Universitat Autònoma de Barcelona

La Ecuación de Beltrami Generalizada
y Otras Ecuaciones Elípticas

ANTONIO L. BAISÓN OLMO

UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
Departament de Matemàtiques

La Ecuación de Beltrami Generalizada y Otras Ecuaciones Elípticas.

ANTONIO L. BAISÓN OLMO

Abril 2016

Memòria presentada per obtenir el grau de Doctor en Matemàtiques per la Universitat Autònoma de Barcelona.

Certifico que aquesta memòria ha estat realitzada per Antonio Luis Baisón Olmo i co-dirigida per mi.

Bellaterra 2016,

Albert Clop Ponte

Certifico que aquesta memòria ha estat realitzada per Antonio Luis Baisón Olmo i co-dirigida per mi.

Bellaterra 2016,

Joan Orobitg Huguet

Lo malo no es que los sevillanos piensen
que tienen la ciudad más bonita del mundo…
lo peor es que puede que tengan hasta razón.

Antonio Gala.

Índice general

Bellaterra, Abril 2016 .

Capítulo 1

Introducción.

Dentro de la Física, un ejemplo representativo de ecuación elíptica es el problema de conductividad eléctrica. Para plantear el problema supondremos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, con $n \geq 2$, representa un conductor eléctrico cuya frontera, que representamos como $\partial\Omega$, es suave. Imaginemos que inducimos, en la superficie del material, un potencial eléctrico que representaremos como una función $v_0 : \partial\Omega \to \mathbb{R}$. A su vez, este potencial en $\partial\Omega$, inducirá un potencial en Ω que hará que se almacene una energía E dada como

$$E = \frac{1}{2} \int_\Omega \langle A \nabla v \, , \, \nabla v \rangle - \int_\Omega \langle F \, , \, \nabla v \rangle \, .$$

Aquí A es una matriz $A^{i,j}$ que dependerá de la conductividad del material del que esté compuesto Ω y F representa factores ajenos al material como fuerzas externas, otras fuentes eléctricas, etc. La distribución de cargas dentro de Ω tenderán a equilibrarse de manera que la energía, en el interior de Ω, sea mínima. De esta forma, encontrar el potencial v se traduce en el siguiente problema de mínimos

$$\min_{v_{|\partial\Omega} = v_0} E(v) = \min_{v_{|\partial\Omega} = v_0} \frac{1}{2} \int_\Omega \langle A \nabla v \, , \, \nabla v \rangle - \int_\Omega \langle F \, , \, \nabla v \rangle \, .$$

O lo que es lo mismo, encontrar aquella función v para la que se cumple la desigualdad

$$E(v) \leq E(v + t\varphi)$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. El *Método clásico de Variaciones* prueba la existencia y unicidad de un equilibrio v, bajo condiciones de elipticidad y regularidad suficiente sobre A, v_0, $\partial\Omega$ y F. Por otro lado, dado que la desigualdad anterior puede verse como una función real en t, derivaremos e igualaremos a cero como en el caso real. Esto es

$$\frac{d}{dt} E(v_o + t\varphi)|_{t=0} = 0 \, .$$

Gracias a las propiedades básicas de la norma vectorial $\| \cdot \|_2$ vemos que la igualdad anterior es equivalente a la siguiente ecuación integral

$$\int_\Omega A \nabla v \, \nabla\varphi = \int_\Omega F \, \nabla v \quad \text{para todo } \varphi \in C^\infty(\Omega) \, .$$

Además, como $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ y conocemos el potencial v_0 en $\partial\Omega$, podemos plantear el problema de conductividad como el siguiente Problema de Dirichlet dado por una *Ecuación en Forma Divergencia*

$$\begin{cases} \operatorname{div}(A \nabla v) = \operatorname{div} F & \text{en } \Omega \, , \\ v = v_0 & \text{en } \partial\Omega \, . \end{cases}$$

Un estudio interesante, desde el punto de vista matemático, es el de generalizar este problema a otros funcionales de energía no necesariamente lineales en ∇v. Para ello, es habitual tomar funcionales de energía no lineales

$$E\,(\,v\,)\;=\;\min_{v|\partial\Omega}\int_{\Omega}\mathcal{E}\,(\,x,\,v,\,Dv\,)\,,$$

que permitan que el método clásico del cálculo de variaciones funcione. En este caso, la *Ecuación de Euler-Lagrange* obtenida para el problema de minimización es

$$(\,*\,)\;\begin{cases}\operatorname{div}\,(\,\mathcal{A}\,(\,x\,,\,Du(x)\,)\,)\;=\;\operatorname{div}G & \text{en }\;\Omega\\ u\;=\;0 & \text{en }\;\partial\Omega\end{cases}\tag{1.1}$$

para cierto término independiente G, y donde $\mathcal{A}$ depende de las derivadas de $\mathcal{E}$ en la variable del graciente.

En este trabajo, nos centraremos en cuestiones de regularidad sobre las soluciones de los sistemas del tipo $(\,*\,)$. En general, asumiremos que $\mathcal{A}:\mathbb{R}^n\times R^{n\times n}\to\mathbb{R}^{n\times n}$ satisface las condiciones

$(\,\mathcal{A}1\,)\quad \langle\,\mathcal{A}\,(\,x\,,\,\xi_1\,)\,-\,\mathcal{A}\,(\,x\,,\,\xi_2\,)\,,\,\xi_1\,-\,\xi_2\,\rangle\;\geq\;\sigma\,|\,\xi_1\,-\,\xi_2\,|^2,$

$(\,\mathcal{A}2\,)\quad |\,\mathcal{A}\,(\,x\,,\,\xi_1\,)\,-\,\mathcal{A}\,(\,x\,,\,\xi_2\,)\,|\;\leq\;L\,|\,\xi_1\,-\,\xi_2\,|,$

$(\,\mathcal{A}3\,)\quad |\,\mathcal{A}\,(\,x\,,\,\xi\,)\,|\;\leq\;\ell\,\big(\,\varrho^2\,+\,|\,\xi\,|^2\,\big)^{\frac{1}{2}}$

para todo $x\in\Omega$ y para todo $\xi,\xi_1,\xi_2\in\mathbb{R}^{n\times N}$. Estos operadores $\mathcal{A}(x,\xi)$ incluyen varios funcionales de energía además de otras ecuaciones elípticas no variacionales. Nuestro trabajo se centrará en el estudio del sistema elíptico

$$\operatorname{div}\mathcal{A}\,(\,x\,,\,Du(x)\,)\;=\;\operatorname{div}G\tag{1.2}$$

donde $\mathcal{A}$ satisface $(\,\mathcal{A}1\,)\,-\,(\,\mathcal{A}3\,)$ y G pertenece a un espacio de funciones adecuado.

La teoría de la regularidad de los sistemas elípticos se remontan a los trabajos seminales de Giorgi, Nash y Moser sobre la continuidad Hölder de las soluciones. Posteriormente, para sistemas lineales, Meyers encontró la existencia de un número p_0, que depende de la dimensión y de la elipticidad del problema (pero no del problema en si), para el cual tenemos una estimación L^p a priori para el gradiente de la solución, siempre y cuando $n\leq p<p_0$. En ambos casos, no se necesita que el operador $x\to\mathcal{A}(x,\xi)$ tenga algún tipo de regularidad, solo que sea medible.

Por contra, si lo que buscamos son resultados sobre una regularidad extra sobre las soluciones, debemos imponer alguna condición a la depencia del operador $\mathcal{A}$ respecto a la varibale x. Las estimaciones clásicas de Schauder son un claro ejemplo de este hecho (e.g. [15]). Estas estimaciones prueban que una regularidad Hölder, del término independiente G, se transfieren al gradiente Du, siempre y cuando tengamos que la aplicación $x\to\mathcal{A}(x,\xi)$ sea también Hölder continua. Una descripción precisa de este hecho puede encontrarse en los trabajos de Kuusi-Mingione [30], [31].

Para alcanzar nuestro resultados, iremos desgranando poco a poco el *Sistema en Forma de Divergencia*

$$\operatorname{div}\mathcal{A}\,(\,x\,,\,Du(x)\,)\;=\;\operatorname{div}G$$

con $\mathcal{A}$ satisfaciendo $(\mathcal{A}1), (\mathcal{A}2)$ y $(\mathcal{A}3)$. En un primer momento, nos limitaremos al caso $n = 2$ y lineal con respecto a la variable del gradiente. En tal caso podemos interpretar el sistema como una *Ecuación de Beltrami Generalizada* en el plano complejo. Esto nos permitirá estudiar el problema mediante herramientas del *Análisis Complejo*. Por contra, si $n > 2$ no podemos resumirnos al plano complejo y trabajaremos en $\mathbb{R}^n$. Por ello, estudiaremos el problema $\mathcal{A}(x, \xi)$ no lineal mediante el herramientas clásicas de EDPs y de análisis armónico.

En el caso lineal con $n = 2$, el operador $\mathcal{A}(x, \xi)$ viene dado como $\mathcal{A}(x, \xi) = A(x)\xi$ con $A = (\alpha_{i,j})_{i,j} \in \mathbb{R}^{2x2}$. Además, el sistema (1.2) se reescribe,como

$$\operatorname{div}(A\nabla u) = \operatorname{div} G\,, \tag{1.3}$$

con $G = (G_1, G_2) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$. Sabemos que para cada solución $u \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$ de (1.3), existe una única función $v \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\nabla v = *A\nabla u - *G\,,$$

donde $*$ es el operdor estrella de Hogde. Además, v es la una solución de la ecuación conjugada

$$\operatorname{div}\left(*A^{-1} * \nabla v\right) = \operatorname{div}\left(*A^{-1}G\right)\,. \tag{1.4}$$

Mas aún, si identificamos $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$, mediante la relación $(x, y) = z = x + iy$, y definimos la función $f \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{C})$ como $f := u + iv$, entonces f es solución de la *Ecuación de Beltrami Generalizada*

$$\overline{\partial} f = \mu\partial f + \nu\overline{\partial f} + h\,, \tag{1.5}$$

donde μ, ν y h vienen determinados por ser solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} \mu \cdot \det(I + A) = \alpha_{22} - \alpha_{11} - i(\alpha_{12} + \alpha_{21}) \\ \nu \cdot \det(I + A) = 1 - \det A + i(\alpha_{12} - \alpha_{21}) \\ 2h = (1 + \mu + \nu)G_1 + i(1 - \mu + \nu)G_2\,. \end{cases}$$

Recíprocamente, si $f \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{C})$ es una solución de (1.5), entonces las funciones $u = Re(f)$ y $v = Im(f)$ son soluciones de las ecuaciones (1.3) y (1.4) donde la matriz A y el vector G se recuperan de resolver el sistema de ecuaciones anterior (ver [4, Theorem 16.1.6.]). De hecho, podemos ver que el tránsito dado por el sistema de anterior nos asegura que la regularidad de la matriz A es equivalente a la de los coeficientes μ y ν, pues el tránsito entre A y el par (μ, ν) es bilipschitz.

En primer lugar, en el *Capítulo 3*, estudiaremos la *Ecuación de Beltrami Generalizada* y daremos una variante del *Lema de Weyl*

$$\left.\begin{matrix} H \in \mathcal{D}'(\mathbb{C}) \\ \overline{\partial} H = 0 \end{matrix}\right\} \implies H \in C^\infty(\mathbb{C})$$

con hipótesis mas restrictivas, conclusiones mas relajadas y adaptadas a operadores distintos del $\overline{\partial}$. Concretamente, veremos que si μ, ν pertenecen a $W^{1,p}_c(\mathbb{C})$ y $h \in W^{1,s}_{loc}(\mathbb{C})$, entonces tenemos que

$$\left.\begin{matrix} f \in L^r_{loc}(\mathbb{C}) \\ \overline{\partial} f = \mu\partial f + \nu\overline{\partial f} + h \end{matrix}\right\} \implies f \in W^{2,s}_{loc}(\mathbb{C})$$

para ciertos valores p, r y s. Con ello, generalizaramos el estudio realizado por A. Clop, D. Faraco, J. Mateu, J. Orobitg y X. Zhong en [11] para el caso $\nu = 0 = h$.

En segundo lugar, en el *Capítulo 4*, estudiaremos la función $\log(\partial\phi)$ donde $\phi \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ es un homeomorfismo solución de la *Ecuación de Beltrami Generalizada Homogénea*

$$\overline{\partial}\phi \,=\, \mu\,\partial\phi \,+\, \nu\,\overline{\partial\phi} \tag{1.6}$$

cuando los coeficientes tienen una regularidad Sobolev y Sobolev Fraccionaria. Ahlfors en [2] prueba que $\log(\partial\phi) \in W^{1,p}(\mathbb{C})$ con $p > 2$ cuando $\partial\mu \in L^p(\mathbb{C})$ y $\nu = 0$. De hecho, el resultado puede extenderse al caso $p = 2$ (como podemos ver en [11]). Además, esto tiene implicaciones a la hora de conocer la regularidad de todas las soluciones de

$$\overline{\partial}f \,=\, \mu\,\partial f \,+\, g\,.$$

En nuestro trabajo, buscaremos la implicación

$$\mu,\,\nu \in W^{\alpha,p}_c(\mathbb{C}) \quad\Longrightarrow\quad \log(\partial\phi) \in W^{\alpha,s}(\mathbb{C})$$

donde $p \geq s > 1$ si $\alpha = 1$ y $p = s = \frac{2}{\alpha}$ si $\alpha < 1$. Además, los métodos que usamos en el caso $\alpha < 1$ son aplicables a cualquier solución cuasiregular $f \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ de la *Ecuación de Beltrami Generalizada*. Concretamente, tenemos que si $\mu,\,\nu \in W^{\alpha,2/\alpha}(\mathbb{C})$ con $0 < \alpha < 1$ y $q < \frac{2}{\alpha}$ entonces

$$\left.\begin{array}{c} h \in W^{\alpha,q}(\mathbb{C}) \\ \overline{\partial}f = \mu\partial f + \nu\overline{\partial f} + h \end{array}\right\} \quad\Longrightarrow\quad f \in W^{\alpha,q}_{loc}(\mathbb{C})\,. \tag{1.7}$$

Esta última implicación complementará el trabajo realizado por V. Cruz en [13] cuando $\nu = 0 = h$ y $\mu \in W^{\alpha,p}_c(\mathbb{C})$ con $\alpha p > 2$. Con este resultado, daremos por concluido el estudio del sistema (1.2) lineal con $n = 2$.

En el *Capítulo 5* pasaremos a dimensiones superiores ($\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$) y estudiaremos el sistema

$$\operatorname{div}\mathcal{A}(\,x\,,\,Du(x)\,) \,=\, \operatorname{div}G$$

cuando $x \to \mathcal{A}(x,\xi)$ es de tipo de Besov o de Triebel-Lizorkin. Para ello, al inicio del *Capítulo 5*, adaptaremos las definiciones de los espacios de Besov y de Triebel-Lizorkin usuales a este tipo de operadores $x \to \mathcal{A}(x,\xi)$ no lineales. Una vez definamos cuando el operador $x \to \mathcal{A}(x,\xi)$ es Besov o Triebel-Lizorkin, pasaremos a estudiar el sistema en el caso homogéneo. Es decir, el sistema

$$\operatorname{div}\mathcal{A}(\,x\,,\,Du\,) \,=\, 0 \qquad \text{en } \Omega \tag{1.8}$$

donde el operador $\mathcal{A}(x,\xi)$ satisface las condiciones $(\mathcal{A}1) - (\mathcal{A}3)$. En este caso llegaremos a demostrar que existe un número $p_0 = p_0(n,\,\sigma,\,\ell)$ para el que se cumple que

$$x \to \mathcal{A}(\,x\,,\,\xi\,) \in F^{\alpha}_{\frac{n}{\alpha},\infty}(\Omega) \text{ local} \Longrightarrow Du \in B^{\alpha}_{p,\infty}(\Omega) \text{ local} \tag{1.9}$$

$$x \to \mathcal{A}(\,x\,,\,\xi\,) \in B^{\alpha}_{\frac{n}{\alpha},q}(\Omega) \text{ local} \Longrightarrow Du \in B^{\alpha}_{p,q}(\Omega) \text{ local} \tag{1.10}$$

para toda $2 \leq p \leq \text{mín}\{\frac{n}{\alpha}, p_0\}$ donde $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ es cualquier solución débil de (1.8). Observemos que la segunda implicación extiende a la primera ya que $F^{\alpha}_{p,\infty} \subset B^{\alpha}_{p,\infty}$. Posteriormente pasaremos a tratar el caso no homogéneo. Aquí, la situación cambia dráticamente ya que aparecen ciertas dificultades en el índice q. Esto se debe a que si $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$, entonces el embbeding $B^{\alpha}_{p,q} \subset L^{\frac{np}{n-\alpha p}}$ solo se cumple si $1 \leq q \leq \frac{np}{n-\alpha p}$ y falla en otro caso. En este caso, hemos demostrado que si $x \to \mathcal{A}(x,\xi) \in B^{\alpha}_{\frac{n}{\alpha},q}(\Omega)$ local, entonces toda $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ solución débil de (1.2) cumple la implicación

$$G \in B^{\alpha}_{p,q} \qquad\Longrightarrow\qquad Du \in B^{\alpha}_{p,q} \tag{1.11}$$

para toda $p \in \left(\text{máx}\{p_0', \frac{nq}{n+\alpha q}\}, \text{mín}\{\frac{n}{\alpha}, p_0\}\right)$. Además, nuestros argumentos demostrarán que la restricción $p < \text{mín}\{\frac{n}{\alpha}, p_0\}$ puede relajarse hasta $p < \frac{n}{\alpha}$ cuando $\mathcal{A}$ es lineal en la variable del gradiente. Con estos dos resultados, habremos conseguido generalizar la implicación (1.7) a los ámbito Besov y Triebel-Lizorkin, y a cualquier *Sistema en Forma de Divergencia* (incluso no lineal) con $n \geq 2$. Mas aún, estos tres resultados son óptimos en el sentido de que no podemos esperar $Du \in B^{\beta}_{r,l}$ para alguna $\beta > \alpha$.

La razón por la que nos interesamos en los operadores $\mathcal{A}(x, \xi)$ que pertenecen a las clases $F^{\alpha}_{\frac{n}{\alpha},q}$ y $B^{\alpha}_{\frac{n}{\alpha},q}$, es que estos espacios quedan incluídos en la clase de funciones VMO [39]. Por ello, en la *Sección 5.1* introduciremos una noción de pertencia al espacio VMO adecuada para nuestros propósitos. Además, allí veremos que existe una constante $\lambda > 1$ para la que se cumple la siguiente variante de la desigualdad de Caccioppoli

$$\fint_B |Du|^q \leq C\,(n, \lambda, \sigma, \ell, L, s, q)\left(1 + \frac{1}{|B|^{\frac{q}{n}}}\fint_{\lambda B} |u|^q + \fint_{\lambda B} |G|^q\right) \tag{1.12}$$

para toda B con $\lambda B \subset \Omega$, donde $2 \leq s \leq n$, $q > s$, $\mathcal{A} \in VMO$ satisface $(\mathcal{A}1)$, $(\mathcal{A}2)$, $(\mathcal{A}3)$ y $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ es una solución débil de

$$\operatorname{div} \mathcal{A}\,(\,x\,,\,Du\,)\;=\;\operatorname{div}\left(\,|G|^{s-2}\;G\,\right)\;,$$

con $G \in L^q_{loc}(\Omega; \mathbb{R})$. En particular, esto nos asegura que $Du \in L^q_{loc}(\Omega)$. Este resultado es una versión general del conocido resultado de Iwaniec en [21] (si $n = 2$), del resultado de Iwaniec-Sbordone en [23] para el caso lineal (si $n > 2$), y de un resultado de Kinnunen y Zhou en [25] que trata del operador p-laplaciano con peso en VMO. De hecho, esta estimación se cumple para operadores $\mathcal{A}$ con un crecimiento $s - 1$ (incluso no lineales) tal y como formulamos en el *Teorema 5.5*.

Nuestro trabajo se estructura como sigue. En el *Capítulo 2* daremos a conocer algunas definiciones y resultados previos que necesitaremos a lo largo del escrito. Entre estas definiciones, destacamos la noción de pertenencia local a los espacios de Besov y de Triebel-Lizorkin que usaremos en el estudio del sistema elíptico (1.2). En el *Capítulo 3* estudiaremos la *Ecuación de Beltrami Generalizada* cuando los coeficientes pertenecen a un espacio de Sobolev $W^{1,p}_c(\mathbb{C})$ con derivadas enteras. En el *Capítulo 4* trateremos con $\log(\partial\phi)$ donde ϕ es un homeomorfismo solución de la *Ecuación de Beltrami Generalizada Homogénea* cuando los coeficientes pertenecen a un espacio de Sobolev $W^{1,p}_c(\mathbb{C})$ o de Sobolev Fraccionario $W^{\alpha,2/\alpha}_c(\mathbb{C})$. Le prestaremos una atención especial al caso $\nu = 0$. Por último, en el *Capítulo 5* probaremos las implicaciones (1.9), (1.10), (1.11) y la desigualdad (1.12) que introduciremos como *Teoremas 5.1, 5.2, 5.3 y 5.5* respectivamente. Además, comentaremos brevemente que implicaciones tienen estos teoremas cuando los aplicamos a las soluciones de la *Ecuación de Beltrami Generalizada*. Por otro lado, a lo largo del documento, iremos dejando algunos *Problemas Abiertos* que no hemos sabido solventar en este escrito.

Capítulo 2

Preliminares Generales.

En este capítulo veremos algunos de los resultados previos que hemos necesitado para nuestra investigación. Hemos dividido el capítulo en varias secciones. En la primera definiremos los distintos espacios de funciones que necesitaremos a lo largo del escrito. También, veremos algunas de las propiedades mas importantes de dichos espacios de funciones. En la segunda sección introduciremos algunas herramientas del *Análisis Armónico* y la teoría de los *Operadores de Fredholm*. En la tercera daremos los resultados clásicos sobre la *Ecuación de Beltrami Generalizada*. En la cuarta veremos las definiciones y los resultados previos que usaremos en el estudio de la *Ecuación en Forma Divergencia* tanto en la forma planar $n = 2$ como en la dimensional $n > 2$. Además, detallaremos, cuando $n = 2$, como los *Sistemas en Forma Divergencia Lineal* pueden reescribirse como una *Ecuación de Beltrami Generalizada*.

A lo largo del escrito usaremos la convención usual y denotaremos por c a las constantes generales las cuales pueden variar en diferentes ocasiones, incluso en la misma línea de desigualdades. Revelaremos la dependencia de parámetros y constantes especiales enfatizando adecuadamente mediante el uso de paréntesis o subíndices. La norma que usaremos sobre $\mathbb{R}^n$ (o sobre $\mathbb{C}$) será la euclídea y la denotaremos por $|\cdot|$. En particular, para vectores ξ, $\eta \in \mathbb{R}^n$ escribiremos $\langle \xi, \eta \rangle$ para el producto interno usual de ξ y η, y $|\xi| := \langle \xi, \xi \rangle^{\frac{1}{2}}$ para la norma euclídea asociada a dicho producto interno. En lo que sigue, $B(x, r) = B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \ |y - x| < r\}$ denotará la bola de centro x y radio r. En ocasiones omitiremos la dependencia del centro o del radio cuando esto no provoque confusión alguna. Además, cuando trabajemos con el plano complejo $\mathbb{C}$, usaremos la notación $\mathbb{D}$ para referirnos a un disco genérico del plano.

2.1. Preliminares de Espacios de Funciones.

En lo que sigue, salvo que se especifique otra cosa, supondremos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio medible con $|\Omega| > 0$. Para cada función medible f, escribiremos su promedio en Ω como f_Ω. Es decir $f_\Omega := \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f(x)\, dx = \fint_\Omega f(x) dx$. Si tenemos un espacio de funciones $X(\Omega)$, denotaremos por $X_c(\Omega)$ y $X_{loc}(\Omega)$ a los espacios

$$X_c(\Omega) = \{f \in X(\Omega) \ \text{ tal que } \ \operatorname{supp}(f) \subsetneqq \Omega \ \text{ es compacto}\} \,,$$

$$X_{loc}(\Omega) = \{f \in X(K) \ \text{ tal que } \ f\,\varphi \in X(\mathbb{R}^n) \ \text{ para toda } \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\} \,.$$

donde el soporte de una función $f : \Omega \mapsto \Omega'$, se define como

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega \text{ tal que } f(x) \neq 0\}}.$$

Es evidente que siempre se tiene la inclusión de clases $X_c(\Omega) \subset X(\Omega) \subset X_{loc}(\Omega)$.

Definición 2.1. *Para cada par de índices α y β, se define la seminorma*

$$\rho_{\alpha,\beta}(f) := \sup_{z\in\mathbb{R}^n} \left| z^\alpha D^\beta f(z) \right| .$$

Diremos que una función $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ pertenece a la clase de Schwartz *si $\rho_{\alpha,\beta}(f) < \infty$ para todo α y β. Esta clase se denotará por $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$.*

En numerosas ocasiones, recurriremos a los Espacios de Lebesgue $L^p(\Omega)$ tanto para trabajar con ellos como para introducir otros espacios. Si $1 \leq p < \infty$, llamaremos por $L^p\left(\Omega\right)$ al conjunto de funciones medibles en Ω tales que la norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f(x)|^p \ dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

es finita. Cuando $p = \infty$, diremos que $L^\infty(\Omega)$ es el espacio de las funciones esencialmente acotadas en Ω cuya norma asocida es $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} := ess\sup_{z\in\Omega}|f| < \infty$. Unos espacios próximos a los Espacios de Lebesgue L^p con $1 \leq p < \infty$, espacios de oscilación media acotada BMO y de oscialación media nula VMO. Localmente, estos espacios quedan encajados entre los espacios L^p con $p < \infty$ y L^∞. Concretamente, para todo $p < \infty$, tenemos la inclusión $L^\infty_{loc} \subset VMO \subset BMO \subset L^p_{loc}$.

Definición 2.2. *Se define el* espacio de funciones de oscilación media acotada*, que denotaremos por $BMO\left(\Omega\right)$, como el subconjunto de $L^1_{loc}\left(\Omega\right)$ tal que*

$$\|f\|_{BMO(\Omega)} \doteq \|f\|_* := \sup_{B\subset\Omega} \left\{ \frac{1}{|B|} \int_B |f\left(x\right) - f_B| \ dx \right\} < \infty.$$

La cantidad $\|\cdot\|_*$ define una seminorma en $BMO(\Omega)$ y los elementos de $BMO\left(\Omega\right)$ están definidos módulo constantes aditivas. Denotaremos por $VMO(\Omega)$ al cierre de $C_c^\infty(\Omega)$ bajo la seminorma $\|\cdot\|_*$. Es decir, $VMO(\Omega) := \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_*}$.

Definición 2.3. *Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $0 < \alpha \leq 1$, se define el conjunto de las funciones* α-Hölder continuas *como el conjunto de las funciones f tales que*

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq C\,|z_1 - z_2|^\alpha \quad \forall z_1,\, z_2 \in \Omega.$$

Y se denotará por $C^\alpha\left(\Omega\right)$.

Consideremos que $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ con $\alpha_i \in \mathbb{N}$ para todo $i = 1, ..., n$ es un multi-índice y escribamos $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Denotaremos por D^α a la α-ésima derivada parcial, es decir,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} .$$

Recordemos que g es la *derivada distribucional de orden* α de f, y se denota por $D^\alpha f := g$, si se satisface

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(D^\alpha \varphi\left(x\right) \right) \, f\left(x\right) \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) g\left(x\right) \, dx$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Con esta noción de derivada, dados Ω, $k \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p < \infty$, se define el *Espacio de Sobolev* como

$$W^{k,p}(\Omega) \equiv \{ f \in L^p(\Omega) \text{ tales que } D^\alpha f \in L^p(\Omega) \ \ \forall |\alpha| \leq k \} .$$

A este espacio se le asocia la norma

$$\| f \|_{W^{k,p}(\Omega)} := \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}$$

para la cual es completo. Sabemos que en particular los espacios $L^2(\Omega)$ y $W^{n,2}(\Omega)$ con $n \in \mathbb{N}$ son espacios de Hilbert con el producto escalar usual, es decir,

$$\langle f , g \rangle_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega f\, g ,$$

$$\langle f , g \rangle_{W^{n,2}(\Omega)} := \sum_{k=0}^{n} \int_\Omega D^k f\, D^k g .$$

A lo largo del escrito haremos uso de la siguiente clase de funciones, conocida como *Espacio de Sobolev Homgéneo*, la cual viene definida como

$$\dot{W}^{k,p}(\Omega) \equiv \left\{ f \in L^1_{loc}(\Omega) \text{ tales que } D^\alpha f \in L^p(\Omega) \ \ \forall |\alpha| = k \right\} .$$

A esta clase se le asociará la siguiente seminorma

$$\| f \|_{\dot{W}^{k,p}(\Omega)} := \sum_{|\alpha| = k} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} .$$

Es evidente que siempre se tiene la inclusión de clases $W^{k,p}(\Omega) \subset \dot{W}^{k,p}(\Omega)$. Además, si $\Omega = \mathbb{R}^n$, entonces se tiene la igualdad $W^{k,p}(\mathbb{R}^n) = \dot{W}^{k,p}(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$.

Recordemos que para cada función $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, se define la Transformada de Fourier de f como

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi}\, dx .$$

Mediante esta transformada, introduciremos los *Potenciales de Riesz* y los *Potenciales de Bessel* que generalizan el concepto de integración fraccionaria.

Definición 2.4. *Sean $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0, n)$ y una función f de la clase de Schwartz en $\mathbb{R}^n$. Usando la representación de Fourier, se define el* Potencial de Riesz *de f como*

$$\widehat{I_\alpha f}(\xi) = |\xi|^{-\alpha}\, \widehat{f}(\xi).$$

De forma similar, se define el Potencial de Bessel *de f como*

$$\widehat{G_\alpha f}(\xi) = \left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{-\alpha}{2}}\, \widehat{f}(\xi).$$

El *Potencial de Riesz* de orden α puede escribirse como la siguiente integral

$$I_\alpha f(x) := c_{n,\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x - y|^{n-\alpha}}\, dy.$$

Estos potenciales pueden extenderse a clases mas generales como por ejemplo los Espacios de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$. De hecho, al actuar sobre $L^p(\mathbb{R}^n)$, se generan los siguientes espacios de funciones.

Definición 2.5. *Dados $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $1 \leq p < \infty$, se define el espacio $G_\alpha * L^p(\mathbb{R}^n)$ como*

$$G_\alpha * L^p(\mathbb{R}^n) = \{ f \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ tales que existe } g \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ con } f = G_\alpha * g \} .$$

La única función g que cumple $f = G_\alpha * g$ determinará la norma de f en este espacio. Concretamente

$$\|f\|_{G_\alpha * L^p(\mathbb{R}^n)} = \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} .$$

Definición 2.6. *Dados $0 < \alpha < n$ y $1 \leq p < \infty$, se define el espacio $I_\alpha * L^p(\mathbb{R}^n)$ como*

$$I_\alpha * L^p(\mathbb{R}^n) = \{ f \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ tales que existe } g \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ con } f = I_\alpha * g \} ,$$

La única función g que cumple $f = I_\alpha * g$ determinará la norma de f en este espacio. Es decir

$$\|f\|_{I_\alpha * L^p(\mathbb{R}^n)} = \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} .$$

En ocasiones, a estos espacios también se les llaman *Espacios de Sobolev Fraccionarios*. La razón es que para toda $k \in \mathbb{N}$ y toda $1 < p < \infty$ se cumple que $G_k * L^p(\mathbb{R}^n) = W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ y $I_k * L^p(\mathbb{R}^n) = \dot{W}^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ (si $k < n$) con equivalencia de normas. Por ello, estos espacios se consideran una forma de generalizar los *Espacios de Sobolev* a regularidades fraccionarias. Esta no es la única forma de generalizar los espacios de Sobolev, conocemos otra noción de derivada fraccionaria que mostraremos tras el siguiente resultado sobre la integrabilidad exponencial de los *Potenciales de Riesz*.

Proposición 2.7. *[1, Theorem 3.2.1.] Sean $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $0 < \alpha < n$, $p = \frac{n}{\alpha}$ y $p' = \frac{p}{p-1}$. Asumamos además que* $\operatorname{supp}(f) \subset B_R$ *y que* $\|f\|_p = 1$. *Entonces*

$$\int_{B_R} \exp\left(\beta \left|I_\alpha * f\right|^{p'}\right) dx \leq cR^n$$

para cualquier $\beta < \beta_0 = \lambda^{p'} \frac{n}{\omega_{n-1}}$, donde $\lambda = \Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right) / \left(2^\alpha \pi^{n/2} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$ y $c = c(\alpha, p, n, \beta)$.

A continuación, introduciremos el concepto de derivada fraccionaria inducido por los inversos formales de los *Potenciales Clásicos de Riesz*. Este concepto de derivación fraccionaria es la que usaremos a lo largo del *Capítulo 4* cuando tratemos con $\log(\partial\phi)$ donde ϕ es la *solución cuasiconforme* de (1.6).

Definición 2.8. *Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in (0, n)$. Usando la representación de Fourier, definimos la* Derivada Fracionaria de Orden α *de una función $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ como*

$$\widehat{D^\alpha f}(\xi) = (2\pi|\xi|)^\alpha \ \widehat{f}(\xi).$$

Entonces, diremos que f pertenece a $W^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ si f y $D^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Se define la norma de $W^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ como

$$\|f\|_{W^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} := \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|D^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} .$$

Observemos que definición de la *Derivada fracionaria de orden α* puede ampliarse a funciones medibles $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y escribirse como el siguiente valor principal

$$D^\alpha f(x) := \lim_{\epsilon \to 0} C_{n,\alpha} \int_{|x-y|>\epsilon} \frac{f(x) - f(y)}{|x-y|^{n+\alpha}} \, dy. \tag{2.1}$$

O equivalentemente, puede representarse como un Laplaciano fraccionario. Esto es, usando el lado de Fourier

$$\widehat{D^\alpha f}(\xi) = \widehat{(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} f}(\xi) = (2\pi|\xi|)^\alpha \; \hat{f}(\xi).$$

Al igual que con el espacio $G_\alpha * L^p(\mathbb{R}^n)$, cuando $\alpha \in \mathbb{N}$, los espacios de Sobolev Fraccionarios y los espacios de Sobolev coinciden. De hecho, cuando $\alpha \in (0,1)$, el espacio $W^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ puede identificarse con el espacio $G_\alpha * L^p(\mathbb{R}^n)$ con equivalencia de normas.

En lo que sigue, introduciremos otro tipos de espacios de regularidad fraccionaria que, en ocasiones, engloban a los anteriores. Nos referimos a los *Espacios de Besov-Lipschitz* $B^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ y a los *Espacios de Triebel-Lizorking* $F^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

Dada $h \in \mathbb{R}^n$ y $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definiremos $\tau_h v(x) := v(x+h)$ y $\Delta_h v(x) := v(x+h) - v(x)$. Como en [42, Section 2.5.12], dada $0 < \alpha < 1$ y $1 \leq p, q < \infty$, diremos que v pertenece al espacio de Besov-Lipschitz $B^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ si $v \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y

$$\|v\|_{B^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \|v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + [v]_{\dot{B}^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}^n)} < \infty$$

donde

$$[v]_{\dot{B}^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v(x+h) - v(x)|^p}{|h|^{\alpha p}} dx \right)^{\frac{q}{p}} \frac{dh}{|h|^n} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

Equivalentemente, podremos simplemente decir que $v \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $\frac{\Delta_h v}{|h|^\alpha} \in L^q\left(\frac{dh}{|h|^n}; L^p(\mathbb{R}^n)\right)$. Además, si integramos respecto a $h \in B(0,\delta)$ para un $\delta > 0$ fijado, entonces obtenemos una norma equivalente, porque

$$\left(\int_{\{|h| \geq \delta\}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v(x+h) - v(x)|^p}{|h|^{\alpha p}} dx \right)^{\frac{q}{p}} \frac{dh}{|h|^n} \right)^{\frac{1}{q}} \leq c(n, \alpha, p, q, \delta) \|v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

De forma similar, diremos que $v \in B^\alpha_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ si $v \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y

$$[v]_{\dot{B}^\alpha_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{h \in \mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v(x+h) - v(x)|^p}{|h|^{\alpha p}} dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

De nuevo, podemos tomar supremo sobre $|h| \leq \delta$ y obtener una norma equivalente. Es evidente que por construcción $B^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$.

Dado un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, diremos que v pertenece localmente al espacio de Besov-Lipschitz $B^\alpha_{p,q,loc}(\Omega)$ si φv pertenece al espacio de Besov-Lipschitz global $B^\alpha_{p,q}(\Omega)$ para cualquier $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$. El siguiente lema nos muestra una caracterización del espacio $B^\alpha_{p,q,loc}(\Omega)$ sin recurrir al uso de funciones test.

Lema 2.9. *Una función $v \in L^p_{loc}(\Omega)$ pertenece localmente al espacio de Besov-Lipschitz $B^\alpha_{p,q,loc}(\Omega)$ si y solo si*

$$\left\| \frac{\Delta_h v}{|h|^\alpha} \right\|_{L^q\left(\frac{dh}{|h|^n}; L^p(B)\right)} < \infty$$

para toda $B \subset 2B \subset \Omega$ con radio r_B. Aquí, la medida $\frac{dh}{|h|^n}$ está restringida a la bola $B(0, r_B)$ del h-espacio.

Fijada una función test φ de soporte compacto, siempre se tiene la identidad puntual

$$\frac{\Delta_h(\varphi v)(x)}{|h|^\alpha} = v(x+h)\,\frac{\Delta_h\varphi(x)}{|h|^\alpha} + \frac{\Delta_h v(x)}{|h|^\alpha}\,\varphi(x).$$

Es evidente que

$$\left| v(x+h)\,\frac{\Delta_h\varphi(x)}{|h|^\alpha} \right| \le |v(x+h)|\, \|\nabla\varphi\|_\infty\, |h|^{1-\alpha}$$

y por lo tanto siempre tenemos que $\frac{\Delta_h \varphi}{|h|^\alpha} \in L^q\left(\frac{dh}{|h|^n}; L^p(\mathbb{R}^n)\right)$. Como consecuencia, obtenemos la equivalencia

$$\varphi v \in B^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}^n) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\Delta_h v}{|h|^\alpha}\,\varphi \in L^q\left(\frac{dh}{|h|^n}; L^p(\mathbb{R}^n)\right).$$

Además, está claro que $\frac{\Delta_h v}{|h|^\alpha}\,\varphi \in L^q\left(\frac{dh}{|h|^n}; L^p(\mathbb{R}^n)\right)$ para cada $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$ si y solo si lo mismo sucede para cada $\varphi = \chi_B$ y cada bola $B \subset 2B \subset \Omega$. Con esto garantizamos la veracidad del lema anterior.

Para introducir los espacios de Triebel-Lizorkin $F^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ actuamos como en [42, Section 2.5.10]. Diremos que una función $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pertenece al espacio $F^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ si $v \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y

$$\|v\|_{F^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \|v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + [v]_{\dot{F}^{p,q}_\alpha(\mathbb{R}^n)} < \infty,$$

donde

$$[v]_{\dot{F}^{p,q}_\alpha(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v(x+h)-v(x)|^q}{|h|^{n+\alpha q}}\, dh \right)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Equivalentemente, simplemente diremos que $v \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $\frac{\Delta_h v}{|h|^\alpha} \in L^p\left(dx; L^q(\frac{dh}{|h|^n})\right)$.

Un hecho importante del espacio de Triebel-Lizorkin es su identificación con los espacios de Sobolev Fraccionarios. Concretamente

$$F^\alpha_{p,2}\left(\mathbb{R}^n\right) = W^{\alpha,p}\left(\mathbb{R}^n\right).$$

Por su parte, el espacio de Besov-Lipschitz, tiene la siguiente identificación con la clase de funciones Hölder continuas.

$$B^\alpha_{\infty,\infty}\left(\mathbb{R}^n\right) = C^\alpha\left(\mathbb{R}^n\right).$$

En el caso entre los espacios de Besov-Lipschitz y Triebel-Lizorkin, se tiene que éstos coinciden cuando $p = q$. Es decir,

$$B^\alpha_{p,p}\left(\mathbb{R}^n\right) = F^\alpha_{p,p}\left(\mathbb{R}^n\right).$$

Para el resto de índices se tiene la siguiente inclusión de espacios

$$B^\alpha_{p,\text{mín}\{p,q\}}\left(\mathbb{R}^n\right) \subset F^\alpha_{p,q}\left(\mathbb{R}^n\right) \subset B^\alpha_{p,\text{máx}\{p,q\}}\left(\mathbb{R}^n\right).$$

Además, los espacios de Besov-Lipschitz y de Triebel-Lizorkin pueden ser caracterizados en términos puntuales. Dada una función medible $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, un *$\alpha$-gradiente fraccionario de Hajłasz de v* es una secuencia $\{g_k\}_k$ de funciones medibles no negativas $g_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, junto a un conjunto de medida nula $N \subset \mathbb{R}^n$, para los que se cumple la desigualdad

$$|v(x) - v(y)| \le |x-y|^\alpha \left(g_k(x) + g_k(y)\right)$$

para cualquier $k \in \mathbb{Z}$ y cualquier $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus N$ tales que $2^{-k} \leq |x-y| < 2^{-k+1}$. Diremos que $(g_k) \in \ell^q(\mathbb{Z}; L^p(\mathbb{R}^n))$ si

$$\|(g_k)_k\|_{\ell^q(L^p)} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \|g_k\|^q_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

De forma similar, escribimos $\{g_k\}_k \in L^p(\mathbb{R}^n; \ell^q(\mathbb{Z}))$ si

$$\|(g_k)_k\|_{L^p(\ell^q)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|(g_k(x))_k\|^p_{\ell^q(\mathbb{Z})}\, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

El siguiente resultado fue demostrado en [27].

Teorema 2.10. *Sean $0 < \alpha < 1$, $1 \leq p < \infty$ y $1 \leq q \leq \infty$. Dada $v \in L^p(\mathbb{R}^n)$.*

1. *Tenemos que $v \in B^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ si y solo si existe un α-gradiente fraccionario de Hajłasz $\{g_k\}_k \in \ell^q(\mathbb{Z}; L^p(\mathbb{R}^n))$ de v. Además,*

$$\|v\|_{B^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \simeq \text{ínf}\, \|(g_k)_k\|_{\ell^q(L^p)}$$

   donde el ínfimo se toma sobre los posibles α-gradientes fraccionarios de Hajłasz de v.

2. *Tenemos que $v \in F^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ si y solo si existe un α-gradiente fraccionario de Hajłasz $\{g_k\}_k \in L^p(\mathbb{R}^n; \ell^q(\mathbb{Z}))$ de v. Además,*

$$\|v\|_{F^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \simeq \text{ínf}\, \|(g_k)_k\|_{L^p(\ell^q)}$$

   donde el ínfimo se toma sobre los posibles α-gradientes fraccionarios de Hajłasz de v.

También tenemos la siguiente verisión del embedding de Sobolev con el que cerramos la sección (su prueba puede encontrarse en [20, Prop. 7.12]).

Lema 2.11. *Supongamos que $0 < \alpha < 1$. Entonces, los siguientes embeddings son continuos*

(a) $B^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}^n), F^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}^n) \subset L^{\frac{np}{n-\alpha p}}(\mathbb{R}^n)$ *para todo* $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ *y todo* $1 \leq q \leq \frac{np}{n-\alpha p}$.

(b) $B^\alpha_{\frac{n}{\alpha},q}(\mathbb{R}^n), F^\alpha_{\frac{n}{\alpha},q}(\mathbb{R}^n) \subset VMO(\mathbb{R}^n)$ *para todo* $1 \leq q \leq \infty$.

2.2. Preliminares de Análisis Armónico.

En esta sección empezaremos dando a conocer algunos de los operadores mas importantes en el marco del Análisis Armónico, tales como la *Maximal de Hardy-Littlewood* o los *Operadores de Calderón-Zygmund*, y algunas de sus propiedades que usaremos a lo largo del escrito. Dentro de los Operadores de Calderón-Zygmund estaremos especialmente interesados en la *Transformada de Beurling* y las *Transformadas de Riesz*. Posteriormente definiremos la *Transformada de Cauchy* e introduciremos el teorema de compacidad de Frechet-Kolmogorov y la teoría de operadores de Fredholm.

Sean $1 \leq s < \infty$ y $u \in L^s_{loc}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$. Denotamos

$$\mathcal{M}_s(u)(x) = \sup_{r>0} \left(\fint_{B(x,r)} |u|^s \right)^{\frac{1}{s}},$$

Observemos que cuando $s = 1$, recuperamos el operador maximal de Hardy-Littlewood. También denotaremos

$$\mathcal{M}^\sharp_s(u)(x) = \sup_{r>0} \left(\fint_{B(x,r)} |u - u_{B(x,r)}|^s \right)^{\frac{1}{s}}$$

$$\mathcal{M}^\sharp_{s,R}(u)(x) = \sup_{0<r<R} \left(\fint_{B(x,r)} |u - u_{B(x,r)}|^s \right)^{\frac{1}{s}}$$

Cuando $s = 1$, la línea anterior nos devuelve a la función maximal fuerte de Fefferman-Stein. Estos operadores son herramientas clásicas dentro del Análisis Armónico, para mas información sobre ellos recomendamos la lectura de la referencia [18].

El siguiente lema fue probado en [26] para $s = 1$. La prueba para $s > 1$ se sigue de manera similar.

Lema 2.12. *Sean $1 \leq s < q < \infty$ y $u \in L^s_{loc}(\mathbb{R}^n)$.*

(1) Se tiene que $\|\mathcal{M}_s u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,s,q)\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$.

(2) Existe una constante $k_0 = k_0(n,s,q) \geq 2$ tal que si u tiene soporte compacto en $B(x_0,R)$, entonces

$$\|\mathcal{M}^\sharp_{s,k_0R} u\|_{L^q(B(x_0,k_0R))} \geq C(n,s,q)\|u\|_{L^q(B(x_0,R))}.$$

Otra herramienta que usaremos serán los *Operadores de Calderón-Zygmund* (a partir de ahora C-Z). Recordemos que dado un operador lineal T definido sobre una clase de funciones en $\mathbb{R}^n$, se dice que T es C-Z si existe una contante $C > 0$ para la que se satisfacen las siguientes tres condiciones (ver [18]).

1. Es un operador integral singular. Es decir

$$(Tf)(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{|x-y|>\epsilon} K(x,y)\, f(y)\, dy\,.$$

2. El núcleo $K(x,y)$ cumple la cota

$$K(x,y) \leq \frac{C}{|x-y|^n}\,.$$

3. Se tiene la condición de cancelación de Hörmander

$$\int_{|x_1-y|>2|x_1-x_2|} |K(x_1,y) - K(x_2,y)|\; dy \leq C\,.$$

Es un hecho conocido (ver [40]) que si T es de C-Z, entonces para toda $1 < p < \infty$ exite una constante $c = c(n,p)$ para la que se cumple la desigualdad

$$\|Tf\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq c\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Mas aún, si consideramos $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, entonces el conmutador $C_b : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ definido como

$$C_b f(x) = [b, T]\, f(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x-y|>\epsilon} (b(x) - b(y))\, K(x, y) f(y)\, dy,$$

también es acotado con constante que solo depende de n, p y $\|b\|_*$.

Entre todos los operadores de C-Z, estarmos interesados especialemente en las *Transformadas de Riesz* y la *Transformada de Beurling*. Usando la representación de Fourier, para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, se define la *Transformada i-ésima de Riesz* de una función $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ como

$$\widehat{\mathcal{R}_i f}\,(\,\xi\,) \;=\; \frac{\xi_i}{|\,\xi\,|}\,\widehat{f}\,(\,\xi\,)\;.$$

De forma equivalente, podemos definir la *Transformada i-ésima de Riesz* como el siguiente valor principal

$$\mathcal{R}_i f(x) = -\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{|x-y|>\epsilon} \frac{y_i - x_i}{|x-y|^{n+1}}\, f(y)\, dy\,.$$

Es un hecho conocido que para toda $1 < p < \infty$, los operadores

$$\mathcal{R}_i \,:\, L^p\left(\mathbb{R}^n\right) \,\mapsto\, L^p\left(\mathbb{R}^n\right) \;\text{ son continuos}\,.$$

Mas aún, esta transformada puede definirse de forma análoga en el plano complejo $\mathbb{C}$. En tal caso el operador

$$\mathcal{R}_1 + i\mathcal{R}_2 \,:\, L^p(\mathbb{C}) \,\to\, L^p(\mathbb{C})$$

es continuo e invertible para toda $p \in (1, \infty)$. De hecho

$$\left(\mathcal{R}_1 + i\mathcal{R}_2\right)^{-1} = \mathcal{R}_1 - i\mathcal{R}_2\,.$$

Por su parte y en el plano complejo, la *Transformada de Beurling* de una función $f \in \mathcal{S}(\mathbb{C})$ se define, usando la representación de Fourier, como

$$\widehat{\mathcal{B}f}\,(\,\xi\,) \;=\; \frac{\overline{\xi}}{\xi}\,\widehat{f}\,(\,\xi\,)\;.$$

O equivalentemente, como el siguiente valor principal

$$\mathcal{B}f\,(z) = -\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{|z-\omega|>\epsilon} \frac{f\,(\omega)}{(z-\omega)^2}\, dA\,(\omega)\;.$$

Observemos que la *Transformada de Beurling*, es el único operador que cumple $\mathcal{B}\overline{\partial} f = \partial f$ para toda $f \in \mathcal{S}\,(\mathbb{C})$. En ocasiones, necesitaremos usar la conjugada de la *Transforamda de Beurling* $\overline{\mathcal{B}} = \mathbf{C}\mathcal{B}$ y la adjundta $\mathcal{B}^* = \mathbf{C}\mathcal{B}\mathbf{C}$ donde $\mathbf{C}$ es el operador conjugación compleja. En otras palabras, para cada $f \in \mathcal{S}(\mathbb{C})$, se define la *Conjugada de la Transformada de Beurling* de f como

$$\overline{\mathcal{B}}f\,(z) = -\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{|z-\omega|>\epsilon} \frac{\overline{f}\,(\omega)}{(\overline{z}-\overline{\omega})^2}\, dA\,(\omega)\;.$$

De la misma forma se define la *Transformada Adjunta de Beurling* de f como

$$\mathcal{B}^* f\,(z) = -\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{|z-\omega|>\epsilon} \frac{f\,(\omega)}{(\overline{z}-\overline{\omega})^2}\, dA\,(\omega)\;.$$

Para cada $1 < p < \infty$, estas *Transformadas de Beurling* cumplen que (e.g. [9])

- Los operadores $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}^*$, $\overline{\mathcal{B}}$: $L^2(\mathbb{C}) \mapsto L^2(\mathbb{C})$ son isometrías.
- Los operadores $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}^*$, $\overline{\mathcal{B}}$: $L^p(\mathbb{C}) \mapsto L^p(\mathbb{C})$ son continuos e invertibles.
- $\mathcal{B} \circ \mathcal{B}^* \equiv I_{L^p(\mathbb{C})} \equiv \overline{\mathcal{B}} \circ \overline{\mathcal{B}}$.

Además, dado $\alpha \in \mathbb{R}$, se cumple que (e.g. [13])

- Los operadores $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}^*$: $W^{\alpha,p}(\mathbb{C}) \mapsto W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ son continuos, invertibles y conmutan con las distintas nociones de derivada (entera y fraccionaria).
- El operador $\overline{\mathcal{B}}$: $W^{\alpha,p}(\mathbb{C}) \mapsto W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ es continuo e invertible pero no conmuta con las distintas nociones de derivada (ni entera ni fraccionaria).

Otro operador que utilizaremos, en el plano complejo $\mathbb{C}$, será la *Transformada de Cauchy*. Para cada $f \in \mathcal{S}(\mathbb{C})$, se define la *Transformada de Cauchy* de f como

$$\mathcal{C}f(z) := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{f(\omega)}{z-\omega}\, dy\,.$$

La *Transformada de Cauchy* resuelve el operador distribucional $\overline{\partial}$. En otras palabras, la transformada $\mathcal{C}$ es el único operador tal que $\overline{\partial}\mathcal{C}\phi = \phi$ para toda $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{C})$. Es importante destacar que mientras que la identidad $\overline{\partial}\mathcal{C} = Id$ puede generalizarse a otros espacios, la composición inversa $\mathcal{C}\overline{\partial}$ podría no ser siempre la identidad. Si sabemos que si $f \in L^p(\mathbb{C})$ con $1 < p < \infty$, entonces se tiene que

$$\overline{\partial}\mathcal{C}f = f. \tag{2.2}$$

Mas aún, podemos asegurar que los siguientes operadores son contínuos (e.g. [2])

- $\mathcal{C} : C_c^\infty(\mathbb{C}) \hookrightarrow C_0^\infty(\mathbb{C})$.
- $\mathcal{C} : L^2(\mathbb{C}) \hookrightarrow VMO(C)$.
- $\mathcal{C} : L_c^p(\mathbb{C})$ con $p > 2 \hookrightarrow W^{1,p}(\mathbb{C})$.

Para acabar con la *Transformada de Cauchy*, observemos como se relaciona con *Transformada de Beurling*.

$$\partial\mathcal{C}\Psi(z) = \partial\left(\frac{1}{\pi\omega} * \Psi\right)(z) = PV\left(\frac{-1}{\pi\omega^2} * \Psi\right)(z) = \mathcal{B}\Psi(z) \tag{2.3}$$

para toda $\Psi \in \mathcal{S}(\mathbb{C})$ y de hecho para toda función en $W^{1,p}(\mathbb{C})$ con $p > 1$.

Definición 2.13. *Dado un* Espacio de Banach $\mathcal{A}(\Omega)$, *diremos que es un* Álgebra de Banach *si existe una constante $C > 0$ tal que para toda pareja de funciones $f, g \in \mathcal{A}(\Omega)$, se cumple que*

$$\|f\,g\|_{\mathcal{A}(\Omega)} \leq C\,\|f\|_{\mathcal{A}(\Omega)}\,\|g\|_{\mathcal{A}(\Omega)}\,.$$

Ejemplo 2.14. *Los espacios $W^{k,p}(\Omega)$ con $k \in \mathbb{N}$ y $kp > n$ son* Álgebras de Banach.

A partir de este momento nos dedicaremos a introducir la teoría de operadores de Fredholm y la caracterización de Atkinson. Esta teoría será una pieza clave cuando estudiemos la ecuación (1.5) en el caso fraccionario. De hecho, necesitaremos que el *Operador de Beltrami*

$$Id - \mu\mathcal{B} - \nu\overline{\mathcal{B}} : X(\mathbb{C}) \to X(\mathbb{C})$$

sea Fredholm de índice cero cuando $X(\mathbb{C})$ es un espacio de Sobolev Fraccionario.

Definición 2.15. *Dados dos espacios de Banach* $\mathbb{E}$ *y* $\mathbb{F}$ *y un operador* $T : \mathbb{E} \mapsto \mathbb{F}$ *lineal y acotado, diremos que* T *es un operador de Fredholm si* $\mathrm{Ker}(T)$ *y* $\mathrm{Coker}(T)$ *tienen dimensión finita. Al conjunto de todos los operadores de Fredholm entre* $\mathbb{E}$ *y* $\mathbb{F}$ *se les denotará por* $\mathcal{F}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$.

Definición 2.16. *Dado el operador* $T \in \mathcal{F}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ *se define el índice del operador* T *como:*

$$\mathrm{Ind}\,(T) := \dim\left(\mathrm{Ker}\,(T)\right) - \dim\left(\mathrm{Coker}\,(T)\right) .$$

Una ventaja que presentan los operadores de Fredholm es que si tienen índice nulo, entonces la inyectividad y la sobreyectividad son equivalentes. Por ello, una vez que demostremos que un operador de Fredholm con indice nulo es inyectivo (o sobreyectivo), automáticamente tendremos que es invertible. Además, la *Caracterización de Atkinson* nos facilitará saber cuando un operador es de Fredholm. Para introducir esta caracterización, necesitaremos de la siguiente noción de compacidad.

Definición 2.17. *Dados dos espacios de Banach* $\mathbb{E}$ *y* $\mathbb{F}$, *y un operador lineal* $T : \mathbb{E} \mapsto \mathbb{F}$, *se dirá que es un* operador compacto *si cumple alguna de las dos condiciones siguientes:*

(i) $\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{E}$ *acotada,* $\{\, T(x_n)\,\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{F}$ *admite una subsucesión convergente.*

(ii) $T\,(B_{\mathbb{E}})$ *es relativamente compacto en* $\mathbb{F}$.

Al conjunto de todos los operadores compactos entre $\mathbb{E}$ *y* $\mathbb{F}$ *se le denotará por* $\mathcal{K}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$.

Teorema 2.18. ***(Teorema de Fréchet-Kolmogorov)*** *Sea* $1 < p < \infty$ *y* $\mathcal{F}$ *un subconjunto de* $L^p(\mathbb{R}^n)$. *Entonces,* $\mathcal{F}$ *es relativamente compacto si y solo si se cumplen las tres condiciones siguientes:*

(1) $\mathcal{F}$ *es uniformemente acotado, i.e.* $\sup\limits_{\psi\in\mathcal{F}} \|\psi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty$.

(2) $\mathcal{F}$ *decae uniformemente en* ∞, *i.e.* $\sup\limits_{\psi\in\mathcal{F}} \|\psi\, \chi_{|x|>R}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0$ *cuando* $R \to \infty$.

(3) $\mathcal{F}$ *es uniformemente equicontinuo, i.e.* $\sup\limits_{\psi\in\mathcal{F}} \|\psi(\cdot + h) - \psi(\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0$ *si* $|h| \to 0$.

A continuación, mostraremos algunas propiedades de los operadores compactos así como algunos ejemplos de operadores, en los que intervienen las *Transformadas de Cauchy* y la de *Beurling*, que son compactos. Despues de estos ejemplos desvelaremos la *Caracterización de Atkinson* y seguidamente daremos una series de propiedades de los operadores de Fredholm. Con ellos, cerraremos la sección.

Proposición 2.19. *Dados tres espacios de Banach* $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ *y* $\mathbb{G}$. *Se cumple que:*

(1) $\mathcal{K}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ *es un subespacio cerrado de* $\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, *el espacio de operadores lineales y acotados de* $\mathbb{E}$ *a* $\mathbb{F}$.

(2) Sean dos operadores T, S *tales que* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ *y* $S \in \mathcal{L}(\mathbb{F}, \mathbb{G})$. *Si uno de los dos operadores es compacto, entonces* $S \circ T$ *también es compacto.*

(3) $T \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ es compacto si y solo si su operador adjunto $T^* \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^*, \mathbb{E}^*)$ lo es.

Proposición 2.20. *[4, Chapter 4]. Dado $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto medible y acotado, los siguientes operadores son compactos.*

- *Para $p \in (2, \infty]$ y $0 \leq \alpha < 1 - \frac{2}{p}$*

$$\chi_\Omega \circ \mathcal{C} : L^p(\mathbb{C}) \mapsto C^\alpha(\Omega) .$$

- *Para $p \in [1, 2]$ y $1 \leq s < \frac{2p}{2-p}$*

$$\chi_\Omega \circ \mathcal{C} : L^p(\mathbb{C}) \mapsto L^s(\mathbb{C}) .$$

Teorema 2.21. *[43] Sean una función $b \in VMO(\mathbb{C})$ y un operador de Calderon-Zygmund de convolución $\mathcal{K}$. Entonces, el conmutador*

$$[\mathcal{K}, b] : \phi \mapsto (\mathcal{K}b - b\mathcal{K})\phi$$

es un operador compacto de $L^p(\mathbb{C})$ en si mismo $\forall p \in (1, \infty)$.

Lema 2.22. ***Caracterización de Atkinson:*** *Un operador acotado $T : \mathbb{E} \mapsto \mathbb{F}$ es Fredholm si y solo si*

$$\exists A \in \mathcal{L}(\mathbb{F}, \mathbb{E}) , \ \exists K_1 \in \mathcal{K}(\mathbb{E}) \ \ y \ \exists K_2 \in \mathcal{K}(\mathbb{F})$$
$$\textit{tales que } \ A \circ T = I_{\mathbb{E}} + K_1 \quad y \quad T \circ A = I_{\mathbb{F}} + K_2.$$

Proposición 2.23. *Sean $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ y $\mathbb{G}$ tres Espacios de Banach. Se tiene que*

(1)) Si $T : \mathbb{E} \mapsto \mathbb{F}$ y $S : \mathbb{F} \mapsto \mathbb{G}$ son operadores acotados y dos de los siguientes tres operadores T, S, $S \circ T$ son Fredholm, entonces el tercero también, y además

$$\operatorname{Ind}(S \circ T) = \operatorname{Ind}(S) + \operatorname{Ind}(T) .$$

(2) $T \in \mathcal{F}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ si y solo si $T^* \in \mathcal{F}(\mathbb{F}^*, \mathbb{E}^*)$, y además

$$\operatorname{Ind}(T) = \operatorname{Ind}(T^*) .$$

(3) Si $K \in \mathcal{K}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ y $T \in \mathcal{F}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ entonces $T + K \in \mathcal{F}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ y además

$$\operatorname{Ind}(T + K) = \operatorname{Ind}(T) .$$

(4) Si $T \in \mathcal{F}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ entonces $\operatorname{Ind}(T) = 0$ si y solo si $T = A + K$ para algún par de operadores A y K con A invertible y K compacto.

(5) Si $T \in \mathcal{F}(\mathbb{E})$ es inyectivo con $\operatorname{Ind}(T) = 0$, entonces T es invertible.

Dado que el enfoque que le hemos dado a las ecuaciones (1.5) y (1.2) a la hora de estudiarlas son totalmente distintos, necesitaremos de unas nociones previas específicas para cada caso. Por ello, abriremos una sección para cada ecuación; empezaremos por (1.5).

2.3. Preliminares de Cuasiconformidad.

Consideraremos la *Ecuación de Beltrami Homogénea*

$$\overline{\partial} f(z) = \mu(z)\partial f(z) \quad p.c.t.\ z \in \mathbb{C} \tag{2.4}$$

donde μ es una función medible en $\mathbb{C}$ que cumple la condición de elipticidad $\|\mu\|_\infty =: k < 1$. A este coeficiente lo llamaremos coeficiente de Beltrami. Ya en 1938, Morrey (ver [32]) demostró que existe, modulo transformaciones de Möbius, un único homeomorfismo perteneciente a $W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ que resuelve (2.4). A estos homeomorfismos se les conoce como K-cuasiconformes donde $K := \frac{1+k}{1-k}$ o simplemente cuasiconformes. Al resto de las soluciones $W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ de la ecuación se las conoce como K-cuasiregulares o abreviadamente cuasiregulares. A las soluciones que solo pertenecen a $W^{1,1}_{loc}(\mathbb{C})$ se las llama débilmente K-cuasiregulares o débilmente cuasiregulares. Se sabe que todo homeomorfismo $W^{1,1}_{loc}(\mathbb{C})$ es automáticamente cuasiconforme, pero hay soluciones débilmente cuasiregulares que no son cuasiregulares como por ejemplo $f(z) = \frac{1}{z|z|^{\frac{1}{K}-1}}$ de la que hablaremos en el *Ejemplo 3.2*.

Años mas tarde, en 1960, Lars Ahlfors y Lipman Bers demostraron el *Teorema de la Aplicación Medible de Riemann* [3] que asegura la existencia de una única aplicación cuasiconforme $\phi \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ solución de (2.4) normalizado por la condición $\phi(z) = z + \mathcal{O}(1/z)$ cerca del ∞ siempre y cuando el coeficiente μ tenga soporte compacto. A este homeomorfismo se le conoce como solución principal y puede ser fácilmente calculado. Para ello, supongamos que $\phi = z + \mathcal{C}h$ para alguna función $h \in L^2(\mathbb{C})$. En tal caso, la ecuación (1.6) se reescribe, en términos de h, como la siguiente ecuación

$$h(z) = \mu(z)\mathcal{B}h(z) + \mu(z)\,.$$

O equivalentemente

$$h = (Id - \mu\mathcal{B})^{-1}\,\mu$$

donde el operador $Id - \mu\mathcal{B} : L^2 \to L^2$ es invertible gracias a que $\|\mu\mathcal{B}\|_{L^2\to L^2} \le k < 1$. A este operador $Id - \mu\mathcal{B}$ se le conoce como operador de Beltrami. De esta forma, para cada coeficiente de Beltrami $\mu \in L^\infty_c(\mathbb{C})$, existe una única cuasiconforme principal que resuelve (2.4) y está definida como

$$\phi = z + \mathcal{C}\,(Id - \mu\mathcal{B})^{-1}\,\mu\,.$$

Recíprocamente, para cada aplicación cuasiconforme $\phi \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ normalizada por $\phi = z + \mathcal{O}(1/z)$, existe un único coeficiente de Beltrami μ para el que ϕ resuelve (2.4). Evidentemente, μ viene definida como $\mu = \frac{\overline{\partial}\phi}{\partial\phi}$. Por otro lado, cuando el coeficiente μ no tiene soporte compacto, aunque no podamos garantizar la existencia de la solución principal, sabemos que existe un único homeomorfismo $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con $f \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ solución de (2.4) normalizado por las condiciones $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$. A este homeomorfismo se le conoce como solución normalizada y es un poco mas difícil de calcular. Esto podemos verlo en [4, Theorem 5.3.4] donde demuestran la existencia de la solución normalizada como límite de las soluciones principales de las localizadas del coeficiente μ.

Existen, que sepamos, dos formas de extender la *Ecuación de Beltrami*. La primera de ellas es añadir otro coeficiente a la ecuación. Concretamente hablamos de la *Ecuación de Beltrami Generalizada Homogénea* introducida como (1.6). Es decir,

$$\overline{\partial} f(z) = \mu(z)\partial f(z) + \nu(z)\overline{\partial f}(z) \quad p.c.t.\ z \in \mathbb{C}$$

donde los coeficientes de Beltrami μ y ν son dos funciones medibles en $\mathbb{C}$ que satisfacen la condición de elipticidad $\||\mu| + |\nu|\|_\infty =: k < 1$. De los trabajos de Morrey, podemos deducir que para cada pareja de coeficientes μ y ν con soporte compacto, existe un único homeomorfismo $\phi \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ solución de (1.6) normalizado por la condición $\phi(z) = z + \mathcal{O}(1/z)$ cerca del ∞. Al igual que antes, si suponemos que $\phi = z + \mathcal{C}h$ para alguna función $h \in L^2(\mathbb{C})$, la ecuación (1.6) se reescribe, en términos de h, como

$$h(z) = \mu(z)\mathcal{B}h(z) + \nu(z)\overline{\mathcal{B}}h(z) + \mu(z) + \mu(z) .$$

O equivalentemente

$$h = \left(Id - \mu\mathcal{B} - \nu\overline{\mathcal{B}}\right)^{-1}(\mu + \nu)$$

donde el operador $Id - \mu\mathcal{B} - \nu\overline{\mathcal{B}} : L^2 \to L^2$ es invertible gracias a que $\|\mu\mathcal{B} + \nu\overline{\mathcal{B}}\|_{L^2 \to L^2} \leq k < 1$. A este operador $Id - \mu\mathcal{B} - \nu\overline{\mathcal{B}}$ se le conoce como operador de Beltrami Generalizado. De esta forma, a cada pareja de coeficientes de Beltrami μ, $\nu \in L^\infty_c(\mathbb{C})$, se le asocia una única cuasiconforme principal que resuelve (1.6). Esta solución viene definida como

$$\phi = z + \mathcal{C}\left(Id - \mu\mathcal{B} - \nu\overline{\mathcal{B}}\right)^{-1}(\mu + \nu) .$$

En la dirección contraria, una única aplicación cuasiconforme $\phi \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ no basta para determinar unívocamente al par de coeficientes μ y ν, y se necesita al menos otra aplicación cuasiconforme (no principal) que sea linealmente independiente de ϕ. Esto podemos verlo, por ejemplo, en [4, Chapters 6,16].

La otra forma de ampliar la *Ecuación de Beltrami*, que engloba a la anterior, es sustituir el lado derecho de la ecuación ($\mu\partial f$) por una función medible y de soporte compacto en $z \in \mathbb{C}$ y Lipschitz en ∂f. Específicamente, nos referimos a la *Ecuación de Beltrami no Lineal Homogénea*

$$\overline{\partial} f(z) = H\left(z, \partial f(z)\right) \quad p.c.t.\ z \in \mathbb{C} \tag{2.5}$$

donde la función H satisface las siguientes tres condiciones

(1) La función $H : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es medible en z. Es decir, la aplicación $z \to H(z, \omega)$ es medible para toda $\omega \in \mathbb{C}$.

(2) $H(z, 0) = 0$ para toda $z \in \mathbb{C}$.

(3) Existe un número $0 \leq k < 1$, llamada constante de elipticidad, y un radio $R > 0$ tal que

$$|H(z, \xi_1) - H(z, \xi_2)| \leq k\chi_{\mathbb{D}_R}(z)\,|\xi_1 - \xi_2|$$

para casi toda $z \in \mathbb{C}$ y toda ξ_1, $\xi_2 \in \mathbb{C}$.

Mas aún, la ecuación (2.5) admite una solución principal siempre y cuando la función H tenga soporte compacto en la primera variable. De hecho, para cada $0 < k < 1$ existe una función H (sin soporte compacto en la primera variable) para la que no existe solución principal (véase [4, Theorem 8.1.1]). Para demostrar la existencia de la solución principal, actuamos como en las ecuaciones (2.4) y (1.6). Es decir, supondremos que la solución $\phi \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ viene dada como $\phi = z + \mathcal{C}h$ para alguna función $h \in L^2(\mathbb{C})$. De esta forma, podemos reescribir la ecuación (2.5), en términos de h, como

$$h = H\left(z, \mathcal{B}h(z)\right) + g(z)$$

donde $g(z) = H\left(z, 1 + \mathcal{B}h(z)\right) - H\left(z, \mathcal{B}h(z)\right)$. Observemos por un lado que gracias a la condición Lipchitz de $H(z, \xi)$, la función g cumple

$$|g(z)| = |H\left(z, 1 + \mathcal{B}h(z)\right) - H\left(z, \mathcal{B}h(z)\right)| \leq k\chi_{\mathbb{D}_R}(z).$$

Por lo tanto g tiene soporte compacto y está acotada independientemente de h. Por otro lado, el operador $\mathcal{H} : L^2(\mathbb{C}) \to L^2(\mathbb{C})$ definido como

$$\mathcal{H}f(z) = f(z) - H\left(z, \mathcal{B}f(z)\right) \quad \text{para cada} \quad f \in L^2(\mathbb{C})$$

es invertible en $L^2\left(\mathbb{C}\right)$ porque $Id - \mathcal{H}$ es una contracción en $L^2(\mathbb{C})$. Mas aún, el operador $\mathcal{H} : L^p(\mathbb{C}) \to L^p(\mathbb{C})$ es invertible para toda $1 + k < p < 1 + \frac{1}{k}$ tal y como veremos en el siguiente resultado. Esta invertibilidad, junto a que $g \in L^\infty(\mathbb{C})$ (independientemente de h), nos permitirá asegurar que el homeomorfismo solución de (2.5) pertenece a $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{C})$ para toda $p < 1 + \frac{1}{k}$.

Teorema 2.24. *[6] Supongamos que la función medible $H : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ satisface la condición de elipticidad*

$$|H\left(z, \xi_1\right) - H\left(z, \xi_2\right)| \le k\chi_{\mathbb{D}_R}(z) \left|\xi_1 - \xi_2\right| \quad \text{con } k < 1$$

para casi toda $z \in \mathbb{C}$, toda $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C}$ y para algún radio $R > 0$, junto a la normalización $H(z, 0) = 0$ para toda $z \in \mathbb{C}$. Entonces, el operador $\mathcal{H} : L^p(\mathbb{C}) \to L^p(\mathbb{C})$ definido como

$$\mathcal{H}f(z) = f(z) - H\left(z, \mathcal{B}f(z)\right)$$

es continuamente invertible para toda $1 + k < p < 1 + \frac{1}{k}$. Mas aún, para cada $p \le 1 + k$ y cada $p \ge 1 + \frac{1}{k}$ existe una función H para la que el operador $\mathcal{H}$ no es invertible.

Como un caso particular, este teorema nos asegura que si μ y ν son dos funciones medibles que satisfacen la condición de elipticidad $\||\mu| + |\nu|\|_\infty = k < 1$ y con soporte compacto, entonces el operador de Beltrami

$$Id - \mu\mathcal{B} - \nu\overline{\mathcal{B}} : L^p(\mathbb{C}) \to L^p(\mathbb{C})$$

es invertible para toda $1 + k < p < 1 + \frac{1}{k}$. Recordemos que la solución principal $\phi \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ viene dada como

$$\phi = z + \mathcal{C}\left(Id - \mu\mathcal{B} - \nu\overline{\mathcal{B}}\right)^{-1}(\mu + \nu) \ .$$

De esta forma vemos que la solución principal de la *Ecuación de Beltrami Generalizada* pertenece a $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{C})$ para toda $p < 1 + \frac{1}{k}$. Mas aún, esta regularidad extra se aplica a toda $f \in W^{1,q}_{loc}(\mathbb{C})$ con $q > 1 + k$ solución de (1.6). Efectivamente, si definimos $F = f\varphi$ donde $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{C})$ y $f \in W^{1,q}_{loc}(\mathbb{C})$ con $q > 1 + \frac{1}{k}$ una solución débilmente cuasiregular de (1.6), entonces $F \in W^{1,q}_c(\mathbb{C})$ es solución de una Ecuación de Beltrami Generalizada no Homogénea

$$\overline{\partial}F = \mu\partial F + \nu\overline{\partial F} + g \, ,$$

con $g = f\overline{\partial}\varphi - \mu f\partial\varphi - \nu\overline{f\partial\varphi}$ que pertenece a $L_c^{\frac{2q}{2-q}}(\mathbb{C})$ si $q < 2$. De forma equivalente, gracias a que $\partial F = \mathcal{B}\overline{\partial}F$, podemos asegurar que

$$\overline{\partial}F = \left(Id - \mu\mathcal{B} - \nu\overline{\mathcal{B}}\right)^{-1} g \, .$$

Llegados a este punto pueden ocurrir dos cosas según el valor de q y de k. O bien $\frac{2q}{2-q} \ge 1 + \frac{1}{k}$ o bien $\frac{2q}{2-q} < 1 + \frac{1}{k}$. En el primer caso, el soporte compacto de g y la invertibilidad del operador nos garantizar que $F \in W^{1,p}(\mathbb{C})$ para toda $p < 1 + \frac{1}{k}$ y equivalentemente $f \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{C})$. En el segundo caso, $\frac{2q}{2-q} < 1 + \frac{1}{k}$, la invertibilidad del operador solo nos garantiza que $F \in W^{1,\frac{2q}{2-q}}_{loc}(\mathbb{C})$. Sin embargo, esto nos garantiza (vía embedding de Sobolev) que $f \in C^0(\mathbb{C})$ y por lo tanto $g \in C^0_c(\mathbb{C})$. Una vez tenemos que g está acotada, podemos volver a usar la invertibilidad del operador para concluir que en este caso F también pertenece a $W^{1,p}(\mathbb{C})$ para toda $p < 1 + \frac{1}{k}$ y por ende $f \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{C})$ para toda $p < 1 + \frac{1}{k}$. De hecho, en [35], (cuando $\nu = 0$) se demuestra que para toda aplicación débilmente cuasiregular $f \in W^{1,1+k}_{loc}(\mathbb{C})$ se obtiene la misma automejora. Mas aún, de las prueba dada en la referencia, podemos ver que esta automejora se amplía fácilmente al caso $\nu \neq 0$. Como ya habíamos indicado, el ejemplo $f(z) = (z|z|^{\frac{1}{K}-1})^{-1}$ con $K = \frac{1+k}{1-k}$ nos muestra que para toda $p < 1 + k$, existe una solución K-cuasiregular débil que no es K-cuasiregular.

Anteriormente vimos que la *solución principal* de la ecuación

$$\overline{\partial}\phi(z) = H\left(z, \partial\phi(z)\right) \quad \text{p.c.t. } z \in \mathbb{C}\,,$$

pertenece a $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{C})$ para toda $p < 1 + \frac{1}{k}$ donde k es la constante de elipticidad del operador $H : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. De hecho, puede demostrarse que toda $f \in W^{1,q}_{loc}(\mathbb{C})$ con $p \in \left[1 + k, 1 + \frac{1}{k}\right)$ solución de (2.5) también pertenece a $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{C})$ para toda $p < 1 + \frac{1}{k}$. Para ver esto podemos actuar como sigue. Para cada $f \in W^{1,q}_{loc}(\mathbb{C})$ con $q \in \left[1 + k, 1 + \frac{1}{k}\right)$, definimos un coeficiente de Beltrami $\mu_f(z)$ como $\mu_f(z) = \frac{H(z,\partial f(z))}{\partial f(z)}$. Entonces, por un lado es evidente que f cumple la *Ecuación de Beltrami Homogénea*

$$\overline{\partial} f(z) = \mu_f(z)\partial f(z) \quad \text{p.c.t. } z \in \mathbb{C}\,.$$

Por otro lado, gracias a homogeneidad y a la condición Lipchitz de $H(z, \xi)$, tenemos que

$$|\mu_f(z)| = \frac{|H\left(z, \partial f(z)\right)|}{|\partial f(z)|} = \frac{|H\left(z, \partial f(z)\right) - H\left(z, 0\right)|}{|\partial f(z)|} \leq k < 1\,.$$

Y por lo tanto podemos aplicar, a $f \in W^{1,q}_{loc}(\mathbb{C})$, la automejora alcanzada previamente para las soluciones cuasiregulares de (2.4). Así vemos que $f \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{C})$ para toda $p < 1 + \frac{1}{k}$.

Cabe preguntarse si alguna condición extra, sobre los coeficientes μ y ν, implican algun tipo de regularidad igual o superior a $W^{1,1+\frac{1}{k}}_{loc}(\mathbb{C})$ para las aplicaciones cuasiregulares, en particular para la cuasiconforme principal. Este será nuestro objetivo principal en el *Capítulo 3* donde estudiaremos el caso μ, $\nu \in W^{1,p}_c$. El primer resultado que encontramos en este sentido lo encontramos en los trabajos de T. Iwaniec [21] o en los trabajos de A. Koski [28]. Ambos sobre los operadores de Beltrami.

Teorema 2.25. *[21] Sean dos coeficientes de Beltrami μ, $\nu \in VMO_c\left(\mathbb{C}\right)$ tales que $\left\||\mu| + |\nu|\right\|_\infty = k < 1$ y $1 < p < \infty$. Entonces, el operador*

$$Id - \mu\mathcal{B} - \nu\overline{\mathcal{B}} :\ L^p\left(\mathbb{C}\right) \mapsto\ L^p\left(\mathbb{C}\right)$$

es invertible.

En este caso, en el que los coeficientes μ, ν pertenecen a $VMO_c(\mathbb{C})$, la automejora alcanzada aumenta de manera notable. Evidentemente, si volvemos a definir una función $F = f\varphi$ donde $\varphi \in C^\infty_c\left(\mathbb{C}\right)$ y $f \in W^{1,q}_{loc}(\mathbb{C})$ con $q > 1$ una solución débilmente cuasiregular de (1.6), podemos repetir los mismos pasos que antes donde ahora el operador siempre es invertible. Por ello, en este caso alcanzaremos que $f \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{C})$ para toda $p < \infty$. En particular, también tendremos esta mejora para la solución cuasiconforme.

Si los coeficientes μ, ν tienen algún tipo de regularidad Sobolev, entonces podemos definir un nuevo tipo de solución para la Ecuación de Beltrami Generalizada. Concretamente.

Definición 2.26. *Sean $\mu, \nu \in L_c^\infty(\mathbb{C})$ tales que $\| |\mu| + |\nu| \|_\infty \leq k < 1$ y $h \in L^1_{loc}(\mathbb{C})$. Supongamos además $\mu, \nu \in W^{1,p}(\mathbb{C})$ para alguna $p \geq 1$. Diremos que f es una* solución distribucional *de la Ecuación de Beltrami Generalizada*

$$\overline{\partial} f = \mu \partial f + \nu \overline{\partial f} + h\,,$$

si $f \in L_{loc}^{\frac{r}{r-1}}(C)$ para alguna $r \leq p$ y se cumple que

$$\left\langle \overline{\partial} f\,,\, \varphi \right\rangle \,=\, \langle \mu\, \partial f\,,\, \varphi \rangle \,+\, \left\langle \nu\, \overline{\partial f}\,,\, \varphi \right\rangle + \langle h\,,\, \varphi \rangle \ \text{ en } \mathcal{D}'(\mathbb{C})\,.$$

Donde consideramos el producto $\langle f\,,\, g \rangle \,=\, Re \int f \overline{g}$. O de forma equivalente, que se cumpla

$$Re \int_{\mathbb{C}} f\, \overline{\partial \varphi}\, dA(z) \,=\, Re \int_{\mathbb{C}} f\, \overline{\varphi}\, \partial\mu \,+\, \mu\, f\, \partial\overline{\varphi} \,+\, \overline{f}\, \overline{\varphi}\, \overline{\partial}\nu \,+\, \nu\, \overline{f}\, \overline{\partial}\overline{\varphi} \,-\, h\, \overline{\varphi}\, dA(z)$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{C})$.

Notemos que las condiciones $\mu, \nu \in W^{1,p}(\mathbb{C})$ y $f \in L^{\frac{r}{r-1}}$ con $r \leq p$ son necesarias para definir las *soluciones distribucionales* de (1.5). En caso contrario, los términos $\langle \mu\, \partial f\,,\, \varphi \rangle$, $\left\langle \nu\, \overline{\partial f}\,,\, \varphi \right\rangle$ podrían no tener sentido en $\mathcal{D}'(\mathbb{C})$.

A continuación, abriremos una subsección dedicada completamente al producto escalar $\langle f, g \rangle = \operatorname{Re} \int f \overline{g}$. Al final de la misma explicaremos brevemente porqué usamos este producto escalar y no el producto escalar

$$\langle f\,,\, g \rangle_{\mathbb{C}} \,=\, \int_{\mathbb{C}} f\, \overline{g}\, dA(z)$$

que suele ser usual en el plano complejo.

2.3.1. Preliminares Producto Escalar .

Pensemos el espacio de funciones $\mathbb{C}$ evaluadas $L^p(\mathbb{C})$ como el espacio $\mathbb{R}$-lineal

$$L^p(\mathbb{C}) \,=\, L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) \,\oplus\, L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$$

mediante la identifición $u + iv \,=\, (u, v)$. De acuerdo con esta estructura de producto, todo operador acotado $T:\, L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) \oplus L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) \to L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) \oplus L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ tiene la representación matricial

$$T\,(u + iv) \,=\, T \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} \,=\, \begin{pmatrix} T_{11}\, T_{12} \\ T_{21}\, T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\,,$$

donde cada operador $T_{ij} : L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) \to L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ es acotado.

De forma similar, toda aplicación lineal y acotada $U : L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) \oplus L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$ está representada por

$$U \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \,=\, \begin{pmatrix} U_1\, U_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\,,$$

donde $U_j : L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$ son formas lineales acotadas. Por el teorema de representación de Riesz, deducimos que el dual topológico del espacio $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) \oplus L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ es precisamente $L^{p'}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) \oplus L^{p'}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ con $p' = \frac{p}{p-1}$. De hecho, podemos tomar como dualidad $\mathbb{R}$-bilineal a

$$\left\langle \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\,,\, \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \right\rangle \,=\, \int u(z)\, u'(z)\, dz \,+\, \int v(z)\, v'(z)\, dz$$

para cualquier pareja $(u,v) \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) \oplus L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ y $(u',v') \in L^{p'}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) \oplus L^{p'}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$. Si $f = u + iv$ y $f' = u' + iv'$, tendremos la representación equivalente

$$\left\langle \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \right\rangle = \operatorname{Re} \int f(z)\, \overline{f'(z)}\, dz = \langle\, f \,,\, f' \,\rangle \,.$$

Es decir,

$$(L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) \oplus L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}))' = \left\{ (\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2) \text{ tales que } \mathcal{U}_j \in (L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}))' \right\} = L^{p'}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) \oplus L^{p'}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$$

donde además sabemos que $(L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}))' \equiv L^{p'}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$.

Recordemos que a cada operador $\mathbb{R}$-lineal $T : L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) \oplus L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) \to L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) \oplus L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ podemos asociarle otro operador

$$T' : L^{p'}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) \oplus L^{p'}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) \to L^{p'}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) \oplus L^{p'}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$$

llamado el operador $\mathbb{R}$-adjunto de T y está definido mediante la regla

$$\left\langle \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} , T' \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Ciertamente, todo operador $\mathbb{R}$-lineal tiene un operador $\mathbb{R}$-adjunto. Por ejemplo, de acuerdo con la estructura anterior, la conjugación compleja es un operador $\mathbb{R}$-autoadjunto, es decir $\mathbf{C} = \mathbf{C}'$. Por su parte, la multiplicación puntual por una función $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ y su operador $\mathbb{R}$ adjunto μ' vienen dados por

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 & -\mu_2 \\ \mu_2 & \mu_1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mu' = \mathbf{C} \begin{pmatrix} \mu_1 & -\mu_2 \\ \mu_2 & \mu_1 \end{pmatrix} \mathbf{C}$$

donde el operador conjugación $\mathbf{C}$ viene dado como

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & -Id \end{pmatrix} .$$

Para la transformada de Beurling $\mathcal{B}$ y su operador $\mathbb{R}$-adjunto tenemos las expresiones

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_1 & -\mathcal{B}_2 \\ \mathcal{B}_2 & \mathcal{B}_1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}' = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_1 & \mathcal{B}_2 \\ -\mathcal{B}_2 & \mathcal{B}_1 \end{pmatrix} ,$$

donde el núcleo de los operadores $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ vienen dados como

$$\frac{-1}{\pi} \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{\pi} \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

respectivamente.

Observemos que bajo esta estructura, la derivadas distribucionales se comportan como

$$\langle\, \overline{\partial} f \,,\, \varphi \,\rangle = -\operatorname{Re} \int f\, \overline{\partial \varphi} = -\langle\, f \,,\, \partial \varphi \,\rangle$$

$$\langle\, \partial f \,,\, \varphi \,\rangle = -\operatorname{Re} \int f\, \partial \overline{\varphi} = -\langle\, f \,,\, \overline{\partial} \varphi \,\rangle \,.$$

Por su parte el producto puntual por una función adecuada μ cumple que

$$\langle\, \mu f \,,\, \varphi \,\rangle = \operatorname{Re} \int \mu f\, \overline{\varphi} = \operatorname{Re} \int f\, \overline{\overline{\mu}\, \varphi} = \langle\, f \,,\, \overline{\mu}\, \varphi \,\rangle \,.$$

Lo que concuerda con la expresión integral que vimos en la definición de solución distribucional de la *Ecuación de Beltrami Generalizada* (ver *Definición 2.26*). Y por último, la transformada de Beurling, actúa como

$$\langle \mathcal{B} f \,,\, \varphi \rangle \;=\; \langle\, f \,,\, \mathcal{B}' \varphi \,\rangle \;.$$

Esta será la noción de dualidad que usaremos a lo largo de los *Capítulos 3 y 4* cuando tratemos con la *Ecuación de Beltrami Generalizada*. Especialmente usaremos las identidades del último párrafo. La razón por la que usaremos esta noción de dualidad es que en ciertos momentos necesitaremos usar que el operador conjugación es $\mathbb{R}$-autoadjunto. Es decir, necesitaremos de la identidad

$$\langle\, \mathbf{C} f \,,\, g \,\rangle \;=\; \mathrm{Re} \int \overline{f}\, g \;=\; \mathrm{Re} \int f \,,\, \overline{g} \;=\; \langle\, f \,,\, \mathbf{C} g \,\rangle$$

la cual no es cierta si consideramos la dualidad usual en el plano complejo $\langle f, g \rangle_{\mathbb{C}} = \int f\overline{g}$. O en otras palabras, el operador conjugación no es $\mathbb{C}$-autoadjunto ya que evidentemente

$$\langle\, \mathbf{C} f \,,\, g \,\rangle_{\mathbb{C}} \;=\; \int \overline{\overline{f}\, g} \;\neq\; \int f\, g \;=\; \langle\, f \,,\, \mathbf{C} g \,\rangle_{\mathbb{C}} \;,$$

lo que no es útil para nuestros propósitos como podremos comprobar en los capítulos siguientes.

2.4. Preliminares de los Sistemas en Forma de Divergencia.

En esta sección, daremos todos los resultados previos que iremos necesitando a lo largo del *Capítulo 5* cuando estudiemos las soluciones del siguiente sistema elíptico no lineal en forma divergencia,

$$\mathrm{div}\, \mathcal{A}\,(\, x \,,\, Du \,) \;=\; \mathrm{div}\, G \qquad \text{en } \Omega \,,$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio, $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $G : \Omega \to \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una *función de Carathéodory de crecimiento lineal*. Esto último quiere decir que existen unas constantes ℓ, L, $\sigma > 0$ y $0 \leq \varrho \leq 1$ tales que

$(\,\mathcal{A}1\,)$ $\langle\, \mathcal{A}\,(\, x , \xi \,) \,-\, \mathcal{A}\,(\, x \,,\, \eta \,) \,,\, \xi \,-\, \eta \,\rangle \;\geq\; \sigma \,|\, \xi \,-\, \eta \,|^2 \,,$

$(\,\mathcal{A}2\,)$ $|\, \mathcal{A}\,(\, x \,,\, \xi \,) \,-\, \mathcal{A}\,(\, x \,,\, \eta \,)\,| \;\leq\; L \,|\, \xi \,-\, \eta \,| \,,$ y

$(\,\mathcal{A}3\,)$ $|\, \mathcal{A}\,(\, x \,,\, \xi \,)\,| \;\leq\; \ell \,\left(\, \varrho^2 \,+\, |\, \xi \,|^2 \,\right)^{\frac{1}{2}} \,,$

para todo ξ, $\eta \in \mathbb{R}^n$ y para casi todo $x \in \Omega$. Además, mostraremos que en el caso $n = 2$ y lineal en la segunda variable, es decir $\mathcal{A}(x, \xi) = A(x)\xi$ para alguna matriz $A(x)$, el sistema (1.2) puede reducirse a una *Ecuación de Beltrami Generalizada*.

Como ya indicamos en la introducción, nuestro trabajo consistirá en imponer al operador $\mathcal{A}(x, \xi)$ algún tipo de regularidad Besov-Lipschitz o Triebel-Lizorkin con respecto a la variable x y demostrar que regularidad (también Besov-Lipschitz o Triebel-Lizorkin) del término independiente se transfiere adecuadamente a las soluciones de (1.2). El punto clave en este tránsito es que al operador le impondremos condicione que nos asegurarán que la aplicación $x \to \mathcal{A}(x, \xi) \in VMO(\mathbb{R}^n)$ para toda $\xi \in R^n$. Además, los resultados que alcancemos usando esta condición VMO del operador pueden a extenderse a los sistemas elípticos no lineales en forma de divergencia

$$\operatorname{div} \mathbb{A}\,(\,x\,,\,Du\,)\;=\;\operatorname{div}(\,|\,G\,|^{s-2}\,G\,)\qquad \text{en } \Omega\,, \tag{2.6}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio, $2 \leq s \leq n$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $G : \Omega \to \mathbb{R}^n$ y $\mathbb{A} : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una *función de Carathéodory de crecimiento* $s-1$. Esto último quiere decir que existen unas constantes ℓ, L, $\sigma > 0$ y $0 \leq \varrho \leq 1$ tales que

($\mathbb{A}\,1$) $\langle\,\mathbb{A}\,(\,x\,,\,\xi\,)\,-\,\mathbb{A}\,(\,x\,,\,\eta\,)\,,\,\xi\,-\,\eta\,\rangle\,\geq\,\sigma\,\left(\,\varrho^2\,+|\,\xi\,|^2\,+\,|\,\eta\,|^2\right)^{\frac{s-2}{2}}\,|\,\xi\,-\,\eta\,|^2$, y

($\mathbb{A}\,2$) $|\,\mathbb{A}\,(\,x\,,\,\xi\,)\,-\,\mathbb{A}\,(\,x\,,\,\eta\,)|\,\leq\,L\,\left(\,\varrho^2\,+|\,\xi\,|^2\,+\,|\,\eta\,|^2\right)^{\frac{s-2}{2}}\,|\,\xi\,-\,\eta\,|$,

($\mathbb{A}\,3$) $|\,\mathbb{A}\,(\,x\,,\,\xi\,)|\,\leq\,\ell\,\left(\,\varrho^2\,+\,|\,\xi\,|^2\right)^{\frac{s-1}{2}}$,

para todo $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ y para casi todo $x \in \Omega$. Observemos que en el caso $s = 2$ recuperamos las condiciones ($\mathcal{A}\,1$) – ($\mathcal{A}\,3$) descritas anteriormente. Además, si consideramos el operador $\mathbb{A}(x, \xi)$ definido como

$$\mathbb{A}\,(\,x\,,\,\xi\,)\;=\;\gamma\,(\,x\,)\,|\,\xi\,|^{p-2}\,\xi\,,$$

obtenemos el p-laplaciano con peso (donde $p = s$), el cual proviene de minimizar el funcional de energía

$$\min_{u}\int_{\Omega}\gamma\,(\,x\,)\,|\,\nabla u\,|^{p-2}\,\langle\,\nabla u\,,\,\nabla u\,\rangle\;,$$

el cual satisface las condiciones ($\mathbb{A}\,1$) – ($\mathbb{A}\,3$). No solo esto, el funcional de energía

$$\mathcal{E}\,(\,u\,)\;=\;\min_{u}\,\frac{1}{s}\int_{\Omega}\left(\,1\,+\,|\,Du\,|^2\right)^{\frac{s}{2}}\;,$$

asociado a una variante de la superficie de una función en el recinto Ω, induce un operador $\mathbb{A}\,(x, \xi)$ definido como

$$\mathbb{A}\,(\,x\,,\,\xi\,)\;=\;\frac{\xi}{\left(\,1\,+\,|\,\xi\,|^2\right)^{\frac{2-s}{2}}}$$

el cual también satisface las condiciones ($\mathbb{A}\,1$) – ($\mathbb{A}\,3$). De esta forma vemos que las condiciones ($\mathbb{A}\,1$) – ($\mathbb{A}\,3$) engloban algunos operadores que actualmente son sujetos de estudio por parte de la comunidad.

En lo que sigue, reservaremos las condiciones ($\mathcal{A}\,1$) – ($\mathcal{A}\,3$) y la notación $\mathcal{A}(x, \xi)$ para los operadores $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de crecimiento lineal. También reservaremos las condiciones ($\mathbb{A}\,1$) – ($\mathbb{A}\,3$) y la notación $\mathbb{A}(x, \xi)$ para los operadores $\mathbb{A} : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de crecimiento $s - 1$.

Hemos divido la sección en tres subsecciones. En la primera, daremos a conocer algunos resultados ya conocidos sobre los sistemas elípticos no lineales (2.6) y un lema de iteración que usaremos en nuestro trabajo. En la segunda introduciremos la descomoposición de Hogde y un tipo de desigualdad no estándar de Caccioppoli para las soluciones de (1.2). En la última, desvelaremos como el caso lineal con $n = 2$ se reduce a una *Ecuación de Beltrami Generalizada*.

2.4.1. Sistemas Elípticos No Lineales en Forma de Divergencia

Esta subsección está dedicada a recuperar algunos de los resultados fundamentales de la teoría L^p_{loc} de las soluciones de los sistemas elípticos no lineales en forma de divergencia que necesitaremos a lo largo del *Capítulo 5*. Nuestro primer resultado es una propiedad bastante conocida sobre la integrabilidad máxima de las soluciones de la ecuación (2.6). Mostramos una versión adecuada para nuestros propósitos.

Teorema 2.27. *Sean $s \in [2, n]$ y $\mathbb{A} : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que satisfaga las condiciones $(\mathbb{A}\,1) - (\mathbb{A}\,3)$. Supongamos que $u \in W^{1,s}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ es una solución local de (2.6). Si $G \in L^q_{loc}(\Omega)$ para alguna $q > s$, entonces existe un exponente t con $s < t < q$ tal que se cumple la siguiente desigualdad*

$$\left(\fint_{B_R} |Du|^t \, dx \right)^{\frac{1}{t}} \leq C \left(\fint_{B_{2R}} |Du|^s \, dx \right)^{\frac{1}{s}} + \left(\fint_{B_{2R}} |G|^t \, dx \right)^{\frac{1}{t}},$$

para toda bola $B_R \subset B_{2R} \Subset \Omega$. En particular, $Du \in L^t_{loc}(\Omega)$.

Para la prueba nos remitimos a [17, Theorem 6.7, p. 204]. A continuación, estableceremos un resultado de regularidad para las soluciones de un sistema elíptico no lineal y homogéneo de la forma

$$\operatorname{div} \mathbb{B}\,(\,Du\,) \,=\, 0$$

donde $\mathbb{B} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una *función autónoma de Carathéodory con crecimiento $s - 1$*. Esto quiere decir que existen unas constantes ℓ, L, $\sigma > 0$ y $0 \leq \varrho \leq 1$ para las que se cumplen las siguientes tres propiedades

$(\mathbb{B}\,1)$ $\langle \mathbb{B}\,(\,\xi\,) \,-\, \mathbb{B}\,(\,\eta\,)\,,\, \xi \,-\, \eta \rangle \,\geq\, \sigma\, \left(\varrho^2 \,+\, |\,\xi\,|^2 \,+\, |\,\eta\,|^2 \right)^{\frac{s-2}{2}} \,|\,\xi \,-\, \eta\,|^2,$

$(\mathbb{B}\,2)$ $|\,\mathbb{B}\,(\,\xi\,) \,-\, \mathbb{B}\,(\,\eta\,)| \,\leq\, L\, \left(\varrho^2 \,+\, |\,\xi\,|^2 \,+\, |\,\eta\,|^2 \right)^{\frac{s-2}{2}} \,|\,\xi \,-\, \eta\,|$, y

$(\mathbb{B}\,3)$ $|\,\mathbb{B}\,(\,\xi\,)| \,\leq\, \ell\, \left(\varrho^2 \,+\, |\,\xi\,|^2 \right)^{\frac{s-1}{2}},$

para toda ξ, $\eta \in \mathbb{R}^n$. Para este tipo de operadores enunciamos el siguiente resultado.

Teorema 2.28. *Sean $\mathbb{B} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que satisface $(\mathbb{B}\,1)$, $(\mathbb{B}\,2)$, $(\mathbb{B}\,3)$, y $v \in W^{1,s}_{loc}(\Omega)$ una solución de*

$$\operatorname{div}\, \mathbb{B}\,(\,Dv\,) \,=\, 0 \qquad en\;\Omega\,.$$

Entonces, para toda bola $B \Subset \Omega$, se cumple que

- $\displaystyle\sup_{x \in \lambda B} |Dv(x)| \leq \frac{C}{diam(B)(1 - \lambda)} \left(\fint_B (1 + |Dv|^s) \right)^{\frac{1}{s}}$ *para toda* $0 < \lambda < 1$.
- $\displaystyle\fint_{\delta B} |Dv - (Dv)_{\delta B}|^s \leq C\, \delta^{\beta s} \fint_B (1 + |Dv|^s)$ *para toda* $0 < \delta < 1$ *y alguna* $\beta > 0$.

Para la prueba nos remitimos a las Secciones 8.3 y 8.7 de [17] o, mas específicamente a las fórmulas (8.104) y (8.106), p.302-303 de [17]. En lo que sigue, y siempre que no cause confusión, reservaremos las condiciones $(\mathbb{B}\,1)$-$(\mathbb{B}\,3)$ y la notación $\mathbb{B}\,(\xi)$ para los operadores $\mathbb{B} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ autónomos de crecimiento $s - 1$.

Del *Teorema 2.28*, podemos deducir fácilmente el siguiente resultado.

Lema 2.29. *Sea $\mathbb{B} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que satisface $(\mathbb{B}1)$, $(\mathbb{B}2)$, $(\mathbb{B}3)$. Sean también una bola $B \Subset \Omega$ y una función $w \in W^{1,s}_{loc}(\Omega)$. Entonces, el problema*

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbb{B}(Dv) \;=\; 0 & x \in B\,, \\ v \;=\; w & x \in \partial B\,. \end{cases}$$

admite una única solución $v \in W^{1,s}(B)$ y además se cumple que:

- $\displaystyle \sup_{x \in \lambda B} |Dv(x)| \leq \frac{C}{diam(B)(1-\lambda)} \left(\fint_B (1 + |Dw|^s) \right)^{\frac{1}{s}}$ *para toda* $0 < \lambda < 1$.
- $\displaystyle \fint_{\delta B} |Dv - (Dv)_{\lambda B}|^s \leq C\,\delta^{\beta s} \fint_B (1 + |Dw|^s)$ *para toda* $0 < \delta < 1$ *y alguna* $\beta > 0$.

Concluimos esta subsección con un lema de iteración bastante conocido, el cual tiene un aplicación muy importante en el llamado método hole-filling. Su prueba puede encontrarse, por ejemplo, en [17, Lemma 6.1].

Lema 2.30. *Sea $h : [r, R_0] \to \mathbb{R}$ una función acotada no negativa, $0 < \vartheta < 1$, $A, B \geq 0$ y $\beta > 0$. Asumamos que*

$$h(s) \leq \vartheta h(t) + \frac{A}{(t-s)^\beta} + B,$$

para toda $r \leq s < t \leq R_0$. Entonces,

$$h(r) \leq \frac{cA}{(R_0 - r)^\beta} + cB,$$

donde $c = c(\vartheta, \beta) > 0$.

2.4.2. Descomposición de Hodge

El contenido de esta subsección puede encontrarse de manera mas detallada en la monografía [22]. Recordemos que para todo campo vectorial $F \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ con $1 < p < +\infty$, la ecuación de Poisson

$$\Delta w = \operatorname{div} F$$

admite una única solución $w \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ cuyo gradiente puede expresarse en términos de la transformada de Riesz como sigue

$$Dw = -(\mathcal{R} \otimes \mathcal{R})(F),$$

donde el producto tensorial $\mathcal{R} \otimes \mathcal{R}$ es un operador matriz $n \times n$ cuyas entradas son las transformadas de Riesz de segundo orden $\mathcal{R}_j \circ \mathcal{R}_k$ $(1 \leq j, k \leq n)$. Por lo tanto, la identidad anterior puede leerse como

$$D_j w = -\sum_{k=1}^{n} \mathcal{R}_j\, \mathcal{R}_k\, F^k,$$

donde F^k denota la k-ésima componente del campo vectorial F. Por otro lado, definiendo $\mathfrak{E} = -(\mathcal{R} \otimes \mathcal{R})$ y $\mathfrak{B} = Id - \mathfrak{E}$ podemos escribir

$$F \;=\; \mathfrak{E}(\,F\,) \;+\; \mathfrak{B}(\,F\,)\;,$$

donde, por construcción, $\mathfrak{E}(F)$ tiene rotacional nulo y $\mathfrak{B}(F)$ tiene divergencia nula. Además, la teoría estándar de Calderon-Zygmund nos da una cota L^p para estos operadores $\mathfrak{E}$ y $\mathfrak{B}$, siempre y cuando $1 < p < +\infty$. Sin embargo, para nuestros propósitos necesitaremos de una estimación mas precisa. Esta estimación la encontramos en la siguiente propiedad de la descomposición de Hodge.

Lema 2.31. *Sea $w \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p < \infty$. Entonces, existen un campo vectorial $\mathfrak{E} \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ con $\operatorname{curl}(\mathfrak{E}) = 0$ y un campo vectorial $\mathfrak{B} \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ con $\operatorname{div}(\mathfrak{B}) = 0$ tales que*

$$Dw|Dw|^{p-2} = \mathfrak{E} + \mathfrak{B}.$$

Además

$$\|\mathfrak{E}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Dw\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{p-1} \tag{2.7}$$

y

$$\|\mathfrak{B}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq C \text{ máx}\{p-2, p'-2\} \|Dw\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{p-1}, \tag{2.8}$$

donde C es un constante universal.

La prueba del lema previo está contenida en [23, Theorem 4]. El hecho de que la constante es universal e independiente de n y de p puede deducirse de [29, Corollary 3]. Hemos usado la descomposición de Hodge para probar la siguiente desigualdad no estándar de Caccioppoli, la cual es bien conocida para la comunidad y cuya demostración ha sido incluida para la comodidad del lector.

Lema 2.32. *Sea $\mathcal{A}$ tal que cumpla $(\mathcal{A}1) - (\mathcal{A}3)$. Existe un número $p_0 = p_0(n, \sigma, L) > 2$ con la siguiente propiedad. Si $p \in (p_0', p_0)$ y $u \in W_{loc}^{1,p}(\Omega)$ es una solución débil de (1.2) para alguna $G \in L_{loc}^2(\Omega) \cap L_{loc}^p(\Omega)$, entonces*

$$\int_{B_0} |Du|^p \leq C\left(\varrho^p + \frac{1}{|B_0|^{p/n}} \int_{2B_0} |u|^p + \int_{2B_0} |G|^p\right)$$

para toda bola $B_0 \subset 2B_0 \subset \Omega$.

Demostración. Sea B_r un bola de radio r tal que $B_r \subset 2B_r \subset \Omega$. Elegimos radios $r < s < t < 2r$ y una función de corte $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ tal que $\chi_{B_s} \leq \eta \leq \chi_{B_t}$ y $\|\nabla \eta\|_\infty \leq \frac{c}{t-s}$. Si aplicamos el *Lema 2.31* a $w = \eta u$, entonces podemos escribir

$$|Dw|^{p-2} Dw = \mathfrak{E} + \mathfrak{B}$$

con $\mathfrak{E}, \mathfrak{B} \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, ambas con soporte en B_t, $\operatorname{div}(\mathfrak{B}) = 0$, $\operatorname{curl}(\mathfrak{E}) = 0$, y mas aún

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{E}\|_{L^{p'}(B_t)} &\leq C \|Dw\|_{L^p(B_t)}^{p-1}, \\ \|\mathfrak{B}\|_{L^{p'}(B_t)} &\leq C \text{ máx}\{p-2, p'-2\} \|Dw\|_{L^p(B_t)}^{p-1}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

De $\operatorname{curl}(\mathfrak{E}) = 0$ y $1 < p' < \infty$ sabemos que existe $\varphi \in W_0^{1,p'}(B_t)$ tal que $\mathfrak{E} = D\varphi$. Ahora, testamos (1.2) contra φ y obtenemos

$$\int_{B_t} \langle \mathcal{A}(x, Du), Dw \rangle |Dw|^{p-2} = \int_{B_t} \langle \mathcal{A}(x, Du), \mathfrak{B} \rangle + \int_{B_t} \langle G, D\varphi \rangle$$

y por lo tanto

$$\int_{B_t} \langle \mathcal{A}(x,Du), Du\rangle\, \eta |Dw|^{p-2} = -\int_{B_t} \langle \mathcal{A}(x,Du), D\eta\rangle\, u\, |Dw|^{p-2} + \int_{B_t} \langle \mathcal{A}(x,Du), \mathfrak{B}\rangle + \int_{B_t} \langle G, D\varphi\rangle.$$

Usando ($\mathcal{A}1$), ($\mathcal{A}3$) y las propiedades de η, obtenemos

$$\sigma \int_{B_s} |Du|^p \le \ell \int_{B_t\setminus B_s} (\varrho + |Du|)\, |D\eta|\, |u|\, |Dw|^{p-2} + \ell \int_{B_t} (\varrho+|Du|)\, |\mathfrak{B}| + \int_{B_t} |G|\, |D\varphi|.$$

Ahora, como $w = \eta u$,la desigualdad de Young nos dice que

$$\int_{B_t\setminus B_s} (\varrho + |Du|)\, |D\eta|\, |u|\, |Dw|^{p-2} \le C(p) \int_{B_t\setminus B_s} |u|^p\, |D\eta|^p + C(p) \int_{B_t\setminus B_s} |Du|^p + C(p)\varrho^p\, |2B_r|$$

También, por la estimación (2.8) y la desigualdad de Young, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{B_t} (\varrho + |Du|)\, |\mathfrak{B}| &\le \|\varrho + |Du|\|_{L^p(B_t)}\, \|\mathfrak{B}\|_{L^{p'}(B_t)} \\
&\le C\ \text{máx}\{p-2, p'-2\}\, \|\varrho + |Du|\|_{L^p(B_t)}\, \|Dw\|^{p-1}_{L^p(B_t)} \\
&\le C\, 2^{p-2}\, \text{máx}\{p-2, p'-2\}\, \|\varrho + |Du|\|_{L^p(B_t)} \left(\|u\, D\eta\|^{p-1}_{L^p(B_t)} + \|\eta\, Du\|^{p-1}_{L^p(B_t)}\right) \\
&\le C(p)\varrho^p\, |2B_r| + C\, 2^{p-2}\, \text{máx}\{p-2, p'-2\}\, \|Du\|^p_{L^p(B_t)} + C(p)\, \|u\, D\eta\|^p_{L^p(B_t)}
\end{aligned}$$

donde C es la constante universal dada por el *Lema 2.31*. Finalmente, también por (2.7) y la desigualdad de Young, logramos que

$$\begin{aligned}
\int_{B_t} |G|\, |D\varphi| &\le \|G\|_{L^p(B_t)}\, \|D\varphi\|_{L^{p'}(B_t)} \\
&\le \varepsilon \|D\varphi\|^{p'}_{L^{p'}(B_t)} + C(\varepsilon, p)\|G\|^p_{L^p(B_t)} \\
&\le C\varepsilon \|Dw\|^p_{L^p(B_t)} + C(\varepsilon,p)\|G\|^p_{L^p(B_t)} \\
&\le C\, 2^{p-1}\varepsilon \|Du\|^p_{L^p(B_t)} + C\, 2^{p-1}\varepsilon \|u\, D\eta\|^p_{L^p(B_t)} + C(\varepsilon,p)\|G\|^p_{L^p(B_t)},
\end{aligned}$$

donde $\varepsilon > 0$ será elegida mas adelante. Uniéndolo todo

$$\begin{aligned}
\sigma \int_{B_s} |Du|^p \le{}& C(p,\ell,\varepsilon) \int_{B_t} |u|^p\, |D\eta|^p + C(p,\ell) \int_{B_t\setminus B_s} |Du|^p + C(p)\varrho^p\, |2B_r| \\
&+ C(\ell)\, 2^{p-2}(\text{máx}\{p-2, p'-2\} + 2\varepsilon)\, \|Du\|^p_{L^p(B_t)} + C(\varepsilon)\|G\|^p_{L^p(B_t)}.
\end{aligned}$$

Sumando $C(p,\ell) \int_{B_s} |Du|^p$ a ambos lados y usando las propiedades de η alcanzamos que

$$\begin{aligned}
(\sigma + C(p,\ell)) \int_{B_s} |Du|^p \le{}& \frac{C(p,\ell,\varepsilon)}{(t-s)^p} \int_{2B_r} |u|^p + C(p)\varrho^p\, |2B_r| \\
&+ \Big(C(p,\ell) + C(\ell)\, 2^{p-2}(\text{máx}\{p-2, p'-2\} + 2\varepsilon \Big)\, \|Du\|^p_{L^p(B_t)} + C(\varepsilon)\|G\|^p_{L^p(B_t)}.
\end{aligned}$$

Arriba, está claro que siempre podemos obtener

$$C(\ell)\, 2^{p-2}(\text{máx}\{p-2, p'-2\} + \varepsilon)\ \le \frac{\sigma}{2},$$

si elegimos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño y p suficientemente cercano a 2. Escribimos esto como $p \in (p_0', p_0)$. Llegados a este punto, podemos usar la iteración dada por el *Lema 2.30* para terminar la prueba. □

El número p_0 fué descrito de manera precisa en [6] cuando $n = s = 2$, y es desconocido en otro caso.

2.4.3. Equivalencia del Sistema Elíptico Lineal con $n = 2$ y la Ecuación de Beltrami Generalizada.

En esta subsección trataremos con *Sistemas en Forma de Divergencia*

$$\operatorname{div}\left(\mathcal{A}\left(x, \nabla u(x)\right)\right) = \operatorname{div} G(x)\,,$$

cuando $n = N = 2$ y el operador $\mathcal{A}(x, \xi)$ es lineal con respecto a la segunda variable. Esto significa que el operador viene definido como $\mathcal{A}(x, \xi) = A(x) \cdot \xi$ donde $A(x)$ es una matriz 2×2. Concretamente veremos como todo *Sistema Lineal en Forma de Divergencia no Homogéneo* puede reescribirse como una *Ecuación de Beltrami Generalizada* donde los coeficientes dependen de la matriz $A(x)$. Para ello, nos basaremos en los resultados dados por K. Astala et. al. en [4, Chapter 16].

Antes de seguir, hemos de introducir el *Operador Estrella de Hodge* $*$, el cual corresponde con un un giro de 90 grados en sentido antihorario. Este operador se define como

$$* = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \text{y cumple que} \quad ** = -Id_{\mathbb{R}^2}\,.$$

Observemos que si identificamos el plano real $\mathbb{R}^2$ con el plano complejo $\mathbb{C}$ mediante la relación $(x, y) = z = x + iy$, entonces *Operador Estrella de Hogde* se indentifica con el operador multiplicación con la unidad imaginaria $i = \sqrt{-1}$. Además, este operador envía campos de rotacional nulo en campos de divergencia nula.

A partir de ahora, supondremos que la matriz $A(z)$ está definida como

$$A(z) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

y la función $G \in L^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ como $G(x) = (G_1(x), G_2(x))$. Además, dado que tratamos con operadores elípticos y lineales en la segunda variable, la condición de elipticidad puede reescribirse como

$$\langle\, A\,(\,x\,)\;\xi\,,\,\xi\,\rangle\; >\; 0$$

para toda $|\xi| = 1$. Con estas indicaciones, asumiremos que $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ es una solución del sistema

$$\operatorname{div}\left(A(x) \cdot \nabla u(x)\right) = \operatorname{div} G(x),\,. \tag{2.10}$$

Gracias a las propiedades del operador $*$, sabemos que ha de existir otra función $v \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\operatorname{div}\left(*A^{-1} * \nabla v \right) = \operatorname{div}\left(*A^{-1} G \right)\,. \tag{2.11}$$

Efectivamente, si $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ es una solución del sistema (2.10), entonces podemos actuar como sigue

$$\operatorname{div}\left(A \nabla u\right) = \operatorname{div} G \implies \operatorname{div}\left(A \nabla u - G\right) = 0$$

y por el Lema de Poincaré, ha de existir un campo $v \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ tal que $A\nabla u - G = *\nabla v$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} \nabla u = A^{-1} * \nabla v + A^{-1} G &\implies *\nabla u = *A^{-1} * \nabla v + *A^{-1} G \\ &\implies *\nabla u - *A^{-1} G = *A^{-1} \nabla v\,. \end{aligned}$$

Y ya, aplicando div en ambos lados y usando que $\operatorname{div} *\nabla = 0$, alcanzamos el sistema (2.11). Además, también sabemos que v cumple que

$$\nabla v \,=\, *\,A\,\nabla u \,-\, *\,G\,.$$

A continuación, veremos que la *Ecuación de Beltrami Generalizada* genera a la pareja de sistemas elípticos conjugados (2.10)-(2.11). Posteriormente veremos que también ocurre el recíproco. Supongamos que tenemos dos coeficientes de Beltrami $\mu,\,\nu \in L^\infty_c(\mathbb{C})$ con $\| |\mu| + |\nu| \|_\infty < 1$, un término independiente $h \in L^1_{loc}(\mathbb{C})$ y $f \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{C})$ una solución de la *Ecuación de Beltrami Generalizada*

$$\overline{\partial} f \,=\, \mu\,\partial f \,+\, \nu\,\overline{\partial f} \,+\, h\,.$$

Si etiquetamos $f = u + iv$ y reescribimos la *Ecuación de Beltrami Generalizada* mediante la identificación $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, tenemos

$$(\,\nabla u \,+\, *\nabla v\,) \,-\, \mu\,\mathbf{C}\,(\,\nabla u \,-\, *\nabla v\,) \,-\, \nu\,(\,\nabla u \,-\, *\nabla v\,) \,=\, 2\,h$$

donde $*$ es la representación matricial del producto por la unidad imaginaria i. Es decir, el *Operador Estrella de Hodge*. Ahora, aislamos los términos ∇u y $*\,\nabla v$ para poder escribir

$$(\,Id \,-\, \mu\,\mathbf{C} \,-\, \nu\,Id\,)\,\nabla u \,+\, (\,Id \,+\, \mu\,\mathbf{C} \,+\, \nu\,Id\,)\,*\,\nabla v \,=\, 2\,h\,. \tag{2.12}$$

A partir de esta última línea, alcanzaremos los dos sistemas en forma divergencia, uno para u y otro para v. Comenzamos con el sistema correspondiente a u. Aplicando $(Id + \mu\mathbf{C} + \nu Id)^{-1}$ a ambos miembros de (2.12) obtenemos que

$$(\,Id \,+\, \mu\,\mathbf{C} \,+\, \nu\,Id\,)^{-1}\,(\,Id \,-\, \mu\,\mathbf{C} \,-\, \nu\,Id\,)\,\nabla u \,+\, *\nabla v \,=\, (\,Id \,+\, \mu\,\mathbf{C} \,+\, \nu\,Id\,)^{-1}\,(\,2\,h\,)\,.$$

Ahora, tomando div a ambos miembros de la última línea y usando que div $*\nabla \,=\, 0$, vemos finalmente que

$$\mathrm{div}\,(\,A\,\nabla u\,) \,=\, \mathrm{div}\,G$$

donde

$$\begin{cases} A \,:=\, (\,Id \,+\, \mu\,\mathbf{C} \,+\, \nu\,Id\,)^{-1}\,(\,Id \,-\, \mu\,\mathbf{C} \,-\, \nu\,Id\,) \\ G \,:=\, (\,Id \,+\, \mu\,\mathbf{C} \,+\, \nu\,Id\,)^{-1}\,(\,2\,h\,)\,. \end{cases}$$

Por otro lado, aplicando $*\,(Id - \mu\mathbf{C} - \nu Id)^{-1}$ a ambos miembros de (2.12) tenemos que

$$*\nabla u \,+\, *\,(\,Id \,-\, \mu\,\mathbf{C} \,-\, \nu\,Id\,)^{-1}\,(\,Id \,+\, \mu\,\mathbf{C} \,+\, \nu\,Id\,)\,*\,\nabla v \,=\, *\,(\,Id \,-\, \mu\,\mathbf{C} \,-\, \nu\,Id\,)^{-1}\,h\,.$$

Ya, sin mas que aplicar div a ambos miembros de la línea anterior vemos finalmente que

$$\mathrm{div}\left(\,*\,A^{-1}\,*\,\nabla v\,\right) \,=\, \mathrm{div}\left(\,*\,A^{-1}\,G\,\right)$$

como ya indicamos al inicio de la subsección. Además, gracias a la condición de elipticidad $\| |\mu| + |\nu| \|_\infty < 1$, tenemos garantizado que los operadores inversos que han aparecido anteriormente están bien definidos. Mas áun, también tendremos que si los coeficientes μ y ν tienen derivadas medibles, entonces las entradas de la matriz A también tienen derivadas medibles. Y evidentemente, la integrabilidad de los términos independientes G y h son equivalentes.

Llegados a este punto, escribiremos A como una matriz y no en términos de dos operadores como hemos hecho anteriormente. Un simple cálculo nos demuestra que

$$(\,Id \,+\, \mu\,\mathbf{C} \,+\, \nu\,Id\,)^{-1} \,=\, \frac{1}{|1+\nu|^2 - |\mu|^2}\,(\,Id \,-\, \mu\,\mathbf{C} \,+\, \overline{\nu}\,Id\,)\,.$$

De esta forma aseguramos que

$$A \,:=\, \frac{1}{|1+\nu|^2 - |\mu|^2}\,(\,Id \,-\, \mu\,\mathbf{C} \,+\, \overline{\nu}\,Id\,)\,(\,Id \,-\, \mu\,\mathbf{C} \,-\, \nu\,Id\,)\,.$$

Interpretando la igualdad anterior en forma matricial tenemos que

$$\begin{aligned}
A :=& \frac{1}{|1+\nu|^2-|\mu|^2}\left(\begin{bmatrix} 1+\mathrm{Re}\nu & \mathrm{Im}\,\nu \\ -\mathrm{Im}\,\nu & 1+\mathrm{Re}\nu \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathrm{Re}\mu & -\mathrm{Im}\,\mu \\ \mathrm{Im}\,\mu & \mathrm{Re}\mu \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) \\
&\left(\begin{bmatrix} 1-\mathrm{Re}\nu & \mathrm{Im}\,\nu \\ -\mathrm{Im}\,\nu & 1-\mathrm{Re}\nu \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathrm{Re}\mu & -\mathrm{Im}\,\mu \\ \mathrm{Im}\,\mu & \mathrm{Re}\mu \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) \\
=& \frac{1}{|1+\nu|^2-|\mu|^2}\left(\begin{bmatrix} 1+\mathrm{Re}\nu & \mathrm{Im}\,\nu \\ -\mathrm{Im}\,\nu & 1+\mathrm{Re}\nu \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathrm{Re}\mu & \mathrm{Im}\,\mu \\ \mathrm{Im}\,\mu & -\mathrm{Re}\mu \end{bmatrix}\right) \\
&\left(\begin{bmatrix} 1-\mathrm{Re}\nu & \mathrm{Im}\,\nu \\ -\mathrm{Im}\,\nu & 1-\mathrm{Re}\nu \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathrm{Re}\mu & \mathrm{Im}\,\mu \\ \mathrm{Im}\,\mu & -\mathrm{Re}\mu \end{bmatrix}\right) \\
=& \frac{1}{|1+\nu|^2-|\mu|^2}\begin{bmatrix} 1+\mathrm{Re}\nu-\mathrm{Re}\mu & \mathrm{Im}\,\nu-\mathrm{Im}\,\mu \\ -\mathrm{Im}\,\nu-\mathrm{Im}\,\mu & 1+\mathrm{Re}\nu+\mathrm{Re}\mu \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1-\mathrm{Re}\nu-\mathrm{Re}\mu & \mathrm{Im}\,\nu-\mathrm{Im}\,\mu \\ -\mathrm{Im}\,\nu-\mathrm{Im}\,\mu & 1-\mathrm{Re}\nu+\mathrm{Re}\mu \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Tras realizar la multiplicación de matrices de la última línea y despejar adecuadamente logramos ver finalmente que

$$A := \frac{1}{|1+\nu|^2-|\mu|^2}\begin{bmatrix} |1-\mu|^2-|\nu|^2 & 2\,\mathrm{Im}\,(\nu-\mu) \\ -2\,\mathrm{Im}\,(\nu+\mu) & |1+\mu|^2-|\nu|^2 \end{bmatrix}. \tag{2.13}$$

O lo que es equivalente

$$a_{11} = \frac{|1-\mu|^2-|\nu|^2}{|1+\nu|^2-|\mu|^2} \qquad a_{12} = \frac{2\,\mathrm{Im}(\nu-\mu)}{|1+\nu|^2-|\mu|^2}$$

$$a_{21} = \frac{-2\,\mathrm{Im}(\nu+\mu)}{|1+\nu|^2-|\mu|^2} \qquad a_{22} = \frac{|1+\mu|^2-|\nu|^2}{|1+\nu|^2-|\mu|^2}\,.$$

Tal y como podemos ver en [4, Theorem 16.1.6.]. Ahora usaremos la identificación de $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ y que toda matriz 2×2 puede descomponerse de forma única en una parte conforme y otra anticonforme. Es decir, $A = A_+ Id + A_-\mathbf{C}$ donde A_+ y A_- son números complejos. Así, podemos ver que para todo $\xi \in \mathbb{C}$ con $|\xi| = 1$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle A\xi, \xi\rangle &= \mathrm{Re}\big((A\xi)\cdot\overline{\xi}\big) = \mathrm{Re}\big(\big(A_+\xi + A_-\overline{\xi}\big)\cdot\overline{\xi}\big) \\
&= \mathrm{Re}\Big(A_+|\xi|^2 + A_-\overline{\xi}^2\Big) = \mathrm{Re}(A_+) + \mathrm{Re}\Big(A_-\overline{\xi}^2\Big) \\
&\geq \mathrm{Re}(A_+) - |A_-|\,.
\end{aligned}$$

Pretendemos ver que $\langle A\xi, \xi\rangle > 0$ para todo $\xi \in \mathbb{C}$, lo que por los cálculos anteriores es equivalente a

$$\mathrm{Re}(A_+) > |A_-|\,. \tag{2.14}$$

Por otro lado, de la expresión (2.13), podemos deducir fácilmente que

$$A_+ = \frac{1+|\mu|^2-|\nu|^2-2i\,\mathrm{Im}(\nu)}{|1+\nu|^2-|\mu|^2} \quad \text{y} \quad A_- = \frac{-2\mu}{|1+\nu|^2-|\mu|^2}\,.$$

Así, (2.14) se reescribe en términos de μ y ν como

$$\frac{1+|\mu|^2-|\nu|^2}{|1+\nu|^2-|\mu|^2} > \frac{2\,|\mu|}{|1+\nu|^2-|\mu|^2}\,.$$

O lo que es lo mismo

$$\frac{(|\mu|-1)^2-|\nu|^2}{|1+\nu|^2-|\mu|^2} \;=\; \frac{(|\mu|-1-|\nu|)\,(|\mu|-1+|\nu|)}{(|1+\nu|-|\mu|)\,(|1+\nu|+|\mu|)} \;>\; 0\,.$$

Dado que por hipótesis $|\mu|+|\nu|<1$, entonces $1>\frac{|\mu|}{1-|\nu|}\geq\frac{|\mu|}{|1+\nu|}$ y así los dos términos del denominador son positivos. Evidentemente, los dos términos del numerador son negativos y con ello vemos que la matriz A es elíptica como queríamos demostrar.

Ahora veremos como a partir del sistema

$$\mathrm{div}\,(\,A\,\nabla u\,) \;=\; \mathrm{div}\,G\,,$$

con A una matriz elíptica, recuperamos la ecuación (1.5) donde $f=u+iv$ con v tal que

$$\nabla v \;=\; *\,A\,\nabla u \;-\; *\,G\,.$$

Antes de seguir, necesitamos ver que $\det{(Id+A)}>0$. Efectivamente, por un lado tenemos que $\langle\xi,\xi\rangle>0$ y por el otro, tenemos la condición de elipticidad $\langle A\xi,\xi\rangle>0$. Por lo tanto sumando ambas expresiones tenemos que

$$\langle\,(\,Id\,+\,A\,)\,\xi\,,\,\xi\,\rangle \;>\; 0 \quad \text{para toda } \xi\in\mathbb{R}^2\,.$$

En particular para todos los autovectores de la matriz $Id{+}A$. Esto nos asegura que $\det{(Id+A)}>0$.

De la expresión $\nabla v=*A\nabla u-*G$ podemos deducir por un lado que

$$\nabla u \;-\; *\,\nabla v \;=\; (\,Id\,+\,A\,)\;\nabla u \;-\; G \tag{2.15}$$

y por el otro que

$$-\,\nabla u \;-\; *\,\nabla v \;=\; -\,(\,Id\,-\,A\,)\;\nabla u \;-\; G\,. \tag{2.16}$$

La expresión (2.15) se reescriben como

$$(\,Id\,+\,A\,)^{-1}\,(\,\nabla u\,-\,*\,\nabla v\,) \;=\; \nabla u \;-\; (\,Id\,+\,A\,)^{-1}\,G \tag{2.17}$$

donde hemos usado que $\det(Id+A)>0$ para garantizar que $(Id+A)^{-1}$ está bien definida. Aplicando $(Id-A)$ en (2.17) tenemos

$$(\,Id\,-\,A\,)\,(\,Id\,+\,A\,)^{-1}\,(\,\nabla u\,-\,*\,\nabla v\,) \;=\; (\,Id\,-\,A\,)\,\nabla u \;-\; (\,Id\,-\,A\,)\;(\,Id\,+\,A\,)^{-1}\,G\,.$$

Donde podemos usar (2.16) para alcanzar

$$(\,Id\,-\,A\,)\,(\,Id\,+\,A\,)^{-1}\,(\,\nabla u\,-\,*\,\nabla v\,) \;=\; \nabla u \,+\, *\,\nabla v \,-\, G \,-\, (\,Id\,-\,A\,)\;(\,Id\,+\,A\,)^{-1}\,G\,.$$

Además, dado que $f=u+iv$, la última línea puede leerse como

$$(\,Id\,-\,A\,)\,(\,Id\,+\,A\,)^{-1}\left(2\,\overline{\partial f}\right) \;=\; 2\,\overline{\partial} f \,-\, G \,-\, (\,Id\,-\,A\,)\;(\,Id\,+\,A\,)^{-1}\,G\,.$$

Y equivalentemente

$$2\,\overline{\partial} f \;=\; (\,Id\,-\,A\,)\,(\,Id\,+\,A\,)^{-1}\left(2\,\overline{\partial f}\right) \,+\, G \,+\, (\,Id\,-A\,)\,(\,Id\,+\,A\,)^{-1}\,G\,. \tag{2.18}$$

Evidentemente, los valores de μ y ν saldrán de la expresión $(Id-A)(Id+A)^{-1}$. Para proceder a calcular dicho producto, volveremos a usar la descomposición conforme y anticonforme de la matriz A. Sean a y b dos números complejos tales que $A = aId + b\mathbf{C}$. En tal caso, $\det(Id + A) = \det\left((1+a)Id + b\mathbf{C}\right) = |1+a|^2 - |b|^2 > 0$. Entonces, podemos ver que

$$\begin{aligned}
(\,Id\,-\,A\,)\,(\,A\,+\,Id\,)^{-1} &= (\,(1-a)\,Id\,-\,b\,\mathbf{C}\,)\,(\,(1+a)\,Id\,+\,b\,\mathbf{C}\,)^{-1} \\
&= \frac{(\,(1-a)\,Id\,-\,b\,\mathbf{C}\,)\,(\,(1+\overline{a})\,Id\,-\,b\,\mathbf{C}\,)}{|1+a|^2-|b|^2} \\
&= \frac{1-|a|^2-2i\,\mathrm{Im}(a)+|b|^2}{|1+a|^2-|b|^2}\,Id + \frac{-2b}{|1+a|^2-|b|^2}\,\mathbf{C}\,.
\end{aligned}$$

Así, si definimos

$$\nu \,:=\, \frac{1-|a|^2-2i\,\mathrm{Im}(a)+|b|^2}{|1+a|^2-|b|^2} \quad \text{y} \quad \mu \,:=\, \frac{-2b}{|1+a|^2-|b|^2}\,,$$

la expresión (2.18) se traduce como

$$2\,\overline{\partial} f \;=\; \mu\, 2\,\partial f \;+\; \nu\, 2\,\overline{\partial f} \;+\; 2\,h\,,$$

donde

$$2h \;:=\; (\,Id \,+\, \nu\, Id \,+\, \mu\,\mathbf{C}\,)\,G\,.$$

Lo que concuerda con los pasos que dimos en la dirección contraria.

Para terminar, solo nos queda ver que $\langle A\xi, \xi\rangle > 0$ para toda $\xi \in \mathbb{R}^2$ implica que $|\mu| + |\nu| < 1$. O lo que es lo mismo, usando la representación conforme y anticonforme, que $\mathrm{Re}(a) > |b|$ implica $|\mu| + |\nu| < 1$. Recordemos las definiciones dadas para μ y ν, que $|1+a|^2 - |b|^2 > 0$ y actuemos como sigue

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(a) > |b| &\iff \frac{2\mathrm{Re}(a)}{|1+a|^2-|b|^2} > \frac{2|b|}{|1+a|^2-|b|^2} = |\mu| \\
&\iff 1 > |\mu| + 1 - \frac{2\mathrm{Re}(a)}{|1+a|^2-|b|^2} = |\mu| + \frac{1+|a|^2-|b|^2}{|1+a|^2-|b|^2} \\
&\iff 1 > |\mu| + |\nu| + \frac{1+|a|^2-|b|^2-|1-|a|^2-2i\,\mathrm{Im}(a)+|b|^2|}{|1+a|^2-|b|^2}\,.
\end{aligned}$$

De esta forma, si vemos que el último sumando es positivo, habremos conseguido ver la condición de elipticidad $|\mu| + |\nu| < 1$ de la *Ecuación de Beltrami Generalizada*. Efectivamente, dicho término es positivo ya que

$$1+|a|^2-|b|^2 > \left|1-|a|^2-2i\,\mathrm{Im}(a)+|b|^2\right|$$

si y solo si

$$\left(1+|a|^2-|b|^2\right)^2 > \left|1-|a|^2+|b|^2\right|^2 + |2i\,\mathrm{Im}(a)|^2\,.$$

Desarrollando los cuadrados y despejando adecuadamente, vemos que esto último es equivalente a

$$4|a|^2 - 4\left(\mathrm{Im}(a)\right)^2 = 4\left(\mathrm{Re}(a)\right)^2 > 4|b|^2$$

cosa que sabemos cierta. Con esto concluimos la equivalencia entre la *Ecuación de Beltrami Generalizada* con un sistema elíptico y lineal dado en forma de divergencia con $n = 2$.

Observemos que formalmente solo hemos demostrado que toda *Ecuación de Beltrami Generalizada Degenerada* (es decir con $\||\mu| + |\nu|\|_\infty < 1$ y no con $\||\mu| + |\nu|\|_\infty \leq k < 1$) es equivalente a un sistema elíptico lineal dado en forma de divergencia con $n = 2$ y degenerado (es decir con $\langle A\xi, \xi\rangle > 0$ y no con $\langle A\xi, \xi\rangle > \lambda|\xi|^2$), nuestros cálculos demuestran también la equivalencia entre los casos no degenerados aunque sin determinar la dependencia entre k y α. Para conocer la dependencia entre k y λ de los problemas no degenerados, se requiere de un estudio un poco mas cuidadoso que el dado por nuestros cálculos que hemos preferido omitir ya que se alejan de nuestros propósitos.

Antes de concluir la subsección, destacamos que a partir de la matriz A podemos deducir las siguiente propiedades en el tránsito entre el sistema lineal dado en forma de divergencia y la *Ecuación de Beltrami Generalizada*.

1. A es simétrica si y solamente si ν tiene imagen real. En este caso tenemos

$$\nu = \frac{1 - \det A}{\det(I + A)}\,.$$

2. A tiene determinante 1 si y solo si ν es puramente imaginaria.

3. A es simétrica con determinante 1 si y solamente si $\nu = 0$.

4. A es diagonal $\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$ si y solamente si μ, ν tienen imagen real. En este caso

$$\mu = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{(1 + \sigma_1)(1 + \sigma_2)} \quad \text{y} \quad \nu = \frac{1 - \sigma_2\sigma_1}{(1 + \sigma_1)(1 + \sigma_2)}\,.$$

5. A es isotrópica (es decir, $A(z) = \sigma(z)I$ con $\sigma(z) \in \mathbb{R}$)) si y solamente si $\mu = 0$ y $\nu \in \mathbb{R}$. En este caso recuperamos la ecuación

$$\overline{\partial} f - \frac{1 - \sigma}{1 + \sigma}\overline{\partial f} = ah + b\overline{h}\,.$$

Capítulo 3

Resultados tipo Lema de Weyl.

En este capítulo estudiaremos las soluciones de la *Ecuación de Beltrami Generalizada*

$$\overline{\partial} f = \mu \partial f + \nu \overline{\partial f} + h$$

cuando los coeficientes y el término independiente pertenecen a distintas clases de Sobolev $W^{1,p}_c(\mathbb{C})$. Observemos que si μ, ν, $h = 0$, entonces estaremos en el caso de ecuación de Cauchy-Riemann de la que conocemos el *Lema de Weyl*. Este lema nos asegura que si $\mathcal{H}$ es una distribución tal que $\overline{\partial}\mathcal{H}\,(\varphi) = 0$ para toda función test $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{C})$, entonces $\mathcal{H}$ coincide con una función holomorfa. En particular, esto nos dice que toda solución distribucional de la ecuación de Cauchy-Riemann es fuerte. Nuestro esfuerzo se centrará en extender, a la *Ecuación de Beltrami Generalizada*, este resultado de automejora de las soluciones. Para ello, lo primero que debemos hacer dar sentido a la *Distribución de Beltrami Generalizada*

$$\left(\overline{\partial} - \mu\partial - \nu\mathbf{C}\partial\right) T = \partial T - \mu \partial T - \nu \overline{\partial T}\,.$$

Evidentemente, esta distribución podría no tener sentido ya que las funciones acotadas no son siempre multiplicadores de distribuciones. Sin embargo, tal y como hemos detallado en *Definición 2.26*, si exigimos que los coeficientes sean Sobolev y que la distribución sea integrable, podemos encontrar la manera de definir la distribución de Beltrami. Siempre que tenga sentido, dada una función f y una función test φ, se puede escribir

$$\left\langle \left(\overline{\partial} - \mu\partial - \nu\mathbf{C}\partial\right) f\,,\,\varphi\right\rangle = -\left\langle\, f\,,\,\partial\varphi\,\right\rangle + \left\langle\, f\,,\varphi\overline{\partial\mu}\,\right\rangle + \left\langle\, \overline{f}\,,\varphi\partial\overline{\nu}\,\right\rangle + \left\langle\, f\,,\,\overline{\mu}\overline{\partial}\varphi\,\right\rangle + \left\langle\, \overline{f}\,,\,\overline{\nu}\partial\varphi\,\right\rangle \tag{3.1}$$

donde hemos consideramos el producto $\langle\, f\,,\,g\,\rangle = \operatorname{Re}\int f\overline{g}$ (tal y como explicamos en la *Subsección 2.3.1*). Cuando μ, $\nu \in W^{1,p}_c(\mathbb{C})$ y $f \in L^q_{loc}(\mathbb{C})$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, la expresión (3.1), tiene sentido. En lo que sigue, diremos que $\overline{\partial} f - \mu\partial f - \nu\overline{\partial f}$ es la derivada distribucional de Beltrami de la función f y viene dada como

$$\left\langle \overline{\partial} f \,-\, \mu\,\partial f \,-\, \nu\,\overline{\partial f}\,,\,\varphi \right\rangle \,=\, -\langle\, f\,,\,\partial\varphi\rangle \,+\, \left\langle\, f\,,\overline{\partial}\,(\,\overline{\mu}\,\varphi\,)\,\right\rangle \,+\, \left\langle\,\overline{f}\,,\,\partial\,(\,\overline{\nu}\,\varphi\,)\,\right\rangle\,.$$

Esta definición toma sentido para toda función test φ infinitamente diferenciable y con soporte compacto. Efectivamente, los términos del lado derecho están bien entendidos. Definimos las soluciones distibucionales de (1.6) como aquellas funciones f para las que

$$\left(\overline{\partial} - \mu\partial - \nu\mathbf{C}\partial\right) f = 0$$

como distribución. En principio, las soluciones distribucionales no son cuasiregulares (ni débilmente cuasiregulares). Nuestro primer objetivo es saber, bajo la condición μ, $\nu \in W^{1,p}_c(\mathbb{C})$, cuando una solución distribucional es cuasiregular (o débilmente cuasiregular). A posteriori, ya precisaremos la regularidad máxima que obtenemos.

La primera referencia sobre esta cuestión la encontramos gracias a A. Clop et. al. en [11] en el caso $\nu = 0$ y $\mu \in W^{1,p}_c(\mathbb{C})$. A fin de enunciar sus resultados en el caso $\nu = 0$ introducimos los valores

$$\frac{1}{p_0} := \frac{1}{1+k} - \frac{1}{p} \quad \text{y} \quad \frac{1}{q_0} := \frac{k}{1+k} + \frac{1}{p}$$

con los que trabajaremos a lo largo de este capítulo y el siguiente. Con estos valores, en [11], obtuvieron el siguiente resultado.

Teorema 3.1. *[11] Sea $\mu \in W^{1,p}_c(\mathbb{C}) \cap L^\infty(\mathbb{C})$ con $\|\mu\|_\infty = k < 1$ y $1 + k < p$. Sea $f \in L^r_{loc}(\mathbb{C})$ con $\frac{r}{r-1} < p$ una solución distribucional de la* Ecuación de Beltrami Homogénea

$$\overline{\partial} f \;=\; \mu\, \partial f\,.$$

Se cumple

(1) Si $p > 2$, entonces $f \in W^{2,p}_{loc}(\mathbb{C})$.

(2) Si $p = 2$, entonces $f \in W^{2,q}_{loc}(\mathbb{C})$ para toda $q < 2$.

(3) Si $1 + k < p < 2$ y $r > p_0$, entonces $f \in W^{2,q}$ para toda $q < q_0$.

En los tres casos, f es cuasiregular.

Mas aún, cuando $p = 2$, el teorema anterior es óptimo en dos sentidos. El primer sentido es que no podemos esperar que las soluciones pertenezcan a $W^{2,2}_{loc}(\mathbb{C})$, tal y como nos demuestra la aplicación cuasiregular definida, en un entorno del origen, como

$$f = z\,(1 - \log|z|) \notin W^{2,2}_{loc}(\mathbb{C})$$

cuyo coeficiente de Beltrami es

$$\mu = \frac{z}{\bar{z}} \frac{1}{2\log|z| - 1} \in W^{1,2}_c(\mathbb{C})\,.$$

El segundo es que no podemos partir de $f \in L^2_{loc}(\mathbb{C})$ y lograr la cuasiregularidad. (Ver *Ejemplo 3.14*). Además, es remarcable que la regularidad máxima de las soluciones presenta un salto en $p = 2$ que se ve reflejado por la aparición de las constantes p_0 y q_0 cuando $p < 2$. Observemos que

$$\lim_{p\to 2^-} p_0 = 2\frac{1+k}{1-k} = 2K \quad \textbf{y} \quad \lim_{p\to 2^-} q_0 = \frac{3k+1}{2k+2} = \frac{2K}{2K-1} \quad \text{donde} \quad K = \frac{1+k}{1-k}\,.$$

El siguiente ejemplo nos demuestra que la restricción $r > p_0$ que aparece en el caso $p < 2$ es genuina. Es decir, veremos que existe un coeficiente elíptico $\mu \in W^{1,p}$ para todo $p < 2$ y una función $f \in L^r_{loc}(\mathbb{C})$ con $\frac{r}{r-1} < p$ que resuelve (en el sentido distribucional) la ecuación $\mathbb{C}$-lineal (2.4) para esta μ y f no es K-cuasiregular.

Ejemplo 3.2. *Fijado un número real $k < 1$, definimos $K = \frac{1+k}{1-k}$ y f como*

$$f(z) \;=\; \frac{1}{z\;|z|^{\frac{1}{K}-1}}\,.$$

Tenemos que

(1) $f \in L^r_{loc}$ para toda $r < 2K$ pero no para $r = 2K$.

(2) f es solución, en el sentido de las distribuciones, de la ecuación $\overline{\partial} f - \mu \partial f = 0$ donde

$$\mu = \frac{1-K}{1+K}\frac{\overline{z}}{z} \in W^{1,p}_{loc} \quad \textit{para toda} \quad p < 2\,.$$

(3) $f \in W^{1,s}_{loc}$ para toda $s < \frac{2K}{K+1}$ pero no para $s = \frac{2K}{K+1}$.

En particular, f es débilmente K-cuasiregular pero no es K-cuasiregular.

Veamos como en [11] se prueba el *Teorema 3.1*. En un primer momento, demuestran el resultado para la solución cuasiconforme $\phi \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$. A posteriori, extienden el resultado al resto de soluciones. Para ello definen $h = f \circ \phi^{-1}$ y comprueban que

$$\left\langle \overline{\partial} h\,,\, \varphi \right\rangle = \left\langle \overline{\partial} f - \mu \partial f\,,\, \varphi(\phi)\,\partial\phi \right\rangle .$$

Así, siempre y cuando la distribución $\overline{\partial} f - \mu\partial f$ extienda a una clase de funciones donde la función $\varphi(\phi)\partial\phi$ está bien definida, podremos asegurar que $\overline{\partial} h = 0$ y por lo tanto h es una función holomorfa. Entonces, $f = h \circ \phi$ es cuasiregular tal y como nos asegura el Teorema de Factorización de Stoilov. Así, a fin de alcanzar el resultado, han de solventar el problema de extender la distribución de Beltrami

$$\left\langle \overline{\partial} f - \mu\,\partial f\,,\, \varphi \right\rangle = -\left\langle f\,,\, \partial\varphi \right\rangle + \left\langle f\,,\overline{\partial}\,(\overline{\mu}\,\varphi\,) \right\rangle$$

a una clase mas grande que $C^\infty_c(\mathbb{C})$. Para ello distinguen entre los valores p del exponente $W^{1,p}$, donde pertenece el coeficiente. Si $p > 2$, la distribución se extiende al espacio $W^{1,p}_c(\mathbb{C})$ ya que es un álgebra de Banach, es decir

$$\|fg\|_{W^{1,p}(\mathbb{C})} \leq \|f\|_{W^{1,p}(\mathbb{C})}\|g\|_{W^{1,p}(\mathbb{C})}\,.$$

Si $p = 2$, la acotación del coeficiente μ les permite tomar funciones test en $W^{1,s}_c(\mathbb{C})$ para toda $s < 2$. En ambos casos ($p \geq 2$) no es difícil comprobar que $\varphi\,(\phi)\,\partial\phi$ pertenece a la clase donde extienden el operador. Con ello, prueban los dos primeros apartados del *Teorema 3.1*. Cuando $p < 2$, la situación se complica ya que el operador de Beltrami no extiende a $W^{1,p}_c(\mathbb{C})$ y han de recurrir a una clase mas pequeña. Para cada $1 < q < p < 2$ definen la clase de funciones $E^{p,q}_{loc}(\mathbb{C})$ como

$$E^{p,q}_{loc}(\mathbb{C}) = W^{1,q}_{loc}(\mathbb{C}) \cap L^{\frac{pq}{p-q}}_{loc}(\mathbb{C})\ .$$

Observemos que $p < 2$ implica que $\frac{2q}{2-q} < \frac{pq}{p-q}$ y por lo tanto $E^{p,q}_{loc}$ es un subconjunto propio de $W^{1,q}_{loc}$. Si $p = 2$ entonces la clase $E^{2,q}_{loc}(\mathbb{C})$ coincide con el espacio $W^{1,q}_{loc}(\mathbb{C})$. Para esta clase, los autores demuestran el siguiente resultado que daremos en el ámbito de la ecuación generalizada. Su demostración sigue las mismas líneas que en el caso $\nu = 0$.

Lema 3.3. *[11, Lemma 17] Fijemos $1 < q < p < 2$. Supongamos que tenemos un par de coeficientes de Beltrami μ, $\nu \in W^{1,p}_c(\mathbb{C})$ y una función $f \in L^{\frac{q}{q-1}}_{loc}(\mathbb{C})$. Entonces,*

(1) Las aplicaciones $\varphi \to \mu\varphi$ y $\varphi \to \nu\varphi$ son contínuas en $E^{p,q}_{loc}(\mathbb{C})$.

(2) Las derivadas distribucionales $\overline{\partial} f$, ∂f y $\overline{\partial f}$ actúan continuamente sobre funciones pertenecientes a $E^{p,q}(\mathbb{C})$ con soporte compacto.

(3) La distribución $\overline{\partial} f - \mu\partial f - \nu\overline{\partial f}$ actúa continuamente sobre funciones de $E^{p,q}$ con soporte compacto.

Para terminar de demostrar el *Teorema 3.1*, solo queda ver que si $p < 2$ entonces $\varphi(\phi)\,\partial\phi \in E^{p,q}(\mathbb{C})$ para alguna q adecuada. Lamentablemente, este procedimiento no nos permite ampliar el *Teorema 3.1* a la *Ecuación de Beltrami Generalizada Homogénea*. Efectivamente, para esta ecuación la factorización de Stoilov no se realiza mediante aplicaciones holomorfas, sino mediante soluciones cuasiregulares de la *Ecuación de Beltrami Reducida Homogéna*, es decir $\nu = -\mu$. Por ello, a fin de alcanzar el resultado para la ecuación generalizada, debemos buscar otros caminos alternativos.

En un primer momento nos apoyaremos en la invertibilidad de los operadores de Beltrami

$$Id - \mu\mathcal{B} - \nu\overline{\mathcal{B}} : X(\mathbb{C}) \,\to\, X(\mathbb{C})\,,$$

los cuales han jugado un papel esencial en el estudio de las soluciones cuasiregulares. En [14] se prueba que si μ y ν satisfacen ciertas condiciones, entonces el operador de Beltrami es invertible en ciertos espacios de Besov $B^{p,q}_{\alpha}(\mathbb{C})$ y de Triebel-Lizorking $F^{p,q}_{\alpha}(\mathbb{C})$ con $\alpha p > 2$. Lo que nos propondremos es estudiar la invertibilidad, en ciertos espacios de Sobolev, del operador de Beltrami cuando μ y ν pertenecen a $W^{1,p}(\mathbb{C}) \cap L^{\infty}_c(\mathbb{C})$ con $p \leq 2$. Le dedicaremos la primera sección del capítulo a este estudio. Una vez sea alcanzada la invertibilidad podremos obtener la existencia de segundas derivadas para las soluciones cuasiregulares de la ecuación (1.6). Lamentablemente, cuando $p < 2$ no alcanzaremos la invertibilidad para cualquier pareja de coeficientes μ, ν y solo la tendremos para aquellas parejas que satisfacen cierta condición que desvelaremos mas adelante. Por ello, a fin de alcanzar la automejora al resto de parejas de coeficientes, tendremos que idear otro camino alternativo. Este consistirá en estudiar la *Ecuación de Beltrami Conjugada Homogénea*

$$\overline{\partial} f \,=\, \nu\, \overline{\partial f}\,, \tag{3.2}$$

donde el coeficiente de Beltrami $\nu \in L^{\infty}_c(\mathbb{C})$ con $\|\nu\|_\infty = k < 1$ pertenece a un espacio de Sobolev $W^{1,p}_c(\mathbb{C})$ con $1 \leq p \leq \infty$. A esto le dedicaremos la segunda sección del capítulo donde daremos los primeros resultados tipo Weyl. Posteriormente, gracias a los métodos utilizados, extenderemos los resultados a la *Ecuación de Beltrami Generalizada*

$$\overline{\partial} f \,=\, \mu\,\partial f \,+\, \nu\,\overline{\partial f} \,+\, h\,,$$

donde los coeficientes μ, $\nu \in L^{\infty}_c(\mathbb{C})$ satisfacen $\||\mu| + |\nu|\|_\infty = k < 1$ y tienen algún tipo de regularidad Sobolev.

Dividiremos el capítulo bajo el siguiente esquema

- **Sección 3.1 El operador de Beltrami en $E^{p,q}(\mathbb{C})$, $q < p \leq 2$.** En esta seción veremos para que valores p y q el operador de Beltrami $Id - \mu\mathcal{B} - \nu\overline{\mathcal{B}} : E^{p,q}(\mathbb{C}) \to E^{p,q}(\mathbb{C})$ es invertible cuando μ, $\nu \in W^{1,p}_c(\mathbb{C})$. Además veremos que repercusión tiene esta invertibilidad en las soluciones de la *Ecuación de Beltrami Generalizada*.

- **Sección 3.2 La Ecuación de Beltrami Conjugada.** Aquí motivaremos el estudio de esta ecuación dando los resultados ya conocidos sobre la misma. Además veremos bajo que condiciones sobre ν y f alcanzaremos un resultado análogo al *Teorema 3.1*.

- **Sección 3.3 La Ecuación de Beltrami Generalizada.** En esta sección extenderemos los resultados obtenidos en la sección anterior al caso $\mu \neq 0 \neq \nu$. Además, compararemos estos resultados con los ya conocidos sobre *Ecuación de Beltrami y la de Beltrami Conjugada.*

3.1. El Operador de Beltrami en $E^{p,q}(\mathbb{C})$, $q < p \le 2$.

Históricamente, el estudio de la *Ecuación de Beltrami Generalizada*

$$\overline{\partial} f = \mu \partial f + \nu \overline{\partial f} + h$$

ha ido de la mano del estudio del operador de Beltrami $Id - \mu\mathcal{B} - \nu\overline{\mathcal{B}}$. Una referencia básica para este hecho es el artículo de K. Astala, T. Iwaniec y E. Saksman [6]. Allí los autores demuestran que si μ, $\nu \in L^\infty_c(\mathbb{C})$ con $\||\mu| + |\nu|\|_\infty = k < 1$ entonces, el operador

$$Id - \mu\mathcal{B} - \nu\overline{\mathcal{B}} : \ L^p(\mathbb{C}) \to L^p(\mathbb{C})$$

es invertible para toda $p \in \left(1+k, 1+\frac{1}{k}\right)$. Cabe destacar que en el caso $p = 1+k$ el operador es inyectivo (aunque no invertible) tal y como podemos ver en la referencia [35]. Además, si $\mu \in VMO_c(\mathbb{C})$, entonces la invertibilidad se amplía a toda $p \in (1, \infty)$ tal y como probó T. Iwaniec en [21]. Mas aún, de los resultados de V. Cruz en [13] y de V.Cruz junto a A. Clop en [10], se deduce que si μ, $\nu \in W^{1,p}_c(\mathbb{C})$ con $p > 2$, entonces el operador

$$Id - \mu\mathcal{B} - \nu\overline{\mathcal{B}} : \ W^{1,p}(\mathbb{C}) \to W^{1,p}(\mathbb{C})$$

es invertible.

Nuestro primer objetivo será ampliar el estudio de la invertibilidad del operador cuando los coeficientes μ, ν pertenecen a $W^{1,p}_c(\mathbb{C})$ con $p \le 2$. Observemos que si $p < 2$, entonces los coeficientes no pertenecen a la clase VMO y no podremos usar el resultado previo de Iwaniec. De hecho, en el caso $p < 2$ ya encontramos un problema en la acotación del operador. Efectivamente, si $\mu \in W^{1,p}_c(\mathbb{C})$ y $f \in W^{1,q}(\mathbb{C})$ con $q \le p$, no tenemos garantías de que el producto μf pertenezca a algún espacio de Sobolev. Por ello, tenemos que recurrir a otra clase de funciones donde encontrar la invertibilidad del operador. Para este fin, usaremos una modificación del espacio $E^{p,q}_{loc}(\mathbb{C})$ introducido al principio del capítulo. Concretamente, para cada $1 < q < p \le 2$, definimos las clases de funciones

$$E^{p,q}(\mathbb{C}) := \dot{W}^{1,q}(\mathbb{C}) \cap L^{\frac{pq}{p-q}}(\mathbb{C})$$

dotada con la siguiente topología. Dada φ_n, $\varphi \in E^{p,q}(\mathbb{C})$, diremos que φ_n converge a φ en $E^{p,q}(\mathbb{C})$ si se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\|\varphi_n - \varphi\|_{L^{\frac{pq}{p-q}}(\mathbb{C})} + \|D\varphi_n - D\varphi\|_{L^q(\mathbb{C})} \right) = 0 .$$

Es evidente que bajo esta topología $C^\infty_c(\mathbb{C})$ es denso en $E^{p,q}$. Ya avanzamos que si $p < 2$, solo podremos estudiar la invertibilidad del operador para aquellas parejas de coeficientes μ, ν con $\||\mu| + |\nu|\|_\infty = k < \frac{2}{3}$ (mas adelante veremos el motivo de ello). Esta restrición sobre k es la que nos obliga a estudiar la ecuación mediante resultados del tipo Weyl que daremos en las siguientes secciones.

Ahora estudiaremos la invertibilidad del operador de Beltrami en $E^{p,q}(\mathbb{C})$ en los casos $p = 2$ y $p < 2$. Posteriormente, en cada caso, mostraremos como repercute esta invertibilidad en la regularidad de la solución cuasiconforme y del resto de soluciones cuasiregulares. Empezamos con la invertiblidad en los espacios $E^{p,q}(\mathbb{C})$ cuando $p = 2$ o lo que es equivalente, en los espacios $W^{1,q}(\mathbb{C})$ con $q < 2$.

Lema 3.4. *Sean dos coeficientes de Beltrami μ, $\nu \in W^{1,2}_c(\mathbb{C}) \cap L^\infty(\mathbb{C})$ con $\||\mu| + |\nu|\|_\infty = k < 1$. Entonces, el operador*

$$Id - \mu\mathcal{B} - \nu\overline{\mathcal{B}} : \ W^{1,q}(\mathbb{C}) \to W^{1,q}(\mathbb{C})$$

es contínuamente invertible para toda $q < 2$.

Demostración. Observemos que gracias al resultado de Iwaniec y a que $\mu, \nu \in W^{1,2}_c(\mathbb{C}) \subset VMO(\mathbb{C})$, entonces el operador de Beltrami

$$Id - \mu\mathcal{B} - \nu\overline{\mathcal{B}} : \, L^s(\mathbb{C}) \,\to\, L^s(\mathbb{C})$$

es continuamente invertible para todo $s \in (1, \infty)$. Por otro lado, para toda $q < 2$ el embedding de Sobolev nos asegura que $W^{1,q}(\mathbb{C}) \hookrightarrow L^{\frac{2q}{2-q}}(\mathbb{C})$. Por ello, si tenemos una pareja de funciones f, g tales que $g = f - \mu\mathcal{B} - \nu\overline{\mathcal{B}}f$, entonces si una de las funciones pertenece a $W^{1,q}(\mathbb{C})$, la otra pertenecerá a $L^{\frac{pq}{p-q}}(\mathbb{C})$. Además, con el siguiente control de normas

$$c_k \|g\|_{L^{\frac{2q}{2-q}}(\mathbb{C})} \leq \|f\|_{L^{\frac{2q}{2-q}}(\mathbb{C})} \leq C_k \|g\|_{L^{\frac{2q}{2-q}}(\mathbb{C})}$$

donde c_k y C_k solo dependen de k y de q.

Veamos como se comportan las derivadas. Para ello, primero suponemos que $f \in W^{1,q}(\mathbb{C})$. En tal caso, gracias al embedding de Sobolev, tenemos que $f \in L^{\frac{2q}{2-q}}(\mathbb{C})$ y por lo tanto $\mathcal{B}f \in L^{\frac{2q}{q-2}}(\mathbb{C})$. Mas aún, gracias a la desigualdad de Hölder, obtenemos que $D\mu\mathcal{B}f$, $D\nu\overline{\mathcal{B}}f \in L^q_c(\mathbb{C})$. Ahora, para ver que $\partial g \in L^q(\mathbb{C})$, consideramos $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{C})$. Entonces

$$\begin{aligned}
\langle \partial g, \varphi \rangle &= -\left\langle g, \overline{\partial}\varphi \right\rangle = -\left\langle f - \mu\mathcal{B}f - \nu\overline{\mathcal{B}}f, \overline{\partial}\varphi \right\rangle \\
&= -\left\langle f, \overline{\partial}\varphi \right\rangle + \left\langle \mathcal{B}f, \overline{\mu}\overline{\partial}\varphi \right\rangle + \left\langle \overline{\mathcal{B}}f, \overline{\nu}\overline{\partial}\varphi \right\rangle \\
&= -\left\langle f, \overline{\partial}\varphi \right\rangle + \left\langle \mathcal{B}f, \overline{\partial}\left(\overline{\mu}\varphi\right) \right\rangle + \left\langle \overline{\mathcal{B}}f, \overline{\partial}\left(\overline{\nu}\varphi\right) \right\rangle - \left\langle \mathcal{B}f, \overline{\partial\mu}\varphi \right\rangle - \left\langle \overline{\mathcal{B}}f, \overline{\partial\nu}\varphi \right\rangle \\
&= \langle \partial f, \varphi \rangle - \langle \mu\partial\mathcal{B}f, \varphi \rangle - \left\langle \nu\partial\overline{\mathcal{B}}f, \varphi \right\rangle - \langle \partial\mu\mathcal{B}f, \varphi \rangle - \left\langle \partial\nu\overline{\mathcal{B}}f, \varphi \right\rangle .
\end{aligned}$$

Usando la cadena de identidades $\partial\overline{\mathcal{B}} = \partial\mathbf{C}\mathcal{B} = \mathbf{C}\overline{\partial}\mathcal{B} = \mathbf{C}\overline{\partial}\partial\mathcal{C} = \mathbf{C}\partial\overline{\partial}\mathcal{C} = \mathbf{C}\partial$ y agrupando términos obtenemos que

$$\langle \partial g, \varphi \rangle = \left\langle \partial f - \mu\mathcal{B}\partial f - \nu\overline{\partial f} - \partial\mu\mathcal{B}f - \partial\nu\overline{\mathcal{B}}f, \varphi \right\rangle . \tag{3.3}$$

Dado que la parte izquierda del lado derecho pertenece a $L^q(\mathbb{C})$, entonces $\partial g \in L^q(\mathbb{C})$. Para ver que $\overline{\partial}g \in L^q(\mathbb{C})$ actuamos de forma análoga.

$$\begin{aligned}
\left\langle \overline{\partial}g, \varphi \right\rangle &= -\langle g, \partial\varphi \rangle = -\left\langle f - \mu\mathcal{B}f - \nu\overline{\mathcal{B}}f, \partial\varphi \right\rangle \\
&= -\langle f, \partial\varphi \rangle + \langle \mathcal{B}f, \overline{\mu}\partial\varphi \rangle + \left\langle \overline{\mathcal{B}}f, \overline{\nu}\partial\varphi \right\rangle \\
&= -\langle f, \partial\varphi \rangle + \langle \mathcal{B}f, \partial\left(\overline{\mu}\varphi\right) \rangle + \left\langle \overline{\mathcal{B}}f, \partial\left(\overline{\nu}\varphi\right) \right\rangle - \langle \mathcal{B}f, \partial\overline{\mu}\varphi \rangle - \left\langle \overline{\mathcal{B}}f, \partial\overline{\nu}\varphi \right\rangle \\
&= \left\langle \overline{\partial}f, \varphi \right\rangle - \left\langle \mu\overline{\partial}\mathcal{B}f, \varphi \right\rangle - \left\langle \nu\overline{\partial\mathcal{B}}f, \varphi \right\rangle - \left\langle \overline{\partial}\mu\mathcal{B}f, \varphi \right\rangle - \left\langle \overline{\partial}\nu\overline{\mathcal{B}}f, \varphi \right\rangle
\end{aligned}$$

Usando que $\overline{\partial}\mathcal{B} = \partial$, que $\overline{\partial\mathcal{B}} = \mathbf{C}\partial\mathbf{C}\mathbf{C}B = \mathbf{C}\partial\mathcal{B} = \overline{\mathcal{B}}\partial$ y reagrupando alcanzamos la igualdad

$$\left\langle \overline{\partial}g, \varphi \right\rangle = \left\langle \overline{\partial}f - \mu\partial f - \nu\overline{\mathcal{B}}\partial f - \overline{\partial}\mu\mathcal{B}f - \overline{\partial}\nu\overline{\mathcal{B}}f, \varphi \right\rangle . \tag{3.4}$$

De esta forma, conseguimos finalmente que si $f \in W^{1,q}(\mathbb{C})$, entonces $g \in W^{1,q}(\mathbb{C})$.

Antes de demostrar la implicación $g \in W^{1,q}(\mathbb{C}) \implies f \in W^{1,q}(\mathbb{C})$, consideramos la siguiente identidad de operadores que necesitaremos mas adelante

$$Id - \nu\mathbf{C} - \mu\mathcal{B} = (Id - \nu\mathbf{C})\left(Id - \frac{\mu}{1 - |\nu|^2}\mathcal{B} - \frac{\nu\overline{\mu}}{1 - |\nu|^2}\overline{\mathcal{B}}\right).$$

En particular, como $\mu,\,\nu \in W^{1,2}_c(\mathbb{C}) \subset VMO_c(\mathbb{C})$, esta identidad nos asegura que el operador $Id - \nu\mathbf{C} - \mu\mathcal{B} : L^p(\mathbb{C}) \to L^p(\mathbb{C})$ es invertible para toda $p \in (1,\infty)$. A continuación veremos que $\partial f \in L^q(\mathbb{C})$. Para ello, consideramos que $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{C})$. Entonces

$$\begin{aligned}\langle \partial g, \varphi\rangle &= -\left\langle g, \overline{\partial}\varphi\right\rangle = -\left\langle f - \mu\mathcal{B}f - \nu\overline{\mathcal{B}}f, \overline{\partial}\varphi\right\rangle \\ &= -\left\langle f, \overline{\partial}\varphi\right\rangle + \left\langle \mathcal{B}f, \overline{\mu}\overline{\partial}\varphi\right\rangle + \left\langle \overline{\mathcal{B}}f, \overline{\nu}\overline{\partial}\varphi\right\rangle \\ &= -\left\langle f, \overline{\partial}\varphi\right\rangle + \left\langle \mathcal{B}f, \overline{\partial}\left(\overline{\mu}\varphi\right)\right\rangle + \left\langle \overline{\mathcal{B}}f, \overline{\partial}\left(\overline{\nu}\varphi\right)\right\rangle - \left\langle \mathcal{B}f, \overline{\partial\mu}\varphi\right\rangle - \left\langle \overline{\mathcal{B}}f, \overline{\partial\nu}\varphi\right\rangle\,.\end{aligned}$$

Si despejamos convenientemente, conseguimos ver que

$$\langle \partial g, \varphi\rangle + \left\langle \mathcal{B}f, \overline{\partial\mu}\varphi\right\rangle + \left\langle \overline{\mathcal{B}}f, \overline{\partial\nu}\varphi\right\rangle = -\left\langle f, \overline{\partial}\varphi\right\rangle + \left\langle \mathcal{B}f, \overline{\partial}\left(\overline{\mu}\varphi\right)\right\rangle + \left\langle \overline{\mathcal{B}}f, \overline{\partial}\left(\overline{\nu}\varphi\right)\right\rangle\,.$$

Simplificando en el lado izquierdo y tomando operadores adjuntos en el lado derecho podemos reescribir la igualdad anterior como

$$\left\langle \partial g + \partial\mu\mathcal{B}f + \partial\nu\overline{\mathcal{B}}f\,,\,\varphi\right\rangle = \langle \partial f\,,\,(Id - \mathcal{B}'\overline{\mu} - \mathbf{C}\overline{\nu})\,\varphi\rangle \tag{3.5}$$

donde, en el último término del lado derecho, hemos usado que $\partial\overline{\mathcal{B}} = \mathbf{C}\partial$. Además, el lado izquierdo pertenece a $L^q(\mathbb{C})$ y por lo tanto la igualdad se extiende a toda $\varphi \in L^{q'}(\mathbb{C})$ con $q' = \frac{q}{q-1}$. Por ello, podemos tomar como función test a $\varphi = (Id - \mathcal{B}'\overline{\mu} - \mathbf{C}\overline{\nu})^{-1}\,\psi$ con $\psi \in C^\infty_c(\mathbb{C})$. De esta manera vemos que para toda $\psi \in C^\infty_c(\mathbb{C})$, se tiene la identidad

$$\langle \partial f\,,\,\psi\rangle = \left\langle (Id - \mu\mathcal{B} - \nu\mathbf{C})^{-1}\left[\partial g + \left(\partial\mu\mathcal{B} + \partial\nu\overline{\mathcal{B}}\right)\left(Id - \mu\mathcal{B} - \nu\overline{\mathcal{B}}\right)^{-1} g\right], \psi\right\rangle \tag{3.6}$$

donde hemos usado que $f = \left(Id - \mu\mathcal{B} - \nu\overline{\mathcal{B}}\right)^{-1} g$. Así conseguimos que si $g \in W^{1,q}(\mathbb{C})$, entonces $\partial f \in L^q(\mathbb{C})$. Para ver que la otra derivada de f también pertenece a $L^q(\mathbb{C})$ actuamos como sigue

$$\begin{aligned}\left\langle \overline{\partial}g, \varphi\right\rangle &= -\langle g, \partial\varphi\rangle = -\left\langle f - \mu\mathcal{B}f - \nu\overline{\mathcal{B}}f, \partial\varphi\right\rangle \\ &= \left\langle \overline{\partial}f, \varphi\right\rangle - \left\langle \overline{\partial}\left(\mu\mathcal{B}f\right), \varphi\right\rangle - \left\langle \overline{\partial}\left(\nu\overline{\mathcal{B}}f\right), \varphi\right\rangle\,.\end{aligned}$$

Tras despejar adecuadamente y desarrollar las derivadas, tenemos que

$$\left\langle \overline{\partial}f, \varphi\right\rangle = \left\langle \overline{\partial}g, \varphi\right\rangle + \left\langle \mu\partial f + \overline{\partial}\mu\mathcal{B}f, \varphi\right\rangle + \left\langle \nu\overline{\mathcal{B}}\partial f + \overline{\partial}\nu\overline{\mathcal{B}}f, \varphi\right\rangle \tag{3.7}$$

donde hemos usado que $\overline{\partial}\mathcal{B} = \partial$ y que $\overline{\partial}\overline{\mathcal{B}} = \overline{\mathcal{B}}\partial$. Ya, sin mas que recordar que $f = \left(Id - \mu\mathcal{B} - \nu\overline{\mathcal{B}}\right)^{-1} g$ y usar la expresión alcanzada antes para ∂f tenemos que

$$\begin{aligned}\overline{\partial}f \,=\, &\left(\mu + \nu\overline{\mathcal{B}}\right)\,(Id - \mu\mathcal{B} - \nu\mathbf{C})^{-1}\left[\partial g + \left(\partial\mu\mathcal{B} + \partial\nu\overline{\mathcal{B}}\right)\left(Id - \mu\mathcal{B} - \nu\overline{\mathcal{B}}\right)^{-1} g\right] \\ &+ \overline{\partial}g + \left(\overline{\partial}\mu\mathcal{B} + \overline{\partial}\nu\overline{\mathcal{B}}\right)\left(Id - \mu\mathcal{B} - \nu\overline{\mathcal{B}}\right)^{-1} g\,.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\overline{\partial}f \in L^q(\mathbb{C})$. De esta forma acabamos demostrando la implicación $g \in W^{1,q}(\mathbb{C}) \Longrightarrow f \in W^{1,q}(\mathbb{C})$ y concluimos la prueba. □

Gracias a este lema, podemos ver que toda solución cuasiregular $f \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ de la ecuación de Beltrami Generalizada Homogénea

$$\overline{\partial}f = \mu\partial f + \nu\overline{\partial f}$$

con $\mu, \nu \in W^{1,2}_c(\mathbb{C})$, pertenece a $W^{2,q}_{loc}(\mathbb{C})$ para toda $q < 2$. De hecho, si el término independiente h es el adecuado, esta mejora de regularidad se extiende a toda solución de la *Ecuación de Beltrami Generalizada* tal y como nos asegura el siguiente corolario. Con el, concluimos estudio del operador de Beltrami cuando $\mu,\,\nu \in W^{1,2}_c(\mathbb{C})$.

Corolario 3.5. *Sean* $\mu,\, \nu \in W^{1,2}(\mathbb{C}) \cap L^{\infty}_{c}(\mathbb{C})$ *tales que* $\||\mu|+|\nu|\|_{\infty} = k < 1$ *y sea* $h \in W^{1,q}_{loc}(\mathbb{C})$ *para alguna* $q < 2$. *Asumamos que* $f \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ *es una solución de la* Ecuación de Beltrami Generalizada

$$\overline{\partial} f \,=\, \mu\, \partial f \,+\, \nu\, \overline{\partial f} \,+\, h\,.$$

Entonces, $f \in W^{2,q}_{loc}(\mathbb{C})$. *En particular, si* $h = 0$, *entonces* $f \in W^{2,s}_{loc}(\mathbb{C})$ *para toda* $s < 2$.

Demostración. Dada $f \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ la solución de (1.5) con $h \in W^{1,q}_{loc}(\mathbb{C})$ para alguna $q < 2$, definimos $F \in W^{1,2}_{c}(\mathbb{C})$ como $F = f\varphi$ donde $\varphi \in C^{\infty}_{c}(\mathbb{C})$ a valores reales. Entonces, F es la solución de la ecuación de Beltrami Generalizada

$$\overline{\partial} F = \mu \partial F + \nu \overline{\partial F} + H$$

donde $H \in W^{1,q}_{c}(\mathbb{C})$ viene definida por $H = h\varphi + \mu f \partial\varphi + \left(f - \nu \overline{f}\right) \overline{\partial} \varphi$. Además, dado que F tiene soporte compacto, podemos asegurar que $\partial F = \mathcal{B} \overline{\partial} F$ y por lo tanto, se cumple que

$$\overline{\partial} F = \left(Id - \mu \mathcal{B} - \nu \overline{\mathcal{B}}\right)^{-1} H$$

de donde se concluye que $\overline{\partial} F \in W^{1,q}_{c}(\mathbb{C})$ ya que $H \in W^{1,q}_{c}(\mathbb{C})$. De la igualdad $\partial F = \mathcal{B} \overline{\partial} F$ se sigue que $F \in W^{2,q}_{c}(\mathbb{C})$ y de manera inmediata, también tenemos que $f \in W^{2,q}_{loc}(\mathbb{C})$. Con esto concluimos la primera sentencia del enunciado.

Ahora veremos que si $h = 0$, entonces la automejora se amplía a cualquier $q < 2$. Para ver esto, solo hay que observar que si $h = 0$, entonces la función H viene definida como $H = \mu f \partial \varphi + \left(f - \nu \overline{f}\right) \overline{\partial} \varphi$ y por lo tanto $H \in W^{1,s}_{c}(\mathbb{C})$ para toda $s < 2$. Con esta observación, los pasos dados en el párrafo anterior nos permiten ver que $f \in W^{2,s}_{loc}(\mathbb{C})$. Con esto, finalizamos la prueba. □

A continuación, consideramos el estudio de la invertibilidad del operador de Beltrami $Id - \mu\mathcal{B} - \nu\overline{\mathcal{B}}$ en los espacios $E^{p,q}(\mathbb{C})$ con $1 < q < p < 2$. En este caso, ya no tenemos la identificación con el espacio de Sobolev $W^{1,q}$ como tuvimos en el caso $p = 2$. Además, como $\mu,\, \nu \in W^{1,p}_{c}(\mathbb{C})$ con $p < 2$, tampoco tenemos que los coeficientes pertenezcan a VMO por lo que no podemos usar el resultado de invertibilidad de T. Iwaniec. Por ello, solo podremos usar los resultados de Astala et. al. en [6]. Hemos alcanzado el siguiente resultado.

Lema 3.6. *Fijemos dos coeficientes de Beltrami* $\mu,\, \nu \in L^{\infty}_{c}(\mathbb{C})$ *para los cuales se tiene que* $\||\mu| + |\nu|\|_{\infty} = k < \frac{2}{3}$. *Supongamos además que* $\mu,\, \nu \in W^{1,p}(\mathbb{C})$ *con* $\frac{1+k}{1-k} < p < 2$. *Entonces, el operador*

$$Id \,-\, \mu\,\mathcal{B} \,-\, \nu\,\overline{\mathcal{B}} :\, E^{p,q}(\mathbb{C}) \,\to\, E^{p,q}(\mathbb{C})$$

es continuamente invertible para toda q *con* $\frac{1}{q} > \frac{k}{1+k} + \frac{1}{p} = \frac{1}{q_0}$.

Observación 3.7. $\frac{1+k}{1-k} < 2$ *si y solo si* $k < \frac{2}{3}$.

Demostración. La prueba de este lema sigue, con algunos cambios, las mismas líneas que la demostración del *Lema 3.4*. Dado que en este caso los coeficientes no pertenecen a $VMO_c(\mathbb{C})$, hemos de comprobar que los pasos dados en dicha demostración nos permiten alcanzar la equivalencia $g \in E^{p,q}(\mathbb{C}) \iff f \in E^{p,q}(\mathbb{C})$. Para ello, primero observamos que el operador

$$Id - \mu\mathcal{B} - \nu\overline{\mathcal{B}} : L^{s}(\mathbb{C}) \to L^{s}(\mathbb{C})$$

es invertible para toda $s \in \left(1+k, 1+\frac{1}{k}\right)$. Además, dadas las condiciones sobre p, q tenemos que

$$1 + k < \frac{p\,q}{p - q} < 1 + \frac{1}{k}\,.$$

Por ello, si tenemos dos funciones f, g tales que $g = f - \mu\mathcal{B}f - \nu\overline{\mathcal{B}}f$ podemos ver que $g \in L^{\frac{pq}{p-q}}(\mathbb{C}) \iff f \in L^{\frac{pq}{p-q}}(\mathbb{C})$.

Por último, hemos de ver que la doble implicación $Df \in L^q(\mathbb{C}) \iff Dg \in L^q(\mathbb{C})$ dada en la prueba anterior por las igualdades (3.3)-(3.7) es válida bajo estas hipótesis. Para ello, observamos que el operador $Id - \mu\mathcal{B} - \nu\mathbf{C} : L^s(\mathbb{C}) \to L^s(\mathbb{C})$ es invertible para toda $s \in \left(1+k, 1+\frac{1}{k}\right)$. Mas aún, este operador es contínuamente invertible con constantes que solo dependen de k. Esto se sigue de la identidad entre operadores

$$Id - \nu\mathbf{C} - \mu\mathcal{B} = (Id - \nu\mathbf{C})\left(Id - \frac{\mu}{1-|\nu|^2}\mathcal{B} - \frac{\nu\overline{\mu}}{1-|\nu|^2}\overline{\mathcal{B}}\right)$$

donde el último operador es continuamente invertible, con constantes que solo dependen de k, al menos en los espacios $L^s(\mathbb{C})$ con $s \in \left(1+k, 1+\frac{1}{k}\right)$ y el operador $(Id - \nu\mathbf{C})$ es siempre invertible. A fin de que el tránsito siga valiendo en nuestro caso, necesitamos que $1+k < q < 1+\frac{1}{k}$ o lo que es equivalente

$$\frac{k}{1+k} < \frac{1}{q} < \frac{1}{1+k}\,.$$

Evidentemente, la desigualdad $\frac{k}{1+k} < \frac{1}{q}$ se tiene gratuitamente de la hipóteisis $\frac{1}{q} > \frac{k}{1+k} + \frac{1}{p}$. Por ello, solo tenemos que garantizar que tenemos la desigualdad $\frac{1}{q} < \frac{1}{1+k}$. Para esto es suficiente ver que podemos escoger $q < p$ tal que

$$\frac{k}{1+k} + \frac{1}{p} < \frac{1}{q} < \frac{1}{1+k}\,.$$

Comparando los extremos de esta cadena de desigualdades, vemos que podremos escoger dicha q si y solamente si

$$\frac{k}{1+k} + \frac{1}{p} < \frac{1}{1+k}\,.$$

O lo que es equivalente, si $K = \frac{1+k}{1-k} < p < 2$. De esta forma terminamos la demostración. □

Mediante este lema, podemos ver que toda solución cuasiregular $f \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ de la ecuación de *Beltrami Generalizada Homogénea* con μ, $\nu \in W^{1,p}_c(\mathbb{C})$ donde $\frac{1+k}{1-k} < p < 2$, pertenece a $W^{2,q}_{loc}(\mathbb{C})$ para toda $\frac{1}{q} > \frac{k}{1+k} + \frac{1}{p}$ tal y como aseguramos en el siguiente corolario. De esta forma, extendemos parcialmente el *Teorema 3.1.*

Corolario 3.8. *Sean dos coeficientes de Beltrami* μ, $\nu \in L^\infty_c(\mathbb{C})$ *para los cuales se tiene que* $\||\mu| + |\nu|\|_\infty = k < \frac{2}{3}$. *Supongamos que* μ, $\nu \in W^{1,p}(\mathbb{C})$ *con* $\frac{1+k}{1-k} < p < 2$. *Si* $f \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ *es una solución cuasiregular de la* Ecuación de Beltrami Generalizada Homogénea

$$\overline{\partial} f = \mu\partial f + \nu\overline{\partial f}\,.$$

Entonces, $f \in W^{2,q}_{loc}(\mathbb{C})$ *para toda* q *con* $\frac{1}{q} > \frac{k}{1+k} + \frac{1}{p} = \frac{1}{q_0}$.

Demostración. Para cada $f \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ solución cuasiregular de (1.6), definimos $F \in W^{1,2}_c(\mathbb{C})$ como $F = f\varphi$ donde $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{C})$ es a valores reales. Entonces tenemos que

$$\overline{\partial} F = \mu \partial F + \nu \overline{\partial F} + H$$

donde H viene definida por $H = \mu f \partial\varphi + \left(f - \nu \overline{f}\right) \overline{\partial}\varphi$. Debido a la automejora de las soluciones cuasiregulares (es decir, $f \in W^{1,s}_{loc}(\mathbb{C})$ para toda $s < 1 + \frac{1}{k}$), podemos concluir que $H \in E^{p,q}_c(\mathbb{C})$ para toda $\frac{1}{q} > \frac{k}{1+k} + \frac{1}{p}$. Además, en analogía al caso $p = 2$, tenemos que

$$\overline{\partial} F = \left(Id - \mu \mathcal{B} - \nu \overline{\mathcal{B}}\right)^{-1} H$$

y por el *Lema 3.6*, $\overline{\partial} F \in E^{p,q}_c(\mathbb{C})$. Por lo tanto, $f \in W^{2,q}_{loc}(\mathbb{C})$ para toda $\frac{1}{q} > \frac{k}{1+k} + \frac{1}{p}$. □

Lamentablemente, en la invertibilidad del operador, no hemos conseguido esquivar la condición $\frac{1+k}{1-k} < 2$. Sin embargo, en las siguientes secciones podremos alcanzar la misma automejora prescindiendo de la condición $\frac{1+k}{1-k} < 2$. Además, lograremos esta misma automejora para otros tipos de soluciones mas débiles, las *soluciones distribucionales* (ver *Definición 2.26*). Para ello, empezamos estudiando la *Ecuación de Beltrami Conjugada*, es decir $\mu = 0$.

Problemas Abiertos 3.9. *Fijemos dos coeficientes de Beltrami* μ, $\nu \in W^{1,p}_c(\mathbb{C})$ *con* $p < 2$ *y tales que* $\||\mu| + |\nu|\|_\infty := k < 1$.

- *Encontrar una demostración alternativa del* Lema 3.6 *que no requiera de la condición* $k < \frac{2}{3}$.

En caso de que no sea posible

- *Encontrar otro espacio de funciones* $X(\mathbb{C}) \subset W^{1,1}_{loc}(\mathbb{C})$ *para el que el operador de Beltrami Generalizado*
$$Id - \mu \mathcal{B} - \nu \overline{\mathcal{B}} : X(\mathbb{C}) \to X(\mathbb{C})$$
sea invertible incluso si $k \geq \frac{2}{3}$.

3.2. La Ecuación de Beltrami Conjugada.

En esta sección, estudiaremos la regularidad de las soluciones distribucionales de la *Ecuación de Beltrami Conjugada Homogénea*

$$\overline{\partial} f - \nu \overline{\partial f} = 0\,,$$

donde $\nu \in W^{1,p}_c(\mathbb{C})$ con $1 \leq p < \infty$ y $\|\nu\|_\infty = k < 1$. Nuestro objetivo es dar, para *Ecuación de Beltrami de Beltrami Conjugada Homogénea*, un resultado análogo al *Teorema 3.1.* Como referente tenemos los trabajos de L. Baratchart et. al. en [8] (especialmente los *Capítulos 3 y 4*) de los que deduce el siguiente resultado: si $\nu \in W^{1,p}_c(\mathbb{C})$ con $p > 2$ e imagen real y $f \in L^q_{loc}(\mathbb{C})$ con $q \geq \frac{p}{p-1}$ es una solución distribucional de (3.2), entonces $f \in W^{2,p}_{loc}(\mathbb{C})$ y en particular es cuasiregular. Para alcanzar este resultado, los autores se apoyan en el estudio previo de una ecuación del tipo

$$\overline{\partial}\omega - \alpha\omega = 0,$$

donde ω depende de ν y de f, y α solo depende de ν. Concretamente demuestran que las soluciones ω, de la ecuación anterior, tienen una regularidad adecuada que puede transferirse a la solución f de (3.2).

Por nuestra parte, ampliaremos el resultado previo a cualquier coeficiente $\nu \in W_c^{1,p}(\mathbb{C})$, no necesariamente real, con $p > 1$. Para ello, estudiaremos la ecuación (3.2) con coeficiente $\nu \in W_c^{1,p}(\mathbb{C})$ según los casos $p > 2$, $p = 2$ o $p < 2$. Además, según el caso, usaremos unas herramientas u otras.

Hemos dividido la sección en cuatro subsecciones. En las tres primeras encontraremos un resultado tipo Weyl para las soluciones distribucionales de (3.2). Es decir, partiendo de una función que sea solución distribucional, probaremos que de hecho tiene derivadas integrables. En la última completaremos los resultandos conseguidos hasta obtener derivadas de segundo orden. Concretamente hemos dividido la sección tal como sigue

- **Subsección 3.2.1 Coeficiente $\nu \in W_c^{1,p}(\mathbb{C})$ con** $p > 2$. En esta subsección, introduciremos los resultados dado por L. Baratchart et. al. en [8] y los extenderemos a cualquier coeficiente ν no necesariamente real. Para ello, nos basaremos en las ideas mostradas en dicha referencia. Concretamente veremos que las soluciones distribucionales son débilemente cuasiregulares.

- **Subsección 3.2.2 Coeficiente $\nu \in W_c^{1,2}(\mathbb{C})$**. En este punto, extenderemos los resultados de la subsección anterior a este tipo coeficientes. Al igual que antes, nos basaremos en las ideas mostradas en dicha referencia.

- **Subsección 3.2.3 Coeficiente $\nu \in W_c^{1,p}(\mathbb{C})$ con** $p < 2$. Aquí estudiaremos la *Ecuación de Beltrami Conjugada Homogénea* cuando el coeficiente está en este espacio sin usar las ideas mostradas en las subsecciones anteriores. Además, veremos como con los métodos de esta subsección recuperamos gran parte de los resultados de las subsecciones anteriores; aunque en el camino perderemos algún extremo de integrabilidad.

- **Subsección 3.2.4 Regularidad de las Cuasiregulares.** En esta subsección, veremos cuando las soluciones cuasiregulares tienen segundas derivadas integrables. Así mismo con los resultados que alcancemos en esta subsección, junto con los de las subsecciones anteriores, mostraremos cuando una solución distribucional tiene segundas derivadas integrables.

3.2.1. Coeficiente $\nu \in W_c^{1,p}(\mathbb{C})$ con $p > 2$.

Primero de todo, enunciaremos (en nuestros términos) uno de los resultados alcanzados en [8] cuando el coeficiente de Beltrami ν solo toma valores reales.

Teorema 3.10. *Sean $p > 2$ y $1 \le q < p$ y sea $\nu \in W_c^{1,p}(\mathbb{C})$ a valores reales y tal que $\|\nu\|_\infty = k < 1$. Si $f \in L_{loc}^{\frac{q}{q-1}}$ es una solución distribucional de*

$$\overline{\partial} f = \nu \overline{\partial f},$$

entonces $f \in W_{loc}^{1,p}(\mathbb{C})$. En particular, f es cuasiregular.

Para comprobar la validez de este resultado, los autores definieron las funciones $\omega = \frac{f - \nu \overline{f}}{\sqrt{1-\nu^2}}$ y $\alpha = \frac{-\overline{\partial}\nu}{1-\nu^2}$. Demostraron que para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ se tiene la identidad

$$\langle \overline{\partial}\omega - \alpha \overline{\omega}, \varphi \rangle = \left\langle \overline{\partial} f - \nu \overline{\partial f}, \frac{\varphi}{\sqrt{1-\nu^2}} \right\rangle.$$

Por lo tanto, una vez probaron que la distribución de Beltrami extiende a una clase donde la función $\frac{\varphi}{\sqrt{1-\nu^2}}$ está bien definida, vieron que cualquier información de la distribución $\overline{\partial}\omega - \alpha\overline{\omega}$ nos aportaba información sobre la distribución $\overline{\partial} f - \nu \overline{\partial f}$. Efectivamente, si ω pertenece al espacio de Sobolev $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{C})$, entonces, dado que dicho espacio es un álgebra de Banach, también tendremos que $f = \omega + \nu\overline{\omega} \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{C})$.

Por lo expuesto anteriormente, demostrar la regularidad de f se resume a demostrar la regularidad de ω. Para tal fin, lo que buscan es una factorización mediante una exponencial y una función holomorfa. Concretamente, demuestran el siguiente resultado que presentaremos en nuestros términos.

Lema 3.11. *[8, Theorem 4.2.1.] Sean $p > 2$ y $1 \le q \le p$. Sean además $\alpha \in L^p_c(\mathbb{C})$ y $\omega \in L^{\frac{q}{q-1}}_{loc}(\mathbb{C})$ una solución distribucional de*

$$\overline{\partial}\omega \;-\; \alpha\,\overline{\omega} \;=\; 0\,.$$

Entonces, existen una función $s \in W^{1,p}(\mathbb{C})$ con $\|s\|_{W^{1,p}} \le \|\alpha\|_{L^p}$ y una función holomorfa H tales que

$$\omega \;=\; e^s\,H\,.$$

En particular, $\omega \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{C})$.

Sigamos los pasos dados en la referencia para demostrar este lema. Definamos una función ψ como

$$\psi \;=\; \begin{cases} \frac{\overline{\omega}}{\omega}\,\alpha & \omega \neq 0 \\ 0 & \omega = 0. \end{cases}$$

Como $\alpha \in L^p$ con $p > 2$ y tiene soporte compacto, $\psi \in L^p$ y también tendrá soporte compacto. Sea s la transformada de Cauchy de ψ, $s = \mathcal{C}\psi$. Evidentemente, por (2.2) y (2.3).

$$\|Ds\|_{L^p} = \|\partial s\|_{L^p} + \|\overline{\partial} s\|_{L^p} = \|\psi\|_{L^p} + \|\mathcal{B}\psi\|_{L^p} \le c_p \|\alpha\|_{L^p}\,.$$

Mas aún, como s es la transformada de Cauchy de una función de soporte compacto en L^p, entonces $s \in W^{1,p}$ y es una función acotada. Como consecuencia, las exponenciales e^s y e^{-s} están bien definidas y pertenecen a $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{C})$. De esta forma, estas exponenciales tienen derivadas distribucionales bien definidas y además $De^{-s} = -e^{-s}Ds$. Así obtenemos que $e^{-s} \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{C})$.

Ahora, si $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{C})$ es una función test, la acción de $\overline{\partial}\omega$ sobre $e^{-s}\varphi$ está bien definida ya que $e^{-s}\varphi \in W^{1,p}_c(\mathbb{C})$. También lo está la acción de $\alpha\,\overline{\omega}$ sobre $e^{-s}\varphi$. Así obtenemos que

$$\begin{aligned}
\left\langle \overline{\partial}\left(e^{-s}\,\omega\right)\,,\,\varphi \right\rangle \;&=\; -\left\langle e^{-s}\,\omega\,,\,\partial\varphi \right\rangle \;=\; -\left\langle \omega\,,\,e^{-\overline{s}}\,\partial\varphi \right\rangle \\
&=\; -\left\langle \omega\,,\,\partial\left(e^{-\overline{s}}\,\varphi\right) \right\rangle \;+\; \left\langle \omega\,,\,\varphi\,\partial e^{-\overline{s}} \right\rangle \\
&=\; \left\langle \overline{\partial}\omega\,,\,\varphi\,e^{-\overline{s}} \right\rangle \;-\; \left\langle \omega\,,\,\varphi\,e^{-\overline{s}}\,\partial\overline{s} \right\rangle \\
&=\; \left\langle \overline{\partial}\omega\,,\,\varphi\,e^{-\overline{s}} \right\rangle \;-\; \left\langle \omega\,,\,\varphi\,e^{-\overline{s}}\,\frac{\omega}{\overline{\omega}}\,\overline{\alpha} \right\rangle \\
&=\; \left\langle \overline{\partial}\omega\,,\,\varphi\,e^{-\overline{s}} \right\rangle \;-\; \left\langle \alpha\,\overline{\omega}\,,\,\varphi\,e^{-\overline{s}} \right\rangle \;=\; 0\,.
\end{aligned}$$

Por el clásico Lema de Weyl vemos que $H = e^{-s}\omega$ es holomorfa. En particular, esto implica que $\omega \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{C})$. Ya, solo hace falta observar que $W^{1,p}(\mathbb{C})$ es un álgebra de Banach para asegurar que $f \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{C})$, al menos cuando $\nu \in W^{1,p}_c(\mathbb{C})$ a valores reales.

Por nuestra parte, hemos podido demostrar que la condición sobre el coeficiente (ν real) es innecesaria y que el resultado puede alcanzarse cuando el coeficiente no es real. Concretamente, llegamos al siguiente resultado. Para su prueba, nos basaremos en las ideas mostradas en [8] que vimos anteriormente. Para ello realizamos algún cambio en el argumento.

Teorema 3.12. *Sean* $p > 2$ *y* $1 \leq q \leq p$ *y sea* $\nu \in W_c^{1,p}(\mathbb{C})$ *tal que* $\|\nu\|_\infty = k < 1$. *Si* $f \in L_{loc}^{\frac{q}{q-1}}$ *es una solución distribucional de*

$$\overline{\partial} f \,=\, \nu\, \overline{\partial f}\,,$$

entonces $f \in W_{loc}^{1,p}(\mathbb{C})$. *En particular,* f *es cuasiregular.*

En las condiciones del teorema anterior, de hecho se demuestra que $f \in W_{loc}^{2,p}(\mathbb{C})$. Esto lo veremos en la *Subsección 3.2.4*.

Demostración. Basándonos en las ideas ya comentadas de [8], definimos una función $\omega \in L_{loc}^{\frac{q}{q-1}}(\mathbb{C})$ como $\omega = af + b\overline{f}$ donde

$$a \,=\, e^{\mathcal{C}h} \quad \text{con} \quad h \,=\, \frac{\overline{\nu}\overline{\partial}\nu}{1-|\nu|^2} \quad \text{y} \quad b \,=\, -\nu\, a\;.$$

Observemos que $\nu \in W_c^{1,p}(\mathbb{C})$ y que la exponencial de una función de $W^{1,p}$ (que es continua) pertenece a $W_{loc}^{1,p}(\mathbb{C})$, entonces $a \in W_{loc}^{1,p}(\mathbb{C})$. Además como $W^{1,p}(\mathbb{C})$ es un álgebra de Banach, también tenemos $b \in W_{loc}^{1,p}(\mathbb{C})$. Por otro lado, definimos la función $\alpha \in L_c^p(\mathbb{C})$ como

$$\alpha = \frac{a}{\overline{a}}\, \frac{-\overline{\partial}\nu}{1-|\nu|^2}\,.$$

Entonces, para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ se cumple que

$$\begin{aligned}
\left\langle \overline{\partial}\omega \,-\, \alpha\,\overline{\omega}\,,\, \varphi \right\rangle &= -\left\langle \omega\,,\, \partial\varphi \right\rangle - \left\langle \alpha\,\overline{\omega}\,,\, \varphi \right\rangle \\
&= -\left\langle a\,f \,-\, \nu\, a\,\overline{f}\,,\, \partial\varphi \right\rangle + \left\langle \frac{a}{\overline{a}}\, \frac{\overline{\partial}\nu}{1-|\nu|^2} \left(\overline{a}\,\overline{f} \,-\, \overline{\nu}\,\overline{a}\,f \right)\,,\, \varphi \right\rangle \\
&= -\left\langle f \,-\, \nu\,\overline{f}\,,\, \overline{a}\,\partial\varphi \right\rangle + \left\langle a\, \frac{\overline{\partial}\nu}{1-|\nu|^2} \left(\overline{f} \,-\, \overline{\nu}\,f \right)\,,\, \varphi \right\rangle \\
&= -\left\langle f \,-\, \nu\,\overline{f}\,,\, \partial\left(\overline{a}\,\varphi\right) \right\rangle + \left\langle f \,-\nu\,\overline{f}\,,\, \varphi\,\partial\overline{a} \right\rangle + \left\langle a\, \frac{\overline{\partial}\nu}{1-|\nu|^2} \left(\overline{f} \,-\, \overline{\nu}\,f \right)\,,\, \varphi \right\rangle \\
&= -\left\langle f \,-\, \nu\,\overline{f}\,,\, \partial\left(\overline{a}\,\varphi\right) \right\rangle + \left\langle \overline{\partial}a\, \left(f \,-\nu\,\overline{f} \right)\,,\, \varphi \right\rangle + \left\langle a\, \frac{\overline{\partial}\nu}{1-|\nu|^2} \left(\overline{f} \,-\, \overline{\nu}\,f \right)\,,\, \varphi \right\rangle \\
&= -\left\langle f\,,\, \partial\left(\overline{a}\,\varphi\right) \right\rangle + \left\langle \nu\,\overline{f}\,,\, \partial\left(\overline{a}\,\varphi\right) \right\rangle + \left\langle \overline{\partial}a\, \left(f \,-\nu\,\overline{f} \right) \,+\, a\, \frac{\overline{\partial}\nu}{1-|\nu|^2} \left(\overline{f} \,-\, \overline{\nu}\,f \right)\,,\, \varphi \right\rangle \\
&= \left\langle \overline{\partial}f \,-\, \nu\,\overline{\partial f}\,,\, \overline{a}\,\varphi \right\rangle - \left\langle \overline{f}\,,\, \overline{a}\,\varphi\,\partial\overline{\nu} \right\rangle + \left\langle \overline{\partial}a\, \left(f \,-\nu\,\overline{f} \right) \,+\, a\, \frac{\overline{\partial}\nu}{1-|\nu|^2} \left(\overline{f} \,-\, \overline{\nu}\,f \right)\,,\, \varphi \right\rangle \\
&= \left\langle \overline{\partial}f \,-\, \nu\,\overline{\partial f}\,,\, \overline{a}\,\varphi \right\rangle + \left\langle -a\,\overline{f}\,\overline{\partial}\nu \,+\, \overline{\partial}a\, \left(f \,-\nu\,\overline{f} \right) \,+\, a\, \frac{\overline{\partial}\nu}{1-|\nu|^2} \left(\overline{f} \,-\, \overline{\nu}\,f \right)\,,\, \varphi \right\rangle.
\end{aligned}$$

Usando que $\overline{\partial}a = a\frac{\overline{\nu}\overline{\partial}\nu}{1-|\nu|^2}$ tenemos que el último término del lado derecho es idénticamente nulo. Por lo tanto conseguimos que para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ se cumple que

$$\left\langle \overline{\partial}\omega \,-\, \alpha\,\overline{\omega}\,,\, \varphi \right\rangle \,=\, \left\langle \overline{\partial}f \,-\, \nu\,\overline{\partial f}\,,\, \overline{a}\,\varphi \right\rangle \,=\, 0\,.$$

La acotación de estas cantidades se sigue fácilmente de las condiciones sobre p y q del enunciado lo que nos asegura que todos los término involucrados están bien definidos. La anulación proviene de que f es solución distribucional de (3.2). Efectivamente, dado que $\nu \in W_c^{1,p}(\mathbb{C})$ y $f \in L_{loc}^{\frac{q}{q-1}}(\mathbb{C})$ entonces podemos ver que

$$\left\langle \overline{\partial} f \,-\, \nu\, \overline{\partial f}\,,\, \psi \right\rangle = 0$$

para toda $\psi \in W_c^{1,p}(\mathbb{C})$; en particular para $\psi = \overline{a}\varphi$ con $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{C})$.

Vamos a probar que ω pertenece a $W_{loc}^{1,p}(\mathbb{C})$. Para ello, seguiremos el argumento comentado anteriormente. Definamos la función

$$\psi \;=\; \begin{cases} \frac{\overline{\omega}}{\omega}\,\alpha & \omega \neq 0 \\ 0 & \omega = 0. \end{cases}$$

Dado que $\alpha \in L^p$ tiene soporte compacto, entonces $\psi \in L^p$ también tendrá soporte compacto. Definamos una nueva función $s = \mathcal{C}\psi$. Evidentemente tenemos que

$$\|Ds\|_{L^p} = \|\partial s\|_{L^p} + \|\overline{\partial} s\|_{L^p} = \|\psi\|_{L^p} + \|\mathcal{B}\psi\|_{L^p} \leq c_p \|\alpha\|_{L^p}\,.$$

Además, las exponenciales e^s y e^{-s} están bien definidas y pertenecen a $W_{loc}^{1,p}(\mathbb{C})$. Esto es una consecuencia de que la función s está acotada (por el embedding de Sobolev) y de que $s(z) \to 0$ cuando $z \to \infty$ ya que es la transformada de Cauchy de una función de $L_c^p(\mathbb{C})$. De hecho, $De^{-s} = -e^{-s}Ds$. Ahora, si consideramos $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{C})$, entonces la acción $\overline{\partial}\omega$ sobre $e^{-s}\varphi$ está bien definida ya que $e^{-s}\varphi \in W_c^{1,p}(\mathbb{C})$. También lo está la acción de $\alpha\,\overline{\omega}$ sobre $e^{-s}\varphi$. Así obtenemos que

$$\begin{aligned}
\left\langle \overline{\partial}\left(e^{-s}\,\omega\right)\,,\,\varphi \right\rangle &= -\left\langle e^{-s}\,\omega\,,\,\partial\varphi \right\rangle \,=\, -\left\langle \omega\,,\,e^{-\overline{s}}\,\partial\varphi \right\rangle \\
&= -\left\langle \omega\,,\,\partial\left(e^{-\overline{s}}\,\varphi\right) \right\rangle + \left\langle \omega\,,\,\varphi\,\partial e^{-\overline{s}} \right\rangle \\
&= \left\langle \overline{\partial}\omega\,,\,\varphi\, e^{-\overline{s}} \right\rangle - \left\langle \omega\,,\,\varphi\, e^{-\overline{s}}\,\partial\overline{s} \right\rangle \\
&= \left\langle \overline{\partial}\omega\,,\,\varphi\, e^{-\overline{s}} \right\rangle - \left\langle \omega\,,\,\varphi\, e^{-\overline{s}}\,\frac{\omega}{\overline{\omega}}\,\overline{\alpha} \right\rangle \\
&= \left\langle \overline{\partial}\omega\,,\,\varphi\, e^{-\overline{s}} \right\rangle - \left\langle \alpha\,\overline{\omega}\,,\,\varphi\, e^{-\overline{s}} \right\rangle \,=\, 0\,.
\end{aligned}$$

Por el clásico Lema de Weyl vemos que $H = e^{-s}\omega$ es una función holomorfa. En particular, esto implica que $\omega \in W_{loc}^{1,p}(\mathbb{C})$.

Ahora veremos que $f \in W_{loc}^{1,p}(\mathbb{C})$. Ya sabemos que $\omega = af + b\overline{f} \in W_{loc}^{1,p}(\mathbb{C})$. Dado que $W_{loc}^{1,p}(\mathbb{C})$ es un álgebra de Banach y $e^{-\mathcal{C}h} \in W_{loc}^{1,p}(\mathbb{C})$, tendremos que $e^{-\mathcal{C}h}\omega \in W_{loc}^{1,p}(\mathbb{C})$. Para asegurar que f también pertenece a este espacio actuamos como sigue.

$$\begin{aligned}
\omega = e^{\mathcal{C}h} f - \nu e^{\mathcal{C}h}\overline{f} &\implies f - \nu\overline{f} = e^{-\mathcal{C}h}\omega \\
&\implies f = (Id - \nu\mathbf{C})^{-1}\left(e^{-\mathcal{C}h}\omega\right)\,.
\end{aligned}$$

Además, el operador

$$Id - \nu\mathbf{C} :\; W_{loc}^{1,p}(\mathbb{C}) \,\to\, W_{loc}^{1,p}(\mathbb{C})$$

es invertbile. Por lo tanto $f \in W_{loc}^{1,p}(\mathbb{C})$ tal y como queríamos demostrar. □

Observemos que en la prueba anterior si ν es a valores reales, inmediatamente obtenemos que $\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}}$ con lo que rescataríamos el resultado dado en [8].

3.2.2. Coeficiente $\nu \in W^{1,2}_c(\mathbb{C})$.

En esta subsección extenderemos, a costa de perder el extremo $q = p$, los resultados alcanzados en la sección anterior a este tipo de coeficientes. Concretamente, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.13. *Supongamos que* $1 \le q < 2$ *y* $\nu \in W^{1,2}_c(\mathbb{C}) \cap L^\infty(\mathbb{C})$ *con* $\|\nu\|_\infty = k < 1$. *Si* $f \in L^{\frac{q}{q-1}}_{loc}(\mathbb{C})$ *es una solución de la* Ecuación de Beltrami Conjugada

$$\overline{\partial} f \, = \, \nu \overline{\partial f} \, ,$$

entonces $f \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$. *En particular* f *es cuasiregular.*

En las condiciones del teorema anterior, de hecho se demuestra que $f \in W^{2,r}_{loc}(\mathbb{C})$ para toda $r < 2$. Esto lo veremos en la *Subsección 3.2.4*. Además, podemos asegurar que el resultado es fuerte en el sentido de que no podemos esperar esta regularidad cuando partimos de $f \in L^2_{loc}(\mathbb{C})$. Lo comprobamos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.14. *Fijemos* $\alpha > 0$ *y consideremos una función* g *que en un entorno del origen viene dada por*

$$g(z) \, = \, \frac{1}{z \left(\log \frac{1}{|z|} \right)^{1+\alpha}} \, .$$

Entonces, es evidente que $g \in L^r_{loc}$ *solo para* $r \le 2$. *Además, tenemos que*

$$\overline{\partial} g(z) \, = \, \frac{- \, \frac{1+\alpha}{2}}{|z|^2 \, \log^{2+\alpha} \frac{1}{|z|}} \, ,$$

$$\partial g(z) \, = \, \frac{\log \frac{1}{|z|} \, - \, \frac{1+\alpha}{2}}{z^2 \, \log^{2+\alpha} \frac{1}{|z|}} \, ,$$

y por lo tanto $g \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{C})$. *Observemos que ambos coeficientes* $\mu(z) = \frac{\overline{\partial} g(z)}{\partial g(z)}$ *y* $\nu(z) = \frac{\overline{\partial} g(z)}{\overline{\partial g(z)}}$ *convergen a* 0 *cuando* $z \to 0$. *En particular, al menos en un entorno del origen, tenemos la condición de elipticidad* $\|\mu\|_\infty$, $\|\nu\|_\infty = k < 1$.

Como consecuencia, tenemos que g *es una solución distribucional de las ecuaciones*

$$\overline{\partial} g \, - \, \mu \, \partial g \, = \, 0 \quad \text{ y } \quad \overline{\partial} g \, - \, \nu \, \overline{\partial g} \, = \, 0 \, ,$$

ya que tenemos la igualdad puntualmente. Mas aún, μ, $\nu \in W^{1,2}$. *A pesar de ello,* $g \notin W^{1,q}$ *para ninguna* $q > 1$. *En particular* g *no es cuasiregular (de hecho,* g *no es contínua).*

Para demostrar el *Lema 3.13*, volveremos a usar las ideas mostradas en la subsección anterior. Es decir, transformar (mediante una combinación lineal) la *Ecuación de Beltrami Conjugada Homogénea*

$$\overline{\partial} f - \nu \overline{\partial f} = 0 \, ,$$

en una ecuación del tipo

$$\overline{\partial} \omega - \alpha \overline{\omega} = 0 \, ,$$

y asegurarnos de que la igualdad $\omega = af + b\overline{f}$ mantiene las regularidades de las funciones. Por ello, primero veremos que $\omega \in W^{1,r}_{loc}(\mathbb{C})$ para toda $r < 2$ con el siguiente resultado. Tras la prueba del mismo, pasaremos a demostrar el *Teorema 3.13* con lo que cerraremos la subsección.

Lema 3.15. *Sean $1 \leq q < 2$. Sean además $\alpha \in L^2_c(\mathbb{C})$ y $\omega \in L^{\frac{q}{q-1}}_{loc}(\mathbb{C})$ una solución distribucional de*

$$\overline{\partial}\omega \,-\, \alpha\,\overline{\omega} \,=\, 0\,.$$

Entonces, existen una función $s \in W^{1,2}_c(\mathbb{C})$ con $\|s\|_{W^{1,2}} \leq \|\alpha\|_{L^2}$ y una función holomorfa H tales que

$$\omega \,=\, e^s\, H\,.$$

En particular, $\omega \in W^{1,r}_{loc}(\mathbb{C})$ para todo $r < 2$.

Demostración. Procederemos como en la prueba del *Lema 3.11.* Definimos la función

$$\psi \,=\, \begin{cases} \frac{\overline{\omega}}{\omega}\,\alpha & \omega \neq 0 \\ 0 & \omega = 0. \end{cases}$$

Como $\alpha \in L^2$ tiene soporte compacto, $\psi \in L^2$ también tendrá soporte compacto. Ahora, definamos una nueva función $s = \mathcal{C}\psi$ que será una de las funciones del enunciado. Evidentemente

$$\|Ds\|_{L^2} = \|\partial s\|_{L^2} + \|\overline{\partial} s\|_{L^2} = \|\psi\|_{L^2} + \|\mathcal{B}\psi\|_{L^2} = 2\|\alpha\|_{L^2}\,.$$

Una ligera modificación de la *Proposición 2.7* nos demuestra que e^s y e^{-s} están bien definidas y pertenecen a $L^t_{loc}(\mathbb{C})$ para toda $t < \infty$. De esta forma, estas exponenciales tienen derivadas distribucionales bien definidas y además $De^{-s} = -e^{-s}Ds$. Así obtenemos que $e^{-s} \in W^{1,r}_{loc}(\mathbb{C})$ para toda $r < 2$.

Ahora, si $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{C})$ es una función test, la acción de $\overline{\partial}\omega$ sobre $e^{-s}\varphi$ está bien definida ya que $e^{-s}\varphi \in W^{1,q}_c(\mathbb{C})$. También lo está la acción de $\alpha\,\overline{\omega}$ sobre $e^{-s}\varphi$. Así obtenemos que

$$\begin{aligned}
\left\langle\, \overline{\partial}\left(e^{-s}\,\omega\right)\,,\,\varphi\,\right\rangle \,&=\, -\left\langle\, e^{-s}\,\omega\,,\,\partial\varphi\,\right\rangle \,=\, -\left\langle\,\omega\,,\,e^{-\overline{s}}\,\partial\varphi\,\right\rangle \\
&=\, -\left\langle\,\omega\,,\,\partial\left(e^{-\overline{s}}\,\varphi\right)\,\right\rangle \,+\, \left\langle\,\omega\,,\,\varphi\,\partial e^{-\overline{s}}\,\right\rangle \\
&=\, \left\langle\,\overline{\partial}\omega\,,\,\varphi\,e^{-\overline{s}}\,\right\rangle \,-\, \left\langle\,\omega\,,\,\varphi\,e^{-\overline{s}}\,\partial\overline{s}\,\right\rangle \\
&=\, \left\langle\,\overline{\partial}\omega\,,\,\varphi\,e^{-\overline{s}}\,\right\rangle \,-\, \left\langle\,\omega\,,\,\varphi\,e^{-\overline{s}}\,\frac{\omega}{\overline{\omega}}\,\overline{\alpha}\,\right\rangle \\
&=\, \left\langle\,\overline{\partial}\omega\,,\,\varphi\,e^{-\overline{s}}\,\right\rangle \,-\, \left\langle\,\alpha\,\overline{\omega}\,,\,\varphi\,e^{-\overline{s}}\,\right\rangle \,=\, 0\,.
\end{aligned}$$

Y por el clásico Lema de Weyl tenemos que $H = e^{-s}\omega$ es holomorfa. En particular, esto implica que $\omega \in W^{1,r}_{loc}(\mathbb{C})$ para todo $r < 2$. □

Demostración del Teorema 3.13. Actuamos como en la prueba del *Lema 3.12*. Definimos la función como $\omega = af + b\overline{f}$ donde

$$a \,=\, e^{\mathcal{C}h} \quad \text{con} \quad h \,=\, \frac{\overline{\nu}\overline{\partial}\nu}{1 - |\nu|^2} \quad \text{y} \quad b \,=\, -\nu\,a\,.$$

Observemos que $\nu \in W^{1,2}(\mathbb{C}) \cap L^\infty_c(\mathbb{C})$ y que la exponencial de una función de la *transforma de de Cauchy*, de una función de $L^2_c(\mathbb{C})$, pertenece a $W^{1,q}_{loc}(\mathbb{C})$ para toda $r < 2$. Entonces, $a \in W^{1,r}_{loc}(\mathbb{C})$ para todo $r < 2$ y además, como $W^{1,2}_c(\mathbb{C}) \cap L^\infty(\mathbb{C})$ es un multiplicador del espacio $W^{1,r}_{loc}(\mathbb{C})$ para todo $r<2$, también tenemos que $b\in W^{1,q}(\mathbb{C})$ para todo $r<2$. Por lo tanto, $\omega\in L^{\frac{\tilde q}{\tilde q-1}}_{loc}(\mathbb{C})$ para alguna $q<\tilde q<2$. Por otro lado, definimos la función $\alpha\in L^2_c(\mathbb{C})$ como

$$\alpha=\frac{a}{\overline{a}}\,\frac{\overline{\partial}\nu}{1-|\nu|^2}\,.$$

Entonces, para toda $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{C})$ se cumple que

$$\left\langle\,\overline{\partial}\omega\,-\,\alpha\,\overline{\omega}\,,\,\varphi\,\right\rangle\,=\,\left\langle\,\overline{\partial}f\,-\,\nu\,\overline{\partial f}\,,\,\overline{a}\,\varphi\,\right\rangle=0$$

como ya detallamos en la página 49 (demostración del *Lema 3.12*). Podemos asegurar que los términos anteriores están acotados gracias a las condición sobre q y $\tilde q$. Con ello tenemos que todos los término involucrados están bien definidos. La anulación proviene de que f es solución de (3.2). Efectivamente, dado que $\nu\in W^{1,2}_c(\mathbb{C})\cap L^\infty(\mathbb{C})$ y $f\in L^{\frac{q}{q-1}}_{loc}(\mathbb{C})$ con $q<2$, entonces podemos ver que

$$\left\langle\,\overline{\partial}f\,-\,\nu\,\overline{\partial f}\,,\,\psi\,\right\rangle=0$$

para toda $\psi\in W^{1,q}_c(\mathbb{C})$ con $q<2$; en particular para $\psi=\overline{a}\varphi$ con $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{C})$. Así, vemos que $\omega\in L^{\frac{\tilde q}{\tilde q-1}}_{loc}(\mathbb{C})$ es una solución distribucional de

$$\overline{\partial}\omega-\alpha\overline{\omega}=0\,.$$

Gracias al *Lema 3.15*, tenemos que $\omega\in W^{1,r}_{loc}(\mathbb{C})$ para todo $r<2$.

Ya, solo nos falta demostrar que $f\in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$. Al igual que en el *Lema 3.12* tenemos

$$f=(Id-\nu\mathbf{C})^{-1}\left(e^{-\mathcal{C}h}\omega\right)\,.$$

Observemos que si $h,g\in\bigcap_{r<2}W^{1,r}_{loc}(\mathbb{C})$, entonces $hg\in\bigcap_{r<2}W^{1,r}_{loc}(\mathbb{C})$. Por lo tanto $e^{-\mathcal{C}h}\omega\in W^{1,r}_{loc}(\mathbb{C})$ para toda $r<2$ Además, como $\nu\in W^{1,2}_c(\mathbb{C})\cap L^\infty(\mathbb{C})$, el operador

$$Id-\nu\mathbf{C}:\,W^{1,r}_{loc}(\mathbb{C})\,\to\,W^{1,r}_{loc}(\mathbb{C})$$

es invertible para toda $r<2$. Así $f\in W^{1,r}_{loc}(\mathbb{C})$ para toda $r<2$ y en particular f es débilmente cuasiregular. Por último, la teoría clásica de aplicaciones cuasiregulares nos asegura que $f\in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ y por lo tanto es cuasiregular tal y como queríamos demostrar. □

3.2.3. Coeficiente $\nu\in W^{1,p}_c(\mathbb{C})$ con $p<2$.

En este caso evitaremos usar la factorización mediante las exponenciales, dada por Barartchart et. al. en [8], y recurrimos a los espacios $E^{p,q}(\mathbb{C})$ que introdujimos al principio del capítulo.

Teorema 3.16. *Sean $1\le q<p<2$ y $\nu\in W^{1,p}(\mathbb{C})$ tal que $\|\nu\|_\infty=k<1$. Supongamos que tenemos $f\in L^{\frac{q}{q-1}}_{loc}(\mathbb{C})$ y asumamos que*

$$\left\langle\,\overline{\partial}f\,-\,\nu\,\overline{\partial f}\,,\,\varphi\,\right\rangle\,=\,0$$

para toda $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{C})$. Entonces, $f\in W^{1,r}_{loc}(\mathbb{C})$ con $r=\frac{pq'}{p+q'}$ y es débilmente K-cuasiregular.

Observemos que el resultado nos garantiza que un coeficiente $\nu \in W_c^{1,p}(\mathbb{C})$ con $1 < p \leq 1+k$ implica cierta regularidad Sobolev $W_{loc}^{1,r}(\mathbb{C})$ de las soluciones distribucionales. Aunque dicha regularidad solo implique cuasiregularidad débil y no cuasiregularidad, este fenónmeno no se ha visto (que sepamos) en la *Ecuación de Beltrami Homogénea* $\overline{\partial} f = \mu \partial f$ cuando $\mu \in W_c^{1,p}(\mathbb{C})$ con $1 < p \leq 1 + k$.

Problema Abierto 3.17. *Determinar si el exponente* $r = \frac{pq'}{p+q'}$ *del* Teorema 3.16*, cuando* $1 \leq q < p \leq 1+k$*, es óptimo.*

Demostración. Definimos $g = f - \nu \overline{f}$. Es evidente que $g \in L_{loc}^{\frac{q}{q-1}}(\mathbb{C})$ y además

$$\begin{aligned}
\left\langle \overline{\partial} g\,,\, \varphi \right\rangle &= -\left\langle f - \nu\, \overline{f}\,,\, \partial\varphi \right\rangle \\
&= -\left\langle f\,,\, \partial\varphi \right\rangle + \left\langle \overline{f}\,,\, \overline{\nu}\, \partial\varphi \right\rangle \\
&= -\left\langle f\,,\, \partial\varphi \right\rangle + \left\langle \overline{f}\,,\, \partial\left(\overline{\nu}\,\varphi\right) \right\rangle - \left\langle \overline{f}\,,\, \varphi\, \partial\overline{\nu} \right\rangle \\
&= -\left\langle \overline{f}\,,\, \varphi\, \partial\overline{\nu} \right\rangle = -\left\langle \overline{f}\, \overline{\partial}\nu\,,\, \varphi \right\rangle .
\end{aligned}$$

Esto significa que la derivada distribucional $\overline{\partial} g$ coincide con la función $-\overline{f}\,\overline{\partial}\nu$ la cual pertenece a $L_c^r(\mathbb{C})$ con $r = \frac{pq'}{p+q'}$. Notemos que $1 < r < p$ porque $1 < q < p$. Así la función H dada como

$$H = g + \frac{1}{\pi z} * \left(\overline{f}\,\overline{\partial}\nu\right)$$

está bien definida y su derivada distribucional $\overline{\partial}$ es idénticamente nula en $\mathbb{C}$. Por lo tanto H es holomorfa y podemos asegurar que g pertenece a $W_{loc}^{1,r}$. Mas aún, como $g \in L_{loc}^{q'}$ y $\frac{pr}{p-r} = q'$, también tenemos que $g \in E_{loc}^{p,r}(\mathbb{C})$.

De la definción de g, tenemos

$$f = \frac{g + \nu\, \overline{g}}{1 - |\nu|^2}\,.$$

Además, como $\nu \in W_c^{1,p}$ y $\|\nu\|_\infty = k < 1$, entonces $\frac{1}{1-|\nu|^2}$ y $\frac{\nu}{1-|\nu|^2}$ también pertenecen a $W_{loc}^{1,p}$. Mas aún, gracias a que $1 < r < p$, ya sabemos que $W^{1,p} \cap L^\infty$ es un multiplicador puntual del espacio $E_{loc}^{p,r}$. De esta forma, $f \in E_{loc}^{p,r}(\mathbb{C})$ y en particular $f \in W_{loc}^{1,r}(\mathbb{C})$ tal y como queríamos demostrar. □

En el teorema anterior, de $1 < q < p$ obtenemos $1 < r < p$. Mas aún, cuando $q \nearrow p$, entonces $r \searrow 1$. No obstante, ya hemos indicado al principio del capítulo que toda aplicación débilmente K-cuasiregular de $\overline{\partial} f - \nu\, \overline{\partial f} = 0$ que pertenece a $W^{1,r}$ es automáticamente K-cuasiregular cuando $r \geq 1 + \|\nu\|_\infty$. Esto hace que centremos nuestra atención en los valores $p > 1 + \|\nu\|_\infty$. Para ello, rescatamos las constantes p_0 y q_0 (definidas anteriormente) con las que alcanzamos el siguiente resultado.

Corolario 3.18. *Asumamos que* $1 + k \leq p < 2$*. Sea* $f \in L_{loc}^{\frac{q}{q-1}}$ *para alguna* $1 \leq q \leq q_0$ *y supongamos que*

$$\left\langle \overline{\partial} f - \nu\, \overline{\partial f}, \varphi \right\rangle = 0$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{C})$*. Entonces,* f *es* K*-cuasiregular.*

Demostración. Recordemos que

$$\frac{1}{q_0} = \frac{1}{p} + \frac{k}{1+k} = \frac{k}{1+k}\,.$$

De las condiciones $1+k \leq p < 2$ y $1 \leq q \leq q_0$, obtenemos que $1 \leq q < p < 2$. Entonces, gracias al *Teorema 3.16*, sabemos que f tiene derivadas distribucionales en L^r_{loc} con $r = \frac{pq'}{p+q'}$. Además, de la condición $q \leq q_0$ también se sigue que $r \geq 1+k$. Entonces f es una aplicación K-cuasiregular gracias a los resultados de [6] y [35] (ver también [4]). □

Para cerrar la subsección, observemos que de la demostración del *Teorema 3.16* engloba, perdiendo el extremo $q = p$ cuando $p > 2$, al *Teorema 3.10* y al *Teorema 3.13* de las secciones anteriores. Efectivamente, si $p = 2$, entonces el espacio $E^{2,q}_{loc}(\mathbb{C}) = W^{1,q}_{loc}(\mathbb{C})$ con lo que alcanzamos el resultado de la *Subsección 3.2.2*. Si $p > 2$ y $q < p$, entonces la demostración anterior nos demuestra que $g \in W^{1,r}_{loc}(\mathbb{C})$ para alguna $r > 2$ y en particular, g es acotada. Por ello, como $g = f - \nu\overline{f}$, entonces f también sería acotada y como $\overline{\partial} g = -\overline{f \partial \nu}$, llegaríamos a ver que $g \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{C})$. Por lo tanto, gracias a que este espacio es un álgebra de Banach, también tendríamos que $f \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{C})$ tal y como asegurábamos. Con ello alcanzamos el resultado de la *Subsección 3.2.1*. Lamentablemente, este método, aunque sea mas breve que el dado en las subsecciones anteriores, no nos permite alcanzar el extremo $p = q$ cuando $p > 2$. Evidentemente, si consideramos el caso $q = p > 2$, entonces demostraríamos que $\overline{\partial} g \in L^1_{loc}(\mathbb{C})$ pero esto no nos sería suficiente para probar que $g \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{C})$. Efectivamente, observemos que la función $H = g + \mathcal{C}\left(\overline{f\partial\nu}\right)$ sigue siendo holomorfa. Sin embargo, si derivamos distribucionalmente con respecto a ∂, vemos que tendríamos la igualdad $\partial g = \partial H - \mathcal{B}\left(\overline{f\partial\nu}\right)$ y dado que el operador $\mathcal{B} : L^1 \to L^1$ no es acotado, no podríamos asegurar que $\partial g \in L^1_{loc}(\mathbb{C})$.

3.2.4. Suavidad de las Soluciones Cuasiregulares .

En las secciones anteriores vimos que bajo ciertas situaciones, las soluciones distribucionales de la *Ecuación de Beltrami Conjugada* son verdaderas aplicaciones K-cuasiregulares. En esta sección deseamos obtener la mejor regularidad posible para las soluciones cuasiregulares de la *Ecuación de Beltrami Conjugada Homogénea*

$$\overline{\partial} f \;-\; \nu\,\overline{\partial f} \;=\; 0\,.$$

Además queremos comparar los resultados alcanzados con los resultados conocidos para la ecuación de Beltrami $\mathbb{C}$-lineal.

Para lograr la regularidad máxima, nos apoyaremos en los resultados ya mostrados en las subsecciones previas. Concretamente tenemos un resultado análogo al de A. Clop et. al. para la *Ecuación de Beltrami Homogénea*. Mas aún, gracias a las ideas aportadas por L. Baratchart et. al. consiguimos mejorar sensiblemente el resultado llegando a extremos que no pueden alcanzarse en la ecuación $\mathbb{C}$-lineal. Concretamente tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.19. *Tomemos $\nu \in W^{1,p}_c(\mathbb{C})$ con $\|\nu\|_\infty = k < 1$ y $1+k < p$. Sea $f \in L^{\frac{q}{q-1}}_{loc}(\mathbb{C})$ para alguna $1 \leq q \leq p$ una solución distribucional de*

$$\overline{\partial} f \;-\; \nu\,\overline{\partial f} \;=\; 0\,.$$

Se cumple que

(1) Si $p>2$, entonces $f\in W^{2,p}_{loc}(\mathbb{C})$.

(2) Si $p=2$ y $1\le q<2$, entonces $f\in W^{2,r}_{loc}(\mathbb{C})$ para todo $r<2$.

(3) Si $1+k<p<2$ y $1\le q\le q_0$, entonces $f\in W^{2,r}_{loc}(\mathbb{C})$ para todo $1<r<q_0$.

En los tres casos, f es cuasiregular.

Este resultado ya se conocía para la ecuación de Beltrami $\mathbb{C}$-lineal (ver *Teorema 3.1*). Como ya mencionamos, la diferencia principal con el método de [11] es que ahora no podemos usar el Teorema de Factorización de Stoilov y reducirnos a soluciones cuasiconformes.

Demostración. Gracias a los resultados de las secciones anteriores, en todos los casos *(1)*, *(2)* y *(3)* sabemos que f es K-cuasiregular y por lo tanto, ambas derivadas $\overline{\partial} f$ y ∂f, pertenecen a $L^{1+\frac{1}{k},\infty}_{loc}(\mathbb{C})$ y definen una distribución absolutamente contínua en $L^p_c(\mathbb{C})$ siempre y cuando $p>1+k$. Como consecuencia, toda derivada distribucional segunda de f actúa de forma continua sobre $W^{1,p}_c(\mathbb{C})$. Así estamos legitimados para escribir

$$\begin{aligned}
\left\langle \overline{\partial}\partial f\,,\varphi\right\rangle &= -\left\langle \overline{\partial} f\,,\overline{\partial}\varphi\right\rangle\\
&= -\left\langle \nu\,\overline{\partial f}\,,\overline{\partial}\varphi\right\rangle\\
&= -\left\langle \overline{\partial f}\,,\overline{\partial}\,(\overline{\nu}\,\varphi)\,-\,\varphi\,\overline{\partial\nu}\right\rangle\\
&= -\left\langle \partial\overline{f}\,,\partial\,(\overline{\nu}\,\varphi)\right\rangle + \left\langle \overline{\partial f}\,,\varphi\,\overline{\partial\nu}\right\rangle\\
&= -\left\langle \overline{\nu}\partial f\,,\partial\,(\overline{\nu}\,\varphi)\right\rangle + \left\langle \overline{\partial f}\,,\varphi\,\overline{\partial\nu}\right\rangle\\
&= \left\langle \overline{\partial}\,(\overline{\nu}\partial f)\,,\overline{\nu}\,\varphi\right\rangle + \left\langle \overline{\partial f}\,,\varphi\,\overline{\partial\nu}\right\rangle\\
&= \left\langle \overline{\partial\nu}\,\partial f\,,\overline{\nu}\,\varphi\right\rangle + \left\langle \overline{\nu}\,\overline{\partial}\partial f\,,\overline{\nu}\,\varphi\right\rangle + \left\langle \overline{\partial f}\,,\varphi\,\overline{\partial\nu}\right\rangle\\
&= \left\langle \overline{\partial}\partial f\,,|\,\nu\,|^2\,\varphi\right\rangle + \left\langle \partial\nu\,\overline{\partial f}\,+\,\nu\,\overline{\partial\nu}\,\partial f\,,\varphi\right\rangle
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\left\langle \overline{\partial}\partial f\,,\,\left(1\,-\,|\,\nu\,|^2\right)\varphi\right\rangle = \left\langle \partial\nu\,\overline{\partial f}\,+\,\nu\,\overline{\partial\nu}\,\partial f\,,\varphi\right\rangle .$$

Si etiquetamos $\psi=(1-|\nu|^2)\varphi$, esta igualdad se escribe como

$$\left\langle \overline{\partial}\partial f\,,\,\psi\right\rangle = \left\langle \frac{\partial\nu\,\overline{\partial f}\,+\,\nu\,\overline{\partial\nu}\,\partial f}{\left(1\,-\,|\,\nu\,|^2\right)}\,,\psi\right\rangle .$$

Es decir,

$$\overline{\partial}\partial f = \frac{\partial\nu\,\overline{\partial f}\,+\,\nu\,\overline{\partial\nu}\,\partial f}{\left(1\,-\,|\,\nu\,|^2\right)} = (\,Id\,-\,\nu\,\mathbf{C}\,)^{-1}\left(\partial\nu\,\overline{\partial f}\right) . \tag{3.8}$$

Ahora, estudiamos cada caso por separado.

(1) Para $p>2$, sabemos que $\nu\in C^{1-\frac{2}{p}}(\mathbb{C})$. Por las estimaciones clásicas de Schauder, sabemos que f tiene derivadas ∂f y $\overline{\partial} f$ Holder contínuas y en particular acotadas. Como consecuencia, el lado derecho de (3.8) pertenece a $L^p_c(\mathbb{C})$ y por lo tanto $f\in W^{2,p}_{loc}$.

(2) Cuando $p=2$, tenemos que $\overline{\partial} f$ y ∂f pertenecen a $L^r_{loc}(\mathbb{C})$ para toda $1\le r<\infty$, pero no necesariamente en $L^\infty_{loc}(\mathbb{C})$. Esto es una consecuencia del resultado de Iwaniec en [21] y de la inclusión $W^{1,2}_c\hookrightarrow VMO_c(\mathbb{C})$. De esta forma obtenemos que el lado derecho de (3.8) pertenece a $L^r_c(\mathbb{C})$ para toda $r<2$ consiguiendo así el apartado.

(3) Para $1+k<p<2$, solo tenemos garantizado que $\overline{\partial} f$, $\partial f \in L^{1+\frac{1}{k},\infty}_{loc}$ gracias a los resultados de [6]. Así si la acción de $\overline{\partial}\partial f$ sobre $\psi \in L^{\frac{r}{r-1}}$ esta bien definida solamente si

$$\frac{1}{p} + \frac{r-1}{r} < \frac{k}{1+k}\,.$$

O lo que es equivalente $r < q_0$, concluyendo así la prueba. □

Observemos que el primer paso para la prueba anterior era ver que, partiendo de una solución distribucional, teníamos que la solución estaba en algún espacio de Sobolev. El segundo paso consiste en ver que la primeras derivadas de la solución también pertenecen a un espacio de Sobolev. A continuación supondremos que la solución ya está en algún espacio de Sobolev y obtendremos información sobre sus derivadas segundas.

Corolario 3.20. *Sean $1 \le q \le p < \infty$ y $\nu \in W^{1,p}_c(\mathbb{C})$ un coeficiente uniformemente elíptico. Si $f \in W^{1,\frac{q}{q-1}}_{loc}(\mathbb{C})$ es una solución puntual de la ecuación*

$$\overline{\partial} f \,-\nu\,\overline{\partial f} \;=\;0\,.$$

Entonces, $\overline{\partial}\partial f \in L^{\frac{pq'}{p+q'}}_c(\mathbb{C})$. En particular, cuando $p > q$ tenemos que $f \in W^{2,\frac{pq'}{p+q'}}_{loc}(\mathbb{C})$.

Demostración. Para la prueba del resultado, solo hay que seguir las mismas líneas que en la prueba del Teorema 3.19, bajo estas nuevas condiciones, y alcanzar la identidad (3.8).

$$\overline{\partial}\partial f \;=\; \frac{\partial\nu\,\overline{\partial f} \,+\, \nu\,\overline{\partial\nu}\,\partial f}{\left(1\,-\,|\,\nu\,|^2\right)}\,.$$

El corolario se sigue claramente de esta identidad y de que si $p > q$ tenemos $\frac{pq'}{p+q'} > 1$. Entonces $\overline{\partial}\partial$ controla al resto de segundas derivadas . □

Hemos de destacar que este corolario, cuando $p < 1+k$, no tiene análogo conocido para la ecuación $\mathbb{C}$-lineal. Para ver esto, fijemos $\mu \in W^{1,p}_c(\mathbb{C})$ con $\|\mu\|_\infty = k < 1$ y $p < 1+k$. Supongamos además que tenemos $f \in W^{1,\frac{q}{q-1}}_{loc}(\mathbb{C})$ una solución de

$$\overline{\partial} f = \mu\partial f\,.$$

En tal caso, llegamos a la expresión

$$\overline{\partial}\partial f - \mu\partial\partial f = \partial\mu\partial f\,.$$

O equivalentemente, siempre que tenga sentido, podemos escribir

$$\overline{\partial}\partial f = (\,Id\,-\,\mu\,\mathcal{B}\,)^{-1}\,(\,\partial\mu\,\partial f\,)\ .$$

Sin embargo, en esta ocasión, que $\partial f\partial\mu$ pertenezca a $L^s_{loc}(\mathbb{C})$ para alguna $s > 1$ no nos aporta información sobre las segundas derivadas de la solución. Evidentemente, el operador de Beltrami $Id - \mu\mathcal{B} : L^s(\mathbb{C}) \to L^s(\mathbb{C})$ podría no ser invertible si s está próximo a 1 y por lo tanto, no podremos asegurar que la integrabilidad de $\partial\mu\partial f$ coincida con la regularidad de $\overline{\partial}\partial f$ al contrario de lo observado en la *Ecuación de Beltrami Conjugada Homogénea.*

3.3. La Ecuación de Beltrami Generalizada.

Tras dar a conocer las diferencias entre las *Ecuaciones de Beltrami y Beltrami Conjugada*, parece que la ecuación $\mathbb{R}$-lineal tiene mejores propiedades que su análoga $\mathbb{C}$- lineal. Esto se debe a que los operadores de Beltrami del tipo $(\, Id - \mu\,\mathcal{B}\,)$ no juegan un rol tan decisivo como en la ecuación $\mathbb{C}$-lineal. Ante esta situación nos preguntamos ¿ pueden los resultados anteriores extenderse a la *Ecuación de Beltrami Generalizada*

$$\overline{\partial} f \,=\, \mu \partial f \,+\, \nu \overline{\partial f} \,+\, h\,,$$

cuando los coeficientes $\mu,\,\nu \in W^{1,p}_c(\mathbb{C})$ con $p < 2$ o incluso si $1 < p \leq 1 + \||\mu| + |\nu|\|_\infty$? Claramente, si $h = 0$ trataremos con la *Ecuación de Beltrami Generalizada Homogénea*.

Nuestro primer objetivo será demostrar el siguiente resultado de automejora para las soluciones distribucionales de (1.5). Posteriormente pasaremos a estudiar la existencia de segundas derivadas.

Lema 3.21. *Fijemos $1 < r < p \leq \infty$. Supongamos que tenemos dos coeficientes de Beltrami $\mu,\,\nu \in W^{1,p}_c(\mathbb{C})$ tales que $\|\,|\,\mu\,|\,+\,|\,\nu\,|\,\|_\infty \,=\, k \,<\, 1$ y un término independiente $h \in L^{\frac{r}{r-1}}_{loc}(\mathbb{C})$. Si $f \in L^{\frac{r}{r-1}}_{loc}(\,\mathbb{C}\,)$ es una solución distribucional de la* Ecuación de Beltrami Generalizada

$$\overline{\partial} f \,=\, \mu \partial f \,+\, \nu \overline{\partial f} \,+\, h\,.$$

Entonces se cumple que

(1) Si $p \geq 2$, entonces $f \in W^{1,\frac{r}{r-1}}_{loc}(\mathbb{C})$.

(2) Si $1 + k < p < 2$ y $\frac{1}{r} > \frac{1}{p} + \frac{k}{1+k}$, entonces $f \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$.

Antes avanzar con la ecuación de Beltrami Generalizada necesitamos del siguiente resultado previo. Tras su demostración daremos la prueba del lema.

Proposición 3.22. *Sean $1 < r < p < \infty$. Tomemos $g \in W^{1,p}_c(\,\mathbb{C}\,) \cap L^\infty(\,\mathbb{C}\,)$ y $h \in L^{\frac{r}{r-1}}_c(\,\mathbb{C}\,)$. Entonces, para toda $\varphi \in C^\infty_c(\,\mathbb{C}\,)$ se cumple que:*

$$\langle\, \partial\,\mathcal{B}\,h\,,\, g\,\varphi\,\rangle \,=\, \langle\, \mathcal{B}\,\partial\,h\,,\, g\,\varphi\,\rangle\;.$$

Mas aún, la igualdad de extiende a toda $\varphi \in W^{1,p}_c(\mathbb{C}) \cap L^\infty(\mathbb{C})$.

Demostración. Consideramos un radio $R > 0$ tal que $\operatorname{supp}(h) \cup \operatorname{supp}(g) \subset \mathbb{D}_R$. A continuación veremos que tanto $\partial\mathcal{B}h$ como $\mathcal{B}\partial h$ están bien definidas como distribuciones y que extienden a $W^{1,p}_c(\,\mathbb{C}\,) \cap L^\infty(\mathbb{C})$. Sea $\varphi \in C^\infty_c(\,\mathbb{C}\,)$, entonces

$$\begin{aligned}\langle\, \partial\,\mathcal{B}\,h\,,\,\varphi\,\rangle \,=\, -\left\langle\, \mathcal{B}\,h\,,\,\overline{\partial}\varphi\,\right\rangle \Longrightarrow& \\ \Longrightarrow |\,\langle\, \partial\,\mathcal{B}\,h\,,\,\varphi\,\rangle\,| \,\leq\,& c_{R,p,r}\,\|\,\mathcal{B}\,\|_{L^r \to L^r}\,\|\,h\,\|_{L^r}\,\|\,D\varphi\,\|_{L^p}\;.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle\, \mathcal{B}\,\partial h\,,\,\varphi\,\rangle \,=\, -\,\langle\, \partial h\,,\,\mathcal{B}'\,\varphi\,\rangle \,=\, -\left\langle\, h\,,\,\overline{\partial}\,\mathcal{B}'\varphi\,\right\rangle \Longrightarrow& \\ \Longrightarrow |\,\langle\, \partial\,\mathcal{B}\,h\,,\,\varphi\,\rangle\,| \,\leq\,& C_{R,p,r}\,\|\,\mathcal{B}\,\|_{L^p \to L^p}\,\|\,h\,\|_{L^r}\,\|\,D\varphi\,\|_{L^p}\;.\end{aligned}$$

con lo que conseguimos ver que están bien definidas. Ya, sin mas que considerar la norma de $W_c^{1,p}(\mathbb{C}) \cap L^\infty(\mathbb{C})$ dada como $\|\cdot\|_{W^{1,p}\cap L^\infty} = \|D\cdot\|_{L^p} + \|\cdot\|_{L^\infty}$ vemos que ambas distribuciones extienden a toda $\varphi \in W_c^{1,p}(\mathbb{C}) \cap L^\infty(\mathbb{C})$.

Veamos la igualdad. Para toda φ tenemos

$$\begin{aligned} \langle \partial \mathcal{B} h\,,\, \varphi \rangle &= -\left\langle h\,,\, \mathcal{B}' \overline{\partial} \varphi \right\rangle = -\left\langle h\,,\, \overline{\partial} \mathcal{B}' \varphi \right\rangle = \\ &= \langle \partial h\,,\, \mathcal{B}' \varphi \rangle = \langle \mathcal{B} \partial h\,,\, \varphi \rangle\,. \end{aligned}$$

Aquí hemos usado que $\mathcal{B}' \overline{\partial} = \overline{\partial} \mathcal{B}'$ para toda función test. Para acabar la prueba, observamos que $W_c^{1,p}(\mathbb{C}) \cap L^\infty(\mathbb{C})$ es un álgebra de Banach. De esta forma podemos cambiar φ por $g\varphi \in W_c^{1,p}(\mathbb{C}) \cap L^\infty(\mathbb{C})$ y con ello conseguimos la igualdad del enunciado finalizando la prueba. $\square$

Demostración del Lema 3.21.

El esquema de la prueba es el siguiente

(a) Localizamos la solución f para obtener otra *Ecuación de Beltrami Generalizada* donde ahora todos los términos involucrados tendrán soporte compacto.

(b) Consideramos una combinación lineal de la función localizada y veremos que dicha combinación tiene primeras derivadas integrables.

(c) Veremos que la combinación lineal traspasa la integrabilidad de las primeras derivadas a la solución original f.

Comencemos por el punto *(a)* del esquema. Para ver la localización actuamos como sigue. Consideramos una función $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ arbitraria a valores reales y definimos la función $F \in L_c^{\frac{r}{r-1}}(\mathbb{C})$ como $F = \psi\, f$. Evidentemente, la regularidad global de F implica la regularidad local de f.

Ahora veremos que F satisface algún tipo de *Ecuación de Beltrami Generalizada*. Como $f \in L_{loc}^{\frac{r}{r-1}}$ es una *solución distribucional*, para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ tenemos que

$$\langle f\,,\, \partial\phi \rangle = \left\langle f\,,\, \overline{\mu}\, \overline{\partial}\phi \right\rangle + \left\langle f\,,\, \phi\, \overline{\partial}\overline{\mu} \right\rangle + \left\langle \overline{f}\,,\, \phi\, \partial\overline{\nu} \right\rangle + \left\langle \overline{f}\,,\, \overline{\nu}\, \partial\, \phi \right\rangle - \langle h\,,\, \phi \rangle\,.$$

En particular si $\phi = \psi\varphi$ con $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ la función elegida arriba y $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ una función arbitraria, tenemos

$$\begin{aligned} \langle f\,,\, \psi\, \partial\, \varphi \rangle + \langle f\,,\, \varphi\, \partial\psi \rangle = &\left\langle f\,,\, \psi\,\varphi\, \overline{\partial}\overline{\mu} \right\rangle + \left\langle f\,,\, \overline{\mu}\,\psi\, \overline{\partial}\varphi \right\rangle + \left\langle f\,,\, \overline{\mu}\,\varphi\, \overline{\partial}\psi \right\rangle \\ &+ \left\langle \overline{f}\,,\, \psi\,\varphi\, \partial\overline{\nu} \right\rangle + \left\langle \overline{f}\,,\, \overline{\nu}\,\psi\, \partial\varphi \right\rangle + \left\langle \overline{f}\,,\, \overline{\nu}\,\varphi\, \partial\psi \right\rangle - \langle h\,,\, \psi\,\varphi \rangle \end{aligned}$$

Agrupando convenientemente llegamos a

$$\begin{aligned} \langle \psi f\,,\, \partial\varphi \rangle = &\left\langle \psi f\,,\, \varphi\, \overline{\partial}\overline{\mu} \right\rangle + \left\langle \psi f\,,\, \overline{\mu}\, \overline{\partial}\varphi \right\rangle + \left\langle \overline{\psi\, f}\,,\, \varphi\, \partial\overline{\nu} \right\rangle + \left\langle \overline{\psi\, f}\,,\, \overline{\nu}\, \partial\varphi \right\rangle \\ &+ \left\langle \nu\, \overline{f}\, \overline{\partial}\psi\,,\, \varphi \right\rangle - \langle h\,\psi\,,\, \varphi \rangle - \left\langle f\, \overline{\partial}\psi\,,\, \varphi \right\rangle - \langle \mu\, f\, \partial\psi\,,\, \varphi \rangle \end{aligned}$$

donde hemos usado que $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ es a valores reales. Escribiendo la igualdad anterior en términos de $F = f\psi$ tenemos que

$$\begin{aligned} \langle F\,,\, \partial\varphi \rangle = &\left\langle F\,,\, \varphi\, \overline{\partial}\overline{\mu} \right\rangle + \left\langle F\,,\, \overline{\mu}\, \overline{\partial}\varphi \right\rangle + \left\langle \overline{F}\,,\, \varphi\, \partial\overline{\nu} \right\rangle + \left\langle \overline{F}\,,\, \overline{\nu}\, \partial\varphi \right\rangle \\ &- \left\langle \left(f - \nu\, \overline{f} \right) \overline{\partial}\psi + \mu\, f\, \partial\psi + h\,\psi\,,\, \varphi \right\rangle\,. \end{aligned}$$

Así obtenemos que $F \in L_c^{\frac{r}{r-1}}(\mathbb{C})$ es una solución distribucional de la *Ecuación de Beltrami Generalizada*

$$\overline{\partial} F = \mu\, \partial F + \nu\, \overline{\partial F} + H\,, \tag{3.9}$$

donde H está definida como

$$H := \left(f - \nu \overline{f} \right) \overline{\partial} \psi - \mu f \partial \psi + h\psi\,.$$

Observemos que H pertenece a $L_c^{\frac{r}{r-1}}(\mathbb{C})$.

A continuación pasaremos al punto *(b)* del esquema. Dada la función F definida arriba, definimos una nueva función G como

$$G = (\, Id - \mu \mathcal{B} - \nu\, \mathbf{C}\,)\, F\,.$$

Evidentemente como $F \in L_c^{\frac{r}{r-1}}(\mathbb{C})$, entonces $G \in L_c^{\frac{r}{r-1}}(\mathbb{C})$. Por lo tanto tiene sentido hablar de la derivada distribucional $\overline{\partial} G$. Para toda $\varphi \in C_c^{\infty}(\mathbb{C})$ tenemos

$$\begin{aligned}
\left\langle \overline{\partial} G\,, \varphi \right\rangle &= - \langle G\,, \partial\varphi \rangle = - \left\langle F - \nu \overline{F} - \mu \mathcal{B} F\,, \partial \varphi \right\rangle \\
&= - \langle F\,, \partial\varphi \rangle + \left\langle \nu\, \overline{F}\,, \partial\varphi \right\rangle + \langle \mu \mathcal{B} F\,, \partial\varphi \rangle \\
&= \left\langle \overline{\partial} F\,, \varphi \right\rangle - \left\langle \overline{\partial F}\,, \overline{\nu}\, \varphi \right\rangle - \left\langle \overline{F}\, \overline{\partial} \nu\,, \varphi \right\rangle + \langle \mathcal{B} F\,, \partial\,(\,\overline{\mu}\, \varphi\,) \rangle - \left\langle \overline{\partial} \mu\, \mathcal{B} F\,, \varphi \right\rangle \\
&= \left\langle \overline{\partial} F\,, \varphi \right\rangle - \left\langle \overline{\partial F}\,, \overline{\nu}\, \varphi \right\rangle - \left\langle \overline{F}\, \overline{\partial} \nu\,, \varphi \right\rangle - \left\langle \overline{\partial} \partial \mathcal{C} F\,, \overline{\mu}\, \varphi \right\rangle - \left\langle \overline{\partial} \mu\, \mathcal{B} F\,, \varphi \right\rangle \\
&= \left\langle \overline{\partial} F\,, \varphi \right\rangle - \left\langle \overline{\partial F}\,, \overline{\nu}\, \varphi \right\rangle - \left\langle \overline{F}\, \overline{\partial} \nu\,, \varphi \right\rangle - \langle \partial F\,, \overline{\mu}\, \varphi \rangle - \left\langle \overline{\partial} \mu\, \mathcal{B} F\,, \varphi \right\rangle \\
&= \left\langle H - \overline{F}\, \overline{\partial} \nu - (\, \mathcal{B} F\,)\, \overline{\partial} \mu\,, \varphi \right\rangle.
\end{aligned}$$

Aquí hemos usado $\overline{\partial} \mathcal{C} F = F$ en la quinta línea y la ecuación (3.9) en la última línea. De esta forma aseguramos que G es una solución distribucional de

$$\overline{\partial} G = H - \overline{F}\, \overline{\partial} \nu - (\, \mathcal{B} F\,)\, \overline{\partial} \mu \tag{3.10}$$

y evidentemente $\overline{\partial} G \in L_c^s(\mathbb{C})$ con $s = \frac{pr'}{p+r'}$. Mas aún, aplicando la *Trasformada de Cauchy* directamente en la ecuación (3.10) tendremos que

$$G = Q + \mathcal{C}\left(H - \overline{F}\, \overline{\partial} \nu - (\, \mathcal{B} F\,)\, \overline{\partial} \mu \right)$$

con $\overline{\partial} Q = 0$. Sin embargo, como G tiene soporte compacto, Q ha de ser la función nula y en tal caso

$$\partial G = \mathcal{B}\left(H - \overline{F}\, \overline{\partial} \nu - (\, \mathcal{B} F\,)\, \overline{\partial} \mu \right) \in L^s(\,\mathbb{C}\,)\,.$$

Por lo tanto, $G \in W_c^{1,s}(\,\mathbb{C}\,)$.

Antes de seguir, necesitamos suponer que para dos coeficientes de Beltrami μ y ν uniformemente elípticos, el operador

$$\left(Id - \frac{\mu}{1 - |\nu|^2}\, \mathcal{B} - \frac{\nu\, \overline{\mu}}{1 - |\nu|^2}\, \mathbf{C} \right) : L^t(\,\mathbb{C}\,) \to L^t(\,\mathbb{C}\,) \tag{3.11}$$

es invertible para toda $1 + k < t < 1 + \frac{1}{k}$. También necesitaremos suponer que si los coeficientes pertenecen a VMO_c, entonces el operador es invertible para toda $1 < t < \infty$. Para demostrarlo definimos

$$\mu_1 := \frac{\mu}{1 - |\nu|^2} \qquad \text{y} \qquad \nu_1 := \frac{\nu\, \overline{\mu}}{1 - |\nu|^2}\,.$$

Es evidentemente que $\|\mu_1\|_\infty$ y $\|\nu_1\|_\infty$ son valores inferiores a k gracias a la elipticidad de los coeficientes μ y ν. Entonces, podemos ver que

$$(Id - \nu_1 \mathbf{C} - \mu_1 \mathcal{B}) = (Id - \nu_1 \mathbf{C}) \left(Id - \frac{\mu_1}{1 - |\nu_1|^2} \mathcal{B} - \frac{\nu_1 \overline{\mu_1}}{1 - |\nu_1|^2} \overline{\mathcal{B}} \right) .$$

Como el operador $(Id - \nu_1 \mathbf{C})$ es invertible en todos los espacios $L^p(\mathbb{C})$ con $1 \leq p \leq \infty$, la invertibilidad de nuestro operador se reduce a la invertiblidad del operador de Beltrami que aparece en último lugar, lo cual vamos a acometer.

Supongamos que $\mu, \nu \in W^{1,p}_c(\mathbb{C})$ con $p \geq 2$. Entonces $\frac{\mu_1}{1-|\nu_1|^2}$ y $\frac{\nu_1 \overline{\mu_1}}{1-|\nu_1|}$ pertenecen a $W^{1,p}_c(\mathbb{C})$ con $p \geq 2$ y por lo tanto son de $VMO_c(\mathbb{C})$. Esto nos asegura que si $\mu, \nu \in W^{1,p}_c(\mathbb{C})$ con $p \geq 2$, entonces el operador (3.11) es invertible para toda $t \in (1, \infty)$. Sin embargo, si $\mu, \nu \in W^{1,p}_c(\mathbb{C})$ con $p < 2$, el operador (3.11) solo será invertible dentro del intervalo crítico asociado al operador

$$Id - \frac{\mu_1}{1 - |\nu_1|^2} \mathcal{B} - \frac{\nu_1 \overline{\mu_1}}{1 - |\nu_1|^2} \overline{\mathcal{B}} : L^t(\mathbb{C}) \to L^t(\mathbb{C}) .$$

Observemos que este operador de Beltrami se reescribe en términos de μ y ν como

$$Id - \frac{\left(1 - |\nu|^2\right)\mu}{\left(1 - |\nu|^2\right)^2 - |\nu\overline{\mu}|^2} \mathcal{B} - \frac{\nu\overline{\mu}^2}{\left(1 - |\nu|^2\right)^2 - |\nu\overline{\mu}|^2} \overline{\mathcal{B}} : L^t(\mathbb{C}) \to L^t(\mathbb{C}) .$$

Evidentemente este operador es invertible para toda $t \in \left(1 + k_1 \, , \, 1 + \frac{1}{1+k_1}\right)$ donde definimos

$$k_1 := \left\| \frac{|\mu|}{1 - |\nu|^2 - |\nu\mu|} \right\|_\infty \leq k < 1 .$$

Por otro lado, ya que por hipótesis $|\mu| + |\nu| \leq k < 1$, tenemos que

$$|\mu| + k\,|\nu|\,(|\nu| + |\mu|) \leq |\mu| + k^2\,|\nu| \leq |\mu| + |\nu| \leq k$$

y así

$$|\mu| \leq k\,(1 - |\nu|\,(|\nu| + |\mu|)) .$$

Es decir, llegamos a tener la cota $k_1 \leq k$ y tendremos que el intervalo crítico $\left(1 + k \, , \, 1 + \frac{1}{k}\right)$ está contenido en el intervalo $\left(1 + k_1 \, , \, 1 + \frac{1}{k_1}\right)$. Por lo tanto el operador (3.11) sería invertible en el intervalo crítico. Una vez tenemos la invertibilidad del operador podemos continuar con la prueba.

Sabemos que $G \in W^{1,s}_c(\mathbb{C})$ y queremos traspasarle esta regularidad a F y por lo tanto a f. Para ello, consideremos ∂G en el sentido de las distribuciones. Para toda $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{C})$ tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \partial G , \varphi \rangle &= - \left\langle G , \overline{\partial}\varphi \right\rangle = \left\langle -F + \nu\overline{F} + \mu\,(\mathcal{B}F) , \overline{\partial}\varphi \right\rangle \\ &= \langle \partial F , \varphi \rangle + \left\langle \overline{F} , \overline{\partial}(\overline{\nu}\varphi) \right\rangle + \left\langle \mathcal{B}F , \overline{\partial}(\overline{\mu}\varphi) \right\rangle - \left\langle \overline{F}\,\partial\nu , \varphi \right\rangle - \langle (\mathcal{B}F)\,\partial\mu , \varphi \rangle . \end{aligned}$$

Aquí, sustituiremos $\langle \overline{F} , \overline{\partial}(\overline{\nu}\varphi) \rangle$ usando que $\partial\overline{F} = \overline{\overline{\partial}F}$, que $\overline{\partial}F$ satisface (3.9) y que la expresión

$$\langle \partial\overline{F} , \phi \rangle = \langle \overline{\partial F} , \mu\varphi \rangle + \langle \partial F , \nu\phi \rangle + \langle \overline{H} , \phi \rangle$$

extiende toda $\phi \in W^{1,p}_c(\mathbb{C}) \cap L^\infty(\mathbb{C})$. Tras la substituición alcanzamos que

$$\begin{aligned} \langle \partial G , \varphi \rangle \,=\, \langle \partial F , \varphi \rangle - \left\langle \partial F , |\nu|^2 \varphi \right\rangle - \left\langle \overline{\partial F} , \mu \overline{\nu} \varphi \right\rangle + \left\langle \mathcal{B}F , \overline{\partial} (\overline{\mu} \varphi) \right\rangle \\ - \left\langle \nu \overline{H} , \varphi \right\rangle - \left\langle \overline{F} \partial \nu + (\mathcal{B}F) \partial \mu , \varphi \right\rangle . \end{aligned}$$

Simplificando y reordenando los términos,

$$\left\langle \partial F , \left(1 - |\nu|^2 \right) \varphi \right\rangle + \left\langle \mathcal{B}F , \overline{\partial} (\overline{\mu} \varphi) \right\rangle - \left\langle \overline{\partial F} , \, \mu \overline{\nu} \varphi \right\rangle \,=\, \left\langle \partial G - \nu \overline{H} - \overline{F} \partial \nu - (\mathcal{B}F) \partial \mu , \varphi \right\rangle .$$

Además, esta igualdad se extiende toda $\varphi \in W^{1,p}_c(\mathbb{C}) \cap L^\infty(\mathbb{C})$. En particular, para funciones del tipo $\varphi = \frac{\Psi}{1-|\nu|^2}$ con $\Psi \in C^\infty_c(\mathbb{C})$ arbitraria. Entonces,

$$\langle \partial F , \Psi \rangle - \left\langle \partial \mathcal{B}F , \frac{\overline{\mu}}{1-|\nu|^2} \Psi \right\rangle - \left\langle \overline{\partial F} , \frac{\mu \overline{\nu}}{1-|\nu|^2} \Psi \right\rangle \,=\, \left\langle \frac{\partial G - \nu \overline{H} - \overline{F} \partial \nu - (\mathcal{B}F) \partial \mu}{1 - |\nu|^2} , \Psi \right\rangle .$$

Si usamos la propsoción anterior para intercambiar la transformada de Beurling con la derivada en el lado izquierdo, podemos tomar operadores adjuntos y escribir

$$\left\langle \partial F , \left(Id - \mathcal{B}' \frac{\overline{\mu}}{1 - |\nu|^2} - \mathbf{C} \frac{\mu \overline{\nu}}{1 - |\nu|^2} \right) \Psi \right\rangle \,=\, \left\langle \frac{\partial G - \nu \overline{H} - \overline{F} \partial \nu - (\mathcal{B}F) \partial \mu}{1 - |\nu|^2} , \Psi \right\rangle . \tag{3.12}$$

Observemos que el operador

$$\left(Id - \mathcal{B}' \frac{\overline{\mu}}{1 - |\nu|^2} - \mathbf{C} \frac{\mu \overline{\nu}}{1 - |\nu|^2} \right) : \, L^{t'}(\mathbb{C}) \,\to\, L^{t'}(\mathbb{C})$$

es el operador adjunto del operador indicado en (3.11), y por lo tanto será invertible para todo $t' \in \left(1 + k , 1 + \frac{1}{k}\right)$ si los coeficientes son acotados y para toda $t' \in (1 , \infty)$ si además pertenecen a $VMO_c(\mathbb{C})$. Llegados a este punto, consideramos cada apartado del lema por separado. Empezamos por el apartado *(2)*.

(2) En este caso, tenemos que el operador

$$Id - \mathcal{B}' \frac{\overline{\mu}}{1 - |\nu|^2} - \mathbf{C} \frac{\mu \overline{\nu}}{1 - |\nu|^2} : \, L^t(\mathbb{C}) \mapsto L^t(\mathbb{C})$$

es invertible para toda $t \in \left(1 + k , 1 + \frac{1}{k}\right)$. Además, gracias a las hipótesis del enunciado $1+k < p$ y $\frac{1}{r} > \frac{1}{p} + \frac{k}{1+k}$ tenemos que

$$1 + k < s = \frac{pr'}{p + r'} < 2 < s' < 1 + \frac{1}{k} .$$

Ahora actuamos como sigue. El lado derecho de (3.12) puede extenderse por dualidad a toda $\Psi \in L^{s'}(\mathbb{C})$. Entonces podemos usar como función test a la función Ψ definida por

$$\Psi := \left(Id - \mathcal{B}' \frac{\overline{\mu}}{1 - |\nu|^2} - \mathbf{C} \frac{\mu \overline{\nu}}{1 - |\nu|^2} \right)^{-1} \varphi$$

con $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{C})$ arbitraria. En tal caso obtenemos que

$$\langle \partial F , \varphi \rangle = \left\langle \frac{\partial G - \nu \overline{h} - \overline{F} \partial \nu - (\mathcal{B}F) \partial \mu}{1 - |\nu|^2} , \left(Id - \mathcal{B}' \frac{\overline{\mu}}{1 - |\nu|^2} - \mathbf{C} \frac{\mu \overline{\nu}}{1 - |\nu|^2} \right)^{-1} \varphi \right\rangle .$$

O equivalentemente, usando el operador adjunto

$$\langle \partial F \,,\, \varphi \rangle = \left\langle \left(Id - \frac{\mu}{1 - |\nu|^2} \mathcal{B} - \frac{\nu \overline{\mu}}{1 - |\nu|^2} \mathbf{C} \right)^{-1} \left(\frac{\partial G - \nu \overline{h} - \overline{F} \partial \nu - (\mathcal{B} F) \partial \mu}{1 - |\nu|^2} \right) , \varphi \right\rangle .$$

Podemos ver que efectivamente el lado derecho de la igualdad pertenece a $L^s(\mathbb{C})$. Por lo tanto, $\partial F \in L^s(\mathbb{C})$ y gracias a que F satisface la *Ecuación de Beltrami Generalizada* (3.9) tenemos que $F \in W^{1,s}_c(\mathbb{C})$. Una vez tenemos que F tiene primeras derivadas en $L^s(\mathbb{C})$ para alguna $s > 1$, podemos asegurar que $\mathcal{B}\overline{\partial} F = \partial F$ y por lo tanto escribir

$$\left(Id - \mu \mathcal{B} - \nu \overline{\mathcal{B}} \right) \overline{\partial} F = H .$$

o equivalentemente, usando la invertibilidad del operador

$$\overline{\partial} F = \left(Id - \mu \mathcal{B} - \nu \overline{\mathcal{B}} \right)^{-1} H$$

donde $H \in L_c^{\frac{r}{r-1}}(\mathbb{C})$ y por lo tanto $H \in L^t_c(\mathbb{C})$ para toda $t \leq \frac{r}{r-1}$. En particular para $t = 2$ con lo que obtenemos $f \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$.

(1) Como μ, $\nu \in W^{1,p}_c(\mathbb{C}) \cap L^\infty(\mathbb{C})$ con $p \geq 2$ tenemos que el operador

$$Id - \mathcal{B}' \frac{\overline{\mu}}{1 - |\nu|^2} - \mathbf{C} \frac{\mu \overline{\nu}}{1 - |\nu|^2} : \; L^q(\mathbb{C}) \mapsto L^q(\mathbb{C})$$

es invertible para todo $q \in (1, \infty)$. Repitiendo el razonamiento del apartado anterior llegamos a ver que F tiene derivadas distribucionales en $L^s(\mathbb{C})$ para alguna $s > 1$. Y gracias a la ecuación (3.9) tenemos que

$$\left(Id - \mu \mathcal{B} - \nu \overline{\mathcal{B}} \right) \overline{\partial} F = H ,$$

donde $H \in L_c^{\frac{r}{r-1}}(\mathbb{C})$ y el operador es invertible. Por lo tanto, $\overline{\partial} F \in L_c^{\frac{r}{r-1}}(\mathbb{C})$ y de manera inmediata concluimos que $f \in W_c^{1,\frac{r}{r-1}}(\mathbb{C})$. De esta forma finalizamos la prueba. □

Repasemos esquemáticamente la demostración del *Lema 3.21*. El punto clave en ella es, en primer lugar, demostrar que $\partial G \in L^s(\mathbb{C})$ para alguna $s > 1$ y trasferir esa integrabilidad a ∂F. Luego, una vez tenemos $F \in W^{1,s}(\mathbb{C})$ usamos la igualdad

$$\left(Id - \mu \mathcal{B} - \nu \overline{\mathcal{B}} \right) \overline{\partial} F = H$$

junto a la invertibilidad del operador $Id - \mu\mathcal{B} - \nu\overline{\mathcal{B}}$ para asegurar que $F \in W^{1,2}$ o $F \in W^{1,\frac{r}{r-1}}$ según el caso. Sin embargo, el tránsito de integrabilidad entre ∂G y ∂F no se lleva a cabo mediante este operador de Beltrami sino a través del operador

$$Id - \frac{\mu}{1 - |\nu|^2} \mathcal{B} - \frac{\nu \overline{\mu}}{1 - |\nu|^2} \mathbf{C} : \; L^t(\mathbb{C}) \to L^t(\mathbb{C}) ,$$

el cual en ocasiones puede llegar a ser aún mas elíptico que el propio operador $Id - \mu\mathcal{B} - \nu\overline{\mathcal{B}}$. Efectivamente, vimos que la invertibilidad de este operador se resume a la invertibilidad de otro operador de Beltrami el cual es invertible para todo espacio $L^t(\mathbb{C})$ con $t \in \left(1 + k_1, 1 + \frac{1}{k_1}\right)$ donde k_1 satisface $0 \leq k_1 \leq k < 1$ y viene definida por

$$k_1 = \left\| \frac{|\mu|}{1 - |\nu|^2 - |\nu \mu|} \right\|_\infty .$$

Siempre podemos dar una ecuación puramente generalizada (es decir con $\mu, \nu \neq 0$) para la cual $k_1 = k$. Para ello solo hay que razonar como sigue. Dada una función $\mu \in W^{1,p}_c(\mathbb{D}_R)$ con $\|\mu\|_\infty = k < 1$, definimos una nueva función $\nu \in W^{1,p}_c(\mathbb{D}_{2R})$ como $\nu(z) = \mu(z + R)$. En tal caso, $\||\mu| + |\nu|\|_\infty = k$ y $k_1 = k$.

De la misma forma, siempre podemos dar un par de coeficientes μ y ν con $k_1 < k$. Sin ir mas lejos, cuando tratamos con la *Ecuación de Beltrami Reducida*

$$\overline{\partial} f \;=\; 2i\lambda\, \mathrm{Im}\,(\,\partial f\,) \,+\, h\,,$$

es decir $\nu = -\lambda$ y $\mu = \lambda$ con $\|\lambda\|_\infty = \frac{k}{2} < \frac{1}{2}$, estamos en esa situación. En este caso no es difícil demostrar que $k_1 = \frac{k}{2-k^2} < k$. Para este tipo de *Ecuación de Beltrami Generalizada* en las que $k_1 < k$ tenemos la siguiente ampliación del *Lema 3.21* donde obtenemos un resultado para valores p por debajo del intervalo crítico. Concretamente.

Corolario 3.23. *En las mismas condiciones del Lema 3.21. Supongamos además que los coeficientes μ, ν satisfacen $k_1 < k$. Entonces se cumple que*

(3) Si $1 + k_1 < p \leq 1 + k$ y $\frac{1}{r} > \frac{1}{p} + \frac{k_1}{1+k_1}$, entonces $f \in W^{1,s}_{loc}(\mathbb{C})$ con $s = \frac{pr'}{p+r'} < 2$.

En particular, si $h = 0$, entonces f es cuasiregular débil.

Evidentemente, bajo estas condiciones sobre p y r tenemos que

$$1 + k_1 < s = \frac{pr'}{p + r'} < 2 < s' < 1 + \frac{1}{k_1}$$

y podremos repetir los pasos de la demostración anterior hasta llegar a la igualdad (3.12)

$$\left\langle \partial F\,,\, \left(Id \,-\, \mathcal{B}'\, \frac{\overline{\mu}}{1 \,-\, |\,\nu\,|^2} \,-\, \mathbf{C}\, \frac{\mu\,\overline{\nu}}{1 \,-\, |\,\nu\,|^2} \right) \Psi \right\rangle \,=\, \left\langle \frac{\partial G \,-\, \nu\,\overline{H} \,-\, \overline{F}\,\partial\nu \,-\, (\,\mathcal{B}F\,)\,\partial\mu}{1 \,-\, |\,\nu\,|^2}\,,\, \Psi \right\rangle .$$

Llegados a este punto tenemos que $\partial F \in L^s(\mathbb{C})$ y trivialmente alcanzamos la veracidad de la observación. Cabe destacar que en este caso $s < 1 + \frac{1}{k}$ y por lo tanto la ecuación y el operador de Beltrami $Id - \mu\mathcal{B} - \nu\overline{\mathcal{B}}$ no nos aportan ningún tipo de automejora para las derivadas de la solución.

Si combinamos el *Lema 3.21* y *Corolario 3.23* con la teoría clásica de las aplicaciones de distorsión acotada, tenemos que el siguiente corolario para el caso homogéneo.

Corolario 3.24. *Sean $1 < r < p \leq \infty$ y $s = \frac{pr'}{p+r'}$. Supongamos que tenemos dos coeficientes $\mu, \nu \in W^{1,p}_c(\mathbb{C}) \cap L^\infty(\mathbb{C})$ tales que $\|\,|\,\mu\,| \,+\, |\,\nu\,|\,\|_\infty \,=\, k \,<\, 1$ y asumamos que $f \in L^{\frac{r}{r-1}}_{loc}(\mathbb{C})$ es una* solución distribucional *de la* Ecuación de Beltrami Generalizada Homogénea

$$\overline{\partial} f \;=\; \mu\partial f \,+\, \nu\overline{\partial f}\,.$$

Entonces se cumple que

(1) Si $p \geq 2$, entonces $f \in W^{1,q}_{loc}(\mathbb{C})$ para toda $q \in (1, \infty)$ y es cuasiregular.

(2) Si $1 + k < p < 2$ y $\frac{1}{r} > \frac{1}{p} + \frac{k}{1+k}$, entonces $f \in W^{1,q}_{loc}(\mathbb{C})$ para toda $q < 1 + \frac{1}{k}$ y es cuasiregular.

Si además μ, ν son tales que $k_1 < k$, se cumple que

(3) Si $1+k_1 < p \le 1+k$ y $\frac{1}{r} > \frac{1}{p} + \frac{k_1}{1+k_1}$, entonces $f \in W^{1,s}_{loc}(\mathbb{C})$ y f es débilmente cuasiregular *(no necesariamente* cuasiregular*).*

Con este resultado, conseguimos ver cuando una solución distribucional de (1.5) tiene derivadas distribucionales en L^s_{loc} para alguna $s > 1$. A continuación, impondremos alguna regularidad extra al término independiente a fin de conocer cuando nuestras soluciones tienen segundas derivadas integrables. Adelantamos que del *Lema 3.21* y *Teorema 3.25*, recuperamos (perdiendo algún extremo) algunos de los resultados ya mencionados sobre las *Ecuaciones de Beltrami y de Beltrami Conjugada*. Por otro lado, en el *Corolario 3.23*, hemos recuperado la primera mejora que dimos en la sección anterior para la *Ecuación de Beltrami Conjugada*. Además, en el *Corolario 3.28*, volvemos a alcanzar la segunda mejora con la que cerramos la sección anterior.

Teorema 3.25. *Sean $1 < r < p \le \infty$, tomemos $\nu, \mu \in W^{1,p}_c(\mathbb{C}) \cap L^\infty(\mathbb{C})$ tales que $\| |\mu| + |\nu| \|_\infty = k < 1$ y $h \in \dot{W}^{1,p}_{loc}(\mathbb{C}) \cap L^{\frac{r}{r-1}}_{loc}(\mathbb{C})$. Supongamos además que $f \in L^{\frac{r}{r-1}}_{loc}(\mathbb{C})$ es una* solución distribucional *de*

$$\overline{\partial} f = \mu \partial f + \nu \overline{\partial f} + h\,.$$

Se cumple que

(1) Si $p > 2$, entonces $f \in W^{2,p}_{loc}$.

(2) Si $p = 2$, entonces $f \in W^{2,s}_{loc}(\mathbb{C})$ para todo $s < 2$.

(3) Si $h \in L^{1+\frac{1}{k}}_{loc}(\mathbb{C})$, $1+k < p < 2$ y $\frac{1}{r} > \frac{1}{p} + \frac{k}{1+k}$, entonces $f \in W^{2,s}_{loc}(\mathbb{C})$ para todo $\frac{1}{s} > \frac{1}{p} + \frac{k}{1+k}$.

En los tres casos, f es cuasiregular.

Demostración. Veamos cada apartado por separado. En los apartados *(1)* y *(2)* nos apoyaremos en la invertibilidad del operador de Beltrami Generalizado en los espacios de Sobolev. En el apartado *(3)*, al no tener la invertibilidad en espacios de Sobolev, daremos otro camino que solo requiere de la invertibilidad en los espacios $L^q(\mathbb{C})$.

(1) Tomemos $p > 2$. Consideramos $\psi \in C^\infty_c(\mathbb{C})$ una función arbitraria a valores reales y definimos $F \in L^{\frac{r}{r-1}}(\mathbb{C})$ como $F := \psi f$. Gracias al *Lema 3.21*, sabemos que $F \in W^{1,\frac{r}{r-1}}_c(\mathbb{C})$ y que satisface (3.9)

$$\overline{\partial} F = \mu \partial F + \nu \overline{\partial F} + H\,,$$

donde $H \in L^{\frac{r}{r-1}}_c(\mathbb{C})$ viene dada por

$$H := \left(f - \nu \overline{f} \right) \overline{\partial}\psi - \mu f \partial\psi + h\psi\,.$$

Así, conseguíamos ver que $f \in W^{1,\frac{r}{r-1}}_{loc}(\mathbb{C})$. Mas aún, por el embedding de Sobolev, tenemos que $f \in L^{\frac{2r}{r-2}}_{loc}(\mathbb{C})$ si $r > 2$, $f \in L^q_{loc}(\mathbb{C})$ para toda $q < \infty$ si $r = 2$ y $f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{C})$ si $r < 2$. Como por hipótesis $h \in L^\infty_{loc}(\mathbb{C})$, entonces $H \in L^{\frac{2r}{r-2}}_c(\mathbb{C})$ si $r > 2$, $H \in L^q_c(\mathbb{C})$ para toda $q < \infty$ si $r = 2$ y $H \in L^\infty_c(\mathbb{C})$ si $r < 2$. Gracias a la igualdad

$$\overline{\partial} F = \left(Id - \mu \mathcal{B} - \nu \overline{\mathcal{B}} \right)^{-1} H$$

y a la invertibilidad del operador tenemos que $F \in W^{1,t}_c(\mathbb{C})$ para alguna $t > 2$ indistintamente del valor de r. Por lo tanto F, $f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{C})$ y obtenemos que $H \in L^\infty_c(\mathbb{C})$. Volviendo a usar la invertibilidad del operador, esta vez obtenemos que $F \in W^{1,q}_c(\mathbb{C})$ para toda $q < \infty$. De manera inmediata tenemos que $f \in W^{1,q}_c(\mathbb{C})$ para toda $q < \infty$. Con esto, es sencillo comprobar que $H \in W^{1,p}_c(\mathbb{C})$.

Por un lado, como $p > 2$, sabemos que el operador

$$Id - \mu\mathcal{B} - \nu\overline{\mathcal{B}} : W^{1,p}(\mathbb{C}) \to W^{1,p}(C)$$

es invertible (ver [13]). Por otro lado, sabemos que

$$\overline{\partial}F = \left(Id - \mu\mathcal{B} - \nu\overline{\mathcal{B}}\right)^{-1} H$$

y por lo tanto $\overline{\partial}F \in W^{1,p}_c(\mathbb{C})$. Así, como F es una localizada de f, tenemos que $f \in W^{2,p}_{loc}(\mathbb{C})$ y con ello concluimos la prueba el apartado.

(2) Tenemos $p = 2$. La demostración de este apartado sigue exactamente las mismas lí neas que el aparatado *(1)*. Solo hay que tener en cuenta que en este caso el operador

$$Id - \mu\mathcal{B} - \nu\overline{\mathcal{B}} : W^{1,q}(\mathbb{C}) \to W^{1,q}(C)$$

solo es invertible para toda $q < 2$ (y no para $q = 2$). Por ello, solo tenemos que $f \in W^{2,2-\epsilon}_{loc}(\mathbb{C})$ para toda $\epsilon \in (0, 1]$ tal y como queríamos ver.

(3) Ahora tenemos $1 + k < p < 2$. En este caso no podremos usar la invertibilidad del operador de Beltrami en espacios de Sobolev y solo la tendremos en los espacios $L^q(\mathbb{C})$. Por ello tendremos que recurrir a otro método. Consideramos $\psi \in C^\infty_c(\mathbb{C})$ una función arbitraria a valores reales y definimos $F \in L_c^{\frac{r}{r-1}}(\mathbb{C})$ como $F := \psi f$. Por el *Lema 3.21*, sabemos que $F \in W^{1,2}_c(\mathbb{C})$ y satisface

$$\overline{\partial}F = \mu\,\partial F + \nu\,\overline{\partial F} + H\,,$$

donde H viene dada por

$$H := \left(f - \nu\overline{f}\right)\overline{\partial}\psi - \mu\, f\,\partial\psi + h\,\psi\,.$$

y pertenece a $L_c^{1+\frac{1}{k}}(\mathbb{C})$ ya que $f \in L^t_{loc}(\mathbb{C})$ para toda $t \in (1, \infty)$ y $h \in L_c^{1+\frac{1}{k}}(\mathbb{C})$ por hipótesis. Por lo tanto, gracias a la invertibilidad del operador $Id - \mu\mathcal{B} - \nu\overline{\mathcal{B}}$, tenemos que $DF \in L^q_c(\mathbb{C})$ para toda $q < 1 + \frac{1}{k}$. En particular, $F \in L^\infty_c(\mathbb{C})$ y con ello alcanzamos que $H \in W^{1,p}_c(\mathbb{C})$.

Definimos $G := \partial F$ donde $G \in L^q_c(\mathbb{C})$ para toda $q < 1 + \frac{1}{k}$. Consideremos $\Psi \in C^\infty_c(\mathbb{C})$ arbitraria, entonces se cumple que

$$\begin{aligned}
\left\langle \overline{\partial}G\,,\,\Psi \right\rangle &= -\langle G\,,\,\partial\Psi\rangle = -\langle \partial F\,,\,\partial\Psi\rangle = -\left\langle \overline{\partial}F\,,\,\overline{\partial}\Psi \right\rangle \\
&= -\left\langle \partial F\,,\,\overline{\mu}\,\overline{\partial}\Psi \right\rangle - \left\langle \overline{\partial F}\,,\,\overline{\nu}\,\overline{\partial}\Psi \right\rangle - \left\langle H\,,\,\overline{\partial}\Psi \right\rangle \\
&= -\left\langle G\,,\,\overline{\mu}\,\overline{\partial}\Psi \right\rangle - \left\langle \overline{G}\,,\,\overline{\nu}\,\overline{\partial}\Psi \right\rangle - \left\langle H\,,\,\overline{\partial}\Psi \right\rangle \\
&= \langle \partial G\,,\,\overline{\mu}\,\Psi\rangle + \left\langle \partial\overline{G}\,,\,\overline{\nu}\,\Psi \right\rangle + \langle \partial H\,,\,\Psi\rangle \\
&\qquad + \left\langle G\,\partial\mu + \overline{G}\,\partial\nu\,,\,\Psi \right\rangle
\end{aligned}$$

Es decir

$$\left\langle \overline{\partial}G\,,\,\Psi \right\rangle = \langle \partial G\,,\,\overline{\mu}\,\Psi\rangle + \left\langle \partial\overline{G}\,,\,\overline{\nu}\,\Psi \right\rangle + \left\langle G\,\partial\mu + \overline{G}\,\partial\nu + \partial H\,,\,\Psi \right\rangle \tag{3.13}$$

Observemos por un momento que $\overline{\mu}\Psi,\, \overline{\nu}\Psi \in W^{1,p}_c(\mathbb{C})$. Gracias a ello podemos asegurar que

$$\langle\, \partial G\,,\, \overline{\nu}\,\Psi\,\rangle \;=\; -\,\Big\langle\, G\,,\, \overline{\partial}\,(\,\overline{\nu}\,\Psi\,)\,\Big\rangle \;=\; \langle\, G\,,\, \partial\mathcal{B}'\,(\,\overline{\nu}\,\Psi\,)\,\rangle \;=\; \Big\langle\, \overline{\partial}G\,,\, \mathcal{B}'\,(\,\overline{\mu}\,\Psi\,)\,\Big\rangle \tag{3.14}$$

y que

$$\Big\langle\, \partial\overline{G}\,,\, \overline{\nu}\,\Psi\,\Big\rangle \;=\; \Big\langle\, \mathbf{C}\overline{\partial}G\,,\, \overline{\nu}\,\Psi\,\Big\rangle \;=\; \Big\langle\, \overline{\partial}G\,,\, \mathbf{C}\,(\,\overline{\nu}\,\Psi\,)\,\Big\rangle\,. \tag{3.15}$$

Sustituyendo (3.14) y (3.15) en (3.13), tenemos que

$$\Big\langle\, \overline{\partial}G\,,\, (\,Id\,-\,\mathcal{B}'\overline{\mu}\,-\,\mathbf{C}\overline{\nu}\,)\;\Psi\,\Big\rangle \;=\; \Big\langle\, G\,\partial\mu\,+\,\overline{G}\,\partial\nu\,+\,\partial H\,,\,\Psi\,\Big\rangle\,. \tag{3.16}$$

Por construcción, $G\,\partial\mu,\ \overline{G}\,\partial\nu \in L^s_c(\mathbb{C})$ para toda $\frac{1}{s} > \frac{1}{p} + \frac{k}{1+k}$. Por lo tanto, el lado derecho de la igualdad se extiende a toda $\Psi \in L^{s'}(\mathbb{C})$. Es fácil demostrar que

$$(\,Id\,-\,\mu\,\mathcal{B}\,-\,\nu\,\mathbf{C}\,) \;=\; (\,Id\,-\,\nu\,\mathbf{C}\,)\left(Id - \frac{\mu}{1-|\nu|^2}\,\mathcal{B} - \frac{\nu\,\overline{\mu}}{1-|\nu|^2}\,\overline{\mathcal{B}}\right),$$

y entonces el operador $(Id - \mathcal{B}'\overline{\mu} - \mathbf{C}\overline{\nu}) : L^t \to L^t$ (adjunto del anterior) es invertible para toda $t \in \left(1+k_2, 1+\frac{1}{k_2}\right)$ con $k_2 = \left\|\frac{|\mu|}{1-|\nu|}\right\|_\infty \le k < 1$. De $k_2 \le k$ se obtiene que el operador es invertible dentro del intervalo crítico $\left(1+k\,,\,1+\frac{1}{k}\right)$. Por otro lado $s \in \left(1+k\,,\,1+\frac{1}{k}\right)$ y así, en (3.16), podemos usar como función test a la función $\Psi \in L^{s'}(\mathbb{C})$ definida como $\Psi := (Id - \mathcal{B}'\overline{\mu} - \mathbf{C}\overline{\nu})^{-1}\,\varphi$ con $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{C})$ arbitraria. Con esta función test, conseguimos que

$$\Big\langle\, \overline{\partial}G\,,\,\varphi\,\Big\rangle \;:=\; \Big\langle\, G\,\partial\mu\,+\,\overline{G}\,\partial\nu\,+\,\partial H\,,\,(\,Id\,-\,\mathcal{B}'\overline{\mu}\,-\,\mathbf{C}\overline{\nu}\,)^{-1}\,\varphi\,\Big\rangle\,.$$

Reescribiendo esta igualdad en términos de ∂F y usando los operadores adjuntos tenemos que

$$\Big\langle\, \overline{\partial}\partial F\,,\,\varphi\,\Big\rangle \;=\; \Big\langle\, (\,Id\,-\,\mu\,\mathcal{B}\,-\,\nu\,\mathbf{C}\,)^{-1}\left(\,\partial\mu\,\partial F\,+\,\partial\nu\,\overline{\partial F}\,+\,\partial H\,\right)\,,\,\varphi\Big\rangle \tag{3.17}$$

para toda función $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{C})$. Entonces, el lado derecho de (3.17) pertenece a $L^s_c(\mathbb{C})$ y así $\overline{\partial}\partial F \in L^s_c(\mathbb{C})$. De manera trivial se sigue que $f \in W^{2,s}_{loc}(\mathbb{C})$. □

Cuando $h = 0$, hemos obtenido una generalización del resultado de [11] sin usar el *Teorema de Factorización de Stoilov*.

Corolario 3.26. *Sean $1 < r < p \le \infty$ y dos coeficientes de Beltrami $\mu, \nu \in W^{1,p}_c(\mathbb{C}) \cap L^\infty(\mathbb{C})$ tales que $\|\,|\,\mu\,|\,+\,|\,\nu\,|\,\|_\infty = k < 1$. Supongamos que tenemos $f \in L^{\frac{r}{r-1}}_{loc}(\mathbb{C})$ una* solución débil *de la* Ecuación de Beltrami Generalizada Homogénea

$$\overline{\partial}f \;=\; \mu\partial f \,+\, \nu\overline{\partial f}\,.$$

(1) Si $p > 2$, entonces $f \in W^{2,p}_{loc}(\mathbb{C})$.

(2) Si $p = 2$, entonces $f \in W^{2,q}_{loc}(\mathbb{C})$ para todo $q < 2$.

(3) Si $1+k < p < 2$ y $\frac{1}{r} > \frac{1}{p} + \frac{k}{1+k}$, entonces $f \in W^{2,s}_{loc}(\mathbb{C})$ para toda $\frac{1}{s} > \frac{1}{p} + \frac{k}{1+k}$.

En los tres casos, f es cuasiregular.

Problema Abierto 3.27. *Determinar si el exponente s tal que $\frac{1}{s} > \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$, del* Teorema 3.25 *y del* Corolario 3.26*, es óptimo.*

En el *Corolario 3.20* vimos que si $\nu \in W_c^{1,p}(\mathbb{C})$ con $1 < p \leq 1 + k$ y $f \in W_{loc}^{1,\frac{q}{q-1}}(\mathbb{C})$ con $q < p$ es una solución de $\overline{\partial} f = \nu \overline{\partial f}$, entonces f tiene segundas derivadas en $L_{loc}^{\frac{pq'}{p+q'}}(\mathbb{C})$. También vimos que el resultado no es válido para la *Ecuación de Beltrami* ni aún suponiendo que f es localmente Lipchitz. El siguiente corolario puede verse como una extensión del *Corolario 3.20*, solo que ahora la regularidad extra queda regulada por la contante $k_2 = \left\| \frac{|\mu|}{1-|\nu|} \right\|_\infty$ que apareció en la prueba anterior. Al igual que en el *Corolario 3.23*, solo tendremos el resutado para algunos coeficientes μ, ν y no para cualquier pareja.

Corolario 3.28. *En las mismas condiciones que en el* Corolario 3.26. *Supongamos además que μ y ν son tales que $k_2 < k$ y que la solución f pertenece a $W_{loc}^{1,\frac{r}{r-1}}(\mathbb{C})$. Si $1 + k_2 < p \leq 1 + k$ y $\frac{1}{r} > \frac{1}{p} + \frac{k_2}{1+k_2}$, entonces $f \in W_{loc}^{2,s}(\mathbb{C})$ con $s = \frac{pr'}{p+r'}$.*

La validez del corolario se sigue directamente de nuestras hipótesis sin mas que repetir la demostración del apartado *(3)* del *Lema 3.25*. Comentemos un poco el corolario. Si $k_2 = k$ (por ejemplo cuando $\nu = 0$), entonces la condición sobre p resulta ser vacía y el corolario no dice nada en tal caso. Cuando $\mu = 0$, entonces $k_2 = 0$ y recuperamos el *Corolario 3.20.*

En el transcurso de los resultados, hemos podido contemplar algunas de las diferencias que existen entre las tres *Ecuaciones de Beltrami* con las que hemos trabajado. Una de ellas es la existencia de un rango de exponentes $p \leq 1 + k$ para los que si f es una solución distribucional $f \in L_{loc}^r$ con $r > r_0$ para cierta $r_0 = r_0(p, k)$, es de hecho débilmente cuasiregular. Concretamente, este rango de exponentes es $(1, 1 + k]$ en la *Ecuación de Beltrami Conjugada*, es $(1 + k_1, 1 + k]$ en la *Ecuación de Beltrami Generalizada* (puede ser vacío o no según los coeficientes μ y ν) y el intervalo es vacío en la *Ecuación de Beltrami.*

También cabe destacar que hemos alcanzado los resultados ya conocidos para la *Ecuación de Beltrami* usando un camino totalmente alternativo (aunque no mejoramos los resultados comentados). Recordemos que los métodos utilizados en [11] se basan en demostrar su resultado para la solución principal y a posteriori, por el Teorema de Factorización de Stoilov, extenderlo al resto de soluciones. Por nuestra parte, solo hemos necesitado la invertibilidad de los operadores de Beltrami, la invertibilidad de operadores del tipo

$$Id - \mu \mathcal{B} - \nu \mathbf{C} : L^s(\mathbb{C}) \to L^s(\mathbb{C})$$

(que se reducen a otro operador Beltrami) y la automejora dada por ser solución cuasiregular. Con estos conocimientos conseguimos extender a (1.6) los resultados ya conocidos para (2.4). Además, por nuestros métodos, obtenemos la regularidad de la aplicación cuasiconforme como un caso particular.

Capítulo 4

Logaritmo de la Derivada de la Solución Principal.

En este capítulo centraremos nuestro esfuerzo en estudiar a la función

$$\log(\partial\phi) \quad \text{donde} \quad \phi \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$$

es la solución principal de *Ecuación de Beltrami Generalizada Homogénea* $\overline{\partial}\phi = \mu\,\partial\phi + \nu\,\overline{\partial\phi}$ con $\| |\mu| + |\nu| \|_\infty =: k < 1$. Una referencia en la que podemos ver que este logaritmo complejo está bien definido la encontramos recientemente en 2014, gracias a K. Astala et. al. en [5], donde los autores (entre otras cuestiones) determinan una rama principal en la que este logaritmo está bien definido y además pertenece al espacio $BMO(\mathbb{C})$. Por nuestra parte, lo que buscamos es conocer que regularidad podemos esperar de $\log(\partial\phi)$ cuando los coeficientes tienen algún tipo de regularidad. El motivo por el que estudiaremos a esta función $\log(\partial\phi)$ es porque, en ocasiones, este logaritmo mantiene la regularidad del coeficiente μ mejor que la propia derivada $\partial\phi$ tal y como veremos mas adelante.

La primera referencia que encontramos a este respecto (conocer la regularidad de $\log(\partial\phi)$ a partir de la regularidad de los coeficientes μ y ν) la encontramos en el año 1964 gracias a L. V. Ahlfors en [2] para el caso $\partial\mu \in L^p(\mathbb{C})$ con $p > 2$ y $\nu = 0$. En esta referencia el autor demuestra que

$$\partial\mu \in L^p(\mathbb{C}) \text{ con } p > 2 \qquad \Longrightarrow \qquad \log(\partial\phi) \in W^{1,p}(\mathbb{C})\ .$$

Se da la circunstancia que la regularidad del $\log(\partial\phi)$ no era un objetivo en si mismo, sino un paso intermedio para demostrar la regularidad de $D\phi$. De hecho, llega a demostrar que $\phi \in C^1(\mathbb{C})$. Años mas tarde, en 1974, Reimann (ver [36]) demostró la siguiente implicación para el jacobiano de la solución principal $\phi \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ con $\nu = 0$ sin necesidad de que el coeficiente μ tuviese algún tipo de regularidad

$$\mu \in L^\infty_c(\mathbb{C}) \qquad \Longrightarrow \qquad \log(J_\phi) \in BMO(\mathbb{C})\ . \tag{4.1}$$

Por su parte, en el año 1989, Hamilton (ver [19]) demostró la implicación anterior, ahora si, para el logaritmo complejo. No solo eso, también llegó a demostrar que

$$\mu \in VMO_c(\mathbb{C}) \qquad \Longrightarrow \qquad \log(\partial\phi) \in VMO(\mathbb{C})\,. \tag{4.2}$$

En este caso se demostró que el logaritmo complejo $\log(\partial\phi)$ está bien definido sin tener que determinar una rama principal para el mismo. Gracias a todas estas referencias, podremos asegurar que nuestra función $\log(\partial\phi)$ está bien definida, al menos cuando $\phi \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ es la solución principal de la *Ecuación de Beltrami* $\overline{\partial}\phi = \mu\partial\phi$. Es decir, cuando $\nu = 0$.

Por nuestra parte, tendremos dos objetivos principales. El primer propósito es extender el estudio que comenzó Ahlfors a la *Ecuación de Beltrami Generalizada Homogénea* y a otros espacios de Sobolev $W^{1,p}_c(\mathbb{C})$. Concretamente, estaremos interesados en conocer los exponentes $1 < s \leq p < 2$ para los que se cumple la implicación

$$\mu,\, \nu \,\in\, W^{1,p}_c(\mathbb{C}) \qquad \Longrightarrow \qquad \log\,(\,\partial\phi\,) \,\in\, W^{1,s}\,(\,\mathbb{C}\,)\;,$$

donde $\phi \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ es la solución principal de $\overline{\partial}\phi = \mu\partial\phi + \nu\overline{\partial\phi}$ con $\| |\mu| + |\nu| \|_\infty =: k < 1$. Prestaremos una atención especial al caso $\nu = 0$ y $\mu \in W^{1,p}_c(\mathbb{C})$ con $p \leq 1 + k$. Es decir, con p por debajo del intervalo crítico de Astala.

Nuestro segundo objetivo será dar un refinamiento de la de implicación (4.2) dada por Hamilton. Como ejemplo, tenemos la referencia [11] donde A. Clop et. al. demuestran la implicación

$$\mu \in W^{1,2}_c\,(\,\mathbb{C}\,) \qquad \Longrightarrow \qquad \log\,(\,\partial\phi\,) \in W^{1,2}\,(\,\mathbb{C}\,)\;. \tag{4.3}$$

Así, dado que $W^{1,2}(\mathbb{C}) \subset VMO(\mathbb{C})$, esta última implicación puede verse como un refinamiento de (4.2). Por otro lado, al interpolar los espacios los espacios $VMO(\mathbb{C})$ y $W^{1,2}(\mathbb{C})$ aparecen los distintos espacios espacios fraccionarios $W^{\alpha,2/\alpha}(\mathbb{C})$ con $0 < \alpha < 1$. Por ello, es natural preguntarse si el logaritmo $\log(\partial\phi)$ también mantiene la regularidad del coeficiente cuando este pertenece a $W^{\alpha,2/\alpha}_c(\mathbb{C})$. Llegaremos a demostrar que

$$\mu \,\in\, W^{\alpha,2/\alpha}_c\,(\,\mathbb{C}\,) \qquad \Longrightarrow \qquad \log\,(\,\partial\phi\,) \in W^{\alpha,2/\alpha}\,(\,\mathbb{C}\,)$$

para toda $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$. Lamentablemente, los métodos utilizados no nos permiten extender el resultado a $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ ni a la *Ecuación de Beltrami Generalizada Homogénea.*

Recordemos que en el capítulo anterior ya demostramos que si $\mu \in W^{1,2}_c(\mathbb{C})$, entonces la solución principal de la *Ecuación de Beltrami* $\overline{\partial}\phi = \mu\partial\phi$ pertenece a $W^{2,p}_{loc}(\mathbb{C})$ para toda $p < 2$. Sin embargo, la implicación (4.3) nos asegura que $\log(\partial\phi) \in W^{1,2}(\mathbb{C})$. Además, tenemos ejemplos que demuestran $\partial\phi \notin W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$. Para ver esto, solo hace falta tomar un entorno del origen adecuado $\mathbb{D}_R$ y definir un coeficiente de Beltrami en dicho entorno como

$$\mu\,(z) \;=\; \frac{z}{\overline{z}}\,\frac{1}{2\,\log|\,z\,|\,-\,1}\,.$$

Entonces, este coeficiente μ pertenece a $W^{1,2}\,(\mathbb{D}_R)$ y su cuasiconforme principal asociada viene dada (en el entorno $\mathbb{D}_R$) como

$$\phi(z) \;=\; z\;(\,\log|\,z\,|\,-\,1\,)\;.$$

No es difícil demostrar que $\log(\partial\phi) \in W^{1,2}(\mathbb{D}_R)$ pero que $\partial\phi \notin W^{1,2}_{loc}(\mathbb{D}_R)$. No es de extrañar que ocurra esto ya que en genreal

$$\exp\big(\,W^{1,2}\,(\,\mathbb{C}\,)\,\big) \subset W^{1,p}_{loc}\,(\,\mathbb{C}\,) \quad \text{para toda} \;\; p \,<\, 2$$

pero no para $p = 2$. En particular, esto nos demuestra que $\log(\partial\phi)$ preserva la regularidad del coeficiente μ mejor que la propia derivada $\partial\phi$ tal y como habíamos asegurado al inicio del capítulo.

Dividimos el capítulo bajo el siguiente esquema.

- **Sección 4.1 Coeficientes con Regularidad Sobolev.** En esta sección estudiaremos la función $\log(\partial\phi)$ cuando ϕ es la *solución principal* de la ecuación (1.6) con coeficientes Sobolev. Le prestaremos una especial atención a la ecuación (2.4), es decir $\nu = 0$.

- **Sección 4.2 Coeficiente con Regularidad Sobolev Fraccionaria.** En esta sección nos centraremos en estudio de la función $\log(\partial\phi)$ con ϕ la *solución principal* de la ecuación (2.4) cuando el coeficiente pertenece a $W_c^{\alpha,2/\alpha}(\mathbb{C})$ con $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$. También mostraremos que repercusiones tiene este estudio para todas las soluciones de la ecuación (1.6) (que no para $\log(\partial\phi)$).

4.1. Coeficientes con Regularidad Sobolev.

Supongamos que tenemos un coeficiente de Beltrami $\mu \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ y planteamos la *Ecuación de Beltrami*

$$\overline{\partial}\phi \,=\, \mu\,\partial\phi\,.$$

Entonces sabemos que la solución principal ϕ pertenece a $C^\infty(\mathbb{C})$ y que además $|\partial\phi| > 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Derivando directamente la ecuación (2.4) tenemos que

$$\overline{\partial}\partial\phi \,=\, \mu\,\partial\partial\phi \,+\, \partial\mu\,\partial\phi\,.$$

Si dividimos ambos miembros entre $\partial\phi \neq 0$ obtenemos

$$\overline{\partial}\log(\,\partial\phi\,) \,=\, \mu\,\partial\log(\,\partial\phi\,) \,+\, \partial\mu\,.$$

Por lo tanto, observamos que $\log(\partial\phi)$ es una solución de una *Ecuación de Beltrami* donde el término independiente es $\partial\mu$. Además, no es difícil demostrar que

$$(\,Id \,-\, \mu\,\mathcal{B}\,)\,\overline{\partial}\log(\,\partial\phi\,) \,=\, \partial\mu\,.$$

Ya, sin mas que usar la invertibilidad del operador de Beltrami $Id - \mu\mathcal{B}$ dentro del rango crítico de K. Astala y un argumento de densidad, tenemos que

$$\mu \in W_c^{1,p}(\,\mathbb{C}\,) \quad \text{con}\;\; p > 1+k \qquad \Longrightarrow \qquad \log(\,\partial\phi\,) \in W^{1,p}(\,\mathbb{C}\,)\,.$$

Sin embargo, quedan por resolver dos cuestiones

(1) ¿Que sucede si tratamos con la *Ecuación de Beltrami Generalizada* ?

(2) ¿Que ocurre cuando $p \leq 1+k$?

Hemos dedicado una subsección a cada pregunta. Concretamente:

- **Subsección 4.1.1 Coeficientes μ, $\nu \in W_c^{1,p}(\mathbb{C})$ con $p > 1+k$.** Aquí mostraremos que para exponentes $p > 1+k$ la función $\log(\partial\phi)$, con ϕ la *solución principal* de (1.6), hereda la regularidad de los coeficientes.

- **Subsección 4.1.2 Coeficiente $\mu \in W_c^{1,p}(\mathbb{C})$ con $1 < p \leq 1+k$.** Estudiaremos la regularidad máxima de $\log(\partial\phi)$, con ϕ la *solución principal* de (2.4), cuando μ pertenece a estos espacios de Sobolev.

4.1.1. Coeficientes μ, $\nu \in W^{1,p}_c(\mathbb{C})$ con $p > 1 + k$.

Dado que en esta sección trataremos con la *Ecuación de Beltrami Generalizada*

$$\overline{\partial}\phi \,=\, \mu\,\partial\phi \,+\, \nu\overline{\partial\phi}$$

cuando los coeficientes μ y ν tienen soporte compacto, lo primero que tenemos que ver es que la función $\log(\partial\phi)$ está bien definida. Para ello ampliaremos la implicación (4.1) a este ámbito. Evidentemente, si consideramos $\phi \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ la *solución principal* de (1.6) con $\||\mu| + |\nu|\|_\infty = k < 1$, entonces $\phi \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ también es la *solución principal* de la *Ecuación de Beltrami Homogénea*

$$\overline{\partial}\phi = \mu_0\partial\phi\,, \quad \text{donde} \;\; \mu_0(z) = \mu(z) + \nu(z)\frac{\overline{\partial\phi(z)}}{\partial\phi(z)} \in L^\infty_c\,(\mathbb{C})\;.$$

Por lo tanto, gracias al trabajo de D. Hamilton en [19] tenemos la implicación

$$\mu,\, \nu \in L^\infty_c\,(\mathbb{C}) \quad \Longrightarrow \quad \log\,(\,\partial\phi\,) \in BMO\,(\mathbb{C})\,.$$

Así, la función $\log(\partial\phi)$, con $\phi \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ la *solución principal* de (1.6), está bien definida sin mas que suponer que los coeficientes μ y ν son elípticos y de soporte compacto.

A continuación, mostramos que grado de diferenciabilidad máxima podemos esperar de $\log(\partial\phi)$ cuando ϕ es la solución cuasiconforme de la *Ecuación de Beltrami Generalizada Homogénea.*

Teorema 4.1. *Sean μ, $\nu \in L^\infty_c\,(\mathbb{C})$ tales que $\||\mu| + |\nu|\|_\infty = k < 1$ y $\phi \in W^{1,2}_{loc}\,(\mathbb{C})$ la* solución principal *de la* Ecuación de Beltrami Generalizada Homogénea

$$\overline{\partial}\phi \,=\, \mu\partial\phi \,+\, \nu\overline{\partial\phi}\,.$$

Supongamos además que μ, $\nu \in W^{1,p}_c\,(\mathbb{C})$ con $p > 1 + k$. Entonces, $\log(\partial\phi) \in W^{1,p}\,(\mathbb{C})$*. En particular,*

$$\overline{\partial}\log\partial\phi \,=\, \left(Id \,-\, \nu\,\frac{\overline{\partial\phi}}{\partial\phi}\mathbf{C} \,-\, \mu\mathcal{B}\right)^{-1}\left(\partial\mu \,+\, \partial\nu\,\frac{\overline{\partial\phi}}{\partial\phi}\right)\,. \tag{4.4}$$

Demostración. Cuando $p > 2$ ya sabemos que $\log(\partial\phi) \in W^{1,p}\,(\mathbb{C})$ gracias a los trabajos de Ahlfors [2], a lo comentado al inicio de la subsección y a los resultados del capítulo anterior. Nos restringiremos a $1 + k < p \leq 2$. Observemos que

$$\left\|\,\left|\frac{\mu}{1-|\nu|^2}\right| + \left|\frac{\nu\overline{\mu}}{1-|\nu|^2}\,\frac{\overline{\partial\phi}}{\partial\phi}\right|\,\right\|_\infty = \left\|\,\frac{|\mu|}{1-|\nu|}\,\right\|_\infty := k_2 \leq k < 1$$

y que la teoría clásica nos dice que para toda $\omega \in L^p\,(\mathbb{C})$ con $p > 1 + k$ existe una única solución H de la ecuación

$$\overline{\partial}H \,-\, \frac{\mu}{1-|\nu|^2}\,\partial H \,-\, \frac{\nu\,\overline{\mu}}{1-|\nu|^2}\,\frac{\overline{\partial\phi}}{\partial\phi}\,\overline{\partial H} \,=\, \omega\,, \tag{4.5}$$

con $DH \in L^p\,(\mathbb{C})$. Nuestro objetivo será demostrar que $\log\partial\phi$ es solución de la ecuación (4.5) para algún término independiente $\omega \in L^p(\mathbb{C})$.

Gracias al resultado de Astala et. al en [5], podemos definir la función $\log\partial\phi \in BMO(\mathbb{C})$. Además, también sabemos que $|\partial\phi(z)| > 0$ para casi todo $z \in \mathbb{C}$. Por el *Teorema 3.25* sabemos que ϕ tiene segundas derivadas. Sin mas que aplicar la derivada ∂ en (1.6), tenemos que

$$\overline{\partial}\partial\phi \,=\, \mu\,\partial\partial\phi \,+\, \nu\partial\overline{\partial\phi} \,+\, \partial\mu\partial\phi \,+\, \partial\nu\overline{\partial\phi}\,.$$

Si dividimos entre $\partial\phi \neq 0$ (en casi todo punto), conseguimos ver que

$$\overline{\partial} \log \partial\phi \,=\, \mu\, \partial \log \partial\phi \,+\, \nu \frac{\overline{\partial\phi}}{\partial\phi}\, \partial \log \overline{\partial\phi} \,+\, \partial\mu \,+\, \partial\nu \frac{\overline{\partial\phi}}{\partial\phi}\,.$$

Ahora, aplicaremos $\frac{1}{1-|\nu|^2}\left(Id + \nu\frac{\overline{\partial\phi}}{\partial\phi}\mathbf{C}\right)$ a ambos miembros. Tras simplificar y despejar adecuadamente, obtenemos

$$\overline{\partial} \log\left(\partial\phi\right) - \frac{\mu}{1-|\nu|^2}\, \partial \log\left(\partial\phi\right) - \frac{\nu\,\overline{\mu}}{1-|\nu|^2}\, \frac{\overline{\partial\phi}}{\partial\phi}\, \overline{\partial} \log\left(\overline{\partial\phi}\right) \,=\, \left(Id \,+\, \nu\,\frac{\overline{\partial\phi}}{\partial\phi}\,\mathbf{C}\right) \left(\frac{\partial\mu \,+\, \partial\nu\,\frac{\overline{\partial\phi}}{\partial\phi}}{1-|\nu|^2}\right).$$

Es decir $G := \log\left(\partial\phi\right) \in BMO(\mathbb{C})$ es una solución de la ecuación

$$\overline{\partial} G \,-\, \frac{\mu}{1-|\nu|^2}\, \partial G \,-\, \frac{\nu\,\overline{\mu}}{1-|\nu|^2}\, \frac{\overline{\partial\phi}}{\partial\phi}\, \overline{\partial G} \,=\, \left(Id \,-\, \nu\,\frac{\overline{\partial\phi}}{\partial\phi}\,\mathbf{C}\right)^{-1} \left(\partial\mu \,+\, \partial\nu\,\frac{\overline{\partial\phi}}{\partial\phi}\right)$$

donde el lado derecho pertenece a $L^p_c\left(\mathbb{C}\right)$. Recordemos que ϕ es solución principal y por lo tanto $|\partial\phi - 1| \leq \frac{c}{|z|^2}$ cuando $|z| > R$ para algún R suficientemente grande. Esto implica que $\log\left(\partial\phi\right) \approx \partial\phi - 1 \approx 0$ cuando $z \approx \infty$. Entonces, la anulación en el infinito de $\log\left(\partial\phi\right)$ y la unicidad de solución de la ecuación (4.5), nos aseguran que $\log \partial\phi \in W^{1,p}\left(\mathbb{C}\right)$.

Una vez que tenemos que $\log\left(\partial\phi\right)$ pertenece a $W^{1,p}\left(\mathbb{C}\right)$, podemos reescribir la última igualdad como

$$\left(Id \,-\, \frac{\mu}{1-|\nu|^2}\,\mathcal{B} \,-\, \frac{\nu\,\overline{\mu}}{1-|\nu|^2}\,\overline{\mathcal{B}}\right) \overline{\partial} \log\left(\,\partial\phi\,\right) \,=\, \left(Id \,-\, \nu\,\frac{\overline{\partial\phi}}{\partial\phi}\,\mathbf{C}\right)^{-1} \left(\partial\mu \,+\, \partial\nu\,\frac{\overline{\partial\phi}}{\partial\phi}\right). \quad (4.6)$$

Recordemos que en el capítulo anterior ya vimos que

$$\left(\,Id \,-\, \nu\,\mathbf{C}\,\right) \left(Id \,-\, \frac{\mu}{1-|\nu|^2}\,\mathcal{B} \,-\, \frac{\nu\overline{\mu}}{1-|\nu|^2}\,\overline{\mathcal{B}}\right) \,=\, \left(\,Id \,-\, \nu\,\mathbf{C} \,-\, \mu\,\mathcal{B}\,\right).$$

Así, sin mas que aplicar $\left(Id \,-\, \nu\,\frac{\overline{\partial\phi}}{\partial\phi}\,\mathbf{C}\right)$ en ambos miembros de (4.6) alcanzamos la igualdad (4.4). De esta forma concluimos la prueba. $\square$

Observemos que en la prueba del teorema, hemos utilizado por un lado que si $\mu, \nu \in W^{1,p}_c\left(\mathbb{C}\right)$ con $1+k < p < 2$, entonces ϕ tiene segundas derivadas, y por el otro la invertibilidad del operador de Beltrami. Sin embargo, el operador que aparece es invertible incluso fuera del rango crítico de Astala. De hecho, es invertible en L^r para toda $1+k_2 < r < 1+\frac{1}{k_2}$ donde donde $k_2 := \left\|\frac{\mu}{1-|\nu|}\right\|_\infty \leq k < 1$. Por ello podemos plantear el siguiente ejercicio.

Problema Abierto 4.2. *Determinar si el* Teorema 4.1 *puede extenderse a coeficientes elípticos* $\mu,\, \nu \in W^{1,p}_c\left(\mathbb{C}\right)$ *con* $1+k_2 < p \leq 1+k$.

Lamentablemente, este resultado no nos aporta nada nuevo sobre las segundas derivadas de la cuasiconforme. Evidentemente, si tenemos $f = \log\left(\partial\phi\right) \in W^{1,p}(\mathbb{C})$, al menos formalmente, se tiene que

$$De^f \,=\, e^f\, Df\,.$$

Entonces, si $p > 2$, sabemos que $e^f \in L^\infty(\mathbb{C})$ y por lo tanto $De^f = D\partial\phi$ pertenecerá a $L^p(\mathbb{C})$ al igual que $Df = D\log(\partial\phi)$. Si $p = 2$, solo tendremos que $e^f \in VMO(\mathbb{C})$ lo que nos asegurará, por los mismos métodos, que $D\partial\phi \in L^q(\mathbb{C})$ para toda $q < 2$ pero no necesariamente para $q = 2$. Por último, si $p < 2$, entonces $e^f \in L^s_{loc}$ solo para alguna $1 < s < p$ pero esta s es demasiado pequeña para asegurar nada sobre las segundas derivadas de ϕ, al menos con este razonamiento.

Nos preguntamos si podemos encontrar algún método con el que consigamos eliminar la restricción $p > 1 + k$ al menos en la ecuación (2.4). Es decir, $\nu = 0$. Por ejemplo, si imponemos que el coeficiente pertenece a VMO, el operador $Id - \mu\mathcal{B}$ será invertible para todos los espacios L^p y la restricción pasaría a ser $p > 1$. Sin embargo, esta concidión es demasiado fuerte. Por ello, debemos buscar un camino alternativo que no dependa directamente del operador $Id - \mu\mathcal{B}$ ni de la identidad

$$\overline{\partial}\log(\partial\phi) = \mu\partial\log(\partial\phi) + \partial\mu\,.$$

En la siguiente subsección desvelaremos este camino alternativo.

4.1.2. Coeficiente $\mu \in W^{1,p}_c(\mathbb{C})$ con $1 < p \leq 1 + k$.

En esta sección, cambiaremos la notación y en todo momento supondremos que $\Psi \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ es la única solución principal de la ecuación

$$\overline{\partial}\Psi - \mu\,\partial\Psi = 0\,.$$

También supondremos que ϕ es el homeomorfismo inverso de Ψ. Es decir, la única función que cumple $\phi\circ\Psi = z = \Psi\circ\phi$ la cual es cuasiconforme [4, Theorem 5.5.6]. Además, evitaremos hacer uso del operador del Beltrami $Id - \mu\mathcal{B}$ y de la igualdad

$$\overline{\partial}\log(\partial\Psi) = (Id - \mu\mathcal{B})^{-1}\,\partial\mu\,.$$

A pesar de ello, demostraremos que para toda $1 < p \leq 1 + k$, se cumple la implicación

$$\mu \in W^{1,p}_c(\mathbb{C}) \implies \log(\partial\Psi) \in W^{1,s}(\mathbb{C}) \quad \text{para toda } 1 < s < \frac{pK^2}{1 + pK^2 - p}\,. \tag{4.7}$$

Nuestro método no alcanza el extremo $p = 1$ y tampoco sabemos si es óptimo. Sin embargo, extiende resultados ya conocidos para $p \leq 1 + k$.

Antes de avanzar en la subsección, necesitamos de los siguientes dos resultados previos. El primero de ellos, dado por K. Astala, trata sobre la integrabilidad de exponente negativo del Jacobiano de la aplicación cuasiconforme. En el segundo nos fijaremos en la ecuación que cumple el homeomorfismo inverso de la solución principal de la *Ecuación de Beltrami Generalizada Homogénea*.

Lema 4.3. *[6] Sea $\Psi \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ la solución cuasiconforme principal de $\overline{\partial}\Psi = \mu\partial\Psi$ con $\mu \in L^\infty_c(\mathbb{C})$ tal que $\|\mu\|_{L^\infty} = k < 1$ y $K := \frac{1+k}{1-k}$. Entonces,*

$$\int_{\mathbb{D}_R} |\partial\Psi|^s < \infty$$

para toda $s \in \left(1 - \frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k}\right) = \left(\frac{-2}{K-1}, \frac{2K}{K-1}\right)$.

Proposición 4.4. *Sea* Ψ *la* solución principal *de la* Ecuación de Beltrami Generalizada Homogénea

$$\overline{\partial}\Psi \,=\, \mu\,\partial\Psi \,+\, \nu\,\overline{\partial\Psi}$$

donde los coeficientes de Beltrami $\mu, \nu \in L^\infty_c(\mathbb{C})$ *satisfacen* $\|\,|\mu| + |\nu|\,\|_{L^\infty} = k < 1$. *Supongamos que* ϕ *es tal que* $\Psi \circ \phi = z$. *Entonces,* ϕ *es la* solución cuasiconforme *de la* Ecuación de Beltrami Generalizada

$$\overline{\partial}\phi \,=\, -\,(\nu\circ\phi)\,\partial\phi \,-\, (\mu\circ\phi)\,\overline{\partial\phi}\,. \tag{4.8}$$

Además las parciales de Ψ *y* ϕ *cumplen*

$$\frac{1}{\partial\Psi\,\partial\phi(\Psi)} \,=\, 1 \,-\, |\mu|^2 \,-\, |\nu|^2 \,-\, \overline{\nu}\,\mu\,\frac{\partial\Psi}{\overline{\partial\Psi}} \,-\, \nu\,\overline{\mu}\,\frac{\overline{\partial\Psi}}{\partial\Psi}\,. \tag{4.9}$$

Demostración. Por un lado, como Ψ satisface $\overline{\partial}\Psi = \mu\,\partial\Psi + \nu\,\overline{\partial\Psi}$ tenemos que $\partial\Psi \neq 0$ p.c.t. $z \in \mathbb{C}$. Por el otro, la regla de la cadena nos dice que

$$\begin{aligned}\overline{\partial}(\Psi\circ\phi) \,&=\, \partial\Psi(\phi)\,\overline{\partial}\phi \,+\, \overline{\partial}\Psi(\phi)\,\overline{\partial\phi}\\ &=\, \partial\Psi(\phi)\,\overline{\partial}\phi \,+\, (\mu\circ\phi)\,\partial\Psi(\phi)\,\overline{\partial\phi} \,+\, (\nu\circ\phi)\,\overline{\partial\Psi}(\phi)\,\overline{\partial\phi} \,=\, 0\,.\end{aligned}$$

Despejando tenemos que

$$\overline{\partial}\phi \,=\, -\,(\nu\circ\phi)\,\frac{\overline{\partial\Psi}(\phi)}{\partial\Psi(\phi)}\,\overline{\partial\phi} \,-\, (\mu\circ\phi)\,\overline{\partial\phi}\,, \tag{4.10}$$

y equivalentemente

$$\partial\overline{\phi} \,=\, -\,(\overline{\nu}\circ\phi)\,\frac{\partial\Psi(\phi)}{\overline{\partial\Psi}(\phi)}\,\partial\phi \,-\, (\overline{\mu}\circ\phi)\,\partial\phi\,. \tag{4.11}$$

Derivando la otra composición vemos que

$$\begin{aligned}\overline{\partial}(\phi\circ\Psi) \,&=\, \partial\phi(\Psi)\,\overline{\partial}\Psi \,+\, \overline{\partial}\phi(\Psi)\,\overline{\partial\Psi}\\ &=\, \mu\,\partial\phi(\Psi)\,\partial\Psi \,+\, \nu\,\partial\phi(\Psi)\,\overline{\partial\Psi} \,-\, \nu\,\frac{\overline{\partial\Psi}}{\partial\Psi}\,\overline{\partial\phi}(\Psi)\,\overline{\partial\Psi} \,-\, \mu\,\overline{\partial\phi}(\Psi)\,\overline{\partial\Psi} \,=\, 0\,.\end{aligned}$$

Reordenando la expresión anterior, podemos escribir

$$\mu\,\big[\partial\phi(\Psi)\,\partial\Psi \,-\, \overline{\partial\phi}(\Psi)\,\overline{\partial\Psi}\big] \,=\, \nu\,\left[\frac{\big(\overline{\partial\Psi}\big)^2}{\partial\Psi}\,\overline{\partial\phi}(\Psi) \,-\, \partial\phi(\Psi)\,\overline{\partial\Psi}\right]$$

que solo es posible si y solamente si se cumple alguna de una de las siguientes posibilidades

$$\begin{cases}\text{o bien} & \mu \,=\, -\,\nu\,\frac{\overline{\partial\Psi}}{\partial\Psi}\,,\\ \text{o bien} & \frac{\partial\phi(\Psi)}{\overline{\partial\phi}(\Psi)} \,=\, \frac{\overline{\partial\Psi}}{\partial\Psi}\,.\end{cases}$$

Descartamos el primer caso ya que nos resumiría a $\overline{\partial}\Psi = 0$. Es decir, tendríamos que Ψ es holomorfa (y en tal caso ϕ también sería holomorfa). Entonces tenemos que $\frac{\partial\phi(\Psi)}{\overline{\partial\phi}(\Psi)} = \frac{\overline{\partial\Psi}}{\partial\Psi}$ y por lo tanto

$$\frac{\partial\phi}{\overline{\partial\phi}} = \frac{\overline{\partial\Psi}(\phi)}{\partial\Psi(\phi)}\,. \tag{4.12}$$

Llegados a este punto, sin mas sustituir (4.12) en (4.10) obtenemos (4.8).

Para conseguir la fórmula (4.9), aplicamos la derivada ∂ a la composición $\Psi \circ \phi$. Entonces

$$\begin{aligned} 1 = \partial (\Psi \circ \phi) &= \partial\Psi (\phi) \, \partial\phi + \overline{\partial}\Psi (\phi) \, \partial\overline{\phi} \\ &= \partial\Psi (\phi) \, \partial\phi + \big((\mu \circ \phi) \partial\Psi (\phi) + (\nu \circ \phi) \, \overline{\partial\Psi} (\phi) \big) \, \partial\overline{\phi} \\ &= \partial\Psi (\phi) \, \partial\phi - | \mu \circ \phi |^2 \, \partial\Psi (\phi) \, \partial\phi - | \nu \circ \phi |^2 \, \partial\Psi (\phi) \, \partial\phi \\ &\quad - \left(\left(\nu \, \overline{\mu} \, \frac{ (\overline{\partial\Psi})^2 }{ \partial\Psi } \right) \circ \phi \right) | \partial\phi |^2 - \left(\left(\mu \, \overline{\nu} \, \frac{ (\partial\Psi)^2 }{ \overline{\partial\Psi} } \right) \circ \phi \right) | \partial\phi |^2 \, . \end{aligned}$$

Donde hemos usado (4.11) y $\overline{\partial}\Psi = \mu \, \partial\Psi + \nu \, \overline{\partial\Psi}$. Ya, sin mas que usar $\frac{\partial\phi(\Psi)}{\overline{\partial\phi(\Psi)}} = \frac{\overline{\partial\Psi}}{\partial\Psi}$ y dividiendo entre $\partial\Psi (\phi) \, \partial\phi \neq 0$ alcanzamos (4.9) terminando así la prueba. $\square$

Gracias a este resultado, si $\Psi \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ es la solución principal de $\overline{\partial}\Psi = \mu\partial\Psi$ y $\phi \circ \Psi = z$, ya sabemos que $\phi \in W^{1,2}_{loc} (\mathbb{C})$ es la única *solución principal* de la *Ecuación de Beltrami Conjugada*

$$\overline{\partial}\phi = - (\mu \circ \phi) \, \overline{\partial\phi} \, , \tag{4.13}$$

y que además satisface

$$\partial\Psi (\phi) \, \partial\phi = \frac{1}{1 - | \mu \circ \phi |^2} = \overline{\partial\Psi} (\phi) \, \overline{\partial\phi}$$

en casi todo punto del plano complejo. Esta identidad, junto al *Lema 4.3* que nos asegura que $\partial\Psi \in L^q_{loc}(\mathbb{C})$ para toda $q \in \left(\frac{-2}{K-1} \, , \, \frac{2K}{K-1} \right)$ con $K := \frac{1+k}{1-k}$, nos permitirá alcanzar nuestro objetivo. Es decir, la implicación (4.7). Destaquemos que la ecuación (4.13) es cuasi-lineal (lineal en $D\phi$ pero no en ϕ). Además, si $p < 1 + k$, podría pasar que el coeficiente $\nu = -\mu \circ \phi$ no perteneciera a la clase $W^{1,1}_{loc}(\mathbb{C})$. Por este motivo, los resultados que alcancemos para la ecuación (4.13) son totalmente independientes de los obtenidos en el capítulo anterior para la ecuación (3.2) y no se deducen de ellos. Para alcanzar la validez de (4.7) seguiremos el siguiente esquema

(1) Probaremos la implicaión

$$\mu \in W^{1,1}_c (\mathbb{C}) \implies \overline{\partial}\partial\phi \in L^1_c (\mathbb{C})$$

para toda solución cuasiconforme ϕ de la ecuación (4.13).

(2) Veremos que en particular, si $1 < p \leq 1+k$ y ϕ es solución principal, tenemos la implicación

$$\mu \in W^{1,p}_c (\mathbb{C}) \implies D^2\phi \in L^q (\mathbb{C}) \, ,$$

para toda $1 < q < q_1$ con $q_1 := \frac{pK}{1+pK-p}$ e independiente del coeficiente μ.

(3) Por último, de (2) deducimos que para toda solución principal ϕ de (4.13) y toda $q > 1$ se cumple que

$$D^2\phi \in L^q (\mathbb{C}) \implies D \log (\partial\Psi) \in L^s (\mathbb{C})$$

para toda $1 < s < \frac{qK}{1+qK-q}$. Además, tomando $q \to q_1$ se obtiene la restricción $s < \frac{pK^2}{1+pK^2-p}$ de (4.7).

Adelantamos que las pruebas (de los puntos *(1)* y *(2)* del esquema) son independientes de los resultados obtenidos en el capítulo anterior para la ecuación (3.2). No obstante, los resultados del capítulo previo sobre la ecuación (3.2) nos sirvieron para intuir la validez de (4.7). Recordemos que en el capítulo anterior demostramos que los laplacianos de las soluciones $f \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ de (3.2) cumplen que

$$\overline{\partial}\partial f \,=\, (\, Id \,-\, \nu\,\mathbf{C}\,)^{-1}\,\left(\partial\nu\,\overline{\partial f}\,\right)$$

y que por lo tanto se comportan mejor que los laplacianos de las soluciones $f \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ de (2.4), los cuales cumplen

$$\overline{\partial}\partial f \,=\, (\, Id \,-\, \mu\,\mathcal{B}\,)^{-1}\,(\,\partial\mu\,\partial f\,)\;.$$

Esto nos hizo pensar que de igual forma el laplaciano de la solución principal de (4.13) se tendría que comportar mejor que el laplaciano de la solución principal de (2.4). Efectivamente, tenemos el siguiente resultado que corresponde con el primer paso de nuestro esquema.

Lema 4.5. *Sea $\mu \in W^{1,1}_c(\,\mathbb{C}\,)$ tal que $\|\,\mu\,\|_\infty \,=\, k \,<\, 1$ y supongamos que $\phi \in W^{1,2}_{loc}(\,\mathbb{C}\,)$ es una solución cuasiconforme de la ecuación*

$$\overline{\partial}\phi \,=\, -\,(\,\mu\circ\phi\,)\,\overline{\partial\phi}\,.$$

Entonces, se cumple que

$$\overline{\partial}\partial\,\phi \,=\, \frac{-\,|\,\partial\,\phi\,|^2}{1\,-\,|\,\mu\,\circ\,\phi\,|^2}\left(Id\,-\,(\,\mu\,\circ\,\phi\,)\,\mathbf{C}\right)\left[\,(\,\partial\,\mu\,)\,(\phi)\,-\,(\,\overline{\mu}\,\circ\,\phi\,)\left(\,\overline{\partial}\,\mu\,\right)(\phi)\,\right]. \tag{4.14}$$

En particular, $\overline{\partial}\partial\phi \in L^1_c(\,\mathbb{C}\,)$ y se tiene el siguiente control de normas

$$\left\|\,\overline{\partial}\partial\phi\right\|_{L^1(\,\mathbb{C}\,)} \,\le\, c\,\|\,D\mu\,\|_{L^1(\,\mathbb{C}\,)}\,,$$

donde $c = c(k)$.

Demostración. Consideremos $\varphi \in C^\infty_c(\,\mathbb{C}\,)$ una función test arbitraria. Entonces, en el sentido de las distribuciones, se ha de cumplir que

$$\left\langle\,\overline{\partial}\partial\phi\,,\,\varphi\,\right\rangle \,=\, -\left\langle\,\overline{\partial}\phi\,,\,\overline{\partial}\varphi\,\right\rangle \,=\, \left\langle\,(\,\mu\circ\phi\,)\,\overline{\partial\phi}\,,\,\overline{\partial}\varphi\,\right\rangle\;.$$

Equivalentemente

$$\left\langle\,\overline{\partial}\partial\phi\,,\,\varphi\,\right\rangle \,=\, \left\langle\,(\,\mu\circ\phi\,)\,\overline{\partial\phi}\,,\,\overline{\partial}\,(\,\varphi\circ\Psi\circ\phi\,)\,\right\rangle\;.$$

Aplicando la regla de la cadena y que $\overline{\partial}\phi = -(\mu\circ\phi)\overline{\partial\phi}$, tendremos que

$$\begin{aligned}\left\langle\,\overline{\partial}\partial\phi\,,\,\varphi\,\right\rangle &= \left\langle\,(\,\mu\circ\phi\,)\,\overline{\partial\phi}\,,\,\partial\,(\,\varphi\circ\Psi\,)\,(\,\phi\,)\,\overline{\partial}\phi\,+\,\overline{\partial}\,(\,\varphi\circ\Psi\,)\,(\,\phi\,)\,\overline{\partial\phi}\,\right\rangle\\ &= \left\langle\,(\,\mu\circ\phi\,)\,|\partial\phi|^2\,,\,\overline{\partial}\,(\,\varphi\circ\Psi\,)\,(\,\phi\,)\,-\,(\,\mu\circ\phi\,)\,\partial\,(\,\varphi\circ\Psi\,)\,(\,\phi\,)\,\right\rangle\;.\end{aligned}$$

Si usamos la definición del Jacobiano de ϕ, podemos hacer el siguiente cambio de variables

$$\begin{aligned}\left\langle\,\overline{\partial}\partial\phi\,,\,\varphi\,\right\rangle &= \left\langle\,\frac{(\,\mu\circ\phi\,)}{1\,-\,|\,\mu\circ\phi\,|^2}\,J(\phi)\,,\,\left(\overline{\partial}\,(\,\varphi\circ\Psi\,)\,-\,\mu\,\partial\,(\,\varphi\circ\Psi\,)\right)(\,\phi\,)\,\right\rangle\\ &= \left\langle\,\frac{\mu}{1\,-\,|\,\mu\,|^2}\,,\,\overline{\partial}\,(\,\varphi\circ\Psi\,)\,-\,\mu\,\partial\,(\,\varphi\circ\Psi\,)\,\right\rangle\;.\end{aligned}$$

Pasando derivadas al otro lado tenemos

$$\left\langle\,\overline{\partial}\partial\phi\,,\,\varphi\,\right\rangle \,=\, -\left\langle\,\frac{(1-|\mu|^2)\partial\mu\,+\,|\mu^2|\partial\mu\,+\,\mu^2\,\partial\overline{\mu}}{\left(1\,-\,|\,\mu\,|^2\right)^2}\,,\,\varphi\circ\Psi\,\right\rangle + \left\langle\,\frac{\overline{\mu}\,\overline{\partial}\mu\,+\,\mu\,\overline{\partial}\overline{\mu}}{\left(1\,-\,|\,\mu\,|^2\right)^2}\,,\,\varphi\circ\Psi\,\right\rangle\;.$$

Simplificando, la expresión anterior puede reescribirse como

$$\left\langle \overline{\partial}\partial\phi\,,\,\varphi\right\rangle \,=\, \left\langle \frac{-\,\partial\mu\,+\,\overline{\mu}\,\overline{\partial}\mu\,+\,\mu\,\overline{\partial\mu}\,-\,\mu^2\,\partial\overline{\mu}}{\left(1\,-\,|\,\mu\,|^2\right)^2}\,,\,\varphi\circ\Psi\right\rangle .$$

A continuación, usamos $J(\Psi)=|\partial\Psi|^2(1-|\mu|^2)$ en el lado derecho y aplicamos un cambio de variables para remover Ψ del interior de la función test.

$$\begin{aligned}\left\langle \overline{\partial}\partial\phi\,,\,\varphi\right\rangle &= \left\langle \frac{-\,\partial\mu\,+\,\overline{\mu}\,\overline{\partial}\mu\,+\,\mu\,\overline{\partial\mu}\,-\,\mu^2\,\partial\overline{\mu}}{\left(1\,-\,|\,\mu\,|^2\right)^3}\frac{J(\Psi)}{|\,\partial\Psi\,|^2}\,,\,\varphi\circ\Psi\right\rangle \\ &= \left\langle \frac{-1}{|\partial\Psi(\phi)|^2}\frac{1}{\left(1-|\mu\circ\phi|^2\right)^3}\left(Id-(\mu\circ\phi)\,\mathbf{C}\right)\left((\partial\mu)\,(\phi)-(\overline{\mu}\circ\phi)\left(\overline{\partial}\mu\right)(\phi)\right)\,,\,\varphi\right\rangle .\end{aligned}$$

Llegados a este punto, usamos $\frac{1}{|\partial\Psi(\phi)|^2}=|\partial\phi|^2(1-|\mu\circ\phi|^2)^2$ y obtenemos que

$$\left\langle \overline{\partial}\partial\phi\,,\,\varphi\right\rangle \,=\, \left\langle \frac{-\,|\,\partial\,\phi\,|^2}{1\,-\,|\,\mu\,\circ\,\phi\,|^2}\,\left(\,Id\,-\,(\,\mu\,\circ\,\phi\,)\,\mathbf{C}\,\right)\left(\,(\,\partial\,\mu\,)\,(\phi)\,-\,(\,\overline{\mu}\,\circ\,\phi\,)\left(\,\overline{\partial}\,\mu\,\right)(\phi)\right)\,,\,\varphi\right\rangle ,$$

con lo que se demuestra (4.14).

Para terminar la prueba, solo hay que observar que la parte derecha de la última línea tiene soporte compacto, al igual que μ, y además pertenece a $L^1_c\,(\,\mathbb{C}\,)$. Esto se consigue sin mas que aplicar el teorema del cambio de variables. Veamos uno de los sumando, el otro sigue los mismos pasos. Evidentemente

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\mathbb{C}}\frac{|\,\partial\,\phi\,|^2}{1\,-\,|\,\mu\,\circ\,\phi\,|^2}\,\left(\,Id\,-\,(\,\mu\,\circ\,\phi\,)\,\mathbf{C}\,\right)\left(\,(\,\partial\,\mu\,)\,(\phi)\,\right)\,dA(z)\right|\lesssim\\ &\qquad\lesssim\int_{\mathbb{C}}J(\phi,z)\,\left|\partial\mu\,(\phi(z))\right|dA(z)\lesssim\int_{\mathbb{C}}|D\mu(\omega)|\,dA(\omega)\,<\,\infty\,.\end{aligned}$$

Así mismo, las constantes que van apareciendo en cada desigualdad, solo dependen de la constante de elipticidad $k<1$ y no del coeficiente μ. Con ello terminamos la prueba. □

A la luz del resultado, es evidente que una integrabilidad extra $D\mu$ implica una integrabilidad extra sobre el laplaciano $\overline{\partial}\partial\phi$. El siguiente corolario, que corresponde con el punto *(2)* del esquema, nos indica que integrabilidad podemos esperar para el laplaciano $\overline{\partial}\partial\phi$.

Corolario 4.6. *Sean* $1\,<\,p\,<\,2$, $\mu\in W^{1,p}_c\,(\,\mathbb{C}\,)$ *tal que* $\|\,\mu\,\|_\infty\,=\,k\,<\,1$ *y* $K\,:=\,\frac{1+k}{1-k}$. *Supongamos además que* $\phi\in W^{1,2}_{loc}\,(\,\mathbb{C}\,)$ *es la* solución principal *de* (4.13). *Entonces, para toda* $1<q<q_1:=\frac{p\,K}{1+p\,K-p}\,<\,p$ *se tiene el siguiente control de normas*

$$\|\,D^2\,\phi\,\|_{L^q(\mathbb{C})}\,\lesssim\,c_{k,p,q}\,\|\,D\,\mu\,\|_{L^p(\,\phi(\,\mathbb{D}_R\,)\,)}\left(\int_{\phi(\mathbb{D}_R)}|\,\partial\Psi\,|^r\right)^{\frac{p-q}{p}}\quad con\ r=\frac{2p\,(1-q)}{p-q}\leq 0$$

donde $R>0$ *es tal que el soporte de* $\mu\circ\phi$ *está contenido en* $\mathbb{D}_R$. *En particular* $D^2\phi\in L^q\,(\,\mathbb{C}\,)$ *para toda* $1<q<q_1$.

Demostración. Empecemos controlando $\int |\partial\Psi|^r$. Por un lado, la condición $r \leq \frac{2K}{K-1}$ es trivial ya que $r = \frac{2p(1-q)}{p-q} \leq 0$. Por el otro, la condición $\frac{-2}{K-1} < r$ es equivalente a $q < q_1 := \frac{pK}{1+pK-p}$. Así, por el Lema 4.3, tenemos que

$$\int_{\mathbb{D}} |\partial\Psi|^r < \infty$$

para todo disco $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$. En lo que sigue, fijamos un disco $\mathbb{D}_R$ tal que $\operatorname{supp}(\mu \circ \phi) \subset \mathbb{D}_R$.

Avancemos en la prueba viendo que se cumple el control de normas para $\overline{\partial}\partial\phi$. Gracias a la igualdad (4.14), podemos ver fácilmente que para toda $1 < q < q_1$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{C}} \left|\overline{\partial}\partial\phi\right|^q dA(z) &\approx \int_{\mathbb{D}_R} |\partial\phi|^{2q} \, |(D\mu)(\phi)|^q \, dA(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}_R} |\partial\phi|^{\frac{2q}{p}} \, |(D\mu)(\phi)|^q \, |\partial\phi|^{\frac{2pq-2q}{p}} \, dA(z) \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{D}_R} |\partial\phi|^2 \, |(D\mu)(\phi)|^p \, dA(z)\right)^{\frac{q}{p}} \left(\int_{\mathbb{D}_R} |\partial\phi|^{\frac{2pq-2q}{p-q}} \, dA(z)\right)^{\frac{p-q}{p}} \\
&= \| D\mu\|^q_{L^p(\phi(\mathbb{D}_R))} \left(\int_{\mathbb{D}_R} |\partial\phi|^2 \, |\partial\phi|^r \, dA(z)\right)^{\frac{p-q}{p}} \\
&\approx \| D\mu\|^q_{L^p(\phi(\mathbb{D}_R))} \left(\int_{\mathbb{D}_R} J(\phi) \, |(\partial\Psi)(\phi)|^r \, dA(z)\right)^{\frac{p-q}{p}} \\
&\approx \| D\mu\|^q_{L^p(\phi(\mathbb{D}_R))} \left(\int_{\phi(\mathbb{D}_R)} |\partial\Psi|^r\right)^{\frac{p-q}{p}} < \infty ,
\end{aligned}$$

donde hemos usado que $\int_{\phi(\mathbb{D}_R)} |\partial\Psi|^r < \infty$. Evidentemente, si tratamos con cuidado las desigualdades anteriores, vemos que en ellas solo aparecen constantes que dependen de k, de p y de q pero no del coeficiente μ.

Veamos que $\partial\partial\phi \in L^q(\mathbb{C})$ para toda $q < q_1$. Para ello, aplicamos la *transformada de Cauchy* en (4.14). Entonces

$$\partial\phi = H - \mathcal{C}\left(\frac{|\partial\phi|^2}{1 - |\mu\circ\phi|^2}\,(Id - (\mu\circ\phi)\,\mathbf{C})\left[(\partial\mu)(\phi) - (\overline{\mu}\circ\phi)\left(\overline{\partial}\mu\right)(\phi)\right]\right)$$

con $\overline{\partial}H = 0$. Pero dado que $\phi \approx z$ si $z \approx \infty$ y aplicamos $\mathcal{C}$ a una función $L^q_c(\mathbb{C})$, H ha de ser $H = 1$ y entonces

$$\partial\partial\phi = -\mathcal{B}\left(\frac{|\partial\phi|^2}{1 - |\mu\circ\phi|^2}\,(Id - (\mu\circ\phi)\,\mathbf{C})\left[(\partial\mu)(\phi) - (\overline{\mu}\circ\phi)\left(\overline{\partial}\mu\right)(\phi)\right]\right). \quad (4.15)$$

Así concluimos que $\partial\partial\phi \in L^q(\mathbb{C})$. Para terminar la prueba, solo hay que ver que $\overline{\partial\partial}\phi \in L^q(\mathbb{C})$. Rigurosamente, deberíamos proceder como en la demostración del *Lema 4.5* pero por simplicidad de escritura aplicamos $\overline{\partial}$ en la ecuación (4.13) y tenemos que

$$\begin{aligned}
\overline{\partial\partial}\phi &= -(\mu\circ\phi)\,\overline{\partial\partial\phi} - \overline{\partial\phi}\,\overline{\partial}(\mu\circ\phi) \\
&= -(\mu\circ\phi)\,\overline{\partial\partial\phi} - \overline{\partial\phi}\left[\partial\mu(\phi)\,\overline{\partial}\phi + \overline{\partial}\mu(\phi)\,\overline{\partial\phi}\right] \\
&= -(\mu\circ\phi)\,\overline{\partial\partial\phi} - \left(\overline{\partial\phi}\right)^2\left[\overline{\partial}\mu(\phi) - (\mu\circ\phi)\,\partial\mu(\phi)\right]
\end{aligned}$$

Es evidente que $(\mu\circ\phi)\,\overline{\partial\partial\phi}$ pertenece a $L^q(\mathbb{C})$ ya que $\partial\partial\phi\in L^q(\mathbb{C})$. Además, los mismos cálculos que realizamos al inicio de la prueba para demostrar que $\overline{\partial}\partial\phi\in L^q(\mathbb{C})$, nos sirven para demostrar que $\left(\overline{\partial\phi}\right)^2\left[\overline{\partial}\mu\,(\phi)-(\mu\circ\phi)\,\partial\mu\,(\phi)\right]$ también pertenece a $L^q(\mathbb{C})$. Concluimos así que $D^2\phi\in L^q(\mathbb{C})$ con el control de normas

$$\|D^2\phi\|_{L^q(\mathbb{C})}\leq c_{k,p,q}\,\|\,D\mu\,\|^q_{L^p(\,\phi(\,\mathbb{D}_R\,)\,)}\left(\int_{\phi(\mathbb{D}_R)}|\,\partial\Psi\,|^r\right)^{\frac{p-q}{p}},$$

tal y como queríamos demostrar. □

Observación 4.7.

- *La regularidad de ϕ siempre es igual o mejor que la regularidad de la propia Ψ.*
- *No podemos garantizar que $\nu:=-\,(\,\mu\circ\phi\,)$ pertenezca a $W^{1,p}_c\,(\,\mathbb{C}\,)$.*
- *Aún así, si suponemos que además $\nu=-\mu\circ\phi\in W^{1,p}_c(\mathbb{C})$ la regularidad que obtenemos por los métodos del capítulo anterior es inferior a la regularidad dada por este corolario.*

Comentemos el último punto de la observación. Por un lado, hemos demostrado que si $\phi\in W^{1,2}_{loc}\,(\mathbb{C})$ es la *solución principal* de

$$\overline{\partial}\phi\,+\,(\,\mu\,\circ\,\phi\,)\,\overline{\partial\phi}\,=\,0\,,$$

donde $\mu\in W^{1,p}_c\,(\mathbb{C})$ con $1<p<2$, entonces $\phi\in W^{2,q}_{loc}\,(\,\mathbb{C}\,)$ para toda $q<q_1:=\frac{pK}{1+pK-p}$. Por otro lado, la ecuación (4.13) es un tipo especial de *Ecuación de Beltrami Conjugada* donde el coeficiente ν depende de la solución principal. En capítulo anterior vimos que si $f\in W^{1,2}_{loc}\,(\mathbb{C})$ es una solución de la ecuación

$$\overline{\partial}f\,-\,\nu\,\overline{\partial f}\,=\,0$$

donde $\nu\in W^{1,p}_c\,(\mathbb{C})$ con $1+k<p<2$, entonces $f\in W^{2,s}_{loc}\,(\mathbb{C})$ para toda $\frac{1}{s}>\frac{1}{p}+\frac{k}{1+k}=:\frac{1}{q_0}$ o equivalentemente, usando que $K=\frac{1+k}{1-k}$, para toda $s<q_0:=\frac{2pK}{2K+pK-p}$. Por ello, si fijamos $\mu\in W^{1,p}_c(\mathbb{C})$, podemos estudiar al homeomorfismo $\phi\in W^{1,2}_{loc}\,(\mathbb{C})$ por dos caminos diferentes. O bien por ser solución de (4.13), donde alcanzamos $D^2\phi\in L^q(\mathbb{C})$ para toda $q<q_1$. O bien, por ser solución de (3.2) donde no siempre tendremos que $\nu=-\mu\circ\phi$ pertenezca a algún espacio de Sobolev como ya indicamos anteriormente. No obstante, si suponemos que $\nu=-\mu\circ\phi\in W^{1,p}_c(\mathbb{C})$ al igual que μ (cosa que podría ser falsa) y aplicamos los resultados del capítulo del capítulo previo, obtendremos que $D^2\phi\in L^q(\mathbb{C})$ para toda $q<q_0$. Un simple cálculo nos demuestra que

$$q_1\,:=\,\frac{pK}{1+pK-p}\,>\,q_0\,:=\,\frac{2pK}{2K+pK-p}\quad\Longleftrightarrow\quad p\,<\,2\,.$$

Por ello, la regularidad alcanzada por los métodos del capítulo anterior es inferior a la alcanzada por los métodos de esta sección.

Problema Abierto 4.8. *Determinar si el exponente $q_1=\frac{pK}{1+pK-p}$, del* Corolario 4.6*, es óptimo.*

A continuación, damos el último paso en nuestro esquema. Con ello demostraremos la implicación (4.7) que es el objetivo de la subsección.

Teorema 4.9. *Sea $\mu \in W^{1,p}_c(\mathbb{C})$ con $p > 1$ y tal que $\| \mu \|_\infty = k < 1$. Asumamos que $\Psi \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ es la* solución principal *de la* Ecuación de Beltrami Homogénea*:*

$$\overline{\partial}\,\Psi\,(z) = \mu(z)\,\partial\,\Psi\,(z).$$

Entonces, $\log(\partial\Psi) \in W^{1,s}(\mathbb{C})$ *para toda* $1 < s < s_1 := \frac{pK^2}{1+pK^2-p}$. *Además, si $p > 1+k$ podemos tomar $s = p$.*

Demostración. Si $p > 1+k$, el resultado ya fué demostrado en el *Teorema 4.1.*

Sea $1 < p \leq 1+k$ y consideremos $\phi \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ tal que $\Psi \circ \phi = z$. Entonces, ya tenemos la igualdad

$$\partial\Psi\partial\phi(\Psi) = \frac{1}{1-|\mu|^2}\,. \tag{4.16}$$

Derivando ambos lados de (4.16), usando la regla de la cadena y despejando convenientemente, escribimos

$$\partial\partial\Psi\,\partial\phi(\Psi) = \frac{\mu\partial\overline{\mu}+\overline{\mu}\partial\mu}{\left(1-|\mu|^2\right)^2} - (\partial\Psi)^2\,\partial\partial\phi(\Psi) - \partial\Psi\overline{\partial}\partial\phi(\Psi)\partial\overline{\Psi}\,. \tag{4.17}$$

Mas aún, usando (4.16) en el lado izquierdo de (4.17) tenemos que

$$\frac{1}{1-|\mu|^2}\frac{\partial\partial\Psi}{\partial\Psi} = \frac{\mu\partial\overline{\mu}+\overline{\mu}\partial\mu}{\left(1-|\mu|^2\right)^2} - (\partial\Psi)^2\,\partial\partial\phi(\Psi) - \partial\Psi\overline{\partial}\partial\phi(\Psi)\partial\overline{\Psi}\,.$$

Equivalentemente, usando que $\partial\overline{\Psi} = \overline{\mu}\overline{\partial\Psi}$ y la igualdad (4.14) para $\overline{\partial}\partial\phi(\Psi)$, tenemos que

$$\begin{aligned}\partial\log(\partial\Psi) &= \frac{\mu\partial\overline{\mu}+\overline{\mu}\partial\mu}{1-|\mu|^2} - \left(1-|\mu|^2\right)(\partial\Psi)^2\,\partial\partial\phi(\Psi)\\ &\quad + \overline{\mu}|\partial\Psi|^2\,|\partial\phi(\Psi)|^2\,(Id-\mu\mathbf{C})\left(\partial\mu-\overline{\mu}\,\overline{\partial}\mu\right).\end{aligned}$$

Sin mas que usar la igualdad (4.16) en el último término y tomando módulo, tenemos que

$$|\partial\log(\partial\Psi)| \leq c_k\,|D\mu| + c_k\,|J(\Psi)\,\partial\partial\phi(\Psi)|\,. \tag{4.18}$$

Como ya sabemos que $\partial\partial\phi \in L^1_{loc}(\mathbb{C})$ gracias al Corolario 4.6, un simple cambio de variable nos dice que para todo disco $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ se cumple que

$$\|\partial\log(\partial\Psi)\|_{L^1(\mathbb{D})} \leq c_k\,\|D\mu\|_{L^1(\mathbb{D})} + c_k\,\|\partial\partial\phi\|_{L^1(\Psi(\mathbb{D}))} < \infty\,.$$

De manera análoga se comprueba que

$$\left|\overline{\partial}\log(\partial\Psi)\right| \leq c_k\,|D\mu| + c_k\,|J(\Psi)\,\partial\partial\phi(\Psi)| \tag{4.19}$$

y que por lo tanto

$$\|\overline{\partial}\log(\partial\Psi)\|_{L^1(\mathbb{D})} \leq c_k\,\|D\mu\|_{L^1(\mathbb{D})} + c_k\,\|\partial\partial\phi\|_{L^1(\Psi(\mathbb{D}))} < \infty\,.$$

Así deducimos que $\log(\partial\Psi) \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{C})$.

Queremos alcanzar $\log(\partial\Psi) \in W^{1,s}(\mathbb{C})$ para toda $1 < s < s_1$. Para ello, nos basamos en las desigualdades (4.18) y (4.19). Sea un numero s que satisfaga que $1 < s < q_1$ con $q_1 := \frac{pK}{1+pK-p}$

la constante del *Corolario 4.6*. Entonces, elevando a s la desigualdad (4.18) e integrando en $\mathbb{C}$ vemos que

$$\int_{\mathbb{C}} |\,\partial \log(\,\partial\Psi\,)\,|^s \; dA(z) \lesssim \int_{\mathbb{C}} |\,D\mu\,|^s \; dA(z) + \int_{\mathbb{C}} |\,J(\Psi)\,\partial\partial\phi(\Psi)\,|^s \; dA(z)\,.$$

De forma similar, de (4.19) tenemos que

$$\int_{\mathbb{C}} \left|\,\overline{\partial} \log(\,\partial\Psi\,)\,\right|^s \; dA(z) \lesssim \int_{\mathbb{C}} |\,D\mu\,|^s \; dA(z) + \int_{\mathbb{C}} |\,J(\Psi)\,\partial\partial\phi(\Psi)\,|^s \; dA(z)\,.$$

Así, ambas derivadas están acotadas por los mismos términos. Ahora, estudiamos cada término por separado. Empezamos por el primero.

Evidentemente, como $\frac{pK}{1+pK-p} < p$ y μ tiene soporte compacto, podemos aplicar la desigualdad de Hölder

$$\int_{\mathbb{C}} |\,D\mu\,|^s \; dA(z) \le |\,\mathrm{supp}\,(\mu)\,|^{\frac{p-s}{p}} \left(\int_{\mathbb{C}} |\,D\mu\,|^p \; dA(z) \right)^{\frac{s}{p}} < \infty\,.$$

Para controlar el segundo sumando, tomaremos un numero q con $s < q < q_1$ a determinar y distinguiremos entre entornos del origen y entornos del infinito. Veamos primero el caso acotado. Para ello, fijemos un disco $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ y actuemos como sigue

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} |\,J(\Psi)\,\partial\partial\phi(\Psi)\,|^s \; dA(z) &= \int_{\mathbb{D}} |\,J(\Psi)\,|^{\frac{s}{q}} \; |\,\partial\partial\phi(\Psi)\,|^s \; |\,J(\Psi)\,|^{s-\frac{s}{q}} \; dA(z) \\
&\le \left(\int_{\mathbb{D}} |\,J(\Psi)\,|\;|\,\partial\partial\phi(\Psi)\,|^q \; dA(z) \right)^{\frac{s}{q}} \left(\int_{\mathbb{D}} |\,J(\Psi)\,|^{s\frac{q-1}{q-s}} \; dA(z) \right)^{\frac{q-s}{q}} \\
&= \left(\int_{\phi(\mathbb{D})} |\,\partial\partial\phi\,|^q \; dA(\omega) \right)^{\frac{s}{q}} \left(\int_{\mathbb{D}} |\,J(\Psi)\,|^{s\frac{q-1}{q-s}} \; dA(z) \right)^{\frac{q-s}{q}} =: A \cdot B
\end{aligned}$$

donde hemos usado la desigualdad de Hölder en la segunda línea y el teorema del cambio de variables en la última. Del *Corolario 4.6* sabemos que $A < \infty$. Para obtener $B < \infty$, debemos seleccionar s y q con $1 < s < q < q_1 := \frac{pK}{1+pK-p}$ tales que

$$\frac{-1}{K-1} < s\,\frac{q-1}{q-s} < \frac{K}{K-1}\,.$$

Por un lado, la desigualdad de la izquierda nos es indiferente ya que $s\frac{q-1}{q-s} > 0$. Por otro lado, la desigualdad de la derecha es equivalente a

$$s < \frac{qK}{1+qK-q}\,.$$

Con ello aseguramos que $B < \infty$. Por lo tanto, $\log(\partial\Psi) \in W^{1,s}_{loc}(\mathbb{C})$ para toda $1 < s < \frac{qK}{1+qK-q}$.

Veamos que ocurre en los entornos del infinito. De (4.15) sabemos que $\partial\partial\phi$ es la transformada de Beurling de una función de $L^q(\mathbb{C})$ con soporte compacto. Por lo tanto, tenemos que

$$|\,\partial\partial\phi\,(\omega)\,| \le \frac{C}{|\,\omega\,|^2} \quad \text{si} \quad |\,\omega\,| > M_1\,(\,\mu\,)\,.$$

Así mismo, como Ψ es solución principal ($\Psi = z + \mathcal{C}h$ con $\mathrm{supp}(h) \subset \mathrm{supp}(\mu)$) tenemos que

$$\begin{aligned}
|\,\Psi\,(z)\,| &\ge \frac{|\,z\,|}{2} \quad \text{si} \quad |\,z\,| > M_2\,(\,\mu\,) \quad \text{y} \\
|\,J\,(\Psi)\,(z)\,| &\le 2 \quad \text{si} \quad |\,z\,| > M_3\,(\,\mu\,)\,.
\end{aligned}$$

Usando estas desigualdades obtenemos

$$|\, J\,(\Psi)\,(z)\,|\;|\,\partial\partial\phi\,(\Psi(z))\,| \;\leq\; \frac{C}{|\,z\,|^2}$$

si $|z|$ es suficientemente grande. Por lo tanto

$$\int_{|z|>M} |\, J(\Psi)\,\partial\partial\phi(\Psi)\,|^s \; dA(z) \;\lesssim\; \int_{|z|>M} \frac{1}{|\,z\,|^{2s}}\, dA(z) \;<\; \infty\,.$$

De esta forma vemos que $\log(\partial\Psi) \in W^{1,s}(\mathbb{C})$ para toda $1 < s < \frac{qK}{1+qK-q}$.

Para terminar la prueba, solo hemos de observar que la función

$$f\,(\,q\,) \;=\; \frac{qK}{1\,+\,qK\,-\,q}$$

es creciente con respecto a q. Por ello, tomando q tan cercana a q_1 como queramos, podemos tener s tan cercana a $\frac{q_1K}{1+q_1K-q_1}$ como deseemos. Así probamos que $\log(\partial\Psi) \in W^{1,s}(\mathbb{C})$ para toda $1 < s < \frac{q_1K}{1+q_1K-q_1} = \frac{pK^2}{1+pK^2-p}$ tal y como queríamos demostrar. □

Destacamos que hemos alcanzamos la regularidad para $\log(\,\partial\Psi\,)$ cuando el coeficiente $\mu \in W^{1,p}_c(\mathbb{C})$ con $p \leq 1+k$. Es decir, sin tener garantizada la invertibilidad del operador $Id - \mu\mathcal{B}$ en $L^p(\mathbb{C})$. Esto es cuanto menos sorprendente ya que $\log(\partial\Psi)$ satisface la *Ecuación de Beltrami*

$$\overline{\partial}\log(\,\partial\Psi\,) \;=\; \mu\,\partial\log(\,\partial\Psi\,) \;+\; \partial\mu\,.$$

O equivalentemente, tenemos que

$$(\,Id\;-\;\mu\,\mathcal{B}\,)\;\overline{\partial}\log(\,\partial\Psi\,) \;=\; \partial\mu$$

donde el operador de Beltrami podría no ser invertible. Afortunadamente, el estudio del homeomorfismo $\phi \in W^{1,2}_{loc}(\,\mathbb{C}\,)$ nos ha permitido superar la dificultad que representa que el operador no sea invertible cuando $p \leq 1+k$.

Problemas Abiertos 4.10.

- *Determinar si el exponente* $s_1 = \frac{pK^2}{1+pK^2-p}$ *del* Teorema 4.9 *es óptimo.*
- *Extender los resultados de esta subsección a la* Ecuación de Beltrami Generalizada.

4.2. Coeficiente con Regularidad Sobolev Fraccionaria.

Como ya indicamos al inicio del capítulo, en esta sección refinaremos la implicación

$$\mu \,\in\, VMO_c\,(\,\mathbb{C}\,) \qquad \Longrightarrow \qquad \log\,(\,\partial\phi\,) \,\in\, VMO\,(\,\mathbb{C}\,)\;,$$

dada por Hamilton en [19], donde $\phi \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ es la *solución principal* de la *Ecuación de Beltrami*

$$\overline{\partial}\phi \;=\; \mu\,\partial\phi\,.$$

Lo que pretendemos es alcanzar la implicación anterior cambiando el espacio $VMO_c(\mathbb{C})$ por el espacio $W_c^{\alpha,2/\alpha}(\mathbb{C})$ con $\alpha < 1$. Sabemos que el caso $\alpha = 1$, es decir $\mu \in W_c^{1,2}(\mathbb{C})$, se alcanzó en [11] gracias a la identidad

$$\overline{\partial} \log(\partial\phi) = \mu\,\partial \log(\partial\phi) + \partial\mu\,, \tag{4.20}$$

y a la invertibilidad del Operador de Beltrami

$$Id - \mu\mathcal{B} : L^2(\mathbb{C}) \to L^2(\mathbb{C})\,.$$

Observemos que el método de interpolación compleja [37] nos asegura que

$$[BMO, W^{1,2}]_\alpha = W^{\alpha,2/\alpha}$$

para todo $0 < \alpha < 1$. Así , nuestro objetivo puede verse como una versión interpolada de los resultados de [19] y [11].

Para lograr nuestros propósitos, nos apoyaremos en unas modificaciones de la identidad (4.20) y del operador de Beltrami. Concretamente utilizaremos la igualdad

$$I_{1-\alpha}\,(Id - \mu\mathcal{B})\,D^{1-\alpha}\,(\mathcal{R}_1 + i\mathcal{R}_2)\left(D^\alpha \log(\partial\phi)\right) = (\mathcal{R}_1 - i\mathcal{R}_2)\,(D^\alpha\mu)$$

y la invertibilidad del operador

$$I_{1-\alpha}\,(Id - \mu\mathcal{B})\,D^{1-\alpha} : L^{\frac{2}{\alpha}}(\mathbb{C}) \to L^{\frac{2}{\alpha}}(\mathbb{C})\,.$$

que veremos mas adelante. Recordemos que los operadores I_β, D^β y $\mathcal{R}_i$ ya fueron definidos en los *Preliminares*. Si para la invertibilidad del operador de Beltrami, por ejemplo en $L^{2-\epsilon}(\mathbb{C})$, se requiere la compacidad del conmutador $[\mu, \mathcal{B}]$ en $L^{2-\epsilon}(\mathbb{C})$, para nuestro operador necesitaremos de la compacidad del conmutador $[\mu, D^\alpha]$ en cierto espacio L^p. Al contrario que en el caso $\alpha = 1$, en nuestro conmutador no aparece la *Transformada de Beurling* y por lo tanto podemos estudiar su compacidad en cualquier espacio $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$ y no solo en el plano complejo. Concretamente tenemos el siguiente resultado que será el núcleo de nuestro trabajo ya que a partir de el alcanzaremos el resto de resultados.

Teorema 4.11. *Sean $\beta \in (0,1)$ y $b \in W_c^{\beta,n/\beta}(\mathbb{R}^n)$. Entonces, el conmutador*

$$\left[b\,,\,D^\beta\right] : L^{\frac{np}{n-\beta p}}(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$$

es acotado y compacto para todo $1 < p < \frac{n}{\beta}$.

De hecho, de la compacidad del conmutador $[b, D^\alpha]$ podemos demostrar, a su vez, la compacidad de los conmutadores del tipo $[\,b\,,\,\mathcal{K}\,]$ donde $\mathcal{K}$ es cualquier operador de Calderon-Zygmund de convolución. En particular cuando $\mathcal{K} = \mathcal{B}$ es la transformada de Beurling. Concretamente tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.12. *Sean $\beta \in (0,1)$, $b \in W_c^{\beta,n/\beta}(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{K}$ un operador de Calderon-Zygmund de convolución. Entonces, el conmutador*

$$[\,b\,,\,\mathcal{K}\,] : W^{\beta,p}(\mathbb{R}^n) \to W^{\beta,p}(\mathbb{R}^n)$$

es acotado y compacto para toda $1 < p < \frac{n}{\beta}$.

Para ver la validez del corolario solo hay que observar, por un lado, que $b \in VMO(\mathbb{R}^n)$ y por lo tanto el conmutador

$$[\,b\,,\,\mathcal{K}\,]:\,L^s\,(\,\mathbb{R}^n\,)\,\rightarrow\,L^s\,(\,\mathbb{R}^n\,) \tag{4.21}$$

es compacto para toda $s \in (1, \infty)$ gracias al *Teorema 2.21* (ver [43]). En particular, para $1 < s = p < \frac{n}{\beta}$. Por el otro lado, tenemos la siguiente identidad de operadores

$$[\,\mathcal{K}\,,\,b\,]\,\equiv\,I_\beta\,\mathcal{K}\,\left[\,D^\beta\,,\,b\,\right]\,+\,I_\beta\,\left[\,\mathcal{K}\,,\,b\,\right]D^\beta\,+\,I_\beta\,\left[\,b\,,\,D^\beta\,\right]\,\mathcal{K}\,.$$

Así, la compacidad del conmutador $[\,\mathcal{K}\,,\,b\,]:\dot{W}^{\beta,p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \dot{W}^{\beta,p}(\mathbb{R}^n)$ se sigue rápidamente de (4.21), del *Teorema 4.11*, de la continuidad de los operadores de convolución de Calderon-Zygmund (en los espacios medibles L^s y en los espacios de Sobolev Fraccionario $W^{\beta,p}$) y de la continuidad de los operadores

$$\Pi:\,W^{\beta,p}\,(\,\mathbb{R}^n\,)\,\rightarrow\,L^{\frac{np}{n-\beta p}}\,(\,\mathbb{R}^n\,)$$

$$I_\beta:\,L^p\,(\,\mathbb{R}^n\,)\,\rightarrow\,W^{\beta,p}\,(\,\mathbb{R}^n\,)$$

$$D^\beta:\,W^{\beta,p}\,(\,\mathbb{R}^n\,)\,\rightarrow\,L^p\,(\,\mathbb{R}^n\,)$$

para toda $1 < p < \frac{n}{\beta}$ donde Π representa a la inclusión de espacios. Una vez hemos obtenido la compacidad del conmutador en el espacio $L^p(\mathbb{R}^n)$ y en el espacio homogéneo $\dot{W}^{\beta,p}(\mathbb{R}^n)$ automáticamente se alcanza la compacidad en el espacio de Sobolev Fraccionario $W^{\beta,p}(\mathbb{R}^n)$ tal y como nos asegura el corolario.

En particular, tomando $n = 2$, $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ y $\mathcal{K} = \mathcal{B}$ la transformada de Beurling, el corolario anterior nos asegura que el conmutador

$$[\,\mu\,,\,\mathcal{B}\,]:\,W^{\alpha,p}\,(\,\mathbb{C}\,)\,\rightarrow\,W^{\alpha,p}\,(\,\mathbb{C}\,)$$

es acotado y compacto para toda $\alpha \in (0, 1)$ y toda $1 < p < \frac{2}{\alpha}$ cuando $\mu \in W^{\alpha,2/\alpha}(\mathbb{C})$. De esta forma, si además suponemos que $\mu \in L^\infty_c(\mathbb{C})$ con $\|\mu\|_\infty = k < 1$, podemos demostrar la invertibilidad del operador de Beltrami Generalizado en ciertos espacios de Solobev Fraccionario tal y como nos asegura la siguiente proposición.

Proposición 4.13. *Sean $\alpha \in (0, 1)$ y dos coeficientes de Beltrami $\mu, \nu \in W_c^{\alpha,2/\alpha}(\mathbb{C}) \cap L^\infty(\mathbb{C})$ con $\||\mu| + |\nu|\|_\infty = k < 1$. Entonces, el operador de Beltrami generalizado*

$$Id\,-\,\mu\,\mathcal{B}\,-\,\nu\,\overline{\mathcal{B}}:\,\dot{W}^{\alpha,s}\,(\,\mathbb{C}\,)\,\rightarrow\,\dot{W}^{\alpha,s}\,(\,\mathbb{C}\,)$$

es acotado y contínuamente invertible para toda $1 < s < \frac{2}{\alpha}$.

Observemos que la invertibilidad es análoga a la alcanzada en el capítulo anterior para $\alpha = 1$. Al igual que en dicho caso, el operador no es invertible en el espacio $W^{\alpha,2/\alpha}(\mathbb{C})$ con lo que volvemos a perder el extremo de la integrabilidad. Además, esta invertibilidad nos permitirá saber que regularidad podemos esperar de las soluciones de la ecuación (1.6) como veremos a lo largo de las próximas subsecciones.

Para facilitar la lectura de la sección, pospondremos la demostración del *Teorema 4.11* y de la *Proposición 4.13* a la última subsección. Además, para la *Proposición 4.13* daremos dos demostraciones distintas; una basada directamente en el *Teorema 4.11* y otra usando el *Corolario 4.12*. En lo que sigue, supondremos que el *Teorema 4.11* y la *Proposición 4.13* son ciertos y los usaremos cuando sea necesario.

Hemos dividido la sección como sigue.

- **Subsección 4.2.1 Logaritmo de la Derivada de la Solución Principal de la Ecuación de Beltrami.** En esta subsección daremos un refinamiento de la implicación (4.2) dada por Hamilton en [19]. Además comentaremos porque los métodos utilizados fallan cuando ϕ es la solcuión de (3.2) o de (1.6).
- **Subsección 4.2.2 Soluciones de la Ecuación de Beltrami Generalizada con Coeficientes Fracionarios.** Mostraremos que regularidad podemos esperar de las soluciones de la *Ecuación de Beltrami Generalizada* (que no para $\log(\partial\phi)$).
- **Subsección 4.2.3 Demostración del Teorema 4.11 y de la Proposición 4.13.** Nos limitaremos a dar las pruebas de ambos resultados. Con ello cerramos el capítulo.

4.2.1. Logaritmo de la Derivada de la Solución Principal de la Ecuación de Beltrami.

Nuestro propósito es conocer para que valores de $\alpha < 1$ podemos llegar a demostrar la implicación

$$\mu \in W_c^{\alpha,2/\alpha}(\mathbb{C}) \qquad \Longrightarrow \qquad \log(\partial\phi) \in W^{\alpha,2/\alpha}(\mathbb{C}) \,. \tag{4.22}$$

De momento, asumiremos que $\mu \in C_c^\infty(\mathbb{C})$. Entonces sabemos que la solución principal ϕ de

$$\overline{\partial}\phi = \mu\,\partial\phi$$

pertenece a $C^\infty(\mathbb{C})$ y su derivada cumple $|\partial\phi| > 0$. Además, como $\phi = z + \mathcal{C}\big((Id - \mu\mathcal{B})^{-1}\mu\big)$ con μ con soporte compacto, también tenemos que $\log(\partial\phi) \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ y satisface

$$(Id - \mu\mathcal{B})\,\overline{\partial}\log(\partial\phi) = \partial\mu \tag{4.23}$$

donde $\mathcal{B}$ es la *transformada de Beurling*. Para que en el lado derecho aparezca la derivada fraccionaria $D^\alpha\mu$, usaremos la representación de la transformada clásica de Riesz en la banda de Fourier. Es decir $\widehat{\mathcal{R}_j u}(\xi) = -i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{u}(\xi)$. Recordemos que para esta transformada tenemos

$$\begin{cases} \overline{\partial}u = -\dfrac{1}{2}D^{1-\alpha}(\mathcal{R}_1 + i\mathcal{R}_2)\,D^\alpha u \quad \text{y} \\ \partial u = -\dfrac{1}{2}D^{1-\alpha}(\mathcal{R}_1 - i\mathcal{R}_2)\,D^\alpha u \end{cases}$$

para toda $u \in C_c^\infty(\mathbb{C})$. Además, los operadores $\mathcal{R}_1 \pm i\mathcal{R}_2 : L^p \mapsto L^p$ son continuamente invertibles toda $p \in (1,\infty)$. Por lo tanto, la ecuación (4.23) puede escribirse como

$$(Id - \mu\mathcal{B})\,D^{1-\alpha}(\mathcal{R}_1 + i\mathcal{R}_2)\,D^\alpha\log(\partial\phi) = D^{1-\alpha}(\mathcal{R}_1 - i\mathcal{R}_2)\,D^\alpha\mu,$$

y aplicando el potencial de Riesz adecuado tenemos

$$I_{1-\alpha}(Id - \mu\mathcal{B})\,D^{1-\alpha}(\mathcal{R}_1 + i\mathcal{R}_2)\,D^\alpha\log(\partial\phi) = (\mathcal{R}_1 - i\mathcal{R}_2)\,D^\alpha\mu\,.$$

Así, siempre que tengamos la invertibilidad del operador

$$I_{1-\alpha}\,(Id - \mu\mathcal{B})\,D^{1-\alpha} : L^{\frac{2}{\alpha}}(\mathbb{C}) \longmapsto L^{\frac{2}{\alpha}}(\mathbb{C})$$

podremos relacionar unívocamente las derivadas fraccionarias $D^\alpha\mu$ y $D^\alpha\log(\partial\phi)$ (al menos si $\mu \in C_c^\infty(\mathbb{C})$) . De esta forma, para lograr nuestro objetivo, debemos demostrar que el operador es invertible y que la relación se mantiene aún cuando μ no sea suave. Para la invertibilidad hemos alcanzado el siguiente resultado.

Proposición 4.14. *Sean* $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$ *y* $\mu \in W_c^{\alpha,\frac{2}{\alpha}}(\mathbb{C})$ *tal que* $\|\mu\|_\infty = k < 1$. *Entonces, el operador*

$$I_{1-\alpha}\,(\,Id - \mu\mathcal{B}\,)\,D^{1-\alpha} : L^{\frac{2}{\alpha}}(\,\mathbb{C}\,) \longmapsto L^{\frac{2}{\alpha}}(\,\mathbb{C}\,)$$

es continuo e invertible.

Observación 4.15. *La condicón* $\alpha \geq \frac{1}{2}$ *es una consecuencia de las herramientas utilizadas. En la demostración del resultado necesitaremos del embedding* $W^{\alpha,2/\alpha} \subset W^{1-\alpha,\frac{2}{1-\alpha}}$, *el cual solo es cierto si* $\alpha \geq \frac{1}{2}$. *De hecho, si* $\alpha = \frac{1}{2}$ *el embedding se convierte en una igualdad.*

Demostración de la Proposición 4.14. Reescribamos el operador como

$$\begin{aligned} I_{1-\alpha}\,(\,Id - \mu\mathcal{B}\,)\,D^{1-\alpha} &= Id - I_{1-\alpha}\,\mu\,D^{1-\alpha}\,\mathcal{B} \\ &= Id - \mu\mathcal{B} + \big(\mu - I_{1-\alpha}\,\mu\,D^{1-\alpha}\big)\,\mathcal{B} \\ &= Id - \mu\mathcal{B} + \big(I_{1-\alpha}D^{1-\alpha}\mu - I_{1-\alpha}\,\mu\,D^{1-\alpha}\big)\,\mathcal{B} \\ &= Id - \mu\mathcal{B} + I_{1-\alpha}\big(D^{1-\alpha}\mu - \mu\,D^{1-\alpha}\big)\,\mathcal{B} \\ &= Id - \mu\,\mathcal{B} + I_{1-\alpha}\big[\,D^{1-\alpha}\,,\,\mu\big]\,\mathcal{B}\,, \end{aligned}$$

Como $\mu \in W_c^{\alpha,2/\alpha}(\mathbb{C}) \subset W^{1-\alpha,\frac{2}{1-\alpha}}$, podemos aplicar el *Teorema 4.11*. Así, el conmutador $[\,D^{1-\alpha}\,,\,\mu\,] : L^{\frac{2}{\alpha}} \to L^2$ es compacto y como los operadores $I_{1-\alpha} : L^2 \mapsto L^{\frac{2}{\alpha}}$ y $\mathcal{B} : L^{\frac{2}{\alpha}} \to L^{\frac{2}{\alpha}}$ son contínuos, el último término del lado derecho también es compacto. Además, $\mu \in W_c^{\alpha,\frac{2}{\alpha}} \subset VMO$ con $\|\mu\|_\infty =: k < 1$ y por lo tanto el operador $Id - \mu\mathcal{B} : L^p \to L^p$ es invertible para todo $p \in (\,1\,,\,\infty\,)$. En particular para $p = \frac{2}{\alpha}$. Entonces,

$$I_{1-\alpha}\,(\,Id - \mu\mathcal{B}\,)\,D^{1-\alpha} : L^{\frac{2}{\alpha}}(\,\mathbb{C}\,) \longmapsto L^{\frac{2}{\alpha}}(\,\mathbb{C}\,)$$

es un operador de Fredholm por ser suma de un operador invertible y un operador compacto. Un simple argumento de homotopía muestra que es de índice nulo. A continuación veremos que el operador es inyectivo.

Sea $F \in L^{\frac{2}{\alpha}}$ tal que $I_{1-\alpha}\,(\,Id - \mu\mathcal{B}\,)\,D^{1-\alpha}F = 0$. Si $F = I_{1-\alpha}(\,f\,)$ con $f \in L^2$, tenemos que $I_{1-\alpha}\,(\,Id - \mu\mathcal{B}\,)\,f = 0$. Así $f = 0$ y por lo tanto $F = 0$. Si $F \in L^{\frac{2}{\alpha}} \setminus I_{1-\alpha}(\,L^2\,)$, obtendremos que

$$F = I_{1-\alpha}\,\mu\,D^{1-\alpha}\mathcal{B}F\,.$$

Equivalentemente

$$F - \mu\mathcal{B}F = I_{1-\alpha}[\mu, D^{1-\alpha}]\mathcal{B}F$$

Entonces, F es de la forma $F = (Id - \mu\mathcal{B})^{-1}I_{1-\alpha}(L^2)$. Si demostrásemos que

$$Id - \mu\mathcal{B} : I_{1-\alpha}\big(\,L^2\,\big) \longmapsto I_{1-\alpha}\big(\,L^2\,\big)$$

es invertible, tendremos que F pertenece a $I_{1-\alpha}(\,L^2\,)$ y por lo tanto, $F = 0$. Esta invertibilidad se sigue de manera inmediata de $\alpha \geq \frac{1}{2}$ y de la *Proposición 4.13* (ya que $\mu \in W_c^{1-\alpha,\frac{2}{1-\alpha}}(\mathbb{C})$). Con esto terminamos la prueba. $\square$

Una vez la invertibilidad del operador $I_{1-\alpha}\,(Id - \mu\mathcal{B})\,D^{1-\alpha} : L^{\frac{2}{\alpha}}(\mathbb{C}) \longmapsto L^{\frac{2}{\alpha}}(\mathbb{C})$ con $\mu \in W_c^{\alpha,2/\alpha}(\mathbb{C})$ y $\alpha \geq \frac{1}{2}$ ha sido demostrada, solo nos quedará probar que la implicación (4.22) sigue siendo cierta aún si $\mu \notin C_c^\infty(\mathbb{C})$. Esto lo vemos en el siguiente resultado.

Teorema 4.16. *Sean* $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$ *y un coeficiente de Beltrami* $\mu \in W_c^{\alpha,2/\alpha}(\mathbb{C}) \cap L^\infty(\mathbb{C})$ *con* $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$. *Supongamos que* ϕ *es la solución principal de la* Ecuación de Beltrami

$$\overline{\partial}\phi = \mu\,\partial\phi\,.$$

Entonces, $\log(\partial\phi) \in W^{\alpha,2/\alpha}(\mathbb{C})$.

Demostración. Asumamos en un primer momento que $\mu \in C_c^\infty(\mathbb{C})$, luego actuaremos por densidad. Por los pasos dados al inicio de la subsección sabemos que

$$I_{1-\alpha}(Id - \mu\mathcal{B})\,D^{1-\alpha}(\mathcal{R}_1 + i\mathcal{R}_2)(D^\alpha g) = (\mathcal{R}_1 - i\mathcal{R}_2)(D^\alpha \mu)$$

donde $\partial\phi = e^g$. Además, gracias a la *Proposición 4.14* y a la invertibilidad de los operadores $\mathcal{R}_1 \pm i\mathcal{R}_2$, el operador

$$T := (\mathcal{R}_1 - i\mathcal{R}_2)^{-1} I_{1-\alpha}(Id - \mu\mathcal{B})\,D^{1-\alpha}(\mathcal{R}_1 + i\mathcal{R}_2) : L^{\frac{2}{\alpha}}(\mathbb{C}) \longmapsto L^{\frac{2}{\alpha}}(\mathbb{C})$$

es invertible con el siguiente control de normas.

$$\|T\|_{L^{\frac{2}{\alpha}}(\mathbb{C})\to L^{\frac{2}{\alpha}}(\mathbb{C})} \lesssim \|I_{1-\alpha}(Id - \mu\mathcal{B})\,D^{1-\alpha}\|_{L^{\frac{2}{\alpha}}(\mathbb{C})\to L^{\frac{2}{\alpha}}(\mathbb{C})} \leq c_{\alpha,k}\|\mathcal{B}\|_{L^{\frac{2}{\alpha}}(\mathbb{C})}\|D^\alpha\mu\|_{L^{\frac{2}{\alpha}}(\mathbb{C})}\,.$$

Es decir, $\|T\|_{L^{\frac{2}{\alpha}}\to L^{\frac{2}{\alpha}}} \leq c_{\alpha,k}\|D^\alpha\mu\|_{L^{\frac{2}{\alpha}}}$. Es más, por el *Teorema del Grafo Abierto*, T tiene un operador inverso continuo T^{-1} y su norma está acotada por $C_{\alpha,k}\|D^\alpha\mu\|_{L^{\frac{2}{\alpha}}}$. Es evidentemente que $T^{-1} : L^{\frac{2}{\alpha}} \to L^{\frac{2}{\alpha}}$ se define como

$$T^{-1}(f) := (\mathcal{R}_1 + i\mathcal{R}_2)^{-1} I_{1-\alpha}(Id - \mu\mathcal{B})^{-1} D^{1-\alpha}(\mathcal{R}_1 - i\mathcal{R}_2)\,.$$

Así, como $T(D^\alpha g) = D^\alpha\mu$ o equivalentemente $D^\alpha \log(\partial\phi) = T^{-1}D^\alpha\mu$, obtenemos la cota

$$\|D^\alpha \log(\partial\phi)\|_{L^{\frac{2}{\alpha}}} \leq C_\alpha \|D^\alpha\mu\|_{L^{\frac{2}{\alpha}}}\ .$$

Con lo que demostramos el resultado cuando $\mu \in C_c^\infty(\mathbb{C})$.

Para extender el resultado a $\mu \in W_c^{\alpha,\frac{2}{\alpha}}(\mathbb{C})$ actuamos por densidad. Fijada $\mu \in W_c^{\alpha,2/\alpha}(\mathbb{C})$, consideramos una sucesión de funciones suaves μ_n de soporte compacto tal que $\mu_n \to \mu$ en la topología de $W^{\alpha,\frac{2}{\alpha}}$ y tal que $\|\mu_n\|_\infty \leq \|\mu\|_\infty =: k < 1$. Tomemos ϕ_n como la solución principal asociada a cada coeficiente μ_n. Ya hemos visto que si $g_n = \log(\partial\phi_n)$ entonces

$$(Id - \mu_n\mathcal{B})\,D^{1-\alpha}(\mathcal{R}_1 + i\mathcal{R}_2)\,D^\alpha g_n = D^{1-\alpha}(\mathcal{R}_1 - i\mathcal{R}_2)(D^\alpha\mu_n)\ .$$

Si para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $T_n := (\mathcal{R}_1 - i\mathcal{R}_2)^{-1} I_{1-\alpha}(Id - \mu_n\mathcal{B})D^{1-\alpha}(\mathcal{R}_1 + i\mathcal{R}_2)$, entonces podemos interpretar la línea anterior como

$$T_n(g_n) = D^\alpha\mu_n\,.$$

Donde sabemos que $T_n : L^{2/\alpha}(\mathbb{C}) \to L^{2/\alpha}(\mathbb{C})$ es continuamente invertible con constantes que solo dependen de α, $\|\mu_n\|_\infty$ y $\|\mu_n\|_{W^{\alpha,2/\alpha}}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\|g_n\|_{\dot W^{\alpha,2/\alpha}(\mathbb{C})} &= \|D^\alpha g_n\|_{L^{\frac{2}{\alpha}}(\mathbb{C})} = \left\|\left(T_n^{-1}\circ T_n\right)(D^\alpha g_n)\right\|_{L^{\frac{2}{\alpha}}(\mathbb{C})}\\
&\leq C\big(\alpha,\, \|\mu_n\|_\infty,\, \|\mu_n\|_{W^{\alpha,2/\alpha}}\big)\,\|T_n(D^\alpha g_n)\|_{L^{\frac{2}{\alpha}}(\mathbb{C})}\\
&= C\big(\alpha,\, \|\mu_n\|_\infty,\, \|\mu_n\|_{W^{\alpha,2/\alpha}}\big)\,\|D^\alpha\mu_n\|_{L^{\frac{2}{\alpha}}(\mathbb{C})}\\
&\leq C\big(\alpha,\, \|\mu\|_\infty,\, \|\mu\|_{W^{\alpha,2/\alpha}}\big)\,.
\end{aligned}$$

Lo que implica que g_n es una sucesión acotada de $\dot{W}^{\alpha,2/\alpha}(\mathbb{C})$. Por el *Teorema de Banach-Alaoglu* existe $h \in \dot{W}^{\alpha,2/\alpha}(\mathbb{C})$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \langle\, g_n \,,\, \varphi \,\rangle \;=\; \langle\, h \,,\, \varphi \,\rangle$$

para cada $\varphi \in W^{-\alpha,\frac{2}{2-\alpha}}(\mathbb{C})$. Además, por la semicontinuidad inferior débil de la norma, tenemos que

$$\|\, h \,\|_{\dot{W}^{\alpha,2/\alpha}(\mathbb{C})} \;=\; \|\, D^\alpha h \,\|_{L^{\frac{2}{\alpha}}(\mathbb{C})} \;\leq\; \liminf_{n\to\infty} \|\, D^\alpha g_n \,\|_{L^{\frac{2}{\alpha}}(\mathbb{C})} \;\leq\; C\big(\,\alpha,\, \|\mu_n\|_\infty,\, \|\mu_n\|_{W^{\alpha,2/\alpha}}\,\big)\,.$$

Por otro lado, ya sabemos que ϕ_n converge a ϕ en la topología de $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{C})$ para toda $p < \infty$. En particular, módulo subsucesiones, $\partial\phi_n$ convergen a $\partial\phi$ en casi todo punto. De esta forma g_n convergen en casi todo punto a $\log(\partial\phi)$. De aquí se sigue que $\log(\partial\phi) = h$ y por lo tanto deducimos que $\log(\partial\phi) \in \dot{W}^{\alpha,2/\alpha}(\mathbb{C})$. Esto, junto con el resultado de Astala et. al. que nos garantiza que $\log(\partial\phi) \in BMO(\mathbb{C})$ (ver [5]), nos asegura que $\log(\partial\phi) \in W^{\alpha,2/\alpha}(\mathbb{C})$. Con esto finalizamos la prueba. □

Antes de cerrar la subsección, mostraremos porqué el método anterior no funciona cuando tratamos con $\log(\partial\phi)$ cuando $\phi \in W^{1,2}_c(\mathbb{C})$ es la solución principal de una *Ecuación de Beltrami Conjugada o Generalizada*.

Supongamos que tenemos $\mu,\, \nu \in C^\infty_c(\mathbb{C})$ y $\phi \in C^\infty(\mathbb{C})$ la *solución principal* de la *Ecuación de Beltrami Generalizada Homogénea*

$$\overline{\partial}\phi \;=\; \mu\,\partial\phi \,+\, \nu\,\overline{\partial\phi}\,.$$

A continuación escribimos $\partial\phi = e^g$. Entonces sabemos que g satisface la igualdad

$$\overline{\partial} g \;=\; \big(\,Id \,-\, \nu\, e^{\overline{g}-g}\mathbf{C} \,-\, \mu\mathcal{B}\,\big)^{-1}\,\big(\,\partial\mu \,+\, \partial\nu\, e^{\overline{g}-g}\,\big)\,.$$

Ahora actuamos como en el caso $\nu = 0$. Es decir, representamos las derivadas mediante la transformada clásica de Riesz y tomamos un potencial de Riesz adecuado. Así podemos escribir

$$\begin{aligned}(\,\mathcal{R}_1 \,+\, i\mathcal{R}_2\,)\; D^\alpha g =& I_{1-\alpha}\,\big(\,Id \,-\, \nu\, e^{\overline{g}-g}\mathbf{C} \,-\, \mu\mathcal{B}\,\big)^{-1}\; D^{1-\alpha}\,(\,\mathcal{R}_1 \,-\, i\mathcal{R}_2\,)\; D^\alpha\mu \\ &+\, I_{1-\alpha}\,\big(\,e^{\overline{g}-g} \,-\, \nu\,\mathbf{C} \,-\, \mu\mathcal{B}\, e^{\overline{g}-g}\,\big)^{-1}\; D^{1-\alpha}\,(\,\mathcal{R}_1 \,-\, i\mathcal{R}_2\,)\; D^\alpha\nu\,.\end{aligned}$$

Donde hemos operado en $(Id - \nu e^{\overline{g}-g}\mathbf{C} - \mu\mathcal{B}\,)^{-1}\,\partial\nu e^{\overline{g}-g}$ a fin de obtener $D^\alpha\nu$ (cambiando ligeramente al operador). En cualquiera de los dos sumandos del lado derecho, nos encontramos con el término $e^{\overline{g}-g}$ que representa una dificultad que no hemos podido solventar. Efectivamente, si intentamos estudiar la invertibilidad del operador mediante los métodos de la sección anterior, tarde o temprano necesitamos ver la compacidad del conmutador

$$\big[\,\nu\, e^{\overline{g}-g}\,\mathbf{C}\,,\, D^{1-\alpha}\,\big] \,:\, L^{\frac{2}{\alpha}}(\mathbb{C}) \,\to\, L^2(\mathbb{C})$$

y del conmutador

$$\big[\,e^{\overline{g}-g}\,,\, D^{1-\alpha}\,\big] \,:\, L^{\frac{2}{\alpha}}(\mathbb{C}) \,\to\, L^2(\mathbb{C})\,.$$

En ambos casos, para alcanzar la compacidad del conmutador primero necesitamos conocer la derivada fraccionaria de $e^{\overline{g}-g}$. Por otro lado $e^{\overline{g}-g} = \frac{\overline{\partial\phi}}{\partial\phi}$ y entonces, al menos formalmente, su derivada fraccionaria D^α sería del orden de

$$\begin{aligned}D^\alpha\left(\frac{\overline{\partial\phi}}{\partial\phi}\right) \;&\approx\; \frac{\partial\phi\, D^\alpha\big(\,\overline{\partial\phi}\,\big) \,-\, \overline{\partial\phi}\, D^\alpha\,(\,\partial\phi\,)}{(\,\partial\phi\,)^2} \\ &\approx\; \frac{\overline{\partial\phi}}{\partial\phi}\,\big(\,D^\alpha \log\big(\,\overline{\partial\phi}\,\big) \,-\, D^\alpha \log(\,\partial\phi\,)\,\big) \;\approx\; 2i\;\mathrm{Im}\,(\,D^\alpha \log(\,\partial\phi\,)\,)\,\cdot\,\frac{\overline{\partial\phi}}{\partial\phi}\,.\end{aligned}$$

Es decir, para conseguir la compacidad de los operadores, previamente tendríamos que conocer el valor de $D^\alpha \log(\partial\phi)$ que es lo buscado.

También tenemos otra dificultad a la hora de llevar a cabo el argumento de densidad. Efectivamente, si definimos $\mu_n, \nu_n \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ tales que $\mu_n \to \mu$ y $\nu_n \to \nu$ en $W^{\alpha,2/\alpha}$ y consideramos $\phi_n \in C^\infty(\mathbb{C})$ la solución principal asociada a cada pareja μ_n, ν_n, necesitaríamos conocer para que valores $p > 1$ se cumple

$$\left\| \frac{\overline{\partial\phi_n}}{\partial\phi_n} - \frac{\overline{\partial\phi}}{\partial\phi} \right\|_{L^p(\mathbb{C})} \to 0\,.$$

Cosa que desconocemos. Por ello, tenemos que desistir de alcanzar un resultado parecido para la *Ecuación de Beltrami Generalizada*, al menos usando estos métodos.

Problemas Abiertos 4.17.

- *Extender la implicación* (4.22) *a valores* $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.
- *Extender los resultados de esta subsección a la* Ecuación de Beltrami no Lineal (2.5) *o al menos a la* Ecuación de Beltrami Generalizada.

4.2.2. Soluciones de la Ecuación de Beltrami Generalizada con Coeficientes Fraccionarios.

Recordemos que al inicio de la sección mostramos que si los coeficientes μ y ν pertenecen al espacio de Sobolev Fracionario $W_c^{\alpha,2/\alpha}(\mathbb{C})$, entonces el *Operador de Beltrami Generalizado*

$$Id - \mu\mathcal{B} - \nu\overline{\mathcal{B}} : W^{\alpha,s}(\mathbb{C}) \to W^{\alpha,s}(\mathbb{C})$$

es invertible para toda $1 < s < \frac{2}{\alpha}$. Gracias a esta invertibilidad de los operadores de Beltrami, estamos en condiciones de preguntarnos sobre la regularidad fraccionaria de las soluciones $f \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ de la *Ecuación de Belrami Generalizada*

$$\overline{\partial} f = \mu\,\partial f + \nu\,\overline{\partial f} + h$$

cuando $\mu, \nu \in W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ con $p = \frac{2}{\alpha}$. Esta cuestión ya fue respondida, en parte, para el caso $\alpha p > 2$ por V. Cruz en [13]. En esta referencia, el autor llega a demostrar la implicación

$$\mu \in W_c^{\alpha,p}(\mathbb{C}) \implies D\phi \in W^{\alpha,p}_{loc}(\mathbb{C})$$

cuando ϕ es la solución principal de $\overline{\partial}\phi = \mu\,\partial\phi$. Para ello, V. Cruz se basó en la igualdad

$$\phi = z + \mathcal{C}\left(\left(Id - \mu\mathcal{B}\right)^{-1}\mu\right)$$

y la invertibilidad del operador en $W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ cuando $\alpha p > 2$. Nosotros tenemos el siguiente teorema para el caso $\alpha p = 2$ y para cualquier solución de la *Ecuación de Beltrami Generalizada.* Con su demostración cerramos la subsección.

Teorema 4.18. *Sean* $\alpha \in (0,1)$, $1 < p < \frac{2}{\alpha}$ *y* $\mu, \nu \in W_c^{\alpha,\frac{2}{\alpha}}(\mathbb{C})$ *dos coeficientes de Beltrami tales que* $\|\,|\mu| + |\nu|\,\|_\infty = k < 1$*. Entonces, para cada* $h \in \dot{W}^{\alpha,p}(\mathbb{C})$*, la* Ecuación de Beltrami Generalizada

$$\overline{\partial} f - \mu\,\partial f - \nu\,\overline{\partial f} = h$$

tiene una única solución f tal que $Df \in W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$. Además

$$\|Df\|_{\dot{W}^{\alpha,p}(\mathbb{C})} \leq C\,\|h\|_{\dot{W}^{\alpha,p}(\mathbb{C})}$$

donde C depende solo de k, $\|\mu\|_{W^{\alpha,\frac{2}{\alpha}}(\mathbb{C})}$ y $\|\nu\|_{W^{\alpha,\frac{2}{\alpha}}(\mathbb{C})}$.

Demostración. Como $h \in \dot{W}^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ con $\alpha p < 2$ entonces $h \in L^{\frac{2p}{2-\alpha p}}(\mathbb{C})$ gracias al embedding de Sobolev. Por otro lado, como $W_c^{\alpha,2/\alpha}(\mathbb{C}) \subset VMO_c(\mathbb{C})$, existe una solución f tal que $f \in W^{1,\frac{2p}{2-\alpha p}}(\mathbb{C})$ y además dicha solución cumple

$$\|Df\|_{L^{\frac{2p}{2-\alpha p}}(\mathbb{C})} \leq C\,\|h\|_{L^{\frac{2p}{2-\alpha p}}(\mathbb{C})} \leq C\,\|h\|_{\dot{W}^{\alpha,p}(\mathbb{C})}.$$

Observemos que $f \in W^{1,\frac{2p}{2-\alpha p}}$ y por lo tanto $\partial f = \mathcal{B}(\overline{\partial} f)$. Entonces, (1.5) se puede reescribir como

$$\left(Id - \mu\mathcal{B} - \nu\overline{\mathcal{B}}\right)\overline{\partial} f = h\,.$$

Gracias a la *Proposición 4.13* y a que $h \in \dot{W}^{\alpha,p}(\mathbb{C})$, existe una única $F \in \dot{W}^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ tal que

$$(Id - \mu\mathcal{B} - \nu\overline{\mathcal{B}})F = h\,.$$

Además, tenemos la estimación $\|F\|_{\dot{W}^{\alpha,p}(\mathbb{C})} \leq C\,\|h\|_{\dot{W}^{\alpha,p}(\mathbb{C})}$ y por el embedding de Sobolev, $F \in L^{\frac{2p}{2-\alpha p}}(\mathbb{C})$. La invertibilidad de $Id - \mu\mathcal{B} - \nu\,\overline{\mathcal{B}}$ en $L^{\frac{2p}{2-\alpha p}}(\mathbb{C})$ nos asegura que $F = \overline{\partial} f$ para casi todo punto y por ende $\overline{\partial} f \in \dot{W}^{\alpha,p}(\mathbb{C})$. La invertibilidad de $\mathcal{B} : W^{\alpha,p} \to W^{\alpha,p}$ y la igualdad $\partial f = \mathcal{B}(\overline{\partial} f)$ nos aseguran que $Df \in \dot{W}^{\alpha,p}(\mathbb{C})$. Finalmente tenemos

$$\|\,Df\,\|_{\dot{W}^{\alpha,p}(\mathbb{C})} \leq C\,\|\,h\,\|_{\dot{W}^{\alpha,p}(\mathbb{C})}$$

tal y como deseábamos. □

Corolario 4.19. *Sean $\alpha \in (0,1)$, μ, $\nu \in W_c^{\alpha,\frac{2}{\alpha}}(\mathbb{C})$ dos coeficientes de Beltrami tales que $\|\,|\mu| + |\nu|\,\|_\infty = k < 1$ y $f \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ una solución de la* Ecuación de Beltrami Generalizada Homogénea

$$\overline{\partial} f = \mu\,\partial f + \nu\,\overline{\partial f}\,.$$

Entonces, $Df \in W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ para toda $p < \frac{2}{\alpha}$.

Demostración. Como en el *Capítulo 3* (ver (3.9)), si localizamos $F = \varphi\,f$ con $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ a valores reales obtenemos que

$$\overline{\partial} F = \mu\,\partial F + \overline{\partial F} + H\,,$$

donde $H = \left(f - \nu\overline{f}\right)\overline{\partial}\varphi - \mu f\partial\varphi$. Así, si demostrásemos que $H \in W_c^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ para toda $p < \frac{2}{\alpha}$, gracias al *Teorema 4.18*, tendremos que $DF \in W_c^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ para toda $p < \frac{2}{\alpha}$ y por lo tanto $Df \in W^{\alpha,p}_{loc}(\mathbb{C})$ para toda $p < \frac{2}{\alpha}$.

Veamos que $H = \left(f - \nu\overline{f}\right)\overline{\partial}\varphi - \mu f\partial\varphi$ pertenece a $W_c^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ para toda $p < \frac{2}{\alpha}$. Por un lado, como $\mu, \nu \in W_c^{\alpha,2/\alpha}(\mathbb{C}) \subset VMO(\mathbb{C})$, ya sabemos que $f \in W^{1,q}_{loc}(\mathbb{C})$ para toda $q < \infty$ y por lo tanto $f \in W^{\alpha,q}_{loc}(\mathbb{C})$ para toda $q < \infty$. Por el otro, de la definición de H, es inmediato que $H \in W_c^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ para toda $p < \frac{2}{\alpha}$ finalizando así la prueba. □

4.2.3. Demostración del Teorema 4.11 y de la Proposición 4.13.

Recordemos que el *Teorema 4.11* nos aseguraba que para cada $\beta \in (0,1)$ y cada $b \in W^{\beta,\frac{n}{\beta}}(\mathbb{R}^n)$, el conmutador

$$\left[\, b\,,\, D^{\beta} \right] : L^{\frac{np}{n-\beta p}}\left(\mathbb{R}^n\right) \to L^p\left(\mathbb{R}^n\right)$$

es acotado y compacto para todo $1 < p < \frac{n}{\beta}$. La acotación del operador se sigue de manera inmediata a partir de la siguiente proposición.

Proposición 4.20. (Desigualdad de Kenig-Ponce-Vega [24])
Sean $\beta \in (0,1)$ y $1 < p < \frac{n}{\beta}$. Entonces la desigualdad

$$\|D^{\beta}(f\,g) - f\,D^{\beta}g\|_p \leq C\,\|D^{\beta}f\|_{\frac{n}{\beta}}\,\|g\|_{\frac{np}{n-\beta p}}.$$

se cumple para toda $f, g \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración del Teorema 4.11. La acotación del conmutador $\left[\, b\,,\, D^{\beta} \right]$ puede verse como una consecuencia de la desigualdad de Kenig-Ponce-Vega [24]. Esta nos asegura que dados $\beta \in (0,1)$ y $1 < p < \frac{n}{\beta}$, entonces se cumple que

$$\|D^{\beta}(f\,g) - f\,D^{\beta}g\|_p \leq C\,\|D^{\beta}f\|_{\frac{n}{\beta}}\,\|g\|_{\frac{np}{n-\beta p}}.$$

se cumple para toda $f, g \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Para la compacidad, usaremos la caracterización de *Fréchet-Kolmogorov* de los subconjuntos compactos de L^p combinada con las propiedades de cancelación del núcleo del conmutador.

Una vez hemos visto el resultado auxiliar sobre la regla de Leibnitz para la derivada fraccionaria, tenemos que el conmutador

$$[b, D^{\beta}] : L^{\frac{np}{n-\beta p}}(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$$

admite una extensión única. Además,

$$\|[b, D^{\beta}]\|_{L^{\frac{np}{n-\beta p}}(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\,\|b\|_{\dot{W}^{\beta,\frac{n}{\beta}}(\mathbb{R}^n)}.$$

Como consecuencia, si $b_n \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ es tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \|b_n - b\|_{\dot{W}^{\beta,\frac{n}{\beta}}(\mathbb{R}^n)} = 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \|[b_n, D^{\beta}] - [b, D^{\beta}]\|_{L^{\frac{np}{n-\beta p}}(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)} = 0$$

Con esto, podemos reducir nuestra prueba a demostrar la compacidad para funciones $b \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Observemos que con esta reducción, el conmutador $C_b = [b, D^{\beta}]$ puede representarse como un operador integral

$$\begin{aligned} C_b f(x) &= b(x)\,P.V.\int \mathcal{K}(x,y)\,(f(x) - f(y))\,dy - P.V.\int \mathcal{K}(x,y)\,(f(x)\,b(x) - b(y)\,f(y))\,dy \\ &= P.V.\int \mathcal{K}(x,y)\,(b(y) - b(x))\,f(y)\,dy \\ &= \int \mathcal{K}(x,y)\,f(y)\,dy \end{aligned}$$

donde

$$\mathcal{K}(x,y) = C_{n,\beta}\,\frac{(b(y)-b(x))}{|y-x|^{n+\beta}}$$

y el valor principal se ha eliminado gracias a la suavidad de b que asegura $x \mapsto \mathcal{K}(x,y)$ es integrable. Para que C_b sea compacto, necesitaremos probar que la imagen mediante C_b de la bola unidad de $L^{\frac{np}{n-\beta p}}(\mathbb{R}^n)$ es relativamente compacta en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Definamos $\mathcal{F}$ como

$$\mathcal{F} = \{C_b f:\ \|f\|_{L^{\frac{np}{n-\beta p}}(\mathbb{R}^n)} \leq 1\}.$$

El Teorema de Fréchet-Kolmogorov nos asegura que $\mathcal{F}$ es relativamente compacto si y solo si se cumplen las tres condiciones siguientes:

(1) $\mathcal{F}$ es uniformemente acotado, i.e. $\sup_{\psi\in\mathcal{F}} \|\psi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty$.

(2) $\mathcal{F}$ decae uniformemente en ∞, i.e. $\sup_{\psi\in\mathcal{F}} \|\psi\,\chi_{|x|>R}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0$ cuando $R\to\infty$.

(3) $\mathcal{F}$ es uniformemente equicontinuo, i.e. $\sup_{\psi\in\mathcal{F}} \|\psi(\cdot+h)-\psi(\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0$ cuando $|h|\to 0$.

En nuestro caso, todo elemento $\psi\in\mathcal{F}$ es de la forma $\psi = C_b f$ con $\|f\|_{L^{\frac{np}{n-\beta p}}(\mathbb{R}^n)} \leq 1$. Así, *(1)* se sigue automáticamente de la acotación de $[b, D^\beta] : L^{\frac{np}{n-\beta p}}(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$.

A fin de probar *(2)*, consideramos $R_0>0$ para que $\operatorname{supp}(b)\subset B(0,R_0)$. En los puntos x con $|x|>3R_0$ tenemos que

$$|C_b f(x)| \leq \int \frac{|f(y)\,b(y)|}{|x-y|^{n+\beta}}\,dy \leq C\frac{\|b\|_\infty}{|x|^{n+\beta}}\int_{B(0,R_0)} |f(y)|\,dy \leq C\frac{\|b\|_\infty}{|x|^{n+\beta}}\|f\|_q R_0^{n\frac{q-1}{q}}. \tag{4.24}$$

De esta forma, si $R>3R_0$ entonces

$$\int_{|x|>R} |C_b f(x)|^p\,dx \leq C_R \|b\|_\infty^p \|f\|^p_{\frac{np}{n-\beta p}} \int_{|x|>R} |x|^{-p(n+\beta)}\,dx \to 0 \qquad \text{cuando } R\to\infty$$

uniformemente.

Para la prueba de *(3)*, evitaremos usar el procedimiento usual de regularizar el núcleo $\mathcal{K}(x,y)$ y daremos otro procedimiento basado en que $\|\mathcal{K}(x,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ está uniformemente acotado. Evidentemente

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{K}(x,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &= \int_{|x-y|\leq 1} |\mathcal{K}(x,y)|\,dy + \int_{|x-y|>1} |\mathcal{K}(x,y)|\,dy \\
&\leq C\|\nabla b\|_\infty \int_{|x-y|\leq 1} |x-y|^{-n-\beta+1}\,dy + C\|b\|_\infty \int_{|x-y|>1} |x-y|^{-n-\beta}\,dy \\
&\leq C\left\{\frac{\|\nabla b\|_\infty}{1-\beta} + \frac{\|b\|_\infty}{\beta}\right\} := A,.
\end{aligned}$$

Como consecuencia, gracias a la desigualdad de Jensen, tenemos que

$$\|C_b f\|_q \leq A\|f\|_q, \qquad 1\leq q\leq\infty,$$

para $C_b : L^q(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$, $1\leq q\leq\infty$.

Una vez vista la integrabilidad del núcleo actuamos con las trasladadas de C_b como sigue

$$\begin{aligned}
\|C_bf(\cdot+h)-C_bf(\cdot)\|_q^q &= \int\left|\int f(y)(\mathcal{K}(x+h,y)-\mathcal{K}(x,y))\,dy\right|^q dx\\
&\le \int\left(\int |f(y)|^q\,|\mathcal{K}(x+h,y)-\mathcal{K}(x,y)|\,dy\right)\left(\int |\mathcal{K}(x+h,y)-\mathcal{K}(x,y)|\,dy\right)^{\frac{q}{q'}}dx\\
&\le (2A)^{q-1}\int\left(\int |\mathcal{K}(x+h,y)-\mathcal{K}(x,y)|\,dx\right)|f(y)|^q\,dy\\
&= (2A)^{q-1}\,B(h)\int |f(y)|^q dy
\end{aligned}$$

donde $B(h)=\sup_y\|\mathcal{K}(\cdot+h,y)-\mathcal{K}(\cdot,y)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$. Para estimar a $B(h)$, tomamos un $\rho>0$ arbitrario y escribimos

$$\begin{aligned}
\int |\mathcal{K}(x+h,y)-\mathcal{K}(x,y)|\,dx &= \int_{|x-y|\le\rho} |\mathcal{K}(x+h,y)-\mathcal{K}(x,y)|\,dx\\
&\quad+\int_{|x-y|>\rho} |\mathcal{K}(x+h,y)-\mathcal{K}(x,y)|\,dx := (\,I\,)+(\,II\,).
\end{aligned}$$

La integrabilidad de $\mathcal{K}$ nos da que $(\,I\,)$ es pequeño si ρ también lo es. Ciertamente

$$\int_{|x-y|\le\rho}|\mathcal{K}(x,y)|\,dx\le\|\nabla b\|_\infty\int_{|x-y|\le\rho}|x-y|^{-n-\beta+1}\,dx = C\frac{\|\nabla b\|_\infty}{1-\beta}\rho^{1-\beta}.$$

Mas aún, si $x\in B(y,\rho)$ entonces $x+h\in B(y,\rho+|h|)$ así que

$$\int_{|x-y|\le\rho}|\mathcal{K}(x+h,y)|\,dx\le\int_{|x-(y-h)|\le 2\rho}|\mathcal{K}(x+h,y)|\,dx\le C\frac{\|\nabla b\|_\infty}{1-\beta}(\rho+|h|)^{1-\beta}.$$

Entonces, $(\,I\,)\le\varepsilon/((2A)^{q-1})$ si ρ es suficientemente pequeño y $|h|<\rho/2$. Con ello fijamos ρ y nos enfrentamos a $(\,II\,)$. Notemos que como $|h|<\rho/2$ y $|x-y|>\rho$, tenemos

$$\begin{aligned}
|\mathcal{K}(x,y+h)-\mathcal{K}(x,y)| &= \left|(b(y)-b(x+h))\left(\frac{1}{|x+h-y|^{n+\beta}}-\frac{1}{|x-y|^{n+\beta}}\right)\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{|x-y|^{n+\beta}}(b(x)-b(x+h))\right|\\
&\le 2\|b\|_\infty\frac{C|h|}{|x-y|^{n+\beta+1}}+\|\nabla b\|_\infty\frac{|h|}{|x-y|^{n+\beta}}
\end{aligned}$$

Entonces, como hemos fijado $\rho=\rho_0/2$,

$$\begin{aligned}
(\,II\,) &\le C\|b\|_\infty|h|\int_{|x-y|>\rho}\frac{dx}{|x-y|^{n+\beta+1}}+C\|\nabla b\|_\infty|h|\int_{|x-y|>\rho}\frac{dx}{|x-y|^{n+\beta}}\\
&\le C\frac{|h|}{\beta}\left(\frac{\|b\|_\infty}{\rho_0^{1+\beta}}+\frac{\|\nabla b\|_\infty}{\rho_0^{\beta}}\right).
\end{aligned}$$

Tomando $|h|$ suficientemente pequeño, vemos que $(\,II\,)\le\varepsilon/((2A)^{q-1})$. Por lo tanto $B(h)\to 0$ cuando $|h|\to 0$ y así tenemos que

$$\|C_bf(\cdot+h)-C_bf(\cdot)\|_q^q\to 0 \text{ cuando } h\to 0\,. \tag{4.25}$$

Llegados a este punto, la prueba de *(3)* es inmediata. Efectivamente, por (4.24) vemos que

$$\begin{aligned}
\|C_b f(\cdot+h)-C_b f(\cdot)\|_p^p &= \int_{|x|\le R} |C_b f(x+h)-C_b f(x)|^p\,dx \\
&\quad + \int_{|x|>R} |C_b f(x+h)-C_b f(x)|^p\,dx \\
&\le \|C_b f(\cdot+h)-C_b f(\cdot)\|^p_{\frac{np}{n-\beta p}} R^{\beta p} \\
&\quad + C_R\|b\|_\infty^p \|f\|^p_{\frac{np}{n-\beta p}} \int_{|x|>R} |x|^{-p(n+\beta)}\,dx.
\end{aligned}$$

al menos para $R>3R_0$. En particular, el último término es pequeño si R es suficientemente grande. Pero para esta R particular y usando (4.25), el penúltimo término también es pequeño si $|h|$ es pequeño. Por ende *(3)* se cumple y por lo tanto el teorema está probado. □

A continuación, demostraremos que el *Operador de Beltrami Generalizado*

$$Id - \mu\mathcal{B} - \nu\overline{\mathcal{B}} : W^{\alpha,s}(\mathbb{C}) \to W^{\alpha,s}(\mathbb{C})$$

es invertible para toda $1<s<\frac{2}{\alpha}$ cuando los coeficientes μ y ν pertenecen al espacio de Sobolev Fracionario $W_c^{\alpha,2/\alpha}(\mathbb{C})\cap L^\infty(\mathbb{C})$ con $\||\mu|+|\nu|\|_\infty \le k<1$. La primera referencia que encontramos al respecto, fue dada recientemente por V. Cruz en en su Tesis Doctoral [13] cuando $\nu=0$. Concretamente, el autor llega a demostrar que si $\mu\in W_c^{\alpha,p}(\mathbb{C})\cap L^\infty(\mathbb{C})$ con $\alpha p>2$ y $\|\mu\|_\infty=k<1$, entonces el operador es invertible para $s=p$. De esta forma, nuestro resultado puede verse como una extensión del suyo al caso $\alpha p=2$. Destacamos que la prueba de V. Cruz se basa en demostrar previamente que el conmutador $[\mu,\mathcal{B}]: W^{\alpha,p}(\mathbb{C})\to W^{\alpha,p}$ con $\alpha p>2$ es compacto cuando $\mu\in W_c^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ y $\|\mu\|_\infty=k<1$. Nosotros hemos demostrado la invertibilidad del operador en el caso $\alpha p=2$ usando dos caminos distintos; mediante los conmutadores del tipo $[\mu,D^\beta]$ y mediante los conmutadores del tipo $[\mu,\mathcal{B}]$. Comenzamos viendo la demostración mediante el primer tipo de conmutador.

Demostración de la Proposición 4.13 basada en el Teorema 4.11. Es sabido que la *transformada Beurling* $\mathcal{B}$ preserva los espacios $\dot W^{\alpha,s}(\mathbb{C})$. Además μ, $\nu\in W^{\alpha,\frac{2}{\alpha}}(\mathbb{C})\cap L^\infty(\mathbb{C})$ y por lo tanto son multiplicadores puntuales de $\dot W^{\alpha,s}(\mathbb{C})$ para toda $1<s<\frac{2}{\alpha}$. Esto puede verse en la referencia [41] (ver pag. 250) o deducirse de la expresión para la derivada fraccionaria que introdujimos en (2.1). Es decir,

$$D^\beta u = P.V.\int_{\mathbb{C}} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{n+\beta}}\,.$$

Claramente, el operador $Id-\mu\mathcal{B}-\nu\overline{\mathcal{B}}$ es inyectivo en $\dot W^{\alpha,s}(\mathbb{C})$ y por el emebbing de Sobolev, su núcleo es un subconjunto de $L^{\frac{2s}{2-\alpha s}}(\mathbb{C})$. Además, gracias a la inclusión $W_c^{\alpha,\frac{2}{\alpha}}(\mathbb{C})\subset VMO(\mathbb{C})$ sabemos que el operador es invertible en $L^{\frac{2s}{2-\alpha s}}(\mathbb{C})$ para toda $1<s<\frac{2}{\alpha}$.

Para logar la sobreyectividad (y con ello la invertibilidad), probaremos que $Id-\mu\mathcal{B}-\nu\overline{\mathcal{B}}$ es un operador de Fredholm de índice nulo sobre $\dot W^{\alpha,s}(\mathbb{C})$. Como ambas propiedades permanecen invariantes bajo isomorfismos topológicos, podemos usar los isomorfismos

$$\begin{aligned}
D^\alpha &: \dot W^{\alpha,s}(\mathbb{C}) \to L^s(\mathbb{C}) \quad \text{y} \\
I_\alpha &: L^s(\mathbb{C}) \to \dot W^{\alpha,s}(\mathbb{C}),
\end{aligned}$$

y con ello reducir nuestro problema a demostrar que

$$D^{\alpha}(Id - \mu\mathcal{B} - \nu\overline{\mathcal{B}})I_{\alpha} : L^{s}(\mathbb{C}) \to L^{s}(\mathbb{C})$$

es un operador de Fredholm de índice nulo. Esto se consigue de manera casi inmediata. Ciertamente

$$\begin{aligned} D^{\alpha}(Id - \mu\mathcal{B} - \nu\overline{\mathcal{B}})I_{\alpha} &= Id - D^{\alpha}(\mu\mathcal{B} + \nu\overline{\mathcal{B}})I_{\alpha} \\ &= Id - \mu\mathcal{B} - \nu\overline{\mathcal{B}} - [D^{\alpha}, \mu]\,\mathcal{B}\,I_{\alpha} - [D^{\alpha}, \nu]\,\overline{\mathcal{B}}\,I_{\alpha} \end{aligned}$$

donde $Id - \mu\mathcal{B} - \nu\overline{\mathcal{B}}$ es invertible en $L^{p}(\mathbb{C})$ para toda $p \in (1, \infty)$ con índice nulo. Observemos que

$$I_{\alpha} : L^{s}(\mathbb{C}) \to L^{\frac{2s}{2-\alpha s}}(\mathbb{C}) \ \text{ y } \ \mathcal{B} : L^{\frac{2s}{2-\alpha s}}(\mathbb{C}) \to L^{\frac{2s}{2-\alpha s}}(\mathbb{C})$$

son operadores acotados. Además, gracias al *Teorema 4.11*, tenemos que el conmutador $[D^{\alpha}, \mu] : L^{\frac{2s}{2-\alpha s}}(\mathbb{C}) \to L^{s}(\mathbb{C})$ es compacto. Por lo tanto $[D^{\alpha}, \mu]\,\mathcal{B}\,I_{\alpha} : L^{s}(\mathbb{C}) \to L^{s}(\mathbb{C})$ es compacto al igual que $[D^{\alpha}, \nu]\,\overline{\mathcal{B}}\,I_{\alpha}$. Con ello vemos que el operador es de Fredholm y finalizamos la prueba. □

Destaquemos que usualmente la invertibilidad del operador de Beltrami se deduce de la compacidad de los conmutadores $[\mu, \mathcal{B}]$ en los distintos espacios a invertir. Como ejemplo de ello, tenemos los trabajos de K. Astala et. al. en [4], T. Iwaniec en [21] y V. Cruz en [13]. A continuación damos una prueba de la invertibilidad usando este tipo de operadores.

Demostración de la Proposición 4.13 basada en el Corolario 4.12. Para facilitar la lectura de esta prueba nos resumiremos al caso $\nu = 0$ y nos apoyaremos en los cálculos realizados por T. Iwaniec en [21]. Es decir, para cada $N \in \mathbb{N}$ multiplicaremos $Id - \mu\mathcal{B}$ por el operador $P_N : W^{\alpha,p}(\mathbb{C}) \to W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$, definido como

$$P_N := Id + \mu\mathcal{B} + (\mu\mathcal{B})^2 + \cdots + (\mu\mathcal{B})^{N-1}\,,$$

el cual es contínuo ya que $W^{\alpha,2/\alpha}_c(\mathbb{C}) \cap L^{\infty}(\mathbb{C})$ es un multiplicador de $W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ para cada $1 < p < \frac{2}{\alpha}$. Entonces podemos razonar como sigue

$$\begin{aligned} (Id - \mu\mathcal{B})\,P_N &= Id - (\mu\mathcal{B})^N \\ &= Id - \mu^2\,\mathcal{B}^2\,(\mu\mathcal{B})^{N-2} + \mu\,[\mu\,,\mathcal{B}]\,\mathcal{B}\,(\mu\mathcal{B})^{N-2} \\ &= Id - \mu^2\,\mathcal{B}^2\,(\mu\mathcal{B})^{N-2} + K_{N-2} \\ &= Id - \mu^3\,\mathcal{B}^3\,(\mu\mathcal{B})^{N-3} + \mu^2\big(\,[\mu\,,\mathcal{B}]\,\mathcal{B} + \mathcal{B}\,[\mu\,,\mathcal{B}]\,\big)\,\mathcal{B}\,(\mu\mathcal{B})^{N-3} + K_{N-2} \\ &= Id - \mu^3\,\mathcal{B}^3\,(\mu\mathcal{B})^{N-3} + K_{N-3} + K_{N-2}\,. \end{aligned}$$

Así, siguiendo esta descomposición, concluimos que

$$(Id - \mu\mathcal{B})\,P_N = Id - \mu^N\,\mathcal{B}^N + \sum_{n=2}^{N} K_{N-n}$$

donde para cada $2 \le n \le N$ (dentro de K_{N-n}) interviene el conmutador $[\mu, \mathcal{B}]$ el cual sabemos que es compacto gracias al *Corolario 4.12*. Por lo tanto $\sum K_{N-n}$ es compacto. Además, también sabemos que

$$Id - \mu\mathcal{B} : W^{\alpha,p}(\mathbb{C}) \to W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$$

es inyectivo porque lo es en $L^p(\mathbb{C})$ gracias al resultado de T. Iwaniec ya que $\mu \in VMO(\mathbb{C})$. Un simple argumento de homotopía nos asegura que es de índice nulo. Entonces, una vez que demostremos que $Id - \mu^N \mathcal{B}^N : W^{\alpha,p} \to W^{\alpha,p}$ es invertible para alguna $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tendremos que $Id - \mu\mathcal{B} : W^{\alpha,p} \to W^{\alpha,p}$ es un operador de Fredholm, de índice nulo e inyectivo, y por lo tanto invertible.

Veamos que $Id - \mu^N \mathcal{B}^N : W^{\alpha,p}(\mathbb{C}) \to W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ es invertible para cada $1 < p < \frac{2}{\alpha}$ para alguna $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Para ello veremos que $\|\mu^N \mathcal{B}^N\|_{W^{\alpha,p}}$ es pequeña a partir de alguna N. Por un lado, como $W^{\alpha,2/\alpha}(\mathbb{C}) \cap L^\infty(\mathbb{C})$ es un multiplicador de $W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ cuando $1 < p < \frac{2}{\alpha}$, tenemos el siguiente control de normas

$$\left\| \mu^N \left(\mathcal{B}^N f \right) \right\|_{W^{\alpha,p}} \leq \left(\left\| \mu^N \right\|_{W^{\alpha,2/\alpha}} + \left\| \mu^N \right\|_\infty \right) \left\| \mathcal{B}^N f \right\|_{W^{\alpha,p}} .$$

Además, gracias a la referencia [38, Pag 315; 5.3.2/4] sabemos que $\|\mu^N\|_{W^{\alpha,2/\alpha}} \lesssim \|\mu\|_\infty^{N-1} \|\mu\|_{W^{\alpha,2/\alpha}}$ y por lo tanto

$$\left\| \mu^N \left(\mathcal{B}^N f \right) \right\|_{W^{\alpha,p}} \leq \| \mu \|_\infty^{N-1} \left(\| \mu \|_{W^{\alpha,2/\alpha}} + \| \mu \|_\infty \right) \left\| \mathcal{B}^N f \right\|_{W^{\alpha,p}} .$$

Por otro lado, usando la transformada de Fourier, el núcleo de las iteradas de la transformada de Beurling viene dado por

$$b_N(z) = N \frac{(-1)^N}{\pi} \frac{\overline{z}^{N-1}}{z^{N+1}} .$$

Así, es fácil demostrar (ver [14, Pag 1222-1223]) que

$$\left\| \mathcal{B}^N f \right\|_{W^{\alpha,p}} \leq C N^2 \| f \|_{W^{\alpha,p}} .$$

Entonces, finalmente llegamos a

$$\left\| \mu^N \left(\mathcal{B}^N f \right) \right\|_{W^{\alpha,p}} \leq C N^2 k^{N-1} \left(\| \mu \|_{W^{\alpha,2/\alpha}} + \| \mu \|_\infty \right) \| f \|_{W^{\alpha,p}} ,$$

cantidad que tiende a 0 conforme N tiende a ∞. De esta forma concluimos que el operador $Id - \mu^N \mathcal{B}^N : W^{\alpha,p} \to W^{\alpha,p}$ es invertible. Con esto terminamos la prueba. $\square$

Capítulo 5

Ecuación en Forma de Divergencia.

Nuestro propósito principal en este capítulo consiste en analizar que regularidad extra (de orden fraccionario) podemos esperar de las soluciones débiles del siguiente sistema elíptico en forma de divergencia no lineal,

$$\operatorname{div} \mathcal{A}(x, Du) = \operatorname{div} G \qquad \text{en } \Omega,$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio, $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $G : \Omega \to \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una *función de Carathéodory con crecimiento lineal*. Recordemos que esto significa que existen unas constantes ℓ, L, $\sigma > 0$ y $0 \leq \varrho \leq 1$ tales que

$(\mathcal{A}1)$ $\langle \mathcal{A}(x, \xi) - \mathcal{A}(x, \eta), \xi - \eta \rangle \geq \sigma |\xi - \eta|^2$,

$(\mathcal{A}2)$ $|\mathcal{A}(x, \xi) - \mathcal{A}(x, \eta)| \leq L |\xi - \eta|$, y

$(\mathcal{A}3)$ $|\mathcal{A}(x, \xi)| \leq \ell \left(\varrho^2 + |\xi|^2\right)^{\frac{1}{2}}$,

para todo $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ y para casi todo $x \in \Omega$. Es evidente que no podemos esperar una regularidad extra de las soluciones, aún cuando G sea suave, a menos que asumamos alguna condición en la dependencia respecto a x del operador $\mathcal{A}$. Por ello, deseamos encontrar condiciones sobre $\mathcal{A}$ bajo la cual la regularidad fraccionaria de G se transfiera a *Du sin pérdida en el orden de diferenciabilidad*.

Sabemos que en el caso planar ($n = 2$), cuando el operador $\mathcal{A}(x, \xi)$ tiene una regularidad de tipo Sobolev fraccionaria $W^{\alpha,p}$, se aprecian diferencias significativas dependiendo de la cantidad αp. Concretamente

- Si $\alpha p > 2$, entonces $G \in W^{\alpha,q}$ implica $Du \in W^{\alpha,q}$ para cualquier $q \leq p$ (véanse, por ejemplo, las referencias [14] y [31]).

- Si $\alpha p = 2$, entonces $G \in W^{\alpha,q}$ implica $Du \in W^{\alpha,q}$ para todo $q < p$, pero no para $q = p$. La razón de esta pérdida, en el extremo $q = p$, es que un coeficiente en $W^{\alpha,\frac{2}{\alpha}}_{loc}$ no implica necesariamente que la solución tenga derivadas acotadas. Algunos resultados precisos en esta dirección han sido dados en [11] (para $\alpha = 1$) o en [7] (para $0 < \alpha < 1$).

- Si $\alpha p < 2$, entonces $G \in W^{\alpha,q}$ implica $Du \in W^{\alpha,q}$ para $q < q_0$ donde q_0 depende de la constante de elipticidad, y es tal que $q_0 < p$. Ver por ejemplo [11] para el caso $\alpha = 1$, y [12] para $0 < \alpha < 1$. Esta q_0 coincide con la q_0 del *Capítulo 3* en el caso $\alpha = 1$ y difiere cuando $0 < \alpha < 1$.

Aunque los resultados mencionados arriba se realizaron en el ámbito de las Ecuaciones de Beltrami, hemos visto (*Subsección 2.4.3*) que estas ecuaciones son equivalentes a un sistema en forma de divergencia donde $\mathcal{A}(x,\xi) = A(x)\,\xi$ para alguna matriz $A(x)$. Por otro lado, avances recientes para el sistema no lineal en dimensiones superiores sugieren que la linealidad no ha ser una restricción. Como ejemplo de ello tenemos las referencias [16], [33] y [34] donde alcanzan resultados similares cuando $\mathcal{A}$ tiene un crecimiento superlineal. En estos trabajos, la diferenciabilidad máxima se obtiene a partir de una condición puntual para derivada respecto a la variable x del operador $\mathcal{A}$. Mas precisamente, para funciones de Carathéodory $\mathcal{A}$ con crecimiento lineal, se asume que existe una función no negativa $g \in L^n_{loc}(\Omega)$ tal que

$$|\mathcal{A}(x,\xi) - \mathcal{A}(y,\xi)| \leq |x-y|\,(g(x)+g(y))\left(\varrho^2 + |\xi|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{5.1}$$

para casi todo $x, y \in \Omega$, y todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Bajo esta condición, las soluciones de (1.2) con $G = 0$ fueron consideradas en [34] donde se ve que $Du \in W^{1,p}_{loc}$ para todo $p < 2$.

Dado que nuestro interés se centra en regularidades fraccionarias, lo primero que hemos de hacer es modificar la condición (5.1) al ámbito fraccionario. Para ello, suponemos que existe $g \in L^{\frac{n}{\alpha}}_{loc}(\Omega)$ tal que

$$|\mathcal{A}(x,\xi) - \mathcal{A}(y,\xi)| \leq |x-y|^{\alpha}\,(g(x)+g(y))\left(\varrho^2 + |\xi|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{5.2}$$

para casi todo $x, y \in \Omega$, y todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Esto nos asegura que $x \to \mathcal{A}(x,\xi) \in F^{\alpha}_{\frac{n}{\alpha},\infty}(\Omega)$ localmente (véase [27] para mas detalles). Gracias a ello conseguimos una mejora de regularidad para las soluciones en términos de los espacios de Besov-Lipschitz locales $B^{\alpha}_{p,q,loc}(\Omega)$. Recordamos que la defición de $B^{\alpha}_{p,q}(\Omega)$ y el significado de *local* ya fueron introducidos en los preliminares, concretamente en la *Sección 2.1*.

Teorema 5.1. *Sean* $0 < \alpha < 1$ *y* $\mathcal{A}$ *satisfaciendo* $(\mathcal{A}1), (\mathcal{A}2), (\mathcal{A}3)$. *Supongamos además que existe una* $g \in L^{\frac{n}{\alpha}}(\Omega)$ *para la que* $\mathcal{A}$ *cumple* (5.2). *Entonces, existe un número* $p_0 = p_0(n,\sigma,\ell) > 2$ *tal que si* $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ *es una solución débil de*

$$\operatorname{div} \mathcal{A}(x, Du) = 0,$$

entonces $Du \in B^{\alpha}_{p,\infty,loc}(\Omega)$*, para cualquier* $2 \leq p < \min\{\frac{n}{\alpha}, p_0\}$. *Además, si* $\mathcal{A}$ *es lineal en* Du*, es decir,* $\mathcal{A}(x,\xi) = A(x)\xi$*, entonces el resultado se cumple para toda* $2 \leq p < \frac{n}{\alpha}$.

Observemos que el *Teorema 5.1* se cumple incluso para valores $p > 2$, esto es, para valores diferentes a la sumabilidad natural de $\mathcal{A}$. La razón para esto es una versión no estándar de la desigualdad de Caccioppoli que dimos como *Lema 2.32* en la *Subsección 2.4.2*. Al mismo tiempo, el *Teorema 5.1* parece estar en contraste con los resultados de [33]. De hecho, la condición (5.1) describe completamente a las ecuaciones con coeficientes en el espacio de Sobolev $W^{1,n}$, es decir, el espacio de Triebel-Lizorkin $F^1_{n,2}$ (véase [27] para mas detalles), y así en [33] la escala Triebel-Lizorkin se transfiere adecuadamente desde los coeficientes a la soluciones. No obstante, merece la pena comentar que existe un salto entre (5.1) y (5.2). Efectivamente, la condición (5.1) nos señala que la aplicación $x \to \mathcal{A}(x,\xi)$ pertenece a la clase de Triebel-Lizorkin $F^1_{n,2}$, mientras que (5.2) nos indica que la pertenencia es a la clase $F^{\alpha}_{\frac{n}{\alpha},\infty}$. Por último, comentar que el valor p_0 que aparece en el resultado anterior (y las p_0 que aparecerán en los siguientes resultados) es diferente del valor p_0 que apareció en el *Capítulo 3* y no deben confundirse.

Lamentablemente, los métodos utilizados en la prueba del *Teorema 5.1* no extienden a los análogos de (5.2) para $F^{\alpha}_{\frac{n}{\alpha},q}$ con $q < \infty$. Sorprendentemente, el ambiente Besov se adapta mejor en este contexto. Para ser precisos, dados $0 < \alpha < 1$ y $1 \leq q \leq \infty$ diremos que se satisface $(\mathcal{A}4)$ si existe una sucesión de funciones medibles no negativas $g_k \in L^{\frac{n}{\alpha}}(\Omega)$ tal que

$$\sum_k \| g_k \|^q_{L^{\frac{n}{\alpha}}(\Omega)} < \infty ,$$

y que al mismo tiempo cumpla

$$|\mathcal{A}(x, \xi) - \mathcal{A}(y, \xi)| \leq |x - y|^\alpha \, (g_k(x) + g_k(y)) \left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$ y para casi todo $x, y \in \Omega$ tal que $2^{-k} \leq |x-y| < 2^{-k+1}$. Esto lo escribiremos brevemente como $(g_k)_k \in \ell^q(L^{\frac{n}{\alpha}})(\Omega)$. Si $\mathcal{A}(x,\xi) = A(x)\xi$ y $\Omega = \mathbb{R}^n$ entonces $(\mathcal{A}4)$ asegura que las entradas de A pertenecen a $B^\alpha_{\frac{n}{\alpha},q}(\Omega)$ tal y como podemos ver en la referencia [27, Theorem 1.2]. Bajo la condicón $(\mathcal{A}4)$, hemos alcanzado el siguiente resultado.

Teorema 5.2. *Sean $0 < \alpha < 1$ y $1 \leq q \leq \infty$. Asumamos además que $\mathcal{A}$ satisface $(\mathcal{A}1)$, $(\mathcal{A}2)$, $(\mathcal{A}3)$ y $(\mathcal{A}4)$. Entonces, existe un número $p_0 = p_0(n, \sigma, \ell) > 2$ tal que si $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ es una solución débil de*

$$\operatorname{div} \mathcal{A}(x, Du) = 0 ,$$

entonces $Du \in B^\alpha_{p,q,loc}(\Omega)$ para todo $2 \leq p < \min\{\frac{n}{\alpha}, p_0\}$. Además, si $\mathcal{A}$ es lineal en Du, es decir $\mathcal{A}(x,\xi) = A(x)\xi$, entonces el resultado se extiende a toda $2 \leq p < \frac{n}{\alpha}$.

Observemos que el Teorema 5.2 generaliza al Teorema 5.1 ya que (5.2) implica $(\mathcal{A}4)$ (ciertamente $F^\alpha_{\frac{n}{\alpha},\infty} \subset B^\alpha_{\frac{n}{\alpha},\infty}$). Sin embargo, la situación cambia drásticamente si miramos la ecuación no homogénea (1.2). Principalmente, aparecen dificultades con el tercer índice q debido a que si $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$ y $p^*_\alpha = \frac{np}{n-\alpha p}$, entonces el embedding $B^\alpha_{p,q} \subset L^{p^*_\alpha}$ solo se cumple si $1 \leq q \leq p^*_\alpha$ y falla en el resto de casos. Para el sistema no homogéneo hemos obtenido el siguiente resultado.

Teorema 5.3. *Sean $0 < \alpha < 1$ y $1 \leq q \leq \infty$. Supongamos además que tenemos dos funciones $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ y $G \in L^2_{loc}(\Omega)$ que cumplen el sistema (1.2) donde $\mathcal{A}$ satisface $(\mathcal{A}1)$, $(\mathcal{A}2)$, $(\mathcal{A}3)$, $(\mathcal{A}4)$. Entonces, existe un número $p_0 = p_0(n, \sigma, \ell) > 2$ para el que se cumple la implicación*

$$G \in B^\alpha_{p,q}(\Omega) \qquad \Longrightarrow \qquad Du \in B^\alpha_{p,q,loc}(\Omega)$$

para todo $p \in \left(\max\{p_0', \frac{nq}{n+\alpha q}\}, \min\{\frac{n}{\alpha}, p_0\}\right)$.

Los tres resultados anteriores son fuertes, en el sentido de que no podemos esperar que Du pertenezca a un espacio de Besov $B^\beta_{p',q'}(\Omega)$ para alguna $\beta > \alpha$ (como puede verse a partir de la configuración con coeficientes constantes). Además, nuestros argumentos muestran que la restricción $p_0' < p < p_0$ puede eliminarse si $\mathcal{A}$ es lineal en la variable del gradiente. De hecho, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.4. *Sean $0 < \alpha < 1$ y $1 \leq q \leq \infty$. Asumamos también que tenemos dos funciones $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ y $G \in L^2_{loc}(\Omega)$ que cumplen el sistema (1.2) donde $\mathcal{A}(x,\xi) = A(x)\xi$ satisface $(\mathcal{A}1)$, $(\mathcal{A}2)$, $(\mathcal{A}3)$ y que además las entradas de $A(x)$ pertenecen a $B^\alpha_{\frac{n}{\alpha},q}$. Entonces, la implicación*

$$G \in B^\alpha_{p,q}(\Omega) \qquad \Longrightarrow \qquad Du \in B^\alpha_{p,q,loc}(\Omega)$$

para toda $\max\{1, \frac{nq}{n+\alpha q}\} < p < \frac{n}{\alpha}$.

Desconocemos si los *Teoremas 5.2, 5.3 y 5.4* también son ciertos en el ámbito de Triebel-Lizorkin, es decir, reemplazando $\ell^q(L^{\frac{n}{\alpha}})$ por $L^{\frac{n}{\alpha}}(\ell^q)$ y $B^\alpha_{p,q}$ por $F^\alpha_{p,q}$.

Las demostraciones de los *Teoremas 5.1, 5.2, 5.3 y 5.4* se basan en el hecho de que los espacios de Besov-Lipschitz $B^\alpha_{\frac{n}{\alpha},q}$ y los espacios de Triebel-Lizorkin $F^\alpha_{\frac{n}{\alpha},\infty}$ están continuamente incluidos en el espacio VMO de Sarason (ver [20, Prop. 7.12]). Sabemos que las ecuaciones lineales con coeficientes VMO tienen una teoría L^p adecuada (ver [21] para $n = 2$ o [23] para $n \geq 2$). Un caso de operadores de crecimiento no lineal puede encontrarse en [25] para

$$\mathcal{A}(x, \xi) = \langle A(x)\xi, \xi\rangle^{s-2} A(x)\xi$$

con $2 \leq s \leq n$.

Recordemos que cuando $s \in [2, n]$ decimos que $\mathbb{A} : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una *función de Carathéodory de crecimiento* $s - 1$ si existen unas constantes L, ℓ, $\sigma > 0$ y $0 \leq \varrho \leq 1$ tales que

$(\mathbb{A}1)$ $\langle \mathbb{A}(x, \xi) - \mathbb{A}(x, \eta), \xi - \eta\rangle \geq \sigma \left(\varrho^2 + |\xi|^2 + |\eta|^2\right)^{\frac{s-2}{2}} |\xi - \eta|^2$,

$(\mathbb{A}2)$ $|\mathbb{A}(x, \xi) - \mathbb{A}(x, \eta)| \leq L \left(\varrho^2 + |\xi|^2 + |\eta|^2\right)^{\frac{s-2}{2}} |\xi - \eta|$, y

$(\mathbb{A}3)$ $|\mathbb{A}(x, \xi)| \leq \ell \left(\varrho^2 + |\xi|^2\right)^{\frac{s-1}{2}}$.

El siguiente resultado será nuestra herramienta principal a la hora de demostrar los *Teoremas 5.1, 5.2, 5.3 y 5.4*. Este resultado puede verse como una versión local no lineal del clásico teorema dado por Iwaniec y Sbordone en [23].

Teorema 5.5. *Sea $2 \leq s \leq n$, y $q > s$. Asumamos que se cumplen $(\mathbb{A}1)$, $(\mathbb{A}2)$, $(\mathbb{A}3)$, y también que $x \mapsto \mathbb{A}(x, \xi)$ pertenece* localmente y uniformemente a VMO. *Si u es una solución débil de*

$$\operatorname{div} \mathbb{A}(x, Du) = \operatorname{div}\left(|G|^{s-2} G\right) \tag{5.3}$$

con $G \in L^q_{loc}(\Omega)$, entonces $Du \in L^q_{loc}(\Omega)$. Además, existe una constante $\lambda > 1$ para la que se cumple la desigualdad de Caccioppoli

$$\fint_B |Du|^q \leq C(n, \lambda, \sigma, \ell, L, s, q) \left(1 + \frac{1}{|B|^{q/n}} \fint_{\lambda B} |u|^q + \fint_{\lambda B} |G|^q\right)$$

para toda B con $\lambda B \subset \Omega$.

En la próxima sección (*Sección 5.1*) veremos la definición precisa de pertenecer *localemente y uniformemente a VMO* y daremos la demostración del *Teorema 5.5*. Esta prueba está inspirada por [25] aunque con nuevas dificultades técnicas, las cuales surgen de la estructura puramente no lineal de $\mathbb{A}$. Además, el resultado tiene interés propio, especialmente por dos razones. En primer lugar, $\xi \mapsto \mathbb{A}(x, \xi)$ no es necesariamente $\mathcal{C}^1$. En segundo lugar, los términos independientes permitidos no se restringen a medidas finitas. Bajo estas hipótesis, en [30] y [31], se establecen varias cotas interesantes sobre el tamaño y las oscilaciones de las soluciones y su gradiente. Lamentablemente, y en contraste al caso lineal, la ausencia de un operador autoadjunto presentan un obstáculo para extender el resultado a otros valores de $q \in (1, s)$.

El capítulo está estructurado como sigue. En la *Sección 5.1* introduciremos la noción de *pertenencia local y uniforme a VMO* y probaremos el *Teorema 5.5*. En la *Sección 5.2* demostraremos el *Teorema 5.1* y como esta prueba nos facilita la demostración del *Teorema 5.2*. Por último, en la *Sección 5.3* demostraremos los *Teoremas 5.2, 5.3 y 5.4* con los que finalizaremos el escrito.

5.1. Coeficientes VMO en $\mathbb{R}^n$

En esta sección, asumiremos que $n \geq 2$ y que $\mathbb{A} : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función de Carathéodory que satisface las propiedades $(\mathbb{A}1)$, $(\mathbb{A}2)$, $(\mathbb{A}3)$ introducidas anteriormente. Además, queremos darle a $\mathbb{A}(x,\xi)$ una noción de pertenencia local y uniforme al espacio VMO con respecto a la variable x, lo que se traduce en un control sobre las oscilaciones. En similitud con las funciones, dada una bola $B \subset \Omega$, denotamos el operador promedio de $\mathbb{A}$ en la bola B como

$$\mathbb{A}_B(\xi) = \fint_B \mathbb{A}(x, \xi)\, dx .$$

Es evidente que este nuevo operador $\mathbb{A}_B(\xi)$ también satisface $(\mathbb{A}1)$, $(\mathbb{A}2)$ y $(\mathbb{A}3)$. Ahora definimos

$$V(x, B) = \sup_{\xi \neq 0} \frac{|\mathbb{A}(x, \xi) - \mathbb{A}_B(\xi)|}{(\varrho^2 + |\xi|^2)^{\frac{s-1}{2}}}, \tag{5.4}$$

para cada $x \in \Omega$ y para cada $B \subset \Omega$. Observemos que en el caso particular de que $\mathbb{A}$ esté dada por el peso del s-laplaciano, es decir $\mathbb{A}(x,\xi) = \gamma(x)\,|\xi|^{s-2}\xi$, tenemos que

$$V(x, B) = |\gamma(x) - \gamma_B|,$$

donde $\gamma_B = \fint_B \gamma(y)dy$. Así, una condición razonable sobre γ para que $\mathbb{A}(x,\xi) = \gamma(x)\,|\xi|^{s-2}\xi$ pertenezca a VMO, es que el valor medio de $V(x,B)$ sobre B tienda a 0 conforme $|B| \to 0$. Basándonos en esta idea sobre el s-laplaciano, podemos definir una condición VMO sobre funciones generales de Carathéodory $\mathbb{A}$ consistente en una versión uniforme de este hecho. Diremos que $x \mapsto \mathbb{A}(x,\xi)$ pertenece *localmente y uniformemente a* VMO si para cada conjunto compacto $K \subset \Omega$ se tiene que

$$\lim_{R \to 0} \sup_{r(B) < R} \sup_{c(B) \in K} \fint_B V(x, B)\, dx = 0, \tag{5.5}$$

donde $c(B)$ denota el centro de la bola B y $r(B)$ denota su radio.

Una vez hemos introducido la noción de pertenencia local y uniforme a VMO, solo nos queda demostrar el *Teorema 5.5*. Para ello, necesitamos del siguiente resultado que nos asegura una estimación a priori para las soluciones débiles pertenecientes a $W^{1,q}$ para alguna $q > s$.

Teorema 5.6. *Sean $q > s$ y $\mathbb{A}$ que satisface $(\mathbb{A}1)$, $(\mathbb{A}2)$, $(\mathbb{A}3)$ y pertenece localemente y uniformemente a VMO. Entonces, existe un número $\lambda = \lambda(n,s,q) > 1$ con la siguiente propiedad. Para cada $x_0 \in \Omega$ existe un número $d_0 > 0$ (dependiente de σ, ℓ, L, s, q, n, $\mathbb{A}$ y de x_0) tal que para toda solución débil $u \in W^{1,q}(\Omega;\mathbb{R})$ de*

$$\operatorname{div} \mathbb{A}(x, Du) = \operatorname{div}\left(|G|^{s-2} G\right) \qquad en\, \Omega,$$

con $G \in L^q_{loc}(\Omega;\mathbb{R})$, se satisface la estimación

$$\fint_{\mathbf{B}_0} |Du|^q \leq C\left(\varrho^q + \frac{1}{d^q}\fint_{\lambda\mathbf{B}_0} |u|^q + \fint_{\lambda\mathbf{B}_0} |G|^q\right)$$

para cualesquiera $0 < d < d_0$, $\mathbf{B}_0 = B(x_0, d)$ y $\lambda\mathbf{B}_0 \subset \Omega$.

La prueba de este resultado sigue argumentos similares a los usados en [25]. Tras su demostración pasaremos a demostrar el *Teorema 5.5*.

Demostración del Teorema 5.6. Sea $k_0 \geq 2$ la constante dada por el *Lema 2.12* y consideremos $\delta \in (0,1)$ a determinar mas adelante. Sea además una bola $\mathbf{B}_0 = B(x_0, d)$ tal que $\tilde{\mathbf{B}}_0 = (1+\frac{2}{\delta})k_0\mathbf{B}_0 \subset \Omega$.

El primer paso de la prueba consiste en localizar el problema. Es decir, elegiremos un radio arbitrario $0 < \frac{d}{2} < \rho < r < d$, unas bolas $\mathbf{B}_\rho = B(x_0,\rho)$ y $\mathbf{B}_r = B(x_0, r)$, y una función de corte $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\chi_{\mathbf{B}_\rho} \leq \eta \leq \chi_{\mathbf{B}_r}$ y $\|D\eta\|_\infty \leq \frac{c(n)}{r-\rho}$. Ahora, definimos $w = \eta^{s'} u$. Entonces, esta claro que w pertenece a $W^{1,q}(\mathbb{R}^n)$, tiene soporte compacto contenido en $\mathbf{B}_r$ y que además se cumple

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \mathbb{A}(x, Dw) &= \operatorname{div}\big(\mathbb{A}(x,Dw) - \mathbb{A}(x,\eta^{s'}Du)\big) + \operatorname{div}\big(\mathbb{A}(x,\eta^{s'}Du) - \eta^s \mathbb{A}(x,Du)\big) \\
&\quad + \operatorname{div}(\eta^s \mathbb{A}(x,Du)) \\
&= \operatorname{div}(\mathbb{A}(x,Dw) - \mathbb{A}(x,\eta^{s'}Du)) + \operatorname{div}\big(\mathbb{A}(x,\eta^{s'}Du) - \eta^s \mathbb{A}(x,Du)\big) \\
&\quad + \eta^s \operatorname{div}(\mathbb{A}(x,Du)) + D(\eta^s)\mathbb{A}(x,Du).
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Por otro lado, para cada $y \in k_0\mathbf{B}_0$ y para cada $0 < R < \frac{k_0 d}{\delta}$ consideramos $B_R = B(y,R)$. Así, $B_R \subset (1+\frac{1}{\delta})k_0\mathbf{B}_0 \subset \Omega$ y entonces la cantidad

$$\mathbb{A}_{B_R}(\xi) = \fint_{B_R} \mathbb{A}(x,\xi)\, dx$$

está bien definida. De esta forma, denotamos por v a la única solución del siguiente problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbb{A}_{B_R}(Dv) = 0 & x \in B_R \\ v = w & x \in \partial B_R. \end{cases} \tag{5.7}$$

Ahora, multiplicamos ambos lados de la igualdad (5.6) por $v - w$ y, ya que $v - w$ se anula fuera de B_R, podemos integrar por partes y así obtenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{B_R} \Big\langle \mathbb{A}(x,Dw), Dv - Dw \Big\rangle &= \int_{B_R} \Big\langle \mathbb{A}(x,Dw) - \mathbb{A}(x,\eta^{s'}Du), Dv - Dw \Big\rangle \\
&\quad + \int_{B_R} \Big\langle \mathbb{A}(x,\eta^{s'}Du) - \eta^s\mathbb{A}(x,Du), Dv - Dw \rangle \\
&\qquad + \int_{B_R} \Big\langle \mathbb{A}(x,Du), D(\eta^s(v-w)) \Big\rangle - \int_{B_R} D(\eta^s)\mathbb{A}(x,Du)(v-w) \\
&= \int_{B_R} \Big\langle \mathbb{A}(x,Dw) - \mathbb{A}(x,\eta^{s'}Du), Dv - Dw \Big\rangle \\
&\quad + \int_{B_R} \Big\langle \mathbb{A}(x,\eta^{s'}Du) - \eta^s\mathbb{A}(x,Du), Dv - Dw \rangle \\
&\qquad + \int_{B_R} |G|^{s-2}\Big\langle G, D(\eta^s(v-w)) \Big\rangle - \int_{B_R} D(\eta^s)\mathbb{A}(x,Du)(v-w),
\end{aligned}$$

donde, en la última igualdad, hemos usado que u es solución de la ecuación (5.3). Además, gracias a que v es solución del problema de Dirichlet (5.7), también tenemos que

$$\int_{B_R} \Big\langle \mathbb{A}_B(Dv) - \mathbb{A}_B(Dw), Dv - Dw \Big\rangle = \int_{B_R} \Big\langle \mathbb{A}_B(Dw), Dw - Dv \Big\rangle$$

y por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\int_{B_R} \Big\langle \mathbb{A}_B(Dv) - \mathbb{A}_B(Dw), Dv - Dw \Big\rangle \\
&= \int_{B_R} \Big\langle \mathbb{A}_B(Dw) - \mathbb{A}(x, Dw), Dw - Dv \Big\rangle \\
&\quad + \int_{B_R} \Big\langle \mathbb{A}(x, Dw) - \mathbb{A}(x, \eta^{s'} Du), Dw - Dv \Big\rangle \\
&\qquad + \int_{B_R} \Big\langle \mathbb{A}(x, \eta^{s'} Du) - \eta^s \mathbb{A}(x, Du), Dw - Dv \rangle \\
&\qquad\quad + \int_{B_R} |G|^{s-2} \Big\langle G, D(\eta^s(w - v)) \Big\rangle - \int_{B_R} D(\eta^s) \mathbb{A}(x, Du)(w - v) \\
&\le \int_{B_R} |\mathbb{A}_B(Dw) - \mathbb{A}(x, Dw)||Dw - Dv| \\
&\quad + \int_{B_R} |\mathbb{A}(x, Dw) - \mathbb{A}(x, \eta^{s'} Du)||Dw - Dv| \\
&\qquad + \int_{B_R} |\mathbb{A}(x, \eta^{s'} Du) - \eta^s \mathbb{A}(x, Du)|\,|Dw - Dv| \\
&\qquad\quad + \int_{B_R} |G|^{s-1} |D(\eta^s(w - v))| + \int_{B_R} |D(\eta^s)||\mathbb{A}(x, Du)||w - v|.
\end{aligned}
$$

Reescribimos la desigualdad anterior como

$$
I_0 \le I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5
$$

y estimamos cada I_j por separado.

Como $s \ge 2$, en virtud de la condición de elipticidad ($\mathbb{A}1$), obtenemos que

$$
\sigma \int_{B_R} |Dv - Dw|^s \le \sigma \int_{B_R} |Dv - Dw|^2 \left(\varrho^2 + |Dv|^2 + |Dw|^2\right)^{\frac{s-2}{2}} \le I_0 \tag{5.8}
$$

Por la definición de $V(x, B)$ (ver (5.4)), gracias a la condición (5.5) y a las desigualdades de Young y de Hölder, acotamos a I_1 como sigue

$$
\begin{aligned}
I_1 &\le \int_{B_R} V(x, B) \left(\varrho^2 + |Dw|^2\right)^{\frac{s-1}{2}} |Dw - Dv| \\
&\le \varepsilon \int_{B_R} |Dv - Dw|^s + C(\varepsilon, s) \int_B V(x, B)^{s'} \left(\varrho^2 + |Dw|^2\right)^{\frac{s}{2}} \\
&\le \varepsilon \int_{B_R} |Dv - Dw|^s + C(\varepsilon, s) \left(\int_{B_R} V(x, B)^{\frac{ts'}{t-s}}\right)^{\frac{t-s}{t}} \left(\int_{B_R} \left(\varrho^2 + |Dw|^2\right)^{\frac{t}{2}}\right)^{\frac{s}{t}} \\
&\le \varepsilon \int_{B_R} |Dv - Dw|^s + C(\varepsilon, s, t, \ell) \left(\int_{B_R} V(x, B)\right)^{\frac{t-s}{t}} \left(\int_{B_R} \left(\varrho^2 + |Dw|^2\right)^{\frac{t}{2}}\right)^{\frac{s}{t}},
\end{aligned} \tag{5.9}
$$

donde $t > s$ es el exponente determinado por el *Lema 2.27*, $\varepsilon > 0$ es un parámetro que determinaremos posteriormente y hemos usado que la función $V(x, B)$ está acotada en Ω gracias a la condición ($\mathbb{A}3$). Además, gracias a la condición ($\mathbb{A}2$), la definición de w, a la desigualdad de Young y a las propiedades de η, tenemos que

$$
I_2 \le L \int_{B_R} |Dw - \eta^{s'} Du| \left(\varrho^2 + |Dw|^2 + |\eta^{s'} Du|^2\right)^{\frac{s-2}{2}} |Dv - Dw|
$$

$$
\begin{aligned}
&= L\int_{B_R} |D(\eta^{s'})u|(\varrho^2+|Dw|^2+|Dw-D(\eta^{s'})u|^2)^{\frac{s-2}{2}}|Dv-Dw| \\
&\le c(s,L)\int_{B_R} |D(\eta^{s'})u|(\varrho+|Dw|+|D(\eta^{s'})u|)^{s-2}|Dv-Dw| \\
&\le c(s,L)\int_{B_R} |D(\eta^{s'})u|^{s-1}|Dv-Dw| + c(s)\int_{B_R} |D(\eta^{s'})u|(\varrho+|Dw|)^{s-2}|Dv-Dw| \\
&\le \varepsilon\int_{B_R} |Dv-Dw|^s + \sigma\int_{B_R}(\varrho+|Dw|)^s + \frac{c(\varepsilon,\sigma,s)}{(r-\rho)^s}\int_{B_R}|u|^s, \qquad (5.10)
\end{aligned}
$$

donde $\varepsilon, \sigma > 0$ será determinada mas adelante. Ahora procedemos con la estimación de I_3. De las propiedades de η y de la desigualdad de Young aseguramos que

$$
\begin{aligned}
I_3 \;\le\; & \int_{B_R\setminus \mathbf{B}_r} |\mathbb{A}(x,0)||Dv-Dw| + \int_{B_R\cap(\mathbf{B}_r\setminus\mathbf{B}_\rho)} |\mathbb{A}(x,\eta^{s'}Du)-\eta^s\mathbb{A}(x,Du)||Dv-Dw| \\
\le\; & C(\varepsilon)\int_{B_R\setminus \mathbf{B}_r} |\mathbb{A}(x,0)|^{s'} + C(\varepsilon)\int_{B_R\cap(\mathbf{B}_r\setminus\mathbf{B}_\rho)} |\mathbb{A}(x,\eta^{s'}Du)-\mathbb{A}(x,Du)|^{s'} \\
& + C(\varepsilon)\int_{B_R\cap(\mathbf{B}_r\setminus\mathbf{B}_\rho)} |\mathbb{A}(x,Du)-\eta^s\mathbb{A}(x,Du)|^{s'} + \varepsilon\int_{B_R}|Dv-Dw|^s \\
\le\; & C(\varepsilon,\ell,s)\varrho^s R^n + C(\varepsilon,L,s)\int_{B_R\cap(\mathbf{B}_r\setminus\mathbf{B}_\rho)} |\eta^{s'}Du-Du|^{s'}(\varrho+|\eta^{s'}Du|+|Du|)^{s'(s-2)} \\
& + C(\varepsilon,\ell,s)\int_{B_R\cap(\mathbf{B}_r\setminus\mathbf{B}_\rho)} (1-\eta^s)^{s'}|Du|^s + \varepsilon\int_{B_R}|Dv-Dw|^s \\
\le\; & C(\varepsilon,\ell,s)\varrho^s R^n + C(\varepsilon,L,\ell,s)\int_{B_R}|Du|^s\chi_{\mathbf{B}_r\setminus\mathbf{B}_\rho} + \varepsilon\int_{B_R}|Dv-Dw|^s, \qquad (5.11)
\end{aligned}
$$

donde hemos vuelto a usar las condiciones ($\mathbb{A}2$) y ($\mathbb{A}3$). Aplicando la desigualdad de Young y las propiedades de η, tenemos que

$$
\begin{aligned}
I_4 &\le \int_{B_R}\eta^s|G|^{s-1}|Dv-Dw| + \int_{B_R}|D(\eta^s)||G|^{s-1}|v-w| \\
&\le \varepsilon\int_{B_R}|Dv-Dw|^s + c(\varepsilon)\left(\frac{R^s}{(r-\rho)^s}+1\right)\int_{B_R}|G|^s + \varepsilon\int_{B_R}\frac{|v-w|^s}{R^s} \\
&\le \varepsilon\int_{B_R}|Dv-Dw|^s + c(\varepsilon)\left(\frac{d^s k_0^s}{\delta^s(r-\rho)^s}+1\right)\int_{B_R}|G|^s + C(n,s)\varepsilon\int_{B_R}|Dv-Dw|^s, \qquad (5.12)
\end{aligned}
$$

donde, en la última línea, hemos usado desigualdad de Poincaré-Wirtinger y la cota $R < \frac{k_0 d}{\delta}$. Finalmente, en virtud de la desigualdades de Young y de Poincaré-Wirtinger junto a las propiedades de η, podemos estimar

$$
\begin{aligned}
I_5 &\le \ell\int_{B_R}|D(\eta^s)|(\varrho+|Du|)^{s-2}(\varrho+|Du|)|v-w| \\
&\le \frac{c(n,\ell)}{(r-\rho)}\int_{B_R}\eta^{\frac{1}{s-1}}(\varrho+\eta^{s'}|Du|)^{s-2}(\varrho+|Du|)|v-w| \\
&= \frac{c(n,\ell)}{(r-\rho)}\int_{B_R}\eta^{\frac{1}{s-1}}(\varrho+|Dw-D(\eta^{s'})u|)^{s-2}(\varrho+|Du|)|v-w| \\
&\le \frac{c(n,\ell,s)}{(r-\rho)}\int_{B_R}|Dw|^{s-2}(\varrho+|Du|)|v-w|
\end{aligned}
$$

$$+\frac{c(n,\ell,s)}{(r-\rho)}\int_{B_R}(\varrho+|D(\eta^{s'})u|)^{s-2}(\varrho+|Du|)|v-w|$$
$$\leq \varepsilon\int_{B_R}|Dv-Dw|^s+\sigma\int_{B_R}|Dw|^s+C(n,\varepsilon,\sigma,\ell,s)\frac{R^s}{(r-\rho)^s}\int_{B_R}|Du|^s$$
$$+\frac{C(n,\varepsilon,\sigma,\ell,s)}{(r-\rho)^s}\int_{B_R}|u|^s+C\frac{\varrho^s\,R^{n+s}}{(r-\rho)^s}. \tag{5.13}$$

Combinando las acotaciones (5.8), (5.9), (5.10), (5.11), (5.12) y (5.13) concluimos que

$$\sigma\int_{B_R}|Dv-Dw|^s\leq\varepsilon(5+C(n,s))\int_{B_R}|Dv-Dw|^s+2\sigma\int_{B_R}|Dw|^s+\frac{c}{(r-\rho)^s}\int_{B_R}|u|^s$$
$$+c\left(\int_{B_R}V(x,B)\right)^{\frac{t-s}{t}}\left(\int_{B_R}(\varrho+|Dw|^2)^{\frac{t}{2}}\right)^{\frac{s}{t}}$$
$$+c\frac{R^s}{(r-\rho)^s}\int_{B_R}|Du|^s+c\frac{d^sk_0^s}{\delta^s(r-\rho)^s}\int_{B_R}|G|^s$$
$$+c\int_{B_R}|Du|^s\chi_{\mathbf{B}_r\setminus\mathbf{B}_\rho}+c\,\varrho^s\,R^n+C\frac{\varrho^s\,R^{n+s}}{(r-\rho)^s},$$

donde $c=c(\varepsilon,\sigma,s,n,\ell,L)$. Eligiendo $\varepsilon=\frac{\sigma}{2(5+C(n,s))}$, podemos absorber la primera integral del lado derecho de la desigualdad previa en el lado izquierdo. Así obtenemos que

$$\frac{\sigma}{2}\int_{B_R}|Dv-Dw|^s\leq 2\sigma\int_{B_R}|Dw|^s+\frac{c}{(r-\rho)^s}\int_{B_R}|u|^s$$
$$+c\left(\int_{B_R}V(x,B)\right)^{\frac{t-s}{t}}\left(\int_{B_R}(\varrho+|Dw|^2)^{\frac{t}{2}}\right)^{\frac{s}{t}}$$
$$+c\frac{R^s}{(r-\rho)^s}\int_{B_R}|Du|^s+c\left(\frac{d^sk_0^s}{\delta^s(r-\rho)^s}+1\right)\int_{B_R}|G|^s$$
$$+c\int_{B_R}|Du|^s\chi_{\mathbf{B}_r\setminus\mathbf{B}_\rho}+c\,\varrho^s\,R^n+C\frac{\varrho^s\,R^{n+s}}{(r-\rho)^s}, \tag{5.14}$$

donde $c=c(\sigma,\sigma,s,n,\ell,L)$. Consideramos la bola $B_{\delta R}=B(y,\delta R)$ y observemos que

$$\fint_{B_{\delta R}}|Dw-(Dw)_{B_{\delta R}}|^s\leq C(s)\fint_{B_{\delta R}}|Dv-(Dv)_{B_{\delta R}}|^s+C(s)\,\delta^{-n}\fint_{B_R}|Dw-Dv|^s.$$

Ahora, podemos acotar los dos términos del lado derecho con la ayuda de la estimación (5.14) y del *Lema 2.29* tal y como sigue

$$\fint_{B_{\delta R}}|Dw-(Dw)_{B_{\delta R}}|^s\leq(C(s)\delta^{\alpha s}+2\sigma\delta^{-n})\fint_{B_R}|Dw|^s+\frac{c\delta^{-n}}{(r-\rho)^s}\fint_{B_R}|u|^s$$
$$+c\delta^{-n}\left(\fint_{B_R}V(x,B)\right)^{\frac{t-s}{t}}\left(\fint_{B_R}(\varrho+|Dw|^2)^{\frac{t}{2}}\right)^{\frac{s}{t}}$$
$$+c\delta^{-n}\frac{R^s}{(r-\rho)^s}\fint_{B_R}|Du|^s+c\delta^{-n}\left(\frac{d^sk_0^s\delta^{-s}}{(r-\rho)^s}+1\right)\fint_{B_R}|G|^s$$
$$+c\delta^{-n}\fint_{B_R}|Du|^s\chi_{\mathbf{B}_r\setminus\mathbf{B}_\rho}+c\,\varrho^s\,\delta^{-n}+\varrho^s\,\delta^{-n-s}\frac{d^sk_0^s}{(r-\rho)^s}.$$

Por la teoría clásica, ya que $2B_R\subset\Omega$ y que u es solución, tenemos

$$\fint_{B_R}|Du|^s\leq\frac{C}{R^s}\fint_{B_{2R}}|u|^s+C\fint_{B_{2R}}|G|^s$$

y por ende, de $B_{2R} \subset \tilde{\mathbf{B}}_0$ concluimos que

$$
\begin{aligned}
&\fint_{B_{\delta R}} |Dw - (Dw)_{B_{\delta R}}|^s \\
&\quad \leq c(\,\delta^{\alpha s} + \sigma \delta^{-n})\fint_{B_R} |Dw|^s \\
&\qquad + c\left(\frac{d^s\, k_0^s\, \delta^{-n-s}}{(r-\rho)^s} + \delta^{-n}\right)\fint_{B_{2R}} |G\,\chi_{\tilde{\mathbf{B}}_0}|^s + c\left(\frac{\delta^{-n-s}}{(r-\rho)^s} + \delta^{-n}\right)\fint_{B_{2R}} |u\,\chi_{\tilde{\mathbf{B}}_0}|^s \\
&\qquad\quad + c\,\delta^{-n}\left(\fint_{B_R} V(x,B_R)dx\right)^{\frac{t-s}{t}}\left(\fint_{B_R} (\varrho + |Dw|^2)^{\frac{t}{2}}\right)^{\frac{s}{t}} \\
&\qquad\qquad + c\delta^{-n}\int_{B_R} |Du|^s \chi_{\mathbf{B}_r \setminus \mathbf{B}_\rho} + c\,\varrho^s\,\delta^{-n} + \varrho^s\,\delta^{-n-s}\frac{d^s k_0^s}{(r-\rho)^s} \\
&\quad \leq c\,\delta^{\alpha s}\fint_{B_R} |Dw|^s + \left(\frac{c\,k_0^s\,d^s \delta^{-n-s}}{(r-\rho)^s} + \delta^{-n}\right)\fint_{B_{2R}} |G\,\chi_{\tilde{\mathbf{B}}_0}|^s + \left(\frac{c\,\delta^{-n-s}}{(r-\rho)^s} + \delta^{-n}\right)\fint_{B_{2R}} |u\,\chi_{\tilde{\mathbf{B}}_0}|^s \\
&\qquad + c\,\delta^{-n}\left(\fint_{B_R} V(x,B_R)dx\right)^{\frac{t-s}{t}}\left(\fint_{B_R} (\varrho + |Dw|^2)^{\frac{t}{2}}\right)^{\frac{s}{t}} \\
&\qquad\quad + c\delta^{-n}\int_{B_R} |Du|^s \chi_{\mathbf{B}_r \setminus \mathbf{B}_\rho} + c\,\varrho^s\,\delta^{-n} + \varrho^s\,\delta^{-n-s}\frac{d^s k_0^s}{(r-\rho)^s},
\end{aligned}
$$

donde elegimos $\sigma = \delta^{\alpha s + n}$. Ahora, tomando supremo sobre todos los posibles valores $R \in (0, k_0 d/\delta)$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}^{\sharp}_{s,k_0 d}(Dw)(y)^s \leq{}& c\,\delta^{\alpha s}\,\mathcal{M}_s(Dw)(y)^s + c\,\delta^{-n}\mathcal{M}_s(|Du|\chi_{\mathbf{B}_r \setminus \mathbf{B}_\rho})^s(y) \\
&+ c\left(\frac{d^s\, k_0^s\, \delta^{-n-s}}{(r-\rho)^s} + \delta^{-n}\right)\mathcal{M}_s(G\,\chi_{\tilde{\mathbf{B}}_0})^s(y) + c\left(\frac{\delta^{-n-s}}{(r-\rho)^s} + \delta^{-n}\right)\mathcal{M}_s(u\,\chi_{\tilde{\mathbf{B}}_0})^s(y) \\
&+ c\,\delta^{-n}\left(\mathcal{M}_t(Dw)(y)^s\right)\sup_{0<R<k_0 d/\delta}\left(\fint_{B_R} V(x,B_R)dx\right)^{\frac{t-s}{t}} \\
&+ c\,\varrho^s\,\delta^{-n} + \varrho^s\,\delta^{-n-s}\frac{d^s k_0^s}{(r-\rho)^s}.
\end{aligned}
$$

Elevando a la potencia $\frac{q}{s}$ e integrando con respecto a y sobre $k_0\mathbf{B}_0$, alcanzamos que

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{M}^{\sharp}_{s,k_0 d}(Dw)\|^q_{L^q(k_0\mathbf{B}_0)} \leq{}& C(s,q)\,\delta^{\alpha q}\,\|\mathcal{M}_s(Dw)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} + c\,\delta^{\frac{-nq}{s}}\|\mathcal{M}_s(|Du|\chi_{\mathbf{B}_r \setminus \mathbf{B}_\rho})\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} \\
&+ c\left(\frac{k_0^q\, d^q \delta^{\frac{-nq}{s} - q}}{(r-\rho)^q} + \delta^{\frac{-nq}{s}}\right)\|\mathcal{M}_s(G\,\chi_{\tilde{\mathbf{B}}_0})\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} + c\left(\frac{\delta^{\frac{-nq}{s} - q}}{(r-\rho)^q} + \delta^{\frac{-nq}{s}}\right)\|\mathcal{M}_s(u\,\chi_{\tilde{\mathbf{B}}_0})\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} \\
&+ c\,\delta^{\frac{-nq}{s}}\left(\|\mathcal{M}_t(Dw)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}\right)\sup_{y \in k_0\mathbf{B}_0}\ \sup_{0<R<k_0 d/\delta}\left(\fint_{B_R} V(x,B_R)dx\right)^{\frac{t-s}{t}} \\
&+ c\,\varrho^q\,|k_0\mathbf{B}_0|\left(\delta^{\frac{-nq}{s}} + \frac{\delta^{\frac{-nq}{s} - q} d^q}{(r-\rho)^s}\right),
\end{aligned}
$$

donde $c = c(n, s, q, \ell, L, \sigma, \delta)$. Usando el *Lema 2.12 (1) y (2)*, obtenemos

$$\begin{aligned}
\|Dw\|^q_{L^q(\mathbf{B}_0)} \leq{}& C(n,s,q)\,\delta^{\alpha q}\,\|Dw\|^q_{L^q(\mathbf{B}_0)} + c\,\delta^{\frac{-nq}{s}}\,\|Du\,\chi_{\mathbf{B}_r\setminus\mathbf{B}_\rho}\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} \\
&+ c\left(\frac{d^q\,k_0^q\,\delta^{\frac{-nq}{s}-q}}{(r-\rho)^q} + \delta^{\frac{-nq}{s}}\right)\|G\,\chi_{\tilde{\mathbf{B}}_0}\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} + c\left(\frac{\delta^{\frac{-nq}{s}-q}}{(r-\rho)^q} + \delta^{\frac{-nq}{s}}\right)\|u\,\chi_{\tilde{\mathbf{B}}_0}\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} \\
&+ c\,\delta^{\frac{-nq}{s}}\left(\|Dw\|^q_{L^q(\mathbf{B}_0)}\right)\sup_{y\in k_0\mathbf{B}_0}\ \sup_{0<R<k_0 d/\delta}\left(\fint_{B_R} V(x,B_R)dx\right)^{\frac{t-s}{t}} \\
&+ c\,\varrho^q\,|k_0\mathbf{B}_0|\left(\delta^{\frac{-nq}{s}} + \frac{\delta^{\frac{-nq}{s}-q}d^q}{(r-\rho)^s}\right).
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Nuestro siguiente paso consiste en llevar los dos términos del lado derecho con Dw al lado izquierdo. Esto lo haremos haciendo sus coeficientes lo mas pequeños posibles. Primero operaremos en el término $C(n,s,q)\,\delta^{\alpha q}\,\|Dw\|^q_{L^q(\mathbf{B}_0)}$. Para absorberlo en el lado izquierdo, es suficiente elegir δ tal que

$$C(n,s,q)\,\delta^{\alpha q} = \frac{1}{4} \quad\iff\quad \delta = \frac{1}{[4C(n,s,q)]^{\frac{1}{\alpha q}}}.$$

Nótese que esta elección de $\delta = \delta(n,s,q,\alpha) > 0$ es independiente de d. Entonces, teniendo en cuenta que δ ha sido fijada, la estimación (5.15) se reescribe como

$$\begin{aligned}
\|Dw\|^q_{L^q(\mathbf{B}_0)} \leq{}& c\,\|Du\,\chi_{\mathbf{B}_r\setminus\mathbf{B}_\rho}\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} \\
&+ c\left(\frac{k_0^q\,d^q}{(r-\rho)^q} + 1\right)\|G\,\chi_{\tilde{\mathbf{B}}_0}\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} + \left(\frac{c}{(r-\rho)^q} + 1\right)\|u\,\chi_{\tilde{\mathbf{B}}_0}\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} \\
&+ \tilde{c}\left(\|Dw\|^q_{L^q(\mathbf{B}_0)}\right)\sup_{y\in k_0\mathbf{B}_0}\ \sup_{0<R<k_0 d/\delta}\left(\fint_{B_R} V(x,B_R)dx\right)^{\frac{t-s}{t}} \\
&+ c\,\varrho^q\,|k_0\mathbf{B}_0|\frac{d^q}{(r-\rho)^q},
\end{aligned}$$

con constantes c y $\tilde{c}$ que solo dependen de n, s, q, ℓ, L, σ pero no de d. Ahora, si $k_0 d < \frac{d(x_0,\partial\Omega)}{2}$ entonces

$$\sup_{y\in k_0\mathbf{B}_0}\ \sup_{0<R<k_0 d/\delta}\left(\fint_{B_R} V(x,B_R)dx\right)^{\frac{t-s}{t}} \leq \sup_{y\in B(x_0,\frac{d(x_0,\partial\Omega)}{2})}\ \sup_{0<R<k_0 d/\delta}\left(\fint_{B_R} V(x,B_R)dx\right)^{\frac{t-s}{t}}$$

y mas aún, de (5.5) tenemos que

$$\lim_{d\to 0}\ \sup_{y\in B(x_0,\frac{d(x_0,\partial\Omega)}{2})}\ \sup_{0<R<k_0 d/\delta}\left(\fint_{B_R} V(x,B_R)dx\right)^{\frac{t-s}{t}} = 0.$$

En particular, $d > 0$ puede elegirse suficientemente pequeña para que

$$\tilde{c}\ \sup_{y\in k_0\mathbf{B}_0}\ \sup_{0<R<k_0 d/\delta}\left(\fint_{B_R} V(x,B_R)dx\right)^{\frac{t-s}{t}} < \frac{1}{4}.$$

Observemos que la elección del valor d ciertamente depende de $d(x_0,\partial\Omega)$, $\mathbb{A}$, σ, ℓ, L, s, q y t. Sin embargo, esto nos permite insertar el término restante con Dw dentro del lado izquierdo.

Entonces, de (5.15) y de nuestra elecciónde w, inmediatamente se obtiene que

$$\int_{\mathbf{B}_\rho} |Du|^q \le 2^n \int_{\mathbf{B}_r} |Dw|^q \le c \int_{\mathbf{B}_r \setminus \mathbf{B}_\rho} |Du|^q + c\left(\frac{d^q}{(r-\rho)^q}+1\right) \int_{\tilde{\mathbf{B}}_0} |G|^q$$
$$+ c\left(\frac{1}{(r-\rho)^q}+1\right) \int_{\tilde{\mathbf{B}}_0} |u|^q + c\,\varrho^q\,|\tilde{\mathbf{B}}_0| \left(\frac{d^q}{(r-\rho)^q}+1\right).$$

Llenando el agujero, es decir, sumando a ambos miembros de la desigualdad anterior la cantidad

$$c\int_{\mathbf{B}_\rho} |Du|^q$$

obtenemos

$$\int_{\mathbf{B}_\rho} |Du|^q \le \vartheta \int_{\mathbf{B}_r} |Du|^q + c\left(\frac{d^q}{(r-\rho)^q}+1\right) \int_{\tilde{\mathbf{B}}_0} |G|^q$$
$$+ c\left(\frac{1}{(r-\rho)^q}+1\right) \int_{\tilde{\mathbf{B}}_0} |u|^q + c\,\varrho^q\,|\tilde{\mathbf{B}}_0| \left(\frac{d^q}{(r-\rho)^q}+1\right),$$

con $0 < \vartheta < 1$. Como la cota anterior es válida para cualquier radio arbitrario $\frac{d}{2} < \rho < r < d$, en virtud del *Lema 2.30*, concluimos que

$$⨍_{\frac{1}{2}\mathbf{B}_0} |Du|^q \le C(n,\sigma,\ell,L,s,q)\left(\varrho^q + ⨍_{\tilde{\mathbf{B}}_0} |G|^q + \frac{1}{d^q} ⨍_{\tilde{\mathbf{B}}_0} |u|^q\right).$$

Ya que $\tilde{\mathbf{B}}_0 = (1+\frac{2}{\delta})k_0\mathbf{B}_0$, el resultado se sigue simplemente tomando $\lambda = 2(1+\frac{2}{\delta})k_0$. $\square$

Prueba del Teorema 5.5. Fijamos una bola $B_R(x_0) \Subset \Omega$ con $0 < R < \lambda d_0$ donde λ y d_0 vienen determinados por el *Teorema 5.6*. También fijamos un núcleo suave $\phi \in C_c^\infty(B_1(0))$ con $\phi \ge 0$ y $\int_{B_1(0)} \phi = 1$. Con este núcleo, consideramos la familia de modificadores $(\phi_\varepsilon)_{\epsilon>0}$ y definimos

$$\mathbb{A}_\varepsilon(x,\xi) := \mathbb{A}(\cdot,\xi) * \phi_\varepsilon(x) = \int_{B_1} \phi(\omega)\mathbb{A}(x-\varepsilon\omega,\xi)\,d\omega$$

y

$$G_\varepsilon := G * \phi_\varepsilon$$

donde tomaremos $\varepsilon < \operatorname{dist}(B_R, \partial\Omega)$ positivo. Es relativamente fácil comprobar que de las condiciones $(\mathbb{A}\,1)$, $(\mathbb{A}\,2)$, $(\mathbb{A}\,3)$ se concluye que

$(\mathbb{H}\,1)$ $\quad \langle \mathbb{A}_\varepsilon(x,\xi) - \mathbb{A}_\varepsilon(x,\eta), \xi - \eta\rangle \ge \sigma\left(\varrho^2 + |\xi|^2 + |\eta|^2\right)^{\frac{s-2}{2}} |\eta - \xi|^2,$

$(\mathbb{H}\,2)$ $\quad |\mathbb{A}_\varepsilon(x,\xi) - \mathbb{A}_\varepsilon(x,\eta)| \le L\,|\xi - \eta|\left(\varrho^2 + |\xi|^2 + |\eta|^2\right)^{\frac{s-2}{2}}$, y

$(\mathbb{H}\,3)$ $\quad |\mathbb{A}_\varepsilon(x,\xi)| \le \ell\left(\varrho^2 + |\xi|^2\right)^{\frac{s-1}{2}}$

para todo ξ, $\eta \in \mathbb{R}^n$ y para casi todo $x \in \Omega$. Por otro lado, definiendo

$$V_\varepsilon(x, B_R) = \sup_{\xi\ne 0} \frac{|\mathbb{A}_\varepsilon(x,\xi) - \mathbb{A}_{\varepsilon,B_R}(\xi)|}{\left(\varrho^2 + |\xi|^2\right)^{\frac{s-1}{2}}} \quad \text{donde } \mathbb{A}_{\varepsilon,B_R}(\xi) = ⨍_{B_R} \mathbb{A}_\varepsilon(y,\xi)\,dy$$

y teniendo en cuenta que $x \to \mathbb{A}_\varepsilon(x,\xi)$ pertenece a C^∞, obtenemos que

$$(\mathbb{H}\,4) \qquad \lim_{r\to 0}\ \sup_{r(B)<r}\ \sup_{c(B)\in B_R} \fint_B V_\varepsilon(x, B)\,dx = 0\,.$$

Además, como $\mathbb{A}_\varepsilon(x, Du) \in L^{\frac{s}{s-1}}(B_R)$, podemos dejar constancia de que

$$\mathbb{A}_\varepsilon(x, Du) \to \mathbb{A}(x, Du) \quad \text{fuertemente en } L^{\frac{s}{s-1}}(B_R) \tag{5.16}$$

y como $G \in L^q(B_R)$, también tenemos que

$$G_\varepsilon \to G \quad \text{fuertemente en } L^q_{loc}(B_R)\,. \tag{5.17}$$

A continuación, suponemos que $u \in W^{1,s}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ es una solución de la ecuación (5.3) y denotemos por $u_\varepsilon \in W^{1,s}(B_R)$ a la única solución del siguiente problema de Dirichlet

$$(\mathbb{P}\varepsilon) \qquad \begin{cases} \operatorname{div}\mathbb{A}_\varepsilon(x, Du_\varepsilon) = \operatorname{div}\big(|G_\varepsilon|^{s-1} G_\varepsilon\big) & \text{en } B_R \\ u_\varepsilon = u & \text{sobre } \partial B_R\,. \end{cases}$$

Entonces, gracias a la teoría clásica, ya que $x \to \mathbb{A}_\varepsilon(x,\xi)$ es C^∞, sabemos que $Du_\varepsilon \in L^q$ para toda $q \geq s$.

Usando $\varphi = u_\varepsilon - u$ como función test en las ecuaciones $(\mathbb{P}\varepsilon)$ y (5.3), obtenemos que

$$\int_{B_R} \Big\langle \mathbb{A}_\varepsilon(x, Du_\varepsilon), Du - Du_\varepsilon \Big\rangle dx = \int_{B_R} \Big|G_\varepsilon\Big|^{s-1} \langle G_\varepsilon, Du - Du_\varepsilon\Big\rangle dx$$
$$\int_{B_R} \Big\langle \mathbb{A}(x, Du), Du - Du_\varepsilon \Big\rangle dx = \int_{B_R} |G|^{s-1} \Big\langle G, Du - Du_\varepsilon \Big\rangle dx$$

Restando la segunda ecuación a la primera tenemos

$$\int_{B_R} \Big\langle \mathbb{A}_\varepsilon(x, Du_\varepsilon) - \mathbb{A}(x, Du), Du - Du_\varepsilon \Big\rangle dx = \int_{B_R} \Big\langle |G_\varepsilon|^{s-1}G_\varepsilon - |G|^{s-1}G, Du - Du_\varepsilon \Big\rangle dx \tag{5.18}$$

Además, la desigualdad $(\mathbb{H}\,1)$ nos asegura que

$$\begin{aligned}
\sigma \int_{B_R} & (\varrho^2 + |Du|^2 + |Du_\varepsilon|^2)^{\frac{s-2}{2}} |Du - Du_\varepsilon|^2\,dx \\
&\leq \int_{B_R} \Big\langle \mathbb{A}_\varepsilon(x, Du_\varepsilon) - \mathbb{A}_\varepsilon(x, Du), Du - Du_\varepsilon \Big\rangle\,dx \\
&= \int_{B_R} \Big\langle \mathbb{A}(x, Du) - \mathbb{A}_\varepsilon(x, Du), Du - Du_\varepsilon \Big\rangle\,dx \\
&\qquad + \int_{B_R} \Big\langle |G_\varepsilon|^{s-1}G_\varepsilon - |G|^{s-1}G, Du - Du_\varepsilon \Big\rangle dx \\
&\leq \left(\int_{B_R} |\mathbb{A}(x, Du) - \mathbb{A}_\varepsilon(x, Du)|^{\frac{s}{s-1}} dx\right)^{\frac{s-1}{s}} \left(\int_{B_R} |Du - Du_\varepsilon|^s\,dx\right)^{\frac{1}{s}} \\
&\qquad + \left(\int_{B_R} |G_\varepsilon - G|^s dx\right)^{\frac{s-1}{s}} \left(\int_{B_R} |Du - Du_\varepsilon|^s\,dx\right)^{\frac{1}{s}},
\end{aligned} \tag{5.19}$$

donde hemos usado la identidad (5.18) y la desigualdad de Hölder. Ahora, usando que $s \geq 2$ y aplicando métodos bien conocidos, de la estimación (5.19) deducimos que

$$\int_{B_R} |Du - Du_\varepsilon|^s\,dx \leq c \int_{B_R} |\mathbb{A}(x, Du) - \mathbb{A}_\varepsilon(x, Du)|^{\frac{s}{s-1}}\,dx + \int_{B_R} |G_\varepsilon - G|^s dx.$$

Tomando límite cuando $\varepsilon \to 0$ en la desigualdad anterior y recordando (5.16) y (5.17), deducimos que u_ε converge fuertemente a u en $W^{1,s}$. Como el operador $\mathbb{A}_\varepsilon$ satisface ($\mathbb{H}\,1$)-($\mathbb{H}\,4$) y $Du_\varepsilon \in L^q$ para todo $q \geq s$, estamos legitimados para aplicar, a cada una de las u_ε, la estimación a priori dada por el *Teorema 5.6*. Así conseguimos que

$$\int_{B_\rho} |Du_\varepsilon|^q \leq C \left(\varrho^q + \int_{B_{\lambda\rho}} |u_\varepsilon|^q + \int_{B_{\lambda\rho}} |G_\varepsilon|^q \right) \tag{5.20}$$

para todo $q > s$ y para todo $\rho > 0$ con $B_{\lambda\rho} \subset B_R$.

Llegados a este punto, definimos una secuencia decreciente de exponentes como sigue

$$\begin{cases} q_0 = q \\ q_j = \frac{nq_{j-1}}{n+q_{j-1}} \qquad j \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Observemos que $q_j \searrow 0$, y por lo tanto, existe $h \in \mathbb{N}$ tal que $q_h \leq s^*$. Ahora elegimos $\rho = \rho_h$ suficientemente pequeño para tener $\lambda^h \rho < R$ y consideramos $r_i = \lambda^i \rho$. Como $G \in L^q(B_R)$, tenemos $G \in L^{q_i}(B_R)$ para toda $i \in \mathbb{N}$ y así, podemos reescribir la desigualdad (5.20) como sigue

$$\begin{aligned}
\int_{B_{r_i}} |Du_\varepsilon|^{q_i} &\leq \frac{C_{q_i}}{r_{i+1}^{q_i}} \int_{B_{r_{i+1}}} |u_\varepsilon|^{q_i} + C_{q_i} \int_{B_{r_{i+1}}} |G_\varepsilon|^{q_i} + C_{q_i}\, \varrho^{q_i}\, |B_{r_{i+1}}| \\
&\leq \frac{C_{q_i}}{r_{i+1}^{q_i}} \left(\int_{B_{r_{i+1}}} |u_\varepsilon|^{q_{i+1}} + |Du_\varepsilon|^{q_{i+1}} \right)^{\frac{q_i}{q_{i+1}}} + C_{q_i} \int_{B_{r_{i+1}}} |G_\varepsilon|^{q_i} + C_{q_i}\, \varrho^{q_i}\, |B_{r_{i+1}}| \\
&\leq \frac{C_{q_i}}{r_{i+1}^{q_i}} \left[\int_{B_{r_{i+1}}} |u_\varepsilon|^{q_{i+1}} + \frac{C_{q_{i+1}}}{r_{i+2}^{q_{i+1}}} \int_{B_{r_{i+2}}} |u_\varepsilon|^{q_{i+1}} + C_{q_{i+1}} \int_{B_{r_{i+2}}} |G_\varepsilon|^{q_{i+1}} + C_{q_{i+1}}\, \varrho^{q_{i+1}}\, |B_{r_{i+2}}| \right]^{\frac{q_i}{q_{i+1}}} \\
&\quad + C_{q_i} \int_{B_{r_{i+1}}} |G_\varepsilon|^{q_i} + C_{q_i}\, \varrho^{q_i}\, |B_{r_{i+1}}| \\
&\leq \frac{C_{q_i} C_{q_{i+1}}}{(r_{i+1} r_{i+2})^{q_i}} \left(\int_{B_{r_{i+2}}} |u_\varepsilon|^{q_{i+1}} \right)^{\frac{q_i}{q_{i+1}}} + \frac{C_{q_i} C_{q_{i+1}}}{(r_{i+1})^{q_i}} \left(\int_{B_{r_{i+2}}} |G_\varepsilon|^{q_{i+1}} \right)^{\frac{q_i}{q_{i+1}}} + C_{q_i} \int_{B_{r_{i+2}}} |G_\varepsilon|^{q_i} \\
&\quad + C_{q_i}\, \varrho^{q_i}\, |B_{r_{i+1}}| + C_{q_{i+1}} C_{q_i}\, \varrho^{q_i}\, |B_{r_{i+1}}| |B_{r_{i+2}}|^{\frac{q_i}{q_{i+1}}}
\end{aligned} \tag{5.21}$$

donde hemos usado primero la desigualdad de Sobolev, luego la desigualdad (5.20) y finalmente la desigualdad de Young. Iterando la desigualdad (5.21), desde $i = 0$ hasta $i = h-1$, deducimos que

$$\int_{B_\rho} |Du_\varepsilon|^q \leq \tilde{C}_h \left(\int_{B_{\lambda^h \rho}} |u_\varepsilon|^{q_h} \right)^{\frac{q}{q_h}} + \tilde{C}_h \int_{B_R} |G_\varepsilon|^q + \bar{C}_h\, \varrho^q,$$

donde $\tilde{C}_h = \Pi_{i=0}^{h-1} \dfrac{C_{q_i}}{r_{i+1}^{q_i}}$. Como $q_h \leq s^*$, en virtud de la convergencia fuerte de u_ε a u en $W^{1,s}$, podemos pasar al límite cuando $\varepsilon \to 0$ en la estimación anterior para deducir

$$\int_{B_\rho} |Du|^q \leq \tilde{C}_h \left(\int_{B_R} |u|^{q_h} \right)^{\frac{q}{q_h}} + \tilde{C}_h \int_{B_R} |G|^q + \tilde{C}_h\, \varrho^q,$$

con lo que alcanzamos la conclusión. □

5.2. Demostración del Teorema 5.1

Primero probaremos que si se satisface (5.2), entonces $\mathcal{A}$ pertenece localmente y uniformemente a VMO. En otras palabras, que $\mathcal{A}$ satisface la condición (5.5).

Lema 5.7. *Sea $\mathcal{A}$ tal que satisface ($\mathcal{A}1$), ($\mathcal{A}2$), ($\mathcal{A}3$) y (5.2) para alguna función $g \in L^{\frac{n}{\alpha}}_{loc}(\Omega)$. Entonces, $\mathcal{A}$ pertenece localmente y uniformemente a VMO. Es decir, $\mathcal{A}$ satisface (5.5) con $s = 2$.*

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\fint_B V(x,B)\,dx &= \fint_B \sup_{\xi\neq 0} \frac{|\mathcal{A}(x,\xi) - \mathcal{A}_B(\xi)|}{(\varrho^2 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}}}\,dx \\
&\leq \fint_B \sup_{\xi\neq 0} \fint_B \frac{|\mathcal{A}(x,\xi) - \mathcal{A}(y,\xi)|}{(\varrho^2 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}}}\,dy\,dx \\
&\leq \fint_B \sup_{\xi\neq 0} \fint_B (g(x) + g(y))\,|x-y|^{\alpha}\,dy\,dx \\
&= \fint_B \fint_B (g(x) + g(y))\,|x-y|^{\alpha}\,dy\,dx \\
&\leq \left(\fint_B \fint_B (g(x) + g(y))^{\frac{n}{\alpha}}\,dy\,dx\right)^{\frac{\alpha}{n}} \left(\fint_B \fint_B |x-y|^{\frac{n\alpha}{n-\alpha}}\,dy\,dx\right)^{\frac{n-\alpha}{n}} \\
&\leq \left(\frac{1}{|B|}\int_B g^{\frac{n}{\alpha}}\right)^{\frac{\alpha}{n}} C(\alpha,n)\,|B|^{\frac{\alpha}{n}} = C(n,\alpha)\int_B g^{\frac{n}{\alpha}}
\end{aligned}$$

y así es evidente que $\fint_B V(x,B)dx \to 0$ conforme $|B| \to 0$. Por lo tanto, $\mathcal{A}$ satisface (5.5) con lo que concluimos la prueba. $\square$

Demostración del Teorema 5.1. Dada una función test $\varphi \in \mathcal{C}^{\infty}_c(\Omega)$ con $\operatorname{supp}(\tau_{-h}\varphi) \subset \Omega$, integramos distribucionalmente la ecuación

$$\operatorname{div} \mathcal{A}(x, Du) = 0$$

contra φ y contra $\tau_{-h}\varphi$. Seguidamente, combinamos las identidades resultantes para alcanzar que

$$\int \langle \mathcal{A}(x+h, Du(x+h)) - \mathcal{A}(x+h, Du), \nabla\varphi\rangle = -\int \langle \mathcal{A}(x+h, Du(x)) - \mathcal{A}(x, Du(x)), \nabla\varphi\rangle.$$

Ahora, definiendo

$$\mathcal{A}_h(x,\xi) := \frac{1}{|h|^{\alpha}}\left(\mathcal{A}(x+h, |h|^{\alpha}\,\xi + Du(x)) - \mathcal{A}(x+h, Du(x))\right)$$

y $v_h := \frac{\Delta_h u}{|h|^{\alpha}}$, inmediatamente vemos que v_h es una solución débil de

$$\operatorname{div} \mathcal{A}_h(x, Dv_h) = \operatorname{div} G_h \tag{5.22}$$

donde

$$G_h(x) = -\frac{1}{|h|^\alpha}\,\left(\mathcal{A}(x+h, Du(x)) - \mathcal{A}(x, Du(x))\right).$$

Además, de manera casi inmediata, se comprueba que el nuevo operador $\mathcal{A}_h$ satisface ($\mathcal{A}\,1$), ($\mathcal{A}\,2$) con la misma constante que $\mathcal{A}$. Además, $\mathcal{A}_h$ cumple ($\mathcal{A}\,3$) donde ahora $\varrho = 0$. Observemos también que

$$|G_h(x)| = \left|\frac{\mathcal{A}(x+h, Du(x)) - \mathcal{A}(x, Du(x))}{|h|^\alpha}\right| \leq (g(x+h) + g(x))\,(\varrho^2 + |Du(x)|^2)^{\frac{1}{2}},$$

Entonces, sabemos por el *Lema 5.7* que $\mathcal{A}$ pertenece localmente y uniformemente a VMO, y así el *Teorema 5.5* nos asegura que $Du \in L^r_{loc}(\Omega)$ para cada $r > 2$ finito. En particular, si $2 \leq p < \frac{n}{\alpha}$ entonces $Du \in L^{p^*_\alpha}_{loc}(\Omega)$ y como consecuencia $G_h \in L^p_{loc}(\Omega)$. De esto se deduce que podemos aplicar el *Lema 2.32* al sistema (5.22) donde $\varrho = 0$. Por lo tanto, existe $p_0 = p_0(n, \sigma, \ell) > 2$ tal que si además $2 \leq p < p_0$, entonces

$$\|Dv_h\|_{L^p(B)} \leq C_0\left(\frac{1}{r_B}\|v_h\|_{L^p(2B)} + \|G_h\|_{L^p(2B)}\right) \tag{5.23}$$

para cada bola B con radio r_B tal que $2B \subset \Omega$. En términos de u, esto se reescribe como

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\Delta_h(Du)}{|h|^\alpha}\right\|_{L^p(B)} &\leq C_0\left(\frac{1}{r_B}\left\|\frac{\Delta_h u}{|h|^\alpha}\right\|_{L^p(2B)} + \|G_h\|_{L^p(2B)}\right)\\ &\leq C_0\left(\frac{1}{r_B}\left\|\frac{\Delta_h u}{|h|^\alpha}\right\|_{L^p(2B)} + \|g\|_{L^{\frac{n}{\alpha}}(2B)}\,\|(1+|Du|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{L^{\frac{np}{n-\alpha p}}(2B)}\right).\end{aligned}$$

Así, tomando supremo para $|h| < \delta$ con $\delta > 0$ suficientemente pequeño, alcanzamos que

$$\sup_h\left\|\frac{\Delta_h(Du)}{|h|^\alpha}\right\|_{L^p(B)} \leq C_0\left(\frac{1}{r_B}\sup_h\left\|\frac{\Delta_h u}{|h|^\alpha}\right\|_{L^p(2B)} + \|g\|_{L^{\frac{n}{\alpha}}(2B)}\,\|(1+|Du|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{L^{\frac{np}{n-\alpha p}}(2B)}\right)$$

Ahora usamos el *Lema 2.9* para ver que el término $\sup_h\left\|\frac{\Delta_h u}{|h|^\alpha}\right\|_{L^p(2B)}$ es finito, ya que $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$. Entonces obtenemos que $Du \in B^\alpha_{p,\infty,loc}(\Omega)$, tal como se indicaba.

Para terminar, observemos que cuando $\mathcal{A}$ es lineal en la variable del gradiente, es decir $\mathcal{A}(x,\xi) = A(x)\xi$, se tiene inmediatamente que $x \mapsto \mathcal{A}_h(x,\xi)$ pertenece localmente y uniformemente a VMO y que además, la restriccin $p < p_0$ en (5.23) no es necesaria. $\square$

Antes de cerrar la sección, mostraremos brevemente porque nuestra demostración del *Teorema 5.1* falla si suponemos que el operador $\mathcal{A}(x,\xi)$ satisface las condiciones ($\mathbb{A}\,1$) $-$ ($\mathbb{A}\,3$) en lugar de ($\mathcal{A}\,1$) $-$ ($\mathcal{A}\,3$). Esto es, cuando $\mathcal{A}(x,\xi) = \mathbb{A}(x,\xi)$ es una *función de Carathédory de crecimiento $s-1$ con $2 > s \leq n$*. En este caso, el problema viene al definir la nueva función $\mathbb{A}_h(x,\xi)$. Recordemos que

$$\mathbb{A}_h(\,x\,,\,\xi\,) := \frac{1}{|h|^\alpha}\,\left(\mathbb{A}\,(\,x+h\,,\,|h|^\alpha\,\xi + Du(x)\,) - \mathbb{A}\,(\,x+h\,,\,Du(x)\,)\right),$$

donde $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ una solución débil de

$$\operatorname{div}\mathbb{A}\,(\,x\,,\,Du\,) = 0\,.$$

Un simple cálculo, usando que $\mathbb{A}(x,\xi)$ satisface $(\,\mathbb{A}\,1\,)$, nos muestra que

$$\langle\, \mathbb{A}_h\,(x,\xi) - \mathbb{A}_h(x,\eta) \geq \sigma \left(\varrho^2 + |\,|h|^\alpha\,\xi + Du\,|^2 + |\,|h|^\alpha\,\eta + Du\,|^2\right)^{\frac{s-2}{2}}\,|\,\xi - \eta\,|^2$$

lo que difiere enormemente de $(\,\mathbb{A}\,1\,)$. Observemos además que Du no tiene porqué ser continua por lo que la cantidad de la derecha puede llegar a ser infinito. Esta es la razón por la cual la prueba anterior falla cuando $\mathcal{A}(x,\xi) = \mathbb{A}(x,\xi)$ es una *función de Carathédory de crecimiento* $s-1$ *con* $2 < s \leq n$.

5.3. Demostraciones de los Teoremas 5.2, 5.3 y 5.4

Primero probaremos que si $\mathcal{A}$ satisfies $(\,\mathcal{A}\,1\,)$, $(\,\mathcal{A}\,2\,)$, $(\,\mathcal{A}\,3\,)$, $(\,\mathcal{A}\,4\,)$ entonces $\mathcal{A}$ pertenece localmente y uniformente a VMO. Cuando $\mathcal{A}$ es lineal en la segunda variable, esto sigue inmediatamente del *Lema 2.11*.

Lema 5.8. *Sea $\mathcal{A}$ tal que satisface $(\,\mathcal{A}\,1\,)$, $(\,\mathcal{A}\,2\,)$, $(\,\mathcal{A}\,3\,)$ y $(\,\mathcal{A}\,4\,)$. Entonces, $\mathcal{A}$ pertenece localmente y uniformente a VMO, es decir, cumple* (5.5) *con* $s = 2$.

Demostración. Dado un punto $x \in \Omega$, escribimos $A_k(x) = \{y \in \Omega : 2^{-k} \leq |x-y| < 2^{-k+1}\}$. Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned}
⨍_B V(x,B)\,dx &= ⨍_B \sup_{\xi\neq 0} \frac{|\mathcal{A}(x,\xi) - \mathcal{A}_B(\xi)|}{(\varrho^2 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}}}\,dx \\
&\leq ⨍_B \sup_{\xi\neq 0} ⨍_B \frac{|\mathcal{A}(x,\xi) - \mathcal{A}(y,\xi)|}{(\varrho^2 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}}}\,dy\,dx \\
&= ⨍_B \sup_{\xi\neq 0} \frac{1}{|B|} \sum_k \int_{B\cap A_k(x)} \frac{|\mathcal{A}(x,\xi) - \mathcal{A}(y,\xi)|}{(\varrho^2 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}}}\,dy\,dx \\
&\leq \frac{1}{|B|^2} \sum_k \int_B \int_{B\cap A_k(x)} |x-y|^\alpha\,(g_k(x) + g_k(y))\,dy\,dx\,,
\end{aligned}$$

donde el último término, está acotado por

$$\left(\frac{1}{|B|^2} \sum_k \int_B \int_{B\cap A_k(x)} |x-y|^{\frac{n\alpha}{n-\alpha}}\,dy\,dx\right)^{\frac{n-\alpha}{n}} \left(\frac{1}{|B|^2} \sum_k \int_B \int_{B\cap A_k(x)} (g_k(x) + g_k(y))^{\frac{n}{\alpha}}\,dy\,dx\right)^{\frac{\alpha}{n}} =: (\,I\,)\cdot(\,II\,)$$

El primer sumatorio es muy fácil de acotar ya que

$$(\,I\,) = \left(\frac{1}{|B|^2} \sum_k \int_B \int_{B\cap A_k(x)} |x-y|^{\frac{n\alpha}{n-\alpha}}\,dy\,dx\right)^{\frac{n-\alpha}{n}} \leq C(n,\alpha)\,|B|^{\frac{\alpha}{n}}$$

Concerniente al segundo, vemos que

$$
\begin{aligned}
(\, II\,) &\leq \left(\frac{1}{|B|^2} \sum_k |B \cap A_k(x)| \int_B g_k(x)^{\frac{n}{\alpha}} dx \right)^{\frac{\alpha}{n}} \\
&\leq \left(\frac{1}{|B|^2} \sum_k \left(\int_B g_k(x)^{\frac{n}{\alpha}} dx \right)^{\frac{\alpha q}{n}} \right)^{\frac{\alpha}{n} \frac{n}{\alpha q}} \left(\frac{1}{|B|^2} \sum_k |B \cap A_k(x)|^{\frac{\alpha q}{\alpha q - n}} \right)^{\frac{\alpha}{n} \frac{\alpha q - n}{\alpha q}} \\
&= \frac{1}{|B|^{\frac{2}{q}}} \left(\sum_k \|g_k\|^q_{L^{\frac{n}{\alpha}}(B))} \right)^{\frac{1}{q}} \frac{1}{|B|^{2(\frac{\alpha}{n} - \frac{1}{q})}} \left(\sum_k |B \cap A_k(x)|^{\frac{\alpha q}{\alpha q - n}} \right)^{\frac{\alpha}{n} \frac{\alpha q - n}{\alpha q}} \\
&\leq \frac{1}{|B|^{\frac{2}{q}}} \left(\sum_k \|g_k\|^q_{L^{\frac{n}{\alpha}}(B))} \right)^{\frac{1}{q}} \frac{1}{|B|^{2(\frac{\alpha}{n} - \frac{1}{q})}} C(n,\alpha,q)|B|^{\frac{\alpha}{n}} = C(n,\alpha,q)\, |B|^{-\frac{\alpha}{n}} \left(\sum_k \|g_k\|^q_{L^{\frac{n}{\alpha}}(B))} \right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}
$$

Entonces, tenemos siguiente estimación

$$
⨍_B V(x,B)\, dx \leq (\, I\,) \cdot (\, II\,) \leq C(n,\alpha,q) \left(\sum_k \|g_k\|^q_{L^{\frac{n}{\alpha}}(B))} \right)^{\frac{1}{q}}.
$$

Para obtener la condición VMO, sólo queda por demostrar que

$$
\lim_{r\to 0} \sup_{x\in K} \left(\sum_k \|g_k\|^q_{L^{\frac{n}{\alpha}}(B(x,r)))} \right)^{\frac{1}{q}} = 0
$$

para cualquier conjunto compacto $K \subset \Omega$. A fin de lograrlo, fijamos $r > 0$ suficientemente pequeña y observamos que la función $x \mapsto \|g_k\|_{\ell^q(L^{\frac{n}{\alpha}}(B(x,r))}$ es continua en el conjunto $\{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega > r)\}$, como una serie uniformemente convergente de funciones continuas. En consecuencia, hay un punto $x_r \in K$ (al menos para un $r > 0$ lo suficientemente pequeño) tal que

$$
\sup_{x\in K} \|g_k\|_{\ell^q(L^{\frac{n}{\alpha}}(B(x,r)))} = \|g_k\|_{\ell^q(L^{\frac{n}{\alpha}}(B(x_r,r)))}.
$$

Ahora, como $\|g_k\|_{L^{\frac{n}{\alpha}}(B(x,r))} \leq \|g_k\|_{L^{\frac{n}{\alpha}}(B(x_r,r))}$ y además ambas sucesiones pertenecen a ℓ^q, podemos usar la convergencia dominada para asegurar

$$
\lim_{r\to 0} \|g_k\|_{\ell^q(L^{\frac{n}{\alpha}}(B(x_r,r)))} = \left(\sum_k \lim_{r\to 0} \left(\int_{B(x_r,r)} g_k^{\frac{n}{\alpha}} \right)^{\frac{q\alpha}{n}} \right)^{\frac{1}{q}}.
$$

Cada uno de los limites del lado derecho es idénticamente 0, ya que los puntos x_r no pueden escapar del compacto K cuando $r \to 0$. Con esto terminamos la prueba. □

Ahora probaremos el Teorema 5.3.

Demostración del Teorema 5.3. Dada una función $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, con $\operatorname{supp}(\tau_{-h}\varphi) \subset \Omega$, testaremos la ecuación (1.2) contra φ y $\tau_{-h}\varphi$. Seguidamente, combinamos ambas identidades para obtener

$$
\begin{aligned}
&\int \langle \mathcal{A}(x+h, Du(x+h)) - \mathcal{A}(x+h, Du), \nabla\varphi \rangle \\
&\qquad = \int \langle \Delta_h G, \nabla\varphi \rangle - \int \langle \mathcal{A}(x+h, Du(x)) - \mathcal{A}(x, Du(x)), \nabla\varphi \rangle.
\end{aligned}
$$

Ahora, definimos

$$\mathcal{A}_h(x,\xi) = \frac{1}{|h|^\alpha}\left(\mathcal{A}(x+h, |h|^\alpha\,\xi + Du(x)) - \mathcal{A}(x+h, Du)\right)$$

y $v_h = \frac{\Delta_h u}{|h|^\alpha}$. De esta forma, vemos inmediatamente que v_h es una solución débil de

$$\operatorname{div}\mathcal{A}_h(x, Dv_h) = \operatorname{div} G_h \tag{5.24}$$

donde

$$G_h(x) = \frac{1}{|h|^\alpha}\,\Delta_h G(x) - \frac{1}{|h|^\alpha}\,\left(\mathcal{A}(x+h, Du(x)) - \mathcal{A}(x, Du(x))\right) \tag{5.25}$$

Al igual que en la demostración previa, $\mathcal{A}_h$ satisface ($\mathcal{A}\,1$), ($\mathcal{A}\,2$), ($\mathcal{A}\,3$) con las mismas constantes σ, L, ℓ y con $\varrho = 0$. Observemos además, que en virtud de ($\mathcal{A}\,4$) y de la condición sobre G, tenemos que $G_h \in L^p_{loc}$ para casi todo h. Esto es evidente para el primer término de (5.25), ya que por hipótesis $G \in B^\alpha_{p,q,loc}$. Para ver el segundo término, usamos la condicón ($\mathcal{A}\,4$) que nos asegura

$$\left|\frac{\mathcal{A}(x+h, Du(x)) - \mathcal{A}(x, Du(x))}{|h|^\alpha}\right| \leq (g_k(x+h)+g_k(x))\,(\varrho^2+|Du(x)|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{ si } 2^{-k} \leq |h| < 2^{-k+1},$$

donde por hipótesis $g_k \in L^{\frac{n}{\alpha}}(\Omega)$ y $(1+|Du(x)|^2)^{\frac{1}{2}} \in L^{p^*_\alpha}_{loc}(\Omega)$ con $p^*_\alpha = \frac{np}{n-\alpha p}$. Por otro lado, aplicando el *Lema 2.11* con $p < \frac{n}{\alpha}$ y $q \leq p^*_\alpha$ podemos ver que $G \in L^{p^*_\alpha}_{loc}(\Omega)$, y por lo tanto, deducir que $Du \in L^{p^*_\alpha}_{loc}(\Omega)$ gracias al *Teorema 5.5* (si $p^*_\alpha \geq 2$) o al *Lema 2.32* (ya que si $p^*_\alpha < 2$ todavía tenemos $p_0' < p < p^*_\alpha$). De esta forma obtenemos que $G_h \in L^p_{loc}(\Omega)$.

Ahora, podemos usar el *Lema 2.32* en (5.24). Si B es una bola con $(2+|h|)B \subset \Omega$,

$$\|Dv_h\|_{L^p(B)} \leq C_0\left(\frac{1}{r_B}\,\|v_h\|_{L^p(2B)} + \|G_h\|_{L^p(2B)}\right), \qquad p_0' < p < p_0 \tag{5.26}$$

donde r_B denota el radio de B, p_0 viene dada por el *Lema 2.32*, y las constantes $C_0 = C_0(n,p,\sigma,L,s)$ no dependen de h. A continuación, escribimos la desigualdad anterior en términos de u y seguidamente tomamos norma L^q con la medida $\frac{dh}{|h|^n}$ restringida a la bola $B(0,R)$ del h-espacio. Así obtenemos que

$$\left\|\frac{\Delta_h Du}{|h|^\alpha}\right\|_{L^q(\frac{dh}{|h|^n};L^p(B))} \leq C_0\left(\frac{1}{r_B}\,\left\|\frac{\Delta_h u}{|h|^\alpha}\right\|_{L^q(\frac{dh}{|h|^n};L^p(2B))} + \|G_h\|_{L^q(\frac{dh}{|h|^n};L^p(2B))}\right).$$

Arriba, el primer término del lado derecho es finito ya que $Du \in L^{p^*_\alpha}_{loc}(\Omega)$. Para estimar el último término, escribimos

$$\|G_h\|_{L^q(\frac{dh}{|h|^n};L^p(2B))} \leq \left\|\frac{\Delta_h G}{|h|^\alpha}\right\|_{L^q(\frac{dh}{|h|^n};L^p(2B))} + \left\|\frac{\mathcal{A}(\cdot+h, Du) - \mathcal{A}(\cdot, Du)}{|h|^\alpha}\right\|_{L^q(\frac{dh}{|h|^n};L^p(2B))}$$

Arriba, el pimer término del lado derecho es finito, ya que por hipótesis $G \in B^\alpha_{p,q,loc}(\Omega)$. Para acotar el segundo término, denotamos $r_k = 2^{-k}\,R$ y escribimos la norma L^q en coordenadas polares. De esta forma, $h \in B(0,R)$ si y solo si $h = r\xi$ para alguna $0 \leq r < R$ y alguna ξ en la esfera unidad S^{n-1} de $\mathbb{R}^n$. Denotamos por $d\sigma(\xi)$ a la medida de superficie en S^{n-1}. Acotamos el último termino de la línea anterior como sigue

$$\begin{aligned}
\int_0^R \int_{S^{n-1}} & \left\| \frac{\mathcal{A}(\cdot + r\xi, Du) - \mathcal{A}(\cdot, Du)}{r^\alpha} \right\|_{L^p(2B)}^q d\sigma(\xi)\, \frac{dr}{r} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{r_{k+1}}^{r_k} \int_{S^{n-1}} \left\| \frac{\mathcal{A}(\cdot + r\xi, Du) - \mathcal{A}(\cdot, Du)}{r^\alpha} \right\|_{L^p(2B)}^q d\sigma(\xi)\, \frac{dr}{r} \\
&\leq 2^{-\alpha q} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{r_{k+1}}^{r_k} \int_{S^{n-1}} \left\| (\tau_{r\xi} g_k + g_k)\, (1 + |Du|^2)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(2B)}^q d\sigma(\xi)\, \frac{dr}{r}.
\end{aligned}$$

Usando de nuevo que $Du \in L^{p^*_\alpha}_{loc}(\Omega)$,

$$\left\| (\tau_{r\xi} g_k + g_k)\, (1 + |Du|^2)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(2B)} \leq \left\| (1 + |Du|^2)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^{\frac{np}{n-\alpha p}}(2B)} \|(\tau_{r\xi} g_k + g_k)\|_{L^{\frac{n}{\alpha}}(2B)}$$

Por otro lado, observamos que para cada $\xi \in S^{n-1}$ y $r_{k+1} \leq r \leq r_k$

$$\|(\tau_{r\xi} g_k + g_k)\|_{L^{\frac{n}{\alpha}}(2B)} \leq \|g_k\|_{L^{\frac{n}{\alpha}}(2B - r_k\xi)} + \|g_k\|_{L^{\frac{n}{\alpha}}(2B)} \leq 2\|g_k\|_{L^{\frac{n}{\alpha}}(\lambda B)}$$

donde $\lambda = 2 + \frac{R}{r_B}$. Entonces

$$\left\| \frac{\mathcal{A}(\cdot + h, Du) - \mathcal{A}(\cdot, Du)}{|h|^\alpha} \right\|_{L^q(\frac{dh}{|h|^n}; L^p(2B))} \leq C(n, \alpha, q)\, \left\| (1 + |Du|^2)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^{p^*_\alpha}(2B)} \|\{g_k\}_k\|_{\ell^q(L^{\frac{n}{\alpha}}(\lambda B))}$$

donde $C(n, \alpha, q) = 2^{1-\alpha}\, \log 2\, \sigma(S^{n-1})^{\frac{1}{q}}$. Reuniéndolo todo,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{C_0} \left\| \frac{\Delta_h Du}{|h|^\alpha} \right\|_{L^q(\frac{dh}{|h|^n}; L^p(2B))} &\leq \frac{1}{r_B} \left\| \frac{\Delta_h u}{|h|^\alpha} \right\|_{L^q(\frac{dh}{|h|^n}; L^p(2B))} + \left\| \frac{\Delta_h G}{|h|^\alpha} \right\|_{L^q(\frac{dh}{|h|^n}; L^p(2B))} \\
&\quad + C(n, \alpha, q)\, \|(1 + |Du|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{L^{p^*_\alpha}(2B)} \|\{g_k\}_k\|_{\ell^q(L^{\frac{n}{\alpha}}(\lambda B))}
\end{aligned}$$

Finalmente, el *Lema 2.9* nos garantiza que $Du \in B^\alpha_{p,q,loc}(\Omega)$ concluyendo así la prueba. □

Las pruebas de los Teoremas 5.2 y 5.4 son similares.

Proof of Theorem 5.2. Si argumentamos de nuevo como en la prueba del *Teorema 5.3*, el hecho de que $G = 0$, nos garantiza que no necesitamos de $q \leq p^*_\alpha$ para concluir que $G_h \in L^p_{loc}(\Omega)$ para todo $p < \frac{n}{\alpha}$, gracias al *Teorema 5.5*. Como consecuencia, (5.26) se cumple para cada $p < \text{mín}\{p_0, \frac{n}{\alpha}\}$. Llegados a este punto, el resto de la prueba sigue el mismo camino. □

Demostración del Teorema 5.4. Volvemos a argumentar como en la prueba del *Teorema 5.3*, donde ahora la ecuación $\mathcal{A}_h$ es lineal con coeficientes en VMO gracias a la linealidad de $\mathcal{A}(x, \xi)$ como función de ξ. Además, como $\text{máx}\{1, \frac{nq}{n+\alpha q}\} < p < \frac{n}{\alpha}$ tenemos $q \leq p^*_\alpha < \infty$. De esta forma, $G \in L^{p^*_\alpha}_{loc}(\Omega)$ implica $Du \in L^{p^*_\alpha}_{loc}(\Omega)$ gracias a los resultados de [23]. Por lo tanto, G_h tiene una mayorante en $L^p_{loc}(\Omega)$, y de esta forma, ya que $p > 1$, volvemos a alcanzar $Dv_h \in L^p_{loc}(\Omega)$ gracias a [23]. En particular, la restricción $p < \text{mín}\{p_0, \frac{n}{\alpha}\}$ puede ser reemplazada por $p < \frac{n}{\alpha}$, y la restricción $p > p_0'$ por $p > \text{máx}\{1, \frac{nq}{n+\alpha q}\}$. El resto de la prueba se sigue de forma análoga. □

Antes de cerrar el capítulo, pasaremos a mostrar que nos dicen los *Teoremas 5.1, 5.2 y 5.4* cuando $n = 2$ y el operador $\mathcal{A}(x,\xi) = A(x)\xi$. Es decir, en el caso lineal que se corresponde unívocamente con una *Ecuación de Beltrami Generalizada*

$$\overline{\partial} f \,=\, \mu\,\partial f \,+\, \nu\,\overline{\partial f} \,+\, h\,,$$

como ya vimos en la *Subsección 2.4.3*. Además, por lo cálculos que dimos en dicha subseción, sabemos que $h = 0$ en los *Teoremas 5.1 y 5.2*; no así en el *Teorema 5.4*.

- El *Teorema 5.1* nos asegura que si tenemos dos coeficientes de Beltrami μ y ν con soporte compacto tales que $\||\mu| + |\nu|\|_\infty \le k < 1$ y $f \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ una solución cuasiregular de (1.6), entonces se tiene la implicación

  $$\mu,\, \nu \,\in\, F^{\alpha}_{\frac{2}{\alpha},\infty}(\,\mathbb{C}\,) \;\Longrightarrow\; Df \,\in\, B^{\alpha}_{p,\infty,loc}(\,\mathbb{C}\,)$$

  para toda $2 \le p < \frac{2}{\alpha}$.

- El *Teorema 5.2* afirma que dados dos coeficientes de Beltrami μ y ν con soporte compacto tales que $\||\mu| + |\nu|\|_\infty \le k < 1$, $f \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ una solución cuasiregular de (1.6) y $1 \le q \le \infty$, entonces se cumple que

  $$\mu,\, \nu \,\in\, B^{\alpha}_{\frac{2}{\alpha},q}(\,\mathbb{C}\,) \;\Longrightarrow\; Df \,\in\, B^{\alpha}_{p,q,loc}(\,\mathbb{C}\,)$$

  para toda $2 \le p < \frac{2}{\alpha}$.

- Por último, el *Teorema 5.4* atestigua que dado $1 \le q \le \infty$, dos coeficientes de Beltrami $\mu,\, \nu \in B^{\alpha}_{\frac{2}{\alpha},q}(\mathbb{C})$ con soporte compacto tales que $\||\mu| + |\nu|\|_\infty \le k < 1$ y dos funciones $h \in L^2_{loc}(\mathbb{C})$ y $f \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ que satisfacen la ecuación (1.5), entonces se tiene que

  $$h \,\in\, B^{\alpha}_{p,q}(\,\mathbb{C}\,) \;\Longrightarrow\; Df \,\in\, B^{\alpha}_{p,q,loc}(\,\mathbb{C}\,)$$

  para toda $\max\{1, \frac{2q}{2+\alpha q}\} < p < \frac{2}{\alpha}$.

Problemas Abiertos 5.9.

- *Extender el* Teorema 5.1 *reemplazando la hipótesis* $F^{\alpha}_{\frac{n}{\alpha},\infty}(\mathbb{R}^n)$ *por* $F^{\alpha}_{\frac{n}{\alpha},q}(\mathbb{R}^n)$ *con* $1 \le q < \infty$.

- *Obtener una regularidad* $F^{\alpha}_{\frac{n}{\alpha},s}(\mathbb{R}^n)$ *para la derivada* Du *a partir de hipótesis* $F^{\alpha}_{\frac{n}{\alpha},q}(\mathbb{R}^n)$.

- *Dados* $\mu, \nu \in F^{\alpha}_{\frac{2}{\alpha},q}(\mathbb{C})$ *con soporte compacto y* $\||\mu| + |\nu|\|_\infty = k < 1$, *deducir si se tiene la invertibilidad del operador de Beltrami Generalizado*

  $$Id \,-\, \mu\,\mathcal{B} \,-\, \nu\,\overline{\mathcal{B}} :\, F^{\alpha}_{p,q}(\,\mathbb{C}\,) \,\to\, F^{\alpha}_{p,q}(\,\mathbb{C}\,)$$

  para toda $2 \le p < \frac{2}{\alpha}$.

Destacamos que ya sabemos que el último punto es cierto cuando $q = 2$ gracias a los resultados del *Capítulo 4* y a la identidad $F^{\alpha}_{p,2}(\mathbb{C}) = W^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ (ver *Proposición 4.13*).

Bibliografía

[1] D. R. Adams y L. I. Hedberg. *Function Spaces and Potential Theory*. Grundlehren der Mathematuschen Wissenschaften.

[2] L. V. Ahlfors. *Lectures on Quasiconformal Mappings*. University Lecture Series, **38**.

[3] L. Ahlfors y L. Bers. *Riemann's Mapping Theorem for Variable Metrics*, The Annals of Mathematics, Second Series, **72**, No. 2 (Sep., 1960), pp. 385-404.

[4] K. Astala, T. Iwaniec y G. Martin. *Elliptic Partial Difeferential Equations and Quasiconformal Mappings in the Plane*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009.

[5] K. Astala, T. Iwaniec, I. Prause, E. Saksman. *Bilipschitz and quasiconformal rotation, stretching and multifractal spectra*. Publ. Math de l'IHS. September 2014.

[6] K. Astala, T. Iwaniec y E. Saksman. *Beltrami Operators in the Plane*. Duke Mathematical Journal. **107**, Number 1 (2001), 27-56.

[7] A. L. Baisón, A. Clop y J. Orobitg. *Beltrami equations with coefficient in the fractional Sobolev space* $W^{\theta,\frac{2}{\theta}}$. To appear at Proc. Amer. Math. Soc.

[8] L. Baratchart, J. Leblond, S. Rigat y E. Russ. *Hardy spaces of the conjugate Beltrami equation*. Journal of Functional Analysis 259 (2010) 384-427.

[9] A. Beurling. *On the Hilbert Transform in Two Variables*. The Collected Works of Arne Beurling, **1**, Birkhäuser, Boston, 1989, a seminar talk at Uppsala, November 8, 1949, pp. 460-461.

[10] A. Clop y Victor Cruz. *Weighted Estimates for Beltrami Equations*. Annales Academiae Scientiarum Fennic Mathematica **38**, 2013, 91113.

[11] A. Clop, D. Faraco, J. Mateu, J. Orobitg y X. Zhong. *Beltrami Equations with Coefficient in the Sobolev Space* $W^{1,p}$. Publ. Mat. **53** (2009), 197-230.

[12] A. Clop, D. Faraco y Alberto Ruiz. *Stability of Calderón's Inverse Conductivity Problem in the Plane for Discontinuous Conductivities*. Inverse Problems and Imaging, **4**, No. 1, 2010, 49-91.

[13] V. Cruz. *Soluciones de la Ecuación de Beltrami con Coeficiente Regular*. Tesis Doctoral, Universitat Autòmoma de Barcelona.

[14] V. Cruz, J. Mateu y J. Orobitg. *Beltrami Equation with Coefficient in Sobolev and Besov Spaces*. Canad. J. Math. **65** (2013), 1217-1235.

[15] M. Giaquinta. *Multiple Integrals in the Calculus of Variations and Nonlinear Elliptic Systems*. Annals of Mathematics Studies, 105. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1983.

[16] R. Giova. *Higher Differentiability for n-Harmonic Systems with Sobolev Coefficients*. J. Diff. Equations **259** (2015), n. 11 ,5667-5687.

[17] E. Giusti. *Direct Methods in the Calculus of Variations*. World Scientific Publishing Co. (2003).

[18] L. Grafakos. *Classical and Modern Fourier Analysis*. Pearson / Prentice-Hall 2004.

[19] D. H. Hamilton. *BMO and Teichmüller Space*. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **13**, no. 2 (1989), 213224.

[20] D. Haroske. *Envelopes and Sharp Embeddings of Function Spaces*. Chapman and Hall CRC (2006).

[21] T. Iwaniec. *L^p-Theory of Quasiregular Mappings*, Quasiconformal Space Mappings, **1508** of Lecture Notes in Math., pp 39–64. Springer, Berlin, 1992.

[22] T. Iwaniec y G. Martin. *Geometric Function Theory and Nonlinear Analysis*, Oxford Mathematical Monographs, NY 2001.

[23] T. Iwaniec y C. Sbordone. *Riesz Transforms and Elliptic PDEs with VMO Coefficients*. Journal dAnalyse Mathmatique December 1998, **74**, Issue 1, pp 183-212.

[24] C. E. Kenig, A. Ponce y L. Vega. *Well-Posedness and Scattering Results for the Generalized Korteweg-de Vries Equation via the Contraction Principle*. Comm. Pure Appl. Math., **46** (1993), 527-620.

[25] J. Kinnunen y S. Zhou. *A Boundary Estimate for Nonlinear Equations with Discontinuous Coefficients*. Differential Integral Equations. **14**, Number 4 (2001), 475-492.

[26] J. Kinnunen y S. Zhou. *A Local Estimate for Nonlinear Equations with Discontinuous Coefficients*. Comm. Part. Diff. Equ. **24** (1999), 2043–2068.

[27] P. Koskela, D. Yang y Y. Zhou. *Pointwise Characterization of Besov and Triebel-Lizorkin Spaces and Quasiconformal Mappings*. Advances in Mathematics **226** (2011), n.4, 3579-3621.

[28] A. Koski *Singular Integrals and Beltrami Type Operators in the Plane and Beyond*. Master Thesis, Department of Mathematics, University of Helsinki, 2011.

[29] J. Kristensen y C. Melcher. *Regularity in Oscillatory Nonlinear Elliptic Systems*. Math. Z. (2008) 260, p. 813–847.

[30] T. Kuusi y G. Mingione. *Guide to Nonlinear Potential Estimates*. Bulletin of Mathematical Sciences 4 (April 2014) pp 1-82.

[31] T. Kuusi y G. Mingione. *Universal Potential Estimates*. Journal of Functional Analysis 262 (2012) n. 26, 4205-4269.

[32] C. B. Morrey. *On the Solutions of Quasi-Linear Elliptic Partial Differential Equations*. Trans. Amer. Math. Soc., **43**(1938), 126-166.

[33] A. Passarelli. *Higher Differentiability of Minimizers of Variational Integrals with Sobolev Coefficients*. Advances in Calculus of Variations **7**, n. 1, Pages 59-89.

[34] A. Passarelli. *Higher Differentiability of Solutions of Elliptic Systems with Sobolev Coefficients: the Case $p = n = 2$*. Potential Anal. **41** (2014), n.3, 715-735.

[35] S. Petermichl y A. Volberg. *Heating of the Ahlfors-Beurling Operator: Wealy Quasiregular Maps on the Plane are Quasiregular*. Duke Mathematical Journal. **112**, Number 2 (2002), 281-305.

[36] H. M. Reimann. *Functions of Bounded Mean Oscillation and Quasiconformal Mappings.* Comment. Math. Helv. **49** (1974), 260-276.

[37] H. M. Reimann y T. Rychener. *Funktionen Beschränkter Mittlerer Oszillation*. Lecture Notes in Mathematic. 1975.

[38] T. Runst y W. Sickel. *Sobolev Spaces of Fractional Order, Nemytskij Operators, and Nonlinear Partial Differential Equations*, de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, 3. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1996.

[39] W. Sickel y H. Triebel. *Holder Inequalities and Sharp Embeddings in Function Spaces of $B_s^{p,q}$ and $F_s^{p,q}$ Type*. Zeitschr. Analysis Anwendungen **14**(1995), 105140. # 41, 45, 60, 77, 138, 197.

[40] E. M. Stein. *Singular Intregrals and Differentiability Properties of Function*. Princeton Mathematical Series, No. 30. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

[41] R. S. Strichartz. *Multipliers on Fractional Sobolev Spaces*. J. Math. Mech., 16:1031-1060, 1967.

[42] H. Triebel. *Theory of Function Spaces*. Monographs in Mathematics. 78. Birkhauser, Basel, 1983.

[43] A. Uchiyama. *On the Compactness of Operators of Hankel Type*. Tohoku Mathematical Journal. **30**, Number 1 (1978), 163-171.