pilar, aunque no las comparamos ni hacemos referencia a la calidad y complejidad de las oportunidades.

En el caso de Luis detectamos que la intervención del docente en la línea 11.2 (véase el segundo extracto), invitando a sus estudiantes a la generalización y mencionándoles que no han intentado conseguir una figura con el doble de área respetando las proporciones y sin cambiar la forma del polígono, genera una oportunidad de aprendizaje conceptual cuyo aspecto matemático lo caracterizamos por 'Aprender que la duplicación del área de una figura, utilizando solo los bordes de una cuadrícula, implica un cambio en la estructura de esta'. En otras palabras, nos referimos a que los alumnos tienen la oportunidad de aprender que no es posible duplicar el área de la figura poligonal representada en el enunciado de la tarea sin alterar su forma, en el sentido coloquial del término, empleando únicamente la cuadrícula y sin tener en cuenta la $\sqrt{2}$. Consideramos que esta oportunidad se genera gracias a la intervención del profesor, sin la participación previa de ningún alumno tratando este tema.

En el episodio también se origina la oportunidad de aprendizaje matemático conceptual caracterizada por 'Aprender que la duplicación del perímetro de una figura poligonal implica la multiplicación por cuatro de su área'. Esta oportunidad se genera en la línea 13 (véase el segundo extracto), cuando un alumno realiza la acción de participación, clasificada como exposición sin argumentación, en la que indica que si duplicamos el perímetro de la figura, el número de cuadraditos (área) queda multiplicado por cuatro.

Finalmente, la intervención del profesor en la línea 11.1 (véase el segundo extracto) realizando una explicación sobre la corrección de dos soluciones de la tarea, la cual es producto de la petición de aclaración de un alumno, origina una oportunidad de aprendizaje argumentativa, cuyo aspecto matemático se define por 'Observar que una tarea matemática puede tener diferentes soluciones y argumentaciones y todas ellas ser correctas'. En este caso consideramos que la oportunidad de aprendizaje se genera gracias a la pregunta del estudiante y la explicación del profesor solo responde a la petición de aclaración del alumno.

En el quinto episodio de la discusión en gran grupo de Pilar también detectamos tres oportunidades de aprendizaje matemático, pero su naturaleza es algo distinta. La intervención de la profesora en la línea 3 (véase el primer extracto que incluye la transcripción del quinto episodio de Pilar), realizando una petición de explicación, genera una oportunidad de aprendizaje conceptual cuyo aspecto matemático es ‘Interiorizar el concepto y entender la definición de semejanza de dos figuras poligonales’. En este caso, consideramos que la intervención de la profesora preguntando a los estudiantes por la definición de semejanza viene generada por la participación previa de un alumno, el cual hace referencia al término ‘semejante’ en su exposición de evidencia empírica.

En la línea 9 (véase la transcripción de Pilar) la profesora complementa la explicación previa de un estudiante, hecho que genera una oportunidad de aprendizaje conceptual caracterizada matemáticamente por ‘Identificar la importancia de la igualdad de ángulos en la definición de semejanza’. Además, esta misma intervención de Pilar posibilita que los alumnos tengan una nueva oportunidad de aprendizaje argumentativa, la cual se define por ‘Darse cuenta de la importancia de ser riguroso en los elementos que constituyen una definición matemática’. Ambas oportunidades son generadas directamente por la profesora sin que los comentarios previos de los alumnos sean causa directa de su aparición en la discusión.

En resumen, para determinar las oportunidades de aprendizaje matemático nos hemos centrado en las acciones que se producen en los episodios de la discusión en gran grupo de cada profesor y en sus efectos en el posible aprendizaje de los estudiantes. Para cada profesor, la Tabla 7 recoge las oportunidades de aprendizaje del quinto episodio de su discusión en gran grupo e ilustra los aspectos matemáticos de cada oportunidad, así como las acciones que potencialmente facilitan su aprendizaje.

Tabla 7. Caracterización de oportunidades de aprendizaje de los quintos episodios

Aspectos matemáticos	*Acciones*	
Conceptuales	*Luis*	*Pilar*
Aprender que la duplicación del área de una figura, utilizando solo una cuadrícula, implica un cambio en la forma de esta.	Invitación a la generalización *(Línea 11.2)*	
Aprender que la duplicación del perímetro de una figura poligonal implica la multiplicación por cuatro de su área.	Exposición sin argumentación *(Línea 13)*	
Interiorizar el concepto y entender la definición de semejanza de dos figuras poligonales.		Petición de explicación *(Línea 3)*

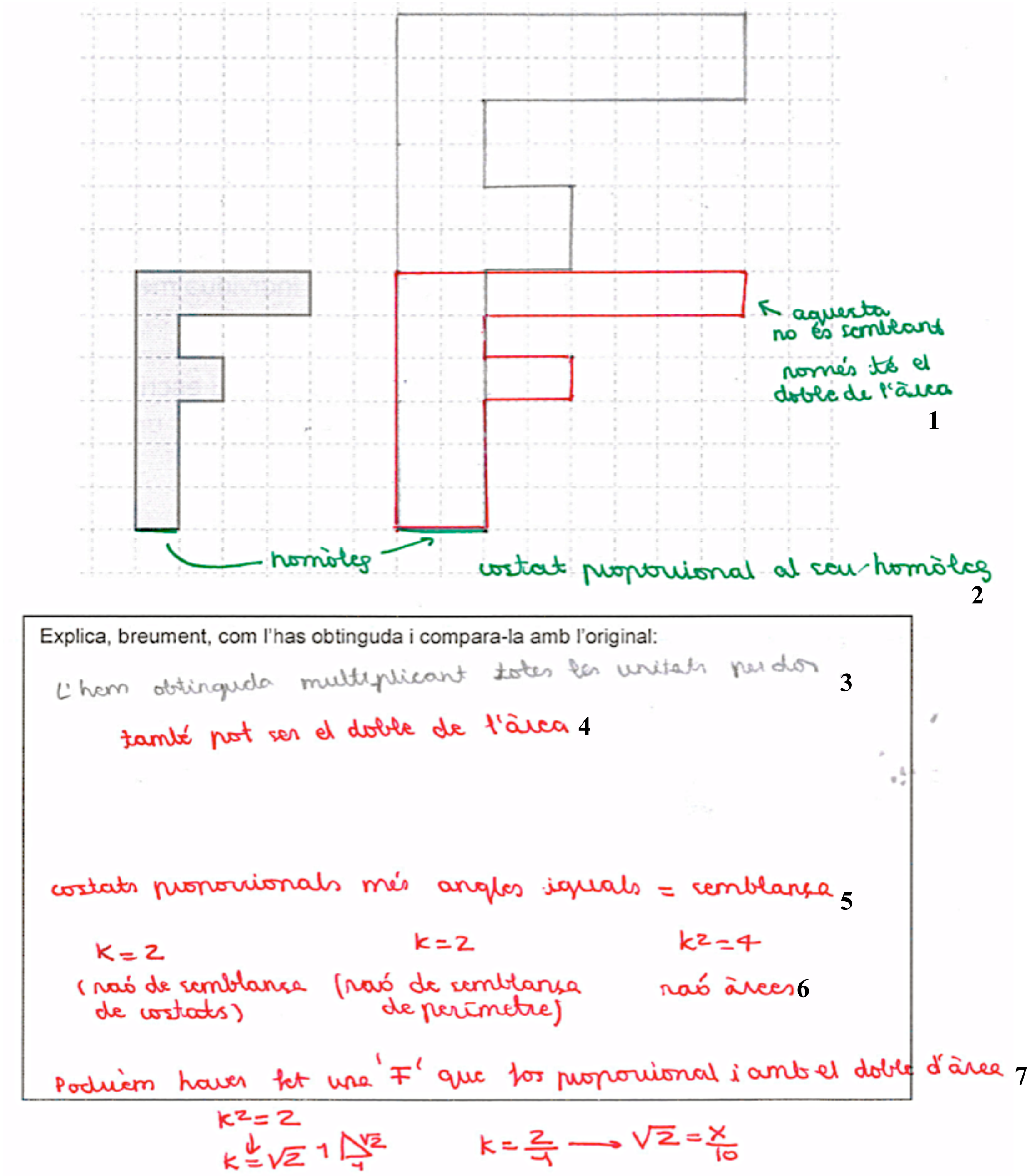
	Identificar la importancia de la igualdad de ángulos en la definición de semejanza de dos figuras poligonales.		Complemento de explicación *(Línea 9)*
Argumentativas			
	Observar que una tarea matemática puede tener diferentes soluciones y argumentaciones y todas ellas ser correctas.	Realización de explicación *(Línea 11.1)*	
	Darse cuenta de la importancia de ser riguroso en los elementos que constituyen una definición matemática.		Complemento de explicación *(Línea 9)*

Comparativa entre las resoluciones de dos alumnas con relación a una oportunidad de aprendizaje matemático[9]

Para ilustrar las resoluciones de los alumnos con relación a la oportunidad de aprendizaje ‘Interiorizar el concepto y entender la definición de semejanza entre dos figuras’, hemos seleccionado dos alumnas representativas: Andrea del centro B y Berta del centro A. En sus protocolos escritos (véanse las Fig. 18 y 19) se detalla la resolución por parejas (con el texto de color negro o azul) y las anotaciones realizadas por cada alumna durante su reflexión individual posterior a la discusión en gran grupo (con el texto rojo o verde).

En el trabajo por parejas, Andrea (centro B) determinó que la solución de la actividad consistía en duplicar el perímetro de la figura original, “multiplicando todas las unidades [de la ‘F’] por dos” (véase la nota 3 de la Fig. 18). A continuación, en su reflexión individual, la alumna incluyó que también podía haber una solución con “el doble de área” (véase la nota 4 de la Fig. 18), aunque “esta no es semejante [a la original]” (véase la nota 1 de la Fig. 18). Andrea determinó que dos figuras son semejantes si sus “lados son proporcionales y los ángulos son iguales” (véase la nota 5 de la Fig. 18) y explicitó las relaciones entre áreas y perímetros de figuras semejantes en función de la razón (véase la nota 6 de la Fig. 18). Finalmente, la alumna mencionó que podría haber obtenido “una ‘F’ que fuese proporcional [a la original] y con el doble de área” (véase la nota 7 de la Fig. 18) y mostró cómo calcular la $\sqrt{2}$.

[9] En este subapartado incluimos el análisis que publicamos en Ferrer, M., Fortuny, J. M., y Morera, L. (2014). Sobre las discusiones en gran grupo: Ejemplificación en un problema de semejanza. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 67, 57-66.

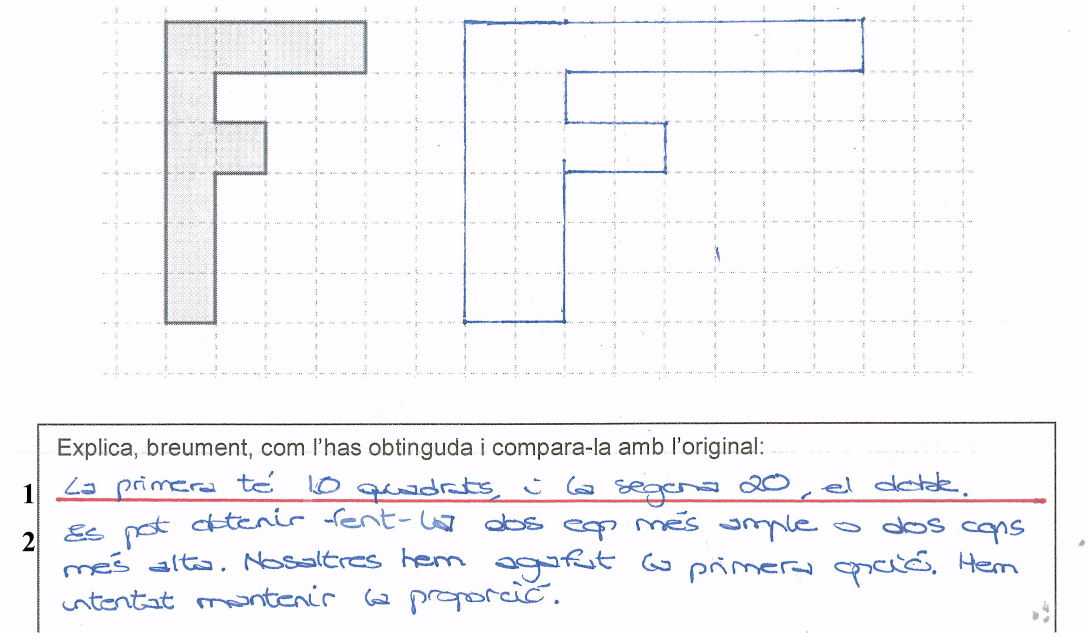


Notas

1. Esta no es semejante, solo tiene el doble de área.
2. Homólogas. Lados proporcionales con sus homólogos.
3. La hemos obtenido multiplicando todas las unidades por dos.
4. También puede ser el doble de área.
5. Lados proporcionales más ángulos iguales = semejanza.
6. k=2 (razón de semejanza de los lados); k=2 (razón de semejanza del perímetro); k^2=4 (razón de las áreas).
7. Podríamos haber hecho una ‘F’ que fuese proporcional y con el doble de área.

Figura 18. Resolución de Andrea a la primera tarea

Por otro lado, trabajando por parejas, Berta (centro A) determinó una solución multiplicando por dos el área y explicitó que “la primera [figura] tiene 10 cuadrados y la segunda 20, el doble” (véase la nota 1 de la Fig. 19). En la reflexión individual, separándolo con una línea pero escribiéndolo con el mismo color sobre el papel, añadió que “se puede obtener [la solución] haciéndola dos veces más ancha o dos veces más alta” y determinó que “han tomado la primera opción, porque han intentando mantener la proporción” (véase la nota 2 de la Fig. 19).



Notas

1. La primera tiene 10 cuadrados y la segunda 20, el doble.
2. Se puede obtener haciéndola dos veces más ancha o dos veces más alta. Nosotros hemos tomado la primera opción. Hemos intentando mantener la proporción.

Figura 19. Resolución de Berta a la primera tarea

Observamos que, durante el trabajo por parejas, las dos alumnas obtuvieron una única solución, bien duplicando el perímetro de la figura original (caso de Andrea), bien multiplicando por dos su área sin preservar la semejanza con la construcción original (caso de Berta). Aún así, en la discusión en gran grupo, el papel del profesor y su modo de preparar la clase fue determinante para conseguir una gestión eficiente de la discusión y lograr que esta fuese productiva para los alumnos.

Detectamos que las reflexiones escritas e individuales de los alumnos están relacionadas con la gestión de la sesión de clase que realizó el profesor y, consecuentemente, con la anticipación que había hecho cada uno de ellos. La riqueza de la discusión de Pilar favoreció que sus alumnos realizaran reflexiones con conexiones e incluyeran elementos relevantes de la discusión en gran grupo en sus protocolos escritos. Andrea, que durante el trabajo por parejas solo había representado una figura con el doble de perímetro, dejando constancia escrita que la había obtenido “multiplicando todas las unidades por dos” (véase la nota 3 de la Fig. 18), reflexionó individualmente después de la discusión en gran grupo representando otra solución con el doble de área. Además, incluyó la definición de semejanza (véase la nota 5 de la Fig. 18) y razonó sobre la duplicación del área manteniendo las proporciones con la figura original. En cambio, Berta trabajando por parejas únicamente representó una figura con el doble de área (véase la nota 1 de la Fig. 19) y en la reflexión individual no incorporó una solución de la tarea basada en la duplicación del perímetro. Solo justificó los motivos de su interpretación del enunciado y del modo a partir del cual obtuvo la solución (véase la nota 2 de la Fig. 19), dando por correcta su elección.

4.2. Análisis de la segunda fase de la experimentación: profesora Sara

El análisis de datos de la segunda fase de la experimentación lo dividimos en diversas etapas. En primer lugar, analizamos la preparación de las discusiones en gran grupo de las tres tareas que realizó la profesora Sara en el centro B, de acuerdo con la sistemática para la preparación de discusiones en gran grupo (véase el subapartado 2.3.2, donde se explica esta sistemática). Recordemos que las tres tareas son las siguientes: *¡Doblar figuras!; Cambiar las medidas de los polígonos; y Transformaciones geométricas*.

A continuación estudiamos cada tarea por separado, y analizamos los modos de actuación docente, los modos de interacción entre los participantes de la discusión en gran grupo, ejemplificamos oportunidades de aprendizaje matemático y mostramos evidencias de aprovechamiento que obtienen los alumnos a través del análisis de ciertas oportunidades de aprendizaje (véase el subapartado 3.3.2, donde se describen con detalle los métodos de análisis). Finalmente, utilizamos las rúbricas del IQA y algunas herramientas de la lógica borrosa o *fuzzy* para realizar un análisis conjunto de las oportunidades de aprendizaje matemático que se han creado en las discusiones en gran grupo de las tres tareas (véase el subapartado 2.1.1 para consultar una descripción detallada de este instrumento de análisis).

4.2.1. *Análisis de la preparación de las discusiones en gran grupo de las tres tareas*

Analizamos la preparación de las discusiones en gran grupo de las tres tareas de semejanza que realizó la profesora Sara, del centro B, antes de implementar la secuencia de actividades matemáticas con sus alumnos. Para ello, estudiamos las cinco primeras fases de la sistemática: «anticipación a través del árbol», «configuración didáctica ampliada», «modo de explotación», «monitorización» y «selección de situaciones». Recordemos que estas fases se desarrollan antes de la discusión en gran grupo. Además, también realizamos algunas consideraciones respecto de la sexta fase: la «secuenciación de la implementación didáctica».

En la fase de «anticipación a través del árbol», la profesora Sara desarrolló la resolución de cada tarea siguiendo el «árbol del problema» (véase la Fig. 16 que se ha presentado en el subapartado 4.1.1 y las Fig. 20 y 21 que se detallan a continuación). En las tres tareas, la profesora pensó en diferentes formas de entender el enunciado de la actividad matemática y anticipó mensajes que podía dar a los alumnos durante el trabajo por parejas con el fin de hacerlos avanzar en el proceso de resolución. También identificó elementos matemáticos que debían tratarse tanto en el trabajo por parejas como en la posterior discusión en gran grupo. Algunos ejemplos son: en la primera tarea, el establecimiento de la definición de semejanza; en la segunda tarea, la introducción del concepto de homotecia como un caso particular de semejanza; y en la tercera tarea, el estudio de transformaciones geométricas surgidas de la composición de un giro y una homotecia de razón positiva.

El «árbol del problema» asociado a la primera tarea, *¡Doblar figuras!*, que se muestra en la Figura 16 del subapartado 4.1.1, contempla que los alumnos construyan un polígono que duplique el área o el perímetro de la figura original. En ambos casos los estudiantes deben realizar razonamientos basados en la semejanza entre figuras poligonales.

En la segunda tarea, *Cambiar las medidas de los polígonos*, el «árbol del problema» (véase la Fig. 20) incluye la posibilidad de que los alumnos comprendan erróneamente el enunciado de la actividad y no sean capaces de aplicar una transformación geométrica entre los dos triángulos. Por este motivo, pueden necesitar la ayuda de la profesora para avanzar en la resolución matemática de la tarea. Siguiendo el árbol, otra posibilidad es que los alumnos tomen las medidas de los tres lados de los dos triángulos y razonen por semejanza, es decir, que establezcan la proporcionalidad existente entre los lados homólogos y la igualdad de los correspondientes ángulos.

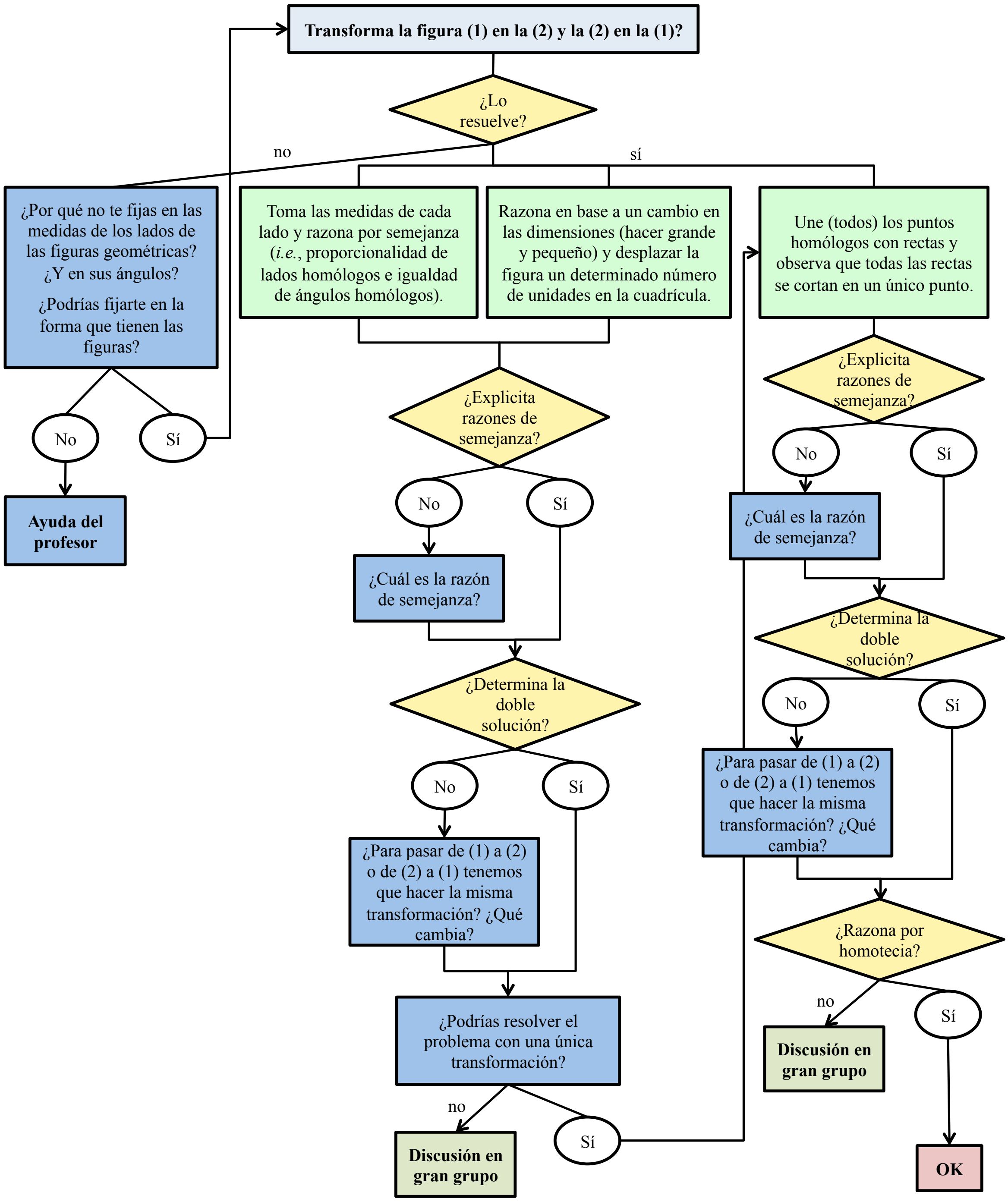


Figura 20. Árbol del problema asociado a la segunda tarea

Otra opción que también se contempla en el árbol es que los alumnos apliquen una estrategia basada en modificar las dimensiones de los tres lados de un triángulo y lo desplacen un determinado número de unidades a lo largo de la cuadrícula. En cualquier caso, la profesora debe preguntar a los estudiantes si pueden resolver la tarea realizando una única transformación, la homotecia. Para ello, los alumnos pueden unir con rectas los vértices homólogos de los dos triángulos y darse cuenta de que todas las rectas se cortan en un único punto, que es el centro de la homotecia.

El «árbol del problema» asociado a la tercera tarea, *Transformaciones geométricas*, que se muestra en la Figura 21, contempla que los alumnos presenten un bloqueo, no comprendan el enunciado de la tarea, o bien lo interpreten erróneamente. Por este motivo, los estudiantes pueden necesitar la ayuda de la profesora para avanzar en la resolución matemática de la tarea. Siguiendo el árbol, otra posibilidad es que los alumnos apliquen primero una homotecia y luego un giro. En este caso deberán determinar la razón de semejanza que define la homotecia, así como fijar el centro de la transformación. Pueden encontrar el centro de giro trazando mediatrices entre puntos homólogos. Si no recuerdan cómo hacerlo, el árbol prevé un conjunto de preguntas que formulará la profesora para que los alumnos puedan progresar en la resolución. Otra posibilidad que también se contempla en el árbol es que los estudiantes apliquen primero un giro y después una homotecia. Para ello deberán determinar los elementos necesarios para caracterizar cada transformación geométrica. Por un lado, deberán calcular el ángulo de giro y fijar el centro de la rotación. Por otro lado, tendrán que determinar la razón de semejanza que define la homotecia, así como el centro de esta transformación. Es importante que los alumnos utilicen GeoGebra para comprobar las soluciones que obtienen y que una vez hayan encontrado una solución factible, se planteen otras formas de resolver matemáticamente la tarea.

En lo relativo a la fase de «configuración didáctica ampliada», la profesora Sara decidió utilizar en clase los artefactos que se habían consensuado en el diseño metodológico de esta secuencia instructiva. Tanto en la primera como en segunda tarea, los alumnos utilizaron lápiz y papel en la sesión de trabajo por parejas y la profesora alternó la pizarra ordinaria con un proyector y GeoGebra durante la discusión en gran grupo. Después, en la reflexión individual, los estudiantes completaron sus protocolos escritos de resolución con lápiz y papel. Por último, en la tercera tarea, los alumnos utilizaron GeoGebra en el trabajo por parejas y la profesora alternó, de nuevo, la pizarra ordinaria con un proyector y GeoGebra en la discusión en gran grupo. En la reflexión individual posterior, los estudiantes completaron sus protocolos de resolución con el GeoGebra.

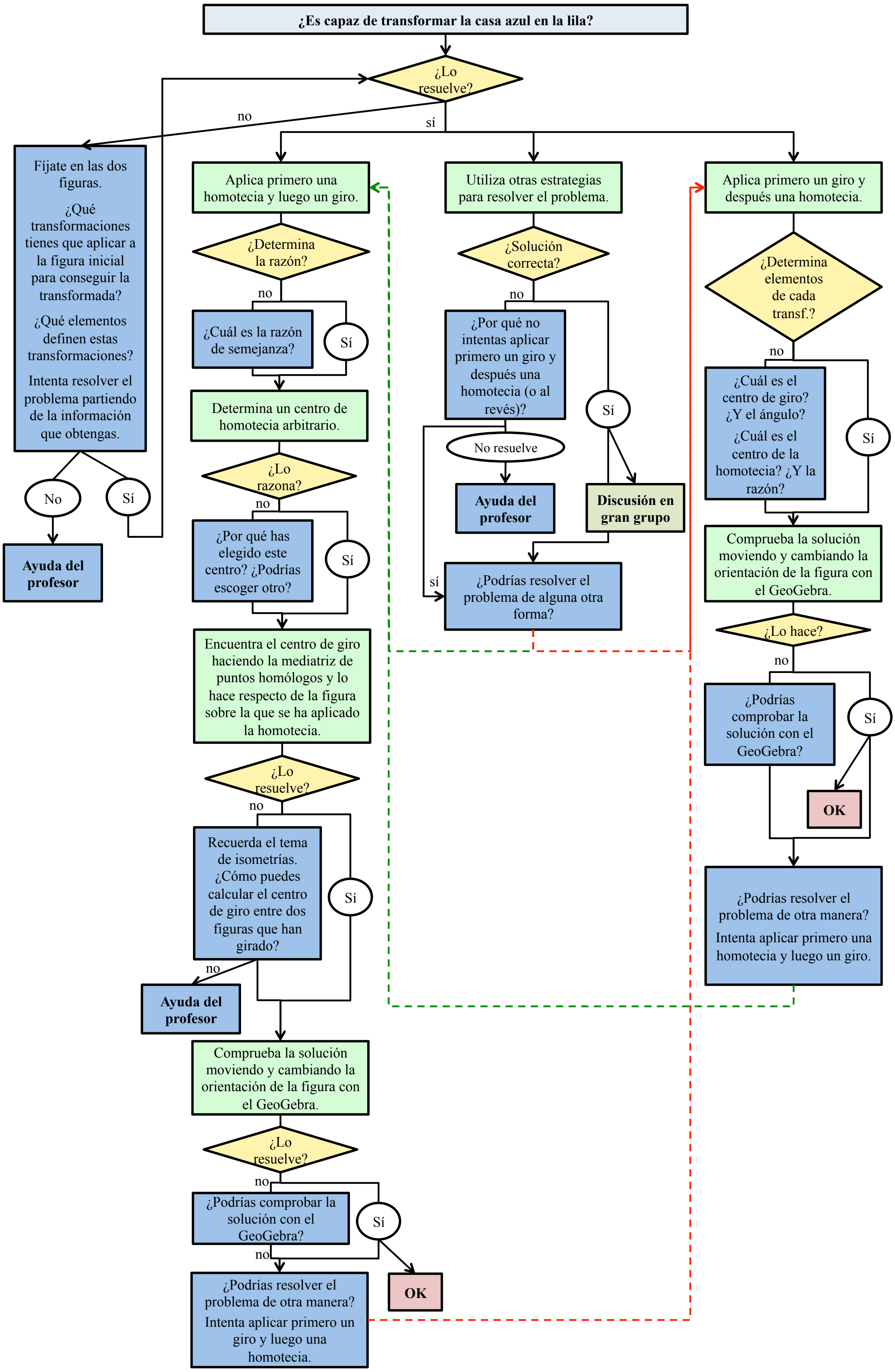


Figura 21. Árbol del problema asociado a la tercera tarea

La profesora Sara siguió rigurosamente el «modo de explotación» que se había fijado en el diseño metodológico de este trabajo de investigación. En las tres tareas implementó un ciclo de trabajo que se inició con una resolución por parejas de cada actividad matemática. Después, Sara gestionó una discusión en gran grupo para cada una de las tareas; y, finalmente, los alumnos reflexionaron individualmente sobre cada actividad. En esta reflexión individual, los estudiantes podían mejorar sus protocolos escritos de resolución incluyendo aspectos tratados en la discusión en gran grupo que no habían contemplado en el trabajo por parejas.

En lo relativo a la fase de «monitorización», la profesora utilizó el «árbol del problema» asociado a cada tarea para monitorizar las tres sesiones de resolución por parejas. Así, además de responder a las preguntas de sus alumnos, Sara les proporcionó indicaciones adicionales y les preguntó por otras interpretaciones de los enunciados de las tareas. También formuló preguntas sobre nuevas estrategias de resolución, con el propósito de que los alumnos profundizasen más en la interpretación, resolución y argumentación de las tres actividades matemáticas.

En la fase de «selección de situaciones», la profesora eligió a determinados alumnos, después de las sesiones de resolución por parejas, para que participasen en las discusiones en gran grupo de las tres tareas. La intención de Sara era tener previstas algunas intervenciones fijas, pero dejando margen para que todos los alumnos voluntariamente pudiesen realizar aportaciones matemáticas en el transcurso de las sesiones de clase.

Finalmente, recordemos que la fase de «secuenciación de la implementación didáctica» es el reflejo de la preparación previa de las sesiones de discusión en gran grupo y su implementación en el aula de matemáticas. Para analizar esta fase hay que estudiar los episodios de las discusiones en gran grupo de las tres tareas. Este análisis se realiza a través del estudio de: los modos de actuación de la profesora Sara en la gestión de las tres discusiones en gran grupo; los modos de interacción entre los participantes de estas discusiones; y los efectos que estas discusiones producen en la creación de oportunidades de aprendizaje matemático, las cuales pueden ser aprovechadas por los alumnos. Todos estos elementos se analizan detalladamente en los próximos subapartados de este trabajo.

4.2.2. *Análisis de la primera tarea*

Analizamos la discusión en gran grupo de la primera tarea, *¡Doblar figuras!,* de la profesora Sara para estudiar modos de actuación docente y modos de interacción entre los participantes de la discusión en gran grupo. Además, ejemplificamos oportunidades de aprendizaje matemático y, por último, analizamos el aprovechamiento que obtienen los alumnos de ciertas oportunidades de aprendizaje asociadas a la primera tarea.

Análisis de los modos de actuación en la primera tarea

Para mostrar el análisis de los modos de actuación hemos seleccionado fragmentos de dos episodios de la discusión en gran grupo, los cuales se detallan en el tercer y cuarto extracto. En el Anexo VI se puede consultar la transcripción completa de la discusión en grupo de la primera tarea de Sara, así como la caracterización de todos los episodios.

El tercer extracto muestra un fragmento del tercer episodio de la discusión en gran grupo (${}^{1}e_{3}$: «discutir el artefacto», «estudio de estrategias para resolver o argumentar»). En este episodio se realiza una discusión conjunta, entre la profesora y los alumnos, de la información que proporcionan dos artefactos: la pizarra y el GeoGebra. Por este motivo, el tipo de orquestación instrumental que se asocia al episodio es «discutir el artefacto». Se estudia una estrategia de resolución basada en multiplicar por dos todos los lados de la figura poligonal original, la cual produce la duplicación del perímetro y la cuadruplicación del área. Por este motivo, el estadio de la discusión es «estudio de estrategias para resolver o argumentar».

Tercer extracto. Fragmento del tercer episodio de la discusión en gran grupo de la primera tarea: duplicación del perímetro y cuadruplicación del área de una figura.

---

15. Sara:	Respecto de todo lo que se está comentando, ¿todo el mundo cree que es lo mismo? O sea, Álex ha dicho “yo he tomado cada lado y he hecho el doble”, es decir, si tengo un lado que vale uno [señalando sobre la pantalla la base de la ‘F’], Álex, ¿de cuánto lo has hecho? [*Establecimiento de consenso sobre la construcción de una figura con el doble de perímetro*]
16. Álex:	De dos.

[*Exposición sin argumentación sobre la longitud del lado de un cuadrado*]

17. Sara: Por tanto, si esta altura [de la 'F'] valía seis, la has hecho de 12. Pero antes, ¿qué han dicho Martí y Adrià?
[*Invitación a la participación para recordar la construcción de una figura con el doble de perímetro*]

18. Adrià: Cada nuevo cuadrado son cuatro de los iniciales.
[*Exposición de evidencia empírica sobre el área de un cuadrado*]

19. Sara: Es decir, ¿cada cuadrado de área uno se ha transformado en cuatro?
[*Petición de comprobación sobre la nueva área de un cuadrado*]

20. Adrià: Sí.
[*Asentimiento*]

21. Sara: Por tanto, cuando habéis hecho el doble de grande, todo el mundo ha hecho el doble de ancho y de alto. ¿Alguien lo ha hecho distinto?
[*Invitación a la búsqueda de alternativas sobre la construcción de una figura el doble de grande*]

22. Isabel: No, porque sino sería desproporcionado.
[*Exposición de evidencia empírica para duplicar una figura*]

23. Sara: Isabel, dices que sería desproporcionado, ¿si hubiésemos hecho qué?
[*Petición de formalización sobre la duplicación de una figura*]

24. Isabel: Que en el eje de las *Y* hiciésemos el doble, pero en el de las *X* no.
[*Formalización sobre las proporciones de una figura poligonal el doble de grande*]

El cuarto extracto ilustra un fragmento del quinto episodio de la discusión en gran grupo ($^{1}e_{5}$: «descubrir a través del artefacto», «generalización y conceptualización»). En este episodio se utiliza un artefacto, el GeoGebra con la cuadrícula, para descubrir que para duplicar el área de la figura poligonal del enunciado de la tarea hay que utilizar un múltiplo de $\sqrt{2}$ en la construcción de todos los lados del polígono. Por este motivo el tipo de orquestación instrumental de este episodio es «descubrir a través del artefacto». Además, consideramos que el estadio de la discusión del problema es «generalización y conceptualización», ya que se generaliza la solución de duplicar el área con la construcción de un cuadrado cuyo lado mide √2. Esta solución se puede obtener considerando la diagonal de los cuadrados unitarios de la cuadrícula.

Cuarto extracto. Fragmento del quinto episodio de la discusión en gran grupo de la primera tarea: duplicación del área de una figura e introducción del término √2.

---

25. Sara:	O sea, que no habéis hecho una 'F' el doble de grande en área, sino cuatro veces más grande, ¿verdad? [*Petición de comprobación sobre el área de una figura*]
26. Isabel:	Sí, pero en esta cuadrícula no hay un lado que sea √2 para hacer… [*Asentimiento y establecimiento de conjetura sobre la obtención de √2 utilizando una cuadrícula*]
27. Sara:	¿Tú querrías √2? [*Petición de explicación sobre el uso de √2*]
28. Isabel:	Sí. [*Asentimiento*]
29. Sara:	¿Para hacer qué? [*Petición de explicación sobre el uso de √2*]
30. Isabel:	Para hacer el doble de área y con esta cuadrícula no se puede hacer. [*Exposición sin argumentación sobre la duplicación del área de una figura utilizando una cuadrícula*]
31. Sara:	¿Todo el mundo ha entendido esto de la √2? [*Establecimiento de consenso sobre el término √2*]
32. Grupo:	No. [*Negación para pedir aclaración sobre el término √2*]
33. Sara:	Isabel, ¡explica esto bien! [*Petición de explicación sobre el término √2*]
34. Isabel:	Pues que en la figura inicial cada cuadrado tiene lado 1 y aquí en cada cuadradito el lado es 2, entonces el área es cuatro veces más grande. Por esto, nos interesaría que el lado del cuadradito fuese √2. [*Justificación empírica sobre el uso de √2 para conseguir una figura con el doble de área*]

35. Sara: ¿Para que el área fuese…?
[*Petición de formalización sobre el área de una figura*]

36. Isabel: Dos.
[*Formalización del valor del área*]

37. Sara: [Dibuja en la pizarra cuadrados de diferentes dimensiones.] Isabel dice: "yo tengo unos cuadrados que miden 1x1" y, por tanto, el área es 1. Cuando duplicamos la altura y la anchura obtengo cuadrados que son 2x2, pero resulta que el área es cuatro veces más grande, ya que es 2x2. Isabel dice: "para conseguir un cuadrado que tuviese área 2, que fuese el doble de esta [señalando en la pizarra un cuadrado de área 1], los lados deberían medir √2". Para demostrarlo, si llamamos x al lado del cuadrado, entonces x^2 es igual a 2, es decir, x debe ser √2 [Sara hace estas anotaciones en la pizarra]. […]
[*Recapitulación sobre la construcción de un cuadrado con el doble de área y cómo calcular √2*]

La caracterización completa en episodios de la discusión en gran grupo de esta tarea se ilustra en la Tabla 8, la cual muestra que la clase se inició recordando el enunciado de la actividad matemática por parte de la profesora ($^1e_1$: «explicar a través del artefacto», «situación del problema»). A continuación, un alumno, Álex, presentó una solución basada en la duplicación de todos los lados del polígono original, apoyándose en su protocolo escrito de resolución y en el GeoGebra ($^1e_2$: «experimentar el instrumento», «presentación de una solución»). Luego, se realizó una discusión entre la profesora y los alumnos de la información representada en dos artefactos: el GeoGebra y la pizarra, la cual permitió estudiar la solución presentada por Álex. Se observó que con el método de Álex se duplicaba el perímetro de la figura original y se cuadriplicaba el área ($^1e_3$: «discutir el artefacto», «estudio de estrategias para resolver o argumentar»). La intervención de otro alumno, Adrià, permitió contrastar la solución de Álex con otra solución que consistía en duplicar el área de la figura sin mantener la semejanza con el polígono original ($^1e_4$: «experimentar el instrumento», «contraste entre soluciones»). Las observaciones de dos alumnos, Isabel y Álex, apoyándose en la cuadrícula del GeoGebra, fueron útiles para darse cuenta de la importancia de utilizar un múltiplo de raíz de √2 en todos los lados del polígono si se quería construir una nueva figura que duplicase el área y preservase la semejanza con la representación original. Así, se generalizó la solución de duplicar el área y se relacionó con la construcción de un cuadrado cuyo lado midiese √2 ($^{1}e_5$: «descubrir a través del artefacto», «generalización y conceptualización»). A continuación, la profesora se apoyó en la pizarra y en el GeoGebra para comprobar que, efectivamente, se podía obtener √2 utilizando la diagonal de un cuadrado unitario. Además, gestionó una discusión con el grupo que propició la obtención de una definición de semejanza observando la proporcionalidad de todos los lados homólogos y la igualdad de los correspondientes ángulos ($^{1}e_6$: «explicar a través del artefacto», «estudio de estrategias para resolver o argumentar»). Finalmente, la profesora realzó la importancia de la igualdad de ángulos homólogos para que dos polígonos fuesen semejantes ($^{1}e_7$: «explicar a través del artefacto», «conexiones con otras situaciones»).

Tabla 8. Análisis de los episodios de la discusión en gran grupo de la primera tarea de la profesora Sara

Tipo de orquestación / **Estadio de la discusión**	Situación del problema	Presentación de una solución	Estudio de estrategias para resolver o argumentar	Estudio de casos particulares o extremos	Contraste entre soluciones	Conexiones con otras situaciones	Generalización y conceptualización	Reflexión sobre progreso matemático
Explorar el artefacto								
Explicar a través del artefacto	$^{1}e_1$		$^{1}e_6$			$^{1}e_7$		
Enlazar artefactos								
Discutir el artefacto			$^{1}e_3$					
Descubrir a través del artefacto							$^{1}e_5$	
Experimentar el instrumento		$^{1}e_2$			$^{1}e_4$			

La interpretación de la distribución de episodios en la Tabla 8 determina un modo de actuación de la profesora Sara, en la primera tarea, con equilibrio instrumental, ya que tres de los siete episodios corresponden a los tres primeros tipos de orquestación («explorar el artefacto», «explicar a través del artefacto» y «enlazar artefactos») y los cuatro restantes corresponden a los tres últimos («discutir el artefacto», «descubrir a través del artefacto» y «experimentar el instrumento»). Además, hay completitud discursiva porque la discusión en gran grupo transcurre por la mayoría de estadios de la discusión y se avanza con un cierto orden desde los momentos iniciales de la discusión («situación del problema» y «presentación de una solución») hasta los más avanzados («conexiones con otras situaciones» y «generalización y conceptualización»).

Análisis de los modos de interacción en la primera tarea

Analizamos los modos de interacción entre los participantes de la discusión en gran grupo de la primera tarea estudiando las acciones que se producen en los episodios de la discusión. Ilustramos este análisis con los extractos seleccionados anteriormente e introducimos un nuevo extracto, el quinto, en los párrafos siguientes. En el Anexo VI se puede consultar un análisis completo de las acciones que se han producido en todos los episodios de la discusión en gran grupo de esta primera tarea.

El tercer extracto, que corresponde a un fragmento del tercer episodio y trata sobre la duplicación del perímetro y la cuadruplicación del área de una figura poligonal, se inicia con un establecimiento de consenso sobre la construcción de una figura con el doble de perímetro (línea 15), que realiza la profesora para comprobar la solución de la primera tarea que propuso Álex. Este alumno responde a una pregunta de Sara y expone sin argumentar que la longitud de la base de la nueva figura construida es igual a dos unidades (línea 16). A continuación, la profesora invita a la participación de otros dos alumnos, Martí y Adrià, para que recuerden el procedimiento que siguieron para duplicar el perímetro de la figura original (línea 17). Adrià realiza una exposición de evidencia empírica, apoyándose en las representaciones de la pizarra y el GeoGebra, y pone de manifiesto que al multiplicar por dos todos los lados, el área se multiplica por cuatro (línea 18). Luego la profesora realiza una petición de comprobación sobre el área de cada nuevo cuadrado construido (línea 19) y Adrià asiente (línea 20). Sara invita a la búsqueda de alternativas sobre la construcción de una figura el doble de grande (línea 21) y pregunta al grupo lo siguiente: “cuando habéis hecho el doble de grande, todo el mundo ha hecho el doble de ancho y de alto. ¿Alguien lo ha hecho distinto?”. Una alumna, Isabel, observa la representación del GeoGebra y afirma que “no, porque sino sería desproporcionado”, es decir, Isabel realiza una exposición de evidencia empírica sobre la duplicación del área de una figura (línea 22). A continuación la profesora pide a esta alumna que formalice el uso del término «desproporcionado» (línea 23). Isabel formaliza su afirmación anterior y hace un paralelismo con los ejes cartesianos: “que en el eje de las *Y* hiciésemos el doble, pero en el de las *X* no” (línea 24).

La distribución de las acciones del tercer extracto se muestra en la Figura 22. En este diagrama se observa una sucesión encadenada de acciones entre las preguntas realizadas por la profesora, Sara, y las respuestas de sus alumnos.

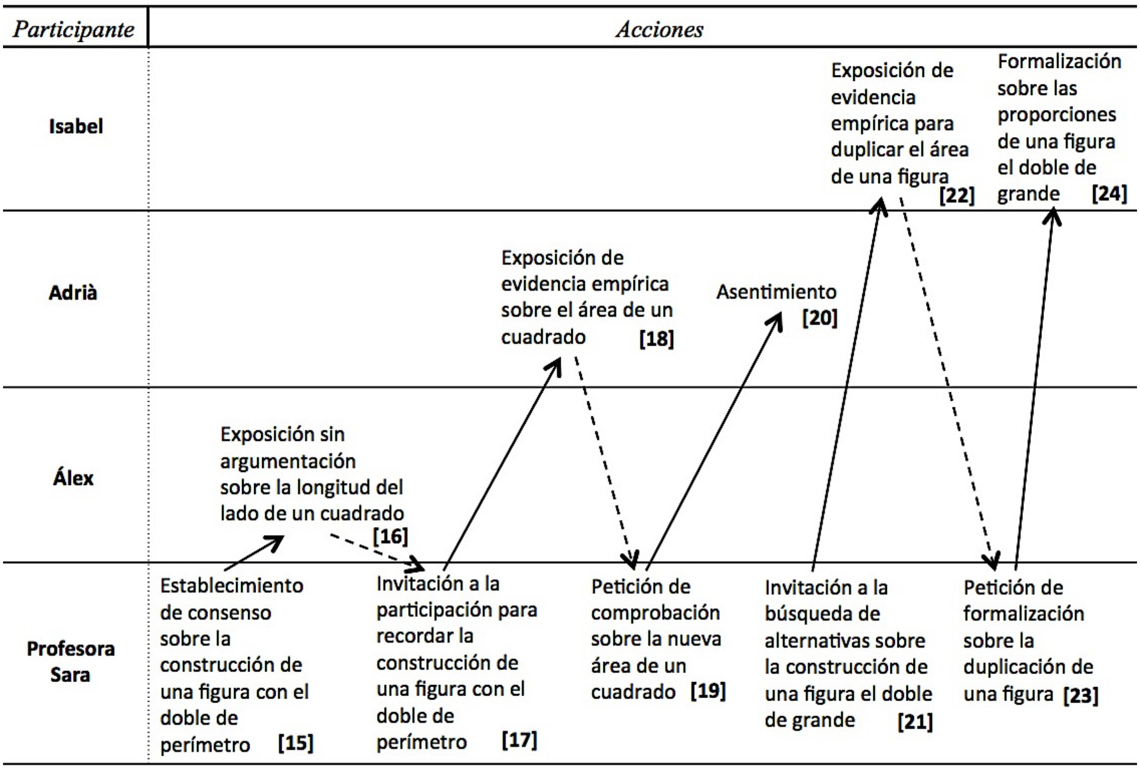


Figura 22. Diagrama de sucesión de acciones del tercer extracto

El cuarto extracto, que corresponde al quinto episodio de la discusión en gran grupo y trata sobre la duplicación del área de una figura poligonal y la introducción del término √2, se inicia con una petición de comprobación, que realiza la profesora, sobre el valor del área de una figura construida en la cuadrícula del GeoGebra (línea 25). Una alumna, Isabel, conjetura que no es posible duplicar el área utilizando esta cuadrícula, ya que “no hay un lado que sea √2” (línea 26). A continuación, Sara pide a Isabel que explique por qué necesita utilizar √2 (líneas 27 y 29); la alumna asiente (línea 28) y expone sin argumentar que no es posible “hacer el doble de área con esta cuadrícula” (línea 30).

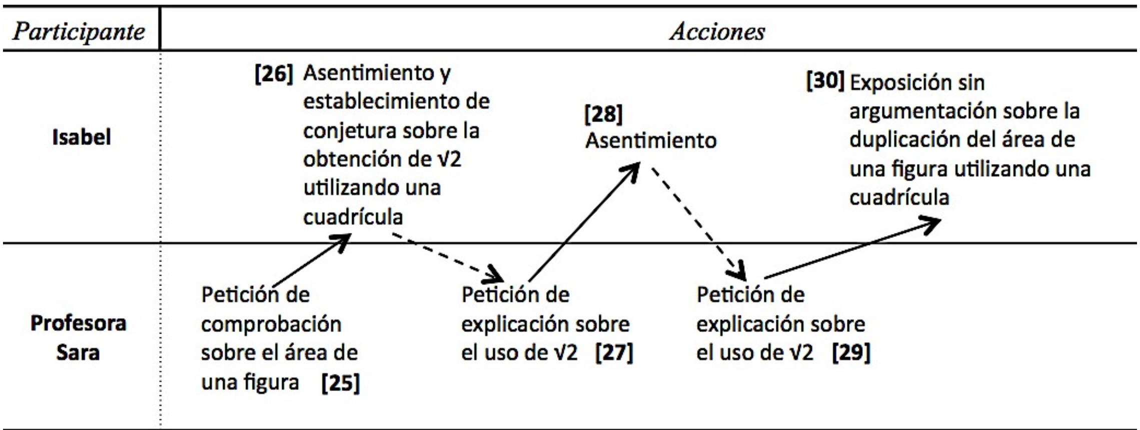


Figura 23. Primera parte del diagrama de sucesión de acciones del cuarto extracto

La profesora trata de establecer un consenso en el grupo sobre la utilización del término √2 (línea 31), pero la petición de aclaración que realizan los alumnos (línea 32) propicia a que la profesora pida a Isabel que explique nuevamente su argumento (línea 33). La alumna se apoya en la construcción del GeoGebra para justificar empíricamente la necesidad de utilizar √2 para duplicar el área, ya que "en la figura inicial cada cuadrado tiene lado 1 y aquí en cada cuadradito el lado es 2 […]. Por esto, nos interesaría que el lado del cuadradito fuese √2" (línea 34). Luego Sara pregunta a la alumna el nuevo valor del área de la figura (línea 35) e Isabel formaliza que el valor del área es dos (línea 36). Por último, la profesora realiza una recapitulación sobre cómo construir un cuadrado cuya área sea el doble que el área del polígono original (línea 37) y hace anotaciones en la pizarra para demostrarlo: "si llamamos x al lado del cuadrado, entonces x^2 es igual a 2, es decir, x debe ser √2".

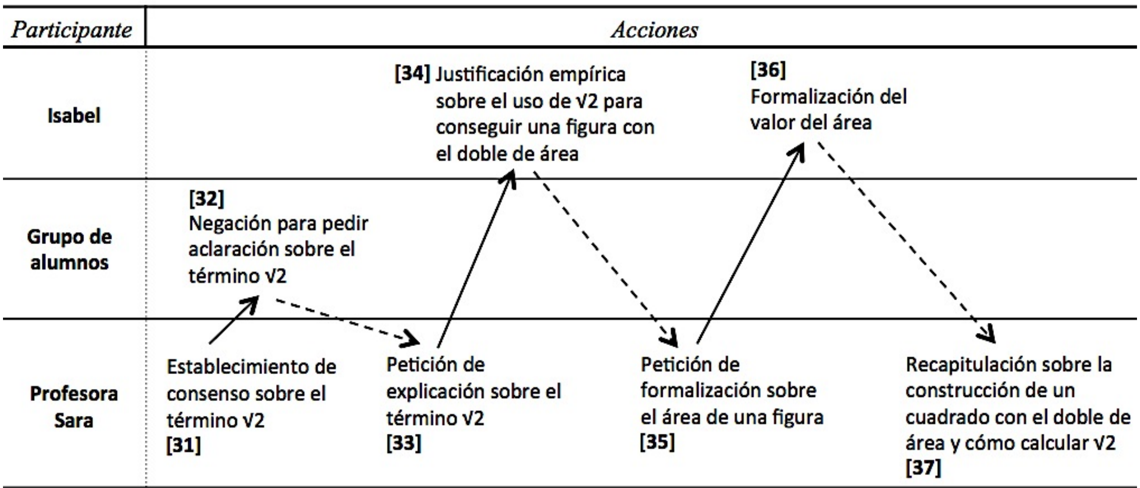


Figura 24. Segunda parte del diagrama de sucesión de acciones del cuarto extracto

La distribución de las acciones del cuarto extracto se muestra en las Figuras 23 y 24. En estos diagramas se observa, nuevamente, una sucesión encadenada de acciones entre las preguntas realizadas por la profesora y las respuestas de sus alumnos.

A continuación introducimos el quinto extracto, cuya transcripción ilustra un fragmento del sexto episodio de la discusión en gran grupo (${}^{1}e_{6}$: «explicar a través del artefacto», «estudio de estrategias para resolver o argumentar»). En este episodio, Sara se apoya en la pizarra y el GeoGebra para introducir preguntas al grupo y, así, estudiar distintas estrategias de resolución de la primera tarea, con el fin de formular una definición de semejanza entre dos figuras poligonales.

Quinto extracto. Fragmento del sexto episodio de la discusión en gran grupo de la primera tarea: definición de semejanza entre dos figuras poligonales.

38. Sara:	[…] ¿Cuáles son las particularidades de esta [‘F’ con el doble de área], de la ‘F’ azul [original] y de esta otra [‘F’ con el doble de perímetro]? [*Petición de explicación para contrastar distintas soluciones*]
39. Alba:	Que son proporcionales. [*Exposición sin argumentación sobre la proporcionalidad de figuras geométricas*]
40. Sara:	¿Qué quieres decir con ‘proporcionales’? A ver, Alba, explícalo. [*Petición de explicación sobre el término ‘proporcional’*]
41. Alba:	Que un lado y el otro mantienen la misma proporción. Por ejemplo, si hay tres cuadrados en vertical y cuatro en horizontal, luego serían seis en vertical y ocho en horizontal. [*Exposición con argumentación sobre proporcionalidad*]
42. Sara:	Vale, por tanto, ¿cuáles son proporcionales? ¿Una ‘F’ de la otra? [*Validación y petición de formalización sobre proporcionalidad*]
43. Alba:	La división entre los lados. [*Formalización para obtener la razón entre lados proporcionales*]
44. Sara:	La división entre un lado de una ‘F’ con el homólogo de la otra. [*Formalización sobre la proporcionalidad entre lados homólogos*]
45. Álex:	La *k*.

[*Aclaración sobre la constante de proporcionalidad*]

46. Sara: Y a esta proporción le llamáis *k*, que es la constante de proporcionalidad. Ahora, a estos dos polígonos, para afirmar que son semejantes, además ¿qué habéis utilizado?, es decir, ¿qué se debe cumplir?
[*Petición de explicación sobre polígonos semejantes*]

47. Adrià: Que se mantengan los ángulos.
[*Exposición de evidencia empírica sobre la igualdad de ángulos homólogos en dos figuras semejantes*]

48. Sara: Exacto, los mismos ángulos me faltaba. Porque sino podría dibujaros un rombo de lado cuatro y estos dos polígonos [rombo y cuadrado] no son semejantes. Por tanto, no solo los lados han de ser proporcionales, sino que los ángulos homólogos han de ser iguales. […]
[*Recapitulación sobre la definición de semejanza*]

El quinto extracto se inicia con una petición de explicación por parte de la profesora a los alumnos del grupo (línea 38), con el fin de que estos comparen dos soluciones de la tarea matemática, una de las cuales consiste en la duplicación del perímetro y la otra en la duplicación del área de la figura original. Una alumna, Alba, expone sin argumentar que la figura construida multiplicando por dos todos los lados es proporcional con la representación inicial (línea 39). A continuación, Sara le pregunta "¿qué quieres decir con proporcionales?", es decir, pide una explicación a la estudiante sobre el término 'proporcional' (línea 40). Alba expone con argumentación que "un lado y el otro [el homólogo del nuevo polígono] mantienen la misma proporción" y, además, pone un ejemplo donde menciona que "si hay tres cuadrados en vertical y cuatro en horizontal, luego serían seis en vertical y ocho en horizontal" (línea 41). La profesora valida la exposición de Alba, pero le pide que formalice sus comentarios sobre proporcionalidad (línea 42). La alumna intenta formalizar, mencionando que la proporcionalidad se produce en "la división entre los lados" (línea 43), pero la profesora es quien completa la respuesta de Alba recordando que la proporcionalidad se produce entre dos lados homólogos (línea 44). Luego, un alumno, Álex, realiza una aclaración mencionando que la constante de proporcionalidad se denomina *k* (línea 45) y la profesora valida su afirmación. Además, Sara pide una explicación al grupo preguntando qué condiciones se deben cumplir para que dos polígonos sean semejantes (línea 46). Un alumno, Adrià, hace una exposición de evidencia empírica apoyándose en las figuras proyectadas en la pantalla del GeoGebra y afirma que se debe mantener la igualdad de ángulos (línea 47). Por último, Sara valida la afirmación de Adrià y hace una recapitulación sobre la definición de semejanza (línea 48) en la cual menciona que “no solo los lados han de ser proporcionales, sino que los ángulos han de ser iguales”.

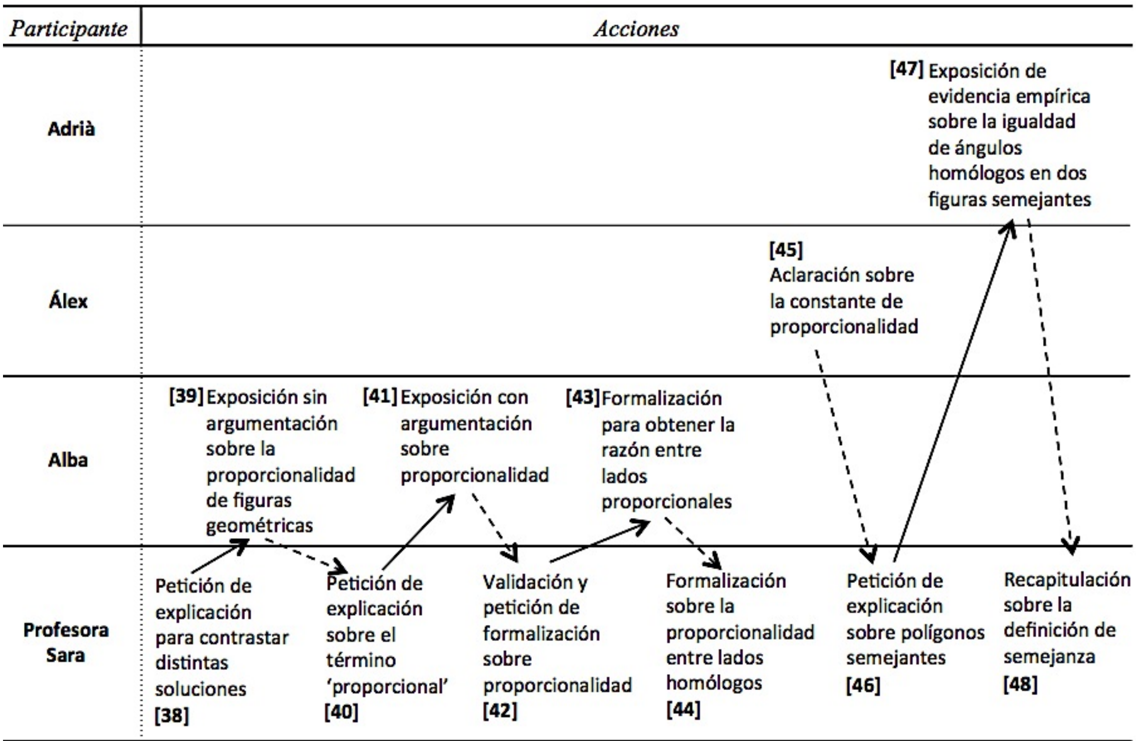


Figura 25. Diagrama de sucesión de acciones del quinto extracto

Finalmente, la distribución de las acciones del quinto extracto (véase la Fig. 25) pone de manifiesto que, una vez más, se produce una sucesión encadenada de acciones entre las preguntas realizadas por la profesora y las respuestas de sus alumnos. Este diagrama de sucesión de las acciones se reproduce en los demás episodios de la discusión en gran grupo de la primera tarea gestionada por la profesora Sara.

Ejemplificación de oportunidades de aprendizaje matemático en la primera tarea

En los próximos párrafos introducimos algunas oportunidades de aprendizaje matemático que hemos detectado en el análisis de los extractos anteriores. Para ello relacionamos los aspectos del conocimiento matemático asociados a la oportunidad con las acciones que se han producido en los procesos de interacción propios del aula. Solo ejemplificamos una pequeña parte de las muchas oportunidades de aprendizaje que se han generado en todos los episodios de la discusión en gran grupo de la primera tarea.

En el tercer extracto, que corresponde al tercer episodio de la discusión en gran grupo, observamos que la intervención de la profesora estableciendo consenso en la clase, con el fin de que los alumnos construyan una figura con el doble de perímetro (línea 15); así como la posterior exposición de evidencia empírica de un alumno, Adrià, mencionado que si duplicamos el perímetro "cada nuevo cuadrado son cuatro de los iniciales" (línea 18), genera una oportunidad de aprendizaje matemático conceptual que caracterizamos por 'Aprender que la duplicación del perímetro de una figura poligonal implica multiplicar por cuatro su área'. Además, la intervención de otra alumna, Isabel, observando y formalizando una evidencia empírica sobre las proporciones de una figura el doble de grande (líneas 22 y 24) crea una oportunidad de aprendizaje matemático procedimental que caracterizamos por 'Darse cuenta que construir un polígono el doble de grande puede implicar que no se mantengan las proporciones respecto de la figura original'. Por último, la intervención de la profesora, Sara, invitando a los alumnos a buscar alternativas para duplicar el perímetro o el área de un polígono (línea 21) genera la oportunidad de aprendizaje argumentativa caracterizada por 'Observar que una tarea matemática puede tener diferentes soluciones e interpretaciones del enunciado y todas ellas ser correctas'. La Tabla 9 resume la caracterización de las oportunidades de aprendizaje del tercer extracto.

Tabla 9. Caracterización de las oportunidades de aprendizaje del tercer extracto

Aspectos matemáticos	*Acciones*
Conceptual	
Aprender que la duplicación del perímetro de una figura poligonal implica multiplicar por cuatro su área.	Establecimiento de consenso sobre la construcción de una figura con el doble de perímetro *(Línea 15).* Exposición de evidencia empírica sobre el área de un cuadrado *(Línea 18).*
Procedimental	
Darse cuenta que construir un polígono el doble de grande puede implicar que no se mantengan las proporciones respecto de la figura original.	Exposición de evidencia empírica para duplicar una figura *(Línea 22).* Formalización sobre las proporciones de una figura poligonal el doble de grande *(Línea 24).*

Argumentativa	
Observar que una tarea matemática puede tener diferentes soluciones e interpretaciones del enunciado y todas ellas ser correctas.	Invitación a la búsqueda de alternativas sobre la construcción de una figura el doble de grande *(Línea 21)*.

En el cuarto extracto, que corresponde al quinto episodio de la discusión en gran grupo de la primera tarea, se genera una oportunidad de aprendizaje matemático conceptual que definimos por 'Aprender que para duplicar el área de una figura poligonal, como la del enunciado de la tarea, se debe utilizar $\sqrt{2}$'. Esta oportunidad es producto de la intervención de una alumna, Isabel, cuando establece una conjetura sobre la obtención de $\sqrt{2}$ utilizando una cuadrícula (línea 26) y de su posterior justificación empírica, explicando la necesidad de utilizar $\sqrt{2}$ para conseguir una figura con el doble de área (línea 34). Además, la acción de la profesora al final del extracto, recapitulando cómo se puede construir un cuadrado con el doble de área y cómo calcular $\sqrt{2}$ (línea 37), también contribuye a crear esta oportunidad de aprendizaje para el resto de alumnos de la clase.

Por otra parte, las peticiones de explicación sobre el uso de $\sqrt{2}$ que realiza la profesora (líneas 29 y 33) y la posterior petición de formalización sobre el área de una figura (línea 35) favorecen la creación de una oportunidad de aprendizaje argumentativa que caracterizamos por 'Darse cuenta de la importancia de explicar y formalizar con argumentos matemáticos las afirmaciones sobre la resolución de una tarea'. La Tabla 10 resume las oportunidades de aprendizaje matemático que hemos identificado en el cuarto extracto.

Tabla 10. Caracterización de las oportunidades de aprendizaje del cuarto extracto

Aspectos matemáticos	*Acciones*
Conceptual	
Aprender que para duplicar el área de una figura poligonal, como la del enunciado de la tarea, se debe utilizar $\sqrt{2}$.	Establecimiento de conjetura sobre la obtención de $\sqrt{2}$ utilizando una cuadrícula *(línea 26)*. Justificación empírica sobre el uso de $\sqrt{2}$ para conseguir una figura con el doble de área *(línea 34)*. Recapitulación sobre la construcción de un cuadrado con el doble de área y cómo calcular $\sqrt{2}$ *(línea 37)*.

Argumentativa	
Darse cuenta de la importancia de explicar y formalizar con argumentos matemáticos las afirmaciones sobre la resolución de una tarea.	Petición de explicación sobre el uso de √2 *(línea 29)*. Petición de explicación sobre el término √2 *(línea 33)*. Petición de formalización sobre el área de una figura *(línea 35)*.

Finalmente, en el quinto extracto, que corresponde al sexto episodio de la discusión en gran grupo, determinamos dos oportunidades de aprendizaje matemático conceptual (véase la Tabla 11). En primer lugar, tanto la exposición sin argumentación sobre proporcionalidad que realiza una alumna, Alba, comentando que dos figuras semejantes tienen los lados homólogos proporcionales (línea 41), como la posterior exposición de evidencia empírica sobre la igualdad de ángulos homólogos en dos figuras semejantes realizada por Adrià (línea 47) favorecen la creación de una oportunidad de aprendizaje conceptual que caracterizamos por 'Interiorizar el concepto y entender la definición de semejanza'. En segundo lugar, la petición de explicación sobre polígonos semejantes (línea 46) y la recapitulación final sobre la definición de semejanza que realiza la profesora, manifestando que "no solo los lados han de ser proporcionales, sino que los ángulos homólogos han de ser iguales" (línea 48) fomenta la creación de una nueva oportunidad de aprendizaje matemático que definimos por 'Identificar la importancia de la igualdad de ángulos en la definición de semejanza'.

Tabla 11. Caracterización de las oportunidades de aprendizaje del quinto extracto

Aspectos matemáticos	*Acciones*
Conceptuales	
Interiorizar el concepto y entender la definición de semejanza.	Exposición con argumentación sobre proporcionalidad *(línea 41)*. Exposición de evidencia empírica sobre la igualdad de ángulos homólogos en dos figuras semejantes *(línea 47)*.
Identificar la importancia de la igualdad de ángulos en la definición de semejanza.	Petición de explicación sobre polígonos semejantes *(línea 46)*. Recapitulación sobre la definición de semejanza *(línea 48)*.

Análisis del aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje en la primera tarea

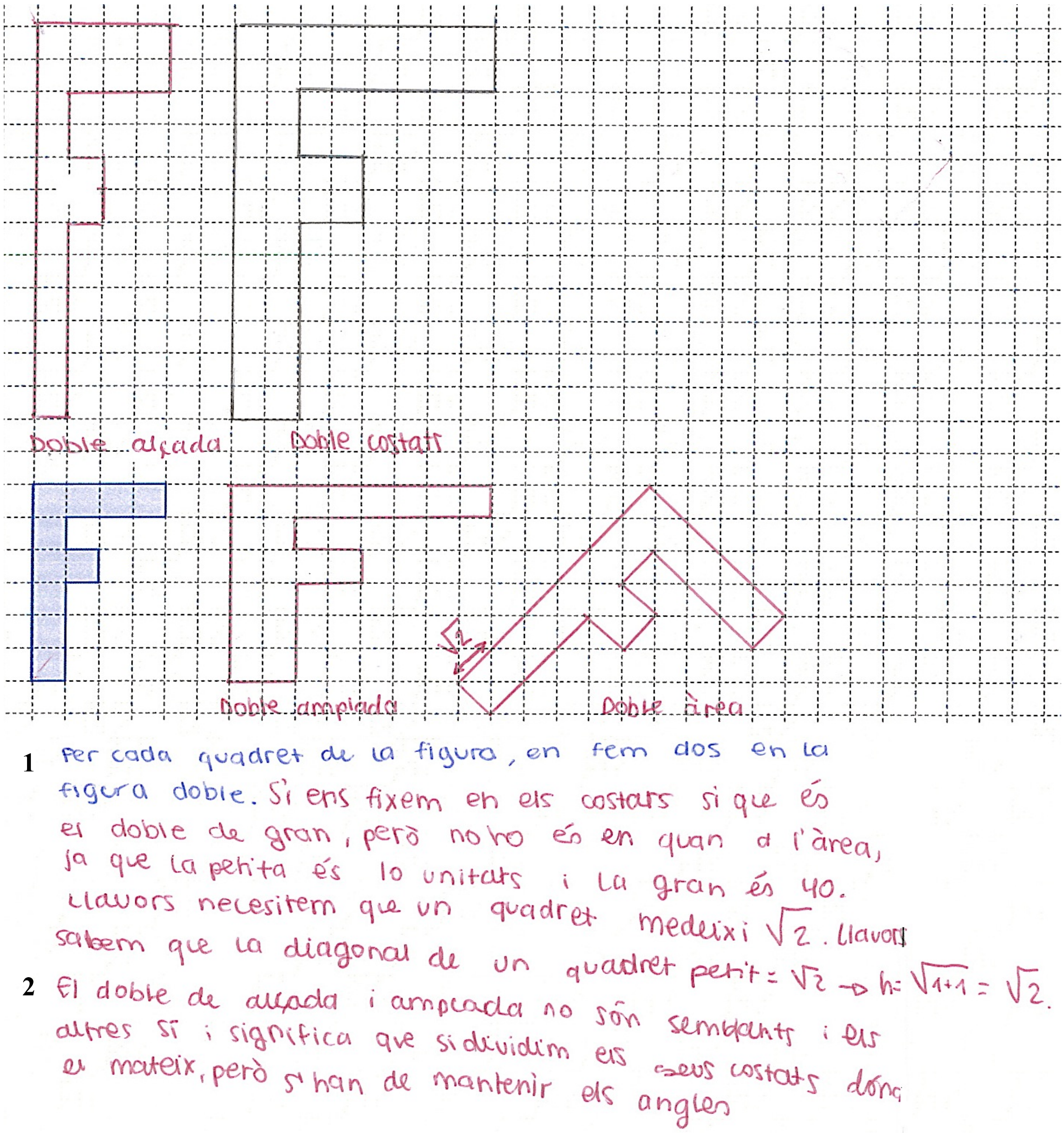
Basándonos en las oportunidades de aprendizaje detectadas anteriormente, analizamos las respuestas de los dieciséis alumnos antes y después de la discusión en gran grupo.

Así obtenemos evidencias concretas sobre cambios en la comprensión de un concepto o procedimiento matemático y encontramos nuevos elementos que los alumnos han incluido en sus reflexiones individuales, posteriores a la discusión en gran grupo de la primera tarea. Ejemplificamos el análisis centrándonos en dos oportunidades de aprendizaje conceptual, caracterizadas matemáticamente por 'Interiorizar el concepto y entender la definición de semejanza' y 'Aprender que para duplicar el área de una figura poligonal, como la del enunciado de la tarea, se debe utilizar $\sqrt{2}$'.

Con respecto a la primera oportunidad de aprendizaje, sobre el concepto matemático de semejanza, analizamos si las respuestas de los dieciséis alumnos contienen referencias explícitas a la definición de semejanza entre figuras geométricas, teniendo en cuenta la proporcionalidad de lados homólogos y la igualdad de los correspondientes ángulos.

El análisis permite obtener tres tipologías de respuesta: '*solución que incluye la definición completa de semejanza*', es decir, el alumno duplica el perímetro de la figura original, obtiene una nueva figura semejante y explicita dicha definición; '*solución que incluye una definición parcial de semejanza*', es decir, el alumno resuelve la tarea duplicando el perímetro de la figura original, pero escribe una definición incompleta de semejanza; y '*solución sin cambios antes y después de la discusión en gran grupo, o sin referencias a la definición de semejanza*', es decir, el alumno no completa la solución obtenida en el trabajo por parejas durante la reflexión individual, o bien no relaciona su solución con la definición de semejanza. En el Anexo VII se encuentra la codificación completa de las respuestas de los dieciséis alumnos a la primera tarea, en relación con el uso de la definición de semejanza.

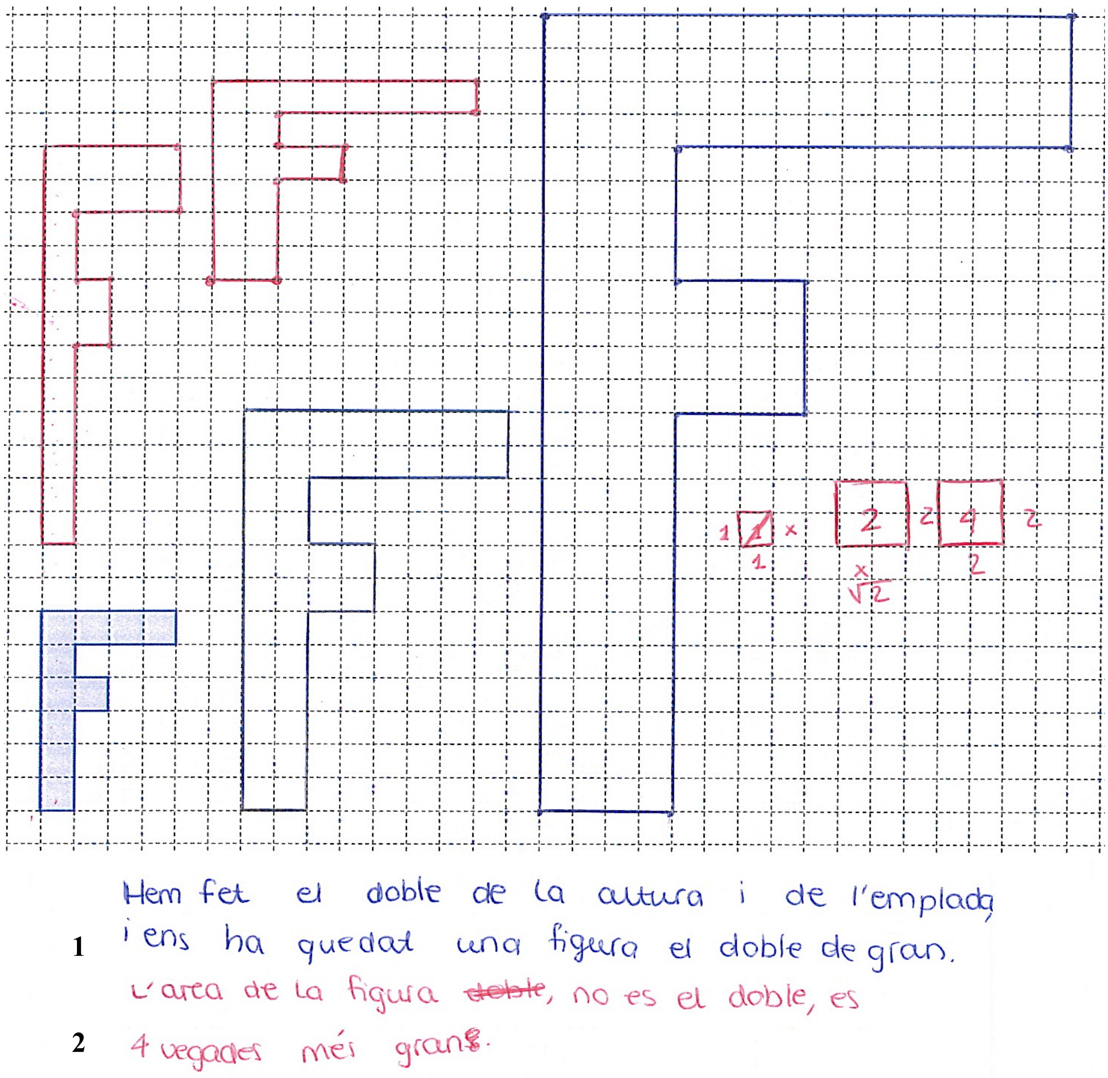
En concreto, cuatro de los dieciséis estudiantes incluyeron la definición de semejanza cuando completaron sus protocolos escritos de resolución después de la discusión en gran grupo. Ejemplificamos esta primera tipología de respuesta: '*solución que incluye la definición completa de semejanza*' con la resolución de Mireia (véase la Fig. 26). En el trabajo por parejas, esta alumna representó una figura que duplicaba el perímetro de la construcción original y explicitó que "para cada cuadrado de la figura, hacemos dos en la figura duplicada" (véase la nota 1 de la Fig. 26). Aún así, la estudiante no comentó que las dos figuras poligonales eran semejantes. Más tarde, en la reflexión individual, Mireia completó su hoja de resolución y, entre otros aspectos, incluyó la definición de semejanza. En concreto, la alumna escribió que “son semejantes […] y significa que si dividimos sus lados [homólogos] nos da lo mismo, pero deben mantenerse los ángulos” (véase la nota 2 de la Fig. 26).



Notas
1. Para cada cuadrado de la figura, hacemos dos en la figura duplicada.
2. El doble de altura y de anchura no son semejantes y los otros sí, y significa que si dividimos sus lados nos da lo mismo, pero deben mantenerse los ángulos.

Figura 26. Resolución de Mireia a la primera tarea

Por otra parte, nueve de los dieciséis alumnos presentaron respuestas de la segunda tipología: ‘*solución que incluye una definición parcial de semejanza*’. A continuación, como ejemplo de esta tipología, mostramos la resolución de Anna. En el trabajo por parejas esta alumna representó dos figuras semejantes respecto a la original, duplicando y cuadriplicando todos los lados (véase la Fig. 27). Además, hizo constar en su protocolo escrito que “hemos hecho el doble de altura y de anchura y nos ha quedado una figura el doble de grande” (véase la nota 1 de la Fig. 27). Después, en la reflexión individual, la alumna representó otras figuras que duplicaban el área pero no eran semejantes, y en su protocolo escrito solo incluyó que “el área de la figura [de color azul] no es el doble, es 4 veces más grande” (véase la nota 2 de la Fig. 27).



Notas
1. Hemos hecho el doble de la altura y de la anchura y nos ha quedado una figura el doble de grande.
2. El área de la figura no es el doble, es 4 veces más grande.

Figura 27. Resolución de Anna a la primera tarea

Por lo tanto, interpretamos que Anna pudo darse cuenta de la semejanza entre las figuras obtenidas en la resolución por parejas, pero al no explicitar la necesidad de preservar los ángulos homólogos consideramos que su solución únicamente incluye una definición parcial del concepto de semejanza entre dos polígonos.

Por último, solo tres de los dieciséis alumnos presentaron en su protocolo escrito una '*solución sin cambios antes y después de la discusión en gran grupo, o sin referencias a la definición de semejanz*a'. Ejemplificamos esta tipología de respuesta con la resolución de Eduardo (véase la Fig. 28). En el trabajo por parejas, este alumno solo representó una nueva figura que duplicaba el perímetro del polígono original y no explicó cómo la había obtenido. Además, después de la discusión en gran grupo, Eduardo no relacionó la solución de la tarea con la definición de semejanza.

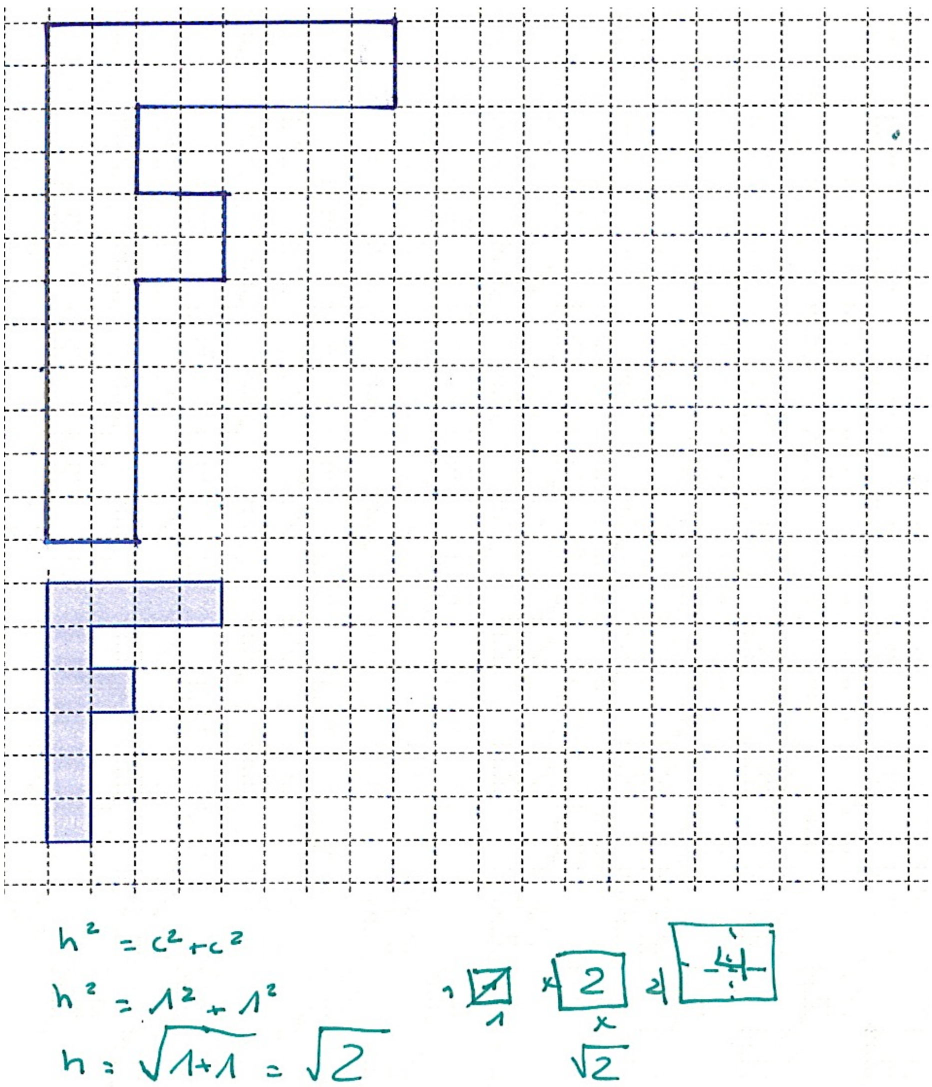
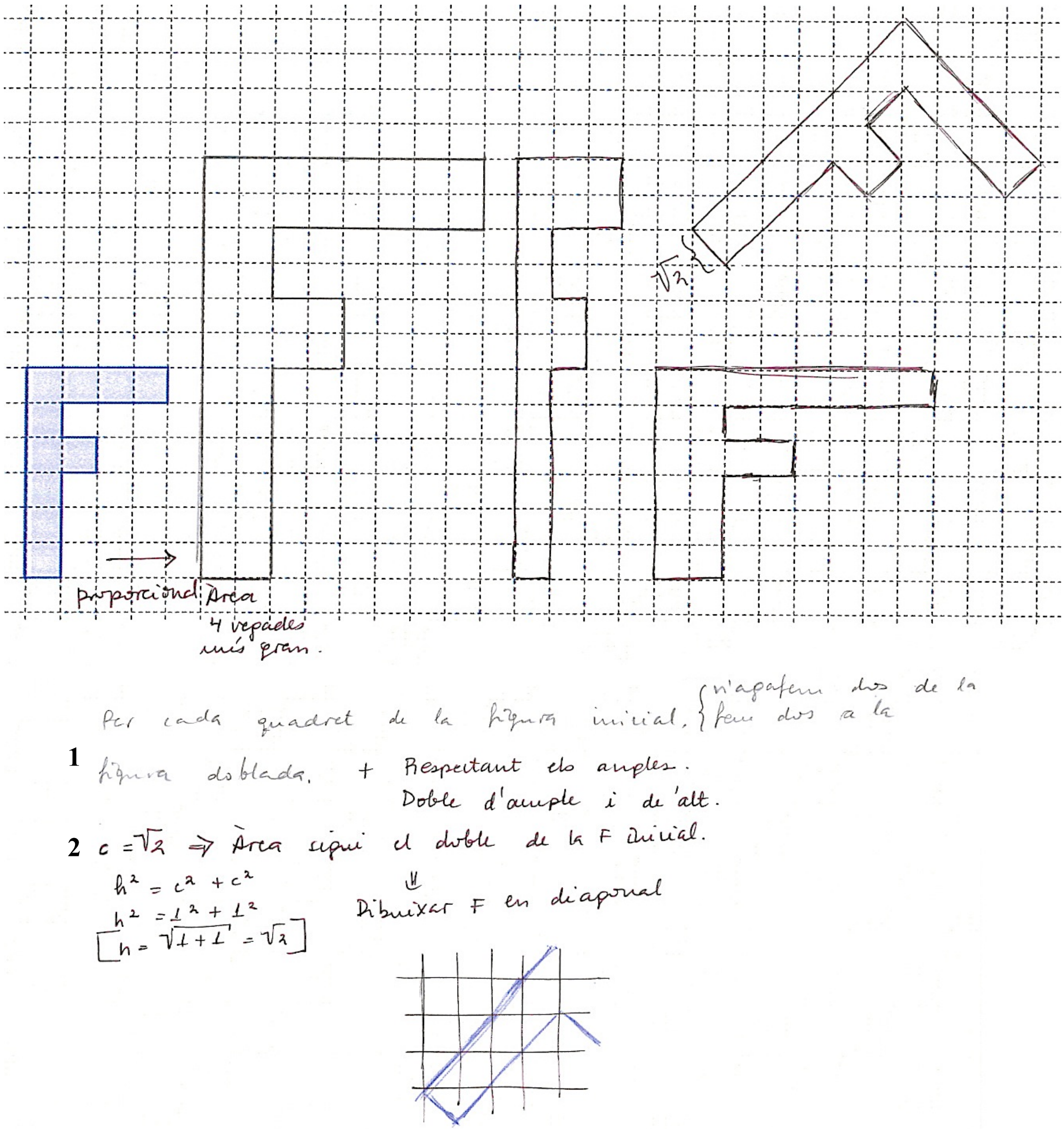


Figura 28. Resolución de Eduardo a la primera tarea

Con respecto a la segunda oportunidad de aprendizaje matemático, sobre la duplicación del área de una figura y la utilización de √2, analizamos si las respuestas de los dieciséis alumnos después de la discusión en gran grupo incluyen una solución que duplica el área del polígono original y mantiene la semejanza. Para ello estudiamos si el alumno es capaz de dibujar una nueva figura utilizando la cuadrícula, girándola 45º, y duplicando el área del polígono inicial; si explicita el término '√2' en su protocolo de resolución; y si identifica √2 correctamente en la nueva representación.

El análisis de las dieciséis resoluciones permite obtener tres tipologías de respuesta: '*representación sesgada que duplica el área, preserva la semejanza e identifica la √2*', es decir, el alumno utiliza la diagonal de cada cuadrado unitario de la cuadrícula, que mide √2, para dibujar un polígono semejante y con el doble de área; '*representación sesgada que no duplica el área o no identifica la √2*', es decir, el alumno utiliza las diagonales de la cuadrícula para representar una nueva figura, pero no duplica el área correctamente, o bien no identifica ni la √2 en el dibujo, ni su significado matemático; y '*solución sin cambios antes y después de la discusión en gran grupo, o sin referencias a la duplicación del área preservando la semejanza*', es decir, el alumno no completa la solución obtenida en el trabajo por parejas durante la reflexión individual, o bien no relaciona su solución con la duplicación del área preservando la semejanza con el polígono inicial. En el Anexo VII se encuentra la codificación completa de las respuestas de los dieciséis alumnos a la primera tarea, con relación a la duplicación del área y la utilización de √2.

En concreto, cinco de los dieciséis alumnos completaron el protocolo escrito obtenido después de la resolución por parejas incluyendo una representación sesgada de la figura, que duplicaba el área del polígono original, mantenía la semejanza con una razón de √2 e identificaba la √2 explícitamente en el documento de resolución. Ejemplificamos esta primera tipología de respuesta: '*representación sesgada que duplica el área, preserva la semejanza e identifica la √2*' con la resolución de Isabel (véase la Fig. 29). En el trabajo por parejas, esta alumna dibujó un polígono de modo que "por cada cuadrado de la figura inicial tomamos dos en la figura doblada" (véase la nota 1 de la Fig. 29). Así obtuvo una representación que duplicaba el perímetro, mantenía la semejanza, pero cuadruplicaba el área. Después de la discusión en gran grupo, Isabel completó su protocolo escrito de resolución y, entre otros aspectos, representó un nuevo polígono semejante al inicial con el doble de área. Además, explicitó que la diagonal de un cuadrado unitario de la cuadrícula mide √2 y aplicó el teorema de Pitágoras para calcularlo. Por último, la alumna indicó que para obtener un “área [que] sea el doble de la ‘F’ inicial [hay que] dibujar una ‘F’ en diagonal” (véase la nota 2 de la Fig. 29).

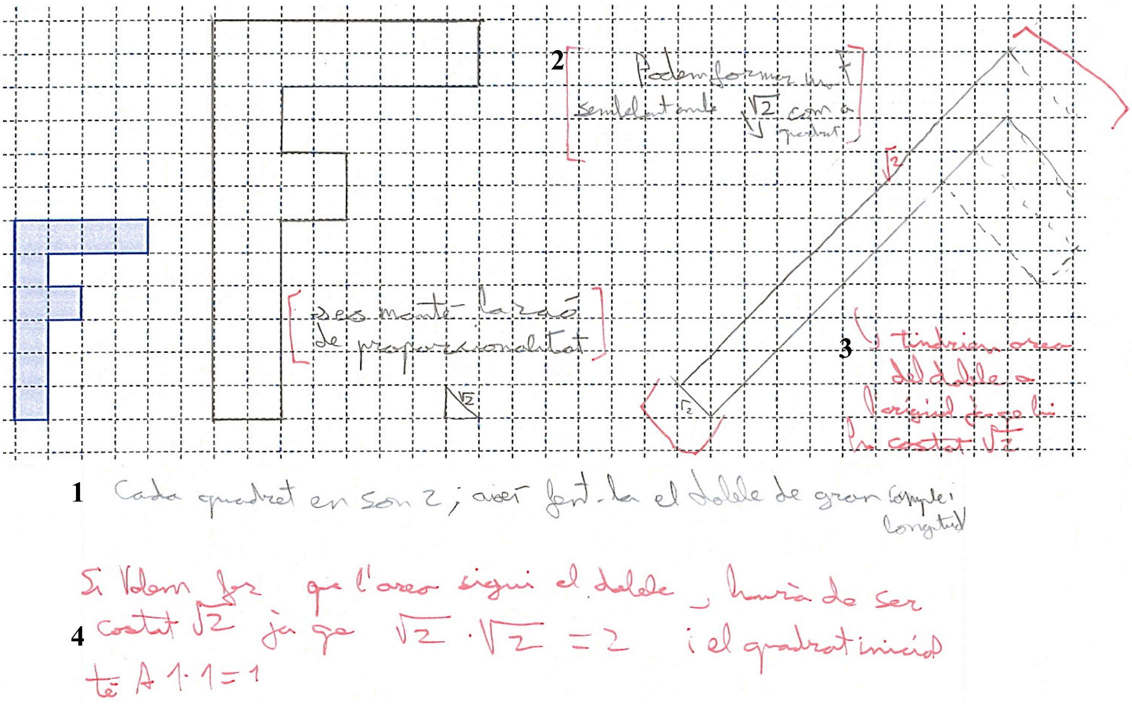


Notas

1. Por cada cuadrado de la figura inicial, tomamos dos en la figura doblada.
2. $c = \sqrt{2}$ → Área sea el doble de la ‘F’ inicial → Dibujar ‘F’ en diagonal.

Figura 29. Resolución de Isabel a la primera tarea

Por otra parte, siete de los dieciséis alumnos presentaron respuestas de la segunda tipología: ‘*representación sesgada que no duplica el área o no identifica la √2*’. Como ejemplos de esta tipología mostramos las resoluciones de dos alumnos: Martí y Alba. En el trabajo por parejas, Martí únicamente dibujó una figura que duplicaba el perímetro del polígono inicial y mencionó que “cada cuadrado son 2; así hacemos el doble de grande en anchura y longitud” (véase la nota 1 de la Fig. 30). No obstante, en la reflexión individual, este alumno completó la resolución de la tarea y dibujó una nueva figura sesgada. Aunque el dibujo está incompleto, el área del nuevo polígono inclinado presenta una superficie claramente mayor que el doble del área del polígono inicial.



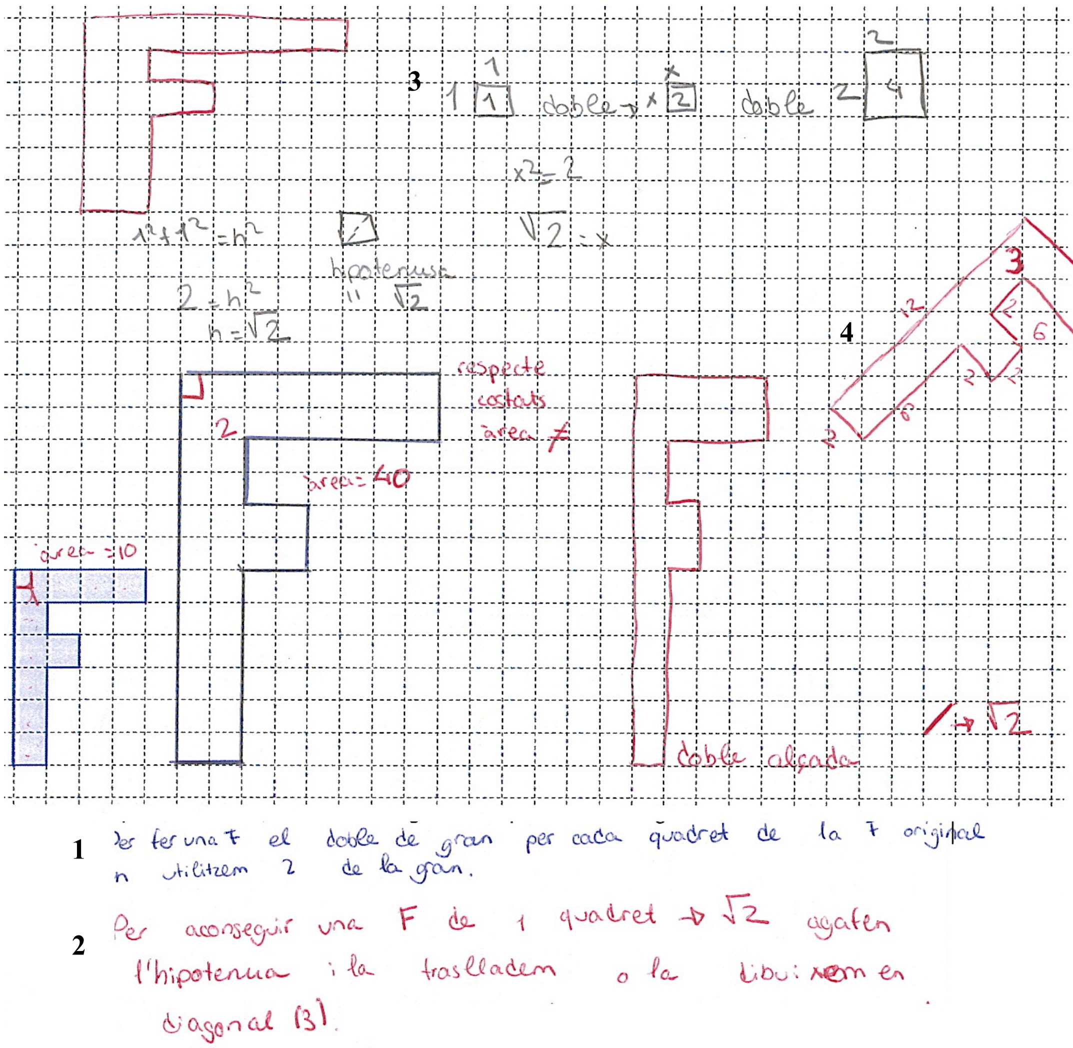
Notas

1. Cada cuadrado son 2; así hacemos el doble de grande en anchura y longitud.
2. Podemos formar una ‘F’ semejante con √2, como en la figura.
3. Tendría un área el doble que la original porque hay un lado [que mide] √2.
4. Si queremos hacer que el área sea el doble, tendrá que ser [con un] lado de √2 ya que $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ y el cuadrado inicial tiene área $1 \cdot 1 = 1$.

Figura 30. Resolución de Martí a la primera tarea

Las explicaciones del alumno en su protocolo escrito, mencionando que “podemos formar una ‘F’ semejante con √2, como en la figura” (véase la nota 2 de la Fig. 30) y que la nueva representación “tendría un área el doble que la original porque hay un lado [que mide] √2” (véase la nota 3 de la Fig. 30) permiten interpretar que Martí observó la necesidad de utilizar las diagonales de los cuadrados unitarios para duplicar el área preservando la semejanza, e identificó √2 correctamente. Además, el alumno destaca que "si queremos hacer que el área sea el doble, tendrá que ser [con un] lado de √2 ya que $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ y el cuadrado inicial tiene área $1 \cdot 1 = 1$" (véase la nota 4 de la Fig. 30); aún así Martí no fue capaz de dibujar un nuevo polígono con el doble de área.

En el trabajo por parejas, Alba también representó una figura con el doble de perímetro y comentó que "para hacer una 'F' el doble de grande, para cada cuadrado de la 'F' original hemos utilizado 2 de la grande" (véase la nota 1 de la Fig. 31).

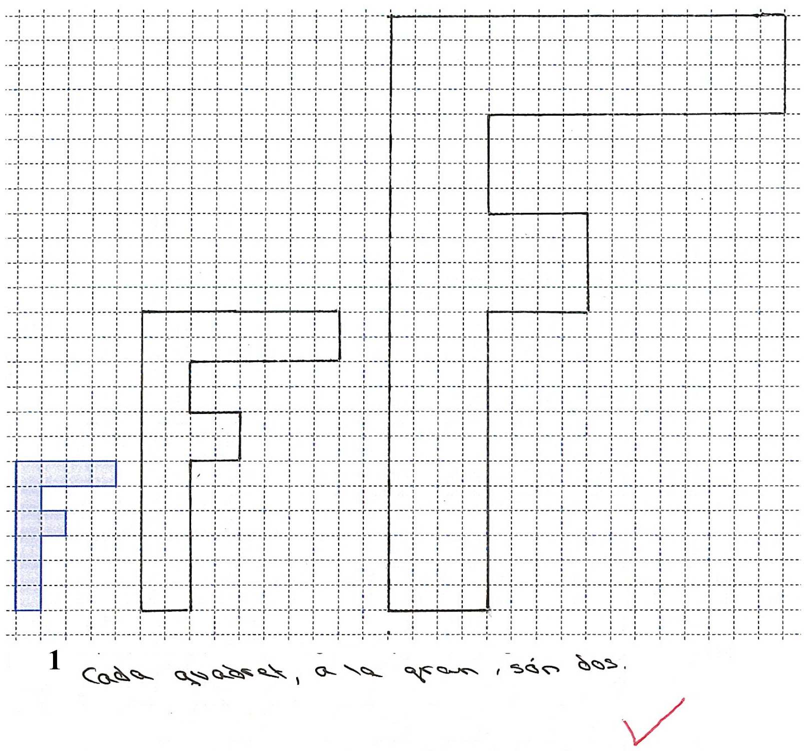


Notas
1. Para hacer una 'F' el doble de grande, para cada cuadrado de la 'F' original hemos utilizado 2 de la grande.
2. Para conseguir una 'F' de 1 cuadrado → √2; tomamos la hipotenusa y la trasladamos o la dibujamos en diagonal.
3. Cálculo de √2 para duplicar el área de un cuadrado.
4. Representación sesgada que duplica el área de la figura original.

Figura 31. Resolución de Alba a la primera tarea

Después de la discusión en gran grupo, Alba explicitó el término '√2' en su protocolo escrito, el cual obtuvo aplicando el teorema de Pitágoras, y comentó que "para conseguir una F de 1 cuadrado → √2; tomamos la hipotenusa y la trasladamos o la dibujamos en diagonal" (véase la nota 2 de la Fig. 31). De todas formas, interpretamos que esta alumna no identificó el significado matemático de √2 correctamente, ya que en su protocolo escrito intentó dibujar un cuadrado cuyos lados midiesen √2, pero la representación es demasiado pequeña y el área del nuevo cuadrado mide menos de $1u^2$ (véase la nota 3 de la Fig. 31). Además, Alba representó una figura sesgada que duplica el área y preserva la semejanza con el polígono original. Aún así, no identificó las longitudes de los lados del polígono correctamente, ya que deberían medir un múltiplo de √2 y no un número entero (véase la nota 4 de la Fig. 31).

Finalmente, cuatro de los dieciséis alumnos presentaron en un protocolo escrito una '*solución sin cambios antes y después de la discusión en gran grupo, o sin referencias a la duplicación del área preservando la semejanza*'. Ejemplificamos esta tipología de respuesta con la resolución de Adrià (véase la Fig. 32).



Nota

1. Cada lado en la [figura] grande son dos.

Figura 32. Resolución de Adrià a la primera tarea

En el trabajo por parejas, este alumno únicamente representó dos figuras semejantes, duplicando y cuadriplicando todos los lados. Además, en su protocolo escrito hizo constar que “cada lado en la [figura] grande son dos” (véase la nota 1 de la Fig. 32), refiriéndose a la duplicación y cuadruplicación del perímetro. En la reflexión individual, Adrià no detalló ningún procedimiento para duplicar el área del polígono original y no representó ninguna figura sesgada. El alumno consideró que la solución obtenida en el trabajo por parejas era correcta, sin hacer referencias a la duplicación del área, y no incluyó ningún elemento nuevo en su protocolo escrito de resolución.

4.2.3. *Análisis de la segunda tarea*

Analizamos la discusión en gran grupo de la segunda tarea, *Cambiar las medidas de los polígonos*, de la profesora Sara para estudiar modos de actuación docente y modos de interacción entre los participantes de la discusión en gran grupo. Además, ejemplificamos oportunidades de aprendizaje matemático y, por último, analizamos el aprovechamiento que obtienen los alumnos de ciertas oportunidades de aprendizaje asociadas a la segunda tarea.

Análisis de los modos de actuación en la segunda tarea

Para mostrar el análisis de los modos de actuación hemos seleccionado fragmentos de dos episodios de la discusión en gran grupo, los cuales se detallan en el sexto y séptimo extracto. En el Anexo VIII se especifica la transcripción completa de la discusión en gran grupo de la segunda tarea de Sara, así como la caracterización de todos los episodios.

El sexto extracto muestra un fragmento del segundo episodio de la discusión en gran grupo ($^2e_2$: «experimentar el instrumento», «presentación de una solución»). En este episodio dos alumnos, Javier y Eduardo, explican la solución que obtuvieron en el trabajo por parejas, la cual consistía en duplicar el triángulo del enunciado de la segunda tarea manteniendo la semejanza. Además, la profesora utilizó las indicaciones de estos alumnos para representar, primero en la pizarra y más tarde en el GeoGebra, la duplicación de dicho triángulo. Por este motivo, el tipo de orquestación instrumental que asignamos a este episodio es «experimentar el instrumento». Como la profesora invita a un alumno, Javier, a que exponga la solución de la tarea, obtenida colaborativamente con Eduardo, el estadio de la discusión es «presentación de una solución».

Sexto extracto. Fragmento del segundo episodio de la discusión en grupo de la segunda tarea: utilización de artefactos para construir un triángulo semejante y el doble de grande.

49. Sara:	Venga hagamos el apartado (a). Tú, Javier, ¿cómo lo has hecho? [*Invitación a la participación para empezar la resolución de la segunda tarea*]
50. Javier:	Nosotros hicimos que, como la base [del triángulo pequeño] era 2 [cuadrados], la ampliamos el doble y mantuvimos los ángulos. Entonces, si alargamos el doble de todos los lados, en el punto donde se cortan se forma el nuevo triángulo. [*Exposición de evidencia empírica para construir un triángulo el doble de grande manteniendo la semejanza con el original*]
51. Sara:	De acuerdo. Por lo tanto, tú tenías un triángulo así [la profesora dibuja el triángulo 1 en la pizarra], y entonces lo hiciste el doble de grande, ¿verdad? [*Validación de la exposición de un alumno sobre la construcción de un triángulo el doble de grande*]
52. Javier:	Sí, exacto. [*Asentimiento*]
53. Sara:	Claro, pero ¿dónde lo pintaste? ¿Dónde lo construiste? ¿Aquí al lado [haciendo referencia al lugar que ocupa el triángulo 2 del enunciado] o encima del primer triángulo? [*Petición de explicación para concretar la posición en el plano del nuevo triángulo construido*]
54. Eduardo:	Lo representamos al lado. [*Exposición sin argumentación sobre la posición en el plano del nuevo triángulo*]
55. Sara:	Sí, de acuerdo, pero entonces yo ¿qué órdenes tengo que dar al GeoGebra, por ejemplo, para que este triángulo [triángulo 1] me lo transforme en este [triángulo 2] que está pintado al lado? ¿Qué le digo yo? [*Petición de explicación acerca de cómo realizar una transformación geométrica utilizando GeoGebra*]

56. Eduardo: Podemos decirle que duplique los lados.
[*Exposición sin argumentación sobre la duplicación de los lados de un triángulo utilizando GeoGebra*]

57. Sara: De acuerdo, que duplique los lados y mantenga los ángulos. Por lo tanto, le hacemos una ampliación de razón 2, ¿de acuerdo?
[*Formalización sobre la construcción de un triángulo semejante cuya razón de semejanza sea 2*]

58. Eduardo: Y nos lo situará encima a partir de un vértice, ¿verdad?
[*Petición de aclaración sobre la posición en el plano del nuevo triángulo semejante*]

59. Sara: Encima, ¿me lo pondrá aquí encima? [La profesora dibuja en la pizarra los dos triángulos que tienen la base encima del mismo lado, de forma que el pequeño tiene la base justo al centro de la base del triángulo grande] ¿Estás seguro? ¿Cómo podemos saberlo? ¡Pensad un momento! El problema está en que tenemos que escribir a GeoGebra toda esta información y aún no sabemos cómo decírselo.
[*Invitación a la reflexión acerca de cómo ordenar al GeoGebra la situación en el plano del nuevo triángulo*]

El séptimo extracto ilustra un fragmento del tercer episodio de la discusión en gran grupo ($^2e_3$: «descubrir a través del artefacto», «estudio de estrategias para resolver o argumentar»). En este episodio la profesora, Sara, se apoya en el GeoGebra para que los alumnos descubran la necesidad de combinar una ampliación y una translación para resolver la tarea por completo. Así, el tipo de orquestación instrumental que asignamos a este episodio es «descubrir a través del artefacto». Al examinar la estrategia a seguir con el programa de geometría dinámica para construir esta transformación, el estadio de la discusión es «estudio de estrategias para resolver o argumentar».

Séptimo extracto. Fragmento del tercer episodio de la discusión en gran grupo de la segunda tarea: utilización de GeoGebra para aplicar una homotecia a un triángulo.

---

60. Sara: De acuerdo, miremos un momento qué nos piden. ¿Alguien el otro día cuando resolvíais problemas de simetrías, giros y translaciones descubrió alguna herramienta que pensáis que podría construir un triángulo

el doble de grande? Porque claro, vosotros me habéis dicho: “claro, puedes decirle que me construya todos los lados y me mantenga todos los ángulos”, y ¿esto dónde lo escribo yo en el GeoGebra? […]

[*Invitación a la reflexión sobre la construcción de un triángulo el doble de grande utilizando GeoGebra*]

61. Alba: ¡Un vector!

[*Exposición sin argumentación sobre la utilización de una herramienta de GeoGebra (vector)*]

62. Berta: Homotecia desde un punto por un factor de escala.

[*Exposición sin argumentación sobre la utilización de una herramienta de GeoGebra (homotecia)*]

63. Sara: Sí, de acuerdo, la herramienta para representar homotecias. Ahora bien, ¿cuál es el factor de escala si queremos pasar de aquí [triángulo 1] a aquí [triángulo 2]?

[*Validación sobre la utilización de la herramienta ‘homotecia’ de GeoGebra y petición de comprobación para determinar la razón de semejanza entre los dos triángulos*]

64. Grupo: ¡Dos!

[*Exposición de evidencia empírica sobre cuál es el valor de la razón de semejanza*]

65. Sara: ¿Pero respecto de qué punto le digo [a GeoGebra] que me haga la construcción?

[*Petición de formalización sobre la utilización de GeoGebra para aplicar una homotecia*]

66. Alba: Respecto de algún vértice. Por ejemplo, el vértice del extremo de la izquierda.

[*Formalización sobre la construcción de una homotecia con GeoGebra*]

67. Sara: ¿Quieres decir este vértice de aquí [la profesora señala en la pantalla el vértice situado más a la izquierda del triángulo 1]?

[*Petición de comprobación sobre el vértice que se debe utilizar para aplicar la homotecia*]

68. Alba: Sí, exacto, este punto. […]
[*Comprobación acerca del vértice utilizado*]

69. Sara: De acuerdo. Mirad donde me lo ha puesto. Me lo ha hecho igual de grande que el azul [triángulo 2]. ¿Este era el que queríais? Y ahora con un vector lo podéis trasladar para que quede encima del azul. ¿Qué vector?
[*Invitación a la reflexión sobre la utilización de un vector para trasladar un triángulo en el plano*]

70. Javier: Un vector desde un vértice hasta su vértice homólogo.
[*Establecimiento de conjetura sobre la utilización de un vector para trasladar un triángulo*]

71. Sara: De acuerdo, me hago un vector, por ejemplo, desde este vértice [el superior del primer triángulo] hasta su homólogo y ahora le digo: "ahora traslada este [vértice del triángulo 1] mediante este vector" y realmente va encima. Por lo tanto, habéis necesitado hacer dos transformaciones. Primero habéis tenido que hacer la ampliación y después una translación.
[*Validación sobre la utilización de un vector para trasladar un triángulo en el plano y complemento de la explicación de un alumno para caracterizar una homotecia*]

La caracterización completa en episodios de la discusión en gran grupo de la segunda tarea se ilustra en la Tabla 12, la cual muestra que la profesora, Sara, inició la sesión de clase recordando el enunciado de la actividad matemática (${}^{2}e_{1}$: «explicar a través del artefacto», «situación del problema»). A continuación, Sara invitó a dos alumnos, Javier y Eduardo, a participar y exponer la solución que habían obtenido durante el trabajo por parejas, la cual se basaba en la duplicación de un triángulo manteniendo la semejanza con el polígono original (${}^{2}e_{2}$: «experimentar el instrumento», «presentación de una solución»). Más tarde, la profesora sugirió la utilización de GeoGebra para que los alumnos descubriesen la importancia de combinar una ampliación y una traslación con el fin de encontrar estrategias que resolviesen por completo esta actividad matemática (${}^{2}e_{3}$: «descubrir a través del artefacto», «estudio de estrategias para resolver o argumentar»). Por último, profesora y alumnos enlazaron la información que proporcionaban tanto la pizarra ordinaria como el GeoGebra y, así, estudiaron estrategias que permitían determinar los elementos característicos de la homotecia como una transformación geométrica, es decir, la razón de semejanza y el centro de homotecia (${}^{2}e_4$: «enlazar artefactos», «estudio de estrategias para resolver o argumentar»).

Tabla 12. Análisis de los episodios de la discusión en gran grupo de la segunda tarea de la profesora Sara

Tipo de orquestación / **Estadio de la discusión**	Situación del problema	Presentación de una solución	Estudio de estrategias para resolver o argumentar	Estudio de casos particulares o extremos	Contraste entre soluciones	Conexiones con otras situaciones	Generalización y conceptualización	Reflexión sobre progreso matemático
Explorar el artefacto								
Explicar a través del artefacto	${}^{2}e_1$							
Enlazar artefactos			${}^{2}e_4$					
Discutir el artefacto								
Descubrir a través del artefacto			${}^{2}e_3$					
Experimentar el instrumento		${}^{2}e_2$						

La interpretación de la distribución de episodios en la Tabla 12 determina un modo de actuación de la profesora Sara, en la segunda tarea, con equilibrio instrumental, ya que dos de los cuatro episodios corresponden a los tres primeros tipos de orquestación («explorar el artefacto», «explicar a través del artefacto» y «enlazar artefactos») y los dos restantes corresponden a los tres últimos («discutir el artefacto», «descubrir a través del artefacto» y «experimentar el instrumento»). A nivel discursivo la distribución de episodios según los estadios de la discusión queda concentrada en los tres primeros estadios («situación del problema», «presentación de una solución» y «estudio de estrategias para resolver o argumentar»). Por este motivo, en el análisis de la discusión en gran grupo de la segunda tarea no se produce completitud discursiva. Interpretamos que esto es debido a que el enunciado de la segunda tarea corresponde al primer apartado de una actividad matemática más extensa sobre la introducción de la transformación de homotecia, tal y como se explica en el subapartado 3.1.1. Debido a la larga extensión de esta actividad matemática, en el presente trabajo únicamente analizamos su primer apartado. Por este motivo, los demás estadios de la discusión, que corresponden a momentos más avanzados de la discusión en gran grupo de una tarea matemática («conexiones con otras situaciones», «generalización y conceptualización» y «reflexión sobre progreso matemático») no aparecen en la Tabla 12. Posiblemente, estos estadios deberían surgir en los dos apartados no analizados de la actividad matemática completa.

Análisis de los modos de interacción en la segunda tarea

Analizamos los modos de interacción entre los participantes de la discusión en gran grupo de la segunda tarea estudiando las acciones que se producen en los episodios de la discusión. Ilustramos este análisis con los extractos seleccionados anteriormente e introducimos un nuevo extracto, el octavo, en los párrafos siguientes. En el Anexo VIII se puede consultar un análisis completo de las acciones que se han producido en todos los episodios de la discusión en gran grupo de esta segunda tarea.

El sexto extracto, que corresponde a un fragmento del segundo episodio de la discusión en gran grupo, trata sobre la utilización de la pizarra y el GeoGebra para construir un triángulo el doble de grande manteniendo la semejanza con el triángulo original. Este extracto se inicia con una invitación a la participación que realiza la profesora, Sara, para que un alumno, Javier, comience la resolución de la segunda tarea (línea 49). Javier expone una evidencia empírica con el fin de construir un triángulo el doble de grande manteniendo la semejanza con el triángulo original, y afirma que "la ampliamos el doble y mantuvimos los ángulos. Entonces, si alargamos el doble de todos los lados, en el punto donde se cortan se forma el nuevo triángulo" (línea 50). Sara valida la afirmación de Javier (línea 51) y el alumno asiente (línea 52). A continuación, la profesora realiza una petición de explicación al grupo para concretar la posición en el plano del nuevo triángulo construido (línea 53). Eduardo, que es el compañero de Javier en el trabajo por parejas, expone sin argumentar que "lo representamos al lado" (línea 54). Sin embargo la profesora le pide una explicación más concreta acerca de cómo realizar la transformación geométrica utilizando GeoGebra (línea 55). De nuevo, Eduardo expone sin argumentar que se le puede ordenar a GeoGebra que "duplique los lados" (línea 56) y Sara formaliza la afirmación del alumno comentando "que duplique los lados y mantenga los ángulos. Por lo tanto, le hacemos una ampliación de razón 2” (línea 57). Por último, Eduardo pide una aclaración sobre la posición en el plano del nuevo triángulo semejante, preguntando si “nos los situará encima a partir de un vértice, ¿verdad?” (línea 58). Inmediatamente, la profesora invita a la reflexión acerca de cómo ordenar al GeoGebra la situación en el plano del nuevo triángulo (línea 59).

La distribución de las acciones en el sexto extracto se muestra en la Figura 33. Tal y como también hemos observado en el análisis de la primera tarea, en este diagrama se observa una sucesión encadenada de acciones entre las intervenciones de la profesora Sara, mayoritariamente en forma de preguntas, y las respuestas de sus alumnos a lo largo de este episodio de la discusión en gran grupo.

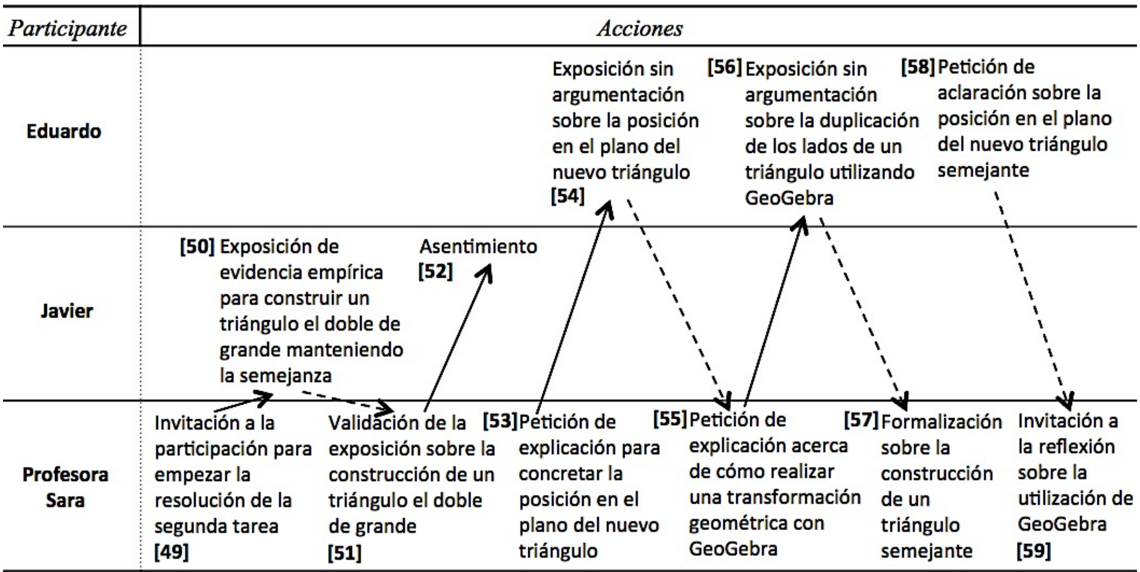


Figura 33. Diagrama de sucesión de acciones del sexto extracto

El séptimo extracto corresponde a un fragmento del tercer episodio de la discusión en gran grupo y trata sobre la utilización de GeoGebra para aplicar una homotecia a un triángulo. Este extracto se inicia con una invitación a la reflexión, que realiza la profesora Sara, sobre la construcción de un triángulo el doble de grande utilizando GeoGebra (línea 60). Una alumna, Alba, expone sin argumentar la posibilidad de utilizar un vector con GeoGebra (línea 61). Al mismo tiempo, otra alumna, Berta, también expone sin argumentar la posibilidad de utilizar una “homotecia desde un punto por un factor de escala” (línea 62). La profesora valida la afirmación sobre la utilización de la herramienta ‘homotecia’ de GeoGebra, y pregunta “¿cuál es el factor de escala para pasar de aquí [triángulo 1] a aquí [triángulo 2]?”, es decir, realiza una petición de comprobación para determinar la razón de semejanza entre los dos triángulos (línea 63). A continuación un grupo de alumnos hacen una exposición de evidencia empírica sobre el valor de la razón de semejanza (línea 64) y Sara pregunta "¿respecto de qué punto le digo [a GeoGebra] que me haga la construcción?", es decir, pide una formalización sobre la utilización de GeoGebra para aplicar una homotecia (línea 65). Alba responde a la pregunta de la profesora afirmando que se puede realizar la homotecia "respecto de algún vértice; por ejemplo, el vértice del extremo de la izquierda [del triángulo]", es decir, formaliza el proceso de construcción de una homotecia con el software de geometría dinámica (línea 66). Luego la profesora realiza una petición de comprobación sobre cuál es el vértice que se debe utilizar para aplicar la homotecia (línea 67) y Alba hace una comprobación acerca del vértice utilizado (línea 68).

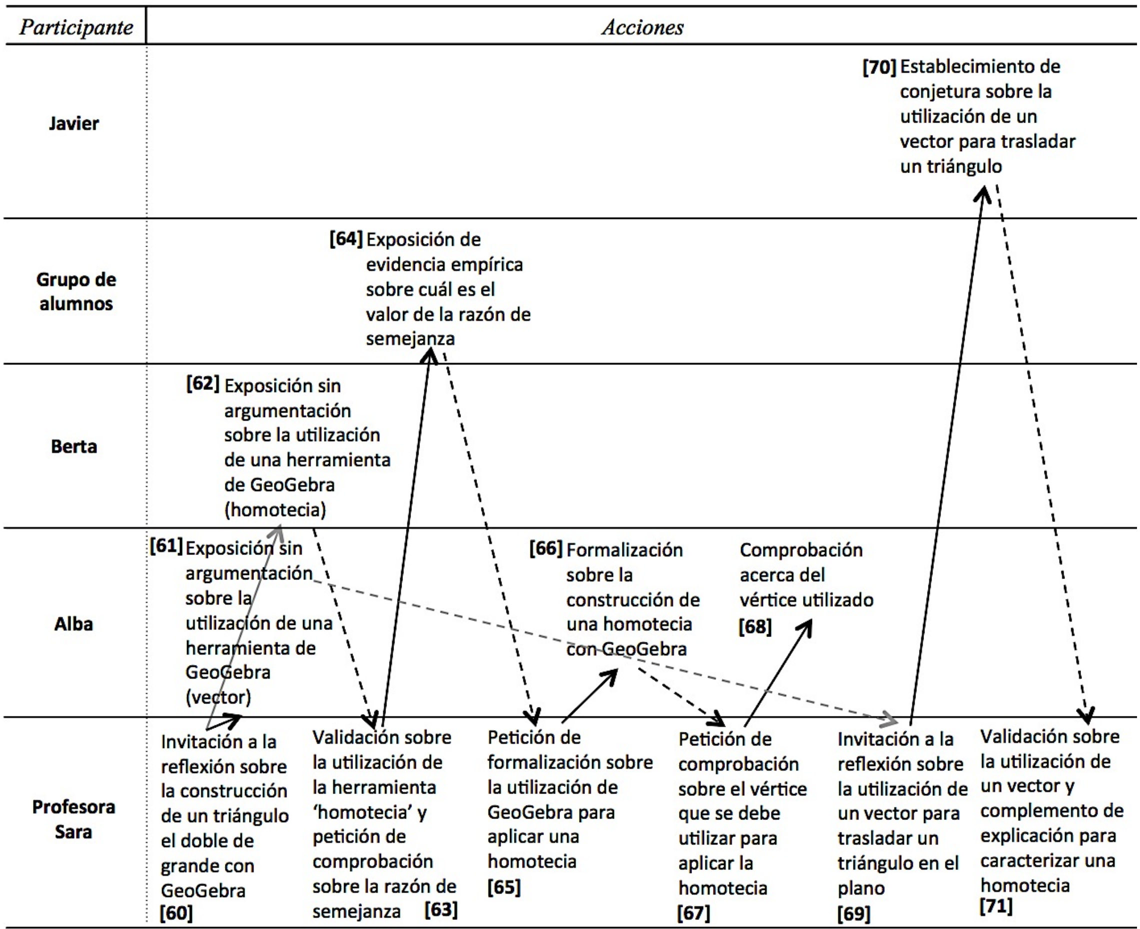


Figura 34. Diagrama de sucesión de acciones del séptimo extracto

Más tarde, la profesora utiliza una exposición sin argumentación previa de Alba (línea 61) para invitar a la reflexión del grupo acerca de la utilización de un vector con el fin de trasladar un triángulo en el plano (línea 69). Un alumno, Javier, afirma que se debe utilizar "un vector desde un vértice hasta su vértice homólogo", es decir, establece una conjetura sobre la utilización de un vector (línea 70). Finalmente, la profesora valida y completa la afirmación de Javier, y explica que se han tenido que hacer "dos transformaciones, primero […] la ampliación y después una translación" (línea 71).

La distribución de las acciones del séptimo extracto se muestra en la Figura 34. En este diagrama se observa, nuevamente, una sucesión encadenada de acciones entre las intervenciones de la profesora, mayoritariamente en forma de preguntas, y las respuestas de sus alumnos.

A continuación introducimos el octavo extracto, cuya transcripción ilustra un fragmento del cuarto episodio de la discusión en gran grupo de la segunda tarea (${}^{2}e_{4}$: «enlazar artefactos», «estudio de estrategias para resolver o argumentar»). Recordemos que en este episodio la profesora y los alumnos enlazaron la información que proporcionaban la pizarra y el GeoGebra con el fin de estudiar estrategias que permitieran caracterizar la homotecia como una transformación geométrica y discutir la posición del centro.

Octavo extracto. Fragmento del cuarto episodio de la discusión en gran grupo de la segunda tarea: identificación del centro de homotecia.

---

72. Sara: […] A ver… Pues, Alba, sal tú.
[*Invitación a la participación de una alumna para que haga una construcción geométrica con GeoGebra*]

73. Alba: De acuerdo. [Alba hace la construcción con GeoGebra. Al mismo tiempo, la profesora explica cada paso que la alumna va haciendo.]
[*Asentimiento*]

74. Sara: Mirad qué ha pasado. Fijaos qué ha pasado cuando Alba le ha dicho que quiere una homotecia de este triángulo rojo respecto de este punto [la profesora se refiere al vértice del extremo de la izquierda del triángulo 2]. Mirad qué ha hecho el GeoGebra [indica sobre la pantalla la transformación del GeoGebra] y lo ha llevado aquí [al lado izquierdo del primer triángulo]. ¿De acuerdo? Nosotros no queríamos esto, nosotros queríamos que este [triángulo 1] quedase aquí encima [triángulo 2], ¿verdad?

[*Invitación a la reflexión acerca de cómo aplicar una homotecia a un triángulo utilizando GeoGebra*]

75. Alba: Pues lo ponemos al otro lado.
[*Exposición sin argumentación sobre la posición del centro de homotecia*]

76. Sara: ¿Lo ponemos a dónde, Alba?
[*Petición de explicación sobre la posición del centro de homotecia*]

77. Alba: Al otro lado.
[*Exposición sin argumentación sobre la posición del centro de homotecia*]

78. Sara: ¿Por aquí? ¿A un punto de por aquí?
[*Petición de comprobación sobre la posición del centro de homotecia*]

79. Grupo: ¡A otro!
[*Exposición sin argumentación sobre la posición del centro de homotecia*]

80. Sara: A ver borro todo esto que lo tenemos que saber hacer sin este, ¿eh? ¿Le hago una homotecia de este triángulo respecto a qué punto?
[*Petición de formalización sobre la posición final del centro de homotecia*]

81. Grupo: [Indicando que hay que ir hacia la izquierda.] Tres hacia allá.
[*Exposición de evidencia empírica sobre la posición del centro de homotecia en la cuadrícula*]

82. Sara: ¿Tres hacia allá?
[*Petición de comprobación sobre la posición del centro de homotecia en la cuadrícula*]

83. Grupo: [Cuando la profesora señala la posición con el cursor.] Sí, aquí.
[*Asentimiento*]

84. Sara: Y 2 más… Mirad, analizad qué ha pasado. ¿Por qué me habéis dicho tres? ¿Ahora este punto dónde lo ha enviado?
[*Invitación a la reflexión sobre la posición final del centro de homotecia en la cuadrícula*]

85. Adrià: Ah… Eran 5, ¿no?

[*Exposición de evidencia empírica sobre la posición final del centro de homotecia en la cuadrícula*]

86. Sara: ¿Seis, no? O sea este punto que ahora estaba a tres ha acabado estando a seis respecto de este, del que vosotros habéis dicho que era vuestro centro. ¿Vosotros este punto a dónde queríais que fuese a parar? A uno, dos, tres, cuatro y cinco de aquí. Por lo tanto, ¿aquí? Querría un punto, que es el centro, que si le hago una ampliación me transforme la figura directamente. […]

[*Recapitulación sobre la posición final del centro de homotecia y su significado matemático*]

El octavo extracto se inicia con una invitación a la participación por parte de la profesora, Sara, para que una alumna, Alba, haga una homotecia de un triángulo utilizando GeoGebra (línea 72). La alumna asiente y realiza la construcción, y la profesora va explicando cada paso (línea 73).

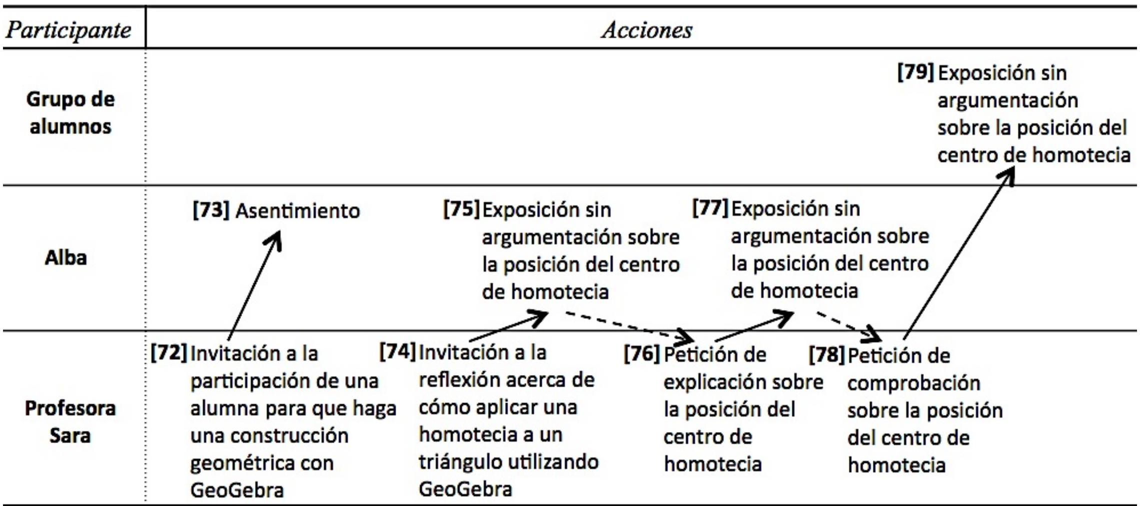


Figura 35. Primera parte del diagrama de sucesión de acciones del octavo extracto

A continuación, Sara invita a la reflexión acerca de cómo determinar la posición del centro de homotecia (línea 74) y Alba expone sin argumentar que “ponemos [el centro] al otro lado” (línea 75). No obstante, la profesora pide una mayor concreción sobre la posición del centro de homotecia (línea 76) y Alba realiza una nueva exposición sin argumentación (línea 77). Por este motivo, Sara hace una petición de comprobación sobre la posición del centro en la pantalla (línea 78) y un grupo de alumnos realiza una exposición sin argumentación sobre esta cuestión (línea 79).

Debido a la falta de consenso en el grupo, la profesora decide realizar una nueva petición de formalización sobre la posición final del centro de homotecia (línea 80) y un grupo de alumnos expone una evidencia empírica para situarlo en la pantalla (línea 81). Sara se da cuenta de que la situación del centro propuesta por los alumnos es incorrecta y pide que lo comprueben nuevamente (línea 82), aunque los alumnos no cambian la posición del centro (línea 83).

Por este motivo, la profesora es quien invita a la reflexión del grupo para situarlo correctamente encima de la cuadrícula (línea 84). Un alumno, Adrià, reconoce el error y expone una evidencia empírica sobre la posición final de este centro de homotecia (línea 85). Por último, la profesora hace una recapitulación con el propósito de dar significado matemático al centro, afirmando que "querría un punto, que es el centro, que si le hago una ampliación me transforme la figura directamente" (línea 86).

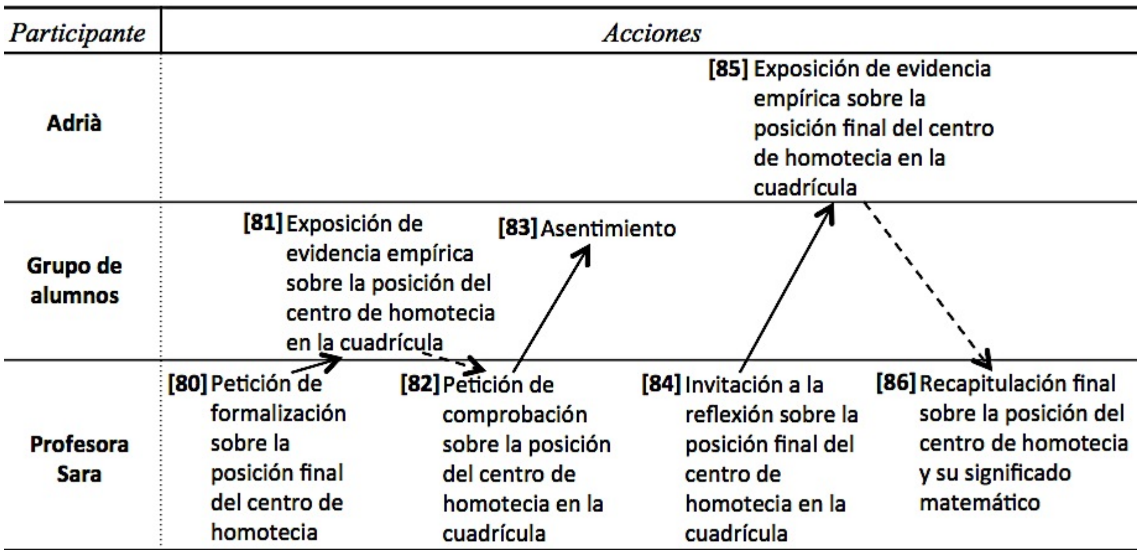


Figura 36. Segunda parte del diagrama de sucesión de acciones del octavo extracto

La distribución de las acciones del octavo extracto se muestra en las Figuras 35 y 36. Una vez más, en estos diagramas se observan sucesiones encadenadas de acciones entre las intervenciones de la profesora, en muchas ocasiones en forma de preguntas, y las respuestas de sus alumnos a lo largo de la discusión en gran grupo.

Ejemplificación de oportunidades de aprendizaje matemático en la segunda tarea

En los próximos párrafos introducimos algunas oportunidades de aprendizaje matemático que hemos detectado en el análisis de los extractos anteriores. Para ello relacionamos los aspectos del conocimiento matemático asociados a la oportunidad con las acciones que se han producido en los procesos de interacción propios del aula de matemáticas. Aún así, solo ejemplificamos una pequeña parte de las oportunidades de aprendizaje que se han generado en todos los episodios de la discusión en gran grupo de la segunda tarea gestionada por la profesora Sara.

En el sexto extracto, que hace referencia al segundo episodio de la discusión en gran grupo, observamos que la exposición de evidencia empírica que hace un alumno, Javier, con el fin de construir un triángulo el doble de grande manteniendo la semejanza con el original (línea 50); así como la validación posterior que realiza la profesora, Sara, (línea 51) generan una oportunidad de aprendizaje procedimental que caracterizamos por ‘Aprender cómo duplicar un triángulo manteniendo la semejanza con el triángulo original’. Además, las intervenciones de la profesora formulando peticiones de explicación para que los alumnos concreten la posición en el plano de un triángulo (línea 53) y para que construyan una homotecia con GeoGebra (línea 55); así como la invitación a la reflexión que realiza Sara al final del extracto (línea 59) propician la creación de una oportunidad de aprendizaje argumentativa que caracterizamos matemáticamente por ‘Darse cuenta de la importancia de facilitar correctamente las órdenes al GeoGebra para duplicar un triángulo y trasladarlo en el plano’. En concreto, observamos que en este caso las acciones de la profesora son las que generan la oportunidad de aprendizaje a los alumnos de la clase. La Tabla 13 resume la caracterización de las oportunidades de aprendizaje del sexto extracto.

Tabla 13. Caracterización de las oportunidades de aprendizaje del sexto extracto

Aspectos matemáticos	*Acciones*
Procedimental	
Aprender cómo duplicar un triángulo manteniendo la semejanza con el triángulo original.	Exposición de evidencia empírica para construir un triángulo el doble de grande *(Línea 50)*. Validación de la exposición de un alumno sobre la construcción de un triángulo el doble de grande *(Línea 51)*.

Argumentativa	
Darse cuenta de la importancia de facilitar correctamente las órdenes al GeoGebra para duplicar un triángulo y trasladarlo en el plano.	Petición de explicación para concretar la posición en el plano de un triángulo *(Línea 53).* Petición de explicación acerca de cómo realizar una transformación geométrica utilizando GeoGebra *(Línea 55).* Invitación a la reflexión acerca de cómo ordenar al GeoGebra la situación en el plano de un nuevo triángulo *(Línea 59)*.

En el séptimo extracto, que corresponde al tercer episodio de la discusión en gran grupo de la segunda tarea, observamos que la petición de comprobación que realiza la profesora, con el fin de que los alumnos determinen la razón de semejanza entre dos triángulos (línea 63), origina una oportunidad de aprendizaje conceptual que caracterizamos matemáticamente por ‘Reconocer la existencia de transformaciones geométricas que combinan una ampliación y una translación’ (véase la Tabla 14). Además, la exposición de evidencia empírica sobre el valor de la razón de semejanza que realiza un grupo de alumnos (línea 64); el establecimiento de conjetura que hace Javier, sobre la utilización de un vector para trasladar un triángulo en el plano (línea 70); y la validación final de la profesora destacando la necesidad de utilizar dos transformaciones, primero una ampliación y después una translación (línea 71), completan la caracterización de esta oportunidad de aprendizaje matemático conceptual.

Tabla 14. Caracterización de las oportunidades de aprendizaje del séptimo extracto

Aspectos matemáticos	*Acciones*
Conceptual	
Reconocer la existencia de transformaciones geométricas que combinan una ampliación y una translación.	Petición de comprobación para determinar la razón de semejanza *(Línea 63).* Exposición de evidencia empírica sobre el valor de la razón de semejanza *(Línea 64).* Establecimiento de conjetura sobre la utilización de un vector *(Línea 70)*. Complemento de la explicación para caracterizar una homotecia *(Línea 71)*.
Procedimental	
Utilizar una herramienta de GeoGebra para duplicar un triángulo y trasladarlo en el plano.	Invitación a la reflexión sobre la duplicación de un triángulo utilizando GeoGebra *(Línea 60).* Exposición sin argumentación sobre la utilización de la herramienta ‘homotecia’ del GeoGebra *(Línea 62).*

Por otra parte, la invitación a la reflexión que realiza la profesora, sobre la construcción de un triángulo el doble de grande utilizando GeoGebra (línea 60), y la exposición sin argumentación que hace Berta, con relación a la utilización de la herramienta 'homotecia' del GeoGebra (línea 62), propician la creación de una oportunidad de aprendizaje procedimental que caracterizamos matemáticamente por 'Utilizar una herramienta de GeoGebra para duplicar un triángulo y trasladarlo en el plano'.

Por último, en el octavo extracto, que corresponde al cuarto episodio de la discusión en gran grupo, observamos que la invitación a la participación que realiza Sara, con el fin de que Alba haga una construcción geométrica con GeoGebra (línea 72), y la invitación a la reflexión acerca de cómo aplicar una homotecia a un triángulo utilizando este software (línea 74), originan una oportunidad de aprendizaje conceptual que definimos matemáticamente por 'Reconocer los elementos que caracterizan una homotecia, es decir, la razón de semejanza y el centro de homotecia; e identificar su significado matemático' (véase la Tabla 15).

Además, las exposiciones sin argumentación y las exposiciones de evidencias empíricas sobre la posición del centro de homotecia que realizan diversos alumnos en este extracto (líneas 75 y 81); así como la recapitulación final que hace la profesora, sobre la posición del centro de homotecia y su significado matemático (línea 86), completan la definición de esta oportunidad de aprendizaje conceptual.

Tabla 15. Caracterización de las oportunidades de aprendizaje del octavo extracto

Aspectos matemáticos	*Acciones*
Conceptual	
Reconocer los elementos que caracterizan una homotecia, es decir, la razón de semejanza y el centro de homotecia; e identificar su significado matemático.	Invitación a la participación para realizar una transformación geométrica con GeoGebra *(Línea 72).* Invitación a la reflexión acerca de cómo aplicar una homotecia a un triángulo utilizando GeoGebra *(Línea 74).* Exposiciones sin argumentación y exposiciones de evidencias empíricas sobre la posición del centro de homotecia *(Líneas 75 y 81).* Recapitulación sobre la posición del centro de homotecia y su significado matemático *(Línea 86).*

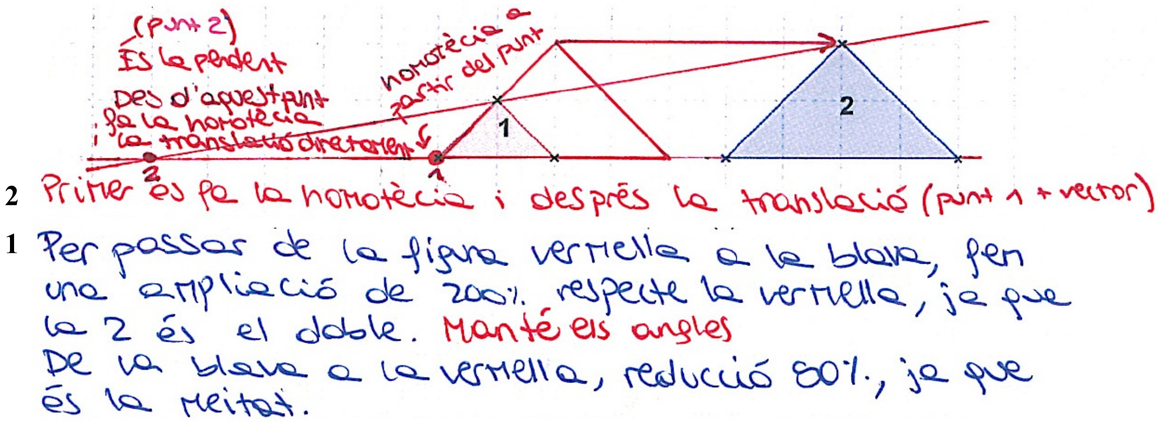
Análisis del aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje en la segunda tarea

Basándonos en las oportunidades de aprendizaje detectadas anteriormente, analizamos las respuestas de los dieciséis alumnos antes y después de la discusión en gran grupo. Así obtenemos evidencias concretas sobre cambios en la comprensión de un concepto o procedimiento matemático y encontramos nuevos elementos que los alumnos han incluido en sus reflexiones individuales, posteriores a la discusión en gran grupo de la segunda tarea. Ejemplificamos el análisis centrándonos en dos oportunidades de aprendizaje conceptual, caracterizadas matemáticamente por ‘Reconocer la existencia de transformaciones geométricas que combinan una ampliación y una translación’ y ‘Reconocer los elementos que caracterizan una homotecia, es decir, la razón de semejanza y el centro de homotecia; e identificar su significado matemático’.

Con respecto a la primera oportunidad de aprendizaje, sobre transformaciones geométricas que combinan una ampliación y una translación, analizamos si las respuestas de los dieciséis alumnos explicitan el valor de la razón de semejanza entre los dos triángulos y si utilizan un vector para realizar la translación del triángulo ampliado.

El análisis permite obtener tres tipologías de respuesta: ‘*solución que reconoce la ampliación de razón 2, identifica la translación y explicita el vector que la define*’, es decir, el alumno detalla el valor de la razón de semejanza entre los dos triángulos e identifica la translación, la cual caracteriza explicitando el vector que la define en su protocolo de resolución; ‘*solución que reconoce la ampliación de razón 2 e identifica la translación, pero no explicita el vector que la define*’, es decir, el alumno detalla el valor de la razón de semejanza entre los dos triángulos e identifica la translación, pero no utiliza un vector para caracterizarla; y ‘*solución sin cambios antes y después de la discusión en gran grupo, o sin referencias a la combinación de una ampliación y una translación*’, es decir, el alumno no completa la solución obtenida en el trabajo por parejas durante la reflexión individual, o bien no relaciona la resolución de la tarea con la combinación de una ampliación de razón 2 y una translación’. En el Anexo IX se encuentra la codificación completa de las respuestas de los dieciséis alumnos a la segunda tarea, con relación a la combinación de una ampliación y una translación.

En concreto, cuatro de los dieciséis alumnos completaron el protocolo escrito obtenido después de la resolución por parejas incluyendo una solución que detallaba el valor de la razón de semejanza, identificaba la translación y explicitaba el vector. Ejemplificamos esta tipología de respuesta: '*solución que reconoce la ampliación de razón 2, identifica la translación y explicita el vector que la define*' con la resolución de Carla (véase la Fig. 37). En el trabajo por parejas, esta alumna identificó que "para pasar de la figura roja [triángulo 1] a la azul [triángulo 2] hacemos una ampliación del 200% respecto de la roja, ya que la 2 es el doble" (véase la nota 1 de la Fig. 37). Por lo tanto, Carla solo identificó la ampliación de razón 2 trabajando por parejas. Después de la discusión en gran grupo, la alumna completó su protocolo escrito de resolución, detallando que para resolver por completo esta tarea "primero se hace la homotecia [refiriéndose a la ampliación] y después la translación" (véase la nota 2 de la Fig. 37). Además, Carla representó el vector de traslación, el cual situó en el vértice superior del triángulo ampliado.

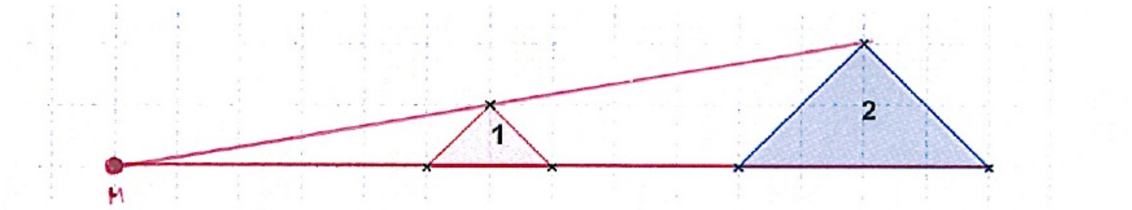


Notas

1. Para pasar de la figura roja a la azul hacemos una ampliación del 200%, respecto de la roja, ya que la 2 es el doble. (Mantenemos los ángulos).
   De la azul a la roja, reducción 50%, ya que es la mitad.
2. Primero se hace la homotecia y después la translación (punto 1+vector).

Figura 37. Resolución de Carla a la segunda tarea

Por otra parte, cuatro de los dieciséis alumnos presentaron respuestas de la segunda tipología: '*solución que reconoce la ampliación de razón 2 e identifica la translación, pero no explicita el vector que la define*'. A continuación, como ejemplo de esta tipología, mostramos la resolución de Mireia (véase la Fig. 38). En el trabajo por parejas, esta alumna observó que para resolver la tarea era necesaria una ampliación de razón 2. Por este motivo, Mireia explicó en su protocolo escrito que "hacemos el doble de grande del [triángulo] 1, por cada cuadradito contamos 2" (véase la nota 1 de la Fig. 38). Más tarde, en la reflexión individual, la alumna completó su resolución, destacando que “hacemos una ampliación de razón de semejanza 2 […]. Después hemos tenido que hacer una translación.” (véase la nota 2 de la Fig. 38). Interpretamos que Mireia identificó la translación, pero no representó el vector que la definía. Además, en su protocolo escrito solo unió con rectas los vértices homólogos e identificó el punto de corte con la letra *M*, pero no hizo referencia al uso de un vector de translación.



1 Doncs fem el doble de la 1, cada quadret en contem 2. Després de la 2 a la 1 fem la meitat.

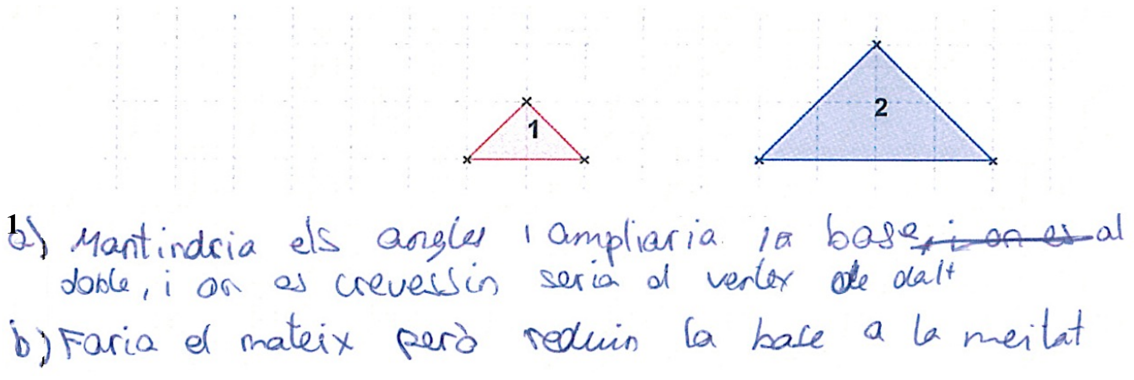
2 Fem una ampliació de raó de semblança 2, ja que doblem els costats i mantenim els angles. Després hem hagut de fer una translació. Tot i així amb el geogebra podem fer una sola homotècia i per trobar el punt de on hem de fer-la fem una recta de les bases i el punt de dalt i on es tallen és des d'on hem de fer l'homotècia

Notas

1. Pues hacemos el doble de la 1, por cada cuadradito contamos 2. Después de la 2 a la 1 hacemos la mitad.
2. Hacemos una ampliación de razón de semejanza 2, ya que duplicamos los lados y mantenemos los ángulos. Después hemos tenido que hacer una translación. Aún así con GeoGebra podemos hacer una única homotecia y para encontrar el punto desde donde tenemos que hacerla hacemos una recta entre las bases y el punto de arriba y donde se cortan es donde tenemos que hacer la homotecia.

Figura 38. Resolución de Mireia a la segunda tarea

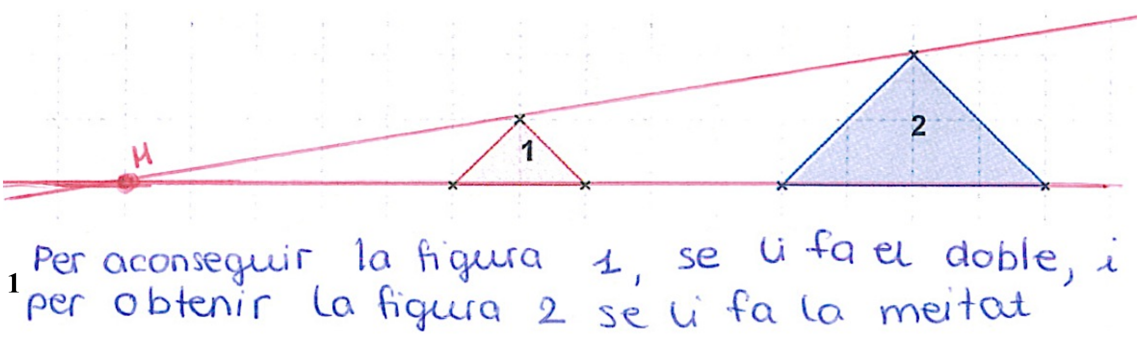
Por último, ocho de los dieciséis alumnos presentaron respuestas de la tercera tipología: ‘*solución sin cambios antes y después de la discusión en gran grupo, o sin referencias a la combinación de una ampliación y una translación*’. Como ejemplos de esta tipología mostramos las resoluciones de dos alumnos: Javier y Anna. En el trabajo por parejas, Javier explicó que para resolver la tarea “mantendría los ángulos y ampliaría la base el doble, y donde se cruzasen sería el vértice de arriba” (véase la nota 1 de la Fig. 39). Por lo tanto, el alumno identificó la ampliación de razón 2 y propuso un procedimiento para construir el nuevo triángulo ampliado, aunque sin hacer referencia a la translación. No obstante, en la reflexión individual, Javier no incluyó ningún elemento nuevo en su protocolo escrito de resolución. Por este motivo, la solución del alumno no presenta cambios antes y después de la discusión en gran grupo.



Nota
1. a) Mantendría los ángulos y ampliaría la base el doble, y donde se cruzasen sería el vértice de arriba. b) Haría lo mismo pero reduciría la base a la mitad.

Figura 39. Resolución de Javier a la segunda tarea

Por otra parte, en el trabajo por parejas, Anna también identificó la ampliación, ya que detalló que "para conseguir la figura 1, se le hace el doble" (véase la nota 1 de la Fig. 40). Aún así, en la reflexión individual, esta alumna solo unió los vértices homólogos con rectas, las cuales se cortaban en el punto *M*, pero no hizo ninguna referencia a la necesidad de combinar la ampliación con una translación.



Nota
1. Para conseguir la figura 1, se le hace el doble, y para obtener la figura 2 se le hace la mitad.

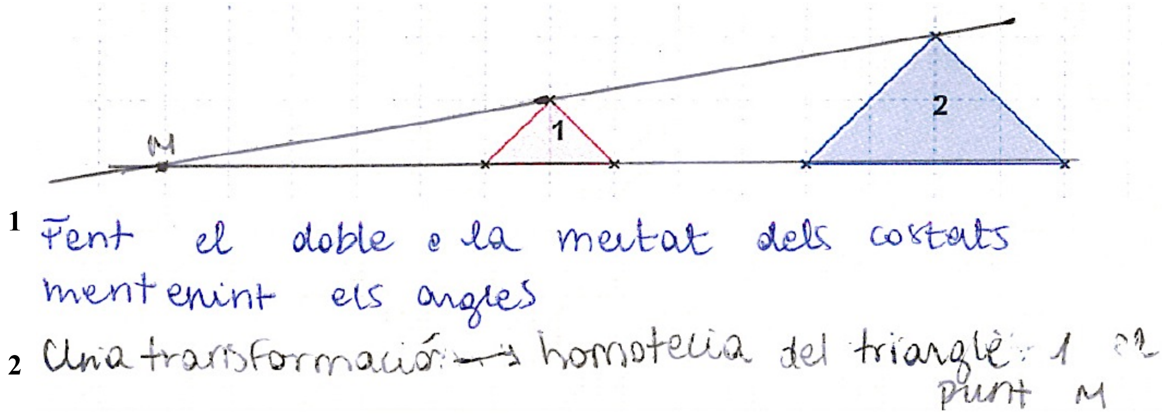
Figura 40. Resolución de Anna a la segunda tarea

Con respecto a la segunda oportunidad de aprendizaje, sobre los elementos que caracterizan una homotecia y su significado matemático, analizamos si las respuestas de los dieciséis alumnos contienen referencias explícitas a la homotecia como una transformación geométrica, concretan la razón de semejanza entre los dos triángulos, representan el centro de la homotecia y le dan significado matemático.

El análisis permite observar que los dieciséis alumnos identificaron correctamente la razón de semejanza entre los dos triángulos, aunque sus respuestas presentaron diferencias en relación con la transformación de homotecia y la concreción del centro. Por este motivo, obtenemos tres tipologías de respuesta: '*solución que identifica la homotecia y explica por completo los elementos que definen esta transformación geométrica*', es decir, el alumno realiza una ampliación de razón dos entre los dos triángulos, une los vértices homólogos con rectas e identifica que se cortan en un punto, el cual especifica como centro de la homotecia; '*solución que reconoce la homotecia pero no concreta la definición del centro*', es decir, el alumno identifica y representa la homotecia entre los dos triángulos y une con rectas los vértices homólogos, pero no concreta la definición del centro de homotecia; y '*solución sin cambios antes y después de la discusión en gran grupo, o sin referencias a los elementos matemáticos que definen una homotecia*', es decir, el alumno no completa la solución obtenida en el trabajo por parejas durante la reflexión individual, o bien no relaciona su solución con la homotecia y los elementos matemáticos que la definen. En el Anexo IX se encuentra la codificación completa de las respuestas de los dieciséis alumnos a la segunda tarea, con relación a los elementos que caracterizan una homotecia.

En concreto, ocho de los dieciséis estudiantes presentaron respuestas de la primera tipología: '*solución que identifica la homotecia y explica por completo los elementos que definen esta transformación geométrica*'. Ejemplificamos esta tipología de respuesta con la resolución de María (véase la Fig. 41). En el trabajo por parejas, esta alumna realizó una ampliación de razón dos entre los dos triángulos y destacó que "haciendo el doble […] de los lados manteniendo los ángulos" (véase la nota 1 de la Fig. 41). Más tarde, en la reflexión individual, María unió con rectas los vértices homólogos, observó que se cortaban en el punto *M* y detalló la posibilidad de resolver la tarea por medio de "una transformación; homotecia del triángulo 1 en el punto *M*" (véase la nota 2 de la

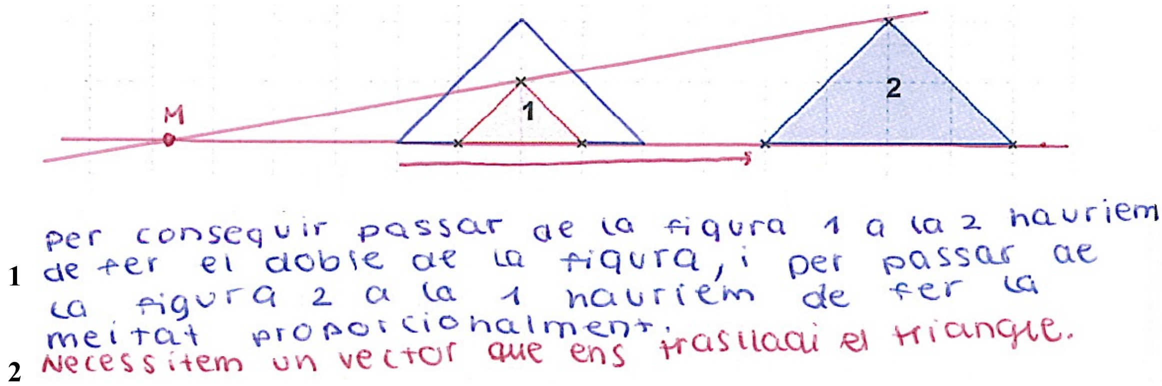
Fig. 41). Por lo tanto, interpretamos que esta alumna identificó el punto *M* como centro de la homotecia entre los dos triángulos.



Notas
1. Haciendo el doble o la mitad de los lados manteniendo los ángulos.
2. Una transformación → homotecia del triángulo 1 en el punto M.

Figura 41. Resolución de María a la segunda tarea

Por otra parte, únicamente dos de los dieciséis alumnos presentaron respuestas de la segunda tipología: '*solución que reconoce la homotecia pero no concreta la definición del centro*'. Como ejemplo de esta tipología mostramos la resolución de Saray. En el trabajo por parejas, esta alumna explicó que para pasar "de la figura 1 a la 2 tendríamos que hacer el doble de la figura" (véase la nota 1 de la Fig. 42). Por lo tanto, Saray construyó una ampliación de razón dos del primer triángulo respecto del segundo.

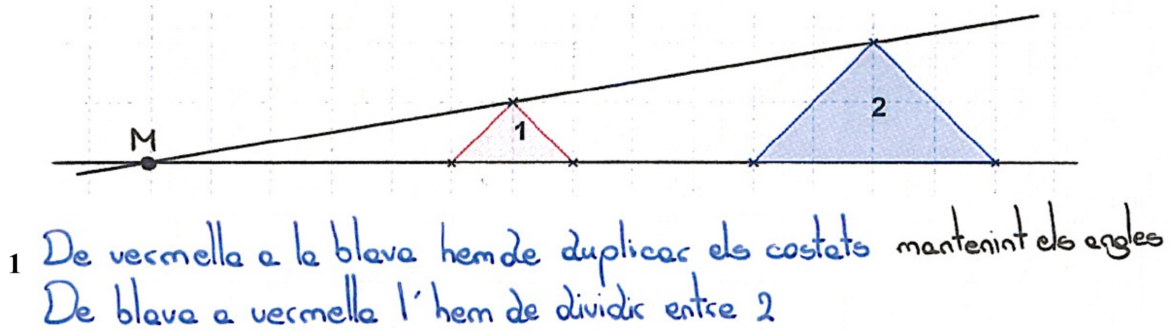


Notas
1. Para conseguir pasar de la figura 1 a la 2 tendríamos que hacer el doble de la figura, y para pasar de la figura 2 a la 1 tendríamos que hacer la mitad proporcionalmente.
2. Necesitamos un vector que nos traslade el triángulo.

Figura 42. Resolución de Saray a la segunda tarea

En la reflexión individual posterior a la discusión en gran grupo, Saray completó su protocolo escrito incorporando que “necesitamos un vector que nos traslade el triángulo” (véase la nota 2 de la Fig. 42) y la alumna lo representó en su cuadrícula. Además, unió con rectas los vértices homólogos y señaló el punto de corte con la letra *M*. Aunque Saray no detalló el término ‘homotecia’ en su protocolo, interpretamos que la estudiante identificó la transformación geométrica que combinaba una ampliación y una translación a través de un vector. Aún así, no concretó el significado del punto *M*, es decir, del centro de la homotecia en cuestión.

Por último, seis de los dieciséis alumnos presentaron en su protocolo escrito una ‘*solución sin cambios antes y después de la discusión en gran grupo, o sin referencias a los elementos matemáticos que definen una homotecia*’. Ejemplificamos esta tercera tipología de respuesta con la resolución de Oriol (véase la Fig. 43).



Nota

1. De la roja a la azul tenemos que duplicar los lados manteniendo los ángulos.
De la azul a la roja tenemos que dividir entre dos.

Figura 43. Resolución de Oriol a la segunda tarea

En el trabajo por parejas, Oriol identificó que para transformar la figura “roja en la azul tenemos que duplicar los lados” (véase la nota 1 de la Fig. 43). Después, en la reflexión individual, el alumno mencionó que también debía mantenerse la igualdad de ángulos homólogos entre los dos triángulos. Además, Oriol unió con rectas los vértices homólogos y señaló el punto de corte con la letra *M*. Por lo tanto, interpretamos que este estudiante se dio cuenta de la semejanza entre los dos triángulos, pero no reconoció la homotecia como un caso particular de semejanza, ni tampoco definió el punto *M* como centro de la homotecia.

4.2.4. *Análisis de la tercera tarea*

Analizamos la discusión en gran grupo de la tercera tarea, *Transformaciones geométricas*, de la profesora Sara para estudiar modos de actuación docente y modos de interacción entre los participantes de la discusión en gran grupo. Además, ejemplificamos oportunidades de aprendizaje matemático y, por último, analizamos el aprovechamiento que obtienen los alumnos de una oportunidad asociada a la tercera tarea.

Análisis de los modos de actuación en la tercera tarea

Para mostrar el análisis de los modos de actuación hemos seleccionado fragmentos de dos episodios de la discusión en gran grupo, que se detallan en el noveno y décimo extracto. En el Anexo X se especifica la transcripción completa de la discusión en gran grupo de la tercera tarea de Sara, así como la caracterización de todos los episodios.

El noveno extracto muestra el segundo episodio de la discusión en gran grupo (${}^{3}e_{2}$: «discutir el artefacto», «estudio de estrategias para resolver o argumentar»). En este episodio se produce una discusión conjunta entre la profesora, Sara, y dos alumnos, Alba y Álex, sobre la información gráfica proporcionada por la pantalla con el GeoGebra. Por este motivo el tipo de orquestación instrumental que asignamos a este episodio es «discutir el artefacto». Como Alba y Álex responden a las preguntas de la profesora argumentando la necesidad de componer al menos dos transformaciones geométricas, una rotación y una homotecia, para resolver la tarea matemática, el estadio de la discusión es «estudio de estrategias para resolver o argumentar».

Noveno extracto. Segundo episodio de la discusión en gran grupo de la tercera tarea: composición de un giro y una homotecia.

---

87. Sara:	¿Cómo me podéis demostrar que no se puede? ¿Qué argumento tenéis para convencerme de que no hace falta que busque porque no podré ir con una única transformación? [*Petición de argumentación sobre la composición de transformaciones geométricas*]
88. Alba:	Con solo una homotecia no puede ser porque los puntos homólogos no coinciden. [*Exposición con argumentación sobre la definición de homotecia*]

89. Sara: No se cortan todos en un punto. De acuerdo, esto sería un argumento.
[*Formalización de las propiedades de una homotecia*]

90. Alba: Y como que la casa es más grande, no habría ninguna otra transformación que la hiciese más grande que no fuese la homotecia, entonces tendríamos que hacer dos como mínimo.
[*Exposición con argumentación sobre la necesidad de componer dos transformaciones geométricas*]

91. Sara: Muy bien. ¿Entendéis este razonamiento? Alba ha visto que al no tener la misma medida seguro que necesitaré la homotecia, que es de las cuatro transformaciones la única que me cambia las medidas, pero entonces piensa que ¿solo con una homotecia podré ir? No, porque une los puntos homólogos y no se cortan en el centro de la homotecia. ¿Visualmente alguien tendría otro argumento de por qué no puedo ir solo con una homotecia?
[*Recapitulación sobre las propiedades de una homotecia e invitación a la búsqueda de alternativas*]

92. Álex: Porque está girada.
[*Exposición de evidencia empírica sobre la orientación en el plano de un polígono*]

93. Sara: Porque está girada, ¿pero qué más?
[*Petición de explicación sobre la evidencia empírica de un alumno*]

94. Álex: No está girada 180º.
[*Exposición de evidencia empírica sobre la rotación de un polígono*]

95. Sara: O sea, no es un giro de 180º. Las homotecias o bien nos dejan los polígonos sin girar, o sea con una translación, o nos los giran 180º, pero no nos los pueden girar a medias. Por lo tanto, aquí sabemos seguro que no será únicamente una homotecia. Pero habrá una homotecia por el medio, porque han cambiado las dimensiones. Por lo tanto, como mínimo dos transformaciones.
[*Complemento de la explicación sobre las propiedades de una homotecia y la composición de dos transformaciones geométricas*]

El décimo extracto ilustra fragmentos del tercer episodio de la discusión en gran grupo ($^{3}e_{3}$: «experimentar el instrumento», «estudio de estrategias para resolver o argumentar»). En este episodio dos alumnos, Álex y Adrià, explican la solución que obtuvieron en el trabajo por parejas utilizando GeoGebra, la cual consistía en combinar una rotación y una homotecia. Además se dan indicaciones al grupo acerca de la construcción con GeoGebra de las dos transformaciones geométricas. Por este motivo, el tipo de orquestación instrumental que asignamos a este episodio es «experimentar el instrumento». Como se estudia la estrategia aplicada por estos alumnos, determinando los elementos característicos tanto de la rotación (véase la primera parte del décimo extracto) como de la homotecia, el estadio de la discusión es «estudio de estrategias para resolver o argumentar».

Primera parte del décimo extracto. Fragmento del tercer episodio de la discusión en gran grupo de la tercera tarea: composición de giro y homotecia con GeoGebra (determinación del centro y ángulo de la rotación).

---

96. Sara: ¿Lo habéis podido encontrar con dos? A ver, Álex, ¿cómo lo habéis hecho vosotros?
[*Invitación a la participación de un alumno para que explique una construcción geométrica con GeoGebra*]

97. Álex: Primero se tiene que prolongar la base de la lila, y de la azul… Y luego donde se corten será el punto de rotación, el centro de rotación.
[*Exposición sin argumentación sobre la obtención del centro de giro*]

98. Sara: Muy bien. ¿Y qué harás? Tú quieres este punto… Hay muchas formas de hacer este problema. Ellos han tomado este punto como un punto importante, que será el centro de la rotación.
[*Recapitulación sobre la posición del centro de giro*]

99. Álex: Sí, se ha girado la base respecto de este punto, 60 grados. […]
[*Exposición de evidencia empírica sobre el ángulo de giro*]

100. Sara: ¿Pero cuántos grados has hecho aquí? ¿Cómo lo puedo mirar esto?
[*Petición de comprobación sobre la obtención del ángulo de giro*]

101. Grupo: ¡Sesenta!
[*Exposición sin argumentación sobre el ángulo de giro*]

102. Sara: Sí, 60 es lo que me dará. Adrià, ¿qué quieres decir?
[*Validación e invitación a la participación de un alumno*]

103. Adrià: Haces la inclinación del lila respecto de la recta que… [el alumno indica una línea horizontal]. […]
[*Exposición sin argumentación sobre la obtención del ángulo de giro*]

104. Sara: O bien este de aquí, que son lo mismo porque son opuestos, estos ángulos. Son dos rectas que se cortan, por lo tanto los ángulos opuestos siempre son iguales, pero quizás es más fácil de imaginároslos si este suelo lo podéis acabar llevando aquí, pues he tenido que hacer estos grados de giro; pues puedo medirlo por aquí. ¿De acuerdo? Entonces, daba 60. En resumen, que entonces coge y gira el objeto respecto de este centro 60 grados. ¿En qué sentido?[…]
[*Complemento de explicación sobre la obtención del centro y ángulo de giro y petición de comprobación sobre el sentido de la rotación*]

105. Isabel: Antihorario.
[*Exposición de evidencia empírica sobre el sentido de la rotación*]

En la segunda parte del décimo extracto observamos que se establece una conversación entre la profesora, Sara, y Adrià con el propósito de determinar el centro de la homotecia y la razón de semejanza utilizando GeoGebra.

Segunda parte del décimo extracto. Fragmento del tercer episodio de la discusión en gran grupo de la tercera tarea: composición de giro y homotecia con GeoGebra (determinación del centro de la homotecia y de la razón de semejanza).

---

106. Sara: ¿Y ahora qué? ¿Ahora ya está en posición de que le pueda aplicar una homotecia y que vaya directamente?
[*Petición de comprobación sobre la aplicación de una homotecia*]

107. Adrià: ¡Sí!
[*Asentimiento*]

108. Sara: ¿Sí, verdad? ¿Y cómo lo haremos para poder encontrar el centro de la homotecia?
[*Petición de explicación sobre la obtención del centro de homotecia*]

109. Adrià: Uniendo puntos homólogos. […]
[*Exposición sin argumentación sobre la obtención del centro*]

110. Sara: ¿Y ahora qué razón? ¿3/2 daba? ¿1 y 1/2?
[*Petición de comprobación sobre la razón de semejanza*]

111. Grupo: Sí.
[*Asentimiento*]

La caracterización completa en episodios de la discusión en gran grupo de la tercera tarea se ilustra en la Tabla 16, la cual muestra que la clase se inició con la intervención de un alumno, Álex, ayudándose de GeoGebra para presentar una solución que consistía en combinar una rotación y una homotecia (${}^3e_1$: «experimentar el instrumento», «presentación de una solución»). Luego se estableció una discusión entre la profesora, Sara, y dos alumnos, Alba y Álex, con el fin de argumentar la necesidad de componer estas dos transformaciones geométricas (${}^3e_2$: «discutir el artefacto», «estudio de estrategias para resolver o argumentar»).

Tabla 16. Análisis de los episodios de la discusión en gran grupo de la tercera tarea de la profesora Sara

Estadio de la discusión / **Tipo de orquestación**	Situación del problema	Presentación de una solución	Estudio de estrategias para resolver o argumentar	Estudio de casos particulares o extremos	Contraste entre soluciones	Conexiones con otras situaciones	Generalización y conceptualización	Reflexión sobre progreso matemático
Explorar el artefacto								
Explicar a través del artefacto						**${}^3e_4$**	**${}^3e_5$**	
Enlazar artefactos								
Discutir el artefacto			**${}^3e_2$**					
Descubrir a través del artefacto								
Experimentar el instrumento		**${}^3e_1$**	**${}^3e_3$**					

Más tarde, Álex y su compañero, Adrià, dieron indicaciones al grupo acerca de la construcción con GeoGebra tanto de la rotación como de la homotecia y determinaron los elementos matemáticos que caracterizaban ambas transformaciones (${}^{3}e_3$: «experimentar el instrumento», «estudio de estrategias para resolver o argumentar»). La profesora planteó preguntas para que los alumnos explicasen una nueva estrategia de resolución, la cual consistía en aplicar primero la homotecia y, después, el giro. Sara quiso conectar esta situación con el tema de isometrías, motivo por el cual profundizó en la obtención del centro de giro entre los dos polígonos (${}^{3}e_4$: «explicar a través del artefacto», «conexiones con otras situaciones»). Por último, la profesora utilizó la pizarra y el GeoGebra para realizar una síntesis final de los tipos de homotecia según la razón de semejanza (${}^{3}e_5$: «explicar a través del artefacto», «generalización y conceptualización»).

La interpretación de la distribución de episodios en la Tabla 16 determina un modo de actuación de la profesora Sara, en la tercera tarea, con equilibrio instrumental, ya que dos de los cinco episodios corresponden a los tres primeros tipos de orquestación («explorar el artefacto», «explicar a través del artefacto» y «enlazar artefactos») y los demás corresponden a los tres últimos («discutir el artefacto», «descubrir a través del artefacto» y «experimentar el instrumento»). A nivel discursivo, señalamos que aparecen cuatro de los ocho estadios de la discusión y que se avanza ordenadamente desde los estadios correspondientes a momentos iniciales de la discusión («presentación de una solución» y «estudio de estrategias para resolver o argumentar») hasta los más avanzados («conexiones con otras situaciones» y «generalización y conceptualización»).

Análisis de los modos de interacción en la tercera tarea

Analizamos los modos de interacción entre los participantes de la discusión en gran grupo de la tercera tarea estudiando las acciones que se producen en los episodios de la discusión. Ilustramos este análisis con los extractos seleccionados anteriormente e introducimos un nuevo extracto, el undécimo, en los párrafos siguientes. En el Anexo X se puede consultar un análisis completo de las acciones que se han producido en todos los episodios de la discusión en gran grupo de esta tercera tarea.

El noveno extracto, que corresponde al segundo episodio de la discusión en gran grupo, trata sobre la necesidad de componer un giro y una homotecia para encontrar una solución a la tercera tarea. Este extracto se inicia con una petición de argumentación sobre la composición de transformaciones geométricas que realiza la profesora, Sara (línea 87). Una alumna, Alba, hace una exposición con argumentación y afirma que “con solo una homotecia no se puede [resolver la tarea] porque los puntos homólogos no coinciden” (línea 88). A continuación, Sara formaliza la exposición de Alba señalando que “no se cortan todos en un punto” (línea 89). Inmediatamente, esta alumna hace una nueva exposición con argumentación sobre la necesidad de componer dos transformaciones y destaca que “como la casa es más grande, no habría ninguna otra transformación que la hiciese más grande que no fuese la homotecia, entonces tendríamos que hacer dos como mínimo” (línea 90). Luego, la profesora recapitula las propiedades de una homotecia e invita a los estudiantes a buscar nuevos argumentos para justificar la composición de las dos transformaciones geométricas (línea 91). Otro alumno, Álex, expone una evidencia empírica manifestando que no es posible resolver la tarea con una única transformación, porque la figura geométrica “está girada” (línea 92) y Sara le pide una explicación más detallada sobre esta cuestión (línea 93). Entonces Álex expone una nueva evidencia empírica al darse cuenta de que la figura “no está girada 180º” (línea 94). Por último, Sara complementa la explicación de este alumno destacando las propiedades de una homotecia (línea 95).

La distribución de las acciones del noveno extracto se muestra en la Figura 44. Tal y como ya hemos observado en el análisis de la primera y de la segunda tarea, en este diagrama se refleja una sucesión encadenada de acciones entre las intervenciones de la profesora y las respuestas de sus alumnos a lo largo de este episodio de la discusión.

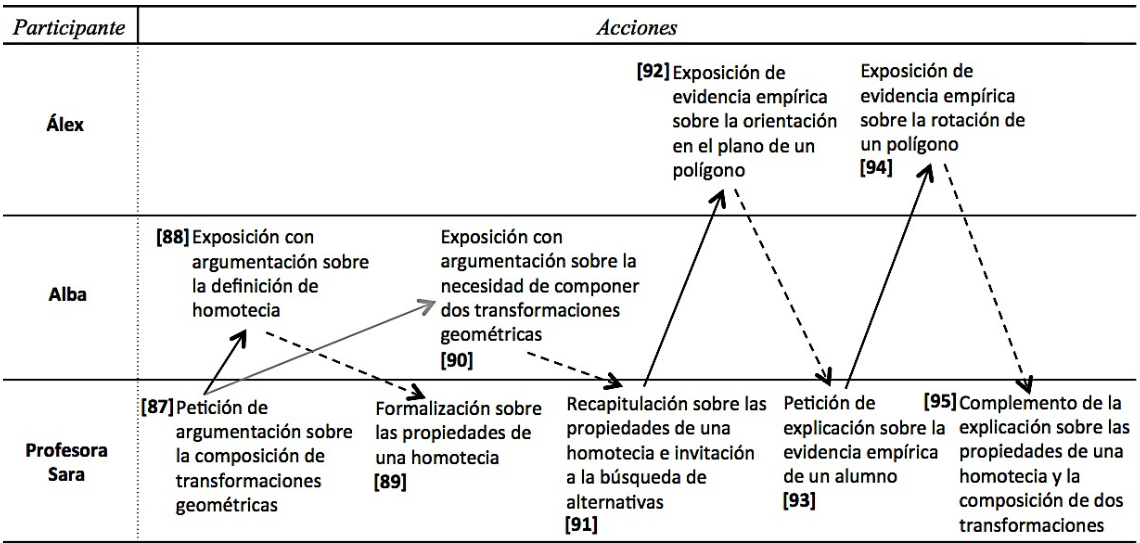


Figura 44. Diagrama de sucesión de acciones del noveno extracto

El décimo extracto corresponde a un fragmento del tercer episodio de la discusión en gran grupo y explica un método para componer un giro y una homotecia utilizando GeoGebra. La primera parte de este décimo extracto (véase la Fig. 45) se inicia con una invitación a la participación que realiza la profesora, Sara, con el fin de que un alumno, Álex, explique la construcción geométrica que realizó con GeoGebra en la sesión de trabajo por parejas (línea 96). Álex expone sin argumentar un procedimiento para obtener el centro de la rotación (línea 97) y la profesora utiliza la exposición de este alumno para hacer una breve recapitulación sobre la posición en el plano del centro de giro (línea 98). A continuación, Álex expone una evidencia empírica sobre el ángulo de giro y afirma que "se ha girado la base respecto de este punto, 60 grados" (línea 99). Aún así, la profesora pide a los estudiantes que realicen una comprobación, con el fin de que expliquen cómo obtuvieron el ángulo de giro (línea 100).

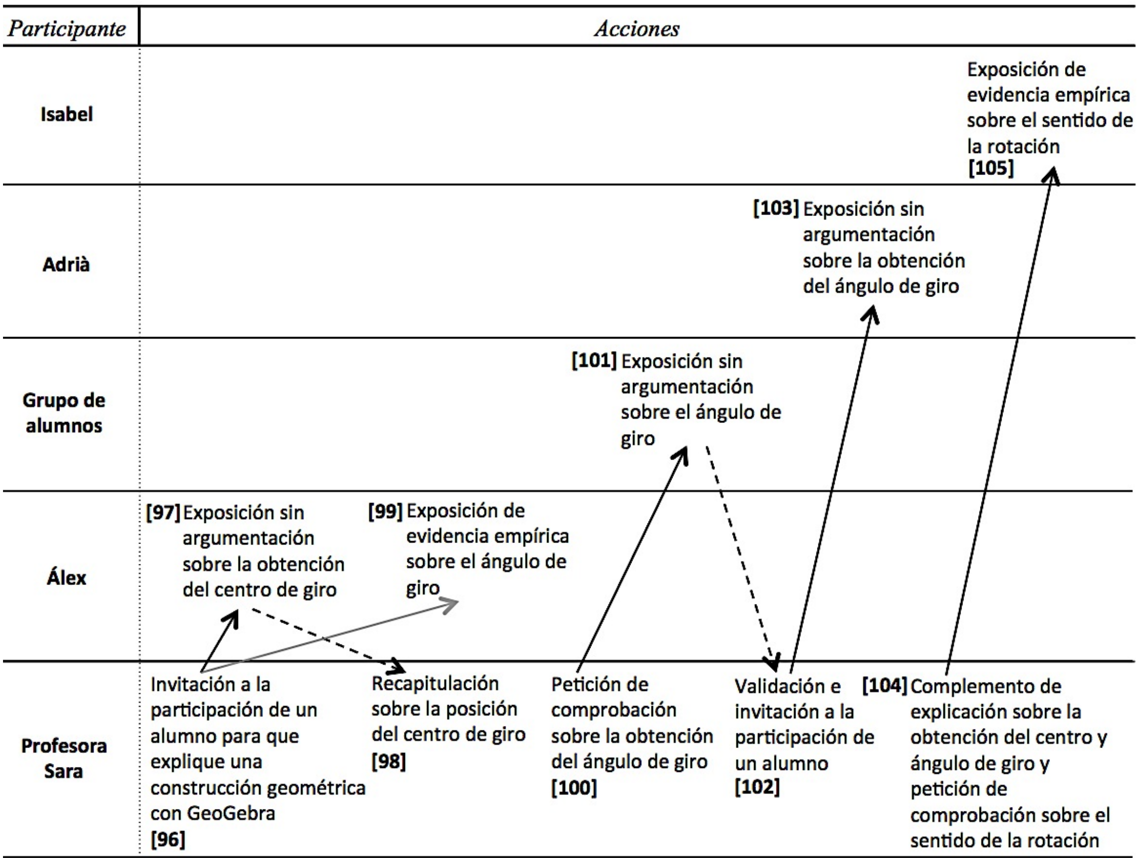


Figura 45. Diagrama de sucesión de acciones de la primera parte del décimo extracto

Un grupo de alumnos expone sin argumentar que la amplitud del ángulo de giro es de 60 grados (línea 101). Sara valida la afirmación del grupo e invita a otro alumno, Adrià, a la participación (línea 102). Adrià, que es el compañero de Álex en el trabajo por parejas, realiza una exposición sin argumentación sobre la obtención del ángulo de giro (línea 103), la cual es completada por la explicación de la profesora más tarde en la discusión (línea 104). Por último, Sara pide una comprobación final al grupo para que los alumnos determinen el sentido del ángulo de la rotación. Por este motivo, Isabel utiliza la pantalla con el GeoGebra para hacer una exposición de evidencia empírica y señalar que el giro se produjo en sentido "antihorario" (línea 105).

Por otro lado, la segunda parte del décimo extracto (véase la Fig. 46) se inicia con una petición de comprobación por parte de la profesora (línea 106), a la que Adrià asiente (línea 107), con el propósito de que los alumnos determinen el centro de la homotecia y la razón de semejanza. A continuación, Sara realiza una petición de explicación sobre la obtención del centro de homotecia (línea 108) y Adrià expone sin argumentar que el centro se puede obtener "uniendo puntos homólogos" (línea 109). Por último, la profesora pide una breve comprobación al grupo con el fin de verificar que la razón de semejanza entre los dos polígonos es de 3/2 (línea 110) y un grupo de alumnos asiente a la pregunta de Sara (línea 111).

La distribución de las acciones del décimo extracto se muestra en las Figuras 45 y 46. Una vez más, en estos diagramas se observan sucesiones encadenadas de acciones entre las intervenciones de la profesora, la mayoría de las veces en forma de preguntas, y las respuestas de sus alumnos a lo largo de la discusión en gran grupo.

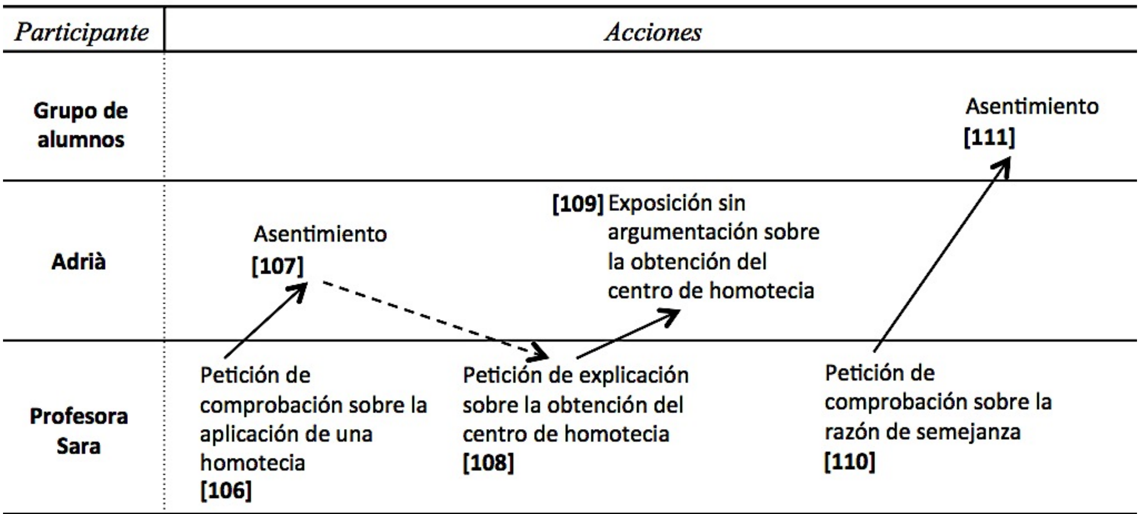


Figura 46. Diagrama de sucesión de acciones de la segunda parte del décimo extracto

A continuación introducimos el undécimo extracto, cuya transcripción ilustra un fragmento del quinto episodio de la discusión en gran grupo de la tercera tarea ($^3e_5$: «explicar a través del artefacto», «generalización y conceptualización»). Recordemos que en este episodio la profesora utilizó la pizarra y el GeoGebra para realizar una síntesis final de los tipos de homotecia según la razón de semejanza. Debido a la larga extensión del undécimo extracto, lo hemos dividido en dos partes que analizamos en los párrafos siguientes.

Primera parte del undécimo extracto. Fragmento del quinto episodio de la discusión en gran grupo de la tercera tarea: diferentes tipos de homotecia según la razón.

---

112. Sara: A ver, a todo el mundo le ha quedado claro el resumen de las homotecias, de qué tipo, cuántas… si quisiésemos hacer tipos de homotecias según la constante esta de proporcionalidad, ¿cuántos tipos…?
[*Petición de comprobación sobre tipos de homotecia según la razón*]

113. Isabel: Cuatro.
[*Exposición sin argumentación sobre tipos de homotecia*]

114. Sara: ¿Cuatro, seguro? ¿Y las negativas?
[*Petición de comprobación sobre tipos de homotecia según la razón*]

115. Isabel: ¿Pero pueden ser interiores al polígono?
[*Petición de aclaración sobre la posición del centro de homotecia*]

116. Sara: A ver, negativas mayores que 1; negativas menores que 1; positivas menores que 1; y positivas mayores que 1.
[*Recapitulación sobre homotecias de razón positiva y negativa*]

117. Martí: ¿Esto qué es, los tipos de homotecia?
[*Petición de aclaración sobre los tipos de homotecia*]

118. Sara: Sí, Martí. Todo el mundo ve que estas… ¿Qué me harían, la figura cómo? ¿Más grande o más pequeña?
[*Validación y petición de comprobación sobre el efecto de una homotecia en las medidas de un polígono*]

119. Grupo: Depende.
[*Exposición sin argumentación sobre una homotecia*]

120. Sara: No porque sean positivas me lo tienen que hacer más grande. ¿Qué era lo que me indica si me hace la figura más grande o más pequeña?
[*Petición de explicación sobre el efecto de una homotecia en las medidas de un polígono*]

121. Grupo: La razón.
[*Exposición sin argumentación sobre la razón de semejanza*]

122. Sara: Si era más grande que 1. Por lo tanto, estas dos me harán que la figura final sea más grande que la original, y estas dos me la harán más pequeña. […]
[*Complemento de la explicación sobre el efecto de una homotecia en las medidas de un polígono*]

La primera parte del undécimo extracto (véase la Fig. 47) se inicia con una petición de comprobación por parte de la profesora acerca de los tipos de homotecia según la razón de semejanza (línea 112). Una alumna, Isabel, expone sin argumentar que hay "cuatro" tipos de homotecia (línea 113), pero la profesora observa que la afirmación de esta alumna no incluye todos los tipos. Por este motivo, vuelve a pedir una comprobación al grupo sobre esta misma cuestión (línea 114). Isabel interviene de nuevo aunque en este caso no responde a la pregunta de Sara, sino que pide una aclaración sobre la posición que puede ocupar el centro de homotecia en un polígono (línea 115). En este momento, la profesora decide recapitular y hace un recuento sobre homotecias de razón positiva y negativa. Sara percibe que los cuatro tipos de homotecia a los que se refiere Isabel son: "[homotecias] negativas mayores que 1; negativas menores que 1; positivas menores que 1; y positivas mayores que 1" (línea 116).

Por otro lado, un nuevo alumno, Martí, pide una aclaración sobre la recapitulación anterior de la profesora (línea 117) y pregunta si se refiere a tipos de homotecia. Sara valida la pregunta de Martí y hace una petición de explicación con el fin de que los alumnos comprueben el efecto que tiene una homotecia en las medidas de un polígono (líneas 118 y 120). A continuación, un grupo de estudiantes manifiesta que un polígono cambia de dimensiones según el valor de la razón de semejanza (líneas 119 y 121) y, finalmente, la profesora completa las observaciones de estos alumnos acerca del efecto de las homotecias en las medidas de un polígono (línea 122).

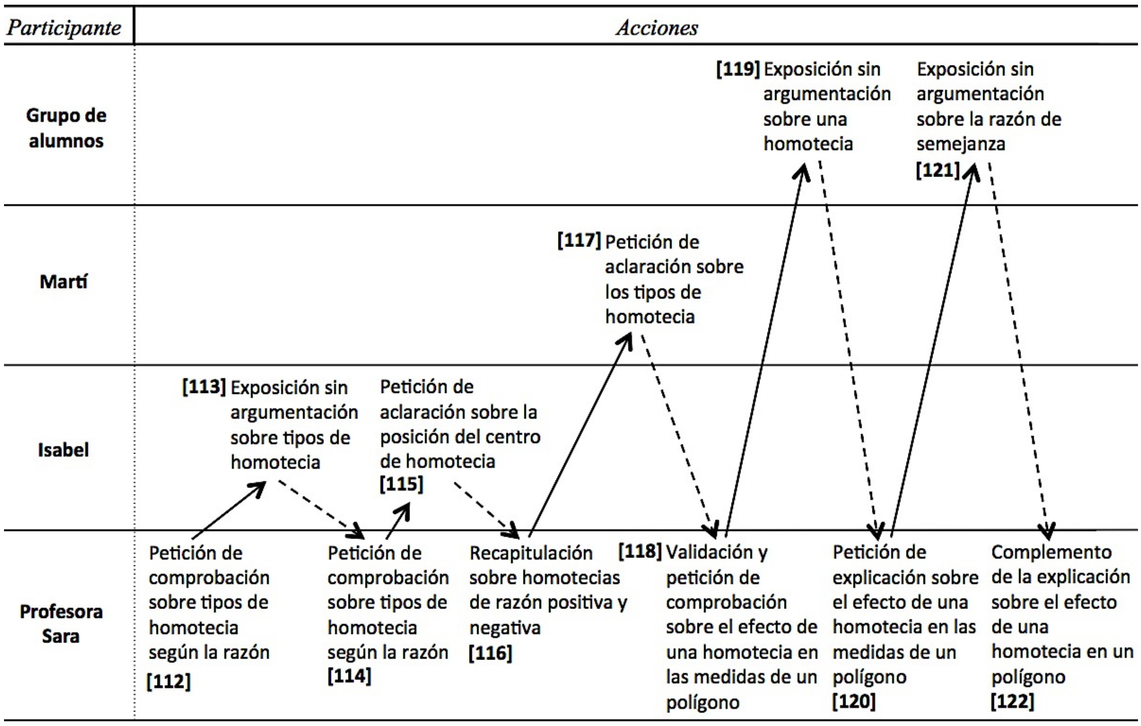


Figura 47. Diagrama de sucesión de acciones de la primera parte del undécimo extracto

Tal y como se muestra en la segunda parte del undécimo extracto, la discusión en gran grupo de este episodio sigue con el estudio de una homotecia de razón 1, es decir, la identidad, y con una homotecia de razón -1, la cual es equivalente a un giro de 180º y a una simetría central.

Segunda parte del undécimo extracto. Fragmento del quinto episodio de la discusión en gran grupo de la tercera tarea: homotecias de razón 1 y -1.

123. Sara: ¿Y estos negativos qué me hacen?
[*Petición de explicación sobre el efecto de una homotecia de razón negativa en un polígono*]

124. Alba: Hacen girar el polígono.
[*Exposición sin argumentación sobre homotecias de razón negativa*]

125. Sara: ¿Es que además me haga un giro de cuánto?
[*Petición de formalización sobre la amplitud de la rotación*]

126. Alba: De 180º.
[*Formalización sobre el ángulo de giro*]

127. Sara: 180º. Vimos… Aquí nos hemos dejado otra opción, que sea positiva y ni más grande ni más pequeña que 1, que sea 1.
[*Validación e invitación a la reflexión sobre otros tipos de homotecia*]

128. Martí: Entonces no hace nada.
[*Exposición sin argumentación sobre el efecto de una homotecia cuya razón de semejanza sea igual a 1*]

129. Sara: No hace nada, se queda igual todo. De acuerdo, es la homotecia identidad. ¿Y si es negativa y es igual a -1?
[*Formalización acerca de la homotecia identidad y petición de explicación sobre una homotecia con razón igual a -1*]

130. Martí: La gira 180º.
[*Exposición sin argumentación sobre el efecto de una homotecia cuya razón de semejanza sea igual a -1*]

131. Sara: La gira 180º, y hay otra transformación que vimos…
[*Validación e invitación a la búsqueda de una nueva transformación geométrica*]

132. Alba: Simetría respecto de un punto.
[*Exposición sin argumentación sobre una transformación geométrica*]

133. Sara: Exacto, simetría respecto de un punto. Recordad que dijimos un giro de 180º es igual que una simetría central, pues ahora hemos visto que también es igual que una homotecia de razón -1. […]
[*Validación y recapitulación sobre la equivalencia de transformaciones geométricas*]

La segunda parte del undécimo extracto (véase la Fig. 48) empieza con una petición de comprobación por parte de la profesora sobre el efecto que tiene una homotecia de razón negativa en un polígono (línea 123). Una alumna, Alba, expone sin argumentar que las homotecias negativas “hacen girar el polígono” (línea 124) y la profesora pide a Alba una formalización sobre el ángulo de la rotación (línea 125). Alba formaliza que se trata de una rotación “de 180º” (línea 126), respuesta que la profesora valida. Luego, Sara invita al grupo a la reflexión y les pregunta por una homotecia “que sea positiva y ni más grande ni más pequeña que 1, que sea 1” (línea 127). Otro alumno, Martí, expone sin argumentar que una homotecia de este tipo no tiene ningún efecto sobre el polígono al cual se le aplica (línea 128). La profesora formaliza que, en este caso, se trata de “la homotecia identidad”. Además, pide explicación al grupo sobre una homotecia “negativa y [con razón] igual a -1” (línea 129). Nuevamente, Martí interviene en la discusión y expone sin argumentar que esta homotecia “gira 180º” el polígono (línea 130). Sara valida la afirmación de Martí e invita a los estudiantes a buscar una nueva transformación geométrica que sea equivalente a un giro de 180º (línea 131). Alba expone sin argumentar que se trata de una “simetría respecto de un punto” (línea 132) y la profesora valida su afirmación. Por último, Sara hace una recapitulación final sobre esta cuestión, afirmando que “un giro de 180º es igual que una simetría central, pues ahora hemos visto que también es igual que una homotecia de razón -1” (línea 133).

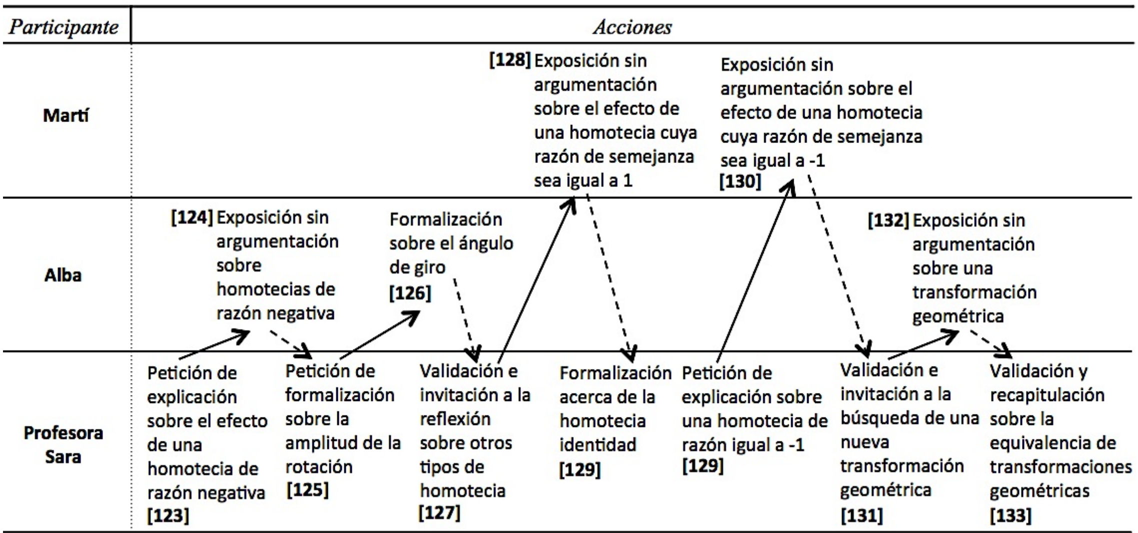


Figura 48. Diagrama de sucesión de acciones de la segunda parte del undécimo extracto

Finalmente, la distribución de las acciones del undécimo extracto se muestra en las Figuras 47 y 48. Como en los extractos anteriores, en estos diagramas se observan sucesiones encadenadas de acciones entre las intervenciones de la profesora a lo largo de la discusión en gran grupo y las respuestas de sus alumnos.

Ejemplificación de oportunidades de aprendizaje matemático en la tercera tarea

En los próximos párrafos introducimos algunas oportunidades de aprendizaje matemático que hemos detectado en el análisis de los extractos anteriores. Para ello relacionamos los aspectos del conocimiento matemático asociados a la oportunidad con las acciones que se han producido en los procesos de interacción propios del aula de matemáticas. Aún así, solo ejemplificamos una pequeña parte de las oportunidades de aprendizaje que se han generado en todos los episodios de la discusión en gran grupo de la tercera tarea gestionada por la profesora Sara.

En el noveno extracto, que corresponde al segundo episodio de la discusión en gran grupo, observamos que la petición de argumentación sobre la composición de transformaciones geométricas que realiza la profesora, Sara (línea 87); así como las posteriores exposiciones con argumentación que hace una alumna, Alba, sobre la definición de una homotecia (línea 88) y sobre la necesidad de componer una homotecia y un giro para resolver esta tarea (línea 90), generan una oportunidad de aprendizaje argumentativa que caracterizamos matemáticamente por 'Darse cuenta que la resolución de una tarea matemática puede requerir argumentos sobre la composición de dos transformaciones geométricas: homotecia y giro' (véase la Tabla 17). Además, la recapitulación sobre las propiedades de una homotecia y la invitación a la búsqueda de alternativas que realiza la profesora (línea 91); así como la exposición de evidencia empírica que hace otro alumno, Álex, sobre la orientación en el plano de un polígono (línea 92) propician la creación de una nueva oportunidad argumentativa que hemos caracterizado matemáticamente por 'Identificar la importancia de los argumentos obtenidos a través de la visualización para justificar la resolución de una tarea geométrica'.

Tabla 17. Caracterización de las oportunidades de aprendizaje del noveno extracto

Aspectos matemáticos	*Acciones*
Argumentativas	
Darse cuenta que la resolución de una tarea matemática puede requerir argumentos sobre la composición de dos transformaciones geométricas: homotecia y giro.	Petición de argumentación sobre la composición de transformaciones geométricas *(Línea 87).* Exposición con argumentación sobre la definición de homotecia *(Línea 88).* Exposición con argumentación sobre la necesidad de componer dos transformaciones geométricas *(Línea 90).*
Identificar la importancia de los argumentos obtenidos a través de la visualización para justificar la resolución de una tarea geométrica.	Recapitulación sobre las propiedades de una homotecia e invitación a la búsqueda de alternativas *(Línea 91).* Exposición de evidencia empírica sobre la orientación en el plano de un polígono *(Línea 92).*

En el décimo extracto, que corresponde al tercer episodio de la discusión en gran grupo, observamos que la exposición sin argumentación sobre la obtención del centro de giro (línea 97) y la siguiente exposición de evidencia empírica sobre el ángulo de giro (línea 99) que realiza un alumno, Álex; así como la petición de comprobación sobre el sentido de la rotación que hace la profesora (línea 104) desencadenan la oportunidad de aprendizaje conceptual que caracterizamos matemáticamente por 'Identificar transformaciones geométricas con GeoGebra que resultan de componer un giro y una homotecia' (véase la Tabla 18). Además, la exposición sin argumentación que realiza otro alumno, Adrià, sobre la construcción del centro de homotecia (línea 109), y la petición de comprobación sobre la razón de semejanza (línea 110) que hace la profesora en la parte final del extracto completan la definición de esta oportunidad de aprendizaje conceptual.

Tabla 18. Caracterización de las oportunidades de aprendizaje del décimo extracto

Aspectos matemáticos	*Acciones*
Conceptual	
Identificar transformaciones geométricas con GeoGebra que resultan de componer un giro y una homotecia.	Exposición sin argumentación sobre la obtención del centro de giro *(Línea 97)*. Exposición de evidencia empírica sobre el ángulo de giro *(Línea 99)*. Complemento de explicación sobre la obtención del centro y ángulo de giro y petición de comprobación sobre el sentido de la rotación *(Línea 104)*. Exposición sin argumentación sobre el centro de homotecia *(Línea 109)*. Petición de comprobación sobre la razón de semejanza (*Línea 110*).

Por último, en el undécimo extracto, que corresponde al quinto episodio de la discusión en gran grupo, observamos que la petición de comprobación sobre tipos de homotecia según la razón de semejanza que realiza la profesora, Sara, al inicio del extracto (línea 112) favorece la creación de una oportunidad de aprendizaje conceptual que caracterizamos matemáticamente por 'Identificar distintos tipos de homotecia según el valor de la razón de semejanza' (véase la Tabla 19). Además, la recapitulación sobre homotecias de razón positiva y negativa que también hace Sara (línea 116), así como la formalización acerca de la homotecia identidad y la petición de explicación sobre una homotecia con razón igual a -1 (línea 129) completan la definición de esta oportunidad de aprendizaje conceptual. Observamos que la oportunidad se genera principalmente por las intervenciones de la profesora en el décimo extracto de la discusión en gran grupo.

Por otra parte, la exposición sin argumentación que realiza un alumno, Martí, sobre el efecto de una homotecia cuya razón de semejanza sea igual a -1 (línea 130); así como la invitación a la búsqueda de una nueva transformación geométrica que hace la profesora (línea 131), con el fin de interpretar geométricamente este tipo de homotecia, favorecen la creación de una oportunidad de aprendizaje conceptual que caracterizamos matemáticamente por 'Reconocer la equivalencia entre ciertas transformaciones geométricas'. Además, la intervención de una alumna, Alba, exponiendo sin argumentar la equivalencia entre una homotecia de razón igual a -1, un giro de 180º y una simetría central (línea 132); así como la recapitulación final de Sara (línea 133) completan la descripción de esta oportunidad de aprendizaje conceptual.

Tabla 19. Caracterización de las oportunidades de aprendizaje del undécimo extracto

Aspectos matemáticos	*Acciones*
Conceptuales	
Identificar distintos tipos de homotecia según el valor de la razón de semejanza.	Petición de comprobación sobre tipos de homotecia según la razón *(Línea 112)*. Recapitulación sobre homotecias de razón positiva y negativa *(Línea 116)*. Formalización acerca de la homotecia identidad y petición de explicación sobre una homotecia con razón -1 *(Línea 129)*.
Reconocer la equivalencia entre ciertas transformaciones geométricas. En particular, entre un giro de 180º, una simetría central y una homotecia de razón -1.	Exposición sin argumentación sobre el efecto de una homotecia cuya razón de semejanza sea igual a -1 *(Línea 130)*. Invitación a la búsqueda de una nueva transformación geométrica *(Línea 131)*. Exposición sin argumentación sobre una transformación geométrica *(Línea 132)*. Recapitulación sobre la equivalencia de algunas transformaciones geométricas *(Línea 133)*.

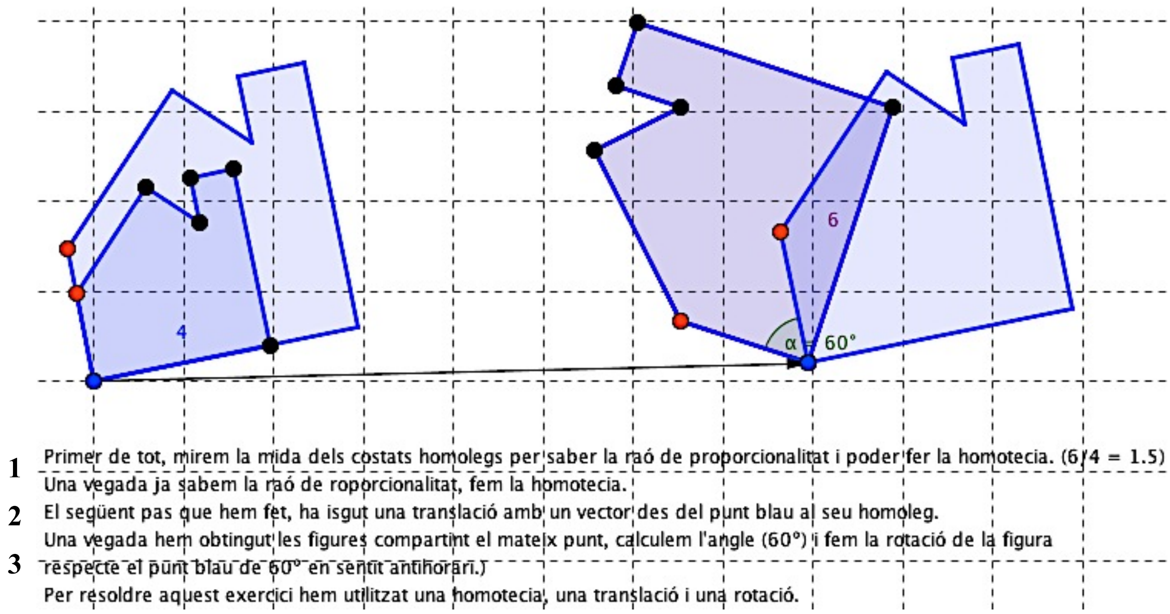
Análisis del aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje en la tercera tarea

Basándonos en las oportunidades de aprendizaje detectadas anteriormente, analizamos las respuestas de los dieciséis alumnos antes y después de la discusión en gran grupo. Así obtenemos evidencias concretas sobre cambios en la comprensión de un concepto o procedimiento matemático y encontramos nuevos elementos que los alumnos han incluido en sus reflexiones individuales, posteriores a la discusión en gran grupo de la tercera tarea. Ejemplificamos el análisis centrándonos en la oportunidad de aprendizaje conceptual caracterizada matemáticamente por ‘Identificar transformaciones geométricas con GeoGebra que resultan de componer un giro y una homotecia’.

En concreto, analizamos si las respuestas de los dieciséis alumnos detallan la composición de un giro de 60º y una homotecia de razón 3/2 en una figura poligonal. Además, en relación con el giro, los alumnos deben determinar el centro de la rotación, y con relación a la homotecia deben especificar el centro de esta transformación.

El análisis permite determinar tres tipologías de respuesta: ‘*solución que identifica la composición de un giro y una homotecia y detalla por completo los elementos que definen ambas transformaciones geométricas*’, es decir, el alumno compone un giro de 60º y una homotecia de razón 3/2, y explicita tanto el centro de la rotación como el centro de la homotecia; ‘*solución que identifica la composición de varias transformaciones geométricas pero no define por completo los elementos matemáticos que las caracterizan*’, es decir, el alumno resuelve la tarea componiendo dos o más transformaciones geométricas, aunque en su documento de GeoGebra no detalla los elementos matemáticos que las definen; por ejemplo, no hace referencia explícita al centro y al ángulo de giro; ni tampoco al centro de la homotecia y a la razón de semejanza; y ‘*solución que identifica la composición de varias transformaciones geométricas pero no presenta cambios antes y después de la discusión en gran grupo*’, es decir, el alumno no completa la solución obtenida en el trabajo por parejas durante su reflexión individual. En el Anexo XI se encuentra la codificación completa de las respuestas de los dieciséis alumnos a la tercera tarea, con relación a la composición de un giro y una homotecia.

En concreto, nueve de los dieciséis alumnos completaron el documento de GeoGebra obtenido después de la resolución por parejas incluyendo una solución basada en la composición de un giro y una homotecia. Además, su solución concretaba el centro y el ángulo de giro, y el centro de homotecia y la razón de semejanza. Ejemplificamos esta tipología de respuesta: ‘*solución que identifica la composición de un giro y una homotecia y detalla por completo los elementos que definen ambas transformaciones geométricas*’ con la resolución individual de Eduardo, que colaboró con Javier en el trabajo por parejas[10]. Eduardo y Javier determinaron "las medidas de los lados homólogos para saber la razón de proporcionalidad y poder hacer la homotecia" (véase la nota 1 de la Fig. 49). A continuación, realizaron "una translación con un vector desde el punto azul [vértice inferior-izquierdo del polígono] hasta su homólogo" (véase la nota 2 de la Fig. 49). Por último, construyeron "la rotación de la figura respecto del punto azul, de 60º, en sentido antihorario" (véase la nota 3 de la Fig. 49). En resumen, Eduardo y Javier resolvieron la tercera tarea componiendo tres transformaciones geométricas: una ampliación de razón 3/2, una translación a través de un vector y una rotación de 60º.



Notas

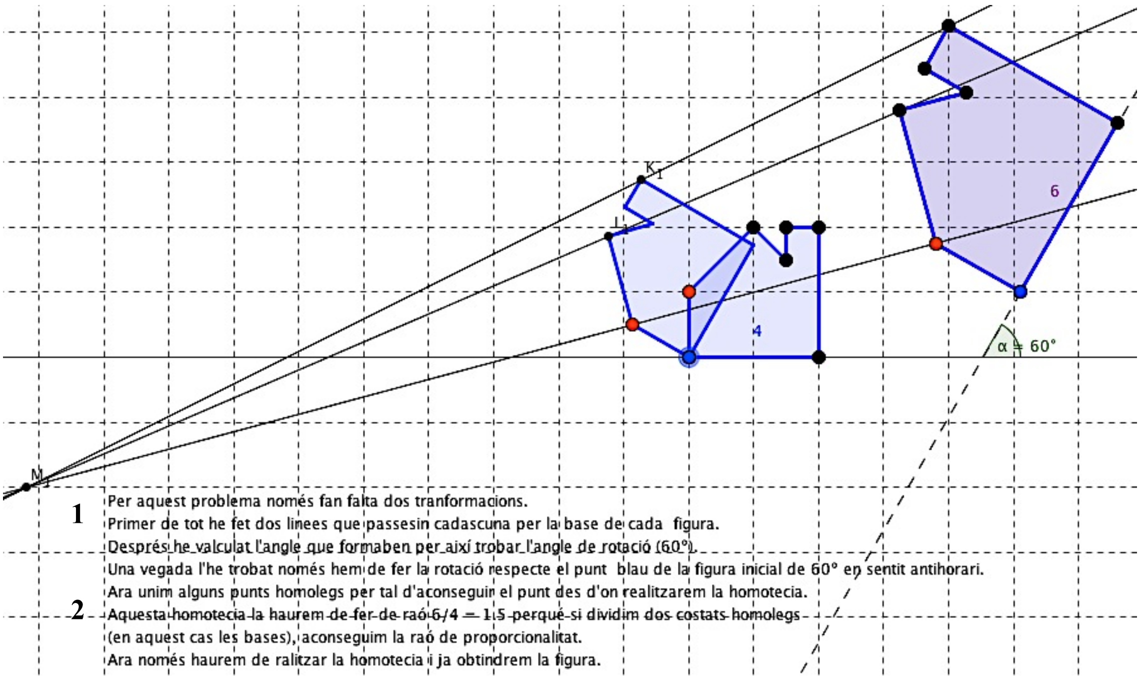
1. Primero de todo miramos las medidas de los lados homólogos para saber la razón de proporcionalidad y poder hacer la homotecia (6/4 = 1.5). Una vez ya sabemos la razón de proporcionalidad hacemos la homotecia.
2. El siguiente paso que hemos hecho ha sido una translación con un vector desde el punto azul hasta su homólogo.
3. Una vez hemos obtenido las figuras compartiendo el mismo punto, calculamos el ángulo (60º) y hacemos la rotación de la figura respecto del punto azul de 60º en sentido antihorario.

Figura 49. Resolución de Eduardo y Javier en el trabajo por parejas de la tercera tarea

Después de la discusión en gran grupo, Eduardo completó su documento de GeoGebra con una nueva resolución de esta tarea. Observó que solo eran necesarias dos

[10] Los alumnos resolvieron la tercera tarea con GeoGebra. Cada pareja obtuvo un único documento que fue modificado individualmente después de la discusión en gran grupo.

transformaciones geométricas, es decir, un giro y una homotecia. En primer lugar, Eduardo calculó los 60º del ángulo de giro y aplicó “una rotación respecto del punto azul [vértice inferior-izquierdo] de la figura inicial 60º en sentido antihorario” (véase la nota 1 de la Fig. 50). A continuación, este alumno unió “algunos puntos homólogos para conseguir el punto [centro] desde donde realizar la homotecia”, la cual tiene una razón de “6/4 = 1.5, porque si dividimos dos lados homólogos, en este caso las bases, conseguimos la razón de proporcionalidad” (véase la nota 2 de la Fig. 50). Por lo tanto, Eduardo fue capaz de componer un giro de 60º y una homotecia de razón 3/2, y explicitó en su documento de GeoGebra los elementos que definían ambas transformaciones geométricas.



Notas

1. Para este problema solo hacen falta dos transformaciones. Primero de todo he hecho dos líneas que pasasen cada una por la base de cada figura. Después he calculado el ángulo que formaban para así encontrar el ángulo de rotación (60º). Una vez lo he encontrado solo tenemos que hacer la rotación respecto del punto azul de la figura inicial de 60º en sentido antihorario.
2. Ahora unimos algunos puntos homólogos para conseguir el punto desde donde realizaremos la homotecia. Esta homotecia la tendremos que hacer de razón 6/4 = 1.5, porque si dividimos dos lados homólogos (en este caso las bases) conseguimos la razón de proporcionalidad.

Figura 50. Resolución de Eduardo a la tercera tarea después de la discusión en gran grupo

Por otra parte, tres de los dieciséis alumnos presentaron respuestas de la segunda tipología: '*solución que identifica la composición de varias transformaciones geométricas pero no define por completo los elementos matemáticos que las caracterizan*'. A continuación, como ejemplo de esta tipología, mostramos la resolución de María, que colaboró con Isabel en el trabajo por parejas (véase la Fig. 51).

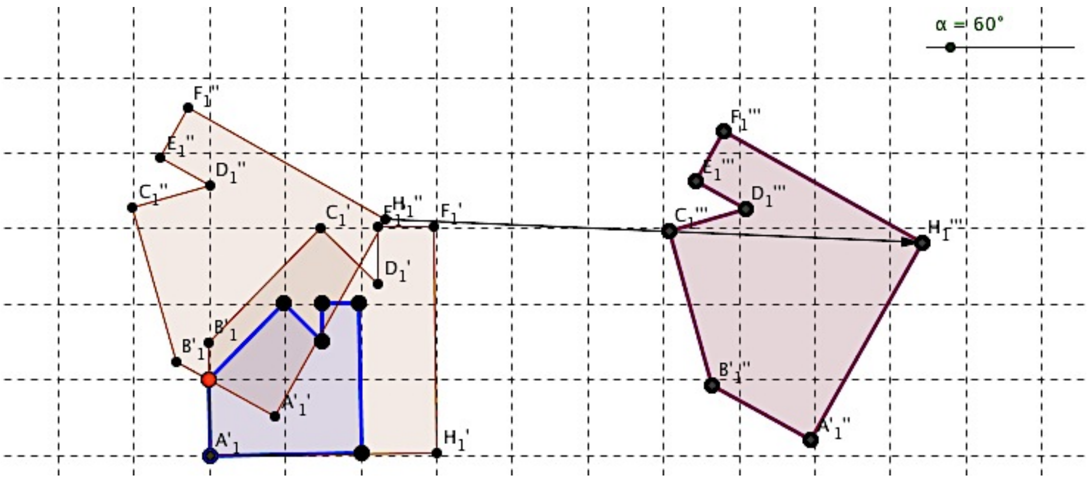
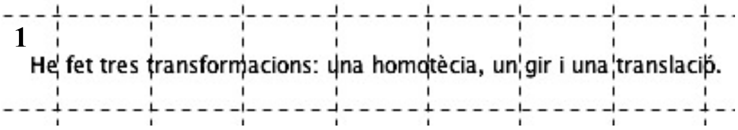


Figura 51. Resolución de María e Isabel en el trabajo por parejas de la tercera tarea

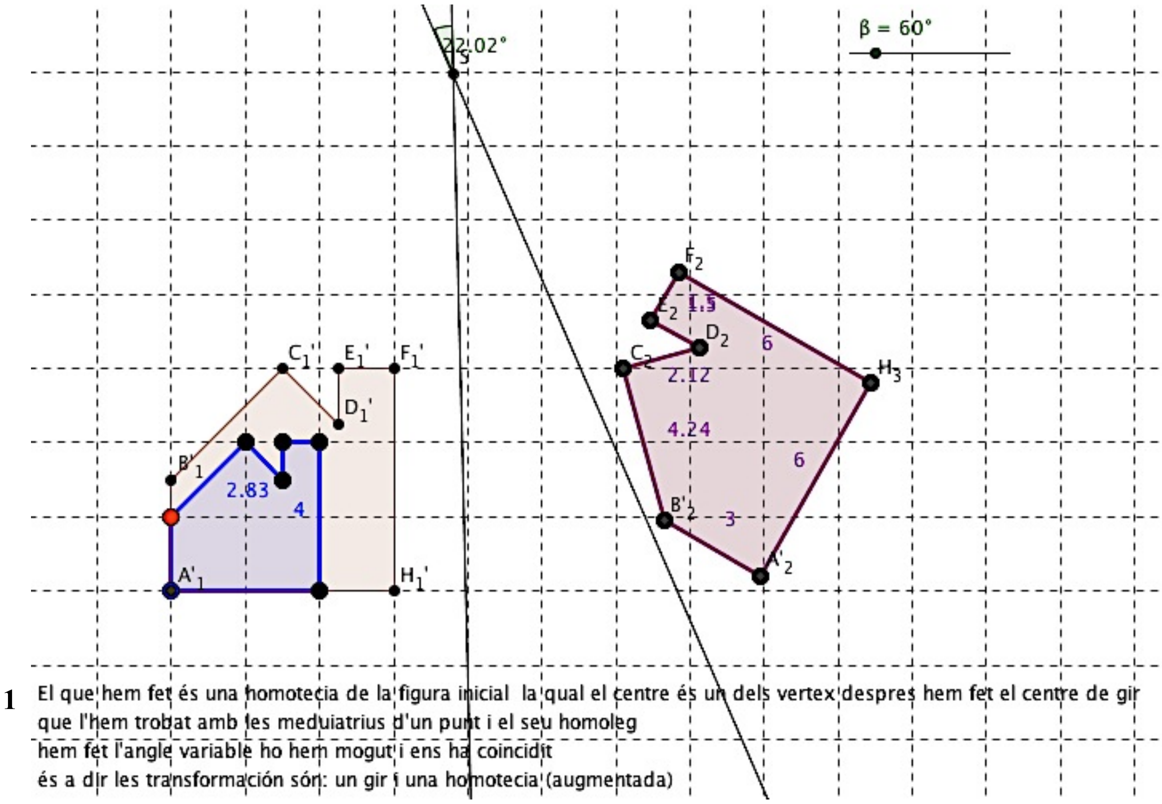
Observando la resolución por parejas de María e Isabel, interpretamos que estas dos alumnas resolvieron la tarea componiendo una ampliación, un giro y una traslación utilizando un vector. En concreto, aplicaron la ampliación en el vértice inferior-izquierdo del polígono inicial; calcularon el ángulo de giro utilizando un deslizador de GeoGebra; y dibujaron el vector de translación uniendo dos vértices homólogos. Aún así, en su documento de GeoGebra no realizaron explicaciones acerca de estas tres transformaciones geométricas. Más tarde, en la reflexión individual, María únicamente incorporó que "he hecho tres transformaciones: una homotecia, un giro y una translación" (véase la nota 1 de la Fig. 52). Por lo tanto, consideramos que la solución de esta alumna identifica la composición de varias transformaciones geométricas, pero no explica los elementos matemáticos que las caracterizan.



Nota
1. He hecho tres transformaciones: una homotecia, un giro y una translación.

Figura 52. Fragmento de la resolución individual de María a la tercera tarea

Por último, cuatro de los dieciséis alumnos presentaron en su documento de GeoGebra una ‘*solución que identifica la composición de varias transformaciones geométricas pero no presenta cambios antes y después de la discusión en gran grupo*’. Ejemplificamos esta tercera tipología de respuesta con la resolución de Berta, que colaboró con Irene en el trabajo por parejas (véase la Fig. 53).



Nota

1. Lo que hemos hecho es una homotecia de la figura inicial, el centro de la cual es uno de los vértices; después hemos hecho el centro de giro que hemos encontrado con las mediatrices de un punto y su homólogo. Hemos hecho el ángulo variable, lo hemos movido y nos ha coincidido; es decir, las transformaciones son: un giro y una homotecia (aumentada).

Figura 53. Resolución de Berta e Irene en el trabajo por parejas de la tercera tarea

Berta e Irene resolvieron la tercera tarea utilizando dos transformaciones geométricas. Primero realizaron “una homotecia de la figura inicial, el centro de la cual es uno de los vértices” (véase la nota 1 de la Fig. 53). Aunque no lo concretaron en el texto, se deduce que obtuvieron una homotecia con una razón de 3/2. Después aplicaron un giro, cuyo centro calcularon “con las mediatrices de un punto y su homólogo”. Además, construyeron un ángulo variable con un deslizador de GeoGebra para constatar que el ángulo de giro era de 60º. Más tarde, en la reflexión individual, Berta no incluyó ningún cambio en su fichero de GeoGebra. Por este motivo, interpretamos que Berta consideró que la solución obtenida en el trabajo por parejas ya resolvía la tarea por completo, y no era necesario realizar modificaciones después de la discusión en gran grupo.

4.2.5. *Análisis de un caso que ha manifestado aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje matemático conceptual en la secuencia de tres tareas de semejanza*

En este subapartado nos basamos en las oportunidades de aprendizaje matemático que hemos identificado anteriormente y seleccionamos el caso de una alumna, Alba, que ha manifestado aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje conceptual a lo largo de la secuencia de las tres tareas de semejanza. Esta alumna intervino con frecuencia en las discusiones en gran grupo y, después de cada discusión, incorporó cambios sustanciales en sus protocolos escritos de resolución.

En concreto, analizamos el progreso de Alba en las oportunidades de aprendizaje matemático conceptual que hemos caracterizado por 'Interiorizar el concepto y entender la definición de semejanza'; 'Reconocer la existencia de transformaciones geométricas que combinan una ampliación y una translación'; e 'Identificar transformaciones geométricas con GeoGebra que resultan de componer un giro y una homotecia'. Tal y como hemos descrito en los métodos de análisis de este trabajo (véase el subapartado 3.3.2), profundizamos en el estudio de los protocolos escritos de Alba, antes y después de las discusiones en gran grupo, con el fin de analizar la evolución que siguió la estudiante en la resolución de cada una de las tres tareas. Además, interpretamos que la evolución de Alba en la secuencia de tareas puede entenderse como un cambio en su trayectoria hipotética de aprendizaje, que le permitió incorporar nuevas nociones matemáticas en su conocimiento conceptual.

En la resolución por parejas de la primera tarea, Alba construyó un polígono el doble de grande, en el sentido que para cada cuadrado del polígono original utilizó dos cuadrados del grande. La construcción preservaba la semejanza pero cuadriplicaba el área. En su reflexión individual, la alumna profundizó en la resolución de esta tarea (véase la primera parte de la Fig. 54). Explicitó que el nuevo polígono, semejante al original, mantenía la proporción entre los lados homólogos y multiplicaba por cuatro su área, ya que de diez cuadraditos se pasaba a cuarenta. Además, resaltó que se podían conseguir figuras con el doble de área duplicando todos los segmentos verticales o horizontales.

Respecto a la oportunidad de aprendizaje sobre la definición de semejanza, interpretamos que Alba era consciente de los conceptos de proporcionalidad y semejanza. En la discusión en gran grupo manifestó que no todos los polígonos con el doble de área podían ser proporcionales, ya que solo lo serían si los lados homólogos mantenían la misma proporción (en el subapartado 4.2.2, véase la línea 41 de la transcripción del quinto extracto). Además, en su reflexión individual explicitó que las tres representaciones de la Figura 54 eran proporcionales, ya que se preservaba la razón de todos los lados homólogos y se mantenía la igualdad de los correspondientes ángulos.

En la resolución por parejas de la segunda tarea, Alba únicamente consideró que el triángulo grande era el doble que el pequeño. Por lo tanto, se debía realizar una ampliación del 200% para pasar del uno al otro, o bien una reducción del 50% para hacerlo al revés. En cambio, en la reflexión individual, la estudiante realizó una construcción gráfica que incluía una ampliación de razón 2 y una translación a través de un vector. Además de detallarlo, la alumna indicó que se debía aplicar una homotecia, refiriéndose a una ampliación, junto con un vector entre dos puntos homólogos (véase la segunda parte de la Fig. 54). También manifestó la necesidad de mantener la igualdad de ángulos homólogos para preservar la semejanza entre ambos triángulos y, así, realizar una construcción de dos triángulos homotéticos.

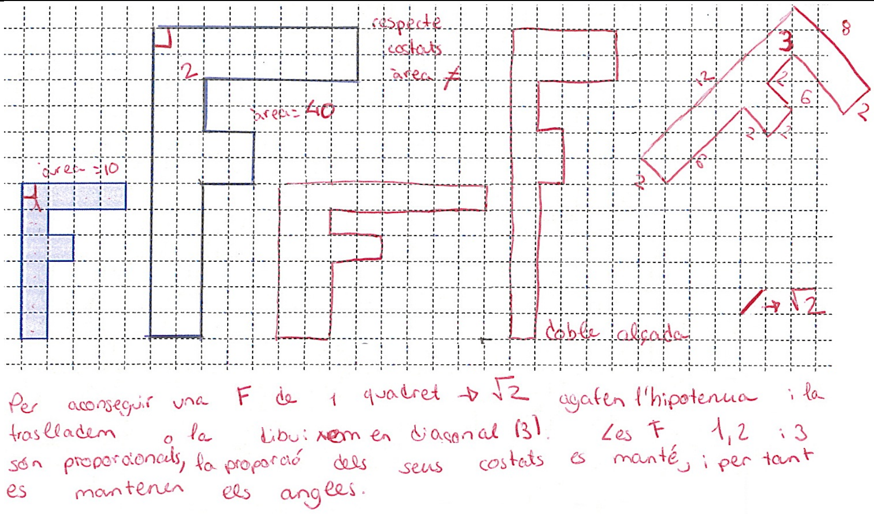
Respecto a la oportunidad de aprendizaje sobre la homotecia como transformación geométrica, Alba fue consciente de los términos ‘ampliación’ y ‘reducción’ desde un punto de vista global de la figura, al utilizar el 200% y el 50%, y también de la semejanza entre ambos polígonos. Configuró los triángulos en posición de Tales y era bastante claro que entendía la homotecia como una composición de una translación y una ampliación. La alumna interpretó la construcción de dos triángulos a partir de un centro de homotecia como una translación, pero añadiendo una ampliación del 200% o una reducción del 50%. Además, fue capaz de representar el centro de homotecia como el vértice inferior-izquierdo del triángulo, aunque no realizó ninguna explicación al respecto. Alba presentaba una idea emergente de que este centro actuaba como foco de la ampliación y, análogamente, de la reducción.

En la resolución por parejas de la tercera tarea, Alba compuso tres transformaciones (véase la tercera parte de la Fig. 54). En primer lugar, utilizó las medidas de los lados y aplicó una ampliación de razón 3/2 al polígono original. Luego identificó la necesidad de emplear un giro. Para ello, determinó el ángulo de la rotación y lo aplicó al vértice inferior-izquierdo del polígono ampliado. Por último, se inspiró en la reflexión individual de la actividad anterior para definir, con GeoGebra, un vector y hacer una translación que desplazase el polígono hacia su posición final. En la reflexión individual, la alumna observó que la tarea podía resolverse directamente con dos transformaciones, componiendo una homotecia y un giro. En primer lugar, aplicó una homotecia de razón 3/2 a la figura original y, posteriormente, una rotación de 60º al polígono ampliado. Para determinar el centro de giro intersecó las mediatrices entre los puntos homólogos de los dos polígonos.

En lo relativo a la oportunidad de aprendizaje sobre la composición de un giro y una homotecia, Alba interpretó adecuadamente la composición de ambas transformaciones. Aunque trabajando en pareja resolvió con éxito la composición, la discusión en gran grupo le ayudó a optimizar el procedimiento seguido. Así, en la reflexión individual fue capaz de resolver la tarea con solo dos transformaciones: homotecia y giro. Como en la segunda tarea, entendió el concepto de homotecia como una composición entre una ampliación de razón positiva y una translación, la cual definió a través de un vector.

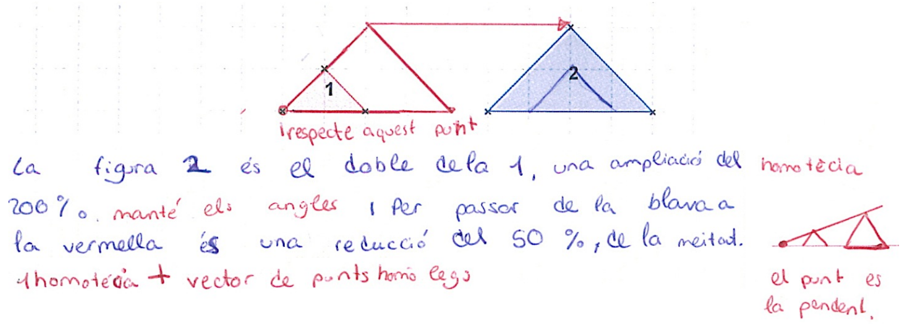
Finalmente, este análisis conjunto de las resoluciones de Alba a las tres tareas permite observar que la alumna aprovechó las tres oportunidades de aprendizaje para incorporar nuevas nociones matemáticas en su conocimiento conceptual. En concreto, en la primera tarea interiorizó el concepto de semejanza, al reconocer explícitamente la razón entre los lados homólogos de dos polígonos semejantes y mencionar la necesidad de preservar sus correspondientes ángulos. En la segunda tarea, la alumna reconoció la existencia de una transformación geométrica, la homotecia, que combinaba una ampliación y una translación. Este hecho resultó clave para resolver con éxito la tercera actividad matemática. Además, aprovechó la discusión en gran grupo para darse cuenta de la necesidad de utilizar un vector y conseguir así la translación que resolvía la tarea. Este elemento lo incluyó en su protocolo de reflexión individual y lo utilizó en la resolución por parejas de la siguiente actividad. Por último, Alba pudo identificar transformaciones geométricas como resultado de componer un giro y una homotecia de razón positiva.

Primera parte – Resolución final de Alba a la tarea 1



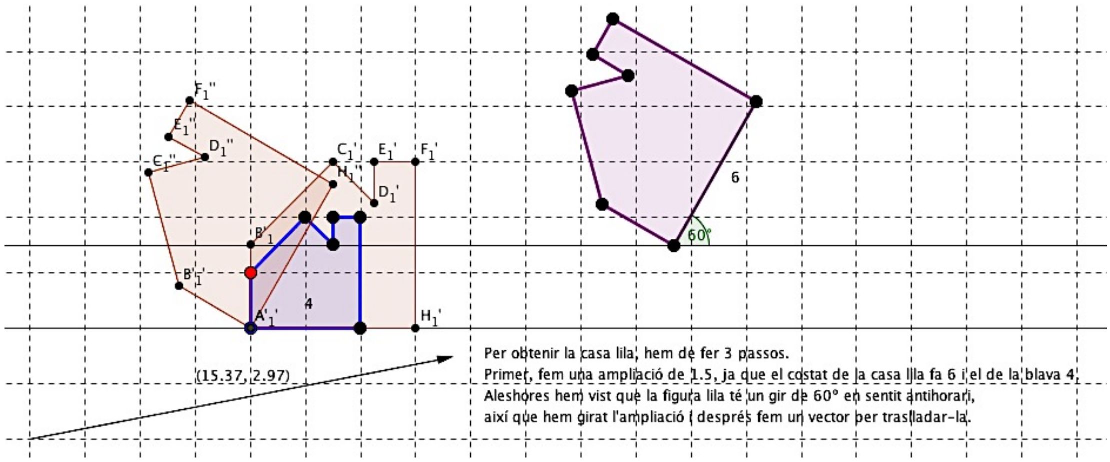
Para conseguir una 'F' de 1 cuadrado → √2. Tomamos la hipotenusa y la trasladamos, o la dibujamos en diagonal (3). Las 'F' (1), (2) y (3) son proporcionales, la proporción de sus lados se mantiene y, por tanto, se mantienen los ángulos.

Segunda parte – Resolución final de Alba a la tarea 2



La figura 2 es el doble de la 1, una ampliación del 200%. Mantiene los ángulos. Para pasar de la azul a la roja hay que hacer una reducción del 50%, de la mitad. Homotecia + vector de puntos homólogos.

Tercera parte – Resolución por parejas de Alba a la tarea 3



Para obtener la casa de la derecha hay que hacer 3 pasos. Primero, hacemos una ampliación de [razón] 1.5, ya que el lado de la casa violeta [derecha] hace 6 y el de la casa azul [izquierda] 4. Entonces, hemos visto que la figura violeta [derecha] tiene un giro de 60º en sentido antihorario, así que hemos girado la ampliación y después hacemos un vector para trasladarla.

Figura 54. Resumen de las resoluciones de Alba a la tres tareas

4.2.6. *Análisis conjunto de las oportunidades de aprendizaje matemático según las rúbricas del IQA*

En este subapartado aplicamos las diez rúbricas del IQA, que se evalúan con valores discretos entre 0 y 4, al conjunto de las tres tareas de semejanza. Así, obtenemos un indicador numérico sobre las oportunidades de aprendizaje matemático que se generan a los estudiantes a lo largo de una discusión en gran grupo. Como hemos descrito en el marco teórico de este trabajo (véase el subapartado 2.1.1), consideramos que cuánto mayores son las puntuaciones en las rúbricas del IQA, más probable es que los alumnos se vean inmersos en discusiones en gran grupo en las que se generen oportunidades de aprendizaje matemático. En los párrafos siguientes detallamos el análisis utilizando las diez rúbricas del IQA.

La primera rúbrica, «*Potencial de las tareas*», trata sobre la demanda cognitiva de las actividades matemáticas tal y como se plantean en los materiales curriculares que utilizan los alumnos en clase. Asignamos 4 puntos a esta rúbrica, ya que las tres tareas fomentan la exploración y comprensión matemática de la naturaleza de los procedimientos y conceptos, así como de las relaciones que se establecen entre ellos. En concreto, en la primera tarea, *¡Doblar figuras!*, los alumnos deben hacer conexiones entre diferentes formas de entender el enunciado de la tarea, con el fin de duplicar el perímetro o el área de una figura poligonal. De esta forma, pueden relacionar distintas estrategias de resolución con el concepto matemático de semejanza entre dos polígonos. En la segunda tarea, *Cambiar las medidas de los polígonos*, los estudiantes deben hacer explicaciones para describir el concepto matemático de homotecia, entendido como una transformación geométrica que combina una ampliación o reducción y una translación a través de un vector. Por último, en la tercera tarea, *Transformaciones geométricas*, los alumnos pueden realizar conjeturas para identificar con GeoGebra la composición de una homotecia de razón positiva y un giro. Además, deben elaborar explicaciones sobre los elementos matemáticos característicos de ambas transformaciones geométricas.

La segunda rúbrica, «*Implementación de las tareas en clase*», trata sobre la demanda cognitiva de las tareas cuando son implementadas en el aula y una vez los alumnos empiezan a resolverlas. Asignamos 3 puntos a esta rúbrica, ya que los estudiantes se involucraron en la resolución de tres tareas que proporcionaban significado matemático a conceptos y procedimientos. Aún así, no podemos asignarle 4 puntos, ya que no todos los alumnos de la clase fueron capaces de generalizar ni conectar los elementos matemáticos que componían la resolución de las tres tareas. En concreto, en la primera tarea, algunos alumnos no relacionaron la duplicación del perímetro de una figura con la definición de semejanza; o bien no generalizaron su solución con la obtención de un polígono que duplicase el área y mantuviese la semejanza con el polígono original. En la segunda tarea, algunos alumnos no relacionaron la transformación geométrica que combinaba una ampliación y una translación con una homotecia de razón positiva. Por último, en la tercera tarea, los alumnos utilizaron varias estrategias para resolverla, pero no todos pudieron establecer conexiones entre ellas. Por ejemplo, pocos alumnos explicaron las diferencias que había entre aplicar primero un giro y después una homotecia, o bien hacerlo al revés.

La tercera rúbrica, «*Discusión de los estudiantes durante la implementación de las tareas*», mide hasta qué punto los alumnos son capaces de exponer y discutir sus resoluciones de las actividades matemáticas y explicar la comprensión de los contenidos con los que están trabajando. Asignamos 3 puntos a esta rúbrica, ya que los alumnos participaron en discusiones en gran grupo de tres tareas de semejanza donde se expusieron las ideas matemáticas más relevantes de cada actividad. En estas discusiones los alumnos proporcionaron explicaciones sobre la validez de sus estrategias, ideas o procedimientos matemáticos. Aún así, a menudo sus explicaciones no fueron del todo completas ni lo bastante precisas, y la profesora fue quien tuvo que completarlas. Por ejemplo, las siguientes líneas de la transcripción del quinto episodio de la discusión en gran grupo de la tercera tarea muestran que la profesora, Sara, tuvo que completar las exposiciones de dos alumnas, Isabel y Alba (líneas 135 y 137), con el fin de precisar el efecto que produce una homotecia de razón 0 en un polígono (línea 138).

134. Sara: ¿Si yo hago una homotecia de razón 0, ¿qué me hará?

135. Isabel: Desaparece.

136. Sara: ¿Desaparece? ¿Dónde va a parar? Todos estos puntos del contorno de la casa 1, ¿qué números serán sus homólogos?

137. Alba: Irán al centro de la homotecia.

138. Sara: Al centro de la homotecia. Me los lleva hacia el centro; me los multiplica por 0. Por lo tanto, me multiplica aquella distancia por 0. Me lo

> concentra todo en el mismo punto. Por lo tanto, no me transforma la casa en otra casa, sino que me transforma la casa entera en un punto. Lo comprime todo allá.

La cuarta rúbrica, «*Rigor de las preguntas del profesor*», mide el tipo y cantidad de preguntas que la profesora facilita a sus alumnos a lo largo de las sesiones de clase. Asignamos 4 puntos a esta rúbrica, ya que la profesora, Sara, gestionó las discusiones en gran grupo de las tres tareas formulando muchas preguntas académicamente relevantes para el grupo. Estas preguntas proporcionaron a los alumnos oportunidades para explicar su trabajo matemático a los demás compañeros y les facilitaron la identificación y descripción de las ideas matemáticas más relevantes del tema estudiado. Un ejemplo lo encontramos en el cuarto extracto, que corresponde a un fragmento del quinto episodio de la discusión en gran grupo de la primera tarea (véanse líneas 25-37 del subapartado 4.2.2). En este extracto la profesora formuló preguntas a los estudiantes con el fin de que reflexionasen sobre cómo duplicar el área de un polígono manteniendo la semejanza con el polígono original.

La quinta rúbrica, «*Huella matemática que queda en los alumnos*», mide el grado en el que la discusión en gran grupo crea nuevas e importantes ideas matemáticas en los alumnos. Asignamos 3 puntos a esta rúbrica, ya que las discusiones en gran grupo de las tres tareas crearon oportunidades de aprendizaje matemático a los alumnos, tal y como hemos analizado en los subapartados 4.2.2, 4.2.3 y 4.2.4 de este trabajo. Aún así, no todos los alumnos consiguieron completar sus protocolos escritos de resolución después de las discusiones en gran grupo y, por lo tanto, no manifestaron el mismo grado de aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje analizadas. Aunque fueron una minoría de los alumnos de la clase, en la primera tarea algunos estudiantes no hicieron referencias a la definición de semejanza en sus protocolos escritos; en la segunda tarea hubo alumnos que no detallaron los elementos matemáticos que definen una homotecia; y en la tercera tarea algunos alumnos no definieron por completo los elementos que caracterizan un giro de 60º y una homotecia de razón 3/2.

La sexta rúbrica, «*Participación de los estudiantes en la comunidad de aprendizaje*», determina el porcentaje de alumnos que participan en la discusión en gran grupo. Asignamos 3 puntos a esta rúbrica, ya que entre el 50% y el 75% de los estudiantes intervinieron en las discusiones en gran grupo de las tres tareas. En concreto, en la primera tarea intervinieron nueve alumnos (véase el Anexo VI), del total de dieciséis alumnos de la clase, hecho que representa un 56,25%. En la segunda tarea participaron diez alumnos (véase el Anexo VIII), que representa un 62,5% del total. Por último, en la tercera tarea, intervinieron once alumnos (véase el Anexo X), es decir, el 68,75% del total. Así, la participación media en el total de las tres tareas corresponde a diez alumnos, es decir, un 62,5%.

La séptima rúbrica, «*Conexiones del profesor entre las contribuciones de los alumnos*», mide el número de veces que la profesora conecta las aportaciones de los estudiantes a lo largo de la discusión en gran grupo. Asignamos 3 puntos a esta rúbrica, ya que por lo menos dos veces durante la discusión en gran grupo de cada tarea, la profesora, Sara, conectó las contribuciones de los alumnos en la discusión. Además, facilitó oportunidades a los alumnos para exponer cómo las ideas matemáticas surgidas en las discusiones en gran grupo se relacionaban entre sí. Esto se observa en los once extractos seleccionados para el análisis de las tres tareas y, también, en las transcripciones completas de las tres discusiones en gran grupo que figuran en los anexos de este trabajo. Por ejemplo, en el tercer extracto, que corresponde a un fragmento del tercer episodio de la discusión en gran grupo de la primera tarea, Sara conectó las intervenciones de dos alumnos, Martí y Adrià, con el fin de invitar a la participación a todos los alumnos de la clase (línea 17) y, así, construir una figura poligonal con el doble de perímetro.

17. Sara: Por tanto, si esta altura [de la 'F'] valía seis, la has hecho de 12. Pero antes, ¿qué han dicho Martí y Adrià?

La octava rúbrica, «*Conexiones de los alumnos entre las contribuciones de todos los participantes*», mide el número de veces en el que los estudiantes conectan distintas contribuciones durante la discusión en gran grupo. Asignamos 1 punto a esta rúbrica, ya que los estudiantes no realizaron conexiones entre las contribuciones de los demás compañeros sin la intervención de la profesora como mediadora de las discusiones en gran grupo. Tal y como se observa en el análisis de los modos de interacción de los participantes en las tres tareas, durante las tres discusiones en gran grupo se produjeron sucesiones encadenadas de acciones entre la profesora y los estudiantes, o al revés, pero no se observaron conexiones directas entre las intervenciones de diferentes alumnos.

La novena rúbrica, «*Preguntas del profesor a los alumnos*», mide el grado en el que la profesora solicita explicaciones a los estudiantes sobre procedimientos o conceptos matemáticos a lo largo de la discusión en gran grupo. Asignamos 3 puntos a esta rúbrica, ya que al menos dos veces durante cada discusión en gran grupo la profesora preguntó a los alumnos por pruebas argumentadas sobre sus contribuciones orales y razonamientos matemáticos. Por ejemplo, en el cuarto extracto, que corresponde a un fragmento del quinto episodio de la discusión en gran grupo de la primera tarea, la profesora, Sara, invitó a una alumna, Isabel, a que realizase una explicación sobre la duplicación del área de un polígono preservando la semejanza (línea 33). Esta explicación permitió iniciar una discusión con el grupo sobre el término $\sqrt{2}$ (líneas 31 y 34).

31. Sara: ¿Todo el mundo ha entendido esto de la $\sqrt{2}$?

32. Grupo: No.

33. Sara: Isabel, ¡explica esto bien!

34. Isabel: Pues que en la figura inicial cada cuadrado tiene lado 1 y aquí en cada cuadradito el lado es 2, entonces el área es cuatro veces más grande. Por esto, nos interesaría que el lado del cuadradito fuese $\sqrt{2}$.

La décima rúbrica, «*Respuestas de los estudiantes*», trata sobre el tipo de explicaciones de temas matemáticos que proporcionan los alumnos a lo largo de la discusión en gran grupo. Asignamos 3 puntos a esta rúbrica, ya que al menos una o dos veces en cada discusión en gran grupo los alumnos realizaron explicaciones razonadas, tanto conceptuales como procedimentales, sobre la actividad matemática que se estaba comentando. Por ejemplo, en el noveno extracto, que corresponde a un fragmento del segundo episodio de la discusión en gran grupo de la tercera tarea, una alumna, Alba, argumentó la necesidad de componer al menos dos transformaciones geométricas, un giro y una homotecia, para poder resolver la tarea matemática (líneas 88 y 90).

87. Sara: ¿Cómo me podéis demostrar que no se puede? ¿Qué argumento tenéis para convencerme de que no hace falta que busque porque no podré ir con una única transformación?

88. Alba: Con solo una homotecia no puede ser porque los puntos homólogos no coinciden.

89. Sara: No se cortan todos en un punto. De acuerdo, esto sería un argumento.

90. Alba: Y como que la casa es más grande, no habría ninguna otra transformación que la hiciese más grande que no fuese la homotecia, entonces tendríamos que hacer dos como mínimo.

Finalmente, la Tabla 20 resume las puntuaciones obtenidas en cada una de las rúbricas del IQA. Observamos que la puntuación media de las diez rúbricas es de 3 puntos, siendo 4 la puntuación máxima que se podía obtener.

Tabla 20. Resumen de puntuaciones en las rúbricas del IQA

Rúbrica	*Puntuación*
«Potencial de las tareas»	4
«Implementación de las tareas en clase»	3
«Discusión de los estudiantes durante la implementación de las tareas»	3
«Rigor de las preguntas del profesor»	4
«Huella matemática que queda en los alumnos»	3
«Participación de los estudiantes en la comunidad de aprendizaje»	3
«Conexiones del profesor entre las contribuciones de los alumnos»	3
«Conexiones de los alumnos entre las contribuciones de los participantes»	1
«Preguntas del profesor a los alumnos»	3
«Respuestas de los estudiantes»	3
Puntuación media	3

Interpretación fuzzy de las rúbricas del IQA

Los parámetros de evaluación de la rúbricas del IQA contienen imprecisión en su formulación. Por ejemplo, se le asigna un 4 a la tarea del profesor para realizar preguntas a los alumnos si este lo hace ‘casi siempre’. En otras ocasiones, comprobamos que el modo de romper con esta imprecisión es algo artificial, ya que se evalúan de una forma distinta las conexiones entre los estudiantes si estos enlazan dos o tres veces las aportaciones de sus compañeros, considerando que si lo hacen en tres ocasiones se realiza de forma sistemática. En relación con la rúbrica de participación, hacer esta escala categórica implica que se pierde una parte de la información obtenida en el transcurso de la discusión en gran grupo, ya que se evalúa igual una discusión en la que intervino un 74% de los alumnos de la clase, que una discusión donde intervino un 51%.

En primer lugar, en el caso de la participación, se puede calcular el porcentaje exacto de participantes, que en nuestro caso corresponde a un 62,5% de media en las tres tareas, y realizar esa escala categórica entre cien valores. No obstante, creemos que es poco relevante distinguir entre dos porcentajes muy próximos. Por ejemplo, una participación del 74% y una del 75% no podría diferenciarse adecuadamente en una escala categórica de cuatro puntos, como sucede con las rúbricas del IQA, ni tampoco en una escala categórica de cien puntos, la cual además nos podría dificultar el estudio.

Como segunda aproximación a una evaluación de una discusión en gran grupo más fiel a la realidad, que pueda recoger más matices que las escalas categóricas de las rúbricas del IQA, podemos pensar en describir un continuo haciendo uso de intervalos flexibles. Por ejemplo, así permitimos que si se producen dos conexiones entre las aportaciones de los estudiantes durante la discusión en gran grupo, el valor se pueda situar entre el 3 y el 4; para diferenciar el caso de que solo haya una conexión a lo largo de toda la discusión en gran grupo.

En cualquier caso, al describir un intervalo también surgen algunas dificultades. La principal dificultad es cómo definir adecuadamente los extremos de dicho intervalo. No parece natural exigir exactitud en la definición de los extremos si justamente se habla de preguntas y respuestas imprecisas. Por este motivo, la propuesta que planteamos en este trabajo consiste en hacer una evaluación de un continuo, asignando un valor de creencia entre el 0 y el 1 a cada punto del intervalo. Este hecho nos permitirá flexibilizar la elección de los extremos, originando los conjuntos borrosos trapezoidales que hemos introducido en los métodos de análisis del subapartado 3.3.2 de este trabajo.

En los párrafos siguientes mostramos el análisis *fuzzy* de las diez rúbricas del IQA. Recordemos que una descripción detallada de estas rúbricas se muestra en el subapartado 2.1.1 del marco teórico de este trabajo.

Con relación a la rúbrica sobre el «Potencial de las tareas», observamos que las tres actividades matemáticas se pueden resolver de distintas formas, ya que los alumnos pueden relacionar varios contenidos matemáticos con el fin de afianzar su significado. Los contenidos involucrados pasan por la definición de semejanza y de homotecia, y se relacionan con conceptos transversales como la noción de proporcionalidad, perímetro, área o número irracional. Así pues, la resolución de las tres tareas no requiere el uso de un pensamiento algorítmico, por lo que según la correspondiente rúbrica del IQA puede asignarse un nivel 4, tal y como hemos hecho anteriormente. Sin embargo, como se detalla en el nivel 3 de la rúbrica, no se puede garantizar el siguiente nivel a menos que los estudiantes alcancen una generalización o presenten justificaciones detalladas de los hechos matemáticos. Esto último se matiza en el desarrollo de la tarea en el aula, ya que el IQA recoge la capacidad de la profesora para realizar preguntas sobre la obtención de diversas estrategias de resolución, para probar conjeturas o dar significado a procedimientos matemáticos; como por ejemplo la determinación de los elementos que caracterizan una homotecia, es decir, el centro y la razón de semejanza. Por lo tanto, la profesora puede inducir a sus alumnos, en mayor o menor medida, a que lleguen a generalizaciones o bien se queden solo con la ratificación de la efectividad de una estrategia de resolución concreta.

Basándonos en estas consideraciones, el uso de conjuntos borrosos permite presentar un análisis más matizado del potencial de las tres tareas (véase la Fig. 55).

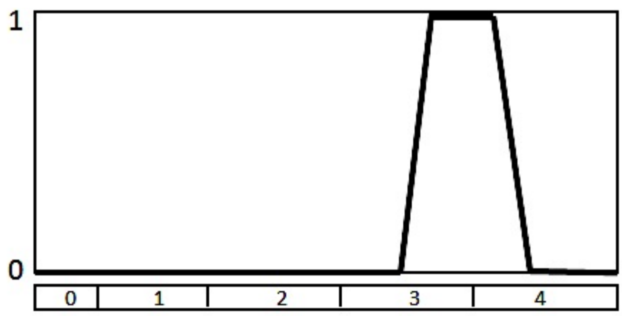


Figura 55. Análisis *fuzzy* del potencial de las tareas

En concreto, representamos un conjunto borroso desplazado hacia niveles altos, ya que consideramos que los alumnos son conscientes de la importancia de relacionar conceptos matemáticos y de argumentar sus resoluciones, aunque sea previa petición de la profesora durante la discusión en gran grupo.

En relación con la «Implementación de las tareas en clase», destacamos que la aplicación clásica de esta rúbrica asigna una puntación de 3 a las discusiones en gran grupo gestionadas por la profesora, Sara. Aún así, basándonos en la descripción de la rúbrica, determinamos que bastantes alumnos alcanzaron el nivel 4.

Aunque esto no pueda ser generalizado, la percepción general del grupo-clase se aproxima al nivel 4. Por lo tanto, diseñamos un conjunto borroso que se sitúa con seguridad entre 3 y 4, recogiendo la compatibilidad con el nivel 3 aunque la seguridad de estar en este nivel no sea total (véase la Fig. 56).

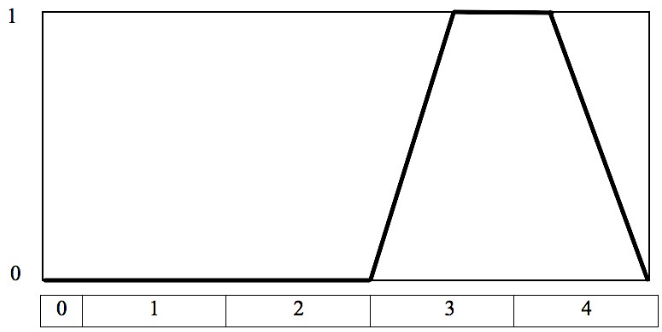


Figura 56. Análisis *fuzzy* de la implementación de las tareas en clase

Respecto a la «Discusión de los estudiantes durante la implementación de las tareas», señalamos que los alumnos, como grupo, se encuentran en el nivel 3 de la rúbrica. Sin embargo, podemos detectar algunas características propias del nivel 2, como son la falta de conexiones entre las aportaciones de los estudiantes, y el hecho de que algunos alumnos, como Berta (véase la Fig. 53 del subapartado 4.2.4), no mostraron en el protocolo escrito de la tercera tarea nuevas estrategias de resolución surgidas en la discusión en gran grupo. Por lo tanto, aunque asignamos una puntuación de 3 a esta rúbrica, adjudicamos un cierto grado de pertenencia al nivel 2 (véase la Fig. 57).

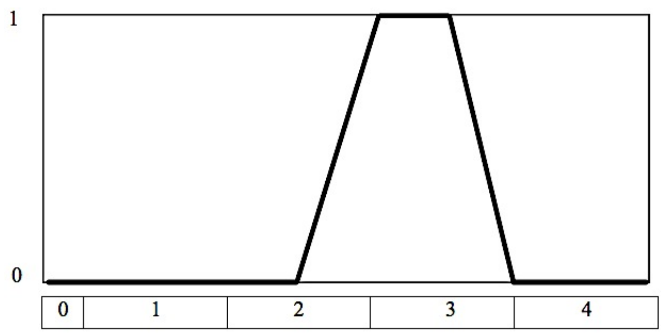


Figura 57. Análisis *fuzzy* de la discusión de los alumnos durante la implementación de las tareas

En parte impulsado por la elaboración del «árbol del problema», la profesora, Sara, logra promover la discusión formulando un gran número de preguntas a los estudiantes, a través de las cuales les pide pruebas argumentadas y conecta sus ideas. Por este motivo, asignamos un nivel 4 a la rúbrica del «Rigor de las preguntas del profesor». Según el IQA, el nivel 3 debe asignarse a las discusiones en las que el profesor formula este tipo de preguntas al menos 2 veces, aunque bajo nuestro punto de vista, Sara lo hace continuamente a lo largo de las discusiones en gran grupo. Por este motivo, tanto en la aplicación clásica de la rúbrica, como en la borrosa, le asignamos una puntuación de 4 (véase la Fig. 58).

Figura 58. Análisis *fuzzy* del rigor de las preguntas del profesor

La valoración de la «Huella matemática que queda en los estudiantes» hace referencia a la discusión de los conceptos matemáticos, las ideas y las conexiones efectuadas entre las representaciones de estos conceptos. Por este motivo, le asignamos 3 puntos a la rúbrica. Aún así, hay alumnos que muestran en sus protocolos escritos de reflexión individual, una clara comprensión de la finalidad de la tarea y del procedimiento utilizado para resolverla. En concreto, esto se observa con la resolución de Alba a la tercera tarea (véase la Fig. 54 del subapartado 4.2.5). Por lo tanto, asignamos una huella matemática de nivel 3, matizada con algunas características propias del nivel 4 (véase la Fig. 59).

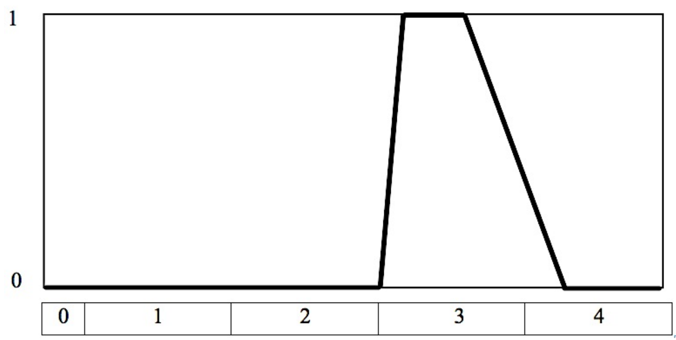


Figura 59. Análisis *fuzzy* de la huella matemática que queda en los alumnos

Respecto a la «Participación de los estudiantes en la comunidad de aprendizaje», destacamos que esta rúbrica solo tiene en cuenta el porcentaje de alumnos que intervienen, al menos una vez, en cada discusión en gran grupo. Por lo tanto, asigna 3 puntos al conjunto de las tres tareas de semejanza. No obstante, se pueden distinguir aspectos relacionados con la participación no verbal (Ferreiro, 2005), como son la atención, escucha e implicación en el aula; la frecuencia de participación, reflexión y corrección gramatical de las aportaciones; o la iniciativa a la participación, es decir, si surge espontáneamente o bien es fruto de una pregunta que realiza la profesora. El análisis de todos estos aspectos influye en que la percepción de la participación en el aula varíe más allá del cómputo del porcentaje indicado por la rúbrica. El conjunto borroso permite recoger todos estos elementos (véase la Fig. 60). Así, en el caso de las tres discusiones en gran grupo gestionadas por la profesora Sara, observamos que, además de un porcentaje medio de participación del 62,5%, se obtienen puntuaciones altas en los demás aspectos que se recopilan en la Tabla 21.

Tabla 21. Estudio de diferentes aspectos de la participación

	Niveles				
	0 (nulo)	*1 (bajo)*	*2 (medio)*	*3 (alto)*	*4 (total)*
Porcentaje de participación				**x**	
Participación no verbal					**x**
Grado de reflexión de los estudiantes en la participación oral (sobre el contenido)			**x**		
Corrección gramatical de la aportación				**x**	
Iniciativa de la participación del alumno				**x**	

El conjunto borroso representado en la Figura 60 refleja los elementos obtenidos en el análisis anterior. Para su construcción damos más peso al porcentaje de participación y, basándonos en este dato, determinamos el lugar dónde tenemos una confianza alta de que se sitúe el nivel (base menor del trapecio). Para fijar la amplitud del trapecio, que corresponde con su base mayor, tenemos en cuenta los demás ítems de la Tabla 21. En el diseño del conjunto borroso evidenciamos una participación alta de los alumnos de Sara en el conjunto de las discusiones en gran grupo de las tres tareas de semejanza.

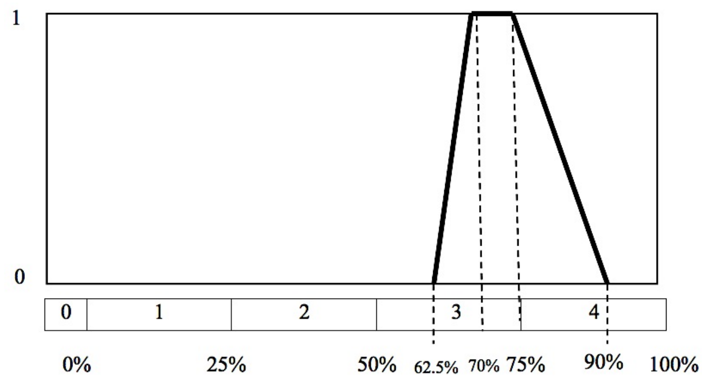


Figura 60. Análisis *fuzzy* de la participación

En relación con la rúbrica de «Conexiones del profesor entre las contribuciones de los alumnos», destacamos que las conexiones que Sara realiza entre las ideas de los estudiantes son mayoritariamente lo que el IQA define por *weak links*, las cuales son propias del nivel 2 de esta rúbrica. No obstante, la aplicación rigurosa de la rúbrica la sitúa en un nivel 3, ya que la profesora hace conexiones al menos dos veces en cada discusión en gran grupo (véanse los extractos seleccionados en los subapartados 4.2.2, 4.2.3 y 4.2.4). Apoyándonos en esta información, asignamos una valoración de nivel 3 con aspectos del nivel 2, tal y como se muestra en el conjunto borroso de la Figura 61.

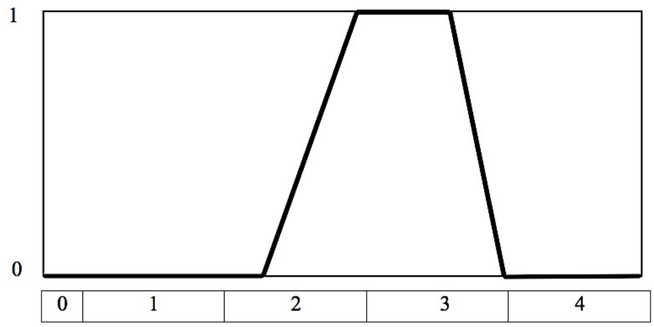


Figura 61. Análisis *fuzzy* de las conexiones del profesor entre las contribuciones de los alumnos

La rúbrica dedicada a las «Conexiones de los alumnos entre las contribuciones de los participantes» es la que obtiene una puntuación más baja dentro del conjunto de las diez rúbricas del IQA. En concreto, solo le asignamos 1 punto, ya que no hay evidencias de conexiones en las discusiones en gran grupo. Por otro lado, el hecho de que los alumnos hagan un acercamiento inicial a la tarea trabajando por parejas propicia, al menos, las conexiones dentro de la pareja. Además, aunque de facto, los alumnos muestran conformidad con las estrategias que muestran sus compañeros durante cada discusión. Por lo tanto, la representación borrosa de esta rúbrica es la que recoge más imprecisión, asignando con seguridad un valor entre 1 y 2 (véase la Fig. 62). De todas formas, esto no es incompatible con la existencia de conexiones a mayor nivel con grado de creencia bajo. Todo esto se ve impulsado por la influencia de las discusiones que realizan los alumnos en el trabajo por parejas, previamente a las discusiones en gran grupo.

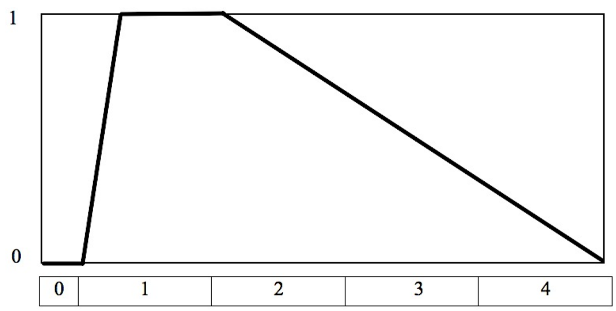


Figura 62. Análisis *fuzzy* de las conexiones de los alumnos entre todas las contribuciones

En relación con la rúbrica sobre las «Preguntas del profesor a los alumnos», señalamos que, en general, las preguntas que hace la profesora en las tres discusiones en gran grupo permiten el establecimiento de diálogos con los alumnos, ya que frecuentemente les pregunta por argumentaciones y razonamientos matemáticos. Por este motivo, asignamos 3 puntos a esta rúbrica y diseñamos el conjunto borroso desplazando los valores hacia los niveles altos (véase la Fig. 63). Aún así, la rúbrica puede inducirnos a creer que hacer más de dos preguntas sobre pruebas matemáticas o razonamientos equivale a hacerlo consistentemente. Bajo nuestro punto de vista, afirmar que algo ocurre consistentemente tiene que ir más allá de una mera contabilización de preguntas.

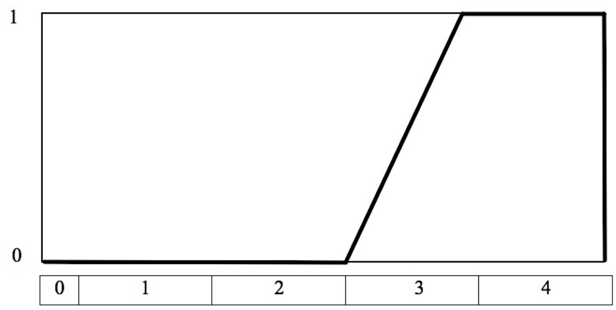


Figura 63. Análisis *fuzzy* de las preguntas de la profesora, Sara, a los alumnos

La última rúbrica hace referencia a las «Respuestas de los estudiantes» y le asignamos 3 puntos en la aplicación clásica. No obstante, teniendo en cuenta que los alumnos dejan constancia de explicaciones sobre sus pensamientos y razonamientos en muchas ocasiones, aunque para ello necesitan frecuentemente la intervención de la profesora, inclinamos la valoración borrosa al nivel 4 (véase la Fig. 64).

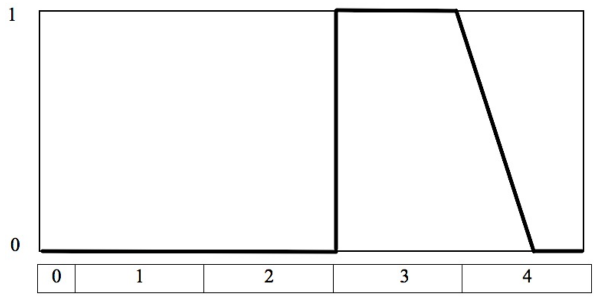


Figura 64. Análisis *fuzzy* de las respuestas de los estudiantes

Finalmente, señalamos que la lectura borrosa de los niveles indicados en las rúbricas del IQA, nos ha permitido elaborar una propuesta gradual que es susceptible de facilitar una descripción más fiel a la realidad de los datos de investigación y una mejora en la interpretación de los resultados.

5. Resultados

En este capítulo presentamos los resultados de la investigación. En primer lugar, mostramos los resultados de la primera fase de la experimentación, que hacen referencia a las discusiones en gran grupo gestionadas por los profesores Luis, del centro A, y Pilar, del centro B. Los resultados de esta fase muestran dos modos de actuación docente en la gestión de discusiones en gran grupo y establecen una relación entre los modos de actuación y la creación de oportunidades de aprendizaje matemático.

En segundo lugar presentamos los resultados de la segunda fase de la experimentación, que hacen referencia a las discusiones en gran grupo de la profesora Sara, del centro B. Los resultados de esta fase determinan cómo la profesora realizó la preparación de las discusiones en gran grupo de la secuencia de tres tareas de semejanza. También determinan modos de actuación docente, modos de interacción, tipos de acciones discursivas y oportunidades de aprendizaje matemático. Por último, los resultados establecen distintos grados de aprovechamiento de determinadas oportunidades de aprendizaje matemático por parte de los alumnos de la clase.

5.1. Resultados de la primera fase de la experimentación

Los resultados de la primera fase de la experimentación pretenden proporcionar una respuesta inicial al primer objetivo de este trabajo:

> *Caracterizar la actividad docente de un profesor de secundaria cuando gestiona discusiones en gran grupo sobre tareas de semejanza que pueden crear oportunidades de aprendizaje matemático*.

Los resultados caracterizan el modo de actuación de dos profesores de matemáticas, Luis y Pilar, cuando gestionan la discusión en gran grupo de la primera tarea de la secuencia instructiva, denominada *¡Doblar figuras!* En esta fase también relacionamos el efecto de los modos de actuación docente con la generación de oportunidades de aprendizaje.

5.1.1. *Resultado 1: Sobre los modos de actuación docente en la gestión de discusiones en gran grupo de una tarea matemática*

Basándonos en el análisis de las discusiones en gran grupo de Luis y Pilar, y teniendo en cuenta las dimensiones instrumental y discursiva, determinamos dos modos de actuación docente: *magistral* y *participativo*.

- *Magistral*. La orquestación está centrada en el profesor; se produce una distribución secuencial pero un tratamiento superficial e incompleto de los estadios de la discusión. El tipo de orquestación mayoritario es explicar a través del artefacto. Se ejemplifica con el profesor Luis.
- *Participativo*. La orquestación es equilibrada entre la actuación del profesor y la actuación de los alumnos. Se detecta una distribución secuencial y un tratamiento bastante completo de los estadios de la discusión. Sus orquestaciones se corresponden mayoritariamente con las de explicar, experimentar y discutir a través de un artefacto. El ejemplo es la profesora Pilar.

Destacamos que la clasificación anterior es local, ya que en esta fase de la experimentación no obtuvimos evidencias suficientes para poder determinar hasta qué punto los modos de actuación ejemplificados por Luis y Pilar representaban un comportamiento general, o perfil del profesor, en una situación de clase distinta. Este elemento nos abrió una perspectiva de futuro que estudiamos en la segunda fase de la experimentación.

5.1.2. *Resultado 2: Sobre la relación entre los modos de actuación docente y la creación de oportunidades de aprendizaje matemático*

Después de determinar los modos de actuación de Luis y Pilar, profundizamos en la dimensión discursiva y estudiamos con más detalle los episodios de la discusión en gran grupo de los dos profesores. Analizamos las acciones que se produjeron en su clase de matemáticas y las clasificamos según fuesen de participación, realizadas por los alumnos; o de intervención, llevadas a cabo por el profesor. Mostramos diferencias relevantes en la distribución de las acciones de participación en las dos discusiones en gran grupo, y observamos que las acciones realizadas por los estudiantes de Luis fueron, mayoritariamente, observaciones empíricas y exposiciones sin argumentación. Estas acciones fueron utilizadas por el profesor para efectuar explicaciones más extensas. En cambio, los alumnos de Pilar desarrollaron exposiciones más elaboradas porque la profesora intentó que los estudiantes construyeran su propio conocimiento matemático.

Por otro lado, también determinamos que el efecto de las acciones dentro de cada discusión en gran grupo era susceptible de generar aprendizaje matemático, tanto procedimental como conceptual. Este elemento fue relevante para llegar a obtener oportunidades de aprendizaje matemático.

Con el fin de caracterizar las oportunidades de aprendizaje relacionamos los aspectos del conocimiento matemático de la oportunidad con los efectos de las acciones que potencialmente facilitaban su aprendizaje en los alumnos. En el análisis solo detallamos las oportunidades de aprendizaje de los episodios relevantes de las discusiones en gran grupo de Luis y Pilar, aunque un análisis más extenso permitió observar que la discusión gestionada por Pilar presentaba el doble de oportunidades conceptuales que la discusión de Luis, incluyendo todas las oportunidades creadas por el profesor mencionado.

Algo parecido sucedió con las oportunidades procedimentales y las argumentativas. Por este motivo interpretamos que el modo de actuación *participativo* generaba un mayor número de oportunidades de aprendizaje que el modo de actuación *magistral*.

En este estudio también observamos que las reflexiones escritas e individuales de los alumnos, posteriores a la discusión en gran grupo, podían estar relacionadas con la gestión de la sesión de clase que realizaba cada profesor (véase el subapartado 4.1.4). Destacamos que en la segunda fase de la experimentación obtuvimos resultados relativos a diferentes grados de aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje matemático.

Por otro lado, también relacionamos la generación de oportunidades de aprendizaje con la forma en la que cada profesor preparó la discusión en gran grupo (véase la Tabla 22). Luis (modo de actuación *magistral*) realizó una preparación tradicional de la sesión de clase sin profundizar en las fases de la sistemática, y en su discusión en gran grupo se generaron menos oportunidades de aprendizaje que en la de Pilar (modo de actuación *participativo*). La profesora otorgó especial importancia a la fase de «anticipación a través del árbol», preparándose un esquema para la resolución y la gestión en clase de la actividad matemática. Este esquema se identificó con el «árbol del problema». Además, Pilar tenía claramente definidos los objetivos matemáticos de la tarea, que planteó como introducción al concepto de semejanza, y seleccionó a priori las participaciones de los estudiantes favoreciendo la aparición de un mayor número de estrategias de resolución.

Destacamos que en ningún episodio de la discusión en gran grupo de Luis se creó la oportunidad de aprendizaje conceptual caracterizada matemáticamente por 'Interiorizar el concepto y entender la definición de semejanza de dos figuras poligonales'; hecho que sí se produjo en el quinto episodio de la discusión en gran grupo de Pilar. Previsiblemente el profesor no consideró que este elemento fuese uno de los objetivos matemáticos de la tarea, porque de no ser así también podría haberlo introducido en el quinto episodio de su discusión en gran grupo.

Tabla 22. Gestión de las discusiones en gran grupo de Luis y Pilar y generación de oportunidades de aprendizaje matemático

	Profesor Luis	*Profesora Pilar*
Preparación de las discusiones en gran grupo	Tradicional, seguimiento superficial de la sistemática.	Detallada y con profundidad en la fase de anticipación. Elaboración del «árbol del problema». Selección de los alumnos y previsión de la gestión de clase.
Modo de actuación docente	*Magistral*	*Participativo*
Generación de oportunidades de aprendizaje matemático (estudio completo)	Pocas. No se generaron oportunidades de aprendizaje matemático para introducir el concepto de semejanza entre dos polígonos.	Gran número de oportunidades de aprendizaje matemático. Utilizó la tarea para generar oportunidades de aprendizaje conceptuales relacionadas con la semejanza entre dos polígonos.

5.2. Resultados de la segunda fase de la experimentación

Los resultados de la segunda fase de la experimentación pretenden dar respuesta tanto al primero como al segundo objetivo de este trabajo. Con relación al primero objetivo, los resultados detallan la preparación de las discusiones en gran grupo de las tres tareas de semejanza (*¡Doblar figuras!; Cambiar las medidas de los polígonos;* y *Transformaciones geométricas*) que realizó la profesora Sara. También caracterizan los modos de actuación docente y los modos de interacción entre los participantes de las discusiones en gran grupo. Por último, los resultados profundizan en los tipos de acciones discursivas que se detectaron en el análisis de las discusiones en gran grupo y muestran que estas acciones fueron decisivas para crear oportunidades de aprendizaje matemático.

5.2.1. *Resultado 1: Sobre la preparación metódica de las discusiones en gran grupo de la secuencia de tres tareas de semejanza*

La aplicación de las fases de la sistemática para la preparación de discusiones en gran grupo (Morera, 2013) puso de manifiesto la importancia del «árbol del problema» para gestionar de modo eficiente las discusiones en gran grupo de las tres tareas de semejanza. Para cada tarea, el «árbol del problema» utilizado por la profesora, Sara, incluye:

– Posibles dificultades de los alumnos y preguntas que la profesora puede formularles con el fin de que avancen en la resolución de cada tarea matemática.
– Una previsión de estrategias de resolución, las cuales permiten obtener distintas soluciones de la tarea, tanto parciales como completas.
– Elementos matemáticos que deben estudiarse en función de la resolución que escoge el alumno.

Por otra parte, consideramos importante la decisión de la profesora de utilizar distintos artefactos (lápiz y papel, pizarra ordinaria, proyector y GeoGebra) para resolver las tres tareas matemáticas, tanto en las sesiones de trabajo por parejas como durante las discusiones en gran grupo. Esta selección de artefactos, que combinaba la pizarra ordinaria y el proyector con GeoGebra, favoreció la visualización de distintas soluciones durante las sesiones de clase. Además, la combinación de lápiz y papel con el GeoGebra ayudó a los alumnos a conjeturar soluciones y aplicar distintas estrategias para resolver las tres tareas de semejanza.

También fue relevante la implementación rigurosa del ciclo de trabajo fijado a priori en el diseño metodológico de esta investigación. Este ciclo de trabajo se inició con una resolución por parejas de cada tarea matemática, siguió con una discusión en gran grupo para cada tarea y finalizó con la reflexión escrita e individual de cada alumno. De esta forma, los estudiantes tuvieron la oportunidad de resolver las tareas antes de la discusión en gran grupo, hecho que favoreció su participación en los debates. Además, la reflexión individual permitió que los alumnos pudiesen mejorar las resoluciones obtenidas en las sesiones de trabajo por parejas.

Igualmente es remarcable destacar la utilización en clase del «árbol del problema» para monitorizar las sesiones de trabajo por parejas. De este modo, la profesora respondió a las preguntas que le formulaban sus alumnos, partiendo de la información incluida en el árbol, y les proporcionó indicaciones para que avanzasen en la resolución de cada tarea.

Asimismo consideramos importante la selección que hizo la profesora de determinados alumnos para que participasen en las discusiones en gran grupo. Para ello, revisó los protocolos escritos de resolución por parejas y seleccionó algunas estrategias que habían sido contempladas previamente en el «árbol del problema». De esta manera, la profesora tuvo previstas unas intervenciones que combinó con la participación espontánea de otros alumnos de la clase.

Por último, destacamos que la resolución de las tareas por parte de la profesora, previa a cada sesión de clase, así como la preparación minuciosa de las discusiones en gran grupo, favoreció que los alumnos pudieran enfrentarse a las tres tareas como si fuesen auténticos problemas matemáticos; aunque la "relación entre el individuo y la tarea es lo que hace de esta un problema para aquella persona" (Schoenfeld, 1985, p. 74). Por este motivo, los alumnos tuvieron la oportunidad de aplicar diferentes estrategias de resolución, descubrir conceptos y procedimientos matemáticos y establecer conexiones entre distintas tareas de semejanza.

En resumen, la profesora siguió una preparación metódica de las discusiones en gran grupo de la secuencia de tres tareas de semejanza. Esta preparación creó un contexto inicial favorable para que se pudieran generar oportunidades de aprendizaje matemático durante las tres discusiones en gran grupo.

5.2.2. *Resultado 2: Sobre los modos de actuación docente en la gestión de las tres tareas: equilibrio instrumental y completitud discursiva*

La caracterización de episodios en las discusiones en gran grupo de las tres tareas de semejanza, según un tipo de orquestación instrumental y un estadio de la discusión, permite obtener la Tabla 23. La distribución de episodios en esta tabla sintetiza el modo de actuación de la profesora, Sara, en la gestión de las tres discusiones en gran grupo.

Determinamos un modo de actuación docente con equilibrio instrumental, ya que siete de los dieciséis episodios – tres en la primera tarea, dos en la segunda tarea y dos en la tercera tarea – corresponden a los tres primeros tipos de orquestación («explorar el artefacto», «explicar a través del artefacto» y «enlazar artefactos»), mientras que los nueve episodios restantes – cuatro en la primera tarea, dos en la segunda tarea y tres en la tercera tarea – corresponden a los tres últimos tipos («discutir el artefacto», «descubrir a través del artefacto» y «experimentar el instrumento»). Recordemos que según Drijvers y otros (2010) y Morera y otros (2013), los tres primeros tipos de orquestación están centrados en las acciones del profesor y los tres últimos en las acciones de los alumnos.

En relación con estos datos, observamos equilibrio instrumental entre las acciones de la profesora y las acciones de los alumnos a lo largo de las tres discusiones en gran grupo.

Tabla 23. Episodios de las discusiones en gran grupo de las tres tareas

Tipo de orquestación / **Estadio de la discusión**	Situación del problema	Presentación de una solución	Estudio de estrategias para resolver o argumentar	Estudio de casos particulares o extremos	Contraste entre soluciones	Conexiones con otras situaciones	Generalización y conceptualización	Reflexión sobre progreso matemático
Explorar el artefacto								
Explicar a través del artefacto	${}^{1}e_{1}$ ${}^{2}e_{1}$		${}^{1}e_{6}$			${}^{1}e_{7}$ ${}^{3}e_{4}$	${}^{3}e_{5}$	
Enlazar artefactos			${}^{2}e_{4}$					
Discutir el artefacto			${}^{1}e_{3}$ ${}^{3}e_{2}$					
Descubrir a través del artefacto			${}^{2}e_{3}$				${}^{1}e_{5}$	
Experimentar el instrumento		${}^{1}e_{2}$ ${}^{2}e_{2}$ ${}^{3}e_{1}$	${}^{3}e_{3}$		${}^{1}e_{4}$			

(${}^{j}e_{i}$, donde el superíndice j indica el número de la tarea analizada y el subíndice i indica la distribución cronológica de los episodios a lo largo de cada discusión en gran grupo)

Por otra parte, también determinamos completitud discursiva en la gestión docente de las tres discusiones, ya que estas transcurren por la mayoría de estadios de la discusión. Además se avanza de forma ordenada desde los estadios que corresponden a momentos iniciales de cada discusión en gran grupo («situación del problema», «presentación de una solución» y «estudio de estrategias para resolver o argumentar») hasta los estadios más avanzados («contraste entre soluciones», «conexiones con otras situaciones» y «generalización y conceptualización»).

El modo de actuación docente de Sara se completa con la información que proporcionan las Tablas 24 y 25. En concreto, la Tabla 24 muestra que la profesora no utilizó el tipo de orquestación «explorar el artefacto» en ninguna discusión en gran grupo. Recordemos que este tipo de orquestación hace referencia a las explicaciones técnicas que realiza el profesor sobre el funcionamiento de un artefacto durante la discusión en gran grupo. En la presente investigación estas explicaciones harían referencia al uso de GeoGebra, pero Sara no tuvo que realizarlas porque los alumnos ya conocían el funcionamiento de este software al haberlo utilizado con anterioridad en clase de matemáticas.

Tabla 24. Tipos de orquestación en las discusiones en gran grupo de las tres tareas

Tareas	*Tipos de orquestación*							*Interpretación*
¡Doblar figuras!	*b*	*f*	*d*	*f*	*e*	*b*	*b*	Equilibrio instrumental de la profesora Sara en las discusiones en gran grupo de las tres tareas de semejanza
Cambiar las medidas de los polígonos	*b*	*f*	*e*	*c*				
Transformaciones geométricas	*f*	*d*	*f*	*b*	*b*			

(b. Explicar a través del artefacto; c. Enlazar artefactos; d. Discutir el artefacto; e. Descubrir a través del artefacto; f. Experimentar el instrumento)

Asimismo es remarcable destacar que el tipo de orquestación mayoritario con relación a las acciones de la profesora es «explicar a través del artefacto». Este tipo de orquestación fue utilizado por Sara en un total de seis episodios a lo largo de las tres discusiones en gran grupo. En contraposición a este hecho observamos que «enlazar artefactos» solo surgió en un episodio. Interpretamos que todo esto es debido a que la profesora completó determinadas intervenciones de los estudiantes realizando explicaciones complementarias apoyándose en algún artefacto. En ocasiones estas explicaciones se produjeron después de que los alumnos hubieran descubierto algún hecho matemático a través de la pizarra o del GeoGebra.

La Tabla 24 también muestra que el tipo de orquestación mayoritario con relación a las acciones de los alumnos es «experimentar el instrumento». Esta orquestación fue utilizada en un total de cinco episodios a lo largo de las discusiones en gran grupo de las tres tareas. En cambio, los tipos de orquestación «discutir el artefacto» y «descubrir a través del artefacto» solo aparecen dos veces cada uno. Interpretamos que estos hechos se deben al modo de actuación de la profesora en el momento de gestionar las intervenciones de los alumnos durante las discusiones en gran grupo. En concreto, la gestión de Sara favoreció que los alumnos pudieran compartir con el grupo evidencias matemáticas, tanto procedimentales como conceptuales, que habían obtenido en las sesiones de trabajo por parejas.

Por último, observamos una cierta similitud en el modo de gestionar los tipos de orquestación tanto del inicio como del final de las tres discusiones en gran grupo. En concreto, las discusiones empezaron mayoritariamente con una explicación a través del artefacto, por parte de la profesora, y siguieron con la experimentación del instrumento que hicieron los alumnos. Análogamente señalamos que las discusiones en gran grupo finalizaron con explicaciones de la profesora apoyándose en un artefacto. No obstante, observamos diferencias en los tipos de orquestación que surgen en los episodios intermedios de las tres discusiones en gran grupo. Interpretamos que estas diferencias se deben a las características propias de cada tarea matemática y al uso que tanto la profesora como los alumnos hicieron de los artefactos presentes en clase.

Por otra parte, la Tabla 25 muestra que ningún episodio de las tres discusiones en gran grupo fue caracterizado a nivel discursivo por el estadio de la discusión «estudio de casos particulares o extremos». Consideramos que esto es debido a que la resolución de cada tarea favoreció que los casos particulares pudieran tratarse directamente cuando se estudiaban las estrategias para resolver o argumentar la tarea. Por esto no fue necesario que la profesora centrase la gestión de los episodios en el estudio de casos extremos.

Además, ningún episodio de las tres discusiones en gran grupo fue caracterizado por el estadio de la discusión «reflexión sobre progreso matemático». Interpretamos que esto es debido al modo de actuación de Sara, que gestionó las discusiones en gran grupo de forma que sus alumnos pudieran reflexionar sobre su progreso matemático individualmente, después de la discusión en gran grupo de cada tarea.

Tabla 25. Estadios de la discusión en las tres tareas matemáticas

<table>
<tr><th>Tareas</th><th colspan="7">Estadios de la discusión</th><th>Interpretación</th></tr>
<tr><td>¡Doblar figuras!</td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>E</td><td>G</td><td>C</td><td>F</td><td rowspan="3">Completitud discursiva en las discusiones en gran grupo de las tres tareas de semejanza gestionadas por Sara</td></tr>
<tr><td>Cambiar las medidas de los polígonos</td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>C</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>Transformaciones geométricas</td><td>B</td><td>C</td><td>C</td><td>F</td><td>G</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

(A. Situación del problema; B. Presentación de solución; C. Estudio de estrategias para resolver o argumentar; E. Contraste entre soluciones; F. Conexiones con otras situaciones G. Generalización y conceptualización)

La Tabla 25 también muestra que el estadio de la discusión mayoritario es «estudio de estrategias para resolver o argumentar», el cual estuvo presente en un total de seis episodios a lo largo de las discusiones en gran grupo de las tres tareas. En general, este estadio de la discusión surgió después de que los alumnos hubieran presentado una solución de la tarea matemática que estaban resolviendo. Interpretamos que esto es debido a que la profesora gestionó las discusiones en gran grupo dando especial importancia al estudio de las diferentes estrategias para resolver cada tarea.

Observamos similitudes en la distribución de los estadios que inician las discusiones en gran grupo de las tres tareas. En concreto, las discusiones comenzaron con la «situación del problema» y siguieron con la «presentación de solución» y el «estudio de estrategias para resolver o argumentar». Consideramos que esta distribución favoreció la participación de los alumnos y originó discusiones en gran grupo más interactivas.

Por último, también observamos similitudes en la distribución de los estadios con los que finalizaron las tres discusiones en gran grupo. Mayoritariamente estas discusiones acabaron con «conexiones con otras situaciones» y «generalizaciones y conceptualizaciones». Interpretamos que esto es debido a que la profesora decidió avanzar de forma ordenada, a lo largo de las discusiones en gran grupo, desde los estadios correspondientes a momentos iniciales de la discusión hasta los estadios más avanzados. Aún así, el argumento anterior no se cumple en la discusión en gran grupo de la segunda tarea. Tal y como hemos comentado en subapartado 4.2.3, el enunciado de la segunda tarea corresponde a una actividad matemática más extensa sobre la introducción de la transformación de homotecia. Debido a larga extensión de esta actividad, en el presente trabajo solo hemos estudiado su primer apartado. Por este motivo, los estadios que corresponden a momentos avanzados de la discusión en gran grupo («conexiones con otras situaciones» y «generalización y conceptualización») no aparecen en las Tablas 23 y 25, ya que deberían surgir en los apartados no analizados de la actividad matemática completa.

5.2.3. *Resultado 3: Sobre el modo de interacción dominante entre los participantes de las discusiones en gran grupo de las tres tareas: participativo y bilateral*

El estudio de todos los episodios de las discusiones en gran grupo de las tres tareas de semejanza, determinando las correspondientes acciones discursivas y su distribución a lo largo de estas discusiones, proporciona los modos de interacción entre la profesora, Sara, y sus alumnos. De forma general y sin particularizar en acciones concretas, la Figura 65 muestra las interacciones que se produjeron entre los participantes de las discusiones en gran grupo de las tres tareas. En concreto, seleccionamos tres extractos representativos, uno de cada tarea, con el fin de ilustrar la sucesión de acciones.

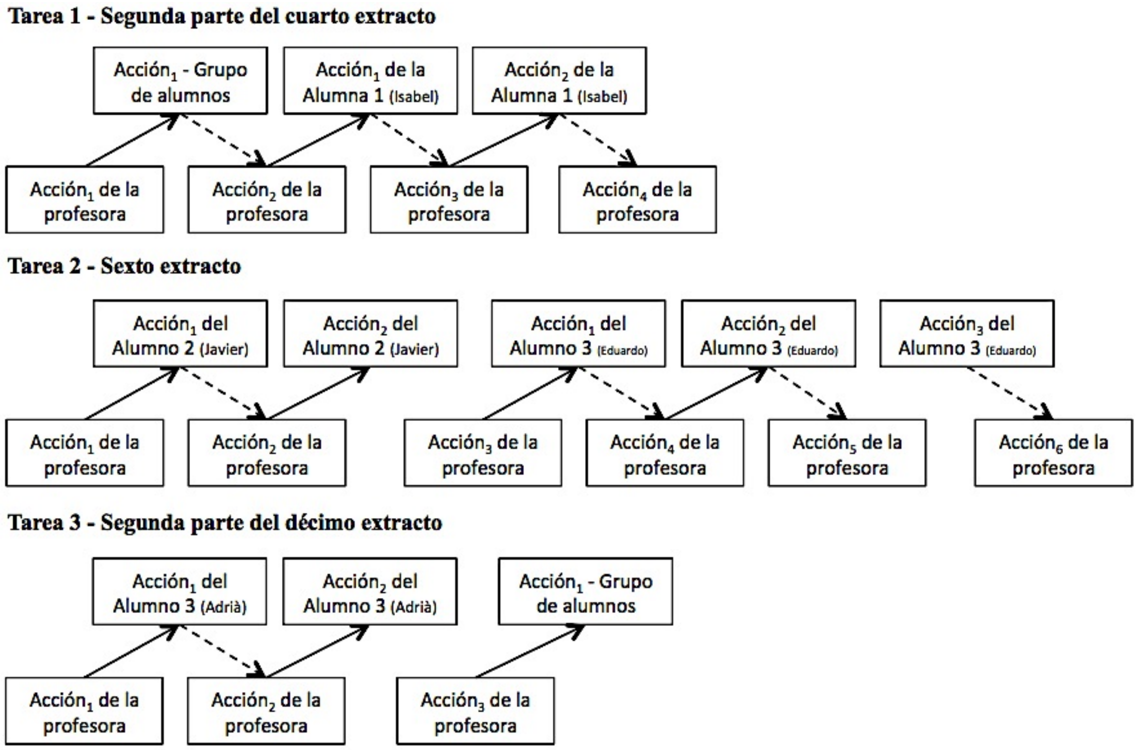


Figura 65. Diagrama representativo de las interacciones en las tres discusiones en gran grupo

Los diagramas representados en la Figura 65 evidencian que la distribución de acciones en los episodios de las tres discusiones en gran grupo presenta series encadenadas de acciones entre profesora y alumnos sin interacción directa entre estudiantes, tal y como se observa no solo en las transcripciones de los episodios presentados en el capítulo de análisis sino también en la distribución de las flechas utilizadas en la Figura 65. Por este motivo, interpretamos que el modo de interacción dominante entre los participantes de las discusiones en gran grupo de las tres tareas fue participativo y bilateral.

En concreto, el modo de interacción dominante fue participativo porque en todas las discusiones intervinieron tanto la profesora como sus alumnos. La profesora formuló preguntas que los estudiantes pudieron responder a través de la exposición de soluciones, la presentación de estrategias de resolución, la formulación de dudas y el establecimiento de conjeturas, entre otras acciones. Al mismo tiempo, la profesora también pudo completar las afirmaciones de sus alumnos y realizar recapitulaciones con el fin de sintetizar los elementos matemáticos que se trataron en las tres discusiones en gran grupo. Además, la profesora procuró que los estudiantes descubriesen por sí mismos los hechos matemáticos, evitando realizar explicaciones extensas y, en la medida de lo posible, gestionó las discusiones a través de preguntas, elaborando su discurso sobre la base de las respuestas de sus alumnos.

Por otra parte, el modo de interacción dominante también fue bilateral porque en todos los episodios se detectó interacción entre la profesora y los alumnos, aunque no se manifestó interacción directa entre los alumnos del grupo. Consideramos que la profesora ejerció como mediadora de las discusiones en gran grupo de las tres tareas y fue la participante que habitualmente conectó las intervenciones de los distintos alumnos.

Resultado 3.1: Sobre los tipos de acciones en las tres discusiones en gran grupo

La codificación de las acciones realizadas por la profesora en las discusiones en gran grupo de las tres tareas (véanse Anexos VI, VIII y X) se presenta en la Tabla 26. En esta tabla mostramos las acciones agrupadas en trece códigos, la descripción de los cuales se detalló en el análisis de la primera fase de la experimentación (véase el apartado 4.1.3).

Tabla 26. Recuento de acciones de la profesora en las tres discusiones en gran grupo

	Número de acciones				
Código de la acción	*Tarea 1*	*Tarea 2*	*Tarea 3*	*Total*	
Petición de comprobación	6	11	14	31	*16,7%*
Petición de explicación	10	9	11	30	*16,1%*
Validación	6	6	13	25	*13,4%*
Complemento de la explicación	4	3	11	18	*9,7%*
Invitación a la participación	6	5	5	16	*8,6%*
Recapitulación	4	2	7	13	*7%*
Petición de formalización	5	3	4	12	*6,4%*
Invitación a la búsqueda de alternativas	4	1	4	9	*4,8%*
Invitación a la reflexión	-	7	2	9	*4,8%*
Formalización	5	1	2	8	*4,3%*
Establecimiento de consenso	5	1	1	7	*3,8%*
Petición de argumentación	1	1	2	4	*2,2%*
Realización de explicación	-	-	4	4	*2,2%*

Observamos que la profesora, Sara, realizó un gran número de peticiones de comprobación (16,7%), peticiones de explicación (16,1%) y validaciones de las exposiciones de sus alumnos (13,4%) a lo largo de las tres discusiones en gran grupo. Interpretamos que esto es debido a que la profesora pretendió que los estudiantes interviniesen durante las discusiones, con el fin de que presentasen las soluciones que habían obtenido en el trabajo por parejas. Además, la profesora intentó que los alumnos realizasen explicaciones argumentadas de los procedimientos y conceptos matemáticos que surgían en los debates.

También observamos que Sara completó las intervenciones de sus alumnos realizando complementos de las explicaciones (9,7%), así como recapitulaciones (7%) acerca de los elementos matemáticos expuestos en las tres discusiones en gran grupo. Consideramos que de esta forma la profesora procuró que las discusiones tuviesen suficiente rigor matemático y que los aspectos tratados pudiesen ser asimilados por el mayor número posible de alumnos.

Destacamos que la profesora solo realizó invitaciones a la reflexión (4,8%) en la segunda y tercera tarea. Esto indica que Sara intentó que los alumnos razonasen acerca de la transformación de homotecia, la cual se introducía por primera vez en la segunda tarea, y se profundizaba en su estudio durante la resolución de la última tarea.

Por último, la Tabla 26 confirma que la profesora realizó pocas explicaciones de carácter magistral a lo largo de las tres discusiones en gran grupo, ya que el código «realización de explicación» (2,2%) solo se detectó en la discusión de la tercera tarea. En concreto, la profesora tuvo que intervenir para resolver una confusión que se produjo cuando se quería construir una transformación geométrica con GeoGebra. Asimismo, Sara también realizó una explicación al final de esta discusión en gran grupo, con el fin de presentar la homotecia como un caso particular de semejanza entre dos polígonos.

Por otra parte, la codificación de las acciones realizadas por los alumnos en las discusiones en gran grupo de las tres tareas se presenta en la Tabla 27. En esta tabla mostramos las acciones agrupadas en ocho códigos, cuya descripción se detalla mayoritariamente en el apartado 4.1.3 de este trabajo.

Observamos que la mayoría de acciones que realizaron los alumnos en las tres discusiones en gran grupo fueron exposiciones sin argumentación (36,7%) y exposiciones de evidencia empírica (22%). Consideramos que estas acciones surgieron a raíz de las peticiones de comprobación, explicación y participación que realizó la profesora durante las discusiones en gran grupo. En concreto, destacamos que las exposiciones de evidencia empírica se produjeron con el apoyo de la información visual que los alumnos obtuvieron a través de un artefacto, ya fuese tecnológico o manipulativo. Por este motivo, consideramos que los artefactos tuvieron un papel relevante en el fomento de la participación de los alumnos a lo largo de las discusiones en gran grupo. Además, los estudiantes también realizaron asentimientos (16%) de algunas exposiciones de la profesora; así como aclaraciones (13,3%) que permitieron mejorar la comprensión de explicaciones realizadas con anterioridad; y, en menor medida, formalizaciones (5,3%) como consecuencia de peticiones de mayor rigor matemático que hizo la profesora a lo largo de las tres discusiones.

Tabla 27. Recuento de acciones de los alumnos en las tres discusiones en gran grupo

	Número de acciones				
Código de la acción	*Tarea 1*	*Tarea 2*	*Tarea 3*	*Total*	
Exposición sin argumentación	13	18	24	55	*36,7%*
Exposición de evidencia empírica	9	12	12	33	*22%*
Asentimiento	4	6	14	24	*16%*
Aclaraciones: • Petición de aclaración • Aclaración[11] • Negación para pedir aclaración[12]	9	8	3	20	*13,3%*
Formalización	4	1	3	8	*5,3%*
Exposición con argumentación[13]	1	-	4	5	*3,3%*
Establecimiento de conjetura	1	1	2	4	*2,7%*
Justificación empírica	1	-	-	1	*0,7%*

Por otro lado, en la Tabla 27 también observamos que los alumnos realizaron pocas exposiciones con argumentación (3,3%), establecimientos de conjetura (2,7%) y justificaciones empíricas (0,7%) durante las discusiones en gran grupo. Aún así, percibimos que a medida que se avanzaba en la trayectoria hipotética de aprendizaje, los alumnos incrementaban el número de argumentaciones. Interpretamos que esto es debido a las frecuentes peticiones de explicación y argumentación de la profesora, a través de las cuales los alumnos se dieron cuenta de la importancia de presentar con rigor los elementos matemáticos que estaban estudiando.

[11] Puntualización que hace un alumno para favorecer la comprensión de una intervención realizada con anterioridad.

[12] Acción discursiva contraria al asentimiento en la que un alumno manifiesta una falta de comprensión con relación a la exposición de otro participante de la discusión en gran grupo.

[13] El alumno explica y justifica algún elemento matemático, pero no lo evidencia experimentalmente a través de un artefacto.

Finalmente, la Tabla 28 sintetiza el número total de acciones producidas tanto por la profesora, Sara, como por los alumnos en las tres discusiones en gran grupo. En esta tabla observamos que la profesora realizó el 55,4% de las acciones, mientras que los alumnos efectuaron el 44,6% restante. Estos datos confirman el carácter participativo y bilateral de la gestión de la profesora a lo largo de las tres discusiones en gran grupo.

Tabla 28. Número de acciones en las tres discusiones en gran grupo

	Número y porcentaje de acciones			
Tareas	*Profesora*		*Alumnos*	
¡Doblar figuras!	56	*57,1%*	42	*42,9%*
Cambiar las medidas de los polígonos	50	*52,1%*	46	*47,9%*
Transformaciones geométricas	80	*56,3%*	62	*43,7%*
Total	186	*55,4%*	150	*44,6%*

En los subapartados que figuran a continuación presentamos los resultados relativos al segundo objetivo de la investigación. Recordemos que este objetivo es el siguiente:

> *Analizar cuál es el efecto de las discusiones en gran grupo sobre la habilidad de los alumnos para aprovechar oportunidades de aprendizaje durante la resolución de tareas de semejanza.*

Con relación a este objetivo, los resultados presentan consideraciones sobre la creación de oportunidades de aprendizaje matemático en la secuencia de tareas de semejanza. Además, los resultados muestran tres grados de aprovechamiento que logran los alumnos de las oportunidades de aprendizaje creadas durante las discusiones en gran grupo.

5.2.4. *Resultado 4: Sobre la creación de oportunidades de aprendizaje matemático en las tres tareas*

Recordemos que en este trabajo hemos considerado las oportunidades de aprendizaje como relaciones que se han producido entre contenidos de conocimiento matemático y acciones que han contribuido a facilitar el aprendizaje de dichos contenidos en los alumnos. Estas acciones han surgido en los procesos de interacción creados durante las discusiones en gran grupo de las tres tareas de semejanza. En este resultado sintetizamos las oportunidades de aprendizaje que hemos obtenido en los extractos seleccionados en el capítulo de análisis. Agrupamos estas oportunidades según sean conceptuales, procedimentales o argumentativas.

En la Tabla 29 mostramos los aspectos matemáticos de las oportunidades de aprendizaje conceptual. En su caracterización hemos identificado los siguientes conceptos matemáticos: perímetro y área de figuras poligonales; polígonos semejantes y homotéticos; composición de transformaciones geométricas (ampliación y translación; giro y homotecia); y equivalencia entre transformaciones geométricas.

Tabla 29. Aspectos matemáticos de las oportunidades de aprendizaje conceptual

Primera tarea: ¡Doblar figuras!
• Aprender que la duplicación del perímetro de una figura poligonal implica multiplicar por cuatro su área.
• Aprender que para duplicar el área de una figura poligonal, como la del enunciado de la tarea, se debe utilizar $\sqrt{2}$.
• Interiorizar el concepto y entender la definición de semejanza.
• Identificar la importancia de la igualdad de ángulos en la definición de semejanza.
Segunda tarea: Cambiar las medidas de los polígonos
• Reconocer la existencia de transformaciones geométricas que combinan una ampliación y una translación.
• Reconocer los elementos que caracterizan una homotecia, es decir, la razón de semejanza y el centro de homotecia; e identificar su significado matemático.
Tercera tarea: Transformaciones geométricas
• Identificar transformaciones geométricas con GeoGebra que resultan de componer un giro y una homotecia.
• Identificar distintos tipos de homotecia según el valor de la razón de semejanza.
• Reconocer la equivalencia entre ciertas transformaciones geométricas. En particular, entre un giro de 180º, una simetría central y una homotecia de razón -1.

Análogamente, la Tabla 30 reúne los aspectos matemáticos de las oportunidades de aprendizaje procedimental. En su caracterización hemos identificado procedimientos matemáticos para construir polígonos semejantes y para duplicar el área de un polígono preservando la semejanza con el original. Con este fin se han utilizado tanto métodos tradicionales (lápiz y papel, o pizarra ordinaria) como tecnológicos (GeoGebra).

Tabla 30. Aspectos matemáticos de las oportunidades de aprendizaje procedimental

Primera tarea: ¡Doblar figuras!
• Darse cuenta que construir un polígono el doble de grande puede implicar que no se mantengan las proporciones respecto de la figura original.
Segunda tarea: Cambiar las medidas de los polígonos
• Aprender cómo duplicar un triángulo manteniendo la semejanza con el original.
• Utilizar una herramienta de GeoGebra para duplicar un triángulo y trasladarlo en el plano.

Por último, la Tabla 31 sintetiza los aspectos matemáticos de las oportunidades de aprendizaje argumentativas. En esta tipología hemos incluido las oportunidades que estaban vinculadas con el modo a través del cual el alumno se enfrentaba a la resolución de cada tarea matemática; la interpretación que hacía de los enunciados; y los razonamientos y justificaciones que elaboraba para detallar con rigor las soluciones que obtenía.

Tabla 31. Aspectos matemáticos de las oportunidades de aprendizaje argumentativas

Primera tarea: ¡Doblar figuras!
• Observar que una tarea matemática puede tener diferentes soluciones e interpretaciones del enunciado y todas ellas ser correctas.
• Darse cuenta de la importancia de explicar y formalizar con argumentos matemáticos las afirmaciones sobre la resolución de una tarea.
Segunda tarea: Cambiar las medidas de los polígonos
• Darse cuenta de la importancia de facilitar correctamente las órdenes al GeoGebra para duplicar un triángulo y trasladarlo en el plano.
Tercera tarea: Transformaciones geométricas
• Darse cuenta que la resolución de una tarea matemática puede requerir argumentos sobre la composición de dos transformaciones geométricas: homotecia y giro.
• Identificar la importancia de los argumentos obtenidos a través de la visualización para justificar la resolución de una tarea geométrica.

5.2.5. *Resultado 5: Sobre tres grados de aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje matemático en las tres tareas*

Con el fin de determinar grados de aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje matemático, en el análisis seleccionamos dos oportunidades de aprendizaje conceptual tanto para la primera como para la segunda tarea, y una oportunidad también conceptual para la tercera tarea. A continuación comparamos las resoluciones de los dieciséis alumnos de la profesora Sara antes y después de cada discusión en gran grupo. De esta forma obtuvimos evidencias concretas sobre cambios en la comprensión de conceptos y procedimientos matemáticos y determinamos elementos nuevos que los alumnos incluyeron en sus reflexiones individuales, posteriores a la discusión de cada tarea. Sobre la base de las tipologías de respuesta detectadas, en este resultado presentamos tres grados crecientes de aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje matemático:

– *Primer grado*: aprovechamiento bajo de la oportunidad de aprendizaje.
– *Segundo grado*: aprovechamiento medio de la oportunidad de aprendizaje.
– *Tercer grado*: aprovechamiento alto de la oportunidad de aprendizaje.

Para determinar cuál ha sido el grado de aprovechamiento de cada oportunidad de aprendizaje matemático conceptual, fijamos nuestra atención en diversos aspectos relacionados con la misma. Posteriormente valoramos, en función de evidencias, el grado de aprovechamiento de cada uno de estos aspectos, con el fin de generar una asignación global del grado de aprovechamiento seguido por cada alumno.

Resultado 5.1: Aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje en la primera tarea

Con relación a las oportunidades de aprendizaje matemático seleccionadas para la primera tarea, es decir, 'Interiorizar el concepto y entender la definición de semejanza' y 'Aprender que para duplicar el área de una figura poligonal, como la del enunciado de la tarea, se debe utilizar √2', consideramos que se incluyen en el primer grado de aprovechamiento los alumnos cuyas soluciones no presentaron cambios antes y después de la discusión en gran grupo, o bien no hacían referencia a la definición de semejanza (18,8%), ni a la duplicación del área preservando la semejanza (25%). Análogamente, incluimos en el segundo grado de aprovechamiento los alumnos cuyas soluciones presentaron una definición parcial de semejanza (56,2%), o bien contenían una representación sesgada que no duplicaba el área o no identificaba la √2 (43,8%). Por último, incluimos en el tercer grado de aprovechamiento los alumnos cuyas soluciones presentaron una definición completa de semejanza (25%), o bien contenían una representación sesgada que duplicaba el área del polígono original, preservaba la semejanza e identificaba la √2 (31,2%). Por lo tanto, para la primera tarea, observamos que la mayoría de los alumnos presentaron soluciones que forman parte del segundo grado de aprovechamiento – grado medio – de las dos oportunidades de aprendizaje estudiadas.

Resultado 5.2: Aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje en la segunda tarea

Con relación a las oportunidades de aprendizaje matemático seleccionadas para la segunda tarea, es decir, 'Reconocer la existencia de transformaciones geométricas que combinan una ampliación y una translación' y 'Reconocer los elementos que caracterizan una homotecia – razón y centro – e identificar su significado matemático', consideramos que se incluyen en el primer grado de aprovechamiento los alumnos cuyas soluciones no presentaron cambios antes y después de la discusión en gran grupo, o bien no hacían referencia a la combinación de una ampliación y una translación (50%), ni tampoco a los elementos matemáticos que definen una homotecia (37,5%). Análogamente, incluimos en el segundo grado de aprovechamiento los alumnos cuyas soluciones reconocían la ampliación de razón 2 e identificaban la translación, pero no explicitaban el vector que la definía (25%), o bien reconocían la homotecia pero no concretaban la definición del centro (12,5%). Por último, incluimos en el tercer grado de aprovechamiento los alumnos cuyas soluciones reconocían la ampliación de razón 2, identificaban la translación y explicitaban el vector que la definía (25%). Asimismo, incluimos en este mismo grado las soluciones que identificaban la homotecia y explicitaban por completo los elementos matemáticos que definen esta transformación geométrica (50%). Por lo tanto, para la segunda tarea, observamos que la mayoría de alumnos solo obtuvieron un aprovechamiento bajo de la primera oportunidad de aprendizaje estudiada, aunque presentaron un aprovechamiento alto de la segunda oportunidad.

Resultado 5.3: Aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje en la tercera tarea

Con relación a la oportunidad de aprendizaje matemático seleccionada para la tercera tarea, es decir, 'Identificar transformaciones geométricas con GeoGebra que resultan de componer un giro y una homotecia', consideramos que se incluyen en el primer grado de aprovechamiento los alumnos cuyas soluciones identificaban la composición de varias transformaciones geométricas pero no presentaban cambios antes y después de la discusión en gran grupo (25%). Análogamente, incluimos en el segundo grado de aprovechamiento los alumnos cuyas soluciones identificaban la composición de varias transformaciones geométricas pero no definían por completo los elementos matemáticos que las caracterizaban (18,8%). Por último, incluimos en el tercer grado de aprovechamiento los alumnos cuyas soluciones identificaban la composición de un giro y una homotecia y detallaban por completo los elementos que definen ambas transformaciones geométricas (56,2%). Por lo tanto, para la tercera tarea, observamos que la mayoría de los alumnos obtuvieron un aprovechamiento alto de la oportunidad de aprendizaje estudiada.

La Tabla 32 sintetiza los tres grados de aprovechamiento de las cinco oportunidades de aprendizaje matemático estudiadas anteriormente. En concreto, observamos que la mayoría de alumnos presentaron un aprovechamiento medio o alto de las oportunidades de aprendizaje. Aún así, es necesario remarcar que algunos alumnos solo fueron capaces de obtener un aprovechamiento bajo de las oportunidades que se crearon en las tres discusiones en gran grupo.

Tabla 32. Síntesis sobre los tres grados de aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje matemático

	Grados de aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje matemático (Número de alumnos –sobre 16– y porcentaje)					
Oportunidad de aprendizaje matemático	*Primer grado*		*Segundo grado*		*Tercer grado*	
Interiorizar el concepto y entender la definición de semejanza (1ª tarea).	3	18,8%	9	56,2%	4	25%
Aprender que para duplicar el área de una figura poligonal, como la del enunciado de la tarea, se debe utilizar $\sqrt{2}$ (1ª tarea).	4	25%	7	43,8%	5	31,2%
Reconocer la existencia de transformaciones geométricas que combinan una ampliación y una translación (2ª tarea).	8	50%	4	25%	4	25%
Reconocer los elementos que caracterizan una homotecia –razón y centro– e identificar su significado matemático (2ª tarea).	6	37,5%	2	12,5%	8	50%
Identificar transformaciones geométricas con GeoGebra que resultan de componer un giro y una homotecia (3ª tarea).	4	25%	3	18,8%	9	56,2%

Primer grado: aprovechamiento bajo de la oportunidad de aprendizaje matemático.
Segundo grado: aprovechamiento medio de la oportunidad de aprendizaje matemático.
Tercer grado: aprovechamiento alto de la oportunidad de aprendizaje matemático.

Finalmente, la Tabla 32 también muestra que los alumnos fueron capaces de obtener un mejor aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje generadas durante las discusiones en gran grupo a medida que iban avanzando en la trayectoria hipotética de aprendizaje definida por las tres tareas. En concreto, en la tercera tarea observamos que un mayor porcentaje de alumnos (56,2%) presentaron soluciones incluidas en el tercer grado de aprovechamiento de la oportunidad de aprendizaje estudiada. En cambio, en las dos primeras tareas, el porcentaje de alumnos cuyas soluciones se incluyeron en el tercer grado oscila entre el 25% y el 50%. Aún así, debemos hacer especial hincapié al carácter local de este resultado, ya que en este trabajo no disponemos de evidencias suficientes para afirmar que esta tendencia pueda ser generalizable a otras oportunidades de aprendizaje matemático.

5.2.6. *Resultado 6: Sobre la actuación del profesor, la creación de oportunidades de aprendizaje y su relación con las rúbricas del IQA*

La puntuación media que se obtuvo después de analizar las diez rúbricas del IQA fue de 3 puntos sobre un máximo de 4 puntos. Por lo tanto, de acuerdo con este instrumento, interpretamos que durante las discusiones en gran grupo de las tres tareas de semejanza se crearon oportunidades de aprendizaje matemático que pudieron ser aprovechadas por los alumnos de la clase. Este hecho es coherente con los resultados obtenidos anteriormente, en los que hemos determinado la creación de oportunidades de aprendizaje matemático – conceptuales, procedimentales y argumentativas – y hemos definido tres grados crecientes de aprovechamiento de estas oportunidades.

Aunque las diez rúbricas del IQA valoran, en conjunto, la generación de oportunidades de aprendizaje durante las discusiones en gran grupo, estudiar cada rúbrica en particular permite obtener una estrecha relación con todos los resultados que hemos especificado en el apartado 5.2. En concreto, algunas rúbricas del IQA avalan, específicamente, la generación de oportunidades de aprendizaje, en las que interviene:

– La preparación que realiza el profesor de las discusiones en gran grupo.
– Los modos de actuación docente.
– Los modos de interacción del profesor con los alumnos.

Asimismo, interpretamos que otras rúbricas están relacionadas con el aprovechamiento que los alumnos logran de estas oportunidades de aprendizaje, ya que validan:

– Los modos de interacción que se establecen entre los alumnos del grupo-clase.
– Los grados de aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje matemático.

De esta forma, obtenemos una doble dimensión del IQA, ya que por un lado el instrumento valora la enseñanza que reciben los alumnos, a través de la cual se crean oportunidades de aprendizaje matemático; y, por otro lado, también valora el aprendizaje que estos alumnos logran, a través del aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje que se han creado.

Las rúbricas sobre el «Potencial de las tareas» y el «Rigor de las preguntas del profesor» están directamente relacionadas con la preparación de las discusiones en gran grupo, ya que tanto la riqueza de la actividad matemática como el rigor de las preguntas favorecen discusiones en gran grupo de calidad. Además, en la elaboración del «árbol del problema», el profesor anticipa con rigor las posibles preguntas que desea formular a los alumnos a lo largo de las discusiones en gran grupo.

Relacionamos las rúbricas sobre la «Implementación de las tareas en clase», las «Conexiones del profesor entre las contribuciones de los alumnos» y las «Preguntas del profesor a los alumnos» con los modos de actuación docente y los modos de interacción entre el profesor y los alumnos. Tanto en la gestión de las tareas en clase como en la interacción que el profesor establece con los estudiantes, formulándoles preguntas y conectando sus respuestas, queda constancia de si el docente consigue promover la participación y favorecer que los alumnos construyan su propio conocimiento matemático; o bien, se puede comprobar si el profesor es quien realiza explicaciones extensas de los elementos matemáticos que surgen en la resolución de las tareas.

La interacción que se establece entre los alumnos a lo largo de las discusiones en gran grupo se refleja en las rúbricas sobre la «Discusión de los estudiantes durante la implementación de las tareas», la «Participación de los estudiantes en la comunidad de aprendizaje» y las «Conexiones de los alumnos entre las contribuciones de los participantes».

Por último, consideramos que las rúbricas sobre la «Huella matemática que queda en los alumnos» y las «Respuestas de los estudiantes» están relacionadas con el aprovechamiento que los alumnos logran de las oportunidades de aprendizaje creadas durante las discusiones en gran grupo.

Por otra parte, la aplicación clásica del IQA solo permitió obtener coeficientes numéricos rígidos de los diversos aspectos que analizan sus rúbricas. En cambio, la aplicación *fuzzy* de este instrumento posibilitó realizar valoraciones más detalladas de los parámetros estudiados en cada grupo de alumnos. Así se pudieron obtener interpretaciones graduales de los elementos analizados, los cuales se recogieron en los conjuntos borrosos que evalúan cada rúbrica.

Además, hemos conseguido elaborar un resumen compendio de los resultados obtenidos en cada rúbrica, el cual representa, bajo nuestra interpretación, la calidad de la discusión en gran grupo en términos de generación y aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje matemático.

Aunque en un principio se propuso calcular la media aritmética de las puntuaciones, tal y como hicimos en la aplicación clásica del instrumento, en el caso de los conjuntos borrosos decidimos utilizar la agregación propuesta en García-Honrado, Ferrer y Blanco-Fernández (2015). Esta agregación se ha implementado en una plataforma de geometría dinámica, a través de la cual el usuario introduce con puntos móviles los conjuntos borrosos de cada rúbrica y, a continuación, observa el conjunto borroso resumen. En concreto, la Figura 66 muestra la valoración de las discusiones en gran grupo de las tres tareas gestionadas por la profesora Sara:

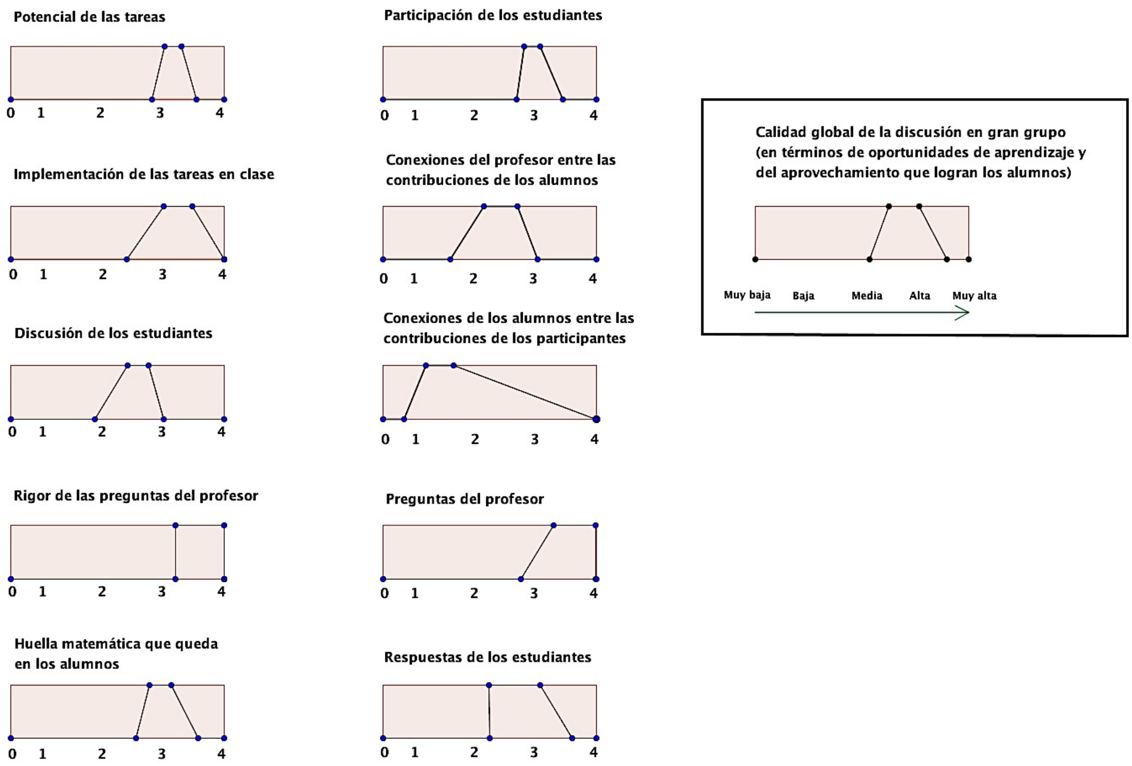


Figura 66. Valoración *fuzzy* de las tres tareas gestionadas por la profesora Sara

Finalmente, podemos traducir en términos lingüísticos la valoración de las discusiones en gran grupo, utilizando las etiquetas lingüísticas que están indicadas en el eje de abscisas de la Figura 67: muy baja, baja, media, alta o muy alta. Cada uno de estos conceptos se representa por un conjunto borroso, tal y como también se muestra en esta figura.

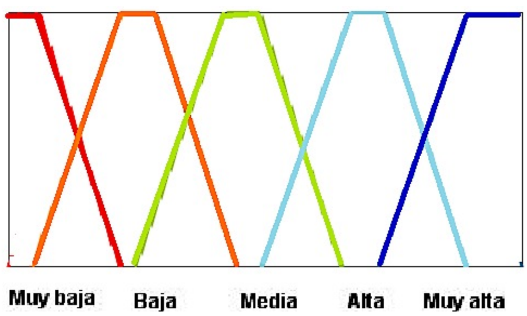


Figura 67. Etiquetas lingüísticas: muy baja, baja, media, alta o muy alta

En concreto, con relación a las discusiones en gran grupo de Sara, obtenemos un resultado que se asemeja con una calidad alta de las discusiones, tanto en términos de oportunidades de aprendizaje como del aprovechamiento logrado por los alumnos.

En definitiva, la aplicación *fuzzy* del IQA supuso una ventaja en la elaboración de resultados, porque además de considerar la proporción de alumnos que participaron en las discusiones en gran grupo; o la frecuencia con la que el profesor fomentó la participación de los estudiantes en las sesiones de clase, la utilización de conjuntos borrosos permitió tener en cuenta otras variables. Algunos ejemplos son los intentos de participación de los alumnos durante las discusiones en gran grupo, el tipo de preguntas que el profesor realizó y la adecuación matemática de los razonamientos.

6. Conclusiones

En este último capítulo retomamos la pregunta de investigación que planteamos para este trabajo, la cual involucra tanto a la actividad docente como a la creación de oportunidades de aprendizaje matemático. Recordemos que la pregunta es la siguiente:

> *¿Cómo la actividad docente es capaz de fomentar el aprendizaje matemático de los alumnos mediante discusiones en gran grupo de tareas de semejanza?*

En primer lugar, presentamos conclusiones relativas a los dos objetivos de la investigación, es decir, la caracterización de la actividad docente en la gestión de discusiones en gran grupo de tareas de semejanza y el análisis del efecto de estas discusiones en la habilidad de los alumnos para aprovechar oportunidades de aprendizaje matemático. En segundo lugar, discutimos la adecuación del marco teórico seleccionado y del diseño metodológico de la investigación. También reflexionamos sobre nuestra hipótesis del trabajo sobre la base de los resultados obtenidos. En tercer lugar, comentamos implicaciones didácticas y, por último, señalamos limitaciones del trabajo y su prospectiva.

6.1. Conclusiones sobre la caracterización de la actividad docente en la gestión de discusiones en gran grupo

Con relación a la caracterización de la actividad docente de un profesor de secundaria cuando gestiona discusiones en gran grupo de tareas de semejanza, susceptibles de crear oportunidades de aprendizaje, en primer lugar concluimos lo siguiente:

- Preparar de forma metódica, a través de una sistemática, las discusiones en gran grupo origina un contexto inicial favorable para crear oportunidades de aprendizaje matemático en los alumnos.

En concreto, nos apoyamos en el trabajo de Morera (2013) para diseñar la preparación de una secuencia instructiva de tareas de semejanza con el fin de que un profesor pueda implementarla en su clase de matemáticas. Además, consideramos que la propia selección de las tareas, siguiendo las directrices establecidas por el currículo de matemáticas de secundaria, ayudó a desarrollar habilidades matemáticas de los alumnos. En el sentido de Osana y otros (2006) y Viseu y Oliveira (2013), consideramos que la amplia variedad de soluciones y de estrategias de resolución que se podían obtener en cada tarea originó puntos de partida adecuados para iniciar los debates en clase.

También consideramos relevante la utilización del «árbol del problema» para prever las respuestas de los alumnos y monitorizar las sesiones de trabajo en el aula. Asimismo, destacamos que la combinación de trabajo por parejas, discusiones en gran grupo y reflexiones individuales propició la participación activa de los alumnos en todas las sesiones de clase. Por último, la utilización de artefactos, tanto tecnológicos como manipulativos, durante las clases de matemáticas favoreció la elaboración de conjeturas, la aplicación de distintas estrategias de resolución y la visualización de soluciones.

Por lo tanto, nuestras conclusiones también son coherentes con el trabajo de Stein y Smith (2011), en el que se determinó que la preparación de discusiones matemáticas en gran grupo, utilizando diversas técnicas y recursos, es útil para promover discusiones matemáticamente productivas.

Por otra parte, el estudio de los modos de actuación docente en la gestión de discusiones en gran grupo nos permite concluir lo siguiente:

- Realizar una gestión docente de las discusiones en gran grupo con un modo de actuación que presente equilibrio instrumental y completitud discursiva favorece la participación tanto del profesor como de los alumnos y la discusión completa y ordenada de los elementos matemáticos de la tarea que se está debatiendo en clase.

En esta investigación determinamos dos modos de actuación docente en la gestión de discusiones en gran grupo de tareas de semejanza, basándonos en los trabajos de Drijvers y otros (2010), Morera y Fortuny (2012) y Morera y otros (2013). En concreto, determinamos un modo de actuación *magistral*, el cual quedó caracterizado por una orquestación dominante del profesor y un tratamiento superficial e incompleto de los estadios de la discusión. También determinamos un modo de actuación con *equilibrio instrumental y completitud discursiva*, que fue caracterizado por presentar una orquestación equilibrada entre las intervenciones del profesor y las intervenciones de los alumnos, así como un tratamiento completo y ordenado de los estadios de la discusión.

Profundizando en el estudio del modo de actuación con *equilibrio instrumental y completitud discursiva*, detectamos que la gestión del profesor favoreció que los alumnos pudieran compartir con el grupo evidencias matemáticas que habían obtenido en el trabajo por parejas, o bien otras que descubrieron en el transcurso de la discusión en gran grupo. Además, la gestión de las sesiones de clase utilizando artefactos, tanto por parte del profesor como por parte de los alumnos, fue útil para realizar discusiones conjuntas sobre distintas soluciones de las tareas matemáticas, así como para mostrar variedad de estrategias de resolución.

Con el fin de que se produzca un tratamiento completo de los estadios de la discusión, se muestra el beneficio de que el profesor tenga un amplio conocimiento del contenido matemático asociado al tema estudiado, semejanza en este trabajo. Así el docente puede establecer con mayor rigor conexiones entre diferentes elementos matemáticos y propiciar procesos de generalización y conceptualización durante la resolución de las tareas en clase. En el sentido de Ball y Bass (2009), el profesor es más consciente del panorama matemático en el que se sitúa la experiencia didáctica que está implementado en su clase de matemáticas.

Por lo tanto, concluimos que la gestión de discusiones en gran grupo en las que participen tanto el profesor como los alumnos es determinante para que los estudiantes puedan construir su propio conocimiento matemático, ya que en gran parte "ellos tienen la autoría de sus propias ideas" (Barnes, 2000, p. 39).

Con relación al estudio de los modos de interacción entre los participantes de las discusiones en gran grupo concluimos lo siguiente:

- La gestión de discusiones en gran grupo con un modo de interacción dominante participativo y bilateral provoca que el profesor ejerza como mediador de las discusiones, aunque este hecho no facilita la interacción directa entre los estudiantes.

Coincidimos con Boaler (1997) al afirmar que los alumnos están más motivados para participar en la resolución de tareas matemáticas si se ven inmersos en discusiones en gran grupo interactivas. Por este motivo, es apropiado gestionar discusiones que permitan la intervención de todos los participantes.

Como hemos constatado en esta investigación, la gestión de discusiones en gran grupo participativas permite al docente formular preguntas que los alumnos pueden responder a través de la exposición de soluciones, la presentación de estrategias, la formulación de dudas y el establecimiento de conjeturas. Además, los alumnos pueden descubrir por si mismos los hechos matemáticos, evitando que el profesor tenga que hacer explicaciones extensas. De esta forma, el docente puede gestionar las discusiones en gran grupo elaborando su discurso sobre la base de las respuestas de los alumnos. Estos hechos favorecen la creación de oportunidades de aprendizaje matemático, ya que permiten a los alumnos plantearse nuevas formas de afrontar las tareas, incrementar el número de argumentaciones y descubrir nuevos conceptos y procedimientos matemáticos.

6.2. Conclusiones sobre el efecto de las discusiones en gran grupo en el aprovechamiento de los alumnos de oportunidades de aprendizaje matemático

En relación con el análisis del efecto de las discusiones en gran grupo sobre la habilidad de los alumnos para aprovechar oportunidades de aprendizaje durante la resolución de tareas de semejanza, en primer lugar concluimos lo siguiente:

- La caracterización de las oportunidades de aprendizaje matemático como relaciones entre contenidos de conocimiento matemático y acciones discusivas permite identificar oportunidades conceptuales, procedimentales y argumentativas.

En concreto, en esta investigación hemos identificado oportunidades de aprendizaje matemático conceptual, relacionadas con la definición de perímetro y área de figuras poligonales, el concepto de semejanza y homotecia, la composición de transformaciones geométricas y la equivalencia entre transformaciones. También hemos detectado oportunidades de aprendizaje matemático procedimental, relacionadas con la construcción de polígonos semejantes y la duplicación del área de un polígono preservando la semejanza con el original. Por último, hemos identificado oportunidades de aprendizaje argumentativas, las cuales se vinculaban al modo a través del cual los alumnos se enfrentaban a la resolución de las tareas matemáticas y a los razonamientos y justificaciones que elaboraban para encontrar distintas soluciones.

En el sentido de Yackel y otros (1991) y Cobb y Whitenack (1996) hemos observado que la interacción social producida en las discusiones en gran grupo ha constituido un elemento decisivo para que los alumnos pudieran lograr aprendizaje matemático. Durante todas las discusiones en gran grupo se crearon oportunidades de aprendizaje, tanto por parte del profesor como de los alumnos, como consecuencia de los procesos de interacción producidos entre los participantes. En estos procesos de interacción se han producido acciones discursivas que han contribuido al desarrollo conjunto del aprendizaje matemático de los alumnos.

Con relación a la determinación de distintos grados de aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje matemático, este estudio concluye lo siguiente:

- Las discusiones en gran grupo fomentan la creación de situaciones favorables para que los alumnos puedan aprovechar las oportunidades de aprendizaje matemático en distintos grados, aunque no todos los alumnos finalmente consiguen lograrlo.

Coincidimos con Törnroos (2005) al afirmar que la creación de oportunidades de aprendizaje en las clases de matemáticas y, en particular, durante las discusiones en gran grupo, fue una condición necesaria para que los alumnos pudieran adquirir aprendizaje matemático. Sobre la base del trabajo de Abedi y Herman (2010), en esta investigación consideramos que una oportunidad de aprendizaje era aprovechada por un alumno si podíamos obtener evidencias de que el estudiante había cambiado la comprensión de un concepto o procedimiento matemático después de la discusión en gran grupo.

En concreto, hemos determinado tres grados crecientes de aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje matemático conceptual. Estas oportunidades se crearon durante las discusiones en gran grupo de la secuencia de tres tareas de semejanza y hacían referencia a los siguientes aspectos matemáticos:

– Definición de semejanza entre figuras poligonales.
– Utilización de $\sqrt{2}$ para duplicar el área de un polígono preservando la semejanza con el polígono original.
– Caracterización de una homotecia determinando el centro y la razón.
– Transformaciones geométricas que combinan una ampliación y una translación; o un giro y una homotecia.

En el primer grado incluimos los alumnos cuyas soluciones no mostraban cambios antes y después de las discusiones en gran grupo. Por lo tanto consideramos que estos alumnos presentaban un aprovechamiento bajo de las oportunidades de aprendizaje matemático estudiadas. En el segundo grado se encontraban los alumnos cuyas soluciones mostraron un aprovechamiento medio de las oportunidades de aprendizaje. Por último, en el tercer grado incluimos los alumnos cuyas soluciones presentaron un aprovechamiento alto de estas oportunidades de aprendizaje matemático.

Por lo tanto concluimos que, si bien todos los alumnos de la clase estuvieron presentes en las sesiones de discusión en gran grupo y pudieron participar activamente en los debates, no todos los estudiantes fueron capaces de aprovechar de la misma forma las oportunidades de aprendizaje que se crearon durante las discusiones. Aún así, en esta investigación detectamos que la mayoría de alumnos aprovecharon con grado medio o alto las oportunidades de aprendizaje matemático. Además, en los protocolos escritos e individuales de los alumnos obtuvimos indicios de que mejoraron el aprovechamiento de estas oportunidades a medida que iban avanzando en la resolución de las tareas matemáticas de la secuencia instructiva.

6.3. Discusión

En este apartado presentamos una discusión sobre la adecuación del marco teórico y del diseño metodológico utilizado en la investigación. También planteamos una breve reflexión sobre nuestra hipótesis del trabajo con base en los resultados obtenidos.

6.3.1. *Discusión sobre la adecuación del marco teórico y del diseño metodológico de la investigación*

En relación con el marco teórico, destacamos que la selección de los trabajos de Stein y Smith (2011) y Morera (2013) fue adecuada para estudiar la preparación de las discusiones en gran grupo que realizó el profesor de la secuencia de tres tareas de semejanza. Entre otros aspectos fue clave la utilización del «árbol del problema» para preparar y gestionar las sesiones de clase.

Por otra parte, los trabajos de Drijvers y otros (2010) y Morera y otros (2013) fueron oportunos para determinar modos de actuación docente durante la gestión de discusiones en gran grupo. Apoyándonos en estos trabajos conseguimos fragmentar las discusiones en episodios, según tipos de orquestación instrumental y estadios de la discusión. Así pudimos especificar aspectos instrumentales y discursivos en los que el profesor centró la gestión de sus discusiones en gran grupo.

Con el fin de determinar modos de interacción entre los participantes de las discusiones, fue necesario codificar acciones discursivas que surgieron durante los debates en clase. En concreto, el trabajo de Schoenfeld (2011) fue apropiado para clasificar distintas tipologías de acciones realizadas por los profesores en la primera fase de la experimentación.

Por último, la revisión sobre la noción de oportunidad de aprendizaje según diversos autores nos ayudó a definir e identificar las oportunidades como relaciones entre contenidos de conocimiento matemático y acciones discursivas. Además, el trabajo de Abedi y Herman (2010) estableció nuestro punto de partida para estudiar el aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje durante la resolución de tareas de semejanza. Por último, las investigaciones de Boston (2012) y Jackson y otros (2013), sobre las rúbricas del IQA, nos permitieron completar el estudio sobre la creación y aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje durante las discusiones en gran grupo de tareas de semejanza. En concreto, interpretamos las rúbricas del IQA desde dos dimensiones, por un lado la enseñanza recibida por los alumnos y, por el otro lado, el aprendizaje que lograron a través de las oportunidades que se les crearon en las discusiones en gran grupo.

En relación con el diseño metodológico, destacamos que la primera fase de la experimentación, la cual se planteó como un estudio piloto, permitió validar tanto la secuencia instructiva como los métodos de análisis. Además, nos proporcionó una respuesta inicial al primer objetivo del trabajo, el cual se centró en la actividad docente de dos profesores de secundaria. La segunda fase de la experimentación permitió profundizar en el estudio del primer objetivo y dar respuesta al segundo. El eje principal de este segundo objetivo fueron los alumnos y el estudio de sus habilidades para aprovechar oportunidades de aprendizaje matemático después de resolver tareas de semejanza.

Por otra parte, la grabación de las discusiones en gran grupo y su transcripción posterior fue apropiada para caracterizar la actividad docente del profesor. En concreto, pudimos identificar modos de actuación docente, modos de interacción, acciones discursivas y oportunidades de aprendizaje matemático. Además, la selección de un ciclo de trabajo que combinaba resolución por parejas, discusión en gran grupo y reflexión individual de las tareas matemáticas nos permitió identificar distintos grados de aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje matemático.

6.3.2. *Reflexión final sobre la hipótesis del trabajo*

En primer lugar, recordemos que nuestra hipótesis planteaba lo siguiente:

> *La gestión docente de discusiones matemáticas en gran grupo, en las que participan activamente tanto el profesor como los alumnos, fomenta la creación de*

un mayor número de oportunidades de aprendizaje matemático, las cuales pueden ser mejor aprovechadas por los estudiantes de la clase.

Sobre la base de los resultados obtenidos en la investigación y de las conclusiones presentadas en este capítulo, determinamos que la gestión docente de discusiones en gran grupo en las que se detecta:

– Preparación metódica de las discusiones a través de una sistemática.
– Modo de actuación docente con equilibrio instrumental y completitud discursiva, donde participan tanto el profesor como los alumnos.
– Modo de interacción dominante participativo y bilateral entre participantes, y amplia variedad de acciones discursivas.

Es capaz de crear gran número de oportunidades de aprendizaje matemático conceptuales, procedimentales y argumentativas. Además, estas oportunidades son aprovechadas por la mayoría de alumnos de la clase. Por lo tanto, estos hechos confirman, en gran parte, nuestra hipótesis del trabajo, aunque no todos los estudiantes son capaces de involucrarse activamente en las discusiones, ni todos logran aprovechamiento alto de las oportunidades de aprendizaje que se les presentan durante las discusiones en gran grupo de tareas de semejanza.

6.4. Implicaciones didácticas

En esta investigación hemos diseñado una secuencia de tareas matemáticas sobre el tema de semejanza (véase el Anexo I), así como una guía para el profesorado que es un soporte importante para la preparación de la secuencia instructiva (véase el Anexo II). Estos materiales pueden ser utilizados por otros profesores de secundaria en sus clases de matemáticas. Además, su diseño puede ser empleado como ejemplo para elaborar secuencias instructivas de otros temas del currículo de matemáticas de secundaria.

En este trabajo hemos considerado importante la preparación docente de discusiones en gran grupo para favorecer la participación activa de los alumnos e involucrarlos en la resolución de tareas matemáticas. De todas formas, no todos los elementos que surgen en una discusión pueden ser preparados con antelación. Por este motivo, es importante que los profesores de matemáticas sepan gestionar hábilmente estos nuevos elementos, sin que esto suponga un obstáculo para el desarrollo eficaz de las sesiones de clase.

Por otra parte, señalamos que la dinámica de trabajo en clase propuesta en esta investigación, la cual combinaba resolución por parejas de tareas matemáticas, discusión en gran grupo y reflexión escrita e individual de los estudiantes, ha facilitado los procesos de interacción entre el profesor y los alumnos. Además, en el estudio hemos detectado que esta dinámica ha favorecido la creación y aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje matemático. Por este motivo, consideramos que la utilización de esta misma dinámica de trabajo puede ser adecuada para dinamizar las clases de matemáticas de otros temas curriculares.

Por último, consideramos relevante que los profesores de secundaria gestionen discusiones en gran grupo de forma que sus alumnos puedan incrementar tanto la cantidad como la calidad de las exposiciones con argumentación que realizan. Por este motivo, también valoramos positivamente la utilización de estas discusiones para incrementar los procesos de argumentación de los alumnos, ya que resultan importantes en el logro del aprendizaje matemático.

6.5. Limitaciones y prospectiva

En este trabajo nos hemos dado cuenta de la ventaja que supone utilizar distintos tipos de artefactos para dirigir discusiones matemáticas en gran grupo. Aún así, no hemos incluido los artefactos como un elemento central del análisis. Por este motivo, en futuras investigaciones se podría profundizar en el papel que adoptan los artefactos – especialmente los tecnológicos (véanse, por ejemplo, los trabajos de Drijvers y otros, 2010; Richard, Cobo, Fortuny y Hohenwarter, 2009) – como dinamizadores de las sesiones de resolución de problemas en el aula, así como determinar su influencia en el aprovechamiento que logran los alumnos de las oportunidades de aprendizaje matemático.

Por otra parte, hemos limitado el estudio de los modos de actuación docente e interacción a una secuencia de tres tareas de semejanza, la cual fue implementada por un total de tres profesores de secundaria en las dos fases de la experimentación. En un futuro se podría ampliar la investigación a un mayor número de profesores, los cuales podrían implementar en clase secuencias de tareas matemáticas de otros temas curriculares. De esta forma, sería posible obtener nuevas caracterizaciones de la actividad docente de profesores de secundaria mientras gestionan discusiones en gran grupo.

Con relación al estudio de las oportunidades de aprendizaje matemático, destacamos que el análisis planteado en este trabajo solo ha permitido obtener evidencias de aprovechamiento de oportunidades del tipo conceptual. Por este motivo, en un futuro sería conveniente diseñar nuevos instrumentos que permitiesen estudiar el aprovechamiento de oportunidades procedimentales y argumentativas. Para ello, consideramos que sería interesante seguir profundizando en el uso de la lógica borrosa como un método de análisis. Además, sería necesario ampliar el estudio a un mayor número de sesiones de clase e incluir las entrevistas de algunos alumnos en el diseño metodológico de una futura investigación. De esta forma, también se podrían determinar las causas por las que algunos alumnos solo logran un aprovechamiento bajo de las oportunidades de aprendizaje que se crean durante las sesiones de clase.

Finalmente, en futuros trabajos sería interesante poder relacionar las oportunidades de aprendizaje y su aprovechamiento por parte de los alumnos con la adquisición de las distintas competencias básicas del ámbito matemático.

7. Conclusions

In this last chapter, we revisit the research question that we defined for this project, which involves all instructional activity as the creation of mathematical learning opportunities. Let us recall that the question is the following:

> *How is teaching activity capable of promoting students' mathematical learning when managing classroom discussions on similarity tasks?*

First we shall introduce conclusions on the two objectives of the research, namely the description of the teacher's actions when managing classroom discussions on similarity tasks and the analysis of the effect of these discussions on students' ability to take advantage of mathematical learning opportunities. Secondly, we shall discuss the appropriateness of the theoretical framework chosen and the methodological design of the study. We shall also reflect on our working hypothesis based on our results. Thirdly, we shall discuss the educational implications, and finally we shall note the limitations of the study and its prospects.

7.1. Conclusions on the description of the teacher's actions when managing classroom discussions

With regard to the description of the teaching actions of a secondary school teacher when managing classroom discussions on similarity tasks that could create learning opportunities, our first conclusion is the following:

- Methodically preparing classroom discussion using a systematic approach creates an initial context that is favourable to creating mathematical learning opportunities in students.

Specifically, we took the study by Morera (2013) as our point of departure when preparing an instructional sequence of similarity tasks for a teacher to implement in their mathematics class. Furthermore, we believe that an accurate choice of tasks, following the guidelines established by the secondary school mathematics curriculum, helped to develop the students' mathematical skills. Along the lines of Osana et al. (2006) and Viseu and Oliveira (2013), we believe that the wide variety of solutions and problem-solving strategies which could be used in each task led to points of departure that were appropriating for sparking debates in class.

We also believe that using the “Problem Tree” to predict students’ answers and monitoring classroom work sessions is important. Likewise, we would like to stress that the combination of pair work, classroom discussions and individual reflections fostered students’ active participation in all the class sessions. Finally, the use of artefacts, both technological and realia, during the mathematics classes helped students to formulate conjectures, apply different problem-solving strategies and visualise solutions.

Therefore, our conclusions are also coherent with the study by Stein and Smith (2011) in which they determined that the preparation of classroom discussions using a variety of techniques and resources is useful for promoting productive mathematical discussions.

On the other hand, the study of the ways of teacher action in managing classroom discussions allows us to conclude the following:

- Having the teacher manage the classroom discussions with a way of action that shows instrumental balance and discursive completeness fosters the participation of both the teacher and the students, along with a complete, orderly discussion of the mathematical elements of the task being debated in class.

In this study, we determined two ways of action when managing classroom discussions on similarity tasks based on the studies by Drijvers et al. (2010), Morera and Fortuny (2012) and Morera et al. (2013). Specifically, we determined a *magisterial* way of action, which is characterised by a predominant orchestration by the teacher and a superficial, incomplete treatment of the different stages in the discussion. We also determined a way of action with *instrumental balance* and *discursive completeness* that was characterised by showing a balanced orchestration between the teacher’s and students’ participation, as well as complete, orderly treatment of the different stages in the discussion.

Further exploring our study of the way of action with *instrumental balance* and *discursive completeness*, we detected that the teacher’s classroom management encouraged students to share mathematical evidence that they had gotten in their pair work with the group, or other evidence that they discovered in the course of the classroom discussion. What is more, the management of the classroom sessions with both the teacher and students using artefacts was useful when holding joint discussions on different solutions to the mathematical tasks, as well as for showing a variety of problem-solving strategies.

In order for the different stages in the discussion to be treated comprehensively, we found the benefit of the teacher having far-reaching knowledge of the mathematical content associated with the topic being studied – similarity, in this study. In this way, the teacher can more rigorously identify connections among different mathematical elements and foster processes of generalisation and conceptualisation while solving tasks in class. In the sense expressed by Ball and Bass (2009), the teacher is more aware of the mathematical context in which the learning experience they are implementing in their math class is situated.

Therefore, we conclude that managing classroom discussions in which both the teacher and students participate is crucial for students to be able to construct their own mathematical knowledge, since “they are largely the authors of their own ideas” (Barnes, 2000, p. 39).

With regard to the study of the ways of interaction among the participants in the classroom discussions, we concluded the following:

- Managing classroom discussions with participative and bilateral dominant interaction leads the teacher to act as a mediator in the discussions, although this in itself does not encourage direct interaction among students.

We concur with Boaler (1997) when stating that students are more motivated to participate in solving mathematical tasks if they are involved in interactive classroom discussions. For this reason, it is appropriate to manage discussions that allow everyone to participate.

As we have noted in this study, managing participative classroom discussions allows the teacher to ask questions that the students can answer by outlining solutions, presenting strategies, articulating questions and establishing conjectures. What is more, the students can discover mathematical factors for themselves, which prevents the teacher from having to engage in extensive explanations. In this way, the teacher can manage the classroom discussions by tailoring their discourse around their students' responses. This helps to create mathematical learning opportunities, since it allows students to consider new ways of approaching the tasks, increase the number of arguments and discover new concepts and mathematical procedures.

7.2. Conclusions on to what extent classroom discussions lead students to take advantage of mathematical learning opportunities

With regard to the analysis of the effect of the classroom discussions on the students' ability to take advantage of learning opportunities while solving similarity tasks, we first conclude the following:

- The description of mathematical learning opportunities as relationships between mathematical knowledge contents and discursive actions allows us to identify conceptual, procedural and argumentative opportunities.

Specifically, in this study we have identified conceptual mathematical learning opportunities related to defining the perimeter and area of polygonal figures, the concept of similarity and homotethy, the composition of geometric transformations and the equivalency between transformations. We have also detected procedural mathematical learning opportunities related to the construction of similar polygons and the duplication of the area of a polygon while preserving similarity with the original. Finally, we have argumentative learning opportunities, which are linked to the way the students approach solving mathematical tasks and the reasons and justifications that they develop to find different solutions.

Following Yackel et al. (1991) and Cobb and Whitenack (1996), we noted that the social interactions produced in the classroom discussions were a key feature in whether students were able to achieve mathematical learning. Learning opportunities were created during all the classroom discussions by both the teacher and the students as the outcome of the interaction processes created among the participants. In these interaction processes, discursive actions occurred which contributed to the joint development of the students' mathematical learning.

With regard to determining the differing degrees to which students took advantage of mathematical learning opportunities, this study concludes the following:

- Classroom discussions foster the creation of favourable situations for students to take advantage of mathematical learning opportunities to differing degrees, although ultimately not all students manage to do so.

We concur with Törnroos (2005) that creating learning opportunities in mathematics classes, and in particular during classroom discussions, is a necessary condition for students to acquire mathematical learning. Based on the study by Abedi and Herman (2010), in this study we deemed that a student had taken advantage of a learning opportunity if we had evidence that the student had changed their understanding of a concept or mathematical procedure after the classroom discussion.

Specifically, we determined three increasing levels at which students take advantage of conceptual mathematical learning opportunities. These opportunities were created during the classroom discussions on the sequence of three similarity tasks and referred to the following mathematical aspects:

- Definition of similarity among polygonal figures.
- Use of the $\sqrt{2}$ to duplicate the area of a polygon while preserving similarity with the original polygon.
- Description of a homotethy determining the centre and the ratio.
- Geometric transformations that combine an expansion and a transfer or a rotation and a homotethy.

At the first level, we included students whose solutions did not allow us to identify evidence that they had taken advantage of the mathematical learning opportunities studied. At the second level were the students whose solutions showed that they had partly taken advantage of these learning opportunities. Finally, we placed those students whose solutions showed that they had fully taken advantage of the mathematical learning opportunities at the third level.

Therefore, we concluded that even though all the students in the class were present in the classroom discussions sessions and were able to actively participate in the debates, not all were capable of equally taking advantage of the learning opportunities created in the discussions. Nonetheless, in this study we detected that the majority of students took advantage of the opportunities for mathematical learning either completely or partially. What is more, in the students' written and individual protocols, we saw signs that they gradually took more advantage of these opportunities as they advanced in their mathematical problem-solving in the instructional sequence.

7.3. Discussion

In this section we present a discussion on the appropriateness of the theoretical framework and methodological design used in the study. We also offer a brief reflection on our working hypothesis based on the results obtained.

7.3.1. *Discussion on the appropriateness of the theoretical framework and methodological design of the study*

With regard to the theoretical framework, we should stress that the choice of studies by Stein and Smith (2011) and Morera (2013) was appropriate for studying the preparation of the teacher-led classroom discussions in the sequence of similarity tasks. One of the key aspects was using the "Problem Tree" to prepare and manage the class sessions.

On the other hand, the studies by Drijvers et al. (2010) and Morera et al. (2013) were ideal for determining forms of teacher action while managing the classroom discussions. Based on these studies, we managed to break the discussions down into episodes depending on types of instrumental orchestration and stages in the discussion. Thus, we were able to specify the instrumental and discursive aspects on which the teachers would centre the management of their classroom discussions.

In order to determine ways of interaction among the participants in the discussions, we had to codify the discursive actions that emerged during the classroom debates. Specifically, the study by Schoenfeld (2011) was appropriate for classifying different kinds of actions performed by the teachers in the first phase of the experiments.

Finally, the survey of different authors' notions of learning opportunities helped us to define and identify learning opportunities as relationships between mathematical knowledge contents and discursive actions. What is more, the study by Abedi and Herman (2010) established our point of departure for studying how mathematical learning opportunities were taken advantage of while solving similarity tasks. Finally, the studies by Boston (2012) and Jackson et al. (2013) on IQA rubrics allowed us to complete the study on creating and taking advantage of learning opportunities during classroom discussions on similarity tasks. Specifically, we interpreted the IQA rubrics from two dimensions; on the one hand, teaching received by the students and, on the other hand, learning that they managed through the opportunities that were created in classroom discussions.

With regard to the methodological design, we can stress that the first phase in the experimentation, which was planned as a pilot study, allowed us to validate both the instructional sequence and the methods of analysis. What is more, it provided us with an initial response to the first objective of the study, which revolved around the teaching activity of secondary school teachers. The second phase in the experimentation allowed us to further study the first objective and respond to the second one. The main gist of this second objective was students and the study of their abilities to take advantage of mathematical learning opportunities while solving similarity tasks.

On the other hand, recording the classroom discussions and later transcribing them was an appropriate way to describe the teacher's teaching activity. Specifically, we were able to identify ways of teacher action, ways of interaction, discursive actions and mathematical learning opportunities. What is more, the choice of a work cycle that combined pair problem-solving, classroom discussions and individual reflection on mathematical tasks allowed us to identify the degree to which students took advantage of mathematical learning opportunities.

7.3.2. *Final reflection on the working hypothesis*

First of all, we should recall that our hypothesis posited the following:

> *The teacher's management of classroom mathematics discussions in which both the teacher and students participate actively encourages the creation of a large number of mathematical learning opportunities which can be better taken advantage of by the students in the class.*

Based on the results of the study and the conclusions presented in this chapter, we determined that the teacher's management of classroom discussions in which we detected:

- Methodical preparation of the discussions using a systematic approach;
- A model of teacher action with instrumental balance and discursive completeness in which both the teacher and the students participate; and

– A predominately participative and bilateral way of interaction between participants and a wide variety of discursive actions;

is capable of generating a large number of conceptual, procedural and argumentative mathematical learning opportunities. What is more, these opportunities are taken advantage of by the majority of the students in the class. Therefore, these facts largely confirm our working hypothesis, even though not all students were capable of getting actively involved in the discussions, nor did they all manage to take advantage of the learning opportunities with which they are presented during the classroom discussions on similarity tasks.

7.4. Instructional implications

In this study, we designed a sequence of mathematical tasks on the topic of similarity (see Appendix I), as well as a guide for teachers, which is an important means of support for preparing an instructional sequence (see Appendix II). These materials can be used by other secondary school teachers in their mathematics classes. Furthermore, their design can be used as an example when developing instructional sequences on other topics in the secondary school mathematics curriculum.

In this study, we have regarded the teacher's preparation of classroom discussions as important in encouraging students to participate actively and getting them involved in solving mathematical tasks. In any event, not all the elements that emerge in a discussion can be prepared in advance. For this reason, it is important for mathematics teachers to know how to skilfully handle these new elements without their posing an obstacle to the effective development of the class sessions.

On the other hand, we should note that the working dynamic in the class proposed in this study, which combines mathematical problem-solving in pairs, classroom discussions and individual written student reflections, facilitated the interaction processes between the teacher and students. Furthermore, in the study we detected that this dynamic has fostered the creation of and benefit from mathematical learning opportunities. For this reason, we believe that the use of this same working dynamic may be an appropriate way to buoy up mathematics classes in other areas of the curriculum.

Finally, we believe that it is important for secondary school teachers to manage classroom discussions in such a way that their students can increase both the quantity and quality of the arguments they share. Thus, we also approve of the use of these discussions to increase students' argumentation processes, since they are important in attaining mathematical learning.

7.5. Limitations and prospects

In this study, we clearly saw the advantage entailed in using different kinds of artefacts when leading classroom mathematics discussions. Nonetheless, we did not include the artefacts as a core element in the analysis. Thus, future studies could delve further into the role played by artefacts – especially technological ones (see, for example, the studies by Drijvers et al., 2010; Richard, Cobo, Fortuny & Hohenwarter, 2009) – as a way to invigorate problem-solving sessions in the classroom, as well as to determine their influence on the degree to which students take advantage of mathematical learning opportunities.

Likewise, we have limited this study to ways of teacher action and interaction in a sequence of three similarity tasks, which was implemented by a total of three secondary school teachers in the two phases of experimentation. In the future, the study could be expanded to a larger number of teachers, who could implement in classroom sequences of mathematics tasks in other curricular areas. In this way, it would be possible to get new descriptions of the teaching activities of secondary school teachers as they manage classroom discussions.

With regard to studying the mathematical learning opportunities, we should stress that the analysis offered in this study only allowed us to get evidence that conceptual learning opportunities were taken advantage of. For this reason, in the future it would be interesting to design new instruments that would allow us to study the use of procedural and argumentative mathematical learning opportunities. To do so, we believe that it would be interesting to further explore the use of fuzzy logic as a method of analysis. What is more, the study could be expanded to a larger number of class sessions, and interviews with some students could be included in the methodological design of a future study. In this way, we could also determine the reasons why some students are incapable of taking advantage of the learning opportunities created during the class sessions.

Finally, in future studies it would be interesting to relate the learning opportunities and how they are taken advantage of by students with the acquisition of the different basic competencies in the field of mathematics.

Resumen

El trabajo de tesis doctoral, “Estudio sobre la actuación docente y la interacción en la creación y aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje en el aula de matemáticas”, constituye una aportación a la investigación en educación matemática. La pregunta de investigación que se plantea es la siguiente: ¿Cómo la actividad docente es capaz de fomentar el aprendizaje matemático de los alumnos mediante discusiones en gran grupo de tareas de semejanza? Para dar respuesta a esta pregunta se definen dos objetivos de investigación:

1. Caracterizar la actividad docente de un profesor de secundaria cuando gestiona discusiones en gran grupo sobre tareas de semejanza que pueden crear oportunidades de aprendizaje matemático.
2. Analizar cuál es el efecto de las discusiones en gran grupo sobre la habilidad de los alumnos para aprovechar oportunidades de aprendizaje durante la resolución de tareas de semejanza.

Se plantea un marco teórico en el que se introduce el concepto de oportunidad de aprendizaje matemático y se sitúa en un contexto de discusión en gran grupo. A continuación se presentan consideraciones sobre el conocimiento del alumno, con base en los contenidos de semejanza que constan en el currículo de matemáticas para la educación secundaria. Asimismo, se desarrollan consideraciones sobre el conocimiento del profesor, teniendo en cuenta tanto aspectos matemáticos como pedagógicos. Con relación a los aspectos pedagógicos, el marco teórico se basa en la selección y uso de recursos didácticos y se describe una sistemática de seis fases que ayuda a preparar la implementación en clase de las discusiones en gran grupo. Por último, el marco se centra en el desarrollo real de la discusión y se reflexiona tanto en elementos instrumentales como en el papel que adoptan las acciones discursivas.

Se elige una metodología que se incluye en el paradigma cualitativo de las investigaciones en educación matemática. Se selecciona una secuencia instructiva de tres tareas de semejanza, la cual se implementó durante los cursos 2012-13 y 2013-14 en dos centros de secundaria con alumnos de 14 y 15 años. En el experimento, que se realizó en dos fases, se implicaron tres profesores de matemáticas de secundaria. La implementación

de las tareas en clase combinó la resolución por parejas, la discusión en gran grupo y la reflexión escrita e individual después de la discusión de las tareas. Además, se utilizaron artefactos tecnológicos, como GeoGebra, y manipulativos, como lápiz y papel y pizarra ordinaria. Para obtener los datos de investigación se registraron las discusiones en gran grupo con tres videocámaras y posteriormente se transcribieron para el análisis. También se recogieron los protocolos escritos de resolución de los alumnos, producidos tanto en el trabajo por parejas como individualmente después de las discusiones en gran grupo. La primera fase de la experimentación, en la que intervinieron dos profesores, se utilizó como estudio piloto. Permitió validar la secuencia de tareas matemáticas, identificar estrategias y dificultades que presentaban los alumnos en la resolución de las tareas y validar los métodos de análisis de la investigación. En la segunda fase de la experimentación se obtuvieron datos de una profesora de secundaria cuando implementó en clase la secuencia de tres tareas de semejanza. El análisis de estos datos permitió obtener los resultados finales de la investigación.

En el análisis se estudian los datos obtenidos en las dos fases de la experimentación. En la primera fase, el estudio piloto, solo se analiza la implementación en clase de la primera tarea de la secuencia instructiva. Se introduce el análisis de la preparación de la discusión en gran grupo, el análisis de episodios y acciones, y se determinan oportunidades de aprendizaje matemático. Luego se presenta el análisis de la segunda fase de la experimentación. En esta fase se analiza la preparación de las discusiones en gran grupo de las tres tareas de semejanza y, para cada tarea, se analizan los modos de actuación docente e interacción, se ejemplifican oportunidades de aprendizaje matemático y se examina el aprovechamiento que los alumnos logran de algunas de estas oportunidades.

En los resultados de la primera fase de la experimentación se obtienen dos modos de actuación docente, magistral y participativo, en la gestión de una discusión en gran grupo. Además, se establece una relación directa entre cada modo de actuación y la creación de determinadas oportunidades de aprendizaje matemático. En la segunda fase de la experimentación se obtienen resultados que determinan una preparación metódica de las discusiones en gran grupo de la secuencia de tres tareas de semejanza. También se obtiene un modo de actuación docente con equilibrio instrumental y completitud discursiva y un modo dominante de interacción participativo y bilateral. Luego se agrupan las oportunidades de aprendizaje obtenidas en el análisis según sean conceptuales, procedimentales o argumentativas. Además se presentan distintos grados de aprovechamiento que logran los alumnos de estas oportunidades de aprendizaje matemático.

Finalmente, en las conclusiones de este trabajo de tesis doctoral se determina que la gestión docente de discusiones en gran grupo, en las que participan activamente tanto el profesor como los alumnos, fomenta la creación de un mayor número de oportunidades de aprendizaje matemático, las cuales son aprovechadas por la mayoría de los alumnos de la clase. Aún así, no todos los estudiantes son capaces de involucrarse activamente en las discusiones, ni todos logran aprovechamiento alto de las oportunidades de aprendizaje que se les presentan durante las discusiones en gran grupo de tareas de semejanza.

Summary

The work of the doctoral thesis “Study on the teaching activity and the interaction in creating and taking advantage of learning opportunities in the mathematics classroom” is a contribution to the research in mathematics education. The research question asked is the following: How is teaching activity capable of promoting students’ mathematical learning when managing classroom discussions on similarity tasks? To answer this question, two research objectives were defined:

1. To characterize the teaching activity of secondary school teachers when they manage classroom discussions on similarity tasks that can create mathematical learning opportunities.
2. To analyse the effect of classroom discussions on the students’ ability to take advantage of learning opportunities when solving similarity tasks.

A theoretical framework is suggested in which the concept of mathematical learning opportunity is introduced and situated within the context of a classroom discussion. We then present considerations on the student’s prior knowledge based on the similarity contents that appear in the secondary school mathematics curriculum. Likewise, we also discuss considerations on the teacher’s knowledge bearing in mind both mathematical and pedagogical factors. Regarding the pedagogical factors, the theoretical framework is based on the selection and use of teaching resources, and we describe a six-phase systematic approach that helps teachers to prepare for the implementation of classroom discussions in class. Finally, the framework focuses on the actual implementation of the discussion and reflects on both instrumental factors and the role played by discursive actions.

A methodology was chosen that is included in the qualitative paradigm of research in mathematics education. An instructional sequence of three similarity tasks was chosen, and it was implemented in academic years 2012-13 and 2013-14 in two secondary schools with students aged 14 and 15. Three secondary mathematics teachers were involved in the experiment, which was conducted in two phases. The implementation of the tasks in class combined resolution in pairs, classroom discussion and individual written reflection after the discussion of the tasks. Plus, technological artefacts were

used, such as GeoGebra, as were manipulative artefacts, such as paper and pencil and an ordinary blackboard. To obtain the research data, we recorded the classroom discussions with three video cameras and later transcribed the scripts for the analysis. We also collected the written protocols of the tasks solved by the students, which were produced in both the pair work and individually after the classroom discussions. The first phase of the experiment in which two teachers participated was used as a pilot study. This enabled us to validate the sequence of mathematical tasks, identify strategies and difficulties that students displayed when solving the tasks and validate the study's methods of analysis. In the second phase of the experiment, we got data from a secondary school teacher when she implemented the sequence of three similarity tasks in her classroom. The analysis of these data allowed us to obtain the final results of the study.

In the analysis, we study the data obtained in both phases of experimentation. In the first phase, the pilot study, we only analyse the in-class implementation of the first task in the instructional sequence. We introduce the analysis of the preparation of the classroom discussion and the analysis of episodes and actions, and we determine mathematical learning opportunities. After that, we present the analysis of the second phase of the experimentation. In this phase, we analyse the preparation of the classroom discussions of the three similarity tasks, and for each task we analyse the ways of teacher action and interaction, exemplify mathematical learning opportunities and examine to what extent the students took advantage of these opportunities.

In the results of the first phase of experimentation, we find two ways of teacher action, namely magisterial and participative, when managing a classroom discussion. What is more, we establish a direct relationship between each way of action and the creation of given mathematical learning opportunities. In the second phase of experimentation, we obtain results that determine a methodical preparation of classroom discussions in the sequence of three similarity tasks. We also obtain a way of teacher action with instrumental balance and discursive completeness and a predominant way of participative, bilateral interaction. After that we group together the mathematical learning opportunities obtained in the analysis according to their conceptual, procedural and argumentative nature. We further present the differing degrees to which the students took advantage of these mathematical learning opportunities.

Finally, in the conclusions of this doctoral thesis research we determine that the teacher's management of classroom discussions in which both the teacher and students participate actively fosters the creation of a larger number of mathematical learning opportunities, which are taken advantage of by the majority of students in the class. Nonetheless, not all students are capable of getting actively involved in the discussions, nor do all manage to take advantage of the learning opportunities available to them during the classroom discussions on similarity tasks.

Referencias bibliográficas

Abedi, J., y Herman, J. L. (2010). Assessing English language learners' opportunity to learn mathematics: Issues and limitations. *Teacher's College Record, 112*(3), 723-746.

Andrews, P. (2003). Opportunities to learn in the Budapest mathematics classroom. *International Journal of Science and Mathematics Education, 1*(2), 201-225.

Anghileri, J. (2006). Scaffolding practices that enhance mathematics learning. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9*(1), 33-52.

Ball, D. L., y Bass, H. (2009). With an eye on the mathematical horizon: Knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures. En M. Neubrand (Ed.), *Proceedings of the 43rd Jahrestagung fur Didaktik der Mathematik* (pp. 11-29). Oldenburg, Alemania: WTM-Verlag.

Barnes, M. (2000). 'Magical' moments in mathematics: Insights into the process of coming to know. *For the Learning of Mathematics, 20*(1), 33-43.

Boaler, J. (1997). *Experiencing school mathematics: Teaching styles, sex and setting*. Buckingham, Reino Unido: Open University Press.

Boukafri, K., y Ferrer, M. (2015). Resolución de problemas de geometría con material manipulativo o soporte tecnológico. *Épsilon. Revista de Educación Matemática*, *89*, 49-65.

Boukafri, K., Ferrer, M., y Planas, N. (2015). Whole class discussion in the context of mathematics problem solving with manipulatives. *Proceedings of the IX Congress of the European Society for Research of Mathematics Education* (en prensa). Praga, República Checa: ERME.

Boston, M. D. (2012). Assessing the quality of mathematics instruction. *Elementary School Journal, 113*(1), 76-104.

Boston, M. D., y Wolf, M. K. (2006). *Assessing academic rigor in mathematics instruction: The development of Instructional Quality Assessment Toolkit*. Los Angeles, CA: National Center for Research on Evaluation, Standards, and Student Testing.

Brewer, D. J., y Stasz, C. (1996). Enhancing opportunity to learn measures in NCES data. En G. Hoachlander, J. E. Griffith y J. H. Ralph (Eds.), *From data to information: new directions for the National Center for Education Statistics* (pp. 1-28). Washington, DC: US Department of Education.

Burton, L. (1999). The practices of mathematicians: What do they tell us about coming to know mathematics? *Educational Studies in Mathematics, 37*(2), 121-143.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., y Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9-13.

Cobb, P., y Whitenack, J. W. (1996). A method for conducting longitudinal analyses of classroom video recordings and transcripts. *Educational Studies in Mathematics*, *30*, 213-228.

Departament d'Ensenyament (2007). *Currículum de l'Educació Secundària Obligatòria*. Barcelona, España: Generalitat de Catalunya.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., y Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: Instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *75*, 213-234.

Ellis, A. B. (2011). Generalizing-promoting actions: How classroom collaborations can support students' mathematical generalizations. *Journal for Research in Mathematics Education, 42,* 308-345.

Ferreiro, R. (2005). La participación en clase. *Revista Rompan Filas*, *76*, 3-7.

Ferrer, M., Doorman, M., y Fortuny, J. M. (2015). The classroom discussion and the exploitation of opportunities to learn mathematics. En K. Beswick, T. Muir, y J. Wells (Eds.), *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 289-296). Hobart, Australia: PME.

Ferrer, M., Fortuny, J. M., y Morera, L. (2013). Identificación de estilos de enseñanza comparando discusiones en gran grupo de un problema de semejanza. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII*. Bilbao, España. SEIEM, 263-274.

Ferrer, M., Fortuny, J. M., y Morera, L. (2014a). Efectos de la actuación docente en la generación de oportunidades de aprendizaje matemático. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(3), 385-405.

Ferrer, M., Fortuny, J. M., y Morera, L. (2014b). Sobre las discusiones en gran grupo: Ejemplificación en un problema de semejanza. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *67*, 57-66.

Ferrer, M., Fortuny, J. M., Morera, L., y Planas, N. (2014). The teaching activity and the generation of mathematical learning opportunities. En S. Oesterle, P. Liljedahl, C. Nicol, y D. Allan (Eds.), *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 73-80). Vancouver, Canadá: PME.

Ferrer, M., Fortuny, J. M., Planas, N., y Boukafri, K. (2014). Modos de actuación e interacción y generación de oportunidades de aprendizaje matemático. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 297-305). Salamanca, España: SEIEM.

Ferrer, M., y García-Honrado, I. (2014). Ejemplificación del uso de conjuntos borrosos en la valoración de la calidad de la enseñanza. En F. Bobillo, H. Bustince, F. J. Fernández, y E. Herrera-Viedma (Eds.), *Actas del XVII Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy* (pp. 579-584). Zaragoza, España. ESTYLF.

Ferrer, M., García-Honrado, I., y Fortuny, J. M. (2015). Estudio de la calidad de la enseñanza comparando discusiones en gran grupo de tareas de semejanza. En I. Gómez-Chacón, J. Escribano, A. Kuzniak, y P. R. Richard (Eds.), *Actas del Cuarto Simposio Internacional Espacio de Trabajo Matemático* (pp. 501-517). San Lorenzo de El Escorial, España: ETM.

Floden, R. E. (2002). The measurement of opportunity to learn. En A. C. Porter y A. Gamoran (Eds.), *Methodological advances in cross-national surveys of educational achievement* (pp. 231-266). Washington, DC: National Academy Press.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Holanda: Reidel. Traducción de Luis Puig, publicada en *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados*. Ciudad de México, México: CINVESTAV, 2001.

García-Honrado, I., Ferrer, M., y Blanco-Fernández, A. (2015) A tentative fuzzy assessment of the quality of teaching and opportunities to learn mathematics in a classroom discussion. En J. M. Alonso, H. Bustince & M. Reformat (Eds.), *Proceedings of the 2015 Conference of the International Fuzzy Systems Association and the European Society for Fuzzy Logic and Technology* (pp. 1047-1053). Gijón, Spain: EUSFLAT.

Gómez, B. (2007). La razón en semejanza: el caso del perrito. En E. Castro y J. L. Lupiáñez (Eds.), *Investigaciones en educación matemática: Pensamiento numérico. Libro homenaje a Jorge Cázares Solórzano*. Granada, España: Editorial universitaria de Granada, 237-257.

Gravemeijer, K., y Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics, 39*, 111-129.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: an overview. *Educational Studies in Mathematics*, *44*, 5-23.

Hart, K. M., Brown, M. L., y Küchemann, D. E. (1981). *Children's Understandings of Mathematics: 11-16*. Londres, Reino Unido. John Murray.

Hitt, F., y Kieran, C. (2009). Constructing knowledge via a peer interaction in a CAS environment with tasks designed from a task-technique-theory perspective. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *14*(2), 121-152.

Jackson, K., Garrison, A., Wilson, J., Gibbons, L., y Shahan, E. (2013). Exploring relationships between setting up complex tasks and opportunities to learn in concluding whole-class discussions in middle-grades mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education, 44*(4), 646-682.

Krummheuer, G. (2011). Representation of the notion "learning-as-participation" in everyday situations of mathematics classes. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 43*(1), 81-90.

Liu, X. (2009). *Linking competence to opportunities to learn: Models of competence and data mining*. Nueva York, NY: Springer.

Marzano, R. (2000). *A new era of school reform: Going where the research takes us*. Aurora, CO: Office of Educational Research and Improvement.

Mason, J., Burton, K., y Stacey, K. (1988). *Pensar matemáticamente*. Barcelona, España: Labor.

Mayer, R. (2004). Should there be a three-strikes rule against pure discovery learning? The case for guided methods of instruction. *American Psychologist, 59*, 14-19.

Morera, L. (2013). *Contribución al estudio de la enseñanza y del aprendizaje de las isometrías mediante discusiones en gran grupo con el uso de tecnología*. (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona. Bellaterra, España.

Morera, L., Chico, J., Badillo, E., y Planas, N. (2012). Problemas ricos en argumentación para secundaria: Reflexiones sobre el pensamiento del alumnado y la gestión del profesor. *Suma. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, 70*, 9-20.

Morera, L., y Fortuny, J. M. (2012). An analytical tool for the characterisation of whole-group discussions involving dynamic geometry software. En T. Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 233-240). Taipei, Taiwan: PME.

Morera, L., Planas, N., y Fortuny, J. M. (2013). Design and validation of a tool for the analysis of whole group discussions in the mathematics classroom. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the VIII Congress of the European Society for Research of Mathematics Education* (pp. 1506-1515). Antalya, Turquía: ERME.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Niss, M. A., y Højgaard, T. (Eds.) (2011). *Competencies and mathematical learning: Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*. Roskilde, Dinamarca: Roskilde Universitet, IMFUFA.

Osana, H., Lacroix, G., Tucker, B. J., y Desrosiers, C. (2006). The role of content knowledge and problem features on preservice teachers' appraisal of elementary tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9*(4), 347-380.

Palincsar, A. S. (1998). Social constructivist perspectives on teaching and learning. *Annual Review of Psychology, 45*, 345-375.

Pólya, G. (1970). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Pólya, G. (1981). *Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving*. Nueva York, NY: John Wiley and Sons.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada, España: Comares.

Richard, P. R., Cobo, P., Fortuny, J. M., y Hohenwarter, M. (2009). Training teachers to manage problem-solving classes with computer support. *Journal of Applied Computing, 5*(1), 38-50.

Saxe, G., Gearhart, M., Shaughnessy, M., Earnest, D., Cremer, S., Sitabkhan, Y., Platas, L., y Young, A. (2009). A methodological framework and empirical techniques for studying the travel of ideas in classroom communities. En B. Schwarz, T. Dreyfus, y R. Hershkowitz (Eds.), *Transformation of knowledge through classroom interaction* (pp. 203-222). Nueva York, NY: Routledge.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics. En A. D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). Nueva York, NY: Macmillan.

Schoenfeld, A. H. (2011). *How we think. A theory of goal-oriented decision making and its educational applications*. Nueva York, NY: Taylor & Francis.

Sfard, A., y Kieran, C. (2001). Cognition as communication: Rethinking learning-by-talking through multi-faceted analysis of students' mathematical interactions. *Mind, Culture, and Activity, 8*(1), 42-76.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(2), 114-145.

Simon, M. A., y Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6*, 91-104.

Smetana, L. K., y Bell, R. L. (2014). Which setting to choose: Comparison of whole-class vs. small-group computer simulation use. *Journal of Science Education and Technology, 23*(4), 481-495.

Smit, J., Van Eerde, H. A. A., y Bakker, A. (2013). A conceptualisation of whole-class scaffolding. *British Educational Research Journal, 39*(5), 817-834.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., y Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313-340.

Stein, M. K., y Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(1), 268-275.

Stein, M. K., y Smith, M. (2011). *Five practices for orchestrating productive mathematics discussions*. Reston, VA: NCTM.

Törnroos, J. (2005). Mathematics textbooks, opportunity to learn and student achievement. *Studies in Educational Evaluation, 31*(4), 315-327.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9*(3), 281-307.

Trouche, L., y Drijvers, P. (2010). Handheld technology for mathematics education: Flashback into the future. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 42*(7), 667-681.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics, 54*, 9-35.

Vermont Department of Education (2000). *Vermont's framework of standards and learning opportunities*. Montpelier, VT: Department of Education.

Viseu, F., y Oliveira, I. B. (2012). Open-ended tasks in the promotion of classroom communication in mathematics. *International Electronic Journal of Elementary Education, 4*(2), 287-300.

Wijaya, A., Van den Heuvel-Panhuizen, M., y Doorman, M. (2015). Opportunity-to-learn context-based tasks provided by mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics, 89*, 41-65.

Yackel, E. (2001). Explanation, justification and argumentation in mathematics classrooms. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 9-24), Utrecht, Holanda: PME.

Yackel, E., Cobb, P., y Wood, T. (1991). Small-group interactions as a source of learning opportunities in second-grade mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(5), 390-408.

Zadeh, L. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, *8*, 338–353.

Zadeh, L. (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning – III. *Information Sciences, 9*(1), 43-80.

ANEXOS VI, VIII y X

ANEXO VI

Transcripción y caracterización de episodios de la discusión en gran grupo de la primera tarea de la profesora Sara (centro B)

Episodio 1 (***Explicar a través del artefacto; Situación del problema***)

Professora: El primer problema era de doblar figures. Teniu una lletra ‘F’ i us demanaven que féssiu altres ‘F’ el doble de grans, d'acord?

<table><tr><td colspan="2">Profesora: El primer problema era de duplicar figuras. Tenéis una letra ‘F’ y os pedían que hicieseis otras ‘F’ el doble de grandes, ¿de acuerdo?</td></tr><tr><td>Interpretación:</td><td>Establecimiento de consenso sobre el enunciado de la primera tarea.</td></tr></table>

Episodio 2 (***Experimentar el instrumento; Presentación de una solución***)

Professora: Vinga algú que vulgui explicar el que ha fet. [L’Àlex aixeca la mà]. Àlex vosaltres què vau fer?

<table><tr><td colspan="2">Profesora: Venga, alguien que quiera explicar lo que ha hecho. [Álex levanta la mano]. Álex, ¿vosotros qué hicisteis?</td></tr><tr><td>Interpretación:</td><td>Invitación a la participación para presentar una solución.</td></tr></table>

Àlex: Duplicar els costats. Fer el doble de gran.

<table><tr><td colspan="2">Álex: Duplicar los lados. Hacer el doble de grande.</td></tr><tr><td>Interpretación:</td><td>Exposición sin argumentación sobre la duplicación de los lados de un polígono.</td></tr></table>

Professora: Vau agafar cada costat i què més?

<table><tr><td colspan="2">Profesora: Tomasteis cada lado, ¿y qué más?</td></tr><tr><td>Interpretación:</td><td>Petición de explicación sobre la exposición de un alumno.</td></tr></table>

Àlex: Els vam fer el doble de grans i vam mantenir els angles.

<table><tr><td colspan="2">Álex: Los hicimos el doble de grandes y mantuvimos los ángulos.</td></tr><tr><td>Interpretación:</td><td>Exposición de evidencia empírica sobre la construcción de un polígono el doble de grande.</td></tr></table>

Professora: D'acord. Tothom ha sentit el que ha dit l’Àlex? [Alguns alumnes assenteixen amb el cap]. Algú ha fet alguna cosa diferent, o tothom està d'acord amb això que ha fet ell? [L’Adrià aixeca la mà]. Adrià, digues.

<table><tr><td colspan="2">Profesora: De acuerdo. ¿Todo el mundo ha oído lo que ha dicho Álex? [Algunos alumnos asienten]. ¿Alguien ha hecho alguna cosa distinta, o todo el mundo está de acuerdo con esto que ha hecho él? [Adrià levanta la mano]. Adrià, di.</td></tr><tr><td>Interpretación:</td><td>Invitación a la búsqueda de alternativas para encontrar una nueva solución a la tarea matemática.</td></tr></table>

Adrià: Duplicar els quadradets.

<table><tr><td>Adrià: Duplicar los cuadraditos.</td></tr></table>

Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre la duplicación del área.*

Professora: Duplicar els quadradets vols dir que quan hi havia un quadradet al final tu en tenies dos, o a què et refereixes?

***Profesora**: Duplicar los cuadraditos, ¿quieres decir que cuando había un cuadradito al final tú tenías dos? ¿O a qué te refieres?*	
Interpretación:	*Petición de formalización sobre la duplicación del área.*

Adrià: No, per costat.

***Adrià**: No, por lado.*	
Interpretación:	*Formalización sobre la solución planteada por un alumno.*

Professora: Per costat; per tant, dius el mateix que l'Àlex.

***Profesora**: Por lado; por lo tanto, dices lo mismo que Álex.*	
Interpretación:	*Validación sobre la formalización expuesta por un alumno.*

Episodio 3 (*Discutir el artefacto; Estudio de estrategias para resolver o argumentar*)

Professora: Algú ha fet alguna altra construcció?

***Profesora**: ¿Alguien ha hecho alguna otra construcción?*	
Interpretación:	*Invitación a la búsqueda de alternativas para encontrar una nueva solución a la tarea.*

Martí: Cada quadrat són dos… Ah, però és el mateix!

***Martí**: Cada cuadrado son dos… ¡Ah, pero es lo mismo!*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre una solución de la tarea.*

Àlex: Es pot fer de moltes maneres...

***Àlex**: Se puede hacer de muchas maneras…*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre el número de soluciones de la tarea matemática.*

(15) Professora: Respecte a tot això que s'està dient, tothom creu que és el mateix? O sigui, quan l'Àlex ha dit "jo he agafat cada costat i he fet el doble", és a dir, si tinc un costat que val 1 [assenyalant a la pantalla la lletra 'F'], Àlex, de quant l'has fet?

***Profesora**: Respecto de todo lo que se está diciendo, ¿todo el mundo cree que es lo mismo? O sea, Álex ha dicho "yo he tomado cada lado y he hecho el doble", es decir, si tengo un lado que vale 1 [señalando sobre la pantalla la base de la 'F'], Álex, ¿de cuánto lo has hecho?*

Interpretación:	*Establecimiento de consenso sobre la construcción de una figura con el doble de perímetro.*

(16) Àlex: De 2.

***Álex**: De 2.*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre la longitud del lado de un cuadrado.*

(17) Professora: Per tant, si aquesta altura [de la ‘F’] valia 6, l'has feta de 12. Però abans, què han dit en Martí i l’Adrià?

***Profesora**: Por tanto, si esta altura [de la ‘F’] valía 6, la has hecho de 12. Pero antes, ¿qué han dicho Martí y Adrià?*	
Interpretación:	*Invitación a la participación para recordar la construcción de una figura con el doble de perímetro.*

(18) Adrià: Cada nou quadrat són quatre dels inicials.

***Adrià**: Cada nuevo cuadrado son cuatro de los iniciales.*	
Interpretación:	*Exposición de evidencia empírica sobre el área de un cuadrado.*

(19) Professora: És a dir, cada quadrat d'àrea 1 s'ha transformat en quatre?

***Profesora**: Es decir, ¿cada cuadrado de área 1 se ha transformado en cuatro?*	
Interpretación:	*Petición de comprobación sobre la nueva área de un cuadrado.*

(20) Adrià: Sí.

***Adrià**: Sí.*	
Interpretación:	*Asentimiento.*

(21) Professora: Per tant, quan l'heu fet el doble de gran, tothom l'ha fet el doble d'ample i d'alt? Algú ho ha fet diferent?

***Profesora**: Por tanto, cuando habéis hecho el doble de grande, todo el mundo ha hecho el doble de ancho y de alto. ¿Alguien lo ha hecho distinto?*	
Interpretación:	*Invitación a la búsqueda de alternativas sobre la construcción de una figura el doble de grande.*

(22) Isabel: No, perquè sinó seria desproporcionat.

***Isabel**: No, porque sino sería desproporcionado.*	
Interpretación:	*Exposición de evidencia empírica para duplicar una figura.*

(23) Professora: Isabel, dius que seria desproporcionat, si haguéssim fet què?

***Profesora**: Isabel, dices que sería desproporcionado, ¿si hubiésemos hecho qué?*	
Interpretación:	*Petición de formalización sobre la duplicación de una figura.*

(24) Isabel: Que a l'eix de les *Y* féssim el doble, però en el de les *X* no.

***Isabel**: Que en el eje de las Y hiciésemos el doble, pero en el de las X no.*	
Interpretación:	*Formalización sobre las proporciones de una figura poligonal el doble de grande.*

Episodio 4 (*Experimentar el instrumento; Contraste entre soluciones*)

Professora: Algú ho ha fet això? Jo crec que sí. A veure, Adrià, ensenya'ls-ho i explica el que vas fer.

***Profesora**: ¿Alguien lo ha hecho esto? Yo creo que sí. A ver, Adrià, enséñales esto y explica lo que hiciste.*	
Interpretación:	*Petición de explicación sobre la solución de la tarea.*

Adrià: [L'Adrià mostra el seu full a la resta dels companys, on hi ha tres figures dibuixades]. Aquesta és el doble d'alçada [primera figura], aquesta és el doble d'alçada i d'amplada [segona figura] i aquesta és el doble d'amplada [tercera figura].

***Adrià**: [Adrià muestra su hoja de resolución a los demás compañeros, donde hay tres figuras dibujadas]. Esta es el doble de altura [primera figura], esta es el doble de altura y de anchura [segunda figura] y esta es el doble de anchura [tercera figura].*	
Interpretación:	*Exposición de evidencia empírica sobre distintas soluciones de la primera tarea.*

Professora: Per tant, ell té tres. Quina és realment el doble de gran? De les tres que ha fet hi ha alguna que sigui la correcta i les altres dues estiguin malament? Aquesta és la que tu deies, Àlex. Aquesta és el doble de gran…

***Profesora**: Por lo tanto, él tiene tres. ¿Cuál es realmente el doble de grande? De las tres que ha hecho, ¿hay alguna que sea la correcta y las otras dos estén mal? Esta es la que tú decías, Álex. Esta es el doble de grande…*	
Interpretación:	*Petición de comprobación sobre la corrección matemática de tres soluciones de la tarea.*

Anna: Proporcional.

***Anna**: Proporcional.*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre proporcionalidad.*

Professora: Proporcional diu l'Anna, d'acord. [Assenyala la primera i la tercera figura de l'Adrià]. Aquesta és el doble d'alta i aquesta és el doble d'ampla.

***Profesora**: Proporcional dice Anna, de acuerdo. [Señala la primera y la tercera figura de Adrià]. Esta es el doble de alta y esta es el doble de ancha.*	
Interpretación:	*Validación y complemento de la explicación anterior de un alumno.*

Professora: Però aquesta que dieu que és el doble de gran si ens fixem en els costats, però si ens fixem en l'àrea… Adrià, què deies?

__Profesora__: Pero esta que decís que es el doble de grande si nos fijamos en los lados, pero si nos fijamos en el área… Adrià, ¿qué decías?	
Interpretación:	*Invitación a la participación de un alumno para que explique su solución de la tarea.*

Adrià: Que és quatre vegades més gran.

__Adrià__: Que es cuatro veces más grande.	
Interpretación:	*Exposición de evidencia empírica sobre la cuadruplicación del área de un polígono.*

Professora: O sigui aquesta [segona figura] és quatre vegades més gran que aquesta [figura de l'enunciat]. Tothom ho veu això? Si comptem l'àrea de la blava [figura de l'enunciat], quina àrea té? Quina àrea té la blava?

__Profesora__: O sea esta [segunda figura] es cuatro veces más grande que esta [figura del enunciado]. ¿Todo el mundo ve esto? Si contamos el área de la azul [figura del enunciado], ¿qué área tiene? ¿Qué área tiene la azul?	
Interpretación:	*Establecimiento de consenso y petición de comprobación sobre el área de un polígono.*

Isabel: 10 quadradets.

__Isabel__: 10 cuadraditos.	
Interpretación:	*Exposición de evidencia empírica sobre el área de un polígono.*

Professora: 10 unitats quadrades, perquè no sabem si és un centímetre o mig o… i la gran?

__Profesora__: 10 unidades cuadradas, porque no sabemos si es un centímetro o medio o… ¿y la grande?	
Interpretación:	*Formalización sobre las unidades de medida del área y petición de comprobación sobre el área de un polígono.*

Àlex: 40.

__Álex__: 40.	
Interpretación:	*Exposición de evidencia empírica sobre el área de un polígono.*

Episodio 5 (*Descubrir a través del artefacto; Generalización y conceptualización*)

(25) Professora: O sigui, que no heu fet una ‘F’ el doble de gran en àrea, sinó quatre vegades més gran, veritat?

__Profesora__: O sea, que no habéis hecho una ‘F’ el doble de grande en área, sino cuatro veces más grande, ¿verdad?

Interpretación:	*Petición de comprobación sobre el área de una figura.*

(26) Isabel: Sí, però en aquesta quadrícula no hi ha cap costat que sigui $\sqrt{2}$ per fer...

***Isabel**: Sí, pero en esta cuadrícula no hay ningún lado que sea $\sqrt{2}$ para hacer…*	
Interpretación:	*Asentimiento y establecimiento de conjetura sobre la obtención de $\sqrt{2}$ utilizando una cuadrícula.*

(27) Professora: Tu voldries $\sqrt{2}$?

***Profesora**: ¿Tú querrías $\sqrt{2}$?*	
Interpretación:	*Petición de explicación sobre el uso de $\sqrt{2}$.*

(28) Isabel: Sí.

***Isabel**: Sí.*	
Interpretación:	*Asentimiento.*

(29) Professora: Per fer què?

***Profesora**: ¿Para hacer qué?*	
Interpretación:	*Petición de explicación sobre el uso de $\sqrt{2}$.*

(30) Isabel: Per fer el doble de l'àrea i amb aquesta quadrícula no es pot fer.

***Isabel**: Para hacer el doble de área y con esta cuadrícula no se puede hacer.*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre la duplicación del área de una figura utilizando una cuadrícula.*

(31) Professora: Tothom ha entès això de l'$\sqrt{2}$?

***Profesora**: ¿Todo el mundo ha entendido esto de la $\sqrt{2}$?*	
Interpretación:	*Establecimiento de consenso sobre el término $\sqrt{2}$.*

(32) Grup d'alumnes: No.

***Grupo de alumnos**: No.*	
Interpretación:	*Negación para pedir aclaración sobre el término $\sqrt{2}$.*

(33) Professora: Isabel, explica bé això!

***Profesora**: Isabel, ¡explica bien esto!*	
Interpretación:	*Petición de explicación sobre el término $\sqrt{2}$.*

(34) Isabel: Doncs que a la figura inicial cada quadrat té costat 1 i aquí a cada quadrat el costat és 2, aleshores l'àrea és quatre vegades més gran. Per això, ens interessaria que el costat del quadradet fos $\sqrt{2}$.

***Isabel**: Pues que en la figura inicial cada cuadrado tiene lado 1 y aquí en cada cuadradito el lado es 2, entonces el área es cuatro veces más grande. Por esto, nos interesaría que el lado del cuadradito fuese √2.*	
Interpretación:	*Justificación empírica sobre el uso de √2 para conseguir una figura con el doble de área.*

(35) Professora: Per tal que l'àrea fos...?

***Profesora**: ¿Para que el área fuese…?*	
Interpretación:	*Petición de formalización sobre el área de una figura.*

(36) Isabel: Dos.

***Isabel**: Dos.*	
Interpretación:	*Formalización del valor del área.*

(37) Professora: [Dibuixa a la pissarra quadrats de diferents mides] La Isabel diu: "jo tinc uns quadrats que mesuren 1x1" i, per tant, l'àrea és 1. Quan dupliquem l'altura i l'amplada obtinc quadrats que són 2x2, però resulta que l'àrea és quatre vegades més gran, ja que és 2x2. La Isabel diu: "per aconseguir un quadrat que tingués àrea 2, que fos el doble d'aquesta [assenyalant a la pissarra un quadrat d'àrea 1], els costats haurien de mesurar √2". Per demostrar-ho, si anomenem *x* al costat del quadrat, aleshores x^2 és igual a 2, és a dir, x ha de ser √2 [la professora fa totes aquestes anotacions a la pissarra].

***Profesora**: [Dibuja en la pizarra cuadrados de diferentes dimensiones.] Isabel dice: "yo tengo unos cuadrados que miden 1x1" y, por tanto, el área es 1. Cuando duplicamos la altura y la anchura obtengo cuadrados que son 2x2, pero resulta que el área es cuatro veces más grande, ya que es 2x2. Isabel dice: "para conseguir un cuadrado que tuviese área 2, que fuese el doble de esta [señalando en la pizarra un cuadrado de área 1], los lados deberían medir √2". Para demostrarlo, si llamamos x al lado del cuadrado, entonces x^2 es igual a 2, es decir, x debe ser √2 [la profesora hace estas anotaciones en la pizarra].*	
Interpretación:	*Recapitulación sobre la construcción de un cuadrado con el doble de área y cómo calcular √2.*

Professora: Algú sabria com dibuixar una 'F' que la base en comptes de fer dos fes √2? On està amagada una √2 dins d'un quadrat?

***Profesora**: ¿Alguien sabría cómo dibujar una 'F' que la base en vez de hacer dos hiciese √2? ¿Dónde está escondida una √2 dentro de un cuadrado?*	
Interpretación:	*Invitación a la participación para construir una figura con el doble de área y representar √2.*

Àlex: Entre 1 i 2.

***Álex**: Entre 1 y 2.*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre el valor numérico de √2.*

Professora: És entre 1 i 2. Però no és la meitat? Què és?

***Profesora**: Es entre 1 y 2. ¿Pero no es la mitad? ¿Qué es?*	
Interpretación:	*Validación y petición de formalización sobre el valor numérico de √2.*

Àlex: 1,414…

***Álex**: 1,414…*	
Interpretación:	*Formalización sobre el valor numérico de √2.*

Professora: 1,41… i infinits nombres decimals. Algú s'ho imagina?

***Profesora**: 1,41… e infinitos números decimales. ¿Alguien se lo imagina?*	
Interpretación:	*Validación e invitación a la participación sobre el significado matemático de √2.*

Àlex: A ull?

***Álex**: ¿A ojo?*	
Interpretación:	*Petición de aclaración sobre la pregunta formulada por la profesora.*

Professora: A ull, ho podríem fer… i una manera exacta? On surt √2 a dins d'un quadrat unitari. En aquest quadrat d'aquí [quadrat de costat 1] hi ha alguna cosa que mesuri √2? En el petit, hi ha alguna cosa que mesuri √2?

***Profesora**: A ojo, lo podríamos hacer… ¿y una forma exacta? ¿Dónde sale √2 dentro de un cuadrado unitario? ¿En este cuadrado de aquí [cuadrado de lado 1] hay alguna cosa que mida √2? ¿En el pequeño, hay alguna cosa que mida √2?*	
Interpretación:	*Petición de explicación sobre la obtención de √2 en un cuadrado unitario.*

Àlex: La diagonal.

***Álex**: La diagonal.*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre la obtención de √2 en un cuadrado unitario.*

Professora: Per què?

***Profesora**: ¿Por qué?*	
Interpretación:	*Petición de argumentación sobre la obtención de √2 utilizando la diagonal de un cuadrado unitario.*

Adrià: Perquè és la hipotenusa.

***Adrià**: Porque es la hipotenusa.*	
Interpretación:	*Exposición de evidencia empírica sobre la obtención de √2.*

Professora: Sí… la hipotenusa aquesta [assenyala la diagonal del quadrat unitari] sabem que és l'arrel del catet al quadrat, que és 1, més l'altre catet al quadrat i això és √2.

***Profesora**: Sí… la hipotenusa esta [señala la diagonal del cuadrado unitario] sabemos que es la raíz del cateto al cuadrado, que es 1, más otro cateto al cuadrado y esto es √2.*	
Interpretación:	*Complemento de la explicación de un alumno sobre la obtención de √2 utilizando el teorema de Pitágoras.*

Episodio 6 (*Explicar a través del artefacto; Estudio de estrategias para resolver o argumentar*)

Professora: Llavors com faríem aquí [en el paper] una 'F' que tingués de base √2? A veure, Saray, digues.

***Profesora**: Entonces, ¿cómo haríamos aquí [en el papel] una 'F' que tuviese de base √2? A ver, Saray, di.*	
Interpretación:	*Invitación a la participación para construir una figura geométrica cuya base mida √2.*

Saray: Fas la diagonal d'un dels quadrats i la transportes.

***Saray**: Haces la diagonal de uno de los cuadrados y la transportas.*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre la construcción de √2 utilizando una cuadrícula.*

Professora: Ah, com amb el compàs a dibuix tècnic. Vindries aquí, agafes [assenyalant la diagonal del quadrat unitari], i llavors vens aquí i ho poses, i a partir d'aquí construeixes.

***Profesora**: Ah, como con el compás en dibujo técnico. Vendrías aquí, tomas [señalando la diagonal del cuadrado unitario], y entonces vienes aquí y lo pones, y a partir de aquí construyes.*	
Interpretación:	*Complemento de la explicación anterior de un alumno.*

Saray: Sí.

***Saray**: Sí.*	
Interpretación:	*Asentimiento.*

Professora: Però per exemple, aquesta amplada d'aquí, de la 'F', ara voldries fer 4·√2… se'ns complica. A veure una manera geomètrica de fer-ho?

***Profesora**: Pero por ejemplo, esta anchura de aquí, de la 'F', ahora querrías hacer 4·√2… se nos complica. A ver, ¿una forma geométrica de hacerlo?*	
Interpretación:	*Invitación a la búsqueda de alternativas para construir una figura cuyos lados midan un múltiplo de √2.*

Adrià: En diagonal.

***Adrià**: En diagonal.*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre la obtención de múltiplos de √2.*

Professora: Fer-ho en diagonal. Com? Dibuixar la 'F' en diagonal. A veure, jo en tinc aquí una de feta, a veure si us convenç. [La professora projecta la seva proposta a la pantalla de GeoGebra]. Agafaríem de punta a punta d'un quadradet unitari [referint-se a la diagonal] i llavors ho construiria a sobre i aniria fent. Clar, aquí m'han quedat uns quadrats. Aquesta té d'altura 1, 2, 3, 4, 5 i 6, però ara són sis que mesuren més. Cada un no mesura 1, sinó que mesura √2. D'acord?

***Profesora**: Hacerlo en diagonal. ¿Cómo? Dibujar la 'F' en diagonal. A ver, yo tengo aquí una de hecha, a ver si os convence. [La profesora proyecta su propuesta en la pantalla de GeoGebra]. Tomaríamos de punta a punta de un cuadradito unitario [refiriéndose a la diagonal] y entonces lo construiría encima e iría haciendo. Claro, aquí me han quedado unos cuadrados. Esta tiene de altura 1, 2, 3, 4, 5 y 6, pero ahora son seis que miden más. Cada uno no mide 1, sino que mide √2. ¿De acuerdo?*	
Interpretación:	*Recapitulación sobre la construcción de una figura poligonal cuyos lados miden un múltiplo de √2.*

(38) Professora: Quines són les particularitats d'aquesta ['F' amb el doble d'àrea], de la 'F' blava [original] i d'aquesta altra ['F' amb el doble de perímetre]?

***Profesora**: ¿Cuáles son les particularidades de esta ['F' con el doble de área], de la 'F' azul [original] y de esta otra ['F' con el doble de perímetro?*	
Interpretación:	*Petición de explicación para contrastar distintas soluciones.*

(39) Alba: Que són proporcionals.

***Alba**: Que son proporcionales.*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre la proporcionalidad de figuras geométricas.*

(40) Professora: Què vols dir amb 'proporcionals'? A veure, Alba, explica-ho.

***Profesora**: ¿Qué quieres decir con 'proporcionales'? A ver, Alba, explícalo.*	
Interpretación:	*Petición de explicación sobre el término 'proporcional'.*

(41) Alba: Què un costat i l'altre mantinguin la mateixa proporció. Per exemple, si hi ha tres quadrats en vertical i quatre en horitzontal, llavors serien sis en vertical i vuit en horitzontal.

***Alba**: Que un lado y el otro mantengan la misma proporción. Por ejemplo, si hay tres cuadrados en vertical y cuatro en horizontal, luego serían seis en vertical y ocho en horizontal.*	
Interpretación:	*Exposición con argumentación sobre proporcionalidad.*

(42) Professora: Val, per tant, quines són proporcionals? Una ‘F’ de l’altra?

***Profesora**: Vale, por tanto, ¿cuáles son proporcionales? ¿Una ‘F’ de la otra?*	
Interpretación:	*Validación y petición de formalización sobre proporcionalidad.*

(43) Alba: La divisió entre els costats.

***Alba**: La división entre los lados.*	
Interpretación:	*Formalización para obtener la razón entre lados proporcionales.*

(44) Professora: La divisió entre el costat d'una ‘F’ amb l’homòleg de l'altra.

***Profesora**: La división entre un lado de una ‘F’ con el homólogo de la otra.*	
Interpretación:	*Formalización sobre la proporcionalidad entre lados homólogos.*

(45) Àlex: La *k*.

***Álex**: La k.*	
Interpretación:	*Aclaración sobre la constante de proporcionalidad.*

(46) Professora: I a aquesta proporció li dieu *k*, que és la constant de proporcionalitat. Ara bé, en aquests polígons, per afirmar que són semblants, a més a més, què heu utilitzat? És a dir, què s’ha de complir?

***Profesora**: Y a esta proporción le llamáis k, que es la constante de proporcionalidad. Ahora, a estos dos polígonos, para afirmar que son semejantes, además, ¿qué habéis utilizado? Es decir, ¿qué se debe cumplir?*	
Interpretación:	*Petición de explicación sobre polígonos semejantes.*

(47) Adrià: Que es mantinguin els angles.

***Adrià**: Que se mantengan los ángulos.*	
Interpretación:	*Exposición de evidencia empírica sobre la igualdad de ángulos homólogos en dos figuras semejantes.*

(48) Professora: Exacte, els mateixos angles em faltava. Perquè sinó us podria dibuixar un rombe de costat quatre i aquests dos polígons [rombe i quadrat] no són semblants. Per tant, no només els costats han de ser proporcionals, sinó que els angles homòlegs han de ser iguals. Ho teniu tots clar?

***Profesora**: Exacto, los mismos ángulos me faltaba. Porque sino podría dibujaros un rombo de lado cuatro y estos dos polígonos [rombo y cuadrado] no son semejantes. Por tanto, no solo los lados han de ser proporcionales, sino que los ángulos homólogos han de ser iguales.*	
Interpretación:	*Recapitulación sobre la definición de semejanza.*

Grup d’alumnes: Iguals?

***Grupo de alumnos**: ¿Iguales?*

Interpretación:	*Petición de aclaración sobre la igualdad de ángulos homólogos entre dos polígono semejantes.*

Professora: Sí, iguals. Si aquest és de 90º [assenyalant els angles del quadrat] aquí [en el rombe] hauria de tenir el seu equivalent a 90º, aquí no en tinc cap de 90º, per tant, no podran ser proporcionals. No seran figures semblants.

***Profesora**: Sí, iguales. Si este es de 90º [señalando los ángulos del cuadrado] aquí [en el rombo] tendría que tener su equivalente a 90º, aquí no tengo ninguno de 90º, por lo tanto, no podrán ser proporcionales. No serán figuras semejantes.*	
Interpretación:	*Formalización sobre la igualdad de ángulos homólogos entre dos figuras semejantes.*

Episodio 7 (*Explicar a través del artefacto; Conexiones con otras situaciones*)

Àlex: I de quant són els angles del rombe?

***Àlex**: ¿Y de cuánto son los ángulos del rombo?*	
Interpretación:	*Petición de aclaración sobre la amplitud de los ángulos de un rombo.*

Professora: Puc fer diverses opcions; aquest en concret l'hauríem de mesurar. Podríem fer qualsevol rombe mantenint que el costat sigui quatre. Algú va fer altres 'F's'?

***Profesora**: Puedo hacer varias opciones; este en concreto tendríamos que medirlo. Podríamos hacer cualquier rombo manteniendo que el lado sea cuatro. ¿Alguien hizo otras 'F's'?*	
Interpretación:	*Formalización sobre la amplitud de los ángulos de un rombo.*

Berta: No.

***Berta**: No.*	
Interpretación:	*Negación sobre la construcción de nuevos polígonos.*

Professora: Ho sigui, us van sortir aquestes tres bàsicament. La que va inclinada és la que us faltava. Que seria la que fas el doble de l'àrea. L'enunciat estava posat expressament amb trampa, ja que si vull demanar-vos que feu una figura el doble de gran haig d'especificar si la vull amb el doble de perímetre o amb el doble d'àrea. Nosaltres us ho vam posar així "el doble de gran" perquè sortissin més coses. Així donava més joc. Si haguéssim dit el doble d'àrea només hi havia una opció, la de fer el costat √2, i si haguéssim dit el doble de perímetre i que segueixi sent proporcional només hi havia l'opció que heu fet la majoria.

***Profesora**: O sea, os salieron estas tres básicamente. La que va sesgada es la que os faltaba. Que sería la que haces el doble de área. El enunciado estaba puesto intencionadamente con trampa, ya que si quiero pediros que hagáis una figura el doble de grande tengo que especificar si quiero el doble de perímetro o el doble de área. Nosotros os lo pusimos así "el doble de grande" porque saliesen más cosas. Así daba más juego. Si hubiésemos dicho el doble*

de área solo había una opción, la de hacer el lado √2, y si hubiésemos dicho el doble de perímetro y que siga siendo proporcional solo había la opción que habéis hecho la mayoría.	
Interpretación:	*Recapitulación sobre distintas soluciones de la tarea matemática.*

Isabel: Perquè sigui el doble de l'àrea…?

***Isabel**: ¿Para que sea el doble del área…?*	
Interpretación:	*Petición de aclaración sobre la duplicación del área.*

Professora: Què vols dir?

***Profesora**: ¿Qué quieres decir?*	
Interpretación:	*Petición de explicación sobre la pregunta formulada por un alumno.*

Isabel: Si només n'hem de fer un per anar cap aquí…

***Isabel**: Si solo tenemos que hacer uno para ir hacia aquí…*	
Interpretación:	*Petición de aclaración sobre la duplicación del área.*

Professora: La Isabel pregunta, ella té una quadrícula i quan ha de fer la 'F' inclinada; aquesta que hem dit "he de fer, si la 'F' d'abans era així [la de l'enunciat] i té amplada 1 i ara la volem fer d'amplada √2", què he de fer així [dibuixa la diagonal] i ja anirà cap allà? o he de fer el doble de la diagonal [és a dir, 2·√2] i tirar cap allà?

***Profesora**: Isabel pregunta, ella tiene una cuadrícula y cuando tiene que hacer la 'F' sesgada; esta que hemos dicho "tengo que hacer, si la 'F' de antes era así [la del enunciado] y tiene anchura 1, y ahora la queremos hacer de anchura √2", ¿qué tengo que hacer así [dibuja la diagonal], e irá hacia allá? O bien, ¿tengo que hacer el doble de la diagonal [es decir, 2·√2] y desplazarme hacia allá?*	
Interpretación:	*Establecimiento de consenso sobre la pregunta formulada por un alumno durante la discusión en gran grupo.*

Alba: No.

***Alba**: No.*	
Interpretación:	*Negación sobre la medida de la diagonal de un cuadrado.*

Professora: Val, perquè si l'agafo de dos diagonals de llarg, quant mesura?

***Profesora**: Vale, porque si la tomo de dos diagonales de largo, ¿cuánto mide?*	
Interpretación:	*Petición de comprobación sobre la medida de la diagonal de un cuadrado.*

Àlex: 2·√2.

***Àlex**: 2·√2.*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre la medida de la diagonal.*

Professora: 2·√2. I tu no la vols de 2·√2. Si la ‘F’ inicial era de sis d'alt, de sis quadrets d'alt, aquí l'ha de fer de sis diagonals d'aquestes de llarg.

***Profesora**: 2·√2. I tú no la quieres de 2·√2. Si la ‘F’ inicial era de seis de alto, de seis cuadrados de alto, aquí la tiene que hacer de seis diagonales de largo.*	
Interpretación:	*Validación y complemento de la explicación de un alumno.*

ANEXO VIII

Transcripción y caracterización de episodios de la discusión en gran grupo de la segunda tarea de la profesora Sara (centro B)

Episodio 1 (*Explicar a través del artefacto; Situación del problema*)

Professora: Molt bé, eh… d'acord, doncs l'activitat quatre, va! [En Javier aixeca la mà per participar en la resolució de l'activitat mentre la professora posa en marxa l'ordinador].

***Profesora**: Muy bien, eh... de acuerdo, pues la actividad cuatro, ¡venga! [Javier levanta la mano para participar en la resolución de la actividad mientras la profesora abre el ordenador].*	
Interpretación:	*Invitación a la participación para empezar la resolución de la segunda tarea.*

Professora: A veure que l'ordinador s'obri a la primera, que això a vegades no funciona. La quatre era la que havíeu de fer… que teníeu uns triangles i al final un quadrat i que us demanaven quines transformacions havíeu de fer a la figura 1 per passar a la 2 i quines a la 2 per passar a la 1.

***Profesora**: A ver que el ordenador se abra a la primera, que esto a veces no funciona. La cuatro era la que teníais que hacer… que teníais unos triángulos y al final un cuadrado y que os pedía qué transformaciones teníais que hacer a la figura 1 para pasar a la 2 y qué [transformaciones] a la 2 para pasar a la 1.*	
Interpretación:	*Establecimiento de consenso sobre el enunciado de la tarea.*

Episodio 2 (*Experimentar el instrumento*; *Presentación de una solución*)

(49) Professora: Vinga fem l'apartat (a). Tu, Javier, com l'has fet?

***Profesora**: Venga hagamos el apartado (a). Tú, Javier, ¿cómo lo has hecho?*	
Interpretación:	*Invitación a la participación para empezar la resolución de la segunda tarea.*

(50) Javier: Nosaltres vam fer que, com que la base [del triangle petit] era 2 [quadrats], la vam ampliar el doble i vam mantenir els angles. Llavors, si allarguem el doble de tots els costats, en el punt on es tallen es forma el nou triangle.

***Javier**: Nosotros hicimos que, como la base [del triángulo pequeño] era 2 [cuadrados], la ampliamos el doble y mantuvimos los ángulos. Entonces, si alargamos el doble de todos los lados, en el punto donde se cortan se forma el nuevo triángulo.*	
Interpretación:	*Exposición de evidencia empírica para construir un triángulo el doble de grande manteniendo la semejanza con el original.*

(51) Professora: D'acord. Per tant, tu tenies un triangle així [la professora dibuixa el triangle 1 del primer apartat a la pissarra], i llavors el vas fer el doble de gran, oi?

Profesora: De acuerdo. Por lo tanto, tú tenías un triángulo así [la profesora dibuja el triángulo 1 en la pizarra], y entonces lo hiciste el doble de grande, ¿verdad?	
Interpretación:	*Validación de la exposición de un alumno sobre la construcción de un triángulo el doble de grande.*

(52) Javier: Sí, exacte.

***Javier**: Sí, exacto.*	
Interpretación:	*Asentimiento.*

(53) Professora: Clar, però on el vas pintar? On el vas construir? Aquí al costat [fent referència al lloc que ocupa el triangle 2 a l'enunciat] o a sobre del primer triangle?

***Profesora**: Claro, pero ¿dónde lo pintaste? ¿Dónde lo construiste? ¿Aquí al lado [haciendo referencia al lugar que ocupa el triángulo 2 del enunciado] o encima del primer triángulo?*	
Interpretación:	*Petición de explicación para concretar la posición en el plano del nuevo triángulo construido.*

(54) Eduardo: El vam representar al costat.

***Eduardo**: Lo representamos al lado.*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre la posición en el plano del nuevo triángulo.*

(55) Professora: Sí, d'acord, però llavors jo quines ordres li he de donar al GeoGebra, per exemple, perquè aquest triangle [triangle 1] me'l transformi en aquest [triangle 2] que està pintat al costat? Què li dic jo?

***Profesora**: Sí, de acuerdo, pero entonces yo ¿qué órdenes tengo que dar a GeoGebra, por ejemplo, para que este triángulo [triángulo 1] me lo transforme en este [triángulo 2] que está pintado al lado? ¿Qué le digo yo?*	
Interpretación:	*Petición de explicación acerca de cómo realizar una transformación geométrica utilizando GeoGebra.*

(56) Eduardo: Podem dir-li que dupliqui els costats.

***Eduardo**: Podemos decirle que duplique los lados.*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre la duplicación de los lados de un triángulo utilizando GeoGebra.*

(57) Professora: D'acord, que dupliqui els costats i mantingui els angles. Per tant, li fem una ampliació de raó 2, d'acord?

***Profesora**: De acuerdo, que duplique los lados y mantenga los ángulos. Por lo tanto, le hacemos una ampliación de razón 2, ¿de acuerdo?*

Interpretación:	*Formalización sobre la construcción de un triángulo semejante cuya razón de semejanza sea 2.*

(58) Eduardo: I ens el situarà a sobre a partir d'un vèrtex, veritat?

***Eduardo**: Y nos lo situará encima a partir de un vértice, ¿verdad?*	
Interpretación:	*Petición de aclaración sobre la posición en el plano del nuevo triángulo semejante.*

(59) Professora: A sobre, me la posarà aquí a sobre? [la professora dibuixa a la pissarra els dos triangles que tenen la base a sobre del mateix costat, de manera que el petit té la base just al centre de la base del triangle gran] N'estàs segur? Com podem saber-ho? Penseu un moment! El problema està en què hem d'escriure al GeoGebra tota aquesta informació i encara no sabem com dir-li.

***Profesora**: Encima, ¿me la pondrá aquí encima? [la profesora dibuja en la pizarra los dos triángulos que tienen la base encima del mismo lado, de forma que el pequeño tiene la base justo al centro de la base del triángulo grande] ¿Estás seguro? ¿Cómo podemos saberlo? ¡Pensad un momento! El problema está en que tenemos que escribir a GeoGebra toda esta información y aún no sabemos cómo decírselo.*	
Interpretación:	*Invitación a la reflexión acerca de cómo indicar al GeoGebra la situación en el plano del nuevo triángulo.*

Javier: No!

***Javier**: ¡No!*	
Interpretación:	*Negación sobre una pregunta anterior de un alumno.*

Eduardo: A veure, vull dir a partir d'allà... a partir del vèrtex.

***Eduardo**: A ver, quiero decir a partir de allá… a partir del vértice.*	
Interpretación:	*Aclaración sobre la posición en el plano de un triángulo.*

Episodio 3 (*Descubrir a través del artefacto*; *Estudio de diferentes estrategias para resolver o argumentar*: cambio en la dimensión de la figura y translación)

(60) Professora: D'acord, mirem un moment què em demanen. A veure…un moment, que això… D'acord, mireu. Algú l'altre dia quan resolíeu problemes de simetries, girs i translacions va descobrir alguna eina que penseu que podria construir un triangle el doble de gran? Perquè és clar, vosaltres m'heu dit: "clar, pots dir-li que em doni tots els costats i que em mantingui tots els angles", i on li escric jo això al GeoGebra?

***Profesora**: De acuerdo, miremos un momento qué nos piden. De acuerdo, mirad. ¿Alguien el otro día cuando resolvíais problemas de simetrías, giros y translaciones descubrió alguna herramienta que pensáis que podría construir*

un triángulo el doble de grande? Porque claro, vosotros me habéis dicho: "claro, puedes decirle que me construya todos los lados y me mantenga todos los ángulos", y ¿esto dónde lo escribo yo al GeoGebra?	
Interpretación:	*Invitación a la reflexión sobre la construcción de un triángulo el doble de grande utilizando GeoGebra.*

Alba: Aquí, a l'entrada del GeoGebra [la professora ho assenyada a la pantalla].

***Alba**: Aquí, en la entrada del GeoGebra [la profesora lo señala en la pantalla].*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre la utilización de GeoGebra.*

Professora: A l'entrada? No, si li escric aquesta frase… Va, mireu quines eines tenim per aquí a les transformacions [la professora obre les opcions del menú del GeoGebra]; mireu a veure si n'hi ha alguna que us serveixi…

***Profesora**: ¿En la entrada? No, si le escribo esta frase… Venga, mirad qué herramientas tenemos aquí en las transformaciones [la profesora abre las opciones del menú de GeoGebra]; mirad a ver si hay alguna que os sirva…*	
Interpretación:	*Petición de comprobación sobre las herramientas disponibles en el GeoGebra.*

(61) Alba: Un vector!

***Alba**: ¡Un vector!*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre la utilización de una herramienta de GeoGebra (vector).*

(62) Berta: Homotècia des d'un punt per un factor d'escala.

***Berta**: Homotecia desde un punto por un factor de escala.*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre la utilización de una herramienta de GeoGebra (homotecia).*

(63) Professora: Sí, d'acord, l'eina per representar homotècies. Ara bé, quin és el factor d'escala si volem passar d'aquí [triangle 1] a aquí [triangle 2]?

***Profesora**: Sí, de acuerdo, la herramienta para representar homotecias. Ahora bien, ¿cuál es el factor de escala si queremos pasar de aquí [triángulo 1] a aquí [triángulo 2]?*	
Interpretación:	*Validación sobre la utilización de la herramienta 'homotecia' de GeoGebra y petición de comprobación para determinar la razón de semejanza entre los dos triángulos.*

(64) Grup d'alumnes: Dos!

***Grupo de alumnos**: ¡Dos!*

Interpretación:	*Exposición de evidencia empírica sobre cuál es el valor de la razón de semejanza.*

(65) Professora: Però respecte de quin punt li dic [al GeoGebra] que em faci la construcció?

***Profesora**: ¿Pero respecto de qué punto le digo [a GeoGebra] que me haga la construcción?*	
Interpretación:	*Petición de formalización sobre la utilización de GeoGebra para aplicar una homotecia.*

(66) Alba: Respecte d'algun vèrtex. Per exemple, el vèrtex de l'extrem de l'esquerra.

***Alba**: Respecto de algún vértice. Por ejemplo, el vértice del extremo de la izquierda.*	
Interpretación:	*Formalización sobre la construcción de una homotecia con GeoGebra.*

(67) Professora: Vols dir aquest vèrtex d'aquí [la professora assenyala a la pantalla el vèrtex situat més a l'esquerra del triangle 1]?

***Profesora**: ¿Quieres decir este vértice de aquí [la profesora señala en la pantalla el vértice situado más a la izquierda del triángulo 1]?*	
Interpretación:	*Petición de comprobación sobre el vértice que se debe utilizar para aplicar la homotecia.*

(68) Alba: Sí, exacte, aquest punt.

***Alba**: Sí, exacto, este punto.*	
Interpretación:	*Asentimiento / Comprobación acerca del vértice utilizado.*

Professora: D'acord. [La professora selecciona els elements necessaris per fer una homotècia amb el GeoGebra.] Jo li dic des d'aquest punt [vèrtex esquerre del triangle 1] fes-me això; aquest polígon nou, per exemple... [La professora indica els passos que cal seguir amb el GeoGebra per fer la construcció.] Polígon nou d'aquest punt... i ara el 2 no, em dieu?

***Profesora**: De acuerdo. [La profesora selecciona los elementos necesarios para hacer una homotecia con el GeoGebra.] Yo le digo desde este punto [vértice izquierda del triángulo 1] hazme esto; este polígono nuevo, por ejemplo… [La profesora indica los pasos que hay que seguir con GeoGebra para hacer la construcción.] Polígono nuevo de este punto… y ahora el 2, ¿no, me decís?*	
Interpretación:	*Complemento de la explicación anterior de un alumno.*

Alba: Sí, exacte.

***Alba**: Sí, exacto.*	
Interpretación:	*Asentimiento.*

(69) Professora: D'acord. Mireu on me l'ha posat. Me l'ha fet igual de gran que el blau [triangle 2]? Aquest era el que volíeu? I ara amb un vector el podeu traslladar perquè quedi damunt del blau. Quin vector?

Profesora: *De acuerdo. Mirad donde me la ha puesto. Me lo ha hecho igual de grande que el azul [triángulo 2]. ¿Este era el que queríais? Y ahora con un vector lo podéis trasladar para que quede encima del azul. ¿Qué vector?*	
Interpretación:	*Invitación a la reflexión sobre la utilización de un vector para trasladar un triángulo en el plano.*

(70) Javier: Un vector des d'un vèrtex al seu vèrtex homòleg.

Javier: *Un vector desde un vértice hasta su vértice homólogo.*	
Interpretación:	*Establecimiento de conjetura sobre la utilización de un vector para trasladar un triángulo.*

(71) Professora: D'acord, em faig un vector, per exemple, des d'aquest vèrtex [el superior del primer triangle] fins al seu homòleg i ara li dic: "ara trasllada aquest [vèrtex del triangle 1] mitjançant aquest vector" i realment va a sobre. Per tant, heu necessitat fer dues transformacions. Primer heu hagut de fer l'ampliació i després una translació.

Profesora: *De acuerdo, me hago un vector, por ejemplo, desde este vértice [el superior del primer triángulo] hasta su homólogo y ahora le digo: "ahora traslada este [vértice del triángulo 1] mediante este vector" y realmente va encima. Por lo tanto, habéis necesitado hacer dos transformaciones. Primero habéis tenido que hacer la ampliación y después una translación.*	
Interpretación:	*Validación sobre la utilización de un vector para trasladar un triángulo en el plano y complemento de la explicación de un alumno para caracterizar una homotecia.*

Episodio 4 (*Enlazar artefactos*; *Estudio de diferentes estrategias para resolver o argumentar*: una única transformación, la homotecia)

Professora: Hi ha alguna manera de què amb un sol moviment, "pam", vagi del vermell al blau directe amb una sola transformació?

Profesora: *¿Hay alguna forma de que con un único movimiento, "pam", vaya del rojo al azul directo con una única transformación?*	
Interpretación:	*Invitación a la búsqueda de alternativas sobre la aplicación de una transformación geométrica.*

Grup d'alumnes: Doncs sí.

Grupo de alumnos: *Pues sí.*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre transformaciones geométricas.*

Professora: Com?

__Profesora__: ¿Cómo?	
Interpretación:	*Petición de explicación sobre cómo realizar una transformación geométrica.*

Oriol: Fent servir el zoom...

__Oriol__: Utilizando el zoom…	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre el uso de una herramienta de GeoGebra.*

Professora: A veure, mireu... quan heu fet l'homotècia, per què creieu que us ha quedat així? [La professora fa referència a què el triangle s'ha ampliat des del vèrtex esquerre.] I no us ha quedat, per exemple... si el petit era aquest, per què no us ha quedat així el gran, el doble de gran així? [La professora dibuixa a la pissarra l'homotècia des del vèrtex superior del triangle 1.]

__Profesora__: A ver, mirad… cuando habéis hecho la homotecia, ¿por qué creéis que os ha quedado así? [La profesora hace referencia a que el triángulo se ha ampliado desde el vértice de la izquierda.] Y no ha quedado, por ejemplo… si el pequeño era este, ¿por qué no ha quedado así el grande, el doble de grande así? [La profesora dibuja en la pizarra una homotecia desde el vértice superior del triángulo 1.]	
Interpretación:	*Petición de argumentación sobre el efecto de una homotecia en un triángulo.*

Anna: Perquè li hem marcat.

__Anna__: Porque se lo hemos marcado.	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre una homotecia.*

Professora: Li hem marcat... L'Alba ha dit: "per dir algun, el de l'extrem esquerra". Tu m'has dit que li digués des d'aquí, i el que ha fet és com 'pam', l'ha fet gran cap aquí. Si li haguéssim dit aquest [vèrtex de l'extrem dret], què hagués passat?

__Profesora__: Se lo hemos marcado… Alba ha dicho: "por decir alguno, el del extremo de la izquierda". Tú me has dicho que le dijese desde aquí, y lo que ha hecho es como 'pam', lo ha hecho grande hacia aquí. Si le hubiésemos dicho este [vértice del extremo derecho], ¿qué hubiese pasado?	
Interpretación:	*Recapitulación sobre la construcción de una homotecia con GeoGebra y petición de explicación sobre el efecto de una homotecia en un triángulo.*

Grup d'alumnes: Cap allà.

__Grupo de alumnos__: Hacia allá.

Interpretación:	*Exposición de evidencia empírica sobre la construcción de una homotecia.*

Professora: Cap allà. I perquè m'hagués quedat així [la professora fa un dibuix a la pissarra]?

***Profesora**: Hacia allá. ¿Y para que me hubiese quedado así [la profesora hace un dibujo en la pizarra]?*	
Interpretación:	*Petición de comprobación sobre la construcción de una homotecia.*

Grup d'alumnes: El vèrtex de d'alt.

***Grupo de alumnos**: El vértice de arriba.*	
Interpretación:	*Exposición de evidencia empírica sobre la construcción de una homotecia.*

Professora: Li hagués hagut de dir aquí [vèrtex de la part superior]. D'acord, i si no li dic cap d'aquests tres punts, què passarà si li dic un altre?

***Profesora**: Le hubiese tenido que decir aquí [vértice de la parte superior]. De acuerdo, ¿y si no le digo ninguno de estos tres puntos?, ¿qué pasará si le digo otro?*	
Interpretación:	*Petición de explicación sobre el efecto de una homotecia en un triángulo.*

Javier: No ho farà.

***Javier**: No lo hará.*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre la construcción de un triángulo homotético.*

Irene: No ho incrementarà del tot.

***Irene**: No lo incrementará del todo.*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre la construcción de un triángulo homotético.*

Professora: Ho provem? A veure, algú que vingui aquí a fer una homotècia.

***Profesora**: ¿Lo probamos? A ver, alguien que venga aquí a hacer una homotecia.*	
Interpretación:	*Invitación a la participación para construir una homotecia con GeoGebra.*

Martí: Jo...

***Martí**: Yo…*	
Interpretación:	*Asentimiento.*

Professora: Vinga, surt.

Profesora: Venga, sal.	
Interpretación:	*Invitación a la participación para que un alumno voluntario construya una homotecia con GeoGebra.*

Martí: Vol que faci una homotècia?

Martí: ¿Quiere que haga una homotecia?	
Interpretación:	*Petición de aclaración sobre la construcción de una homotecia.*

Professora: Sí. T'esborro tot això, però… Vull que el vermell el transportis directament a sobre del blau. Que aquest vèrtex el portis aquí a sobre [la professora ho indica a la pantalla] amb una homotècia.

Profesora: Sí. Te borro todo esto, pero… Quiero que el rojo lo transportes directamente encima del azul. Que este vértice lo lleves aquí encima [la profesora lo indica en la pantalla] con una homotecia.	
Interpretación:	*Petición de comprobación para construir un triángulo homotético con GeoGebra.*

Martí: Ah! Amb una homotècia? No amb un vector!

Martí: ¡Ah! ¿Con una homotecia? ¡No con un vector!	
Interpretación:	*Petición de aclaración sobre la construcción de una homotecia.*

Professora: No, home! Amb un vector et quedaria petit. A partir de quin punt el faràs?

Profesora: ¡No, hombre! Con un vector te quedaría pequeño. ¿A partir de qué punto lo harás?	
Interpretación:	*Petición de comprobación para construir un triángulo homotético con GeoGebra.*

Martí: [L'alumne ho assenyala a la pantalla.] Des d'aquest d'aquí.

Martí: [El alumno lo señala en la pantalla]. Desde este de aquí.	
Interpretación:	*Exposición de evidencia empírica sobre el vértice a partir del cual aplicaría la homotecia.*

Professora: Vinga va, *objecto a escalar*, quin objecte?

Profesora: Venga, va, objeto a escalar, ¿qué objeto?	
Interpretación:	*Petición de comprobación sobre la aplicación de una homotecia con GeoGebra.*

Martí: [L'alumne ho assenyala a la pantalla.] Aquest.

Martí: [El alumno lo señala en la pantalla.] Este.

Interpretación:	*Exposición de evidencia empírica sobre el objeto a partir del cual se debe aplicar la homotecia con GeoGebra.*

Professora: Aquest, clica'l. [L'alumne clica amb el ratolí i en sortir el menú desplegable la professora li dóna una indicació.] Al nou… *centro*?

***Profesora**: Este, clícalo. [El alumno hace clic con el ratón y cuando sale el menú desplegable la profesora le da una indicación.] Al nuevo… ¿centro?*	
Interpretación:	*Validación y petición de formalización sobre la definición del centro de homotecia con GeoGebra.*

Martí: El centre de…, és que… què vol dir?

***Martí**: El centro de…, es que… ¿qué quiere decir?*	
Interpretación:	*Petición de aclaración sobre el centro de homotecia.*

Professora: Sí, el centre de l'homotècia.

***Profesora**: Sí, el centro de la homotecia.*	
Interpretación:	*Validación.*

Alba: No, posa'l al mig, Martí…

***Alba**: No, ponlo en medio, Martí…*	
Interpretación:	*Exposición de evidencia empírica para situar el centro de homotecia.*

Professora: Sí, exacte, no el posis a dins, que no t'ho deixa…

***Profesora**: Sí, exacto, no lo pongas dentro, que no te deja…*	
Interpretación:	*Validación.*

Martí: Com vol que ho faci? És que jo no ho sé fer. [L'alumne marxa a seure al seu lloc.]

***Martí**: ¿Cómo quiere que lo haga? Es que yo no lo sé hacer. [El alumno va a sentarse a su sitio.]*	
Interpretación:	*Petición de aclaración sobre la situación del centro de homotecia.*

Professora: Llavors per què surts tu?

***Profesora**: ¿Entonces por qué sales tú?*	
Interpretación:	*Petición de explicación sobre la participación de un alumno.*

Martí: Perquè l'Oriol m'ha dit que surti.

***Martí**: Porque Oriol me ha dicho que salga.*	
Interpretación:	*Aclaración sobre la participación de un alumno.*

(72) Professora: A veure... Doncs, Alba, surt tu.

***Profesora**: A ver… Pues, Alba, sal tú.*	
Interpretación:	*Invitación a la participación de una alumna para que haga una construcción geométrica con GeoGebra.*

(73) Alba: D’acord. [L'Alba surt i fa la construcció amb el GeoGebra. Simultàniament, la professora explica en veu baixa cada pas que va fent.]

***Alba**: De acuerdo. [Alba sale y hace la construcción con GeoGebra. Simultáneamente, la profesora explica en voz baja cada paso que va haciendo.]*	
Interpretación:	*Asentimiento.*

(74) Professora: Mireu què ha passat. Fixeu-vos què ha passat quan l’Alba li ha dit que vol una homotècia d’aquest triangle vermell respecte d’aquest punt [la professora es refereix al vèrtex de l’extrem esquerre del triangle 2]. Mireu què ha fet el GeoGebra [indica a sobre de la pantalla la transformació del GeoGebra] i l’ha portat aquí [a la banda esquerra del primer triangle]. D’acord? Nosaltres no volíem això, nosaltres volíem que aquest [triangle 1] quedés aquí a sobre [triangle 2], veritat?

***Profesora**: Mirad qué ha pasado. Fijaos qué ha pasado cuando Alba le ha dicho que quiere una homotecia de este triángulo rojo respecto de este punto [la profesora se refiere al vértice del extremo de la izquierda del triángulo 2]. Mirad qué ha hecho el GeoGebra [indica sobre la pantalla la transformación del GeoGebra] y lo ha llevado aquí [al lado izquierdo del primer triángulo]. ¿De acuerdo? Nosotros no queríamos esto, nosotros queríamos que este [triángulo 1] quedase aquí encima [triángulo 2], ¿verdad?*	
Interpretación:	*Invitación a la reflexión acerca de cómo aplicar una homotecia a un triángulo utilizando GeoGebra.*

(75) Alba: Doncs el posem a l'altre costat.

***Alba**: Pues lo ponemos al otro lado.*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre la posición del centro de homotecia.*

(76) Professora: El posem a on, Alba?

***Profesora**: ¿Lo ponemos a dónde, Alba?*	
Interpretación:	*Petición de explicación sobre la posición del centro de homotecia.*

(77) Alba: A l’altre costat.

***Alba**: Al otro lado.*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre la posición del centro de homotecia.*

(78) Professora: Per aquí? A un punt de per aquí?

***Profesora**: ¿Por aquí? ¿A un punto de por aquí?*	
Interpretación:	*Petición de comprobación sobre la posición del centro de homotecia.*

(79) Grup d'alumnes: A un altre!

***Grupo de alumnos**: ¡A otro!*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre la posición del centro de homotecia.*

(80) Professora: A veure esborro tot això que ho hem de saber fer sense aquest, eh? Li faig una homotècia d'aquest triangle respecte a quin punt?

***Profesora**: A ver borro todo esto que lo tenemos que saber hacer sin este, ¿eh? ¿Le hago una homotecia de este triángulo respecto a qué punto?*	
Interpretación:	*Petición de formalización sobre la posición final del centro de homotecia.*

(81) Grup d'alumnes: [Indicant que cal anar cap a l'esquerra.] Tres cap allà.

***Grupo de alumnos**: [Indicando que hay que ir hacia la izquierda.] Tres hacia allá.*	
Interpretación:	*Exposición de evidencia empírica sobre la posición del centro de homotecia en la cuadrícula.*

(82) Professora: Tres cap allà?

***Profesora**: ¿Tres hacia allá?*	
Interpretación:	*Petición de comprobación sobre la posición del centro de homotecia en la cuadrícula.*

(83) Grup d'alumnes: [Quan la professora assenyala la posició amb el cursor.] Sí, aquí.

***Grupo de alumnos**: [Cuando la profesora señala la posición con el cursor.] Sí, aquí.*	
Interpretación:	*Asentimiento.*

(84) Professora: I 2 més... Mireu, analitzeu què ha passat. Per què m'heu dit tres? Ara aquest punt on l'ha enviat?

***Profesora**: Y 2 más… Mirad, analizad qué ha pasado. ¿Por qué me habéis dicho tres? ¿Ahora este punto dónde lo ha enviado?*	
Interpretación:	*Invitación a la reflexión sobre la posición final del centro de homotecia en la cuadrícula.*

(85) Adrià: Ah… Eren 5, no?

***Adrià**: Ah… Eran 5, ¿no?*

Interpretación:	*Exposición de evidencia empírica sobre la posición final del centro de homotecia en la cuadrícula.*

(86) Professora: Sis, no? O sigui aquest punt que ara estava a tres ha acabat estant a sis respecte d'aquest, del que li heu dit vosaltres que era el vostre centre. Vosaltres aquest punt on volíeu que anés a parar? A un, dos, tres, quatre i cinc d'aquí. Per tant, aquí? Voldria un punt, que és el centre, que si li faig una ampliació em transformi la figura directament.

***Profesora**: ¿Seis, no? O sea este punto que ahora estaba a tres ha acabado estando a seis respecto de este, del que vosotros habéis dicho que era vuestro centro. ¿Vosotros este punto a dónde queríais que fuese a parar? A uno, dos, tres, cuatro y cinco de aquí. Por lo tanto, ¿aquí? Querría un punto, que es el centro, que si le hago una ampliación me transforme la figura directamente.*	
Interpretación:	*Recapitulación sobre la posición final del centro de homotecia y su significado matemático.*

Grup d'alumnes: No, a 2,5.

***Grupo de alumnos**: No, a 2,5.*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre la posición del centro de homotecia.*

Professora: Com que 2,5? A veure, un moment, penseu dos segons! Si heu anat tres quadrets a l'esquerra i us ha quedat massa curt, només voleu anar dos quadrats i mig a l'esquerra? Us quedarà més curt encara, no?

***Profesora**: ¿Cómo que 2,5? A ver, un momento, ¡pensad dos segundos! Si habéis ido tres cuadraditos a la izquierda y os ha quedado demasiado corto, ¿solo queréis ir dos cuadrados y medio a la izquierda? ¿Aún os quedará más corto, no?*	
Interpretación:	*Invitación a la reflexión sobre la posición del centro de homotecia.*

Grup d'alumnes: 10.

***Grupo de alumnos**: 10.*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre la posición del centro.*

Berta: No, hauria de ser 3, però des del primer punt.

***Berta**: No, tendría que ser 3, pero desde el primer punto.*	
Interpretación:	*Exposición de evidencia empírica sobre la posición del centro.*

Professora: A veure, el punt *M* aquest que ara el puc moure, el tiro un més cap aquí? [La professora indica que aniria cap a l'esquerra.]

***Profesora**: A ver, el punto M este que ahora lo puedo mover, lo muevo más para acá? [La profesora indica que iría hacia la izquierda.]*	
Interpretación:	*Petición de comprobación sobre la situación del centro de homotecia.*

Grup d'alumnes: No, dos.

***Grupo de alumnos**: No, dos.*	
Interpretación:	*Exposición de evidencia empírica sobre la posición del centro.*

Professora: Dos…? [La professora mou el punt *M* i el triangle es mou.] D'acord? Si hagués fet... en comptes de tres a dos i mig, m'hagués quedat més curt… Si el posava a 2,5 encara em quedava més a prop, d'acord? Jo el vull aquí. I aquest *M*... perquè ara això, tenia aquí una base que la veiem clara, però si hagués estat una figura més estranya, que no estiguessin els dos triangles així alineats, aquest punt com l'haguéssim trobat? Algú ara veu, sap... jo amb la mà cada vegada que he representat l'homotècia us he fet així [indicant que, partint de la mà tancada, l'ha anat obrint mentre la movia cap a la dreta]. Algú sap imaginar...?

***Profesora**: ¿Dos…? [La profesora mueve el punto M y el triángulo se mueve.] ¿De acuerdo? Si hubiese hecho… en vez de tres a dos y medio, me hubiese quedado más corto… Si lo ponía a 2,5 aún me quedaba más cerca, ¿de acuerdo? Yo lo quiero aquí. Y este M… porque ahora esto, tenía aquí una base que la veíamos clara, pero si hubiese sido una figura más extraña, que no estuviesen los dos triángulos así alineados, ¿este punto cómo lo hubiésemos encontrado? Alguien ahora ve, sabe… yo con la mano cada vez que he representado la homotecia os he hecho así [indicando que, partiendo de la mano cerrada, la ha ido abriendo mientras la movía hacia la derecha]. ¿Alguien sabe imaginar…?*	
Interpretación:	*Invitación a la reflexión sobre el efecto de una homotecia en un triángulo.*

Javier: Un angle...

***Javier**: Un ángulo…*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación.*

Professora: Un angle? Què vols dir?

***Profesora**: ¿Un ángulo? ¿Qué quieres decir?*	
Interpretación:	*Petición de explicación sobre la afirmación anterior de un alumno.*

Javier: Un triangle.

***Javier**: Un triángulo.*

Interpretación:	*Exposición sin argumentación.*

Professora: Un triangle…? Però a què et refereixes?

***Profesora**: ¿Un triángulo…? ¿Pero a qué te refieres?*	
Interpretación:	*Petición de explicación sobre la afirmación anterior de un alumno.*

Irene: Una pendent.

***Irene**: Una pendiente.*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación.*

Professora: Una pendent? Què faig? A veure, aquesta recta, tothom veu que tot queda alineat aquí? [Dibuixa la recta horitzontal.] I ara aquesta. Què us sembla, quedarà alineada, o què?

***Profesora**: ¿Una pendiente? ¿Qué hago? A ver, esta recta, todo el mundo ve que todo queda alineado aquí? [Dibuja la recta horizontal.] Y ahora esta. ¿Qué os parece, quedará alineada o qué?*	
Interpretación:	*Petición de comprobación sobre el centro de homotecia.*

Javier: Amb els dos vèrtexs a dalt.

***Javier**: Con los dos vértices hacia arriba.*	
Interpretación:	*Exposición de evidencia empírica sobre una homotecia.*

Professora: Per tant, per trobar aquest punt, ara que el tenim, clar, és molt fàcil. Ara que el tenim, clico per aquí [el centre de l'homotècia, punt *M*] i per aquí [vèrtex superior del primer triangle] i ah, sí, em passa per allà [vèrtex superior del segon triangle].

***Profesora**: Por lo tanto, para encontrar este punto, ahora que lo tenemos, claro, es muy fácil. Ahora que lo tenemos, hago clic por aquí [el centro de la homotecia, el punto M] y por aquí [vértice superior del primer triángulo] y ah, sí, me pasa por allá [vértice superior del segundo triángulo].*	
Interpretación:	*Complemento de la explicación de un alumno sobre la situación del centro de homotecia.*

ANEXO X

Transcripción y caracterización de episodios de la discusión en gran grupo de la tercera tarea de la profesora Sara (centro B)

Episodio 1 (*Experimentar el instrumento; Presentación de una solución*)

Professora: Ara teniu aquesta d'aquí, que era l'apartat (b) del problema. Vinga el més òptim possible, com podem anar de la casa 1 a la (f)? Àlex.

***Profesora**: Ahora tenéis esta de aquí, que era el apartado (b) del problema. Venga lo más óptimo posible, ¿cómo podemos ir de la casa 1 a la (f)? Álex.*	
Interpretación:	*Invitación a la participación para empezar la resolución de la tercera tarea.*

Àlex: Fent una rotació i després una homotècia.

***Àlex**: Haciendo una rotación y después una homotecia.*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre la combinación de un giro y una homotecia.*

Professora: Sí… però no pots anar amb una sola transformació?

***Profesora**: Sí… ¿pero no puedes ir con una única transformación?*	
Interpretación:	*Petición de explicación sobre transformaciones geométricas.*

Àlex: No, amb una sola no.

***Àlex**: No, con una única no.*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre transformaciones geométricas.*

Episodio 2 (*Discutir el artefacto; Estudio de estrategias para resolver o argumentar*)

(87) Professora: Com em podeu demostrar que no es pot? Quin argument teniu per convèncer-me de què no fa falta que busqui perquè no podré anar amb una sola transformació.

***Profesora**: ¿Cómo me podéis demostrar que no se puede? ¿Qué argumento tenéis para convencerme de que no hace falta que busque porque no podré ir con una única transformación?*	
Interpretación:	*Petición de argumentación sobre la composición de transformaciones geométricas.*

(88) Alba: Amb només una homotècia no pot ser perquè els punts homòlegs no coincideixen.

***Alba**: Con solo una homotecia no puede ser porque los puntos homólogos no coinciden.*	
Interpretación:	*Exposición con argumentación sobre la definición de homotecia.*

(89) Professora: No es tallen tots en un punt. D'acord, això seria un argument.

***Profesora**: No se cortan todos en un punto. De acuerdo, esto sería un argumento.*	
Interpretación:	*Formalización de las propiedades de una homotecia.*

(90) Alba: I com que la casa és més gran, no hi hauria cap altra transformació que la fes més gran que no fos l'homotècia, llavors n'hauríem de fer dues com a mínim.

***Alba**: Y como que la casa es más grande, no habría ninguna otra transformación que la hiciese más grande que no fuese la homotecia, entonces tendríamos que hacer dos como mínimo.*	
Interpretación:	*Exposición con argumentación sobre la necesidad de componer dos transformaciones geométricas.*

(91) Professora: Molt bé. Enteneu aquest raonament? L'Alba ha vist que al no tenir la mateixa mida segur que necessitaré l'homotècia, que és de les quatre transformacions l'única que em canvia la mida, però llavors pensa que només amb una homotècia podré anar-hi? No, perquè uneix els punts homòlegs i no se li tallen al centre de l'homotècia. Visualment algú tindria un altre argument de per què no hi puc anar amb només una homotècia?

***Profesora**: Muy bien. ¿Entendéis este razonamiento? Alba ha visto que al no tener la misma medida seguro que necesitaré la homotecia, que es de las cuatro transformaciones la única que me cambia las medidas, pero entonces piensa que ¿solo con una homotecia podré ir? No, porque une los puntos homólogos y no se cortan en el centro de la homotecia. ¿Visualmente alguien tendría otro argumento de por qué no puedo ir solo con una homotecia?*	
Interpretación:	*Recapitulación sobre las propiedades de una homotecia e invitación a la búsqueda de alternativas.*

(92) Àlex: Perquè està girada.

***Álex**: Porque está girada.*	
Interpretación:	*Exposición de evidencia empírica sobre la orientación en el plano de un polígono.*

(93) Professora: Perquè està girada, però què més?

***Profesora**: Porque está girada, ¿pero qué más?*	
Interpretación:	*Petición de explicación sobre la evidencia empírica de un alumno.*

(94) Àlex: No està girada 180º.

***Álex**: No está girada 180º.*	
Interpretación:	*Exposición de evidencia empírica sobre la rotación de un polígono.*

(95) Professora: O sigui, no és un gir de 180º. Les homotècies o bé ens deixen els polígons sense girar, o sigui amb una translació, o ens els giren 180º, però no ens els poden girar a mitges. Per tant, aquí sabem segur que no serà una homotècia sola. Però hi haurà una homotècia pel mig, perquè ha canviat la mida. Per tant, com a mínim dues transformacions.

***Profesora**: O sea, no es un giro de 180º. Las homotecias o bien nos dejan los polígonos sin girar, o sea con una translación, o nos los giran 180º, pero no nos los pueden girar a medias. Por lo tanto, aquí sabemos seguro que no será únicamente una homotecia. Pero habrá una homotecia por el medio, porque han cambiado las dimensiones. Por lo tanto, como mínimo dos transformaciones.*	
Interpretación:	*Complemento de la explicación sobre las propiedades de una homotecia y la composición de dos transformaciones geométricas.*

Episodio 3 (*Experimentar el instrumento; Estudio de estrategias para resolver o argumentar*)

(96) Professora: Ho heu pogut trobar amb dues? A veure, Àlex, com ho heu fet vosaltres?

***Profesora**: ¿Lo habéis podido encontrar con dos? A ver, Álex, ¿cómo lo habéis hecho vosotros?*	
Interpretación:	*Invitación a la participación de un alumno para que explique una construcción geométrica con GeoGebra.*

(97) Àlex: Primer s'ha de prolongar la base de la lila, i de la blava… I aleshores on es tallin serà el punt de rotació, el centre de rotació.

***Álex**: Primero se tiene que prolongar la base de la lila, y de la azul… Y entonces donde se corten será el punto de rotación, el centro de rotación.*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre la obtención del centro de giro.*

(98) Professora: Molt bé. I què faràs? Tu vols aquest punt... Hi ha moltes maneres de fer aquest problema. Ells han agafat aquest punt com un punt important, que serà el centre de la rotació.

***Profesora**: Muy bien. ¿Y qué harás? Tú quieres este punto… Hay muchas formas de hacer este problema. Ellos han tomado este punto como un punto importante, que será el centro de la rotación.*	
Interpretación:	*Recapitulación sobre la posición del centro de giro.*

(99) Àlex: Sí, s'ha girat la base respecte d'aquest punt, 60 graus.

***Àlex**: Sí, se ha girado la base respecto de este punto, 60 grados.*	
Interpretación:	*Exposición de evidencia empírica sobre el ángulo de giro.*

Professora: Per què 60º? Com, com, com...?

***Profesora**: ¿Por qué 60º? ¿Cómo, cómo, cómo…?*

Interpretación:	*Petición de argumentación sobre la amplitud del ángulo de giro.*

Álex: Vaig fer un vector.

***Álex**: Hice un vector.*	
Interpretación:	*Exposición de evidencia empírica sobre la construcción de un vector.*

Professora: Un vector?

***Profesora**: ¿Un vector?*	
Interpretación:	*Petición de explicación sobre la utilización de un vector.*

Adrià: Un *'deslizador'*.

***Adrià**: Un 'deslizador'.*	
Interpretación:	*Formalización sobre una herramienta de GeoGebra.*

Professora: Ah, vau anar provant! Però... el 60 aquest, on està amagat? La casa blava, si la girem des d'aquest punt, la vols moure cap amunt o cap avall?

***Profesora**: Ah, ¡fuisteis probando! Pero… el 60 este, ¿dónde está escondido? La casa azul, si la giramos desde este punto, ¿la quieres mover hacia arriba o hacia abajo?*	
Interpretación:	*Petición de comprobación sobre el ángulo de giro.*

Àlex: Avall.

***Àlex**: Abajo.*	
Interpretación:	*Exposición de evidencia empírica sobre el desplazamiento de una figura geométrica.*

Professora: Avall, d'acord. I on vols que pari de moure-la avall? Quan quedi recolzada, no?, a sobre d'aquesta recta. O sigui quan el terra de la casa es quedi recolzat aquí.

***Profesora**: Abajo, de acuerdo. ¿Y dónde quieres que pare de moverla abajo? ¿Cuándo quede apoyada, no?, encima de esta recta. O sea cuando el suelo de la casa se quede apoyado aquí.*	
Interpretación:	*Validación y complemento de la explicación anterior de un alumno.*

Martí: És que no és un gir, no és un gir perquè... Bé, és un gir sense fer res, però has de fer alguna cosa, perquè si ara gires això, sortirà al revés d'aquesta figura.

***Martí**: Es que no es un giro, no es un giro porque… Bueno, es un giro sin hacer nada, pero tienes que hacer alguna cosa, porque si ahora giras esto, saldrá al revés de esta figura.*	
Interpretación:	*Exposición con argumentación sobre la aplicación de un giro.*

Professora: No, no, compte Martí! Tal i com l'està movent l'Àlex, li queda recolzada aquí, amb la xemeneia de la dreta cap allà...

***Profesora**: ¡No, no, cuidado Martí! Tal y como la está moviendo Álex, le queda apoyada aquí, con la chimenea de la derecha hacia allá…*	
Interpretación:	*Complemento de la explicación anterior de un alumno sobre la aplicación de un giro.*

Martí: Sí, sí.

***Martí**: Sí, sí.*	
Interpretación:	*Asentimiento.*

(100) Professora: Però quants graus has fet aquí? Com ho puc mirar això?

***Profesora**: ¿Pero cuántos grados has hecho aquí? ¿Cómo lo puedo mirar esto?*	
Interpretación:	*Petición de comprobación sobre la obtención del ángulo de giro.*

(101) Grup d'alumnes: Seixanta!

***Grupo de alumnos**: ¡Sesenta!*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre el ángulo de giro.*

(102) Professora: Sí, 60 és el que em donarà. Adrià, què vols dir?.

***Profesora**: Sí, 60 es lo que me dará. Adrià, ¿qué quieres decir?*	
Interpretación:	*Validación e invitación a la participación de un alumno.*

(103) Adrià: Fas la inclinació del lila respecte la recta que... [l'alumne indica una línia horitzontal].

***Adrià**: Haces la inclinación del lila respecto de la recta que… [el alumno indica una línea horizontal].*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre la obtención del ángulo de giro.*

Martí: Calcules l'angle!

***Martí**: ¡Calculas el ángulo!*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre el ángulo de giro.*

Professora: L'angle? Quin? [L'Adrià i la resta d'alumnes de la classe indiquen cap a la seva dreta] Aquí?

***Profesora**: ¿El ángulo? ¿Cuál? [Adrià y los demás compañeros de la clase indican hacia su derecha] ¿Aquí?*	
Interpretación:	*Petición de formalización sobre el ángulo de giro.*

Grup d'alumnes: Sí!

Grupo de alumnos: *¡Sí!*	
Interpretación:	*Asentimiento.*

Javier: Però són el mateix!

Javier: *¡Pero son lo mismo!*	
Interpretación:	*Asentimiento.*

(104) Professora: O bé aquest d'aquí, que són el mateix perquè són oposats, aquests angles. Són dues rectes que es tallen, per tant els angles oposats sempre són iguals, però potser és més fàcil d'imaginar-vos si aquest terra el podeu acabar portant aquí, doncs he hagut de fer aquests graus de gir; doncs puc mesurar-ho per aquí. D'acord? Llavors, donava 60. En resum, que llavors agafa i gira l'objecte respecte aquest centre 60 graus. En quin sentit?

Profesora: *O bien este de aquí, que son lo mismo porque son opuestos, estos ángulos. Son dos rectas que se cortan, por lo tanto los ángulos opuestos siempre son iguales, pero quizás es más fácil de imaginároslos si este suelo lo podéis acabar llevando aquí, pues he tenido que hacer estos grados de giro; pues puedo medirlo por aquí. ¿De acuerdo? Entonces, daba 60. En resumen, que entonces coge y gira el objeto respecto de este centro 60 grados. ¿En qué sentido?*	
Interpretación:	*Complemento de explicación sobre la obtención del centro y ángulo de giro y petición de comprobación sobre el sentido de la rotación.*

(105) Isabel: Antihorari.

Isabel: *Antihorario.*	
Interpretación:	*Exposición de evidencia empírica sobre el sentido de la rotación.*

(106) Professora: I ara què? Ara ja està en posició de què li pugui aplicar una homotècia i que hi vagi directament?

Profesora: *¿Y ahora qué? ¿Ahora ya está en posición de que le pueda aplicar una homotecia y que vaya directamente?*	
Interpretación:	*Petición de comprobación sobre la aplicación de una homotecia.*

(107) Adrià: Sí!

Adrià: *¡Sí!*	
Interpretación:	*Asentimiento.*

(108) Professora: Sí, oi? I com ho farem per poder trobar el centre de l'homotècia?

Profesora: *¿Sí, verdad? ¿Y cómo lo haremos para poder encontrar el centro de la homotecia?*

Interpretación:	*Petición de explicación sobre la obtención del centro de homotecia.*

(109) Adrià: Unint punts homòlegs.

***Adrià**: Uniendo puntos homólogos.*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre la obtención del centro.*

Professora: D'acord, unint punts homòlegs. Aquí, aquí,... i el que em passa és que el centre em quedarà aquí a baix, eh?

***Profesora**: De acuerdo, uniendo puntos homólogos. Aquí, aquí… y lo que me sucede es que el centro me quedará aquí abajo, ¿eh?*	
Interpretación:	*Complemento de la explicación anterior de un alumno.*

Grup d'alumnes: Sí.

***Grupo de alumnos**: Sí.*	
Interpretación:	*Asentimiento.*

(110) Professora: Sí? Ara se'm sortirà de la pantalla, però la podré fer. I ara quina raó? 3/2 donava? 1 i 1/2?

***Profesora**: ¿Sí? Ahora se me saldrá de la pantalla, pero la podré hacer. ¿Y ahora qué razón? ¿3/2 daba? ¿1 y 1/2?*	
Interpretación:	*Petición de comprobación sobre la razón de semejanza.*

(111) Grup d'alumnes: Sí.

***Grupo de alumnos**: Sí.*	
Interpretación:	*Asentimiento.*

Professora: A veure... anem-ho a fer. Aquesta mida... Tothom veu que ho puc fer aquí? Que no cal que vingui aquí?

***Profesora**: A ver… hagámoslo. Esta medida… ¿Todo el mundo ve que lo puedo hacer aquí? ¿Qué no hace falta que venga aquí?*	
Interpretación:	*Establecimiento de consenso sobre el cálculo de la razón de semejanza.*

Grup d'alumnes: Sí.

***Grupo de alumnos**: Sí.*	
Interpretación:	*Asentimiento.*

Professora: Val, podria fer aquest terra... bé, aquest tros 2'83, aquest tros 4'24. Doncs 4'24 entre 2'83, quant dóna això?

***Profesora**: De acuerdo, podría hacer este suelo… bueno, este trozo 2’83, este trozo 4’24. Pues 4’24 entre 2’83, ¿cuánto da esto?*	
Interpretación:	*Petición de comprobación sobre la razón de semejanza.*

Àlex: 1’5.

***Àlex**: 1’5.*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre la razón de semejanza.*

Professora: 1,5? Molt bé.

***Profesora**: ¿1’5? Muy bien.*	
Interpretación:	*Validación.*

Episodio 4 (*Explicar a través del artefacto; Conexiones con otras situaciones*)

Professora: Alguna altra manera? Algú ho ha fet al revés? L'Àlex ha fet primer un gir i després una homotècia. Algú ha fet una homotècia i després ha fet un gir?

***Profesora**: ¿Alguna otra forma? ¿Alguien lo ha hecho al revés? Àlex ha hecho primero un giro y después una homotecia. ¿Alguien ha hecho una homotecia y después ha hecho un giro?*	
Interpretación:	*Invitación a la búsqueda de alternativas sobre la composición de dos transformaciones geométricas.*

Grup d’alumnes: Sí.

***Grupo de alumnos**: Sí.*	
Interpretación:	*Asentimiento.*

Professora: Clar, amb més passos també. Primer una homotècia. No sabem on portar-la, però podem portar-la on sigui. A veure nois, que això ho connectem amb una cosa del tema anterior, va!

***Profesora**: Claro, con más pasos también. Primero una homotecia. No sabemos donde llevarla, pero podemos llevarla donde sea. A ver chicos, que esto lo conectamos con una cosa del tema anterior, ¡venga!*	
Interpretación:	*Invitación a la participación para componer transformaciones geométricas con GeoGebra.*

Javier: Si el portes a un vèrtex de la figura blava.

***Javier**: Si lo llevas a un vértice de la figura azul.*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre la situación del centro de homotecia.*

Professora: O sigui, per exemple fer una homotècia. A veure fer una homotècia de la casa respecte aquest vèrtex, per exemple.

***Profesora**: O sea, por ejemplo hacer una homotecia. A ver hacer una homotecia de la casa respecto de este vértice, por ejemplo.*	
Interpretación:	*Complemento de la explicación de un alumno sobre la construcción de una homotecia.*

Martí: Sí, jo vaig fer això; jo vaig fer això!

***Martí**: ¡Sí, yo hice esto; yo hice esto!*	
Interpretación:	*Asentimiento.*

Professora: 1 i 1/2 hem dit.

***Profesora**: 1 y 1/2 hemos dicho.*	
Interpretación:	*Complemento de la explicación de un alumno sobre el valor de la razón de semejanza.*

Martí: Jo vaig fer això, vaig agafar un vector, ho vaig traslladar fins aquell punt...

***Martí**: Yo hice esto, tomé un vector, lo trasladé hasta aquel punto…*	
Interpretación:	*Exposición de evidencia empírica sobre la construcción de un vector con GeoGebra para realizar una translación.*

Professora: Per tant vau utilitzar tres transformacions: primer una homotècia, després una translació i després un gir.

***Profesora**: Por lo tanto, utilizasteis tres transformaciones: primero una homotecia, después una translación y después un giro.*	
Interpretación:	*Complemento de la explicación de un alumno sobre la combinación de transformaciones geométricas.*

Martí: Sí.

***Martí**: Sí.*	
Interpretación:	*Asentimiento.*

Professora: Nois, creieu que d'aquí, ara que ja la tinc feta a mida, a la mida que m'interessa, creieu que... Deixa, deixa, deixa Martí. Aquí hi ha més aprenentatge! Creieu que amb aquesta casa ja feta a mida puc trobar un centre de gir que me la porti directament aquí?

***Profesora**: Chicos, creéis que de aquí, ahora que ya la tengo hecha a la medida que me interesa, creéis que… Deja, deja, deja Martí. ¡Aquí hay más aprendizaje! ¿Creéis que con esta casa ya hecha a medida puedo encontrar un centro de giro que me la traiga directamente aquí?*

Interpretación:	*Invitación a la reflexión sobre la obtención de un centro de giro.*

Grup d'alumnes: Sí.

***Grupo de alumnos**: Sí.*	
Interpretación:	*Asentimiento.*

Professora: Com? Com Mireia?

***Profesora**: ¿Cómo? ¿Cómo Mireia?*	
Interpretación:	*Petición de explicación sobre la obtención de un centro de giro.*

Mireia: Amb les mediatrius dels punts.

***Mireia**: Con las mediatrices de los puntos.*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre la obtención del centro de giro.*

Professora: Mediatrius dels punts homòlegs. Us sona això? Del problema del tema anterior? D'acord. Si jo agafo punts homòlegs... Per exemple... vaig a fer directament la mediatriu, eh? Mediatriu entre aquest i aquest... Recordeu que per fer la mediatriu no em calia primer fer el segment i després la mediatriu. Puc dir també la mediatriu entre dos punts. I ara la mediatriu d'aquest i aquest. Val. I se'm tallen fora, però és igual. Dic 'moure'... i aquí, aquest serà el centre de gir. Anem-ho a comprovar. Faig aquesta casa respecte aquest centre... Clar, ara quants graus tenim? Clar que seran 60?

***Profesora**: Mediatrices de los puntos homólogos. ¿Recordáis esto? ¿Del problema del tema anterior? De acuerdo. Si yo tomo puntos homólogos… Por ejemplo… voy a hacer directamente la mediatriz, ¿eh? Mediatriz entre este y este… Recordad que para hacer la mediatriz no me hacía falta primero hacer el segmento y después la mediatriz. Puedo decir también la mediatriz entre dos puntos. Y ahora la mediatriz de este y este. De acuerdo. Y se me cortan a fuera, pero es igual. Digo 'mover'… y aquí, este será el centro de giro. Vamos a comprobarlo. Hago esta casa respecto de este centro… Claro, ¿ahora cuántos grados tenemos? ¿Claro que serán 60?*	
Interpretación:	*Recapitulación sobre la construcción del centro de giro utilizando las mediatrices de puntos homólogos y petición de comprobación sobre el ángulo de giro.*

Martí: Sí...

***Martí**: Sí…*	
Interpretación:	*Asentimiento.*

Professora: Bé, hauríem de fer els càlculs, d'aquell dia que vam fer... Allargar un i allargar l'altre i trobar on es tallen. Però ja ho heu fet aquí sense haver fet la gran. Serà 60 antihorari o horari?

***Profesora**: Bueno, tendríamos que hacer los cálculos, de aquel día que hicimos… Alargar uno y alargar el otro y encontrar donde se cortan. Pero ya lo habéis hecho aquí sin haber hecho la grande. ¿Será 60 antihorario o horario?*	
Interpretación:	*Petición de comprobación sobre el sentido de la rotación.*

Grup d'alumnes: Antihorari.

***Grupo de alumnos**: Antihorario.*	
Interpretación:	*Exposición de evidencia empírica sobre el sentido de la rotación.*

Professora: Cap enllà, d'acord? Per tant ja està bé. Què ha passat?

***Profesora**: Hacia allá, ¿de acuerdo? Por lo tanto ya está bien. ¿Qué ha pasado?*	
Interpretación:	*Validación y petición de explicación sobre una construcción matemática con GeoGebra.*

Oriol: Sí, però els altres punts no coincideixen.

***Oriol**: Sí, pero los otros puntos no coinciden.*	
Interpretación:	*Exposición de evidencia empírica sobre la aplicación de un giro con GeoGebra.*

Alba: Hem fet massa...

***Alba**: Hemos hecho demasiado…*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre la amplitud del ángulo de giro.*

Professora: Massa què? Massa gir, no?

***Profesora**: ¿Demasiado qué? Demasiado giro, ¿no?*	
Interpretación:	*Petición de formalización sobre la exposición anterior de un alumno.*

Alba: Sí, exacte.

***Alba**: Sí, exacto.*	
Interpretación:	*Asentimiento.*

Professora: És que el 60 aquest... ho hem vist molt clar, però el 60 aquest... era quan estava aquí per portar-lo aquí a baix, però ara per portar-lo d'aquí a aquí no té perquè ser 60.

***Profesora**: Es que el 60 este… lo hemos visto muy claro, pero el 60 este… era cuando estaba aquí para llevarlo aquí abajo, pero ahora para llevarlo de aquí a aquí no tiene porque ser 60.*	
Interpretación:	*Complemento de explicación sobre la amplitud del ángulo de giro.*

Alba: Ho podríem fer amb un *'deslizador'*.

***Alba**: Lo podríamos hacer con un ‘deslizador’.*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre la utilización de una herramienta de GeoGebra para calcular la amplitud del ángulo de giro.*

Professora: Com el podem…? Bé, amb un *'deslizador'* ho podríem fer fins que encaixi, però què tenim aquí?

***Profesora**: ¿Cómo lo podríamos…? Bueno, con un ‘deslizador’ lo podríamos hacer hasta que encaje, ¿pero qué tenemos aquí?*	
Interpretación:	*Validación y petición de explicación sobre la obtención del ángulo de giro.*

Alba: Podem fer una circumferència perquè podrem calcular l'angle.

***Alba**: Podemos hacer una circunferencia porque podremos calcular el ángulo.*	
Interpretación:	*Exposición con argumentación sobre el cálculo del ángulo de giro.*

Professora: A veure, primer de tot anem a comprovar-ho. Si jo faig una circumferència per aquí que passi per aquí, em passa per on m'ha de passar?

***Profesora**: A ver, primero de todo vamos a comprobarlo. Si yo hago una circunferencia por aquí que pase por aquí, ¿me pasa por dónde me tiene que pasar?*	
Interpretación:	*Petición de comprobación sobre la construcción de una circunferencia con GeoGebra.*

Grup d’alumnes: Sí.

***Grupo de alumnos**: Sí.*	
Interpretación:	*Asentimiento.*

Professora: Perfecte, doncs aquí anem bé. Si la faig passar per la teulada, em passa per allà, per la teulada? Sí, a la lila faig? Tot i que ara aquí no tinc punts. Si passo pel terra em passa pel terra? Sí. Per tant, tot apunta a què anem bé; però el problema que tenim és l'angle, que no són 60. Com ho puc fer? Hi ha moltes maneres, eh!

***Profesora**: Perfecto, pues aquí vamos bien. Si la hago pasar por el tejado, me pasa por allá, ¿por el tejado? Sí, ¿se lo hago a la lila? Aunque por aquí no tengo puntos. ¿Si paso por el suelo me pasa por el suelo? Sí. Por lo tanto, todo apunta a que vamos bien; pero el problema que tenemos es el ángulo, que no son 60. ¿Cómo lo puedo hacer? Hay muchas formas, ¡eh!*	
Interpretación:	*Validación e invitación a la búsqueda de alternativas para determinar el ángulo de giro.*

Adrià: Doncs fem dues línies i trobem l'angle amb el GeoGebra...

***Adrià**: Pues hacemos dos líneas y encontramos el ángulo con el GeoGebra…*

Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre la obtención de un ángulo de giro con GeoGebra.*

Professora: Val, fem per exemple… El que sí que sabem és que aquest punt vermell ha d'anar a parar a aquest punt d'aquí.

<table>
<tr><td colspan="2">Profesora: De acuerdo, hacemos por ejemplo… Lo que sí sabemos es que este punto rojo tiene que ir a este punto de aquí.</td></tr>
<tr><td>Interpretación:</td><td>Validación.</td></tr>
</table>

Javier: Sí, però el vèrtex de baix a la dreta no coincideix...

<table>
<tr><td colspan="2">Javier: Sí, pero el vértice de abajo a la derecha no coincide…</td></tr>
<tr><td>Interpretación:</td><td>Exposición de evidencia empírica sobre una construcción realizada con GeoGebra.</td></tr>
</table>

Professora: Ah, no he fet la mediatriu ben feta? És possible. Ah, ja sé què ha passat! Quan li he donat a 'mediatriu', entre aquest punt i aquest punt, com que hi ha dos punts molt petits, el ratolí se'n deu haver anat al petit en comptes del gran. Tornem-hi doncs. Esborro aquest. Espera, si esborro aquesta recta ja se'm esborrarà tot. Ara no sé si aquesta és la que he fet bé o malament; per tant, l'esborro per si de cas. Faig més zoom perquè se'm separi. Veieu què ha passat? Que he clicat l'altre punt! Anem a fer la mediatriu d'aquest amb el seu homòleg. Ara sí que està bé. I ara mediatriu d'aquest amb el seu homòleg: aquest. Ara, val? I ara sí que faig la intersecció… Què, provem els 60 o fem el que ha dit l'Adrià?

<table>
<tr><td colspan="2">Profesora: Ah, ¿no he hecho la mediatriz correctamente? Es posible. ¡Ah, ya sé qué ha pasado! Cuando le he dado a 'mediatriz', entre este punto y este punto, como hay dos puntos muy pequeños, el ratón debe haber ido al pequeño en vez del grande. Volvamos a hacerlo pues. Borro este. Espera, si borro esta recta ya se me borrará todo. Ahora no sé si esta es la que he hecho bien o mal; por lo tanto, la borro por si acaso. Hago más zoom para que se me separe. ¿Veis qué ha pasado? ¡Que he clicado el otro punto! Vamos a hacer la mediatriz de este con su homólogo. Ahora sí que está bien. Y ahora mediatriz de este con su homólogo: este. Ahora, ¿de acuerdo? Y ahora sí que hago la intersección… Qué, ¿probamos los 60 o hacemos lo que ha dicho Adrià?</td></tr>
<tr><td>Interpretación:</td><td>Realización de explicación sobre la construcción de una mediatriz con GeoGebra y sobre el cálculo del ángulo de giro.</td></tr>
</table>

Grup d'alumnes: Provem 60!

<table>
<tr><td colspan="2">Grupo de alumnos: ¡Probamos 60!</td></tr>
<tr><td>Interpretación:</td><td>Exposición sin argumentación sobre la amplitud del ángulo de giro.</td></tr>
</table>

Professora: D'acord. El que deia l'Adrià és que sempre podem fer que aquest punt vermell vagi a parar aquí. Per tant li puc dir al GeoGebra: "mesura'm quant fa aquest angle". I, per exemple, a veure si em surt ben orientat… i aquest ens dóna que és 60. O sigui, si ho haguéssim fet com ha dit l'Adrià, doncs ens hagués dit: "60" i ens haguéssim convençut de què sí que era 60 el que l'havíem de girar. Aquest 60, si no ho teníem molt clar… Però molt bé els que ho heu vist que jo li he donat al punt que no era. Anna, què vols dir?

***Profesora**: De acuerdo. Lo que decía Adrià es que siempre podemos hacer que este punto rojo vaya a parar aquí. Por lo tanto puedo decirle a GeoGebra: "mídame cuanto hace este ángulo". Y, por ejemplo, a ver si me sale bien orientado… y este nos da que es 60. O sea, si lo hubiésemos hecho como ha dicho Adrià, pues nos hubiese dicho: "60" y nos hubiésemos convencido de que si que era 60 lo que teníamos que girarlo. Este 60, si no lo teníamos muy claro… Pero muy bien los que lo habéis visto que yo le he dado al punto que no era. Anna, ¿qué quieres decir?*	
Interpretación:	*Recapitulación sobre la obtención del ángulo de giro e invitación a la participación de un alumno.*

Anna: Després de fer les mediatrius què hem de fer?

***Anna**: ¿Después de hacer las mediatrices qué tenemos que hacer?*	
Interpretación:	*Petición de aclaración sobre la obtención del centro de giro.*

Professora: Després de fer les mediatrius dels punts homòlegs, li hem trobat el punt d'intersecció i llavors li hem fet el gir d'aquesta casa respecte d'aquest centre dels graus… i ha anat a parar a sobre de l'altra.

***Profesora**: Después de hacer las mediatrices de los puntos homólogos, le hemos encontrado el punto de intersección y entonces le hemos hecho el giro de esta casa respecto de este centro de los grados… y ha ido a parar encima de la otra.*	
Interpretación:	*Realización de explicación sobre la obtención del centro de giro.*

Episodio 5 (*Explicar a través del artefacto; Generalización y conceptualización*)

(112) Professora: A veure, a tothom li ha quedat clar el resum de les homotècies, de quin tipus… quantes… si volguéssim fer tipus d'homotècies segons la constant aquesta de proporcionalitat, quants tipus…?

***Profesora**: A ver, a todo el mundo le ha quedado claro el resumen de las homotecias, de qué tipo… cuántas… si quisiésemos hacer tipos de homotecias según la constante esta de proporcionalidad, ¿cuántos tipos…?*	
Interpretación:	*Petición de comprobación sobre tipos de homotecia según la razón.*

(113) Isabel: Quatre.

***Isabel**: Cuatro.*

Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre tipos de homotecia.*

(114) Professora: Quatre, segur? I les negatives?

***Profesora**: ¿Cuatro, seguro? ¿Y las negativas?*	
Interpretación:	*Petición de comprobación sobre tipos de homotecia según la razón.*

(115) Isabel: Però poden ser interiors al polígon?

***Isabel**: ¿Pero pueden ser interiores al polígono?*	
Interpretación:	*Petición de aclaración sobre la posición del centro de homotecia.*

(116) Professora: A veure, negatives majors que 1; negatives menors que 1; positives menors que 1; i positives majors que 1.

***Profesora**: A ver, negativas mayores que 1; negativas menores que 1; positivas menores que 1; y positivas mayores que 1.*	
Interpretación:	*Recapitulación sobre homotecias de razón positiva y negativa.*

(117) Martí: Això què és, els tipus d'homotècia?

***Martí**: ¿Esto qué es, los tipos de homotecia?*	
Interpretación:	*Petición de aclaración sobre los tipos de homotecia.*

(118) Professora: Sí, Martí. Tothom veu que aquestes… Què em farien, la figura com? Més gran o més petita?

***Profesora**: Sí, Martí. Todo el mundo ve que estas… ¿Qué me harían, la figura cómo? ¿Más grande o más pequeña?*	
Interpretación:	*Validación y petición de comprobación sobre el efecto de una homotecia en las medidas de un polígono.*

(119) Grup d'alumnes: Depèn.

***Grupo de alumnos**: Depende.*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre una homotecia.*

(120) Professora: No perquè siguin positives m'ho han de fer més gran. Què era el que em marca si em fa la figura més gran o més petita?

***Profesora**: No porque sean positivas me lo tienen que hacer más grande. ¿Qué era lo que me indica si me hace la figura más grande o más pequeña?*	
Interpretación:	*Petición de explicación sobre el efecto de una homotecia en las medidas de un polígono.*

(121) Grup d'alumnes: La raó.

***Grupo**: La razón.*

Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre la razón de semejanza.*

(122) Professora: Si era més gran que 1. Per tant, aquestes dues em faran que la figura final sigui més gran que l'original, i aquestes dues me la faran més petita. Llavors, el '+' aquest el que em fa..., què em fa?

***Profesora**: Si era más grande que 1. Por lo tanto, estas dos me harán que la figura final sea más grande que la original, y estas dos me la harán más pequeña. Entonces, el '+' este lo que me hace…, ¿qué me hace?*	
Interpretación:	*Complemento de la explicación sobre el efecto de una homotecia en las medidas de un polígono.*

Isabel: La direcció.

***Isabel**: La dirección.*	
Interpretación:	*Exposición de evidencia empírica sobre el valor de la razón de una homotecia.*

Professora: La direcció, m'ho fa cap a on?

***Profesora**: La dirección, ¿me lo hace hacia dónde?*	
Interpretación:	*Petición de formalización sobre la exposición anterior de un alumno.*

Isabel: Orientada...

***Isabel**: Orientada…*	
Interpretación:	*Formalización sobre el efecto de una homotecia de razón positiva en un polígono.*

(123) Professora: Igual d'orientada i cap allà, o depèn d'on estigui el centre… I aquests negatius què em fan?

***Profesora**: Igual de orientada y hacia allá, o depende de donde esté el centro… ¿Y estos negativos qué me hacen?*	
Interpretación:	*Petición de explicación sobre el efecto de una homotecia de razón negativa en un polígono.*

(124) Alba: Fan girar el polígon.

***Alba**: Hacen girar el polígono.*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre homotecias de razón negativa.*

(125) Professora: És que a més em faci un gir de quant?

***Profesora**: ¿Es que además me haga un giro de cuánto?*	
Interpretación:	*Petición de formalización sobre la amplitud de la rotación.*

(126) Alba: De 180º.

***Alba**: De 180º.*	
Interpretación:	*Formalización sobre el ángulo de giro.*

(127) Professora: 180º. Vam veure… Aquí ens deixat una altra opció, que sigui positiva i ni més gran ni més petita que 1, que sigui 1.

***Profesora**: 180º. Vimos… Aquí nos hemos dejado otra opción, que sea positiva y ni más grande ni más pequeña que 1, que sea 1.*	
Interpretación:	*Validación e invitación a la reflexión sobre otros tipos de homotecia.*

(128) Martí: Llavors no fa res.

***Martí**: Entonces no hace nada.*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre el efecto de una homotecia cuya razón de semejanza sea igual a 1.*

(129) Professora: No fa res, es queda igual tot. Val, és l'homotècia identitat. I si és negativa i és igual a -1?

***Profesora**: No hace nada, se queda igual todo. De acuerdo, es la homotecia identidad. ¿Y si es negativa y es igual a -1?*	
Interpretación:	*Formalización acerca de la homotecia identidad y petición de explicación sobre una homotecia con razón igual a -1.*

(130) Martí: La gira 180º.

***Martí**: La gira 180º.*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre el efecto de una homotecia cuya razón de semejanza sea igual a -1.*

(131) Professora: La gira 180º, i hi ha una altra transformació que vam veure...

***Profesora**: La gira 180º, y hay otra transformación que vimos…*	
Interpretación:	*Validación e invitación a la búsqueda de una nueva transformación geométrica.*

(132) Alba: Simetria respecte d'un punt.

***Alba**: Simetría respecto de un punto.*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre una transformación geométrica.*

(133) Professora: Exacte, simetria respecte un punt. Recordeu que vam dir un gir de 180º és igual que una simetria central, doncs ara hem vist que també és igual que una homotècia de raó -1. Algú li falta alguna cosa aquí? Amb això cobrim tots els nombres?

***Profesora**: Exacto, simetría respecto de un punto. Recordad que dijimos un giro de 180º es igual que una simetría central, pues ahora hemos visto que también es igual que una homotecia de razón -1. ¿A alguien le falta alguna cosa aquí? ¿Con esto cubrimos todos los números?*	
Interpretación:	*Validación y recapitulación sobre la igualdad de algunas transformaciones geométricas.*

Martí: Les que fan créixer.

***Martí**: Las que hacen crecer.*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre una homotecia de razón positiva.*

Professora: Les que fan créixer perquè la raó és més gran que 1. Què ens falta aquí? Tenim tots els nombres?

***Profesora**: Las que hacen crecer porque la razón es más grande que 1. ¿Qué nos falta aquí? ¿Tenemos todos los números?*	
Interpretación:	*Petición de comprobación sobre tipos de homotecia según la razón.*

Berta: No, falta el 0.

***Berta**: No, falta el 0.*	
Interpretación:	*Exposición de evidencia empírica sobre una homotecia con razón de semejanza igual a 0.*

Professora: Exacte, falta el 0.

***Profesora**: Exacto, falta el 0.*	
Interpretación:	*Validación.*

Isabel: Però desapareix.

***Isabel**: Pero desaparece.*	
Interpretación:	*Establecimiento de conjetura sobre una homotecia de razón 0.*

(134) Professora: Si és zero… Si jo faig una homotècia de raó 0, què em farà?

***Profesora**: Si es cero… ¿Si yo hago una homotecia de razón 0, ¿qué me hará?*	
Interpretación:	*Petición de explicación sobre el efecto de una homotecia de razón 0.*

(135) Isabel: Desapareix.

***Isabel**: Desaparece.*	
Interpretación:	*Establecimiento de conjetura sobre una homotecia de razón 0.*

(136) Professora: Desapareix? On va a parar? Tots aquests punts del contorn de la casa 1, quins seran els seus homòlegs?

***Profesora**: ¿Desaparece? ¿Dónde va a parar? Todos estos puntos del contorno de la casa 1, ¿qué números serán sus homólogos?*	
Interpretación:	*Petición de comprobación sobre los puntos homólogos en una homotecia.*

(137) Alba: Aniran al centre de l'homotècia.

***Alba**: Irán al centro de la homotecia.*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre la situación de los puntos homólogos de dos figuras geométricas.*

(138) Professora: Al centre de l'homotècia. Me'ls porta tots cap al centre; me'ls multiplica per 0. Per tant, em multiplica aquella distància per 0. M'ho concentra tot en el mateix punt. Per tant, no em transforma la casa en una altra casa, sinó que em transforma la casa sencera en un punt. Ho comprimeix tot allà. Totes aquestes són les opcions, no n'hi havia quatre sinó set.

***Profesora**: Al centro de la homotecia. Me los lleva hacia el centro; me los multiplica por 0. Por lo tanto, me multiplica aquella distancia por 0. Me lo concentra todo en el mismo punto. Por lo tanto, no me transforma la casa en otra casa, sino que me transforma la casa entera en un punto. Lo comprime todo allá. Todas estas son las opciones, no había cuatro sino siete.*	
Interpretación:	*Complemento de la explicación acerca de una homotecia de razón 0 y recapitulación sobre tipos de homotecia según la razón.*

Professora: Ara una altra diferència, totes les figures del primer apartat, que hi havia moltes cases, totes les heu pogut aconseguir només amb una homotècia; en canvi en aquesta [apartat b] ara tots heu vist que hem necessitat dues transformacions: una homotècia i un gir. Això us ho dic per a la teoria [la professora ho anota a la pissarra]: "les figures que es poden aconseguir mitjançant una homotècia i ja està són figures homotètiques", que puc anar amb una homotècia d'una a l'altra. I les figures que hi hagut una homotècia pel mig, perquè li han canviat la mida, però necessitaria una altra transformació, què en sabeu d'aquestes figures? Què m'haguéssiu dit abans de començar el tema? Com són?

***Profesora**: Ahora otra diferencia, todas las figuras del primer apartado, que había muchas casas, todas las habéis podido conseguir solo con una homotecia; en cambio en esta [apartado b] ahora todos habéis visto que hemos necesitado dos transformaciones: una homotecia y un giro. Esto os lo digo para la teoría [la profesora lo apunta en la pizarra]: "las figuras que se pueden conseguir por medio de una homotecia y ya está son figuras homotéticas", que puedo ir con una homotecia de una a otra. Y las figuras en las que ha habido una homotecia por el medio, porque le han cambiado las dimensiones, pero necesitaría*

otra transformación, ¿qué sabéis de estas figuras? ¿Qué me hubieseis dicho antes de empezar el tema? ¿Cómo son?	
Interpretación:	*Realización de explicación para establecer diferencias entre las figuras semejantes y las homotéticas.*

Javier: Semblants.

***Javier**: Semejantes.*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre polígonos semejantes.*

Professora: Semblants. Només són figures semblants si tenen la mateixa forma, diferent mida, però no la puc posar directament. Per tant, homotètiques és com un cas particular de les semblants. O sigui, ara aquesta i aquesta [les dues figures d'aquest problema] sí que són homotètiques; però clar, també són semblants. Totes les que mantenen la forma són semblants i, a més a més, depèn de com les col·loqui les faig homotètiques, si les puc posar de manera que una homotècia em passi d'una a l'altra, val? Per tant, ser homotètica és més que ser semblant. Moltes són semblants i només algunes a més són homotètiques.

***Profesora**: Semejantes. Solo son figuras semejantes si tienen la misma forma, diferentes dimensiones, pero no la puedo poner directamente. Por lo tanto, homotéticas es como un caso particular de las semejantes. O sea, ahora esta y esta [las dos figuras de este problema] sí que son homotéticas; pero claro, también son semejantes. Todas las que mantienen la forma son semejantes y, además, depende de cómo las coloque las hago homotéticas, si las puedo poner de manera que una homotecia me pase de una a otra, ¿de acuerdo? Por lo tanto, ser homotética es más que ser semejante. Muchas son semejantes y solo algunas además son homotéticas.*	
Interpretación:	*Validación y realización de explicación para establecer diferencias entre las figuras semejantes y las homotéticas.*