Universitat Autònoma de Barcelona

CONOCIMIENTO DIDÁCTICO MATEMÁTICO DE UNA MAESTRA EN UN CONTEXTO DE DESARROLLO DEL PENSAMIENTO NUMÉRICO

Isabel Moreno de Barreda Ribed

Universitat Autònoma de Barcelona

DEPARTAMENT DE DIDÀCTICA DE LA MATEMÀTICA I DE LES CIÈNCIES EXPERIMENTALS

Doctorat en EDUCACIÓ

CONOCIMIENTO DIDÁCTICO MATEMÁTICO DE UNA MAESTRA EN UN CONTEXTO DE DESARROLLO DEL PENSAMIENTO NUMÉRICO

Doctoranda:

Isabel Moreno de Barreda Ribed

Directora: Dra. Edelmira Badillo Jiménez

Directora: Dra. Núria Planas Raig

Bellaterra, mayo de 2017

Dra. Edelmira Badillo Jiménez, profesora del Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales, con sede en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universitat Autònoma de Barcelona.

y

Dra. Núria Planas Raig, profesora del Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales, con sede en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universitat Autònoma de Barcelona.

HACEMOS CONSTAR QUE:

La investigación realizada bajo la dirección de las firmantes por la Licenciada Isabel Moreno de Barreda Ribed, con el título *Conocimiento didáctico matemático de una maestra en un contexto de desarrollo del pensamiento numérico*, reúne todos los requisitos científicos, metodológicos y formales exigidos por la legislación vigente para su Lectura y Defensa pública delante la correspondiente Comisión, para la obtención del Grado de Doctor en Educación por la Universitat Autònoma de Barcelona, por tanto consideramos procedente autorizar su presentación

Bellaterra, 15 de mayo de 2017

Firmado:

Educar es un acto de amor, es dar vida. Y el amor es exigente, pide utilizar los mejores recursos, despertar la pasión y ponerse en camino con paciencia junto a los jóvenes… Por eso el educador necesita, él mismo, una formación permanente.

(Papa Francisco, 13-02-2014)

Agradecimientos

Este trabajo de investigación ha supuesto un camino de cinco años en el que he ido encontrando multitud de ayudas que han hecho posible llegar hasta el final y aprender mucho durante su recorrido. No quisiera dejar de agradecer a todos los compañeros de camino, viajeros como yo hacia sus fines, pero que me será imposible nombrar en estas líneas. De todos me acuerdo y deseo corresponder como mejor puedo, ellos entienden a qué me refiero.

Explícitamente quiero agradecer la ayuda de las dos directoras, Edelmira Badillo y Núria Planas, que me han dirigido y acompañado con infinita paciencia en mis decisiones. En bastantes ocasiones me han tenido que advertir que había que rectificar el camino emprendido, otras me han dejado toparme con un muro para aprender en qué consiste investigar en Ciencias Sociales. Pero también me han sabido animar e impulsar para avanzar. He aprendido mucho de las dos, muchas gracias.

A los profesores y personal del Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales de la Universitat Autònoma de Barcelona también les debo un gran agradecimiento. Muy especialmente a Digna Couso que, con sus sabias indicaciones y experiencia en el campo del desarrollo profesional, me ha proporcionado indicaciones muy valiosas para orientar y enriquecer el estudio. A los compañeros del Máster y del Doctorado del Departamento. También a los profesores externos, invitados a dar conferencias en el Departamento, a quienes he ido presentando mi trabajo y mis dudas. Haber participado en las actividades del Grupo de Investigación en Práctica Educativa y Actividad Matemática, –GIPEAM, 2014 SGR 972 de la *Generalitat de Catalunya*– me ha permitido participar en los *Divendres de Recerca* y en Proyectos como EDU2012-31464, "Análisis de entornos colaborativos de aula desde la perspectiva de su mediación en la construcción discursiva de conocimiento matemático" y EDU2015-65378-P, "Construcción de conocimiento matemático escolar. Discurso del profesor y actividad de enseñanza", financiados por el Ministerio de Economía y Competitividad que han ampliado mi experiencia investigadora.

Muy especialmente quiero agradecer al Colegio Mare de Déu de Lourdes, que me abrió las puertas, no solo durante la intervención formativa, sino siempre que lo necesité. La apertura y buena disposición que el director y los maestros han demostrado en todo momento me ha admirado profundamente. Y en particular quiero enfatizar el trabajo y dedicación de Lourdes Cazorla. Me ha encantado trabajar con ella, siempre dispuesta a que le interrumpiese con las cámaras en sus clases y a que la entrevistase en sus horas libres. He aprendido mucho de su deseo de ser buena maestra y su humildad para preguntar e iniciar nuevos caminos. Sin ella no hubiese sido posible presentar nada de lo que se propone.

A las Religiosas de la Compañía del Salvador, especialmente a mi Comunidad, a mi familia, amigos y a las colegialas del Colegio Mayor Mater Salvatoris, que han sufrido mis ausencias y encierros para terminar este trabajo; al Maestro que siempre me acompaña, ¿cómo agradecer tanto beneficio recibido?

Resumen

El trabajo de tesis doctoral “Conocimiento didáctico matemático de una maestra en un contexto de desarrollo del pensamiento numérico” constituye una aportación a la investigación en Didáctica de las Matemáticas en el dominio del desarrollo profesional del profesor. Se adopta un posicionamiento que considera la complejidad del conocimiento profesional del maestro en relación con el contenido, la enseñanza y los estudiantes. La tesis estudia el caso de una maestra de primaria a lo largo de una intervención formativa que dura tres años. El estudio busca responder a las siguientes preguntas:

¿Qué conocimiento didáctico matemático de una maestra acerca de la multiplicación podemos observar mediante contextos de reflexión sobre la práctica vinculados a una intervención formativa?

¿Cómo esta intervención formativa influye en el desarrollo de dicho conocimiento?

La respuesta a la primera pregunta se realiza en tres fases: la primera fase idéntica contenidos matemáticos relevantes relacionados con la multiplicación. El estudio ilustra un incremento en la complejidad del conocimiento al articularse cada vez más contenidos matemáticos relevantes. Sin embargo, se observa una diferencia entre la fundamentación de diferentes contenidos matemáticos relevantes, siendo débil la conceptualización de la multiplicación.

La segunda fase desglosa el conocimiento didáctico matemático utilizando una codificación fundamentada en datos. Esto lleva a una caracterización preliminar del conocimiento en términos de la práctica de la enseñanza y del conocimiento de los estudiantes. Respecto a la enseñanza, hay una creciente identificación y uso de estrategias para enseñar contenidos así como una reflexión sobre qué enseñar y cómo enseñarlo. Respecto a los estudiantes, la maestra incrementa ligeramente la identificación de las relaciones entre el contenido y el conocimiento de los estudiantes.

La tercera fase define cuatro indicadores de desarrollo en orden a identificar cambios en acercamiento de la maestra al contenido didáctico. El estudio identifica un progreso en el desarrollo profesional de la maestra fuertemente vinculado a la reflexión y a la práctica de la enseñanza.

Con respecto a la segunda pregunta el estudio muestra que cada instrumento formativo propicia uno o más de los indicadores de desarrollo siempre que se considere en conjunto con el resto de instrumentos.

En conclusión, este estudio muestra que el éxito de una intervención formativa se vincula a la habilidad de provocar preguntas sobre la práctica de enseñanza que conduzcan a incorporación en la propia práctica y promuevan nuevas preguntas y nuevas prácticas; creando una espiral de desarrollo del conocimiento didáctico matemático.

Abstract

The PhD Thesis "Didactic mathematical knowledge of a teacher in the context of the development of numerical thinking" is a contribution to the research on Didactics of Mathematics for the teacher's professional development. The theoretical frame considers three dimensions of complexity in the professional knowledge of the teacher: the content, the pedagogy and the students. The thesis studies a case of a primary school teacher during a formative intervention that lasts 3 years. The study aims to answer the following questions:

Which didactic mathematical knowledge on the topic of multiplication can be observed when a teacher is asked to reflect on the teaching practice during a formative intervention?

How does this formative intervention affect the development of such knowledge?

The answer to the first question is done in three phases. The first phase identifies the relevant mathematical contents on the topic of multiplication. The study shows that along the duration of the intervention the teacher introduces more relevant mathematical contents, illustrating an increment of her mathematical knowledge. However, it also shows that some fundamental conceptualisations of the multiplication are weak or absent.

The second phase decomposes the didactic mathematical knowledge using a codification grounded on data. This leads to a preliminary characterisation of didactic knowledge both in terms of teaching practices and the understanding of the students. The study finds an increasing use of different teaching strategies as well as a reflexion on the choice of what to teach and how the teach it. With respect to the students, the teacher becomes slightly aware of the relationship between the content and the students' understanding.

The third phase defines four development indicators in order to identify changes in the teacher's approach to the didactic content. The study identifies progress in the

professional development of the teacher that heavily relies on the reflexion and the teaching practice.

With respect to the second question, the study shows that each formative instrument increases one or more of the development indicators as long as such an instrument is considered in conjunction to the rest of instruments.

In conclusion this study shows that the success of a formative intervention relies on the ability of provoking questions over the teaching practice that will be later incorporated to the practice itself and will lead to more questions and new practices, creating an spiral of development on the didactics of mathematical knowledge.

Tabla de Contenidos

Índice de Figuras

Índice de Tablas

1 Introducción

La tesis doctoral *Conocimiento didáctico matemático de una maestra en un contexto de desarrollo del pensamiento numérico*, se sitúa en el área de investigación en Educación Matemática, dentro del Programa de Doctorado en Didáctica de las Matemática y de las Ciencias de la Universitat Autònoma de Barcelona. El trabajo se enmarca en la línea de investigación sobre desarrollo profesional del profesorado de matemáticas, centrada en el tópico de estrategias de multiplicación basadas en el sistema decimal posicional.

La dificultad de muchos estudiantes de bachillerato y universidad con las matemáticas hizo preguntarme por el origen de esa dificultad, que intuitivamente solía asociar a conceptos básicos pertenecientes a los primeros cursos de enseñanza. Simultáneamente a esta experiencia con estudiantes adolescentes, dos coordinadoras de estudios correspondientes a los niveles de P5 de Infantil y los tres primeros cursos de Primaria me pidieron orientación para dotar de sentido a las matemáticas que se enseñan en esas edades. El trabajo con estas coordinadoras repercutía después en un trabajo con las maestras de aula que eran las que llevaban a la práctica esas orientaciones. Ahí se vieron diferentes actitudes de las profesoras: el deseo de algunas de dotar de sentido a las matemáticas que enseñan, la reticencia al cambio de otras y, en todas, algunas dificultades al incorporar cambios para los que muchas veces no se creen preparadas. Esta dificultad se agrava con los continuos cambios curriculares que experimentan bastantes países, particularmente España.

Al iniciar los estudios de doctorado, se me propuso participar en un proyecto europeo TRACES, *Transformative Research Activities Cultural Diversities and Education in Science,* que se desarrollaba en el seno del VII Proyecto Marco de la Comisión Europea *"Science in Society*". Su objetivo era analizar la distancia entre la investigación educativa en ciencias y matemáticas y la práctica docente, proponiendo actividades de investigación transformativas. En este sentido se pretendía, por un lado, ver hasta qué punto diferentes propuestas para mejorar la enseñanza de las ciencias y matemáticas, en base a la investigación en didáctica, son transformativas de la práctica educativa y, por otro, estudiar condiciones que favorecen esta transformación.

Ese proyecto cuadraba con mi interés. Así que decidí enmarcar la investigación en el campo de la formación del profesor en ejercicio. Más adelante, el estudio entró a formar parte del conjunto de trabajos que se desarrollan en el Grupo de Investigación en Práctica Educativa y Actividad Matemática –GIPEAM, 2014 SGR 972 de la *Generalitat de Catalunya*; en particular, dentro de los Proyectos EDU2012-31464, "Análisis de entornos colaborativos de aula desde la perspectiva de su mediación en la construcción discursiva de conocimiento matemático" y EDU2015-65378-P, "Construcción de conocimiento matemático escolar. Discurso del profesor y actividad de enseñanza", Gobierno de España.

Los sucesivos proyectos de investigación del equipo a lo largo de estos años han centrado su interés en el análisis de prácticas de alumnos y profesores en el aula de matemáticas, en colaboración con grupos de maestros y profesores de matemáticas que permiten no solo tomar datos en sus clases sino también aportar perspectivas complementarias en el análisis. A raíz de esta colaboración y de las demandas de maestros y profesores, se incluyó en el grupo un nuevo centro de interés, el del desarrollo profesional del profesorado en matemáticas, que da origen a este estudio.

Mi experiencia con los profesores, previa a esta investigación y la que he adquirido durante la misma, me confirma en la complejidad del desarrollo profesional. Ponte (2009) destaca la diferencia entre aprendizaje del profesor y su desarrollo profesional y se pregunta la manera de dejarse iluminar por la investigación de manera que se encuentren caminos formativos. En esta línea Ponte (2012) se pregunta sobre la posibilidad de una formación dirigida al desarrollo profesional que "articule las contribuciones derivadas de la investigación en educación matemática con lo que se sabe sobre la naturaleza del desarrollo profesional" (p. 91). Este autor propone tres ideas clave para buscar formas que favorezcan los procesos de desarrollo profesional: "Colaboración, la práctica como punto de partida de la formación y la investigación sobre la práctica como proceso clave en la construcción de conocimiento" (p. 92). Esta tesis busca aportar un grano de arena en este campo vastísimo y fundamental.

Para tratar de contribuir al estudio del desarrollo profesional, el primer capítulo plantea la problemática y las preguntas de investigación que guían el trabajo. El segundo capítulo contiene dos partes: una aproximación a los resultados de investigación sobre el tópico matemático que articula el estudio; y una síntesis de investigaciones sobre desarrollo profesional del profesor de matemáticas, con énfasis en el conocimiento matemático del profesor. Las dos partes de este capítulo iluminan el diseño de los instrumentos de recogida y de análisis de datos; esto se expone en el tercer capítulo. Los resultados del análisis vienen recogidos en el cuarto capítulo. Siguen las conclusiones, en el quinto capítulo, que permiten sintetizar lo logrado y formular respuestas a las cuestiones iniciales, que a la vez abren nuevas preguntas y supuestos.

1.1. Problemática del estudio

El papel del profesor en el aula se ha considerado desde puntos de vista diferentes a lo largo de la historia. Dentro de la diversidad de perspectivas, cada vez es más reconocida la importancia de la enseñanza y por ende en el aprendizaje (Adler, Ball, Krainer, Lin, y Novotná, 2005; Lin y Rowland, 2016). En este sentido, el desarrollo profesional del docente se ve unido al desarrollo de la educación y mejora del aprendizaje de los estudiantes.

Krainer (1999) considera que el desarrollo profesional es consecuencia de una mayor conciencia, por parte de los profesores, de los factores que influyen en los fenómenos educativos. A esto contribuye una progresiva mejora en la comprensión de su propia práctica profesional. Por ello, la reflexión se considera un elemento clave en el desarrollo, al asumirla como un medio por el cual los profesores continúan aprendiendo sobre la enseñanza y sobre sí mismos como profesores (Llinares y Krainer, 2006).

A lo largo de las últimas décadas, numerosas investigaciones se han centrado en el papel de la formación, inicial y permanente, del docente en el proceso de enseñanza y aprendizaje (Lin y Rowland, 2016; Llinares y Krainer, 2006; Villegas-Reimers, 2003). La escasa formación específica que reciben los maestros de primaria, particularmente en España, hace que se cuestione la adecuada comprensión de los contenidos y procesos matemáticos en los maestros en ejercicio (Rico, Gómez y Cañadas, 2014). Como señalan Adler, Ball, Krainer, Lin y Novotná (2005):

> Por distintas razones, muchos profesores en ejercicio no han aprendido algunos de los contenidos que están obligados a enseñar o los han aprendido de manera limitada y condicionada *..+Las diferentes reformas curriculares han llevado a que muchos profesores tengan que enseñar un currículo muy distinto de aquel para el que fueron educados (p. 361).

Se pone de manifiesto la necesidad de una formación permanente que potencie la competencia docente. El papel de la formación permanente del profesor como factor determinante en el proceso de enseñanza y aprendizaje ha sido centro de numerosas investigaciones y de disposiciones legales (Guskey, 2002). Concretamente, en la Ley Orgánica de Educación de 2006 se dedica el Artículo 102 a la formación permanente:

> (1) La formación permanente constituye un derecho y una obligación de todo el profesorado y una responsabilidad de las Administraciones educativas y de los propios centros, (2) Los programas de formación permanente, deberán contemplar la adecuación de los conocimientos y métodos a la evolución de las ciencias y de las didácticas específicas, *…+ encaminados a mejorar la calidad de la enseñanza y el funcionamiento de los centros (MEC, 2006, p. 17184).

El desarrollo profesional se puede estudiar de maneras diversas. Todas son complementarias, pero no abarcables en profundidad en un solo estudio. La opción que aquí se propone es la de analizar aspectos del conocimiento didáctico matemático manifestado en contextos de reflexión y colaboración en comunidad. Contextos que enriquecen el mismo conocimiento.

Shulman (1986, 1987) ha mostrado la complejidad del conocimiento profesional de los profesores distinguiendo distintas componentes. El conocimiento profesional de los maestros conjuga de manera especial la didáctica y el contenido, por esto afirman Ponte y Chapman (2006) que una profundización en los contenidos que busque mejorar prácticas de aula debe hacer énfasis en las matemáticas a enseñar y su gestión. El enfoque principal de esta tesis se centra en el conocimiento didáctico matemático que se manifiesta en la reflexión sobre la práctica. Como se verá a lo largo del estudio, se considera que la identificación de ciertas diferencias a la hora de manifestar un conocimiento didáctico matemático evidencia un desarrollo profesional del profesor.

1.2. Preguntas de investigación y objetivos

Para contribuir a la investigación sobre desarrollo del conocimiento didáctico matemático, visto desde el horizonte del desarrollo profesional del profesor, se plantean dos preguntas:

> ¿Qué conocimiento didáctico matemático de una maestra acerca de la multiplicación podemos observar mediante contextos de reflexión sobre la práctica vinculados a una intervención formativa?
>
> ¿Cómo esta intervención formativa influye en el desarrollo de dicho conocimiento?

Como pone de manifiesto la primera pregunta, para abordar el conocimiento didáctico del contenido se adopta una perspectiva de reflexión sobre la práctica. No se entra a observar y analizar la práctica de aula, sino que nos ceñimos a una mirada sobre la misma, ya sea en un ambiente de reflexión conjunta ya de reflexión individual.

El tópico matemático de la investigación está también parcialmente expuesto en la primera pregunta: estrategias de multiplicación basadas en el sistema decimal posicional. Esta elección lleva a centrar el estudio en los contenidos matemáticos relacionados con la multiplicación. Esta decisión responde a la necesidad de acotar el análisis con el fin de profundizar en la generación de conocimiento para el área. Otra motivación de esta elección es la relevancia de esta operación aritmética en el tercer curso de primaria, donde se recogen los datos.

La segunda pregunta centra su interés en posibles influencias de la intervención formativa en el desarrollo del conocimiento didáctico matemático. La inserción de esta pregunta lleva a abrir nuevas perspectivas de investigación en orden al diseño de formas de formación permanente que colaboren con el desarrollo profesional.

Las preguntas de investigación se concretan con fines de aplicación empírica; para ello se definen tres objetivos específicos que permiten abordar respuestas en el siguiente orden:

1. Identificar contenidos matemáticos relevantes para el aprendizaje de la multiplicación desde la perspectiva de una maestra.

2. Caracterizar el conocimiento didáctico matemático, relativo a enseñar la multiplicación, que se identifica en la maestra en contextos de reflexión sobre la práctica.

3. Discutir la influencia de una intervención formativa en los contenidos identificados y en el conocimiento caracterizado.

Los tres objetivos siguen un orden cronológico puesto que el análisis para lograr un objetivo permite iniciar el estudio del siguiente. El primer objetivo está centrado en la consideración del contenido matemático por parte de la maestra en orden a identificar conocimiento del contenido en contraste con lo que la investigación considera relevante para el aprendizaje de la multiplicación. El énfasis está en el análisis de la identificación y profundización en los contenidos matemáticos a partir de la diversificación de fuentes de datos. El segundo objetivo busca dar cuenta del conocimiento didáctico matemático a partir de la reflexión sobre la práctica, ya sea de forma individual, ya en discusiones conjuntas. Finalmente, la consecución del primer y segundo objetivo permite identificar cambios en el conocimiento didáctico de un contenido matemático de forma que se puedan examinar las relaciones de esos cambios con la intervención formativa.

2 Marco Teórico

Este estudio de tesis articula las líneas de investigación sobre conocimiento del profesor de matemáticas y pensamiento numérico. La tendencia mayoritaria de investigación en el conocimiento matemático para la enseñanza de los profesores es la de investigar la naturaleza del conocimiento que poseen y las diferentes propuestas para apoyar el desarrollo del conocimiento que tienen o carecen (Chapman, 2013). Pero el conocimiento del profesor no se considera en abstracto; de ahí la línea de investigación sobre pensamiento numérico. Esta línea es la que orienta el estudio sobre el conocimiento del profesor, en el sentido de informar sobre lo que es relevante saber: qué debería conocer el profesor sobre las matemáticas que enseña, qué secuencias o estrategias de enseñanza considera la investigación como útiles para el aprendizaje de los estudiantes, qué dificultades generales encuentran los estudiantes con ciertos contenidos.

Sigue un primer apartado sobre pensamiento numérico, y en concreto, sobre la aproximación a la multiplicación.

2.1. Aproximación a la multiplicación en Educación Primaria

Las cuatro operaciones aritméticas constituyen un contenido básico de la Educación Primaria en la que comienza a desarrollarse el pensamiento numérico de los niños. La expresión *pensamiento numérico* es relativamente reciente y no hay un claro consenso a la hora de definir qué se entiende por pensamiento numérico. En general se considera una forma de pensar y usar los números (Berch, 2005) que conlleva la capacidad para usar de manera flexible conocimientos que implican varias capacidades, incluyendo cálculo mental, estimación numérica y razonamiento cuantitativo, emitir juicios matemáticos y desarrollar estrategias de resolución de problemas complejos (Godino, Font, Konic y Wilhelmi, 2009). Una persona con un pensamiento numérico desarrollado refleja una inclinación y habilidad en el uso de números y métodos cuantitativos a la hora de comunicar, procesar o interpretar información.

Berch (2005) ofrece una lista de 30 componentes que engloban una buena adquisición del pensamiento numérico; estas componentes van desde habilidades e intuiciones básicas sobre números y operaciones hasta el desarrollo de relaciones, representaciones, nuevos procedimientos de cálculo y argumentos en base a los números, sus aproximaciones, propiedades o estructura.

Contreras, Carrillo, Zakaryan, Muñoz-Catalán y Climent (2012) examinan la competencia numérica de niños y de estudiantes para profesor mediante la vertebración de cuatro categorías de pensamiento numérico, que describen en síntesis de la siguiente manera:

(I) Comprensión de los números y sus relaciones: comprensión del significado de los números en diferentes contextos y las relaciones entre los números, de la estructura del sistema de numeración decimal y sus relaciones con los algoritmos de operaciones básicas, de la composición y descomposición variable de los números; habilidad para estimar el tamaño del número y para encontrar patrones y propiedades numéricas.

(II) Comprensión del significado de las operaciones con los números: comprensión de distintos significados asociados a las operaciones básicas, de situaciones que requieran la realización de operaciones básicas, de las relaciones entre las distintas operaciones, del efecto sobre los números de las distintas operaciones, de las propiedades de las operaciones.

(III) Agilidad en el cálculo mental y las estimaciones: realización correcta y fluida de cálculos, de estrategias de cálculo flexibles y variables; habilidad para estimar y juzgar la razonabilidad de resultados de los cálculos; habilidad para usar o desarrollar métodos o puntos de referencia para el cálculo.

(IV) Plantear y resolver problemas aritméticos: resolución de problemas abiertos, uso de estrategias para abordar la resolución de problemas, codificación de los datos del enunciado, capacidad para elegir y justificar caminos de resolución y para plantear problemas contextualizados.

El interés de este estudio se sitúa en la aplicación de conocimientos y habilidades con números y operaciones en situaciones de cálculo. A continuación se detallan algunos de los elementos más característicos que han influido en el contenido matemático básico de la tesis.

2.1.1. Sistema de numeración decimal

La investigación ha demostrado la importancia de las primeras edades en el desarrollo de las matemáticas (Clements y Sarama, 2009). El desarrollo en los niños del concepto de número es complejo (Castro, Rico y Castro, 1995). En los primeros años de la escolarización, se suelen trabajar los primeros números; más tarde se introduce el cero y poco tiempo después se introducen números que se representan por escrito con varias cifras, sin que comprendan muchas veces los fundamentos matemáticos del sistema de representación de los números. En todo este proceso de formación de la noción de número el maestro juega un papel destacado para que el aprendizaje sea significativo:

> Parece que no hay duda de que es durante el período de la educación infantil cuando se va desarrollando lentamente la noción de número y la escuela tiene influencia sobre los niños durante este período, por lo que los profesionales de la enseñanza han de estar preparados para ayudar a sus alumnos en este aprendizaje de manera que se lleve a cabo de forma significativa (Castro et al., 1995, p. 5).

Una expresión numérica adquiere sentido dentro de un contexto. La coordinación de los diferentes contextos en los que aparecen las palabras numéricas ayuda a formar en el niño el concepto de número. Estos contextos son, en síntesis: el conteo, la comparación, la secuencia numérica, la ordinalidad, la cardinalidad y la medida (Zazkis y Mamolo, 2016).

El conocimiento temprano del número incluye cuatro aspectos interrelacionados según Clements y Sarama (2009): reconocer y nombrar cantidades en un pequeño conjunto de objetos (cuando se efectúa instantáneamente, se llama subitización); aprender los nombres y ordenar la lista de palabras numéricas hasta el diez y más allá; enumerar objetos y comprender que la última palabra numérica dicha se corresponde al número de objetos contados. Estos aspectos, que se empiezan a experimentar por separado, se van conectando a lo largo de las primeras edades.

El aprendizaje del cero, en particular, tampoco es trivial. El hecho de que la secuencia numérica y el recuento suela comenzar desde el uno, y de que en el contexto de medida no tenga sentido hablar de medida cero, aumenta la dificultad de su aprendizaje. El cero adquiere sentido en el contexto cardinal al ser considerado como cardinal del conjunto vacío (Castro et al., 1995). Según las trayectorias de aprendizaje para el reconocimiento de los números y la subitización propuestas por Clements y Sarama (2009), entre los 3 y 4 años los niños suelen aprender a utilizar el cero para representar la ausencia de objetos, aunque todavía están lejos de comprender las reglas que conlleva este número. El reconocimiento inmediato de los números hasta el 10, tanto perceptual como conceptualmente, ocurre sobre los 5 años.

Estos conceptos numéricos adquiridos en los primeros años –conteo de cantidades y reconocimiento de números– están en el origen del desarrollo de sistemas de numeración. En nuestro contexto, predomina el sistema posicional de origen indo arábigo, originario de la India y traído a Europa por los árabes. Este sistema ha destacado por ser una herramienta poderosa para la representación de números y para el cálculo de operaciones. El desarrollo histórico del sistema indo arábigo se puede establecer en cuatro pasos según Nataraj y Thomas (2009):

- Representación verbal de números. Por ejemplo, mil ciento diez. Los números se escriben con palabras sin usar el principio del valor de posición.
- Notación de números con dígitos para números pequeños, mientras los grandes se siguen representando con palabras. Antes del valor posicional, los números se escriben con principios aditivos y multiplicativos del tipo 2x100+20+20+20+10+4.
- Principio de valor posicional. El sistema de valor posicional se desarrolla cuando números de sucesivas potencias de diez se asocian con el valor de la posición del número ordenado de derecha a izquierda.
- Aparición del cero. Se completa el valor posicional de las cifras.

El sistema de numeración decimal posicional actual se caracteriza por: el valor posicional de sus cifras, el uso de la base diez, el uso del cero y la propiedad aditiva de los números en su notación (Tempier, 2016). Estas propiedades, que se explanan a continuación, hacen eficiente el sistema y contribuyen a desarrollar el pensamiento numérico.

Por valor posicional de las cifras se entiende que el valor de un dígito depende de la posición que ocupe en el número, por ejemplo el 3 de 431 se llama tres decenas o treinta y tiene un significado matemáticamente diferente del 3 de 314. Un error típico de los estudiantes con dificultad en la comprensión del valor posicional de las cifras puede verse reflejado en el cálculo de la suma “con llevadas” (ver Figura 1).

Utilizar como base del sistema de numeración la base diez implica que solo se requieren diez cifras diferentes para representar cualquier número, con lo que el ejercicio de memorización de símbolos es reducido.

El principio decimal consiste en que cada unidad de la numeración (unidades, decenas, centenas…) corresponde a diez unidades del orden inferior.

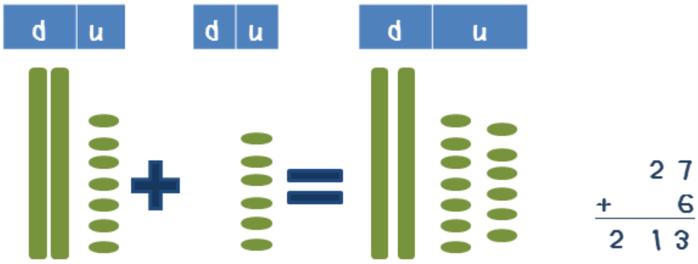


Figura 1. Ejemplo de error en una operación ligado al valor posicional

La propiedad aditiva de los números en su notación permite representar un número como suma de unidades de diferente orden, por ejemplo, 341 es la suma de 300+40+1. Verschaffel y De Corte (1996) confirman la necesidad de integrar el conocimiento del nombre del número (trescientos cuarenta y uno), el del numeral (341) y las cantidades y nombres de la base (3 centenas, 4 decenas y 1 unidad) para comprender el valor posicional.

La elaboración del esquema parte-todo, donde los números son composiciones de números, ayuda a desarrollar la comprensión del sistema de numeración decimal. La aplicación del esquema parte-todo se aplica en términos de posición, viendo cada unidad como compuesto de unidades de orden inferior. Construir la comprensión del esquema parte-todo enseña a los niños a separar en partes los números según diferentes combinaciones. La adquisición de este esquema permite entender la conmutatividad, la propiedad aditiva y la asociatividad, con lo que supone el punto de partida para la aritmética y el trabajo de estrategias (Clements y Sarama, 2009).

Resnick (1983) identifica tres fases en el desarrollo de la comprensión del sistema decimal posicional. Primero, solo se reconoce la descomposición en unidades y decenas; y después en centenas, millares y otros órdenes; así se cuenta de diez en diez, se suman y restan decenas y se separa un número en decenas y unidades. Luego, se reconocen otras composiciones no canónicas de los números para lo que ayudan referentes concretos y equivalencias de unidades de diferentes órdenes. Por último, se aplica el esquema parte-todo a la aritmética escrita, es decir, al uso de las propiedades de los números para la comprensión de los algoritmos de operaciones con números naturales. Esta tercera fase introduce la relación entre números mediante operaciones.

2.1.2. Operaciones y algoritmos: la multiplicación

El interés por los contextos numéricos no se agota con la expresión simbólica de los números. Hay una necesidad primordial diferente del recuento y la cantidad que son las acciones, relaciones y transformaciones cuantitativas que pueden realizarse con los objetos. Estas acciones se ven reflejadas en las operaciones numéricas. Las operaciones numéricas dan potencialidad al número y establecen conexiones entre números dotándolos de estructura.

Fischbein, Deri, Nello y Marino (1985) afirman que las operaciones aritméticas suelen ir asociadas a un implícito modelo intuitivo que media y restringe la resolución de problemas. Castro, Rico y Castro (1995), basándose en resultados de la investigación, establecen seis etapas en el aprendizaje de las operaciones: I) acciones y transformaciones en distintos contextos numéricos; II) uso de modelos a partir de relaciones y transformaciones de números; III) simbolización de la operación que represente todos los modelos; IV) hechos numéricos y su expresión canónica en tablas; V) algoritmos de cálculo de la operación de números; VI) aplicación a la resolución de problemas.

De las cuatro operaciones aritméticas básicas, este estudio se centra en la multiplicación. Algunas definiciones y representaciones de la multiplicación son las siguientes:

Desde la teoría de conjuntos se define el número como el cardinal de los conjuntos equipolentes entre ellos, con lo que el producto de dos números naturales, es decir, el producto de dos cardinales, se define como el cardinal del conjunto ‘producto cartesiano’.

$$Card(A) \cdot Card(B) = Card(A \times B)$$

Esta definición se relaciona con la representación de la multiplicación según un rectángulo donde el resultado de la operación es el área del rectángulo cuya base es el multiplicando y la altura es el multiplicador (Castro et al., 1995). Esta representación permite extender la multiplicación al conjunto de números reales. La teoría de conjuntos permite demostrar las propiedades de la multiplicación, conmutativa, asociativa, distributiva respecto de la adición, existencia del elemento neutro 1 y del elemento absorbente 0.

Otra definición de la multiplicación entre números naturales consiste en la siguiente recurrencia, relacionada con la representación de la multiplicación como una suma repetida:

$$0 \cdot x = 0$$

$$1 \cdot x = x$$

y para todo $n \geq 0, (n+1) \cdot x = n \cdot x + x$

La representación de la suma repetida $n \cdot x = \underbrace{x + x + ... + x}_{n.veces}$ es fácil de contextualizar a partir de material concreto. Este modelo suele corresponderse al modelo intuitivo que generalmente se utiliza para la multiplicación (Fischbein et al., 1985). Sin embargo esta definición conlleva inconvenientes:

- Dificulta la demostración de la propiedad conmutativa, puesto que $3 \times 5 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3$ tiene una interpretación diferente de $5 \times 3 = 5 + 5 + 5$.
- Dificulta la extensión de la multiplicación al conjunto de los números reales: es difícil comprender que significa sumar $0{,}59$ veces el número 3.
- Como consecuencia de tener que restringir el multiplicador a los números enteros, se facilita el supuesto de que el resultado de la multiplicación es mayor que los factores.

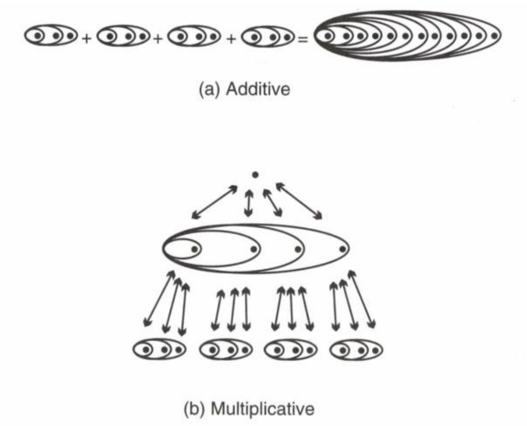


Figura 2. Representación de la multiplicación como suma repetida y según el esquema de correspondencia (Clark y Kamii, 1996, p. 42)

El pensamiento multiplicativo conlleva un grado de abstracción mayor que el pensamiento aditivo. La estructura multiplicativa, si bien puede relacionarse en ocasiones con la aditiva, no es reducible a aspectos aditivos, como por ejemplo en problemas de producto cartesiano y de proporcionalidad (Fernández y Llinares, 2012). Las investigaciones de Clark y Kamii (1996) y de Park y Nunes (2001) sostienen que la operación multiplicación se basa en el esquema de correspondencia y afirman que explicarlo de esta forma ayuda más a la comprensión de la operación por parte de los estudiantes que la suma repetida.

Comprender la multiplicación va más allá de calcular. Se debe comprender que la multiplicación puede usarse en diferentes situaciones, además de comprender las propiedades de la multiplicación y las relaciones entre multiplicación y suma o división.

Un algoritmo se puede considerar como una serie finita de reglas y normas basadas en principios matemáticos –que pueden no ser manifiestos en la enseñanza– que permiten operar según un orden cualquier pareja de números y cuya aplicación garantiza la obtención de respuestas de un mismo tipo de problemas (Gallardo, 2004). Los algoritmos se suelen utilizar en las operaciones con números grandes que dificultan el cálculo mental. El algoritmo se caracteriza según Castro, Rico y Castro (1995) por la nitidez del proceso mecánico, por la eficacia en la obtención del resultado tras un número finito de pasos simples y por la universalidad en la aplicación a situaciones de un mismo tipo.

La comprensión del valor posicional es necesaria para comprender, aprender y usar los algoritmos de las operaciones aritméticas (Clements y Sarama, 2009). Sin embargo, la forma habitual de enseñar los algoritmos matemáticos básicos en primaria suele vaciar de valor posicional las cifras operando con cada dígito como si fuesen unidades aisladas. Se espera que el estudiante agilice el cálculo y recupere el sentido del número completo al terminar el algoritmo. Pero los resultados de la investigación demuestran que muchas veces el estudiante aprende una mecánica exenta de significado y no reconoce errores en el procedimiento (Clements y Sarama, 2009).

Según Sowder (1992), una escasa comprensión del valor posicional es causa de la mayoría de los errores computacionales en los algoritmos de las operaciones básicas con números naturales e incluso, en niveles escolares superiores, de las dificultades de los estudiantes en la comprensión de los números decimales. Clements y Sarama (2009) añaden la importancia de un sólido conocimiento de las propiedades y procedimientos de conteo como herramientas que facilitan el uso de algoritmos y su adaptación a cada situación.

El tema de la enseñanza de los algoritmos y, en concreto, del algoritmo de la multiplicación por números de varios dígitos, sigue teniendo interés en la investigación por varias razones. Por una parte, la generalidad del uso de estos procedimientos operatorios en las escuelas de la gran mayoría de países. Por otra, la constatación de que muchos profesores o estudiantes para profesor no son capaces de explicar versiones no habituales del algoritmo de la multiplicación por dos dígitos, hecho que puede indicar una ausencia de comprensión de las matemáticas necesarias para justificar el algoritmo (Clivaz, 2012).

Existen multitud de algoritmos de la multiplicación. Estos suelen compartir el uso de las propiedades matemáticas de la multiplicación, pero se distinguen por la disposición de los elementos. Considerando lo tratado en este estudio, se señalan el algoritmo estándar y la multiplicación en columna que se detallará más adelante (ver Figura 3).

1 2 3	1 2 3
X 4	X 4
^{1}2	1 2
8	+ 8 0
4	4 0 0
4 9 2	4 9 2
Algoritmo estándar	Multiplicación en columnas

Figura 3. Cálculo algorítmico

2.1.3. Estrategias de cálculo

En este apartado se pretende establecer las bases que relacionan el cálculo de la multiplicación con el sistema decimal posicional. Aunque entendemos que hay otras formas válidas y útiles de calcular la multiplicación, que conviene desarrollar en los estudiantes para ofrecerles una visión completa del cálculo. En ocasiones se ha distinguido entre estrategia, método y procedimiento en el cálculo, en este estudio se utilizan estas palabras de manera indistinta.

El interés por el desarrollo de estrategias de cálculo mental, como afirma Gómez (2005), viene de la ayuda que ofrece para dotar de sentido al concepto de número y las operaciones con los mismos. Además, Gómez (2005) considera el trabajo de estrategias de cálculo como un dominio privilegiado para el trabajo colectivo en clase de forma que el maestro pueda acercarse al conocimiento y actividad matemática de sus estudiantes. Este acercamiento permite observar los esquemas intuitivos del pensamiento multiplicativo que poseen los estudiantes antes de la instrucción formal y que el profesor debería analizar para orientar la enseñanza (Zazkis y Mamolo, 2016).

Según Sowder (1992), el cálculo mental es un proceso no escrito de realización de una operación aritmética, consistente en procedimientos variables y flexibles, no uniformes que permiten adaptarse a las propiedades de los números en cuestión, así como procedimientos activos y constructivos. Frente al concepto de algoritmo, el de aritmética es un cálculo diestro y flexible basado en relaciones numéricas conocidas y características de los números. Se trata pues de un posicionamiento práctico hacia los números donde se trabaja con valores del número y no con dígitos, se usan propiedades de cálculos elementales y relaciones numéricas tales como la propiedad conmutativa, distributiva, asociativa o relaciones inversas de las operaciones, y donde se supone una comprensión de los números, hasta veinte y hasta cien (Buys, 2008). Por cálculo flexible se entiende que la estrategia de resolución escogida se adapta apropiadamente a las características del problema o tarea, que el cálculo es rápido y correcto, y que da cuenta de una apropiación de los elementos cognitivos que sustentan la estrategia de resolución (Nunes, Vargas, Lin y Rathgeb-Schnierer, 2016).

En Gómez (1995) se propone la reflexión sobre el uso de estrategias de cálculo no tradicional (método de columnas) para promover el énfasis en propiedades, lenguaje y relaciones numéricas. Se afirma que así se consigue mejorar el conocimiento de procedimientos aritméticos como medio de expresión significativa y no automática de acciones sobre los números. Además, se considera la conveniencia de "discutir acerca de las ventajas e inconvenientes de un método u otro, poner de relieve el significado o el trasfondo de los pasos que se siguen, traducirlos al lenguaje horizontal de igualdades y paréntesis para unificar la descripción, la explicación, y el ejemplo, facilitar el uso de los hechos del sistema de numeración, y aplicar las propiedades y alteraciones invariantes de las cuatro operaciones" (Gómez, 2005, p. 24).

Una buena automatización de la multiplicación que promueva su comprensión y el desarrollo del pensamiento numérico, requiere por una parte de una explicitación de las agrupaciones y descomposiciones que se consideran en cada momento. Por otra parte, se requiere identificar la cantidad que representa cada dígito según la posición que ocupa; finalmente las propiedades de las operaciones (conmutativa, asociativa, distributiva y elemento neutro) están en la base de la creación y eficacia de los algoritmos. La investigación demuestra que los estudiantes pueden trabajar las operaciones sin comprender las propiedades, pero esta comprensión se ha de desarrollar para llegar a comprender las operaciones y realizarlas de manera eficiente (Gómez, 2005).

La multiplicación por 10 es una operación reiterativa en la aplicación de los algoritmos y una estrategia frecuente en el cálculo de operaciones. Según (Clivaz, 2012), muchos profesores utilizan la regla del cero explicando que multiplicar por 10 es añadir un cero a la derecha, aunque esta explicación solo es válida con números enteros. De forma general, el cálculo de la multiplicación por 10 se basa en la descomposición aditiva canónica y en las propiedades asociativa y distributiva.

$$Si\ a \overset{escrito\ en\ la\ forma\ canónica}{=} a_0 \cdot 10^0 + a_1 \cdot 10^1 + \cdots + a_n \cdot 10^n$$ entonces

$$a \cdot 10 = (a_0 \cdot 10^0 + a_1 \cdot 10^1 + \cdots + a_n \cdot 10^n) \cdot 10 \overset{propiedad\ distributiva}{=}$$

$$= a_0 \cdot 10^0 \cdot 10 + a_1 \cdot 10^1 \cdot 10 + \cdots + a_n \cdot 10^n \cdot 10 \underset{propiedades\ de\ las\ potencias}{\overset{propiedad\ asociativa}{=}}$$

$$= a_0 \cdot 10^1 + a_1 \cdot 10^2 + \cdots + a_n \cdot 10^{n+1} \overset{puesto\ el\ número\ en\ la\ forma\ canónica}{=}$$

$$= 0 \cdot 10^0 + a_0 \cdot 10^1 + \cdots + a_n \cdot 10^{n+1}$$

Figura 4. Desarrollo polinómico de la multiplicación por diez

Desde el punto de vista de la numeración puede considerarse como un aspecto posicional, cada cifra aumenta de orden, (las unidades pasan a ser decenas, las decenas pasan a ser centenas, etc.). Es decir, si consideramos la tabla de números (ver Tabla 1), multiplicar por 10 sería desplazar cada cifra a la columna de la izquierda. Si el número fuese entero -con lo que queda vacía la cifra de unidad- se rellena con un cero la casilla de unidades.

Centena de mil	Decena de mil	Unidad de mil	Centena	Decena	Unidad	Décima	Centésima	Milésima
100.000	10.000	1.000	100	10	1	0,1	0,01	0,001

Tabla 1. Números en el sistema decimal posicional

Lemaire y Siegler (1995) consideran que la identificación de los cambios en el uso de estrategias permite dar cuenta de desarrollo en el aprendizaje de la multiplicación. Estos autores proponen dimensiones de cambio que informar en este sentido: qué estrategias se usan y cuándo, y cómo se eligen y ejecutan. La identificación de cambios en el uso, frecuencia, ejecución y elección de estrategias de cálculo puede informar tanto sobre los alumnos como sobre los profesores.

2.2. Aproximación al conocimiento del profesor de matemáticas

Una vez expuesta brevemente la línea de investigación sobre pensamiento numérico que concierne al presente estudio, se expone a continuación el posicionamiento teórico de esta tesis respecto del conocimiento del profesor.

Aunque las palabras profesor y maestro no son equivalentes y, en nuestro contexto, dan a entender que su labor se dirige a estudiantes de diferentes edades; en este capítulo, nos referimos indistintamente a profesor y maestro. Hacemos referencia a las matemáticas, aunque parte de lo que se dice se puede trasladar a otros campos del saber.

El desarrollo profesional influye en la calidad de la educación y en la transformación de las prácticas de aula. Esta idea se apoya en los resultados de la investigación en didáctica de la matemática, que desde hace décadas han ido mostrando mayor interés por el maestro como factor clave para la mejora de la educación (Lin y Rowland, 2016).

El desarrollo profesional es un concepto amplio. Se considera un proceso de crecimiento a lo largo de toda la vida que abarca múltiples aspectos y que se puede impulsar desde la formación (Llinares y Krainer, 2006). Shulman y Shulman (2004) describen al profesor experto como miembro de una comunidad profesional, preparado, dispuesto y capacitado para enseñar y aprender de su experiencia docente (p. 259).

Guskey (2002) enfatiza los procesos y actividades del desarrollo profesional en orden a impulsar el conocimiento profesional, habilidades y actitudes de educadores de forma que estos puedan favorecer el aprendizaje de estudiantes. El hecho de que el crecimiento continuado de los profesores se pueda impulsar desde la formación ha provocado que a menudo desarrollo profesional se haya considerado como sinónimo de formación del profesorado. Sin embargo, desarrollo profesional y formación son nociones próximas pero no equivalentes, aunque en la literatura parece haber confusión de términos (Ponte, 1998).

Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán (2007) comparan el desarrollo profesional como una hélice por la que el profesor va moviéndose a lo largo de su ejercicio profesional. En esta hélice el contexto de las intervenciones formativas proporciona entornos de aprendizaje que permiten al profesor progresar en su profesión. La manera de plantear las intervenciones formativas que buscan fomentar el desarrollo profesional, sobre todo cuando se dirige a profesores en ejercicio, ha sufrido una transformación importante en los últimos treinta años. Hoy en día, se entienden los programas de desarrollo profesional como los esfuerzos sistemáticos para lograr cambios en la práctica de los maestros, en sus actitudes y creencias y en los resultados del aprendizaje de los alumnos (Guskey, 2002).

Llinares y Krainer (2006) compilan estudios del desarrollo profesional a lo largo de tres décadas en el contexto del Grupo Internacional de Psicología de la Educación Matemática (IGPME). Resumiendo los objetivos planteados para el desarrollo profesional en el sentido de formación, destacamos los siguientes:

- Sensibilizar a los maestros con el contenido matemático y los procedimientos matemáticos de las tareas.
- Procurar cambios en las creencias y propuesta de tareas.

- Promover la reflexión en la práctica y el trabajo colaborativo que permita la construcción de un conocimiento compartido.

Esta manera de entender la formación se caracteriza por considerar al profesor como un aprendiz activo; además se concibe como un proceso formativo a largo término y situado en un contexto determinado, basado en la reflexión y colaboración, y que parte de las necesidades particulares de los profesores (Villegas-Reimers, 2003). En este ámbito de investigación, se reconoce la relevancia de la relación, en ambos sentidos, entre comunidad profesional y profesor, tal como plantean Shulman y Shulman (2004). Según estos autores, las dimensiones individual y comunitaria están en continua interacción y se determinan mutuamente de forma que el cambio de una de las dimensiones (individual o comunitaria) influye y produce un cambio en la otra.

De acuerdo con esto, se entiende desarrollo profesional en matemáticas como un proceso de crecimiento en los aspectos que capacitan al profesor para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de sus estudiantes, como son conocimientos matemáticos y didácticos, gestión del aula y del conocimiento. Crecimiento que puede ser impulsado por la formación, la reflexión y la relación con la comunidad.

2.2.1. Conocimiento pedagógico del contenido

Gran parte de las investigaciones sobre desarrollo profesional centran su interés en comprender cómo aprenden los profesores, dadas qué oportunidades y bajo qué condiciones; y, en consecuencia, en impulsar oportunidades de aprendizaje (Adler et al., 2005; Chapman, 2013). Uno de los argumentos a favor del estudio de oportunidades de aprendizaje de los profesores en ejercicio es el hecho de que los maestros de primaria en formación reciben una escasa formación específica en la universidad (Rico, Gómez y Cañadas, 2014). Esto cuestiona la adecuada comprensión de los contenidos y procesos matemáticos en los maestros en ejercicio. Esta comprensión capacita a los maestros para proponer tareas matemáticas idóneas para el aprendizaje significativo de sus alumnos; aspecto crucial del quehacer del profesor que influye en el aprendizaje de los estudiantes (Llinares y Krainer, 2006).

Cuando Shulman y Shulman (2004) describen al profesor experto, consideran que la condición de estar preparado se refiere a poseer una visión de la clase y del proceso de enseñanza y aprendizaje en sí y en cada alumno en particular. Además, suponen que existe esa disposición a mantener el esfuerzo para llevar a cabo la enseñanza y para comprender conceptos y principios necesarios. Ahora bien, esta comprensión de los contenidos es compleja y ha sido centro de numerosas investigaciones.

La inclusión de la línea de investigación sobre conocimiento del profesor en el campo de la investigación sobre el profesor de matemáticas es relativamente tardía. Una parte considerablemente mayoritaria en la producción de artículos dentro de esta línea se ven influenciados por Lee Shulman y las categorías de conocimiento (Lin y Rowland, 2016).

Shulman (1986) destacó el cambio que se había producido en la demanda cognitiva de los profesores. Si al principio del siglo pasado se les evaluaba casi exclusivamente del conocimiento sobre las materias a impartir, en los años 80 las evaluaciones giraban en su mayoría sobre una pedagogía general. Shulman reclama el paradigma de las didácticas específicas cuestionando: cómo decide el maestro qué enseñar, cómo representar los conceptos y qué preguntar a los estudiantes; cómo responde el profesor a la incomprensión de conceptos por parte de los estudiantes. Estas cuestiones abrieron la puerta a un nuevo campo de investigación centrado en el conocimiento pedagógico del contenido y más en concreto a preguntarse cómo crece este tipo de conocimiento. Shulman (1986) propuso considerar tres componentes de conocimiento:

- Conocimiento del contenido: organización de los conocimientos en la mente del profesor. Se incluyen contenidos y estructuras propias de la materia. Se debe saber lo que es cierto y por qué. Se debe saber lo que es clave y por qué.
- Conocimiento pedagógico del contenido: modos de representar y exponer el conocimiento de forma comprensible para otros. Se incluyen maneras de enseñar un tema, de representar una idea, de exponer ejemplos o ilustraciones. Se debe saber qué hace que un aprendizaje sea difícil o fácil, ideas previas y errores de estudiantes.
- Conocimiento curricular: organización horizontal y vertical de contenidos relativos a un nivel escolar. Organización horizontal incluye la habilidad para relacionar el contenido en diferentes materias o en diferentes temas de una materia. Organización vertical incluye la habilidad para relacionar un tema con conocimientos de cursos precedentes y posteriores.

En un trabajo de continuidad, Shulman (1987) desglosó en siete componentes el conocimiento necesario para el profesor: conocimiento del contenido; conocimiento pedagógico general con énfasis en organización y manejo del aula; conocimiento curricular; conocimiento pedagógico del contenido; conocimiento sobre los alumnos y sus características; conocimiento de los contextos educativos, como son la cultura y carácter de la población y de la escuela; conocimiento de los fines, objetivos y valores educativos, de la filosofía e historia de la educación. Este desglose del conocimiento del profesor viene a enfatizar que no basta con comprender un contenido para poderlo enseñar (Nunes, Vargas, Lin y Rathgeb-Schnierer, 2016).

Como afirma Shulman (1987), de un profesor se espera que entienda lo que enseña, que lo comprenda críticamente y, a ser posible, que lo sepa ver desde distintos puntos de vista y relacionar con otras ideas dentro de las matemáticas y también en relación con otras materias. Además, el profesor comprende esas ideas matemáticas no para sí mismo, sino en orden a enseñarlas a otro, es decir, ha de transformarlas para hacerlas asequibles a los estudiantes. Así considera que las acciones que involucran el conocimiento del profesor forman un ciclo y son comprender, transformar, enseñar, evaluar y reflexionar.

Al hablar de transformación necesaria para que el conocimiento del contenido que posee el profesor llegue al estudiante y genere procesos de aprendizaje, Shulman (2000) desglosa la acción de transformar en cuatro: (I) La preparación que supone una interpretación crítica y análisis de los textos base, estructurar y segmentar el contenido, así como desarrollar el currículo y clarificar objetivos. (II) La representación que supone usar un repertorio de representaciones que incluya analogías, metáforas, ejemplos, demonstraciones, explanaciones. (III) La selección de formas de enseñar, organizar el aula, manejar el contenido. (IV) La adaptación a las características de los estudiantes.

La aportación de Shulman ha marcado una pauta importante en la investigación sobre el profesor. Según Abell (2008), la mayoría de los investigadores que han utilizado el marco teórico del conocimiento del profesor desarrollado por Shulman describen en sus trabajos cuatro características importantes del conocimiento pedagógico del contenido. (a) Categorización: definición de categorías discretas del conocimiento aplicadas a problemas de la práctica. Estas categorías resultan de especial utilidad para diseñar protocolos y cuestionarios que permitan “medir” conocimiento. Pero la disección del conocimiento puede resultar artificial, ya que un profesor utiliza las distintas componentes del conocimiento de forma integrada en su práctica. (b) Dinamismo: conocimiento pedagógico del contenido visto como un conocimiento dinámico, no estático. Esta visión responde a la conciencia de que el profesor va desarrollando su conocimiento pedagógico del contenido con el tiempo, ya sea por medio de oportunidades de desarrollo, intervenciones formativas o por la experiencia adquirida. (c) Contenido: la percepción del contenido específico como algo central en el conocimiento pedagógico del contenido, ya que este se manifiesta en un contexto de un contenido concreto. (d) Transformación de conocimientos: este conocimiento pedagógico implica una transformación en otros tipos de conocimiento como el conocimiento del contenido, el conocimiento pedagógico, el conocimiento del contexto, que hacen viable la enseñanza.

Se puede plantear la pregunta de si el marco teórico propuesto por Shulman para investigar sobre el conocimiento del profesor sigue siendo útil. Abell (2008) responde con claridad que sí. Todavía falta mucho por saber acerca del conocimiento del profesor, de cómo se apropia del mismo, qué contextos e instrumentos de recogida de datos permiten evidenciar el conocimiento pedagógico del contenido, entre otras cuestiones que se podrían plantear.

Dada la centralidad del contenido, tiene sentido que, en lo que sigue, el texto se centre en las matemáticas y en los investigadores del área que han seguido el marco propuesto por Shulman.

2.2.2. Conocimiento pedagógico del contenido matemático

Tras la propuesta de Shulman de considerar diversas componentes del conocimiento del profesor, no hay consenso en el área a la hora de estructurarlo. Muchas veces las diferentes componentes se solapan, por ejemplo cuando los profesores tratan de comprender por qué algunos conceptos matemáticos resultan especialmente difíciles para los estudiantes (Nunes et al., 2016). A continuación se exponen brevemente algunas investigaciones que reestructuran las componentes de conocimiento del contenido de Shulman, especialmente dentro del ámbito de las matemáticas. Por no salir del marco que ha orientado el estudio no se presentarán estudios que no se han tenido en cuenta durante esta investigación.

Una de las teorías que más ha sido citada en los últimos años es la estructuración que propone el conocimiento matemático para la enseñanza (Ball, Phelps y Thames, 2008). El equipo de la Universidad de Míchigan, liderado por Deborah Ball, concreta el estudio de Shulman al ver la necesidad de anclar el conocimiento pedagógico del contenido dentro de un área del saber. Ball, Phelps y Thames contribuyen a adecuar la teoría de Shulman dentro de las matemáticas entendiendo por conocimiento matemático para la enseñanza "los conocimientos matemáticos necesarios para llevar a cabo la labor de enseñanza de las matemáticas *…+ Tiene que ver con las tareas de enseñanza y las exigencias matemáticas de esas tareas" (2008, p. 395). El conocimiento matemático para la enseñanza divide en tres subdominios dos de las componentes del conocimiento profesional de Shulman: el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido (ver Figura 5). Esta separación viene de no estar totalmente de acuerdo con lo que Shulman incluía en cada una de las componentes, por ejemplo considera que el conocimiento de los estudiantes forma parte del conocimiento pedagógico y adquiere entidad propia en un subdominio “conocimiento del contenido y de los estudiantes”, pero que el conocimiento de las relaciones entre los temas de diversos cursos forma parte del conocimiento del contenido dentro de lo que llaman “conocimiento del horizonte del contenido”.

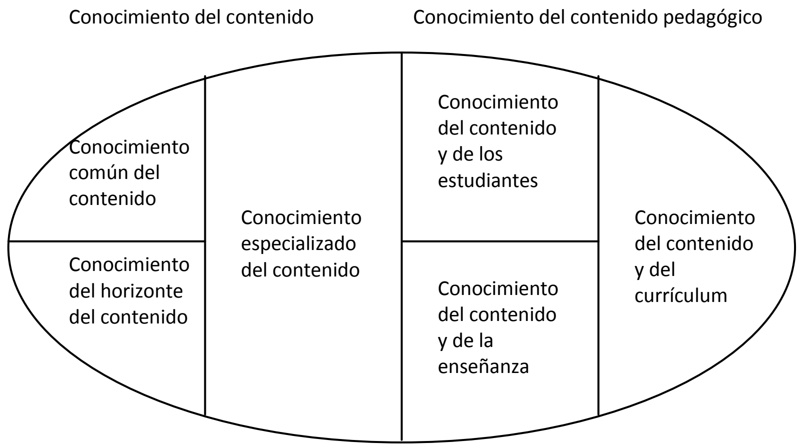


Figura 5. Dominios del conocimiento matemático para la enseñanza (Ball et al., 2008)

Ball, Thames y Phelps (2008) postulan que el conocimiento necesario para la enseñanza de las matemáticas incluye lo siguiente:

Conocimiento del contenido

- Conocimiento común del contenido: Conocimiento matemático que se comparte con el resto de profesiones que utilizan las matemáticas, saber resolver correctamente un problema o identificar una respuesta errónea.
- Conocimiento especializado del contenido: Conocimiento específico de los profesores que permite realizar tareas de enseñanza de las matemáticas: ver patrones de error en estudiantes, saber presentar ideas matemáticas, responder a preguntas de estudiantes, reconocer la potencialidad de una representación, saber modificar tareas según su dificultad, saber pronunciar preguntas productivas.
- Conocimiento del horizonte del contenido: Conocimiento de relaciones entre contenidos matemáticos y otras materias con atención a futuros contenidos.

Conocimiento pedagógico del contenido

- Conocimiento del contenido y de los estudiantes: Anticipar lo que los estudiantes piensan y lo que pueden encontrar confuso. Estar familiarizado con errores típicos de estudiantes. Saber elegir ejemplos interesantes y motivadores, saber qué tareas pueden resultar fáciles, difíciles o estimulantes. Saber escuchar e interpretar el pensamiento de los estudiantes.

- Conocimiento del contenido y de la enseñanza: Diseñar la instrucción dependiendo del contenido, la elección de ejemplos, la evaluación de ventajas y desventajas de cada representación de una idea, las maneras de abordar un tema para enseñar.
- Conocimiento del contenido y del currículum: Hacer énfasis en programas y materiales que sirven de herramientas para la enseñanza.

Con este modelo, se diferenciar tipos de conocimiento matemático, pero a la hora de llevar a cabo el análisis de la práctica docente este modelo ofrece también ciertas dificultades (Ribeiro et al., 2014), de ahí que hayan surgido nuevas adaptaciones y reestructuraciones del conocimiento matemático para la enseñanza.

El grupo liderado por José Carrillo en la Universidad de Huelva postula que el conocimiento especializado afecta a todos los subdominios del conocimiento del profesor. A su vez, todo él está impregnado por las creencias y concepciones sobre la matemática y su enseñanza y aprendizaje (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013). El modelo derivado propone dos dominios subdivididos en tres subdominios respectivamente (ver Figura 6):

Conocimiento matemático

- Conocimiento de los temas: conocimiento de los contenidos matemáticos a enseñar y sus significados de manera fundamentada.
- Conocimiento de la estructura matemática: conocimiento de las relaciones entre temas matemáticos o conexiones entre conceptos.
- Conocimiento de la práctica matemática: conocimiento de cómo explorar y generar conocimiento en matemáticas (argumentación, razonamiento, generalización, etc.).

Conocimiento didáctico del contenido

- Conocimiento de las características del aprendizaje: conocimiento del contenido matemático como objeto de aprendizaje; modos de aprehensión asociados a la naturaleza del contenido, fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de los estudiantes al abordar contenidos, expectativas e intereses relativos a matemáticas.
- Conocimiento de la enseñanza de la matemática: conocimiento de recursos, materiales, representaciones, contextos y ejemplos, y su potencial para la instrucción.

- Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas: conocimiento de los contenidos matemáticos a enseñar, hasta qué nivel de desarrollo conceptual y procedimental y secuenciación de temas dentro del curso y respecto a otros cursos.

Este modelo considera como fuente de conocimiento del profesor tanto la reflexión sobre la propia práctica como las aportaciones de la investigación en educación matemática.

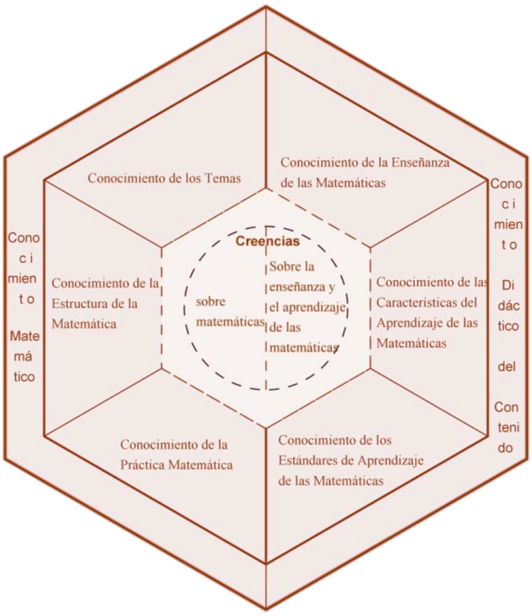


Figura 6. Dominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (Carrillo et al., 2013)

La tendencia actual de la investigación en el conocimiento matemático del profesor en orden a la enseñanza, es la de investigar la naturaleza del conocimiento que poseen y los diferentes enfoques para apoyar el desarrollo del conocimiento que poseen y del que carecen (Chapman, 2013).

Los dos modelos presentados se derivan de los estudios de Shulman y junto con Shulman (1986) se consideran como inspiradores teóricos en este estudio. Sin embargo, se comparte la duda planteada por Lin y Rowland (2016) sobre la real definición de los límites entre las diferentes categorías del conocimiento del profesor:

> Aunque la organización del conocimiento docente en categorías de un tipo u otro puede ser conveniente para tratar de captar y articular distinciones entre tipos de conocimiento, los límites entre diferentes categorías suelen ser difusos, promoviendo desde el principio disputas sobre qué caracteriza exactamente diferentes tipos de conocimiento, y si de hecho si las supuestas fronteras existen en absoluto. (p. 488)

Por esto, en este estudio la distinción entre los diferentes tipos de conocimiento matemático es de menor importancia que la manera en que se desarrolla el conocimiento profesional del profesor. Se escogen de entre las teorías presentadas aspectos del conocimiento didáctico matemático que resultan ser la base cognitiva para el estudio del desarrollo del conocimiento del profesor.

Sobre el contenido: *Identificación y fundamentación de contenidos matemáticos:* a la hora de hablar del conocimiento del contenido, Shulman (1986) enfatiza el conocimiento de las estructuras del contenido, las diferentes formas de abarcar un contenido y el conjunto de hechos que establecen su validez o no (p. 9). A su vez, el conocimiento matemático para la enseñanza parte del supuesto de que el profesor ha de saber las matemáticas que enseña e identificar respuestas correctas de incorrectas tanto de los estudiantes como de libros de texto (Ball et al., 2008). Por su parte, Carrillo et al. (2013) incluyen en el conocimiento de los temas el conocimiento de los contenidos matemáticos a enseñar y sus significados de manera fundamentada.

Sobre la enseñanza del contenido: *Identificación y uso de estrategias para enseñar un contenido:* “conocer las formas más útiles para representar las ideas, las analogías más potentes, ilustraciones, ejemplos explicación y demostraciones” (Shulman, 1986, p. 9). Con esta descripción explica Shulman la base del conocimiento pedagógico del contenido; a su vez, este conocimiento es específico del profesor no aplicable a otras profesiones que utilicen las matemáticas (Ball et al., 2008), pero se puede incluir a su vez en el conocimiento del contenido y de la enseñanza en cuanto conoce elementos de enseñanza y sus potencialidades o dificultades intrínsecas al tema (Carrillo et al., 2013). En este aspecto de la enseñanza del contenido cabe incluir las relaciones entre los contenidos, en cuanto conocer las diferentes formas de tratar un contenido desde las distintas materias o temas matemáticos. Igualmente conocer a qué contenidos posteriores preparan los contenidos que se enseñan, o qué contenidos ya se han visto anteriormente, de forma que la enseñanza se plantee en clave de continuidad (conocimiento curricular (Shulman, 1986), Conocimiento del horizonte del contenido (Ball et al., 2008), Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (Carrillo et al., 2013)).

Sobre los estudiantes: *Identificación e interpretación del conocimiento de los estudiantes:* La forma de aprender el contenido de los estudiantes, lo que les motiva y resulta interesante, los errores típicos en los que suelen caer; son conocimientos que el profesor necesita saber para anticiparse a las dificultades que puedan tener sus alumnos e interpretar sus respuestas incompletas o erróneas (Ball et al., 2008).

Posicionados en estos aspectos del conocimiento del profesor, se pasa a exponer algunas de las investigaciones que se han focalizado en el desarrollo del conocimiento didáctico matemático. Al mirar el desarrollo del conocimiento del profesor, se busca mirar cómo se promueve mediante relaciones colaborativas para la mejora de la práctica (Chapman, 2013). Lin y Rowland (2016) realizan una revisión de la literatura de la última década que versa sobre desarrollo profesional del profesor tras estudiar el conocimiento pedagógico del docente. Estos autores enfatizan "el refinamiento de la práctica docente, especialmente de la práctica influenciada por el nuevo conocimiento construido por el profesor" (p. 499).

Llinares y Valls (2009) señalan la influencia que tienen en el desarrollo del conocimiento del profesor y de las habilidades necesarias para generar una mirada más compleja sobre el proceso de enseñanza las situaciones de colaboración y de análisis y reflexión de la práctica. Estos autores definen cuatro niveles que les permite distinguir el grado de complejidad de la mirada sobre el proceso de enseñanza: (I) descripción: cuando solo describen diferentes partes de la enseñanza; (II) retórico: cuando hacen referencias retóricas a la teoría sobre la enseñanza sin alusiones específicas al proceso de enseñanza observado; (III) integración y síntesis: cuando comienzan a ligar algunos aspectos específicos del proceso de enseñanza observado con las ideas teóricas recibidas; (IV) teorización y conceptualización: cuando tras integrar la teoría con aspectos específicos de la práctica observada realizan un proceso de conceptualización.

En esta línea, Llinares (2012b) afirma que el aprendizaje y desarrollo profesional del profesor se puede entender como cambios en la participación y comprensión por parte del profesor en las prácticas matemáticas de aula. Este autor caracteriza la práctica de la enseñanza de las matemáticas como: (I) realizar unas "tareas" para lograr un fin, (II) hacer uso de unos "instrumentos", y (III) poder llegar a justificar su uso.

Por su parte, Carrillo y Climent (2011) afirman que el desarrollo de conocimientos especializados exige una mayor comprensión de la práctica de enseñanza, con lo que se requiere de un compromiso de reflexión sobre la propia práctica. De hecho, la reflexión sobre la propia práctica la consideran a la vez como una medida y un medio de desarrollo profesional. Estos autores establecen unos indicadores de la comprensión de la práctica desde una visión dinámica de proceso de mejora. Los indicadores que establecen son: (1 y 2) La comprensión del profesor sobre el proceso del aprendizaje y de la enseñanza de las matemáticas se ve aumentada con la incorporación de una o más variables de su interpretación del proceso. (3) El profesor establece nuevas conexiones entre variables dentro de su interpretación del proceso de enseñanza-aprendizaje. (4, 5 6) El profesor se vuelve más consciente de qué, por qué y cómo enseña los contenidos matemáticos. (7) El profesor aprende nuevas estrategias y modos de actuar para conseguir objetivos particulares de enseñanza de las matemáticas. (8) El profesor reflexiona sobre el rendimiento de su clase. (9) El profesor adquiere mayor facilidad en explicar razones y objetivos de su enseñanza y de las decisiones tomadas. (10) El profesor demuestra en su práctica la creación de conexiones entre constructos teóricos y sus acciones y creencias. (11) El profesor adquiere un discurso profesional que le permite pensar y expresarse con mayor precisión sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. (12) El profesor gana conciencia de sus puntos fuertes y áreas de mejora en la enseñanza. (13) El profesor traza caminos de continuidad para aprender sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. (14) El profesor pregunta nuevas cuestiones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas o reformula preguntas antiguas.

En este estudio se entiende el desarrollo en el conocimiento didáctico matemático como la profundización en contenidos matemáticos relevantes para la comprensión de la enseñanza y del aprendizaje del estudiante. El conocimiento didáctico matemático se considera en la base de todo el desarrollo profesional, por lo que en este trabajo solo se consideran otros aspectos de mejora de la enseñanza y aprendizaje en cuanto están relacionados con la matemática y su didáctica. Este posicionamiento implica un ejercicio de reflexión que se enriquece con la comunicación dentro de una comunidad de profesores y formadores.

3 Experimentación y Métodos

El marco teórico introdujo el estudio en la línea de investigación del conocimiento didáctico matemático. Ese capítulo marcó la ruta para llegar al fin planteado desde el principio: profundizar en el conocimiento del profesor como un elemento clave, aunque no aislado, en su desarrollo profesional. Siguiendo la metáfora del camino, el presente capítulo consiste en la hoja de ruta que permite distinguir el paisaje, reconocer las especies y proporcionar las herramientas básicas para conseguir llegar a la meta.

En este capítulo, se explica el enfoque metodológico empleado, el contexto de la escuela y de la intervención formativa. A continuación se exponen los instrumentos y métodos de recogida de datos. Finalmente, se presentan los criterios para la selección y reducción de datos así como la elaboración de codificaciones como método principal de análisis.

3.1. Enfoque para el diseño de la experimentación

De acuerdo con los objetivos de la investigación, se desea profundizar en el conocimiento didáctico del contenido de una maestra, a lo largo de un periodo de tiempo suficientemente largo como para identificar cambios y buscar posibles influencias en los cambios identificados del conocimiento del profesor. Por este motivo se plantea un enfoque de análisis cualitativo, descriptivo e interpretativo.

Se propone un estudio de caso con el fin de realizar un estudio intensivo de una maestra participante en la formación, de forma que se comprenda mejor la complejidad del conocimiento didáctico matemático, y buscar formas de desarrollarlo durante el ejercicio de la profesión de maestros (Gerring, 2004). Para ello, el modo de aproximarse al caso ha sido de tipo naturalista: sin hipótesis previas ni deseo de contrastar teorías prediseñadas.

La forma de recoger la información ha sido variada y longitudinal, a lo largo de tres cursos académicos, para responder a las preguntas de investigación. No todos los instrumentos de recogida de datos se establecieron con anterioridad, sino que las necesidades surgidas en el proceso llevaron a utilizar diversos métodos con el fin de completar y triangular la información que proporcionaban los datos.

El análisis ha adaptado algunos aspectos de la teoría fundamentada durante la reducción de datos y la asignación y saturación de códigos. Un primer análisis preliminar se ha realizado simultáneamente a la recogida de datos para centrar el estudio y determinar necesidades de información. El análisis detallado ha sido posterior a la recogida de datos pero manteniendo la relación con la maestra para contrastar resultados.

Tras esta explicación global, se entra a detallar el contexto del estudio, los instrumentos de selección y recogida de datos y los métodos del análisis.

3.2. Contexto de la escuela y selección del caso

Los datos de esta tesis se han tomado durante una intervención formativa realizada en una escuela concertada de la ciudad de Mataró (Barcelona). La escuela comprende las etapas de educación infantil, primaria y secundaria obligatoria; tiene una ratio de 25 alumnos por clase y dos líneas por curso. El grupo de participantes en la intervención formativa se compone de los maestros de primaria del centro. La intervención duró tres cursos escolares, incorporándose progresivamente los maestros de ciclo inicial, medio y superior.

La formadora del grupo es investigadora en Didáctica de la Matemática en la Universitat Autònoma de Barcelona con amplia experiencia docente: más de veinte años como maestra de escuela primaria, profesora de matemáticas de secundaria y a nivel universitario, en concreto en el ámbito de la formación de futuros maestros. Dada su formación, en la intervención dentro de la escuela se la considera como experta en educación matemática y asume el papel de formadora dentro de la comunidad. Además es una de las codirectoras de la tesis doctoral.

Durante las intervenciones de la formadora, tres veces al año (una sesión al inicio de cada trimestre), los maestros participan como observadores en el desarrollo de la clase que ella imparte con el grupo de alumnos de cada maestro. El equipo directivo del centro favorece la participación de todo el profesorado del ciclo adaptando los horarios y los maestros están dispuestos a participar coincida o no con su hora libre. Posteriormente, todos los maestros del ciclo participan en la reflexión con la formadora sobre las prácticas de aula observadas. El número de participantes es de doce maestras tutoras, cuatro por ciclo, a los que se unen en algunas ocasiones cuatro maestros especialistas o de refuerzo.

Para la selección del caso se tuvieron en cuenta los siguientes criterios:

I. participación continua durante todo el desarrollo de la intervención formativa;

II. implicación en las actividades de la formación;

III. iniciativa en el diseño de prácticas matemáticas

Solo una maestra de ciclo medio, que denominaremos en adelante Leire, cumplió estos criterios: durante el primer año de la intervención impartía clase en el ciclo inicial, único ciclo que introdujo el proyecto de innovación en el aula; el segundo año pasó al ciclo medio que se incorporaba en ese momento al proyecto; el tercer curso fue nombrada coordinadora del proyecto para toda primaria y asistía a las reuniones de la formadora con el ciclo superior.

Al inicio de la formación Leire llevaba 18 años trabajando como maestra en la escuela. Varios años enseñó en tercero de primaria (alumnos de 8-9 años), luego estuvo nueve años en segundo de primaria (7-8 años), coincidiendo el último con el inicio de la intervención formativa, y los siguientes años ha vuelto a enseñar en tercero de primaria. Respecto a las matemáticas, Leire reconoce que siempre le han gustado, aunque afirma que le costó aprobarlas en secundaria. Estudió el Bachillerato de Ciencias y la Diplomatura de Magisterio. Al momento de realizar la investigación, Leire ocupa el puesto de coordinadora del ciclo y, posteriormente, coordinadora del proyecto de innovación matemática propuesto por la intervención formativa.

3.3. Caracterización de la intervención formativa

En este apartado se describe la intervención formativa, para contextualizar datos y resultados del estudio. La iniciativa de la intervención formativa desarrollada en la escuela parte de las maestras del claustro, que se ponen en contacto con la formadora para que les ayude a profundizar en el cálculo mental. Ellas –según afirma Leire– solían realizar los ejercicios de cálculo que propone el libro de texto, pero solo si da tiempo. En varias ocasiones se habían planteado la necesidad de mejorar esa práctica de enseñanza.

La intervención formativa está diseñada en torno a tres ejes íntimamente relacionados entre sí. La Figura 7 muestra la intencionalidad e instrumentos que conforman los tres ejes formativos que vertebran la intervención. En el círculo interior se muestran objetivos de la formación emprendida, que se describe en los siguientes párrafos. El anillo externo presenta los instrumentos formativos utilizados:

- Acercar la investigación en didáctica de las matemáticas al aula

La literatura señala la diferencia en la naturaleza del conocimiento de los profesores respecto al de los investigadores. Mientras los docentes basan su conocimiento principalmente en la práctica, los investigadores se focalizan en teorías a veces ajenas a la práctica de la escuela (Lampert, 2010). Esto señala la necesidad de acercar la investigación en didáctica al aula. En esta intervención esto se ha realizado mediante la implementación de un proyecto de innovación basado en resultados de la investigación en didáctica de las matemáticas.

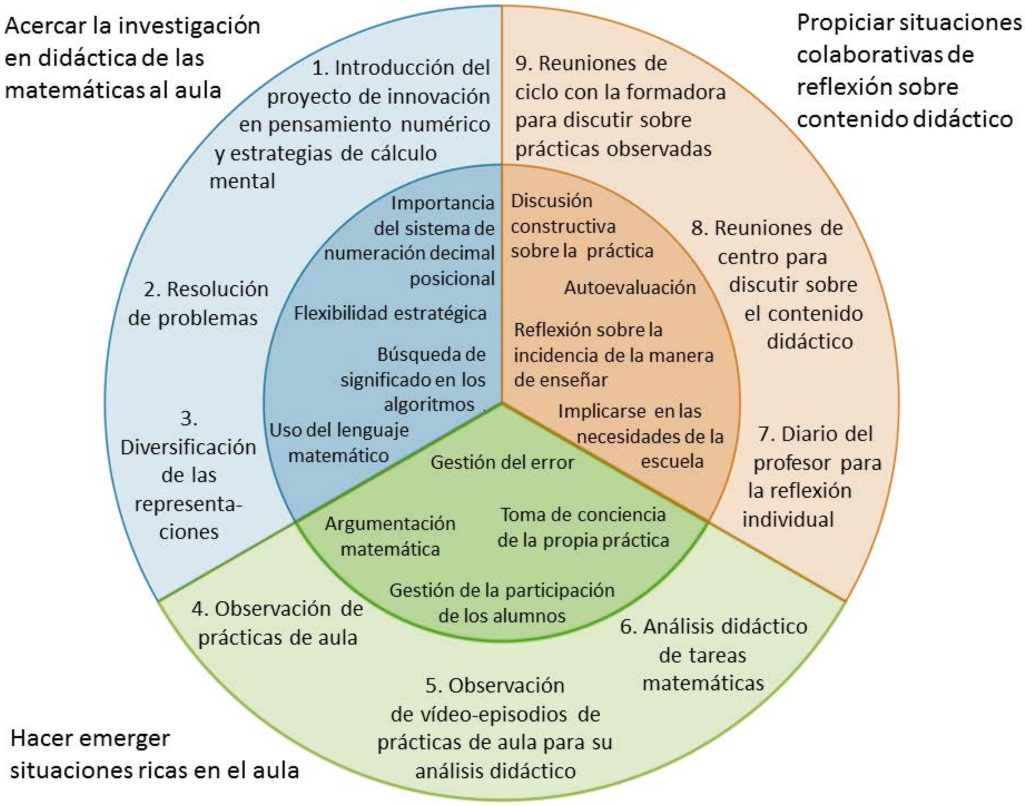


Figura 7. Esquema de objetivos e instrumentos de la intervención formativa

El Proyecto de Innovación en pensamiento numérico y estrategias de cálculo mental pretende promover (Badillo y Moreno, 2012):

(1) el desarrollo del pensamiento numérico desde la comprensión del sistema decimal posicional;

(2) el uso fundamentado de las propiedades de los números y de las operaciones;

(3) la identificación y uso del lenguaje matemático

(4) la diversificación de representaciones de las estrategias de cálculo en la resolución problemas contextualizados.

Otra estrategia empleada para acercar los resultados de la investigación en didáctica al aula ha sido la intervención tanto en el aula como, principalmente, en discusiones con las maestras, de expertos en investigación en didáctica de las matemáticas como son la formadora y la investigadora. Esta forma de acercar la investigación en didáctica al aula introduce los otros dos ejes formativos.

- Hacer emerger situaciones ricas en el aula

En la intervención se han empleado diferentes instrumentos para hacer emerger situaciones ricas que suceden en el aula de matemáticas y favorecer la reflexión generadora de interrogantes didácticos sobre la práctica.

La observación de prácticas de aula: principalmente son prácticas realizadas por la formadora en el aula de la maestra. La observación de prácticas de aula sirve para mostrar las potencialidades de la investigación educativa en el contexto real en el que trabajan las maestras, es decir, una clase bien fundamentada en investigación, que es analizada para aprender de las fortalezas y debilidades de la misma. Por ejemplo, las maestras pueden ver que es posible promover y gestionar estrategias en la resolución de problemas, observando la diversidad de estrategias que sus alumnos son capaces de proponer. Además, el hecho de que la formadora se exponga a la observación de otros resulta un incentivo para que los maestros abran su práctica a la reflexión con los compañeros. Es decir, sirven para promover la reflexión sobre el conocimiento didáctico matemático y generar un clima de confianza entre los participantes de la formación. Posteriormente se invita a que la maestra, coordinadora ya del proyecto, se introduzca en el aula de sus compañeras para mostrar un trabajo con materiales manipulativos.

El análisis didáctico de vídeo-episodios de aula: estos vídeo-episodios se caracterizan por focalizar la mirada de los participantes en la formación, ya que permiten resaltar situaciones que podrían permanecer inadvertidas dentro de la totalidad de la hora de clase (Sherin, Linsenmeier y van Es, 2009). El uso de vídeo-episodios de aula ofrece espacios para reflexionar sobre diferentes aspectos de la gestión, del proceso de enseñanza y aprendizaje, del papel del docente y dificultades y potencialidades de los alumnos de manera que los pensamientos generales de los maestros encuentren alimento y sustento en evidencias empíricas (Llinares y Valls, 2009). Esta potencialidad del vídeo aumenta cuando los episodios se toman de la misma práctica de los docentes (Borko, Jacobs, Eiteljorg, y Pittman, 2008; van Es, 2012) ya que les permite ver qué hacen bien y dónde convendría mejorar. A continuación se describen los vídeo-episodios visualizados durante la formación.

- Vídeo-episodios extraídos de la práctica de la formadora en el aula de 3.º durante la primera sesión de formación del curso 2011-12 y que se visualizaron en la segunda sesión del mismo curso.

En el primer episodio se gestiona la respuesta de una alumna a cuál es el triple de once. En él se profundiza y construye con los alumnos el concepto de multiplicación, como suma repetida, a partir de la descomposición del número (basada en el valor posicional del sistema de numeración decimal: decenas y unidades) y aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma. La estrategia busca simplificar el cálculo del producto a operaciones mentales inmediatas de manera comprensiva para los estudiantes (ver Tabla 2):

Transcripción de la pizarra	Transcripción parcial del vídeo-episodio M2, primera parte
33 11 (10 + 10 + 10) + (1 + 1 + 1)	Formadora: ¿Cómo lo haces, el triple de once? Alumna: ¿Qué he pensado? Formadora: Sí Alumna: Diez tres veces y pongo tres *…+ Formadora: Ella ha hecho muy bien, descompone las decenas y las unidades. Ella ha dicho: tres decenas es diez más diez más diez [escribe (10+10+10)], porque tiene tres decenas. Y después ha hecho tres unidades [escribe (1+1+1)], [...] uno más uno más uno. [...] Formadora: El once [escribe 11], ha hecho: tres veces, [línea trazada con el dedo que une el 1 de las decenas con 10+10+10] tres decenas y tres veces, [línea que une 1 de las unidades con 1+1+1] tres unidades

Tabla 2. Transcripción parcial del vídeo-episodio M2, primera parte

Transcripción de la pizarra	Transcripción parcial del vídeo-episodio M2, segunda parte
$\boxed{\underline{6}}0 + \boxed{\underline{4}}0 = \boxed{10}0$	Formadora: 60 + 40 = 100 [lo escribe en la pizarra]. ¿Por qué lo hago tan rápido?, ¿en qué me fijo? [...] Alumno 1: En que seis más cuatro son diez. Formadora: ¿Qué seis?, ¿seis qué? Alumno 1: Sesenta. Formadora: Seis ... Alumno 2: Seis decenas Formadora: Seis decenas [recuadra el 6] más cuatro decenas [recuadra el 4], esto lo sabe todo el mundo, porque es de primero, hacen diez [recuadra el 10] ¿qué? Alumnos: Decenas. Formadora: Decenas. Cien. Cien es diez decenas.

Tabla 3. Transcripción parcial del vídeo-episodio M2, segunda parte

El segundo episodio se centra en el sistema decimal posicional, considerando sus propiedades (valor posicional y base diez) como estrategias facilitadoras para la suma de decenas exactas. A la vez, se trabaja repetidamente la propiedad conmutativa de la suma como una herramienta para el cálculo mental rápido (ver Tabla 3).

- Vídeo-episodios seleccionados de la práctica de aula de una maestra de 2.º y de Leire, pasados en la 3.ª sesión de formación del curso 2011-12

El primer episodio, de la maestra de 2.º, muestra la variabilidad de estrategias de resolución propuestas por los estudiantes a los problemas cálculo que plantea el proyecto de innovación y su gestión por parte de la maestra. Busca reflexionar sobre las resoluciones de los estudiantes y el potencial matemático que encierran tanto las resoluciones correctas como las erróneas como oportunidad de aprendizaje.

El segundo episodio, de la práctica de Leire, muestra la explicación de una estrategia de cálculo mental. Los conceptos matemáticos que trabaja son la estructura multiplicativa como suma reiterada y la propiedad distributiva. Finalmente, se observa un error en el uso del signo igual (ver Tabla 4).

Transcripción e imagen de la pizarra	**Transcripción parcial del vídeo-episodio M3, segunda parte**
12 x 11 = 12 x 10 = 120 + 12 = 132 10 + 1 $\boxed{12+ 12 +12 +12 +12 +12 +12 +12 +12 +12}$ + 12 	Leire: Es multiplicar cualquier número por once. Si tengo que multiplicar doce por once, ya no es tan fácil. Seis por once es fácil. E1: Sesenta y seis. Leire: Es sesenta y seis; pero doce por once es más difícil. ¿Qué puedo hacer? Si en vez de once, el once lo descompongo en dos números es más fácil. ¿En qué dos números lo descompongo? E2: En seis y cinco. E3: En diez y uno. Leire: Vale, en diez más uno. Si hago doce por diez, ¿cuánto es doce por diez?, ¿os acordáis que multiplicar por diez es poner el mismo número y añadir un cero? [En la pizarra escribe a medida que habla lo siguiente 12x11=12x10=120+12=132] E4: Ciento veinte. Leire: Ciento veinte. Y ahora le tendré que sumar... uno no, un doce que me falta por sumar…

Tabla 4. Transcripción parcial del vídeo-episodio M3, segunda parte

- Vídeo-episodio seleccionado de la práctica de aula de una maestra de 6.º, pasado en la 2.ª sesión de formación del curso 2012-13

Versa sobre una estrategia de multiplicar por 5 propuesta por una estudiante. Falta argumentar por qué funciona, de forma que pueda generalizarse a todos los números.

Transcripción de la pizarra	Transcripción parcial del vídeo-episodio M5
$12 \times 5 = 60$ $\div 2$ $6 \quad 6$	Estudiante: Con los números pares me ha funcionado Profesora: A ver. Ella distingue los números pares de los que no lo son. E: Aquí, con los que son pares, para multiplicar por cinco, he hecho la mitad del número y he añadido un cero… P: Ella ha hecho la mitad… y le ha añadido un cero. Y esto le ha funcionado. ¿Cuál más hay? E: Con todos los pares, funciona

Tabla 5. Transcripción parcial del vídeo-episodio M5

- Vídeo-episodio seleccionado de la práctica de aula de Leire en 3.º, pasado en la 3.ª sesión de formación del curso 2012-13

Este vídeo-episodio se extrae de la sesión que dirige Leire en su aula para trabajar el sentido de la multiplicación. Se caracteriza por ofrecer diversas representaciones que responden a estructuras multiplicativas de manera que se vea la relación entre ellas. Y también que los alumnos puedan manifestar la representación que ellos tienen del concepto. Se visualiza una forma de trabajar en el aula diferente a la usual en la escuela: en esta sesión se trabaja por parejas y se pide a los alumnos que discutan entre ellos y luego expliquen al resto de la clase. Finalmente, la práctica trata de recoger lo que se ha trabajado previamente sobre el concepto.

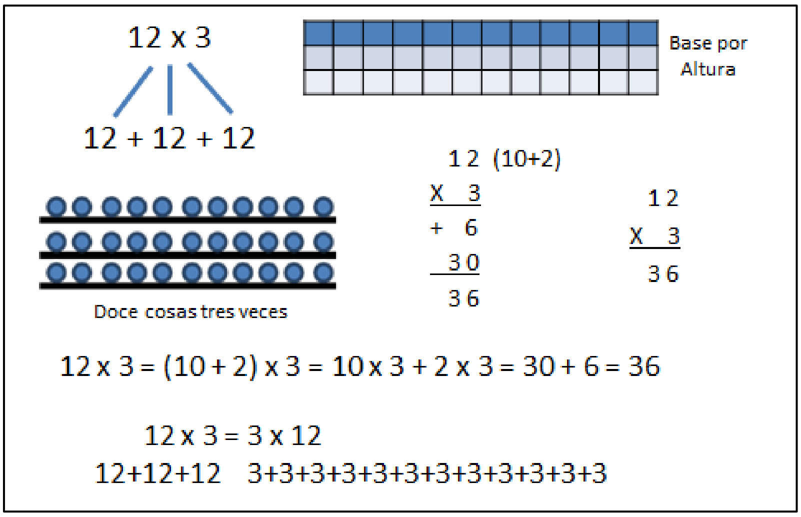


Figura 8. Representaciones de la multiplicación, vídeo-episodio M6

<u>El análisis didáctico de tareas matemáticas</u>: Estas tareas matemáticas pretenden ofrecer oportunidades para que la maestra reflexione sobre la enseñanza de las matemáticas en los diferentes niveles y contraste con expertos y con otros maestros la forma de profundizar sobre los contenidos y situaciones de enseñanza que pueden generar en el aula (Fried y Amit, 2005; Jaworski, 2005).

- Propiciar situaciones colaborativas de reflexión sobre el contenido didáctico

La intervención formativa da importancia a los momentos de reflexión conjunta entre los maestros del ciclo y la formadora, en los que se persiguen tres objetivos:

(1) Observar, evaluar y analizar prácticas concretas de aula.

(2) Progresar en el conocimiento como resultado de la reflexión, individual y colectiva, en, sobre y para la práctica matemática en el aula.

(3) Construir instrumentos conceptuales y tecnológicos para analizar y desarrollar prácticas matemáticas de aula.

Esta reflexión conjunta se ha realizado en tres contextos de participación diferentes. Por un lado, la formadora ha propuesto y guiado reuniones periódicas con los maestros a nivel de claustro, de ciclo y de curso escolar. En estas discusiones se ha perseguido la generación de conocimientos de los profesores como resultado de discutir la relación entre teoría y práctica. Por otro lado, con el objetivo de implementar conocimientos de forma práctica, los maestros se han reunido a nivel de ciclo para articular una programación vertical. Para que esta reflexión conjunta sea significativa en el cambio, se requiere de momentos de reflexión individual (Llinares y Krainer, 2006).

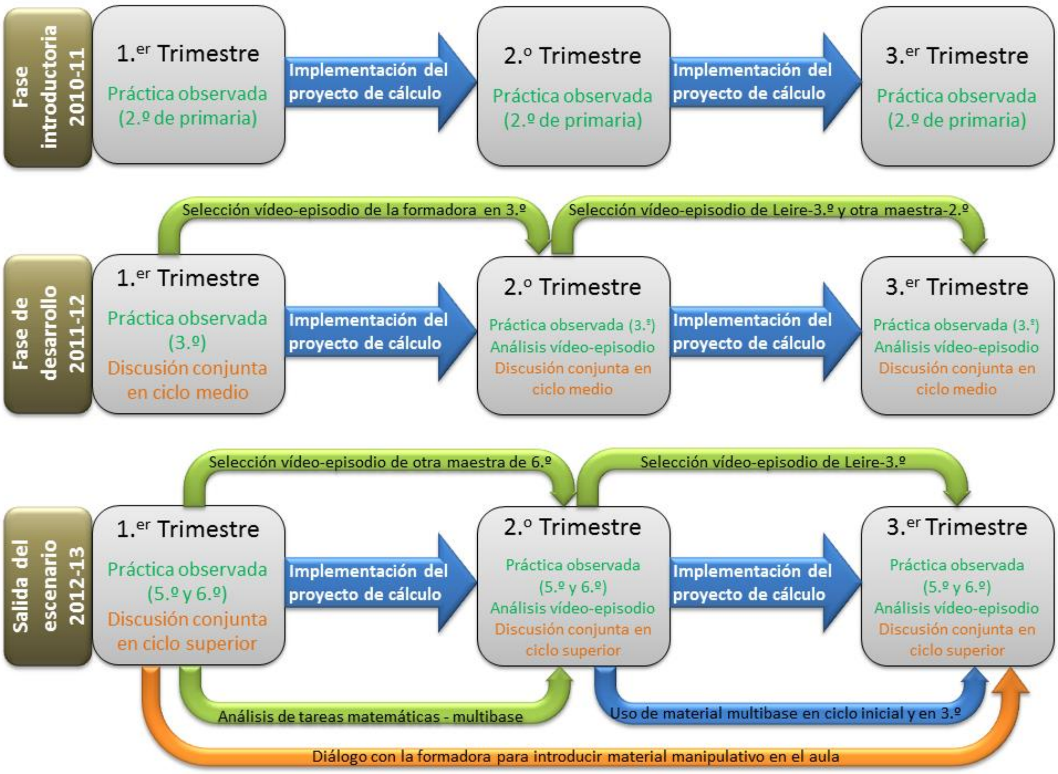


Figura 9. Fases y estrategias formativas en las que participa Leire

La Figura 9 muestra el desarrollo de la intervención formativa que siguió las fases de introducción, desarrollo y salida del escenario a lo largo de tres cursos escolares. En concreto, muestra las estrategias formativas en las que Leire participa. En la fase introductoria se comenzó en el ciclo inicial la implementación del proyecto de innovación y la observación de prácticas de aula de la formadora. En la fase de desarrollo, en los ciclos inicial y medio, se añadió la reunión de reflexión conjunta tras la observación de las prácticas de aula de la formadora a la vez que se introducían el diario de reflexión y el análisis de vídeo-episodios de aula. En la fase de salida del escenario, los ciclos inicial y medio siguieron implementando el proyecto de innovación sin las reuniones conjuntas de discusión ni la observación de prácticas de la formadora. A Leire, como coordinadora del proyecto, se le invitó a participar en las sesiones que la formadora mantenía con las maestras del ciclo superior.

3.4. Instrumentos de recogida de datos

Los instrumentos de recogida de datos están insertados en la dinámica de la formación y se elaboraron de acuerdo con la formadora, que a su vez es codirectora de la tesis, con el doble propósito de servir a la investigación y de dar respuesta a los desafíos con los que se iba encontrando día a día la formación. A fin de responder a la pregunta de investigación y aumentar la fiabilidad del análisis, se utilizaron diferentes instrumentos para contrastar las fuentes. Inmersos en la tradición cualitativa, los instrumentos de recogida de datos siguen una estructura flexible, no determinados desde el inicio del estudio, sino que se les ha ido dando forma según emergían las necesidades (Glaser y Holton, 2007). Se ha hecho uso de todo lo que pudiera ser útil para acceder a información relevante. Por esta razón, entre los instrumentos se encuentran grabaciones en vídeo y/o audio, cuestionarios de preguntas abiertas, guiones de reflexión y diarios personales de la maestra, entrevistas semiestructuradas, documentos elaborados por la maestra y por el centro y otros elaborados para la formación. Así mismo ha habido una constante comunicación con Leire con carácter colaborativo.

Los datos se fueron recogiendo en diferentes momentos de la intervención formativa. Los primeros con la finalidad diagnóstica de dar cuenta de un estado inicial. A partir de ahí, se fueron elaborando tras una primera lectura de los datos ya recogidos y en colaboración con la formadora-codirectora de tesis. Todos los instrumentos de recogida de datos fueron validados en reuniones de trabajo por las directoras y otros profesores del Departamento. Estos instrumentos, resumidos en la Tabla 6, se describen a continuación.

Tipo de datos	Registro	Duración aproximada
3 sesiones de discusión conjunta ciclo medio y formadora	Vídeo y audio	1h/sesión
3 sesiones de discusión conjunta ciclo superior y formadora	Vídeo y audio	1h/sesión
2 sesiones de clase con el proyecto de innovación	Vídeo y audio	45min/sesión
1 sesión de clase modelo de Leire en un aula de 2.º sobre multibase	Vídeo	30 min
1 sesión de clase sobre multiplicación	Vídeo y audio	45min
4 entrevistas individuales semiestructuradas con la investigadora	Audio	45min/entrevista
1 sesión individual de análisis de tareas con la formadora	Audio	45min
6 guiones de reflexión sobre prácticas matemáticas de aula	Escrito	
1 diario personal por sesión de formación	Escrito	
2 cuestionarios inicial y final	Escrito	
Corrección hecha por Leire de tareas matemáticas propuestas	Escrito	
Correos electrónicos entre la investigadora y la maestra	Escrito	

Tabla 6. Datos recogidos sobre Leire

Por cuestiones de ética en la investigación, antes del inicio de la intervención formativa y de la investigación se solicitó permiso a maestras y representantes de los alumnos para grabar.

Diario del profesor y correos electrónicos

Para el diario del profesor se ha utilizado un formato abierto con la única pregunta: "¿Qué has aprendido en la sesión formativa?". Esta pregunta se planteaba para que respondiese después de cada una de las seis sesiones formativas. Con ella se pretendía recoger la reflexión individual sobre la práctica y sobre su propio aprendizaje. Aunque la idea inicial era la de rellenar en un espacio web este diario, de forma que tanto la maestra como la investigadora pudiesen tener acceso, por dificultades con la tecnología los diarios terminaron mandándose por correo electrónico.

A parte de los diarios, tras las sesiones formativas, en varias ocasiones se acudió al uso del correo electrónico para solicitar informaciones puntuales de la maestra o reflexiones sobre otras prácticas. Esta relación se mantuvo a lo largo de todo el proceso de análisis.

Grabación de las sesiones de discusión conjunta (3 en ciclo medio y 3 en ciclo superior)

Las grabaciones fueron hechas en vídeo con una cámara fija y con una grabadora en el centro de la mesa para recoger mejor el sonido. Con estos datos se pretendía recoger evidencias del conocimiento didáctico matemático puesto de manifiesto en la reflexión sobre la práctica, propia o ajena, que Leire compartía con la formadora y el resto de maestros. En todas las sesiones de discusión conjunta se les presentó un guión de reflexión sobre las prácticas de aula observadas ese día.

<u>Guión de reflexión sobre prácticas matemáticas de aula</u> (3 con el ciclo medio y 3 con el ciclo superior)

Los guiones de reflexión se pasaron en un papel al inicio de la discusión conjunta mantenida tras la observación de prácticas de aula de la formadora. Estos guiones pretendían centrar la reflexión individual y conjunta sobre la práctica, el aprendizaje de los estudiantes y la gestión del conocimiento. Los maestros respondieron al principio al guión, pero lo iban completando si querían a lo largo de la discusión.

Los guiones pasados al inicio del primer trimestre de los dos años reflexionan solo sobre la práctica de la formadora observada, por lo que se componen de cuatro preguntas abiertas, para permitir ver qué identifica la maestra:

1. ¿Qué han hecho los alumnos que pueda ser significativo para su aprendizaje?
2. ¿Por qué ha pasado?
3. Nombra las diferentes estrategias de resolución que utilizan los alumnos durante la sesión
4. ¿De qué manera gestiona la profesora el aprendizaje de los alumnos en el aula de matemáticas?

<table>
<tr><th>Preguntas planteadas</th><th>Información que se pretende recoger</th></tr>
<tr><td>Observemos el episodio 1 y reflexionemos sobre las siguientes preguntas:
1. ¿Qué destacarías de este episodio?</td><td>Conocimiento del contenido</td></tr>
<tr><td>2. ¿Qué resaltas como importante de este episodio para el desarrollo del pensamiento numérico de tus alumnos?</td><td rowspan="3">Conocimiento de los estudiantes
Conocimiento de la enseñanza del contenido</td></tr>
<tr><td>3. ¿Qué cambiarías del episodio y cómo se puede mejorar?</td></tr>
<tr><td>4. ¿Qué dificultades tendrías tú como maestro para gestionar este episodio y cómo consideras que las puedes superar?</td></tr>
<tr><td>Observemos el episodio 2 y reflexionemos sobre las siguientes preguntas:
5.* ¿Qué semejanzas encuentras entre el episodio 1 y 2?</td><td rowspan="2">Conocimiento del contenido
Conocimiento de la enseñanza del contenido</td></tr>
<tr><td>6.* ¿Qué diferencias encuentras entre el episodio 1 y 2?</td></tr>
<tr><td>7. ¿Qué te aporta a ti, como maestro, este tipo de discusiones o reflexiones para mejorar tu práctica de aula?</td><td rowspan="2">Influencia de la formación</td></tr>
<tr><td>8. ¿Qué os aportan, como equipo docente, estas reflexiones en las reuniones de ciclo o en la programación con tu paralela? Y ¿qué problemas pueden surgir?</td></tr>
</table>

Tabla 7. Guión de reflexión pasado en el 2.º y 3.er trimestre con los ciclos medio y superior

Tras la lectura de las respuestas del grupo de maestros al guión y durante la reflexión conjunta, la formadora y la investigadora decidieron seleccionar vídeo-episodios que ayudasen a centrar la discusión sobre el contenido matemático. Por este motivo, los guiones de reflexión pasados en las sesiones del 2.º y 3.er trimestre siguen un formato diferente. Las preguntas 5 y 6 están marcadas con un asterisco porque solo se pasaron en enero de 2012, cuando se visualizaron dos episodios de la formadora y se pidió compararlos

Entrevistas semiestructuradas (4 entrevistas y una sesión de análisis de tareas con la formadora)

Pregunta	Subpreguntas o sugerencias	Sobre qué informa
Este es un episodio de tu clase del otro día que me ha gustado especialmente, ¿por qué crees que lo he escogido? ¿En qué te ayuda analizar este episodio para tu práctica en el aula? ¿Qué crees que les puede aportar a tus compañeros?	¿Estás de acuerdo con que se proyecte en la próxima sesión de reflexión? ¿Qué propones como guión que ayude a la reflexión del resto de maestros para la próxima sesión de manera? (qué destacarías)	Conocimiento del contenido
¿Qué piensas de que se propongan estrategias que involucren conceptos de otros cursos? Hay ideas en matemáticas que pueden ser complicadas, como la división. ¿Cómo crees que influye el hecho de que se trabaje problemas de reparto en 1.º y 2.º? ¿Ves posibles aplicaciones para otros temas de matemáticas?	(uso de paréntesis / propiedades de las operaciones / uso de los enteros) ¿Se te ocurren otros ejemplos de ideas complicadas de cursos superiores que se puedan trabajar en tu curso? ¿Y de otras materias que no sean matemáticas?	
¿Qué piensas de la forma de explicar las operaciones que propone el proyecto? ¿Qué otros aspectos de la forma de dar las clases de la formadora te llaman la atención?	¿Hay algo en esta forma de explicar de la formadora que te gustaría incorporar (o que estás incorporando) a tus clases? ¿Por qué te gusta / disgusta?	Conocimiento de la enseñanza del contenido
¿Ves diferencias en los alumnos con respecto a otros años? y ¿a medida que avanza el curso?		Conocimiento de los estudiantes
¿Habías participado en otro tipo de formación permanente anteriormente? ¿Cómo definirías este programa de formación? ¿En qué crees que te puede ayudar a la hora de preparar y dar clase?	¿Qué puntos te parecen positivos/ negativos en comparación? ¿Qué te aporta la observación de las clases de la formadora?, ¿la reflexión con los compañeros?, ¿visualizar episodios seleccionados de clases? ¿En qué momento te influye más: planificación, gestión, evaluación?	Influencia de la formación

Tabla 8. Guión de la entrevista de marzo de 2012

Las entrevistas solo fueron grabadas en audio para no violentar a la maestra. Las entrevistas son semiestructuradas, es decir, bajo un guión que permite reconducir la conversación hacia los puntos de interés para investigación, pero dando amplitud para que la maestra pueda expresar su reflexión sobre la práctica.

Tres de las entrevistas se planificaron en forma de preguntas guía y subpreguntas o sugerencias para facilitar las respuestas. Estas sirvieron ante todo de guía para la investigadora, pero no se formularon directamente.

Durante la entrevista de marzo de 2012 se vio un vídeo-episodio seleccionado de la clase de Leire y se pidió permiso para analizarlo en la discusión del 3.er trimestre con la formadora y maestros del claustro (ver Tabla 8). La sesión de análisis de tareas matemáticas con la formadora se grabó en audio a principios de noviembre de 2012. La formadora y Leire fueron repasando una a una las preguntas y problemas planteados en las tareas matemáticas propuestas que se explican más adelante.

La entrevista de noviembre de 2012 se realizó para analizar unas tareas matemáticas preparadas para introducir material manipulativo multibase en el aula. La Tabla 9 muestra el guión de preguntas utilizado para guiar la conversación.

Pregunta	Subpreguntas o sugerencias	Sobre qué informa
¿Cómo se están explicando las operaciones este año? ¿Crees que la manera de trabajar en el proyecto de cálculo ha cambiado en algo las clases de matemáticas en ti y en tus compañeros?	¿Te gusta trabajar así?	Conocimiento de la enseñanza del contenido
¿Cómo estás organizando la introducción de material manipulativo en el aula? Tienes mucha facilidad y conoces bien a los niños, ¿tenías ya experiencia de trabajar así?	¿Cómo introducirás el material? ¿De dónde vino la idea de introducirlo? ¿Lo harás tú en el aula de los compañeros o se lo explicarás a ellos para que ellos lo hagan?	
En las reuniones de ciclo, ¿se siguen tratando temas de contenido matemático?: ¿cómo explicar algo para que esté en sintonía con lo que los alumnos ya saben o con lo que verán después…?	¿Quedáis alguna vez para comentar juntos los maestros de diferentes cursos?	
¿Cómo han subido los niños de curso?	¿Se nota el trabajo de cálculo y de problemas de los cursos anteriores?	Conocimiento de los estudiantes
¿Crees que la formación del año pasado te sirvió para avanzar en tu profesión docente?, ¿en qué?	¿Cómo podrías resumir las reuniones de ciclo que teníamos el curso pasado con la formadora?	Influencia formación

Tabla 9. Guión de la entrevista de noviembre de 2012

La entrevista de diciembre de 2012 es no estructurada, se realizó para recoger la reflexión de Leire sobre la preparación de las clases que ella había preparado para introducir un material en el aula y derivó a reflexionar sobre unas pruebas de competencias básicas que le habían llegado y estaba analizando.

En febrero de 2013, se pasa una última entrevista a la maestra, justo después de la grabación en vídeo de su clase durante la implementación del proyecto y en una sesión en la que pone a trabajar por parejas a los alumnos sobre el sentido de la multiplicación.

<table>
<tr><th>Pregunta</th><th>Subpreguntas o sugerencias</th><th>Sobre qué informa</th></tr>
<tr><td>¿Has seguido introduciendo el multibase en el aula? ¿Qué dificultades has tenido?</td><td></td><td rowspan="2">Conocimiento de la enseñanza del contenido</td></tr>
<tr><td>¿Cómo se están explicando las operaciones este año?
La nueva manera de explicar las matemáticas, ¿ha cambiado en algo la manera de evaluarlas?
¿Has variado la manera de gestionar el aula y el aprendizaje de los alumnos?</td><td>¿En qué sentido piensas que esta manera de explicar las operaciones puede ayudar a los alumnos?
¿Qué criterios de evaluación sigues?
¿Qué te ha llevado a trabajar así? ¿Por qué crees que puede ser bueno?</td></tr>
<tr><td>¿Habéis empezado a introducir el material competencial en las clases de matemáticas?</td><td>¿Os pusisteis de acuerdo para llevarlas al aula?, ¿decidisteis hacer alguna adaptación? ¿Con qué dificultades os habéis encontrado? ¿Cómo las habéis resuelto?</td><td>Conocimiento de los estudiantes</td></tr>
</table>

Tabla 10. Guión de la entrevista de febrero de 2013

Cuestionarios

Los tres cuestionarios que se pasaron, uno en septiembre de 2011, otro en abril de 2012 y otro en octubre de 2015, pretenden dar una visión estática inicial y final del conocimiento didáctico matemático. Las preguntas y situaciones de los cuestionarios fueron diseñadas por el grupo de investigación tomando algunas respuestas de estudiantes presentadas en los Principios y Estándares de Educación Matemática (NCTM, 2000) y en The Mathematical Association (1992) sobre métodos mentales en matemáticas. El cuestionario de septiembre de 2011 y de octubre de 2015 es exactamente el mismo, con el fin de poder compararlos. El cuestionario de abril de 2012 varía ligeramente para introducir la pregunta sobre estrategias de cálculo en forma de pregunta abierta tal y como se explica en la Tabla 11. Este cuestionario fue validado por un grupo de expertos en investigación en didáctica y pasado a compañeros del máster de investigación en didáctica.

Grabación de sesiones de clase de Leire (2 sesiones del proyecto, 1 de matemáticas sobre multiplicación, 1 práctica en el aula de una maestra de 2.º para introducir el trabajo con material manipulativo).

Las grabaciones de clase se han realizado con una única cámara, situada al final de la clase para captar el aula en general y la pizarra. En ocasiones se mueve para enfocar el trabajo de los alumnos cuando no interviene la profesora con el grupo clase. La grabación se refuerza con una grabadora de voz situada en la pizarra. Con estos datos se pretende recoger evidencias del conocimiento didáctico matemático manifestado durante la práctica de aula, con el fin de contrastar la información manifestada durante la reflexión sobre la práctica. También sirven para seleccionar vídeo-episodios para analizarlos en la reflexión conjunta.

Fecha	Pregunta	Sobre qué informa
Sept. 2011 Oct. 2015	*Valora del 1 al 5 las respuestas de los siguientes alumnos y justifica como maestra tu valoración más alta y la valoración más baja* Ejemplos de soluciones tomados del libro Principios y Estándares de Educación Matemática (NCTM, 2000)	Conocimiento del contenido Conocimiento de los estudiantes Conocimiento de la enseñanza del contenido
Sept. 2011 Oct. 2015	*Observa los diferentes métodos de cálculo que han utilizado los alumnos para realizar los siguientes productos. ¿Podrías describir en qué se basan los alumnos o qué conocimientos de numeración utilizan implícitamente?* Los ejemplos de estrategias o métodos de cálculo mental fueron tomados del libro *Mental Methods in Mathematics: A first resort*. (The Mathematical Association, 1992)	Conocimiento del contenido
Sept. 2011 Oct. 2015	*¿Consideras que algunos de los métodos anteriores son fáciles para explicar oralmente, pero difíciles de escribirlos? ¿Cuáles y por qué?* *¿Consideras que algunos de los métodos anteriores son fáciles de escribir en la pizarra, pero difíciles de explicar oralmente? ¿Cuáles y por qué?*	Conocimiento de los estudiantes Conocimiento de la enseñanza del contenido
Sept. 2011 Oct. 2015	*¿Crees que los números particulares seleccionados para los cálculos de la tabla anterior pueden influenciar el uso de determinados métodos de cálculo? ¿Por qué?*	Conoc. de dificultades matemáticas de estudiantes
Abr. 2012	*¿Qué estrategias de cálculo mental propondrías a tus alumnos para resolver estas operaciones? ¿Te influyen los números para escoger la estrategia?*	Conocimiento de la enseñanza del contenido
Sept. 2011 Abr. 2012 Oct. 2015	*Analiza la respuesta* [errónea] *escrita de alumnos de primaria a los siguientes algoritmos estándares:* Ejemplo tomado del libro Principios y Estándares de Educación Matemática (NCTM, 2000)	Conocimiento de los estudiantes
Sept. 2011 Abr. 2012 Oct. 2015	*Comenta y explica que hay detrás de cada método. ¿Crees que se puede usar la calculadora? ¿Qué relación hay con 7x8=3x8+4x8?* Ejemplo extraído del libro *Mental Methods in Mathematics*(1992)	Conocimiento de la enseñanza del contenido
Sept. 2011 Abr. 2012	*¿Cómo valoras tus clases de matemáticas? ¿Qué aspectos destacarías positivamente y cuáles necesitarían mejorar?*	
Sept. 2011 Abr. 2012	*Señala algunos temas/conceptos de matemáticas que tú trabajas y que están relacionados con las matemáticas de otros cursos o con otras materias*	Conocimiento del contenido

Tabla 11. Códigos sobre los que informan las preguntas de los cuestionarios

3.5. Métodos de análisis

Se expone a continuación el camino realizado durante el estudio hasta la consecución de los resultados que se expondrán en el siguiente capítulo. Este camino no ha sido lineal, como se presenta, sino que ha estado lleno de incursiones en las que se ha topado con callejones que no conducían a ninguna parte. Estos eran los momentos de retomar el marco teórico como mapa del camino, reflexionar sobre qué informan los datos y redefinir rutas.

Para todo el proceso de organización de datos se ha utilizado el programa informático de análisis cualitativo Atlas.ti dada la facilidad que ofrece para organizar múltiples fuentes de datos, codificar y revisar el análisis contrastándolo con los datos primarios.

3.5.1. Reducción preliminar de datos: Contenidos matemáticos relevantes

Selección de fuentes primarias

La primera reducción de datos es consecuencia de la selección del caso de Leire. Por este motivo, los datos recogidos de otros profesores o alumnos de otras aulas pasaron a considerarse fuentes complementarias, no sujetas a un análisis sino utilizadas para contextualizar. La segunda reducción de datos se corresponde con la decisión de analizar el conocimiento didáctico matemático de Leire manifestado en la reflexión sobre la práctica, tanto individual como comunitaria. Por ello, los vídeos grabados de su práctica de aula y los correos electrónicos enviados tras la salida del escenario son considerados como fuentes secundarias que sirven para triangular la información y refuerzan los resultados del análisis. Las narraciones realizadas por la investigadora que recogen el contenido matemático tratado en cada sesión formativa constituyen otro elemento contextualizador complementario (ver Tabla 12).

Transcripciones

En la transcripción de datos escritos y orales, considerados fuentes primarias, se utilizan pseudónimos para designar a los intervinientes. La lengua utilizada en los datos combina catalán y castellano; para facilitar la comprensión y puesto que la lengua no constituye una unidad de análisis en este estudio, los datos se presentan en castellano.

Los datos escritos –diario de reflexión personal, guiones de reflexión y cuestionarios– se transcriben de forma literal. Para datos orales –discusiones conjuntas y entrevistas– se opta por realizar una transcripción parcial en la que no se incorporan los diálogos sin participación de Leire ni los que versan sobre temas no considerados de interés para el estudio como son características psicológicas de estudiantes, recuerdos de la época de estudiante de la maestra o relación entre profesores. No se incluye información gestual del lenguaje, limitándonos a introducir entre corchetes la información necesaria cuando cuesta entender la expresión oral que se transcribe, por frases incompletas u otros motivos. Los puntos suspensivos que se escriben corresponden a frases cortadas por el interlocutor o silencios entre dos frases.

Tipo de datos	Reducción de datos	
3 sesiones de discusión conjunta ciclo medio y formadora	FUENTES PRIMARIAS	Transcripción parcial Sin información gestual, solo de las intervenciones relacionadas con Leire y con el contenido matemático
3 sesiones de discusión conjunta ciclo superior y formadora		
4 entrevistas individuales semiestructuradas con la investigadora		
1 sesión individual de análisis de tareas con la formadora		
6 guiones de reflexión sobre prácticas matemáticas de aula		Transcripción literal
1 diario personal por sesión de formación		
2 cuestionarios inicial y final		
2 sesiones de clase con el proyecto de innovación	FUENTES SECUNDARIAS	Transcripción selectiva de los datos de apoyo a las fuentes primarias
1 sesión de clase modelo de Leire en un aula de 2.º sobre multibase		
1 sesión de clase sobre multiplicación		
Corrección de tareas matemáticas propuestas		
1 cuestionario pasado en octubre de 2015		
Correos electrónicos		

Tabla 12. Reducción de datos

<u>Identificación de contenidos matemáticos relevantes</u>

Una vez transcritos los datos, se procede a señalar lo relativo al contenido matemático elegido en el estudio. Para ello se consideran aportaciones de los siguientes investigadores explicados en el marco teórico, que indican los contenidos matemáticos requeridos para:

- comprender la multiplicación en columna según Treffers, Nooteboom y Goeij (2008)
- trabajar los algoritmos según Buys (2008)

- usar las estrategias de cálculo según Lemaire y Siegler (1995)

La Tabla 13 enumera los Contenidos matemáticos relevantes (CMR).

	Abreviatura	Contenidos matemáticos relevantes
Estructura del sistema decimal posicional	VP	valor posicional
	CD	composición y descomposición de los números
Concepto de multiplicación	EM	estructura de la multiplicación aritmética
Cálculo de la multiplicación	TM	tablas de multiplicar
	MD	multiplicación por diez
	ALG	algoritmos de las operaciones aritméticas
	PR	propiedades de las operaciones
	EC	estrategias de cálculo

Tabla 13. Contenidos matemáticos relevantes

Tras la elección de los contenidos matemáticos relevantes se hizo una relectura de datos buscando identificar la referencia o alusión a estos contenidos. Cuando se identifica uno, se delimitan las líneas de transcripción que inician y concluyen la conversación (para fuentes orales) o la reflexión (para fuentes escritas) sobre el contenido matemático relevante identificado. Estos fragmentos de datos se denominan "citas". Esas citas fueron etiquetadas con las siglas de los contenidos matemáticos relevantes de los que informaban.

La Figura 10 muestra un ejemplo del proceso de definición de citas para el análisis. Tras la transcripción parcial de la discusión conjunta, en una intervención de Leire se identifican dos contenidos matemáticamente relevantes.

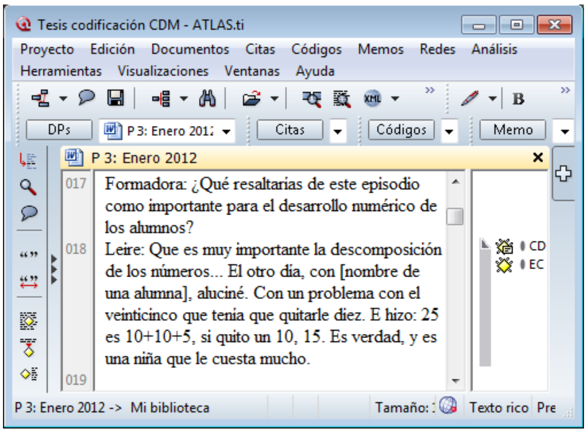


Figura 10. Ejemplo de citas

A la pregunta de la formadora sobre qué han identificado los maestros en el vídeo-episodio que sea relevante para el desarrollo numérico de los alumnos, Leire responde:

> Que es muy importante la descomposición de los números... El otro día, con [alumna], aluciné. Con un problema con el veinticinco que tenía que quitarle diez. E hizo: veinticinco es diez más diez más cinco, si quito un diez, quince. Es verdad y es una niña que le cuesta mucho. (Enero 2012)

Su respuesta sugiere que se resalta *la descomposición* aditiva *de los números* (CD) como importante para el desarrollo numérico de los alumnos. Además se expone un ejemplo de una alumna que utiliza una descomposición numérica como estrategia de cálculo (EC).

CMR	Cita	Fecha
VP	Yo tengo una pregunta. Cuando comenzamos a enseñar a sumar, a restar..., o sea, yo pienso que hacemos... cifras. No insistimos en, yo qué sé, por ejemplo, esto que tú has dicho ahora: "ciento veintitrés más catorce". Tú haces: tres más cuatro, siete. Dos más uno...; pero no vemos que quedan “doce *deœnas+más *una decena]", ¿me explico?	09/ 2011
CD	Algunos descomponen los números para tener más facilidad a la hora de hacer dobles, los problemas...	09/ 2011
MD	Estas dos niñas que me han subido ahora del otro grupo, ayer las hice salir a hacer la multiplicación por la posición, no cuatro por dos, cuatro por veinte y muy bien. A veces se olvidan del cero, porque como ahora ya lo hacen de las dos maneras, se olvidan. Si dices “Un cuarenta, ¿qué tiene el cuarenta? Un cero. Pues ponlo primero, después multiplica”. O sea, a veces sí, pero bueno, lo normal, ¿no? Yo también me los dejaba, no sé.	03/ 2012
EM	Tienen que tener claro el concepto de multiplicación como una suma de sumandos iguales.	03/ 2012
TM	Otra cosa es que tú veas que están haciendo multiplicaciones y no saben la tabla de multiplicar. Es lo que me está pasando ahora, como tienen muchas estrategias no se las estudian. Tontos no son. Bueno ya les he dejado de margen para final de curso, porque también considero que se las tienen que saber, pero cogen el papel y empiezan a hacerlas sumando y ya está.	03/ 2012
ALG	Hace años que pienso que siempre pedimos a los niños los algoritmos y si eso realmente es tan importante. Lo es, pero creo que tener el concepto claro lo es mucho más. Con mi compañera, después de esa reunión decidimos enseñar la multiplicación aplicando la propiedad distributiva y los niños y niñas lo entendieron en seguida.	03/ 2012
PR	Yo, cada vez que sale un problema de multiplicación, esto lo digo, en cada problema. "No es lo mismo, el resultado es el mismo, pero esto quiere decir esto y eso quiere decir eso”. Entonces, pienso que poco a poco se irá quedando.	01/ 2012
EC	En las clases de mates utilizo mucho las estrategias de cálculo mental. Dejo que los alumnos me expliquen cómo han hecho las cosas.	04/ 2012

Tabla 14. Ejemplos de citas con contenidos matemáticos relevantes

La Tabla 14 muestra un ejemplo de cita o parte de una cita para cada contenido matemático relevante de la Tabla 13.

3.5.2. Reducción avanzada de datos: Conocimiento didáctico matemático

Una vez definidas las citas que informan sobre contenidos matemáticos relevantes, se procede al análisis detallado de cada una con el propósito de estudiar el conocimiento didáctico matemático de Leire.

Identificación de códigos teóricos

La primera elección fue la de no seguir literalmente los códigos teóricos de conocimiento didáctico matemático existentes, sino dejarse impregnar por las teorías estudiadas a fin de que nuestros códigos emergieran de la mirada organizada de datos (Strauss y Corbin, 2002). La acción de inducir códigos de análisis se enmarca en principios de la teoría fundamentada.

Para el análisis del conocimiento didáctico matemático de Leire se realizó una nueva lectura del marco teórico con vistas a identificar aspectos del conocimiento del profesor adecuados para comprender y explicar los datos del caso de Leire. Como se detalló en el capítulo segundo, las componentes del conocimiento del profesor definidas por Shulman (1986, 1987), el conocimiento matemático para la enseñanza definido por Ball *et al.* (2008) y el conocimiento especializado del profesor de matemáticas definido por Carrillo *et al*. (2013), constituyen la base teórica que permite acercarnos a los datos con una mirada específica (ver Figura 11).

Refinamiento de códigos y definición de temas

Con esta base teórica, se procede a la construcción de códigos operativos para indagar el conocimiento didáctico matemático del profesor. Para la codificación emergente inicial se siguieron procedimientos de comparación constante (Glaser y Holton, 2007). Las intervenciones parecidas fueron etiquetadas con el mismo código operativo. Como suele suceder en los procesos iniciales de codificación, el resultado fue un número elevado de códigos, con repeticiones y sin proporcionar suficiente comprensión de las ideas que se representaban. A continuación se muestra el proceso de refinamiento de la codificación y la definición asociada y emergente de temas finales.

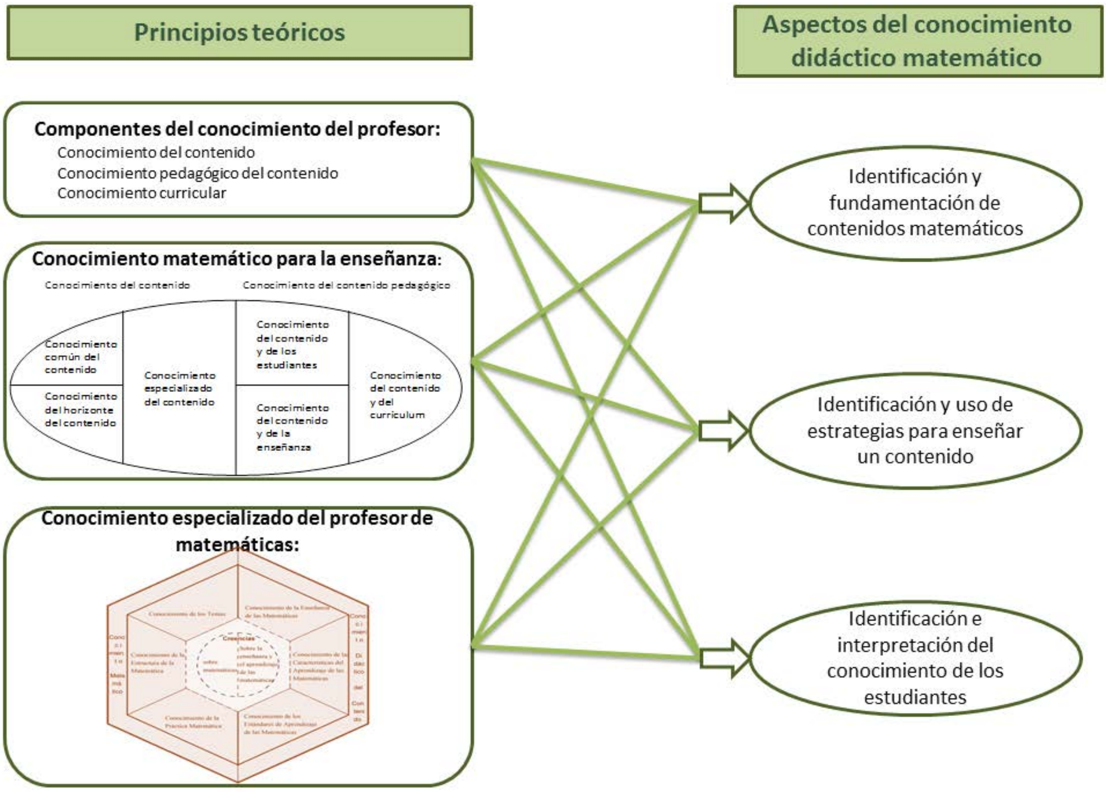


Figura 11. Principios teóricos del conocimiento didáctico del contenido

Respecto del primer aspecto del conocimiento didáctico matemático, *identificación y fundamentación de contenidos matemáticos*, el análisis lleva a encontrar indicios de conocimiento del contenido en los datos en los que se identifican los contenidos matemáticos relevantes, ya sea en contextos de reflexión sobre la enseñanza, como de reflexión sobre el conocimiento de los estudiantes. Por ello, se decide analizar este aspecto no por la definición de códigos sino por la identificación de los contenidos que la teoría muestra como relevantes (ver Tabla 13).

Respecto a los otros dos aspectos del conocimiento didáctico matemático, *identificación y uso de estrategias para enseñar un contenido* e *identificación e interpretación del conocimiento de los estudiantes*, se procede de la siguiente manera. La lectura de datos sugiere nombres o frases que ilustran estos aspectos del conocimiento del profesor. Las denominaciones de algunos de los códigos operativos comenzaron tomándose directamente de las citas y se denominan “códigos *in vivo*”, creados con el fin de destacar el significado que evocan las palabras de la maestra (Strauss y Corbin, 2002). Otros códigos operativos emergen de los datos por sugerir una idea, por ejemplo *error propio*, son los denominados “códigos emergentes”. La comparación constante y teórica llevó a sucesivos refinamientos hasta la definición de quince “códigos refinados”. Finalmente, la agrupación de los códigos refinados que buscan dar respuesta a un fenómeno llevó a la definición de cuatro temas vinculados a los aspectos del conocimiento didáctico matemático del posicionamiento teórico. A continuación se muestra el proceso que llevó a la definición de cada tema y código refinado.

Identificación y uso de estrategias para enseñar un contenido

Una pregunta sugerente para indagar el conocimiento del profesor versa sobre el proceso de enseñanza. Como las fuentes de datos analizadas no son prácticas de aula sino discusiones conjuntas, entrevistas, diarios y guiones de reflexión, las preguntas que se plantean sobre la práctica de aula son indirectas: ¿Qué señala la maestra de su práctica de aula?, ¿qué identifica en la práctica de aula de otros que considere importante para su propia práctica?, ¿qué identifica como importante para la enseñanza de los contenidos matemáticos relevantes? El primer código operativo *in vivo* viene sugerido por la cita extraída de una discusión conjunta, “si trabajamos esto”:

> Formadora: ¿Qué contenidos creéis? ¿Creéis que son muchos a la larga o son pocos los contenidos matemáticos que hay de numeración? ¿O creéis que es gestionable eso de los contenidos?
>
> Leire: Bien, yo creo que si trabajamos esto de la posición y la distributiva, y ya está. (Septiembre 2011)

Leire identifica dos contenidos matemáticos relevantes que considera importantes para afianzar la numeración en los alumnos de ciclo medio: VP y PR. La expresión “si trabajamos esto”, referida a un contenido matemático relevante, se repite con ligeras variaciones en numerosas ocasiones –“al trabajar”, “es muy importante trabajar”, “la gran importancia de trabajar”– que fueron etiquetadas de la misma manera. Leire también menciona la acción de *trabajar* respecto a los contenidos matemáticos que los estudiantes tienen que trabajar para afianzar la numeración:

> [¿Cómo tiene que responder el profesor?] Diciendo que 8+5 son 13 pero que después tiene que sumar 20 + 30. Tiene que trabajar el valor posicional. (Abril 2012)

Al señalar en el cuestionario final qué tiene que trabajar el estudiante en el contexto de la cita, se sobreentiende qué tiene que trabajar el profesor para que el estudiante avance en su desarrollo del pensamiento numérico. Al comparar las citas, todas coinciden en identificar algún contenido matemático relevante que se considera importante que el profesor trabaje para impactar en el desarrollo matemático de los estudiantes. La revisión teórica habla del código Saber qué enseñar y por qué. Se unen estos códigos dando lugar al siguiente código refinado: *Identifica un contenido matemático que enseñar para afianzar el conocimiento matemático de los estudiantes.*

Distinguimos estas citas de aquellas donde se identifica una propuesta para trabajar un contenido matemático relevante:

> Formadora: Decidme cuándo, o sea, ¿cuándo habéis visto que yo he utilizado una estrategia para trabajar el valor posicional?
>
> Leire: Cuando tenían que llegar a cien, en tercero. (Septiembre 2011)

El código *in vivo* que sugiere esta cita es: Otro ha "utilizado una estrategia para trabajar". Aquí el énfasis no está en el contenido sino en una manera de trabajarlo, la estrategia de enseñanza que se ha utilizado otra persona y que Leire ha identificado como adecuada para trabajar un contenido matemático relevante. Otro conjunto de citas que informan de este conocimiento desde la percepción de la propia práctica de enseñanza.

> Hemos trabajado las operaciones trabajando el valor posicional de los números, a parte del algoritmo. En las clases de mates utilizo mucho las estrategias de cálculo mental. Dejo que los alumnos me expliquen cómo han hecho las cosas. (Abril 2012)

Esta respuesta del cuestionario final pone en evidencia la identificación del trabajo de VP y EC en la práctica de Leire. El conjunto de citas reunidas bajo el fenómeno de percibir el trabajo de los contenidos matemáticos relevantes en su propia práctica, no incluye las citas en las que esos contenidos pertenecen al temario de otros cursos que se considerará aparte. La teoría habla del código: emplear distintas estrategias para enseñar un contenido, pero en este caso no se está buscando la diversidad de estrategias de enseñanza sino la identificación de las mismas. La unión de estos códigos lleva a definir el siguiente: *Identifica prácticas de enseñanza para trabajar un contenido matemático.*

Los códigos teóricos "distinguir un contenido en textos" y "conocimiento de recursos" llevan a prestar atención al uso que Leire hace de textos para la enseñanza. Por ejemplo, en una discusión conjunta, Leire comienza manifestando su contradicción por la forma en que los libros suelen responder a cuántas decenas tiene 148:

> Es que aquí está el problema: "Tengo cuatro decenas…" Todos los libros de mates. No te dicen "Tengo catorce decenas". (Septiembre 2012)

Leire identifica aquí el problema entre el valor de la cifra que está en la posición de decenas y la cantidad de decenas que contiene el número 148 (VP). La característica de las citas dentro de estos códigos es la mirada crítica al libro de texto en cuanto a la manera de trabajar el contenido de este estudio. El código refinado que se define es *considera el trabajo de los contenidos matemáticos en el libro de texto.*

Los códigos anteriores coinciden en versar sobre el conocimiento de la enseñanza fijando la atención en el contenido matemático. A consecuencia, se define el tema ***Conocimiento de estrategias de enseñanza del contenido matemático*** que engloba los siguientes códigos refinados:

- *Considera el trabajo de los contenidos matemáticos en el libro de texto*: alude a una mirada crítica, positiva o negativa, sobre el tratamiento de los contenidos matemáticos en los textos.
- *Identifica un contenido matemático que enseñar para afianzar el conocimiento matemático de los estudiantes*: señala algún contenido matemático relevante que se considera importante que el profesor trabaje para el desarrollo matemático de los estudiantes
- *Identifica prácticas de enseñanza para trabajar un contenido matemático*: señala una estrategia de enseñanza utilizada y que ha identificado como adecuada para trabajar un contenido matemático relevante

Otra mirada sobre la enseñanza es la toma de conciencia de problemas en la práctica de enseñanza. Esta mirada parte de algunos códigos *in vivo* definidos en la primera codificación. Un ejemplo se extrae de la lectura de la transcripción de la primera sesión de discusión conjunta:

> Leire: Yo tengo una pregunta. Cuando comenzamos a enseñar a sumar, a restar..., o sea, yo pienso que hacemos... cifras. No insistimos en, yo qué sé, por ejemplo, esto que tú has dicho ahora: "ciento veintitrés más catorce". Tú haces: tres más cuatro, siete. Dos más uno...; pero no vemos que quedan "doce [decenas] más [una decena]", ¿me explico?
>
> Formadora: Ciento veintitrés..., por ejemplo. *…+
>
> Formadora: Tres y cuatro, siete; dos y uno, tres...
>
> Leire: Esto es lo que hacemos.
>
> Formadora: Esto es lo que se hace, pero aquí no se trabaja el valor posicional.
>
> Otros: Vale.
>
> Leire: ¿Cómo?, ¿cómo lo podríamos hacer?, esto quiero yo. (Septiembre 2011)

Esta cita fue identificada por versar fundamentalmente sobre los contenidos VP y ALG, detectado en la intervención primera de Leire al plantear la enseñanza de los algoritmos aritméticos básicos mediante operaciones con cifras exentas del valor numérico de cada dígito. En la lectura de esta cita se destaca la pregunta final de Leire: *¿Cómo?, ¿cómo lo podríamos hacer?* Por la expresividad de la frase se decide seleccionarla como código *in vivo.* Leire comienza con un cuestionamiento de <u>una práctica de enseñanza habitual</u> en la escuela y en su práctica. A su vez, la pregunta final evidencia el <u>interés por considerar un cambio de práctica</u>. Ambas características –cuestionamiento de una práctica de enseñanza habitual e interés por considerar un cambio de práctica– aparecen en una reflexión posterior:

> Personalmente, este cursillo me ha ayudado a plantearme muchas cosas: desde cómo enseño yo a los niños y niñas, cómo poderlo hacer cada vez mejor, los errores que cometo explicando... (Marzo 2012)

Con la lectura del resto de citas, el código *¿Cómo?, ¿cómo lo podríamos hacer?* se vuelve a utilizar en diversas ocasiones. La relectura de las citas etiquetadas con este código confirma el significado del código de conocimiento de Leire y distingue las citas así codificadas de otras parecidas, pero que no responden a estas características. Las diferencias llevan a adoptar para el código *in vivo* inicial la denominación: *Muestra interés por un cambio de práctica.*

Otro planteamiento sobre la práctica de enseñanza es aquel que responde a una identificación de una dificultad en la enseñanza. Dicha identificación conlleva una pregunta implícita sobre cómo realizar esa práctica de enseñanza, pero no se manifiesta una disposición explícita al cambio. La diferencia con el código anterior está en la ausencia de búsqueda de una respuesta que produzca un cambio de práctica. Por ejemplo sobre los juegos matemáticos para trabajar estrategias de cálculo:

> Si yo tengo que hacer estos juegos, yo que no los he hecho nunca, yo no domino, no saco esas estrategias. (Abril 2013)

Así se define el código *Manifiesta una dificultad para innovar una práctica de enseñanza.*

Otra manera de indagar es mediante las dificultades o errores hallados en el tratamiento de los contenidos matemáticos relevantes. Por ejemplo, en el diario personal, tras el análisis conjunto de un vídeo-episodio de Leire, ella escribe:

> Después de ver el vídeo de mi actuación, me he dado cuenta del error que cometía explicando la estrategia, referente al lenguaje matemático $[12 \times 11 = 12 \times 10 = 120 + 12 = 132]$. De hecho, estos días he detectado que algunos alumnos cometían el mismo error y por tanto ya lo estoy corrigiendo. Estoy mucho más atenta a este tipo de errores. (Marzo 2012)

La característica que se señala para definir el código emergente es que identifica un error suyo en el uso del signo igual, sin respetar que el valor numérico de las operaciones se mantenga constante en cada lado de la igualdad; y utilizar incorrectamente la propiedad distributiva que sostiene la estrategia de cálculo empleada PR y EC. Por este motivo se define el siguiente código: *identifica un error propio sobre un contenido matemático.*

Los tres códigos mencionados son distintos y relacionados entre sí. Pertenecen al aspecto de *identificación y uso de estrategias para enseñanza un contenido*, pero con el matiz de la conciencia de una dificultad. Además, al preguntar durante el análisis '¿qué pasa aquí?' (Strauss y Corbin, 2002), se observa que describen el fenómeno de "cuál es la mirada de la maestra sobre problemáticas de la práctica". La consideración de este fenómeno lleva a definir el siguiente tema: ***Conocimiento de cuestiones problemáticas de la práctica de enseñanza.*** La definición de los códigos refinados que engloba este tema es:

- *Manifiesta una dificultad para innovar una práctica de enseñanza*: aquí se muestra la percepción de Leire de tener alguna dificultad en la práctica de enseñanza. En general se refiere a formas de enseñanza que nunca ha utilizado, sin que estas busquen sustituir a otras prácticas habituales de enseñanza que no le convenzan. Tampoco se manifiesta un interés concreto por considerar un cambio de práctica.
- *Identifica un error propio sobre un contenido matemático*: identificación y corrección de un error propio en el trabajo matemático de los contenidos.
- *Muestra interés por un cambio de práctica*: Identifica una práctica de enseñanza que se considera problemática, ya sea por no favorecer el trabajo de ciertos contenidos matemáticos que desea trabajar, ya por trabajarlos de una forma nueva. Pone de manifiesto un deseo concreto de cambiar o incorporar a su práctica.

Finalmente, dentro del aspecto de Identificación y uso de estrategias para enseñar un contenido, se considera que entra el conocimiento práctico de las relaciones entre contenidos, puesto que no se está mirando desde una perspectiva puramente matemática, sino desde una perspectiva de enseñanza en clave de continuidad. La pregunta que se plantea durante el análisis de los datos es la relación en la enseñanza de un contenido con otros contenidos de otros cursos o materias.

> Investigadora: Me ha sorprendido porque ponen bien los paréntesis... ¿cuándo se hace esto?
>
> Leire: Esto, en cuarto se hace la propiedad distributiva. Pero claro, si hacemos así la multiplicación es mucho más fácil, porque esto es lo que están haciendo mentalmente, lo único que aquí les hago que lo escriban, por eso se hacen un lío.

> Porque esto mentalmente, sí, ya hacen tres por dos y tres por diez o tres por dos y tres por una decena, ya que estamos insistiendo en esto. (Febrero 2013)

En esta entrevista, Leire identifica el trabajo que hace de un contenido matemático relevante, PR, perteneciente al currículum del curso siguiente al suyo. Se hace referencia a la relación entre su práctica de enseñanza y el currículum de cursos posteriores, por lo que se denomina al código de conocimiento didáctico matemático: *identifica el trabajo de contenidos matemáticos de cursos posteriores en su práctica.*

El conocimiento vertical (Shulman, 1986) dentro del conocimiento del currículum incluye el conocimiento de lo que se verá más adelante y tiene relación con lo que se hace en el presente, además de la consideración de lo enseñado en cursos precedentes. Este conocimiento permite por un lado no detenerse demasiado en la explicación de lo enseñado, y por otro establecer puentes entre conocimientos previos y aquellos en proceso de construcción. Hay indicios de este conocimiento si al comparar la práctica matemática de los estudiantes con prácticas del curso anterior, se observa desarrollo del pensamiento numérico.

> De hecho, los niños ya vienen con la resta. Yo no insisto mucho en eso. (Noviembre 2012)

Este ejemplo de una entrevista pone de relieve el conocimiento de la sustracción que traen los estudiantes del curso anterior al que Leire imparte. Resta que enseñan descomponiendo el minuendo en caso de necesidad. Denominamos este código del conocimiento *identifica el trabajo de contenidos matemáticos en cursos precedentes.*

Otra dimensión del conocimiento del currículum es el conocimiento horizontal, es decir, las relaciones entre los contenidos que se estudian en un curso académico: *relaciona contenidos intra/extramatemáticos con contenidos matemáticos.* La siguiente cita extraída de una entrevista es un ejemplo de este código:

> Leire: Y yo, veo esto, que si tú vas a trabajando la posición de los números, luego le es mucho más fácil, todo. El razonamiento matemático es mucho más sencillo.
>
> Investigadora: Va todo unido, verdad.
>
> Leire: Todo. Los kilómetros… Para pasar de kilómetros a metros, a decímetros…, aquel tema era un rollo y decías: "¡Madre mía!", no lo entendían, en ningún momento.
>
> Investigadora: Sí. ¿Y cómo lo has hecho, o sea, cómo lo explicabas?
>
> Leire: Es que claro, como ha ido saliendo con los problemas de cálculo mental. A ver, pues más bien, yo no sé explicar mucho en términos… vale, yo que sé: si un

> kilómetro son mil metros, pues cuatro kilómetros son..., o sea, una regla de tres, enseguida te lo pillan, también visualmente lo perciben. (Marzo 2012)

La relación entre contenidos intramatemáticos en esta cita se da entre unidades de medida de longitud y sistema decimal posicional, en concreto con el VP.

El tema que engloba estos códigos es el ***Conocimiento práctico de las relaciones entre contenidos matemáticos de diferentes materias/cursos***. Los códigos se explican a continuación:

- *Relaciona contenidos intra o extramatemáticos con contenidos matemáticos*: realiza en su práctica conexiones entre los contenidos que se estudian en el curso académico del nivel que ella imparte con contenidos matemáticos relevantes.
- *Identifica el trabajo de contenidos matemáticos en cursos precedentes*: hace notar lo que se vio o debe estudiarse en cursos precedentes y que le permite en la práctica de enseñanza no detenerse demasiado en su explicación, o aprovechar para repasar y afianzar.
- *Identifica el trabajo de contenidos matemáticos de cursos posteriores*: señala el trabajo en su práctica de aula sobre un contenido matemático relevante con percepción de que el contenido pertenece al currículum de cursos posteriores o prepara a futuros contenidos.

Identificación e interpretación del conocimiento de los estudiantes

El aspecto del conocimiento sobre los estudiantes lleva a identificar nuevos códigos.

El código *in vivo* tomado de una expresión espontánea de Leire durante una sesión de discusión conjunta "Esto no lo entienden para nada" es un ejemplo de este aspecto.

> Formadora: Son diez decenas. O cien unidades. Ahora bien, en la posición de las unidades, ¿qué cifra tenemos? Cero.
>
> Leire: Esto no lo entienden para nada. (Septiembre 2011)

Esta cita había sido identificada por versar sobre el contenido VP, al enfatizar la diferencia entre el valor del número –cien unidades– y la cifra situada en la posición de unidades –cero–. La expresión de Leire *Esto no lo entienden para nada*, expresa la percepción de una dificultad generalizada entre los estudiantes al respecto.

La comparación con la literatura llevó a fusionar este código con el código teórico *Distingue tareas difíciles/fáciles/estimulantes* y con el de *Conoce las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje.* Al fusionar con estos códigos teóricos se enfatiza el hecho de conocer de antemano la dificultad que puede ocasionar una tarea matemática, o bien qué tarea puede resultar estimulante y/o fácil. Sin embargo, la revisión de las citas no sugiere tanto interés en lo que resulta fácil a los estudiantes, por saber unos contenidos o procedimientos, sino más bien en las tareas que facilitan la comprensión de un contenido matemático. Por lo que el nombre del código refinado es *distingue la complejidad y/o potencial de una tarea.*

Las características mencionadas, conocer de antemano la dificultad y pensar que es una dificultad generalizada entre los estudiantes, distinguen este código de otro empleado en el estudio: *identifica qué contenido matemático no es comprendido por el alumno.* Con este código se enfatiza la identificación de la dificultad ajustándose a la tarea propuesta. Además, se enfoca la dificultad identificada en contenidos matemáticos relevantes señalados en la Tabla 13.

A continuación se pone un ejemplo del cuestionario inicial en el que se identifica un problema de comprensión del valor de los números que resultan de una operación, VP.

> [Analiza la respuesta escrita de alumnos de primaria en los siguientes algoritmos estándar]
>
> Caso 1: $\begin{array}{r} 28 \\ \underline{+\ 35} \\ 513 \end{array}$ Caso 2: $\begin{array}{r} 54 \\ \underline{-\ 28} \\ 34 \end{array}$
>
> [¿Qué le ha llevado a este error?]
>
> Caso 1: No entiende que el 1 del 13 es una decena. (Septiembre 2011)

Otra mirada sobre la comprensión de los estudiantes sobre el contenido se obtiene de la mirada a las respuestas correctas. Sigue un ejemplo donde Leire identifica que la formadora está hablando de una propiedad de las operaciones aritméticas al explicar en una sesión de discusión conjunta la estrategia de cálculo de una estudiante.

> Formadora: En el otro caso, esta niña hace diez por tres, ahora digo una cosa. Esta niña hace diez por tres más uno por tres. Propiedad distributiva.
>
> Leire: Eso iba a decir yo, esto es una propiedad. La distributiva. (Septiembre 2011)

Leire identifica un contenido matemático relevante sin vinculación a la enseñanza del profesor ni a dificultades de los estudiantes. El hecho de no poder ajustar este código a códigos establecidos marca su rasgo característico. Esto es, se centra en la identificación de respuestas correctas de los estudiantes. Así, el código de conocimiento definido es *identifica un contenido matemático en la respuesta correcta de un estudiante,* como paso previo a una interpretación que puede darse o no.

El trabajo de refinar los distintos códigos sigue con la identificación de repeticiones en los códigos operativos. Por ejemplo, el código *describe estrategias utilizadas* sugerido durante el análisis de datos, indica dentro del foco del conocimiento del profesor, la descripción matemática de respuestas de estudiantes. Para distinguir este código del recién definido, se realizó una pregunta con la herramienta de consulta de Atlas.ti: ¿Qué información ofrecen las citas codificadas con *describe estrategias utilizadas* Y NO *identifica un contenido matemático relevante en una respuesta correcta de un alumno*? La respuesta es que ninguna, pues siempre que describe alguna estrategia lo hace utilizando alguno de los contenidos matemáticos relevantes. Se decidió desechar el código *describe estrategias utilizadas*.

Otro ejemplo de duplicación es el siguiente: se había utilizado el código teórico *detecta enunciados erróneos* como muestra de un conocimiento que capacita para evaluar la validez de las respuestas de estudiantes. La lectura de datos sugirió el código *corrige la práctica de un alumno*. La codificación inicial de las citas identificadas utilizó ambos códigos. Pero al preguntar qué sabe Leire de los contenidos matemáticos relevantes y querer distinguir su conocimiento del contenido de la práctica de enseñanza surge la pregunta de si Leire identifica respuestas erróneas sin corregir la práctica del alumno. Se utilizó la herramienta de consulta de Atlas.ti para responder a esta pregunta y el resultado fue que solo en el cuestionario inicial hay una cita en la que se identifica una respuesta errónea sin corregirla, pese a que el cuestionario indagaba sobre la respuesta por parte del profesor.

> [Analiza la respuesta escrita de alumnos de primaria en los siguientes algoritmos estándar]
>
> $$\text{Caso 1: } \begin{array}{r} 28 \\ \underline{+\,35} \\ 513 \end{array} \qquad \text{Caso 2: } \begin{array}{r} 54 \\ \underline{-\,28} \\ 34 \end{array}$$
>
> [¿Qué le ha llevado a este error?]
>
> Caso 1: No entiende que el 1 del 13 es una decena
>
> Caso 2: Porque ha comenzado por el número + grande
>
> [¿Cómo ha de responder el profesor?]
>
> Preguntando cómo lo ha hecho. (Septiembre 2011)

Este análisis llevó a fusionar *detecta enunciados erróneos* y *corrige la práctica de un alumno,* a la vez que lleva al interés por cómo corrige, es decir, por el conocimiento sobre estrategias de enseñanza que se puede indagar en los datos y que se explica más adelante.

También se comparó el código teórico ya fusionado *detecta enunciados erróneos* con el indicador definido en *identifica qué contenido matemático no es comprendido por el alumno.* El análisis de las citas codificadas con estos indicadores volvía a mostrar duplicación, por lo que se decidió desechar el código teórico.

Esta mirada sobre lo que Leire percibe del conocimiento del contenido en sus estudiantes lleva a definir el siguiente tema: ***Conocimiento de las relaciones de los estudiantes con el contenido matemático***, y a considerar que se compone de los siguientes códigos:

- *Distingue la complejidad y/o potencial de una tarea:* alude a conocer de antemano una dificultad generalizada para los estudiantes, por lo que se reconocen tareas matemáticas que causan dificultad o facilitan la comprensión de los estudiantes.
- *Identifica qué contenido matemático no es comprendido por el alumno*: muestra la capacidad de identificar en una circunstancia concreta un contenido matemático relevante que resulta confuso para un estudiante.
- *Identifica un contenido matemático en respuestas correctas de estudiantes*: identifica en las respuestas de estudiantes un contenido matemático relevante.

El resultado del proceso de codificación es la identificación de cuatro temas divididos en quince códigos de conocimiento didáctico matemático. Los tres primeros temas están relacionados con el aspecto de identificación y uso de estrategias para la enseñanza del contenido y el último con el aspecto de identificación e interpretación del conocimiento de los estudiantes tal y como muestra la Tabla 15.

3.5.3. Reducción última de datos: Cambio en el conocimiento didáctico matemático

Chapman (2013) sugiere la investigación sobre el conocimiento del profesor para profundizar en el estudio de cómo los maestros de matemáticas se apropian y transforman ese conocimiento en la práctica. Así, tras el análisis del conocimiento didáctico matemático, con vistas a responder al tercer objetivo de la investigación que busca posibles influencias de la intervención formativa, se establecen los siguientes pasos de análisis:

- Identificar cambios en el conocimiento didáctico matemático de Leire.
- Establecer relaciones entre la intervención formativa y cambios identificados

Códigos operativos	Código refinado	Tema
Código in vivo: "Si trabajamos esto"	Identifica un contenido matemático que enseñar para afianzar el conocimiento matemático de los estudiantes	Conocimiento de estrategias de enseñanza del contenido matemático
Código teórico: Saber qué enseñar y por qué		
Código in vivo: "Utilizado una estrategia para trabajar"	Identifica prácticas de enseñanza para trabajar un contenido matemático	
Código teórico: Emplear distintas estrategias para enseñar un contenido		
Código teórico: Distinguir un contenido en textos	Considera el trabajo de los contenidos matemáticos en libros de texto	
Código teórico: Conocimiento de recursos		
Código emergente: Dificultad en la enseñanza	Manifiesta una dificultad para innovar una práctica de enseñanza	Conocimiento de cuestiones problemáticas de la práctica de enseñanza
Código emergente: Error propio	Identifica un error propio sobre un contenido matemático	
Código in vivo: "¿Cómo?, ¿cómo lo podríamos hacer?"	Muestra interés por un cambio de práctica	
Código teórico: Relaciona un contenido matemático presente en varias materias.	Relaciona contenidos intra/extramatemáticos con contenidos matemáticos relevantes	Conocimiento práctico de las relaciones entre contenidos matemáticos de diferentes materias/cursos
Código teórico: Relacionar temas matemáticos		
Código teórico: Detectar contenidos de cursos precedentes que se relacionan con un contenido.	Identifica el trabajo de contenidos matemáticos en cursos precedentes	
Código teórico: Detectar contenidos de cursos posteriores que se relacionan con un contenido.	Identifica el trabajo de contenidos matemáticos de cursos posteriores	
Código teórico: Describe estrategias utilizadas por estudiantes	Identifica un contenido matemático en una respuesta correcta de un alumno	Conocimiento de las relaciones de los estudiantes con el contenido matemático
Código in vivo: "Esto no lo entienden para nada"	Distingue la complejidad y/o potencial de una tarea	
Código teórico: Distingue tareas difíciles/fáciles/estimulantes		
Código teórico: Conoce las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje		
Código teórico: Identifica características de la comprensión de los estudiantes sobre un contenido	Identifica qué contenido matemático no es comprendido por el alumno	
Código teórico: Detecta enunciados erróneos		
Código emergente: Corrige la práctica de un alumno		

Tabla 15. Temas y Códigos refinados

Para analizar este proceso, se definen indicadores de desarrollo del conocimiento didáctico del contenido. Los indicadores definidos a continuación surgen de la atención al desarrollo cognitivo considerando su reflejo en la reflexión y la práctica de enseñanza. Son una adaptación y ampliación de los utilizados en una investigación previa (Moreno, 2012). Esta definición de indicadores está influenciada por algunos de los indicadores de la comprensión de la práctica establecidos por Carrillo y Climent (2011) para la identificación de evidencias de desarrollo de los profesores.

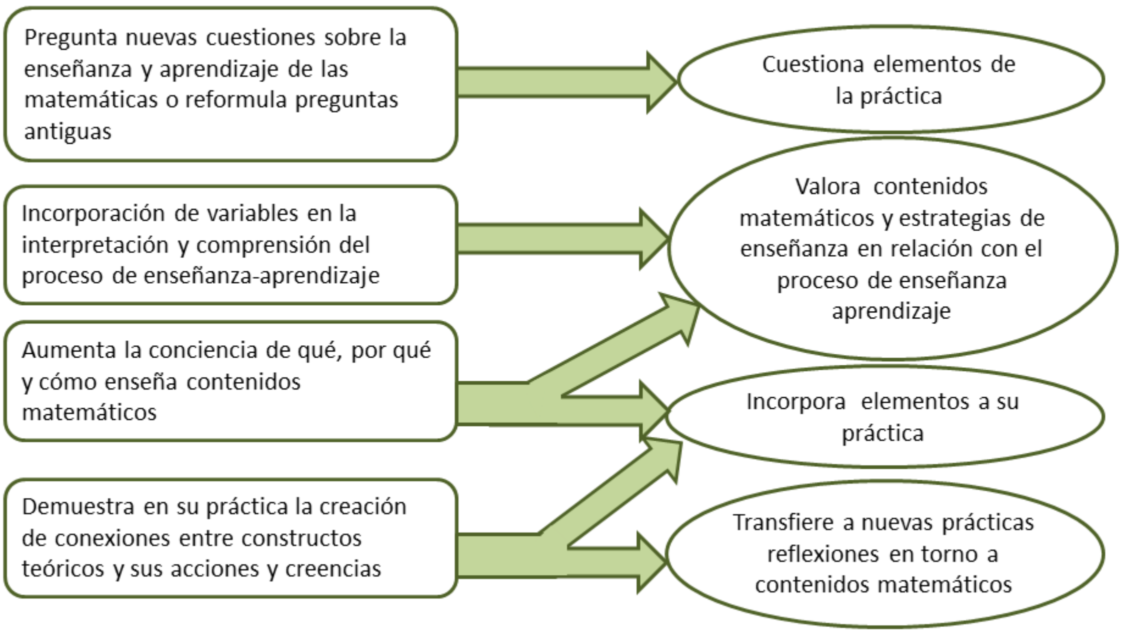


Figura 12. Influencia de indicadores teóricos en la definición de indicadores de desarrollo

Los indicadores de desarrollo definidos son los siguientes:

- ***Cuestiona elementos de la práctica***: afirma desconocer o se interroga sobre algún contenido matemático relevante en relación con la enseñanza y aprendizaje; esto es: qué, por qué, cómo o para qué enseñar un contenido en orden al aprendizaje.
- ***Valora contenidos matemáticos y estrategias de enseñanza en relación con el proceso de enseñanza aprendizaje***: emite un juicio de valor sobre algún contenido matemático relevante en relación con la enseñanza y el aprendizaje; esto es: qué, por qué, cómo o para qué enseñar un contenido en orden al aprendizaje. O valora una estrategia de enseñanza por los resultados que observa en relación con el aprendizaje de los alumnos.
- ***Incorpora a su práctica***: refleja en su práctica de aula actuaciones relativas a lo previamente cuestionado o valorado. Se incluyen en este indicador las prácticas que, una vez incorporadas, se mantienen a lo largo del tiempo. Se considera importante la sostenibilidad del cambio, es decir, que la práctica introducida tras

el cuestionamiento o valoración de su importancia, se mantenga a lo largo de un periodo de tiempo relativamente extenso, superior a un curso escolar.

- ***Transfiere a nuevas prácticas reflexiones sobre contenidos matemáticos***: realiza nuevas prácticas de aula sobre unos contenidos que incorporan resultados de reflexiones anteriores referentes a estrategias de enseñanza o a contenidos distintos.

El siguiente paso de este análisis es localizar secuencias de citas que están relacionadas por versar sobre el mismo contenido matemático relevante. La herramienta informática de análisis cualitativo Atlas.ti permite vincular las citas relacionadas. Para vincularlas se definieron dos nuevas relaciones denominadas “Evidencia un cambio” y “Práctica mantenida” (ver Figura 13). Estas relaciones dan cuenta de una variación en la comprensión de la práctica. El paso de un cuestionamiento sobre un elemento de la práctica a una valoración o incorporación a la práctica “evidencia un cambio”. Si la incorporación a la práctica de una estrategia de enseñanza referente a un contenido concreto se mantiene a lo largo del tiempo, las citas que dan cuenta de esa sostenibilidad en el tiempo se vinculan con la relación “práctica mantenida”.

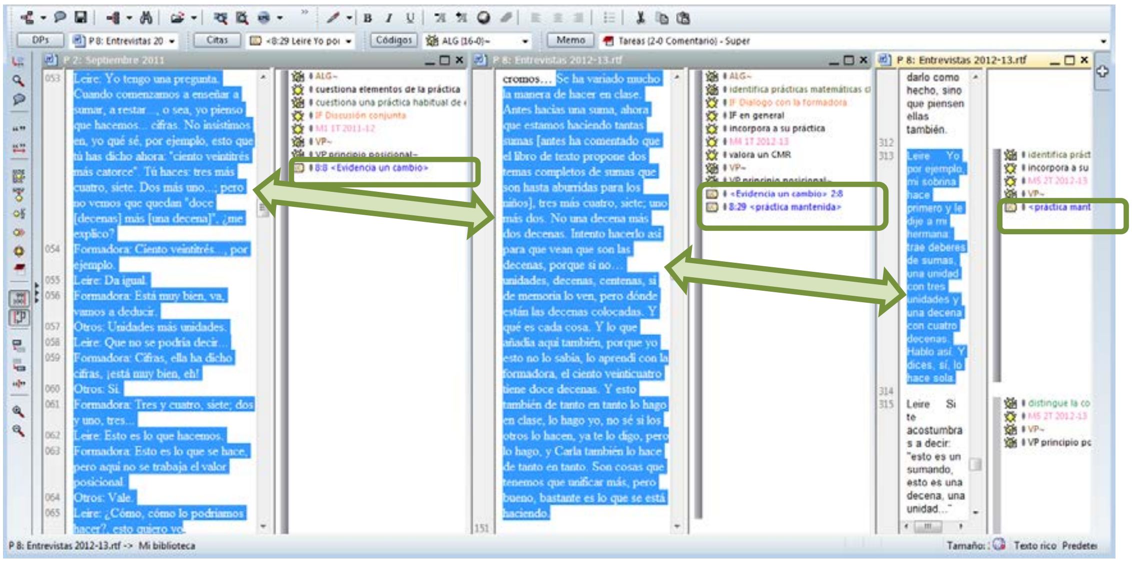


Figura 13. Ejemplo de cambio identificado y mantenido

El ejemplo de cambio identificado de la Figura 13 versa sobre el algoritmo de la suma aritmética y el valor posicional de las cifras de los sumandos, ALG y VP. En septiembre de 2011, Leire *cuestiona* cómo enseñar el algoritmo de la suma, pues identifica que su práctica habitual no se corresponde con el tratamiento de los contenidos que hace la formadora. En noviembre de 2012, Leire expone su forma de trabajar el algoritmo de la suma con sus alumnos, con lo que se evidencia que *incorpora a su práctica* la explicación proporcionada por la formadora en el 2011. También argumenta que lo hace así para que estos comprendan mejor el valor posicional de los números, con lo que muestra que *valora el VP en relación con el proceso de aprendizaje*. En febrero de 2013, vuelve a evidenciar el trabajo del valor posicional en el algoritmo de la suma, hablando de cómo ayuda a su sobrina de primero de primaria. Por ello, se considera que la práctica se mantiene a lo largo del tiempo.

Una vez identificados los cambios en el conocimiento didáctico de Leire, se consideran las relaciones evidenciadas por Leire entre los instrumentos formativos utilizados durante la intervención y su apreciación de un desarrollo en el conocimiento didáctico matemático. Estos instrumentos formativos fueron descritos a la hora de caracterizar la intervención formativa, en el segundo apartado del capítulo tercero. Se considera que una cita está vinculada a un instrumento formativo si: (I) menciona explícitamente la influencia de un instrumento formativo; (II) hace referencia a reflexiones o decisiones tomadas en las discusiones conjuntas o con la formadora; (III) incorpora a la práctica estrategias de enseñanza observadas o explicadas en los instrumentos formativos que afirma no haber usado antes.

En el ejemplo de la Figura 13, Leire menciona la influencia de la formadora en su comprensión del conocimiento del valor posicional. El contexto de la primera cita mostrada indica la influencia de la discusión conjunta en la que Leire cuestiona a la formadora sobre cómo enseñar el algoritmo.

4 Análisis y Resultados

Se plantea a continuación el análisis en orden a la consecución de los objetivos para responder a la pregunta de investigación. No se pretende afirmar categóricamente qué sabe la profesora, sino que se analizan los conocimientos que manifiesta en sus intervenciones escritas u orales mediante una triangulación de fuentes que permita hallar indicios de un cierto conocimiento.

4.1. Identificación de contenidos matemáticos relevantes para el aprendizaje de la multiplicación

Para abordar la pregunta de investigación, se comienza identificando los contenidos matemáticos relevantes para el aprendizaje de la multiplicación desde la comprensión del sistema decimal posicional considerados por Leire en los datos recogidos. Esta primera fase del análisis se corresponde con la consecución del primer objetivo. En este punto, la presentación del análisis por la que se opta gira sobre los contenidos matemáticos, buscando señalar qué aspectos de los reseñados por la teoría como clave son identificados y cuáles no. La Tabla 13 presentada en el capítulo tercero enumera los contenidos que en el marco teórico se han indicado como matemáticamente relevantes y que guían esta fase de análisis.

Según la estructura de la Tabla 13, se divide el apartado en tres secciones correspondientes al conocimiento de la estructura del sistema decimal posicional, el concepto de multiplicación y su cálculo. La Tabla 16 da una visión general de los contenidos identificados por Leire en los datos primarios recogidos. Esta Tabla 16 no alude a la frecuencia de aparición de cada contenido matemático relevante, puesto que no se señala el número de veces que aparece en una fuente de datos.

A continuación se desglosan estos contenidos situándolos en su contexto dentro de la intervención formativa. Esto ayudará más adelante a la discusión de la posible influencia de la intervención en los resultados sobre los dos primeros objetivos de identificación y caracterización.

Fecha	Fuente de datos	Contenidos matemáticos relevantes							
M0 septiembre 2011	Cuestionario inicial	VP	CD				ALG	PR	EC
M1 – 1T 2011-12	Discusión conjunta	VP	CD				ALG	PR	EC
	Guión de reflexión		CD						EC
	Diario personal								EC
M2 – 2T 2011-12	Discusión conjunta		CD				ALG	PR	EC
	Guión de reflexión	VP	CD				ALG		
	Diario personal	VP					ALG	PR	EC
M3 – 3T 2011-12	Entrevista	VP	CD	EM	TM	MD	ALG	PR	EC
	Discusión conjunta			EM				PR	
	Guión de reflexión	VP		EM				PR	EC
	Diario personal							PR	
	Cuestionario final	VP	CD					PR	EC
M4 – 1T 2012-13	Discusión conjunta	VP							
	Guión de reflexión	VP	CD						EC
	Entrevista (06/11)	VP	CD				ALG		EC
	Entrevista (16/11)	VP	CD		TM		ALG	PR	
	Entrevista (10/12)				TM				EC
M5 – 2T 2012-13	Guión de reflexión		CD			MD			EC
	Diario personal	VP	CD						
	Entrevista	VP	CD	EM	TM	MD	ALG	PR	EC
M6 – 3T 2012-13	Discusión conjunta	VP	CD	EM			ALG	PR	EC
	Guión de reflexión	VP	CD	EM					
	Diario personal							PR	

Tabla 16. Identificación de contenidos matemáticos relevantes en las fuentes de datos

4.1.1. Aproximación al sistema decimal posicional

Se presentan los resultados sobre contenidos matemáticos relacionados con el sistema decimal posicional que Leire da muestra de considerar relevantes. Según el análisis realizado, se recoge la frecuencia de documentos primarios en los que aparecen estos contenidos. Esta frecuencia se mide según aparezca o no en una fuente de datos primaria, sin contabilizar la cantidad de menciones que hace de ese contenido en un mismo documento.

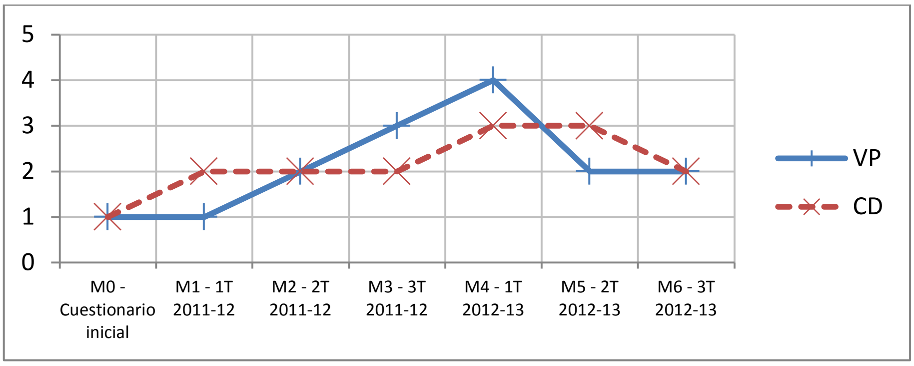


Figura 14. Aparición de los contenidos VP y CD en las fuentes de datos

La Figura 14 da cuenta de que el valor posicional y la composición y descomposición numérica son elementos que se han mostrado presentes a lo largo de todo el proceso de recogida de datos.

<u>Valor posicional</u>

En relación con el sistema decimal posicional, se comienza analizando VP a fin de identificar los elementos clave en la comprensión del valor posicional de los números considerados por Leire. Siguen ejemplos de cada elemento clave identificado.

- <u>Principio posicional: Distinción entre dígito y valor que representa dentro del número según posición</u>

En la respuesta a la pregunta 7 del cuestionario inicial, pasado al principio del estudio, Leire identifica la distinción entre el dígito situado en la posición de las decenas, el uno, y la cantidad que representa, una decena:

> No entiende que el 1 del 13 es una decena. (Septiembre 2011)

Esta distinción aparece en varias ocasiones. A modo de ejemplo, se presenta otra cita del curso siguiente, que muestra cómo Leire identifica que “cuatro” es la respuesta a la pregunta de qué dígito del número 143 está en la posición de decenas, mientras que la respuesta a la pregunta de cuántas decenas tiene el número 143 es “catorce decenas”.

> Bueno en el [ciclo] medio se puede hacer poniendo ciento cuarenta y tres y aquí está, hay catorce [decenas]... Cambiaría los números... Claro, los niños que ya te lo saben hacer... Yo lo estoy haciendo en clase, ¿cuántas decenas hay? Hay catorce. 'Cuatro'. No, cuatro es la cifra de las decenas... Yo añadiría [la pregunta] ¿y cuántas unidades hay? En el [ciclo] inicial serían unidades y en el [ciclo] medio pondría unidades, decenas y centenas. (Noviembre 2012)

En la cita que se presenta a continuación, Leire no solo identifica el principio posicional de los números sino que alude a que los estudiantes pueden utilizar los nombres de las unidades de la numeración sin asociar esos nombres a la cantidad que representa.

> Intento hacerlo así para que vean qué son las decenas, porque si no… unidades, decenas, centenas, sí de memoria lo ven, pero dónde están las decenas colocadas. Y qué es cada cosa. Y lo que añadía aquí también, porque yo esto no lo sabía, lo aprendí con la formadora, el ciento veinticuatro tiene doce decenas. (Noviembre 2012)

La investigación de Clivaz (2012) pone en evidencia que hay profesores que utilizan las expresiones valor posicional, centenas, decenas… como nombres de columnas en las que se organizan los números sin dotarlas de significado matemático. La cita de Leire antes señalada evidencia el conocimiento de este contenido relevante.

- <u>Principio decimal: una unidad de la numeración corresponde a diez unidades del orden inferior</u>

En la discusión mantenida entre la formadora y los maestros del ciclo medio, Leire muestra conocer la relación entre unidades de distintos órdenes:

> Formadora: Una centena, vale, pero si yo analizo hasta aquí el número, mirad.
>
> Otros: Una centena.
>
> Leire: Son diez decenas.
>
> Otros: Diez decenas.
>
> Formadora: Son diez decenas. O cien unidades. Ahora bien, en la posición de las unidades, ¿qué cifra tenemos? Cero. (Septiembre 2011)

Más explícitamente, Leire identifica el principio decimal en la revisión de tareas basadas en el material manipulativo multibase:

> Leire: Aquí puedes enganchar a muchos.
>
> Formadora: Pero enganchar con errores de qué tipo.
>
> Leire: Los que no tengan claro todavía que cada diez decenas es una centena, o que cada diez unidades es una decena. Que son grupos de diez. Es que el que tiene claro esto, que son grupos de diez, después... (Noviembre 2012)

Se evidencia la identificación del principio decimal para la conversión de centenas a decenas y de decenas a unidades, aunque en los datos no hay ejemplos de conversión entre unidades de órdenes superiores. Al comenzar el análisis de las tareas basadas en el material multibase, Leire identifica el problema de la escasez de cubos, piezas que simbolizan la unidad de mil. A esas alturas del curso, en tercero, comienzan a estudiar las unidades y decenas de mil. Por eso ve una limitación en el material, aunque piensa que puede fabricar una ampliación en la materia de plástica. Esta anotación adquiere importancia porque, según Tempier (2016), los alumnos de estas edades pueden realizar con éxito conversiones entre unidades de orden inferior sin garantizar su extensión natural a conversiones de órdenes superiores.

- El cero como ausencia de unidades de algún orden

Este elemento no se observa en los datos. Una de las tareas con material multibase preparadas por la investigadora para que Leire revisase contenía la tarea: *De manera simbólica [con números] representa la cantidad que representa esta combinación de piezas del multibase [cuatro placas y tres unidades]*. Intencionadamente no aparecían piezas de decenas, con lo que la representación numérica 403 incluye el cero como ausencia de unidades de segundo orden. Este elemento no fue identificado por la maestra. Lo mismo sucedió con la siguiente propuesta: *Representa manipulativamente [con piezas del multibase] y simbólicamente [con números] estas cantidades expresadas de forma verbal. Mil setecientos dos.* Tampoco aquí se resaltó que no aparecerían barras de decenas ni que el número, 1702, incluye la cifra cero en la posición de decena para simbolizar esa ausencia. Tempier (2016) da cuenta de la dificultad que encuentran algunos niños con la ausencia de unidades de cierto orden. Los que encuentran dificultad aquí, tienden a recomponer por yuxtaposición números como 1UM 2C 3D 4U en 1234 y generalizan esta forma de hacer a casos en los que no es válida, por la ausencia de unidades de cierto orden: 1UM 2D 3U en 123 en vez de 1023.

Composición y descomposición de los números

Un paso necesario para el desarrollo de procedimientos de cálculo de las operaciones aritméticas básicas es la comprensión del valor posicional de las cifras y la descomposición numérica (Gallardo, 2004).

- Composición y descomposición aditiva canónica y no canónica

La composición y descomposición aditiva canónica, es decir, según las unidades de la numeración (unidades, decenas, centenas…), es la descomposición que habitualmente se observa en los datos; por ejemplo, véase la siguiente cita de discusión entre Leire, Leonor y Aida, maestras del ciclo superior:

Leonor: Una pregunta, si en vez de un doce, es que claro, yo estoy aquí que no me entero, si en vez de doce pones treinta y dos, ¿qué les haces poner diez más diez más diez?

Leire: No, ahí no.

Aida: No, treinta más dos.

Leonor: Ah, no sé, es que yo no…

Leire: Por ejemplo, mil quinientos treinta y ocho, les dices que pongan mil más quinientos más treinta más ocho.

Leonor: Vale, lo descomponen así. (Abril 2013)

Leire también identifica, en menor proporción, descomposiciones no canónicas:

Leire: No se me había ocurrido hacer el doble de siete, eso el doble de siete, hacerlo como lo has hecho tú.

Formadora: Pero, ¿qué hago ahí?

Leire: Cinco y cinco, y cuatro. (Septiembre 2011)

Este tipo de descomposiciones forman parte de los conocimientos que constituyen la segunda fase en el desarrollo de la comprensión del sistema decimal posicional planteadas por Resnick (1983) y que prepara la comprensión de los algoritmos de las operaciones.

"¿Puedes encontrar alguna manera más de hacerlo?" [Pregunta de las tareas con material multibase para el desarrollo del pensamiento numérico]

Leire: ¿Si ya has puesto tres [decenas] y siete [unidades]? Bueno a lo mejor, puedes dejarlo libre... Ya sé por dónde va: dos decenas y diecisiete unidades, y esto va bien en el *ciclo+inicial para trabajar la resta llevando… O sea, para descomponer... Si un niño no..., tú le puedes explicar: ¿Y si cojo una decena y la desmonto? Y entonces ya... (Noviembre 2012)

Esta cita identifica los contenidos matemáticos que procuran el paso de la segunda a la tercera fase de comprensión del sistema decimal posicional de Resnick (1983). Primero se plantea la oportunidad de la pregunta sobre encontrar alguna manera más de representar el número 37. Cuestión que surge por haber representado ya el 37 en su descomposición aditiva canónica, esto es, 3D 7U. Acto seguido, Leire identifica otra posible descomposición aditiva no canónica, 2D 17U, y relaciona esta descomposición con el algoritmo de la resta con llevadas.

- <u>Composición y descomposición factorial</u>

Leire no siempre identifica la descomposición factorial de los números. Por ejemplo, la pregunta 3 del cuestionario inicial pide describir en qué se basan los alumnos o qué conocimientos de numeración utilizan implícitamente para realizar unos determinados productos. En la respuesta dada, Leire explica: *Primero hace la mitad de 14, multiplica y hace el doble* (Septiembre 2011):

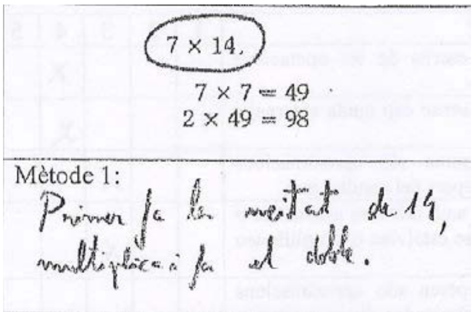


Figura 15. Respuesta a la pregunta 3.1. del cuestionario inicial

En la respuesta de la Figura 15, Leire identifica las operaciones dividir y multiplicar por dos como estrategia de cálculo, pero no identifica la descomposición factorial del 14 en 7x2. No identificar la descomposición factorial no implica desconocimiento, por lo que se decidió buscar en otras fuentes de datos posteriores. Al no aparecer en ninguna fuente primaria, se acudió a una fuente secundaria donde se planteó cuatro años después la misma pregunta a la maestra. La respuesta fue: *Ha descompuesto el 14 en 7x2 y ha ido multiplicando por partes* (Octubre 2015). Aquí sí se identifica la descomposición factorial. La débil identificación de este contenido matemático relevante no afecta tanto al cálculo de la multiplicación mediante el algoritmo estándar o mediante la multiplicación en columna, pero sí podría afectar a la flexibilidad de las estrategias de cálculo.

4.1.2. Aproximación al concepto de multiplicación

La multiplicación es el contenido matemático que centra este estudio. Los resultados que se presentan a continuación muestran que Leire no teoriza sobre la operación, sino que utiliza modelos que subyacen al cálculo de la multiplicación. La Figura 16 recoge el número de fuentes de datos en las que se hace referencia a alguna estructura multiplicativa. Este gráfico da cuenta de la escasa mención de estructuras multiplicativas en las fuentes de datos.

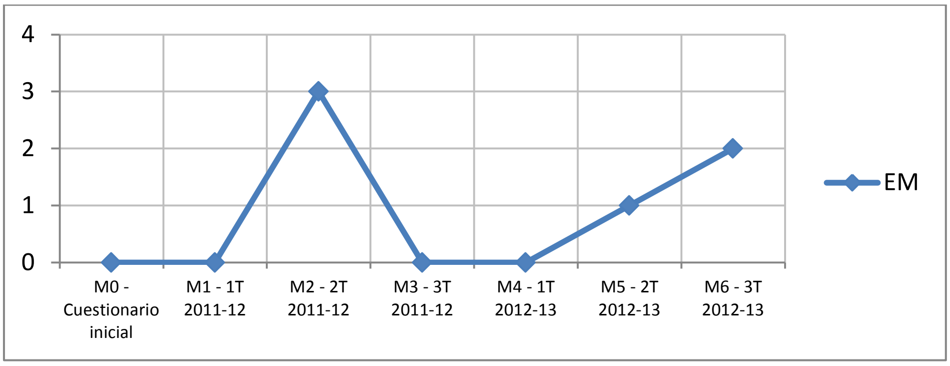


Figura 16. Aparición del contenido EM en las fuentes de datos

- <u>Suma repetida</u>

La suma repetida es el modelo de multiplicación que aparece con más frecuencia en los datos. Leire considera importante este modelo y parece considerar que responde al concepto de multiplicación que han de saber los estudiantes:

> Tienen que tener claro el concepto de multiplicación como una suma de sumandos iguales. (Marzo 2012)

Durante el primer curso, este es el único modelo de multiplicación utilizado y sobre el que se enfatiza que tienen que aprender los estudiantes.

> Me di cuenta, cuando estaba haciendo, que no entendían que era multiplicar por once. Sé que saben lo que es la multiplicación, que es una suma del mismo número; pero cuando ya el número era muy grande me di cuenta de que no pillaban. Entonces, por eso, se me ocurrió poner el doce más doce más doce más… y entonces la mayoría enseguida lo pilló, y de hecho ahora ya casi todos saben hacer esta estrategia. Ese día costó y como se repitió otra vez, la mayoría…, a lo mejor hay cinco que no, pero de veinticinco ya está. (Marzo 2012)

- <u>Esquema de correspondencia</u>

El esquema de correspondencia del que hablan Clark y Kamii (1996) como estructura que ayuda más a los estudiantes a formar el concepto de la estructura multiplicativa, prácticamente no aparece en los datos. Solo se identifica en una respuesta de unos estudiantes. Leire se sorprende por el uso de la estrategia de 'reparto' que utilizan sus alumnos:

> He visto cosas aquí que me he quedado sorprendida. Con la formadora contábamos que hiciesen multiplicación y suma, pero han hecho esto, incluso reparto... (Febrero 2013)

Figura 17. Fotograma de una clase de Leire. Esquema de correspondencia (Febrero 2013)

Esa identificación no da evidencias suficientes para afirmar que dentro del pensamiento multiplicativo de Leire hay un conocimiento del esquema de correspondencia.

- <u>Esquema rectangular</u>

En la grabación sobre una clase de multiplicación, se identifica el uso por parte de los alumnos del esquema rectangular. Leire afirma haberlo explicado rápidamente, pero sin profundizar en él, esto es, sin identificar la multiplicación con el área del rectángulo:

> Investigadora: Y esto del sentido geométrico ¿lo habíais hecho antes?
>
> Leire: No, bueno, sabiendo que íbamos a hacer esto, algún día les puse una muestra. Pero no es como más se ha trabajado. Pero no les he dicho que es la base y esto es la altura. Primero me tengo que acordar yo. Esto lo hizo la formadora, bueno, lo hemos hecho las dos. Estoy muy contenta, porque de lo que me esperaba que hiciesen… Hasta se atreven a representarlo...

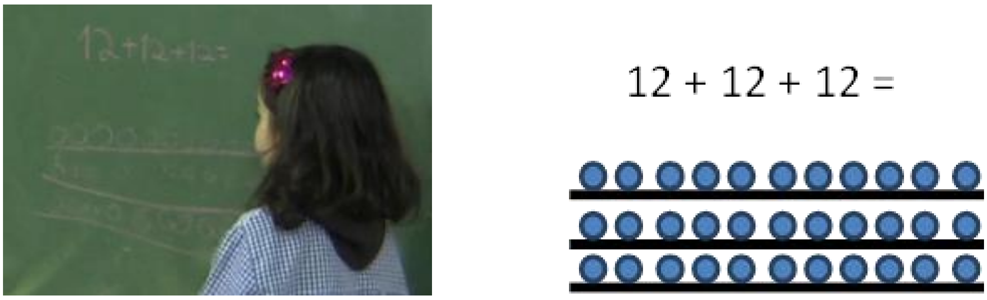


Figura 18. Fotograma de una clase de Leire. Esquema rectangular (Febrero 2013)

Tampoco en esta ocasión se puede afirmar que Leire considere en la práctica el esquema rectangular como correspondiente a la estructura de la multiplicación.

La aproximación al concepto de la multiplicación que se observa en los datos durante el curso 2011-2012 se realiza exclusivamente desde su representación como suma repetida. Este hecho refuerza la constatación de Clivaz (2012), quien observa que este modelo es el más utilizado o incluso el único utilizado entre la mayor parte de los maestros. Sin embargo, al curso siguiente se evidencian nuevas aproximaciones a la multiplicación impulsadas por la preparación con la formadora de una clase dedicada al concepto de la multiplicación. Con todo, no se puede afirmar que Leire posea un conocimiento matemático fundamentado sobre esas aproximaciones a la multiplicación.

4.1.3. Aproximación al cálculo de la multiplicación

A continuación, se presentan los resultados sobre los contenidos matemáticos relevantes para Leire acerca del cálculo de la multiplicación a partir del análisis de su reflexión sobre la práctica de aula. La Figura 19 presenta la aparición de estos contenidos en las fuentes de datos contabilizando el número de fuentes de datos en los que aparecen según el momento formativo. Este gráfico da cuenta de la poca relevancia dada a las tablas de multiplicar y a la estrategia de multiplicar por diez. El resto de contenidos, ALG, PR y EC, están presentes en todos los momentos formativos.

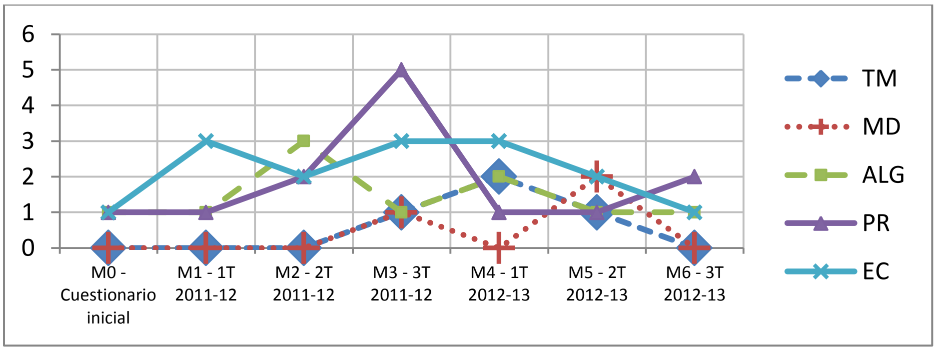


Figura 19. Aparición de los contenidos TM, MD, ALG, PR y EC en las fuentes de datos

<u>Tablas de multiplicar</u>

El conocimiento de los hechos numéricos básicos y su dominio constituye uno de los objetivos curriculares de tercero. A continuación se muestra cómo valora Leire el uso de las tablas:

> Otra cosa es que tú veas que están haciendo multiplicaciones y no saben la tabla de multiplicar. Es lo que me está pasando ahora, como tienen muchas estrategias no se las estudian. Tontos no son. Bueno ya les he dejado de margen para final de curso, porque también considero que se las tienen que saber, pero cogen el papel y empiezan a hacerlas sumando y ya está… No, no, fui yo que se lo dije a ellos: “si alguna tabla no os la sabéis, os dejo el papel y lo hacéis”. Porque claro, este trimestre hemos evaluado si saben multiplicar o no… O sea, si saben los dos procesos que hemos enseñado, entre otras cosas, ¿no? O sea, para mí no es objetivo aún; ahora, a final de curso sí, si se saben las tablas de multiplicar. (Marzo 2012)

En la cita se evidencia que Leire da importancia al dominio de las tablas de multiplicar, a la vez que propone el uso de estrategias para obtener los resultados que los alumnos no han aprendido de memoria.

Multiplicación por diez

La multiplicación por diez está en la base del algoritmo en columna que Leire enseña y que se verá en el siguiente punto. Explícitamente Leire identifica la multiplicación por diez en algunas ocasiones, como por ejemplo:

> Los hay que, por ejemplo, multiplican por diez, y lo hacen mecánicamente, es decir, ponen el número y añaden un cero, ya llegará un momento en el que... Bien, bien no entienden el porqué, pero bueno, ya llegará un momento en el que... si tienen la mecánica. (Febrero 2013)

En esta cita, Leire identifica la regla del cero, "ponen el número y añaden un cero", como mecanismo para multiplicar por diez (Clivaz, 2012). La cita anterior ofrece indicios de que identifica que multiplicar por diez es más que añadir un cero a la derecha, pero no hay evidencias más explícitas del significado que da Leire a la multiplicación por diez.

Algoritmos de las operaciones

Los datos dan cuenta de la enseñanza de algoritmos para el cálculo de las operaciones. Aunque el foco de interés sea la multiplicación, se han considerado otras operaciones que aparecen en los datos y permiten tener una visión más completa del uso y valoración de los algoritmos en Leire.

- Algoritmos de la suma

Al inicio de la formación, Leire cuestiona a la formadora sobre la forma de enseñar los algoritmos:

> Yo tengo una pregunta. Cuando comenzamos a enseñar a sumar, a restar..., o sea, yo pienso que hacemos... cifras. No insistimos en, yo qué sé, por ejemplo, esto que tú has dicho ahora: "ciento veintitrés más catorce". Tú haces: tres más cuatro, siete. Dos más uno...; pero no vemos que quedan "doce [decenas] más [una decena]", ¿me explico? (Septiembre 2011)

En el ejemplo de Leire se evidencia que habitualmente las maestras han utilizado las cifras que componen el número sin su significado posicional para el cálculo algorítmico de las operaciones. Este uso de los algoritmos que desposee de valor posicional a las cifras es una característica de los algoritmos estándares ampliamente utilizados. Como se verá más adelante, tras este cuestionamiento hay evidencias de que Leire conoce el algoritmo de la suma respetando el valor posicional

$$\begin{array}{rl} 123 & \\ +\ \ 14 & \\ \hline 7 & (3+4) \\ 3\ \ & (2+1) \\ \underline{1\ \ \ \ } & (1+0) \\ 137 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rl} 123 & \\ +\ \ 14 & \\ \hline 7 & (3+4) \\ + \ \ \ \ \ \ & \\ \underline{130} & (120+10) \\ 137 & \end{array}$$

Figura 20. Algoritmo de la suma tradicional y respetando el valor posicional

- <u>Algoritmo de la resta</u>

En la fase introductoria de la intervención formativa, cuando Leire daba clases en segundo de primaria, la formadora mostró una nueva forma de explicar la resta llevando, descomponiendo el minuendo en vez del algoritmo tradicional (Figura 21). El algoritmo de la resta es un contenido al que se dedica mucho tiempo en segundo de primaria.

$$\begin{array}{rrr} & 5 & {}_{1}4 \\ - & \overset{+1}{3} & 8 \\ \hline & 1 & 6 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rrr} & \overset{4}{\cancel{5}} & {}_{1}4 \\ - & 3 & 8 \\ \hline & 1 & 6 \end{array}$$

Figura 21. Algoritmo de la resta tradicional y resta descomponiendo el minuendo

Al curso siguiente, en la fase de desarrollo de la intervención formativa, Leire es profesora de tercero de primaria, con lo que se supone sabido por los alumnos el algoritmo de la resta.

> Investigadora: ¿Los algoritmos los estáis haciendo como el año pasado la multiplicación?
>
> Leire: No los hemos empezado todavía, pero sí, lo haremos. Ya lo dijimos en la reunión de padres; una de las cosas que hicimos fue explicar cómo haríamos la multiplicación y la división. Claro, se quedan así… “Ah, la resta ya era rara en segundo.” Yo ahora ya no sé restar como restamos aquí *por descomposición del minuendo]. De hecho, los niños ya vienen con la resta. Yo no insisto mucho en eso, yo les enseño como se hace de la otra manera [algoritmo tradicional], como hacen los padres; pero si un niño me tacha arriba ¿por qué le tengo que liar? Es mi opinión, por qué le tengo que liar; ahora cambia para que lo haga de la otra manera si ya lo ha aprendido así, ya está. (Noviembre 2012)

En esta cita se observa que Leire se ha olvidado de la resta por descomposición del minuendo y tiende a recordar el algoritmo tradicional. Más adelante, el uso del material manipulativo lleva a evidenciar que Leire sí conoce la resta por descomposición del minuendo como se indicó en la descomposición aditiva no canónica.

- <u>Algoritmo de la multiplicación</u>

La siguiente cita da cuenta del conocimiento y trabajo de dos métodos de cálculo algorítmico de la multiplicación, el tradicional y en columnas (Figura 22):

> Hacemos multiplicaciones, salen a corregir –lo hago yo, se lo dije a mi compañera, pero no sé si lo hace o no, porque no voy a su clase–, pero yo pongo la misma multiplicación y uno lo hace tradicionalmente y el otro lo hace trabajando la posición del número. Y los dos ahí, tiqui, tiqui, tiqui, lo hacen fantástico. No sé, encuentro que es muy interesante. (Marzo 2012)

1 2 3		1 2 3	
X 4		X 4	
^{1}2	(3x4)	1 2	(3x4)
8	(2x4)	+ 8 0	(20x4)
4	(1x4)	4 0 0	(100x4)
4 9 2		4 9 2	

Figura 22. Algoritmos tradicional y en columnas de la multiplicación

- <u>Algoritmo de la división</u>

En cuanto al algoritmo de la división, Leire evidencia conocer el algoritmo abreviado y el extendido que muestra las operaciones intermedias (Figura 23):

> El otro día, el Director [que es profesor de matemáticas en la secundaria] les puso con los de la ESO la división con una resta. Y todos pusieron una cara, no sabían que era una resta. Yo lo digo, yo venía aquí [de alumna] y yo aquí aprendí con la resta, y en cambio, compañeras mías [maestras en la actualidad] que también vinieron aquí, ellas no, porque ya vino la moda de que… A ver, los niños ya harán el clic después de que no hace falta hacer la resta. Pero saben que hay una resta. Yo lo he sabido siempre. Al niño que le cuesta memorizar las tablas de multiplicar o… Hay niños que no tienen tanta memoria, tanta retentiva, y entonces no se imaginan el número, necesitan escribirlo. Pues lo tienen allí escrito, entonces restan y ya está. Quiero decir, el niño que lo necesite que lo haga y el que no, no. Nosotras enseñamos el año pasado en tercero a dividir con la resta. (Noviembre 2012)

Figura 23. Algoritmos abreviado y extendido de la división

Estas citas muestran que Leire valora el uso de algoritmos extensivos por la explicitación de las propiedades de los números y operaciones que facilitan la comprensión en los estudiantes, pero no rechaza el uso de algoritmos tradicionales.

Propiedades de las operaciones

En el cuestionario inicial se pide describir unos métodos o estrategias de cálculo. Para realizar estas estrategias se necesitan diversos conocimientos numéricos ya que se utilizan la descomposición aditiva y factorial de los números, así como las propiedades asociativa, distributiva y relación inversa entre multiplicación y división. Las soluciones enunciadas en la pregunta de la Figura 24 utilizan implícitamente las siguientes propiedades de las operaciones aritméticas:

1. Propiedad asociativa
2. Elemento neutro de la multiplicación (utilizando $1 = \frac{2}{2}$) y la propiedad asociativa
3. Propiedad distributiva
4. Elemento neutro de la suma (utilizando $0 = 7 - 7$) y la propiedad distributiva

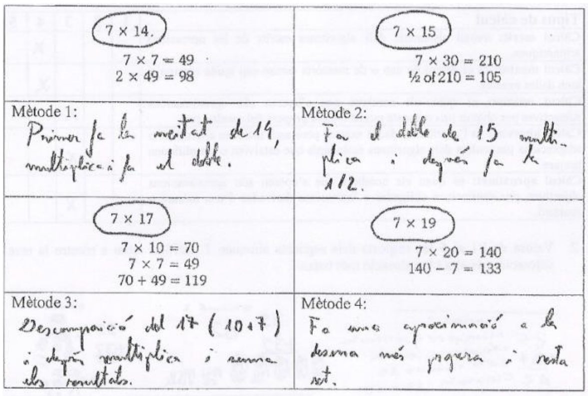


Figura 24. Respuesta a la pregunta 3 del cuestionario inicial (Septiembre 2011)

La transcripción de esta respuesta de Leire es:

1: Primero hace la mitad de 14, multiplica y hace el doble.

2: Hace el doble de 15, multiplica y después hace la ½

3: Descomposición del 17 (10+7) y después multiplica y suma los resultados.

4: Hace una aproximación a la decena más cercana y resta siete (Septiembre 2011)

Esta respuesta muestra el uso implícito de las propiedades pero no explicita ninguna de ellas. En otras ocasiones Leire da muestra de usar explícitamente las propiedades distributiva y conmutativa, pero no hay datos explícitos de la asociativa ni del elemento neutro:

> Investigadora: Y el vocabulario también, he visto que utilizaban la propiedad...
>
> Leire: Esto es de este año también. La propiedad conmutativa, distributiva, eso sí, porque en segundo ya hacíamos la conmutativa. La distributiva, claro, a la que tú vas entendiendo más, te atreves más. (Febrero 2013)

La propiedad de las relaciones inversas entre operaciones también aparece en los datos:

> Ahora yo cojo las de cuarto, porque ya, claro, las estrategias, ahora ya estamos haciendo el tercer trimestre: son los juegos. Y aquí, ¿qué hago si aún no hemos hecho los juegos? Y a mí me pasó el otro día, bueno era "Llegar a veinticuatro" "diez más cuatro son catorce", pues les expliqué: "¿Cuánto hacen diez más cuatro? -"catorce" -"¿Cuánto falta para llegar a veinticuatro?" -"diez" -"Bien, pues poned el resultado" (Marzo 2012)

> Tenemos que repartir en cuatro grupos, tal y cual, cuántos hay. *…+"Di el número que multiplicado por cuatro se acerca al 25. Tal". Como ya empiezan a saber las tablas. (Marzo 2012)

En estas citas se muestra el uso de la relación inversa entre suma y resta o división y multiplicación enseñada por Leire como estrategia de cálculo.

Finalmente, se considera la expresión simbólica adecuada de las propiedades de las operaciones. En abril de 2013, explicando a otras maestras una estrategia utilizada para multiplicar por once, se observa un uso riguroso de la simbolización horizontal de la multiplicación: buen uso del signo igual e incorporación de los paréntesis para el trabajo de la propiedad distributiva.

> Esto es descomponer el once en diez más uno. [Escribe en la pizarra 23 x 11] Esta es la típica. [Sigue escribiendo = 23 x (10 + 1) = 230 + 23 = 253] Ya si lo pones así, trabajas además la propiedad distributiva. (Abril 2013)

<u>Estrategias de cálculo</u>

En el uso de estrategias se mira la variabilidad, es decir, el reconocimiento de diferentes estrategias de cálculo para una misma situación; y la flexibilidad, es decir, la adecuación de la estrategia según los números involucrados en las operaciones (Sowder, 1992).

En este ámbito, Leire demuestra en varias ocasiones apertura a diferentes estrategias planteadas por los estudiantes:

> Tengo un niño que me hace esto. Este siempre descompone, se lo monta para tener siempre dieces, descompone cinco, cinco y a partir de aquí lo hace todo. (Septiembre 2012)

Incluso en ocasiones ella misma explica dos estrategias diferentes para realizar un cálculo, por ejemplo la multiplicación por 11:

> Yo el otro día, explicando la estrategia del once, de multiplicar por once y yo el año pasado hice la de multiplicas por diez y sumas otra vez el número. Y en el libro viene otra, la segunda estrategia, que es la de sumar. Yo el año pasado ni la vi esta estrategia. Entonces dije, venga va, vamos a probar. (Abril 2013)

Esta apertura al uso de diferentes estrategias es signo de cierta variabilidad en el cálculo.

7 x 14	7 x 15
7 × (10+4) = ~~70+28~~ = 7×10 + 7×4 = 70 + 28 = 98	7×(10+5) = 7×10 + 7×5 = 70 + 35 = 105
7 x 17	**7 x 19**
Veig que tota l'estona utilitzo la descomposició i la propietat distributiva.	7 × 19 = 7 × 20 − 7 = 140 − 7 = 133 ~~= 150 − 20 31 = 121~~

7×19 = 7×20 − 7
= 140 − 7 = 133

Figura 25. Respuesta a: "¿Qué estrategias de cálculo mental propondrías a tus alumnos para resolver estas operaciones?, ¿te influyen los números para escoger la estrategia?" (Abril 2012)

En cuanto a la flexibilidad, Leire no siempre demuestra una adecuación de la estrategia de cálculo a los números, como indica la respuesta a la segunda pregunta del cuestionario final. En esta respuesta siempre utiliza la propiedad distributiva, solo en la situación de 7x19 se aproxima a la decena más cercana para realizar el cálculo. Con todo, en otras ocasiones sí aparece esa adecuación que persigue una mayor eficacia en el cálculo:

> Es como cuando hacemos los problemas de cálculo mental, yo, cuando me dicen cuatro más cuatro más cuatro más cuatro..., pues está bien, pero hagamos la multiplicación. (Noviembre 2012)

Las citas referenciadas dan cuenta de la aproximación al cálculo de la multiplicación. Leire demuestra conocer las características más frecuentes del cálculo de la multiplicación: conoce y valora el uso de las tablas de multiplicar a la vez que permite el uso de estrategias de cálculo para los que no se las saben de memoria. Conoce y utiliza algoritmos de las operaciones, enseña el algoritmo tradicional y otros algoritmos extendidos como el algoritmo de multiplicar en columna. Utiliza las propiedades de las operaciones, aunque tiende a hacer un uso implícito sin mencionar el elemento neutro o la propiedad asociativa. Demuestra variabilidad de cálculo al admitir el uso de diferentes estrategias por parte de los estudiantes, aunque personalmente tiende a repetir las mismas estrategias.

<u>A modo de resumen de los resultados para la consecución del primer objetivo</u>

El primer objetivo específico planteado es identificar contenidos matemáticos relevantes para el aprendizaje de la multiplicación desde la perspectiva de una maestra. Este objetivo se planteó en orden a identificar el conocimiento del contenido matemático en Leire. No se habla de lo que desconoce, si no de lo que manifiesta conocer. Aunque la frecuencia en el uso de los contenidos y su reflexión sobre ellos dan indicios de un conocimiento más o menos fundamentado.

La primera fase del análisis realizado permite afirmar que Leire conoce la estructura del sistema decimal posicional. Este conocimiento lo manifiesta sobre todo en el valor posicional y en la composición y descomposición aditiva de los números. No se puede hablar de desconocimiento de las descomposiciones factoriales, pero sí de una menor familiarización con ellas, que se manifiesta en que raramente las usa.

Su conocimiento sobre el concepto de la multiplicación se manifiesta débil, pues utiliza casi exclusivamente la estructura de suma repetida para enseñar la multiplicación. Rara vez hace mención a otras estructuras que la investigación muestra como relevantes en la formación del concepto de multiplicación, como son el modelo rectangular o el esquema de correspondencia. Al usar estas estructuras, Leire reconoce que no está familiarizada con ellas y que necesita primero recordarlas.

En cuanto al cálculo de esta operación, el análisis demuestra que conoce y valora el sentido de las tablas de multiplicar y de los algoritmos, tanto tradicionales como aquellos que respetan el significado del número. No hay evidencias de cómo entiende la multiplicación por diez; afirma que multiplicar por diez es poner el número y añadir un cero, pero sin dar una mayor explicación que dé cuenta de conocer el fundamento de estas acciones. La misma ausencia de evidencias de conocimiento del contenido se encuentra en alguna propiedad como la asociativa o el elemento neutro. Sin embargo la propiedad conmutativa y la distributiva sí son ampliamente trabajadas y fundamentadas en los datos. Finalmente, en cuanto a las estrategias de cálculo, Leire demuestra variabilidad en las estrategias que propone o aprueba de los estudiantes, pero no siempre demuestra en la práctica la flexibilidad que lleva a escoger diferentes estrategias según los números involucrados.

El análisis de la identificación de los contenidos matemáticos relevantes, aparte de dar cuenta de las matemáticas que conoce Leire, constituye la base para la segunda fase de análisis, que es caracterizar el conocimiento didáctico matemático.

4.2. Caracterización del conocimiento didáctico matemático

En esta segunda fase del análisis se presentan los resultados para la consecución del segundo objetivo específico del estudio. Se indaga en el conocimiento didáctico matemático de Leire en orden a caracterizarlo, para lo que se establecieron códigos que se agruparon en temas según el aspecto del conocimiento didáctico matemático estudiado: identificación y fundamentación de contenidos matemáticos; identificación y uso de estrategias para enseñar un contenido; identificación e interpretación de conocimientos de los estudiantes. La presentación del apartado se organiza de acuerdo con estos tres aspectos del conocimiento didáctico matemático.

La identificación de contenidos matemáticos se corresponde al análisis ya efectuado para la consecución del primer objetivo. Las evidencias de fundamentación de los contenidos están vinculadas a argumentos sobre la enseñanza y aprendizaje de los contenidos; no se puede hablar propiamente de una fundamentación matemática del contenido. El tipo de intervención formativa llevada a cabo y de los datos recogidos sitúan la reflexión en la práctica de enseñanza. El hecho de no encontrar evidencias de fundamentación matemática sugiere que la indagación en este aspecto del conocimiento didáctico matemático relacionado con el conocimiento del contenido requiere de otro tipo de acercamiento al caso de estudio.

A la vez que se indaga sobre el conocimiento de Leire, se buscan relaciones entre la intervención formativa y dicho conocimiento. Al respecto, se prepara el análisis asociado a la consecución del tercer objetivo.

4.2.1. Identificación y uso de estrategias para enseñar un contenido

Este aspecto del conocimiento didáctico matemático pertenece a la vez al conocimiento pedagógico del contenido y al conocimiento curricular. Centra su interés en la práctica de enseñanza, en relación con las preguntas de Shulman (1986) sobre cómo el maestro decide qué enseñar y cómo. Para dar respuesta a estas preguntas contextualizándolas en el estudio de esta investigación, se han definido los siguientes temas:

- el conocimiento de estrategias de enseñanza del contenido matemático,
- el conocimiento de cuestiones problemáticas de la práctica de enseñanza,
- el conocimiento práctico de las relaciones entre contenidos matemáticos de diferentes materias / cursos.

Se desglosa ahora de forma extensa el análisis de cada uno de los temas, mediante ejemplos que ilustran los resultados.

Conocimiento de estrategias de enseñanza del contenido matemático

Los códigos que engloban este tema se distinguen en el objeto de reflexión sobre la enseñanza: el primer código fija el interés en el contenido; el segundo y el tercero, en la forma de enseñarlo, ya sea en la práctica observada o practicada, ya sea en libros de texto.

<u>Identifica un contenido matemático que enseñar para afianzar el conocimiento matemático de los estudiantes</u>

Este código responde a la pregunta de qué enseñar para que los estudiantes avancen en su conocimiento matemático. Dado el contexto de este estudio, el análisis muestra los contenidos matemáticos que Leire considera importante enseñar para afianzar los tres bloques de contenidos matemáticos destacados: estructura del sistema decimal posicional, concepto de multiplicación y cálculo de la multiplicación.

- <u>Estructura del sistema decimal posicional</u>

Leire relaciona el trabajo del valor posicional, VP, con el desarrollo del razonamiento matemático de los estudiantes:

> Y yo, veo esto, que si tú vas a trabajando la posición de los números, luego le es mucho más fácil, todo. El razonamiento matemático es mucho más sencillo. (Marzo 2012)

Esta relación le lleva a considerar la importancia de enseñar bien el sistema decimal posicional:

> Creo que ahora todos somos muy conscientes que es muy importante trabajar muy bien la numeración, su valor, la posición... (Abril 2012)

Aunque en la cita anterior no se habla de la descomposición numérica, en el guión de reflexión de enero de 2012, al analizar dos vídeo-episodios de la formadora, Leire destaca:

> Es muy importante la posición de los números y la descomposición. (Enero 2012)

A la hora de identificar qué enseñar para facilitar la adquisición de otros contenidos matemáticos por parte de los estudiantes, se observan aplicaciones directas. Leire asocia la enseñanza del sistema decimal posicional, en concreto el valor posicional, con el aprendizaje de los cambios de unidades de medida:

> Esto de que diez decenas es una centena lo hacen mecánicamente, pero no entienden lo que están haciendo. Es que entonces, el sistema métrico decimal, o sea todo. Si es que es siempre lo mismo... (Noviembre 2012)

También asocia el trabajo del valor posicional al aprendizaje de algoritmos básicos como la suma y la resta:

> [¿Cómo tiene que responder el profesor?] Diciendo que ocho más cinco son trece pero que después tiene que sumar veinte más treinta. Tiene que trabajar el valor posicional. (Abril 2012)

> Dos decenas y diecisiete unidades, y esto va bien al inicial para trabajar la resta llevando… O sea, para descomponer *...+ Esto *actividades para trabajar con material multibase] está muy bien para lo que te decía de la resta llevando, o para lo que sea. Que tengan claro que una decena son diez unidades, y que las puedo tener agrupadas o no. (Noviembre 2012)

- <u>Concepto de multiplicación</u>

Como se indicó en el análisis del conocimiento matemático de Leire sobre contenidos matemáticos relevantes, esta maestra no teoriza sobre el concepto de la multiplicación. En una sesión de trabajo de la multiplicación con sus estudiantes, Leire considera diferentes representaciones de esta operación. Sin embargo, la Estructura multiplicativa

(EM) que enfatiza en su enseñanza para que sus alumnos comprendan la multiplicación es la estructura de suma repetida:

> Tienen que tener claro el concepto de multiplicación como una suma de sumandos iguales. (Marzo 2012)

- Cálculo de la multiplicación

En cuanto al cálculo de la multiplicación, Leire identifica varios contenidos matemáticos relevantes y los relaciona con el desarrollo numérico de sus estudiantes:

> Formadora: ¿Qué contenidos creéis?, ¿creéis que son muchos a la larga o son pocos los contenidos matemáticos que hay de numeración? O ¿creéis que es gestionable eso de los contenidos?
>
> Leire: Bien, yo creo que si trabajamos esto de la posición y la distributiva, y ya está. (Septiembre 2011)

En esta cita se evidencia la identificación de Leire del valor de posición y de la propiedad distributiva, VP y PR, como contenidos matemáticos clave para el desarrollo de la numeración. También se relaciona el valor posicional con el desarrollo de estrategias de cálculo mental, EC:

> He descubierto la gran importancia de trabajar la posición de los números; si los niños tienen claro esto les es mucho más fácil el cálculo mental. (Marzo 2012)

Tras la visualización de un vídeo-episodio de otra maestra del ciclo superior, Leire identifica la estrategia de multiplicar por diez, MD, y la descomposición numérica, CD, como clave para que los estudiantes desarrollen su pensamiento numérico.

> [¿Qué resaltas como importante en este episodio para el desarrollo del pensamiento numérico de tus alumnos?] Tiene que tener muy claro multiplicar por diez y hacer mitades de los números. Y la descomposición del número. (Enero 2013)

Identifica prácticas de enseñanza para trabajar un contenido matemático relevante

Este código responde al conocimiento sobre cómo enseñar. El análisis de este conocimiento de Leire se fija en la reflexión sobre la práctica propia o ajena. A continuación se muestran las estrategias de enseñanza que Leire identifica.

- <u>Repetición de palabras referentes a los contenidos matemáticos relevantes para la apropiación del contenido por parte de los estudiantes</u>

Leire afirma que antes de la intervención formativa no daba el nombre específico del contenido que estaba trabajando con los más pequeños:

> Yo soy maestra de educación física, y en mis clases de educación física yo ya lo había hecho, desde siempre. Tenemos que repartir en cuatro grupos, tal y cual, cuántos hay. Pero no había dicho que era una división; pues ahora es que: *¿Qué tenemos que hacer? Una división. ¿Cuál? Tal.* Y ya están dividiendo. (Marzo 2012)

Leire observó este uso de palabras específicas en las clases modelo realizadas por la formadora el curso anterior. Ahí se enfatizaba el uso de las palabras referentes a las unidades de la base del sistema decimal posicional, VP:

> Me acuerdo de que, en segundo era, *diez más diez, veinte o dos decenas*… No se me hubiera ocurrido nunca decir *veinte o dos decenas*. Y ahora lo hago con decenas, y ahora lo hago con unidades… Y claro, eso les da un bagaje a los niños. (Marzo 2012)

Esta identificación lleva a Leire a incorporar el uso de palabras específicas en su práctica de enseñanza con la intención manifiesta de que los alumnos se vayan apropiando del contenido.

> Se ha variado mucho la manera de hacer en clase. Antes hacías una suma *…+, tres más cuatro, siete; uno más dos. No, una decena más dos decenas. Intento hacerlo así para que vean que son las decenas, porque si no… unidades, decenas, centenas, sí de memoria lo ven, pero dónde están las decenas colocadas. Y qué es cada cosa. (Noviembre 2012)

> Y lo que añadía aquí también, porque yo esto no lo sabía, lo aprendí con la formadora, el ciento veinticuatro tiene doce decenas. Y esto también de tanto en tanto lo hago en clase, lo hago yo, no sé si los otros lo hacen, ya te lo digo, pero lo hago, y Carla también lo hace de tanto en tanto. (Noviembre 2012)

También se observa un trabajo deliberado de las palabras en el uso de las propiedades, PR:

> Yo, cada vez que sale un problema de multiplicación, esto [propiedad conmutativa] lo digo, en cada problema. *No es lo mismo, el resultado es el mismo, pero esto quiere decir esto y eso quiere decir eso*. Entonces, pienso que poco a poco se irá quedando. (Enero 2012)

- Trabajo relacionado de varios contenidos matemáticos relevantes

Cuando la formadora explicó en la discusión conjunta de enero de 2012 el algoritmo en columnas basado en el valor posicional y la propiedad distributiva, Leire identificó en esa práctica de enseñanza el trabajo de la descomposición numérica, CD y ALG:

> Así también tiene sentido la descomposición que trabajamos siempre. (Enero 2012)

Leire incorpora a su enseñanza esta identificación del trabajo de la descomposición numérica en la enseñanza de un algoritmo para el cálculo de la multiplicación. La siguiente cita forma parte de la respuesta a la pregunta sobre algunos ejemplos de cambios que han incorporado en el aula de cálculo y de matemáticas durante el curso como resultado de la formación:

> Hemos trabajado las operaciones trabajando el valor posicional de los números, a parte del algoritmo. En las clases de mates utilizo mucho las estrategias de cálculo mental. Dejo que los alumnos me expliquen cómo han hecho las cosas. (Abril 2012)

Esta respuesta evidencia el trabajo del sistema decimal posicional dotando de significado los algoritmos de las operaciones mediante la atención a VP, CD y ALG y al uso de estrategias de cálculo, EC, trabajadas en el proyecto de innovación en su clase de matemáticas. Esta relación se sostiene en el tiempo:

> Es que ahora, al comienzo de la multiplicación lo descomponemos todo, yo al menos lo hago, supongo que Ángel [maestro de apoyo en tercero] también. Pero llega un momento en que los niños ya no necesitan descomponer, porque ya lo hacen de cabeza. (Abril 2013)

La relación entre las estrategias de cálculo, concretamente en el contexto de resolución de problemas, y el trabajo de las propiedades, queda manifiesto en la siguiente cita:

> Aura: Esta mañana, con el problema de las patas de las mesas y las sillas, has llegado a la propiedad distributiva que yo he explicado mecánicamente, mecánicamente en el aula de matemáticas, y yo no hubiese sabido relacionar ese problema con la propiedad distributiva.
>
> Leire: Esto pasa siempre que comienzas a hacer esto [el proyecto de innovación de cálculo mental propuesto por la intervención formativa], eh.
>
> Aura: Una dificultad. Esta relación no la hubiese encontrado *…+Claro, pero para mí, la propiedad distributiva acabó el trimestre pasado cuando hicimos ese control, que

ya estaba adquirida. Y hoy, cuando has señalado la propiedad distributiva me he quedado...

Leire: En mi clase salió ayer en un problema, la propiedad distributiva, me di cuenta y la hice. Preguntándole a ella [la formadora] ¿es la propiedad distributiva?, porque claro... (Enero 2012)

En esta cita, Aura, una maestra de cuarto, dice asombrarse del trabajo de la propiedad distributiva en un problema de estrategias de cálculo mental. Leire evidencia que ha identificado en su propia práctica el uso de los problemas de cálculo como adecuado para el trabajo de las propiedades de las operaciones, PR y EC.

Otra práctica de enseñanza identificada por Leire para el trabajo de varios contenidos matemáticos aparece en el cálculo de la multiplicación:

> Otra cosa es que tú veas que están haciendo multiplicaciones y no saben la tabla de multiplicar. Es lo que me está pasando ahora, como tienen muchas estrategias no se las estudian. Tontos no son. Bueno ya les he dejado de margen para final de curso, porque también considero que se las tienen que saber, pero cogen el papel y empiezan a hacerlas sumando y ya está. *…+No, no, fui yo que se lo dije a ellos: *Si alguna tabla no os la sabéis, os dejo el papel y lo hacéis*. Porque claro, este trimestre hemos evaluado si saben multiplicar o no. O sea, si saben los dos procesos que hemos enseñado, entre otras cosas, ¿no? O sea, para mí no es objetivo aún; ahora a final de curso sí, si se saben las tablas de multiplicar. Vale, es eso, que siempre hay niños que no se las han sabido, pero como medimos si saben cómo hacerlo para que al que le cueste o que no tenga memoria pues que sepa una estrategia para poder hacer…, pues a mí me parece fantástico, pero no todo el mundo piensa igual que yo, te lo digo. (Marzo 2012)

Esta cita evidencia la relación entre el cálculo de la multiplicación, las tablas de multiplicar y las estrategias de cálculo, TM y EC. Leire considera que el uso de las estrategias de cálculo es adecuado para trabajar las operaciones como paso previo a la memorización de las tablas de multiplicar.

- <u>Uso de diversas representaciones de contenidos matemáticos relevantes</u>

En la primera sesión de clase modelo en tercer curso, Leire observa que para facilitar la estrategia de hallar el doble, la representación con los dedos de la descomposición numérica, CD, ayuda a los alumnos.

Leire: Hombre, hacerlo visualmente, hay niños que lo necesitan. *…+ No se me había ocurrido hacer el doble de siete, eso el doble de siete, hacerlo como lo has hecho tú.

Formadora: Pero, ¿qué hago ahí?

Leire: Cinco y cinco; y cuatro [saca en una mano los cinco dedos y los presenta dos veces; en la otra mano saca dos dedos y los presenta dos veces]. (Septiembre 2011)

Leire considera también que el material manipulativo puede ser una representación de los contenidos matemáticos que ayude a trabajar el sistema decimal posicional, VP y CD, especialmente en el ciclo inicial de la etapa:

> Y si lo haces con esto [con los dibujos del enunciado de la actividad preparada por formadora e investigadora], los de inicial lo tienen que hacer manipulativamente. Y al ciclo medio aquí también se puede poner..., porque claro aquí te sacarán todas las piezas. ¿Puedo hacer grupos de 10 con esto? ¿Puedo tener menos piezas? Lo de antes. A ver si te dicen... Aquí ¿cuántos tienen entre los dos?, ¿cómo quiero que me lo representen? Podemos decir, represéntamelo con las piezas y represéntamelo con el número. (Noviembre 2012)

En relación con la comprensión de la multiplicación, Leire identifica en su práctica diferentes maneras de trabajar la operación para que sus alumnos la entiendan:

> Por eso se lo hacía dibujar, porque muchos me hacían el tres por doce. "Dibújalo". "Ay, no, no es esto". Pero es esta la prioridad, que se den cuenta, que sean conscientes de lo que están haciendo. El primer día, muchos me hacían doce más tres igual quince. "¿Esto es una multiplicación?", No, "Entonces" Y tuve que poner en la pizarra doce más doce más doce, entonces sí. Entonces ya lo entendieron. Quiero decir, haciendo vas viendo distintas maneras de hacer, distintas estrategias. (Febrero 2013)

Estas maneras de trabajar se corresponden con dos formas de representación, mediante la suma repetida y “dibujándolo”, EM. La cita no indica a qué se refiere con el dibujo de la operación.

Leire utiliza una representación de las operaciones mediante dibujos que muestren el concepto en su enseñanza de la división.

> Para mí ya no es tanto cambio, porque yo ya lo llevo haciendo varios cursos [el proyecto de innovación propuesto por la intervención formativa]. Pero claro, por ejemplo, la división yo ya me la he planteado diferente. Yo no he empezado a explicar la división típica, sino que les he hecho dibujar la división: dibujadme círculos,

> repartídmelos en tres grupos y cuando ya sabían representar, entonces he hecho representar y división. (Abril 2013)

También lo utiliza para enseñar los números decimales en la clase de apoyo que da para estudiantes de cuarto de primaria:

> Leire: Pero yo me he encontrado. Por ejemplo, están haciendo los números decimales, en cuarto empiezan, y tengo a dos de cuarto que les doy clases de apoyo, y los he cogido y se lo he dibujado. Claro con estos niños no habíamos dibujado. Lo vieron y dijeron, ostras, ahora lo entendemos.
>
> Formadora: ¿Y cómo lo has dibujado?
>
> Leire: Si lo tienen en el libro, pero es que a veces estos dibujos te los saltas. Había para explicar las décimas había diez tiras. Y tenían pintadas dos, pero como no tengo pintada una entera, es cero coma... pero claro, que entendiesen que esto era un cero, les costó. Cero coma tres, ¿es que tenemos una entera pintada? (Abril 2013)

Estas citas evidencian un uso creciente de representaciones para trabajar contenidos matemáticos relevantes en la práctica de Leire. Este uso comenzó observándose en prácticas ajenas, como por ejemplo en la clase modelo de la formadora. Leire no se limita a repetir la práctica observada sino que la traslada a la discusión de otros contenidos.

Otro tipo de representación es la contextualizada en una situación de vida cotidiana. Por ejemplo, a Leire se le presenta en las actividades preparadas para trabajar la numeración con el material de multibase una situación de compra-venta en un mercado. En este mercado las fichas representan el dinero y los estudiantes han de pagar y devolver el cambio utilizando las fichas de centenas, decenas y unidades:

> Leire: Podríamos probar un día montar un mercado.
>
> Investigadora: A los niños les gusta mucho esto del mercado
>
> Leire: A los niños les gusta, pero claro, tú como maestro, también cuesta. Porque teníamos euros y con euros, hacerlo… ¿cómo lo haces?, quiero decir, tienes que tener las ideas muy claras. En esto que me has dado está muy claro. Le das tanto a cada niño, además van por parejas para que se puedan ayudar, hay dos que venden y dos que compran. Tampoco tienen claro que lo que compran es una suma o tienes que restar para que te dé bien. Incluso en un papel, que esto no lo pone, “apunta la operación que…”. (Noviembre 2012)

En esta práctica propuesta para la enseñanza Leire identifica el trabajo de las operaciones de sumar y restar. Para facilitar el aprendizaje propone utilizar un papel y apuntar cada operación.

El uso de representaciones diversas que llevan a abordar un contenido desde distintos enfoques promueve en los estudiantes conexiones importantes para el aprendizaje (Orrill y Kittleson, 2015). Leire reconoce que no le resulta fácil esta práctica de enseñanza, pero sabe identificar el trabajo de contenidos matemáticos en ella.

Considerar el trabajo de los contenidos matemáticos relevantes en libros de texto

Los libros de texto suelen tener un papel importante, a veces exclusivo, en la planificación de la enseñanza de muchos maestros de primaria (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2007). A lo largo de la intervención formativa, Leire menciona algunas consideraciones sobre el tratamiento del contenido matemático en el libro de texto. El análisis se focaliza en dos puntos relacionados con el trabajo de los contenidos matemáticos relevantes: por una parte, cuando Leire decide proceder de una forma distinta a la que plantea el libro de texto; por otra, cuando aprovecha recursos didácticos que ofrece el libro.

- Distanciamiento de las propuestas del libro de texto

En la segunda sesión de discusión conjunta, la maestra paralela de Leire, Carla, plantea una pregunta que cambia el tema tratado hasta entonces. Leire y Carla tienen que comenzar a explicar la multiplicación a sus alumnos de tercer curso y preguntan cómo hacerlo:

> Carla: También esto de compartir con los otros, por ejemplo: ahora con Leire hablábamos, al empezar la multiplicación, ¿cómo la hacemos? La podemos hacer de las dos formas, para que los niños sepan. Porque ya me imagino a los padres, como algunos que vi el año pasado con la resta llevando, que no les estábamos enseñando porque no se lo enseñábamos como ellos sabían hacerla. Así que estábamos hablando de cómo hacerla, queríamos preguntarte cómo podemos hacerla. De qué manera hacerla.
>
> Formadora: ¿Cuándo empezaréis a enseñarla?
>
> Leire: Ya.
>
> Carla: La semana que viene.
>
> Formadora: Podríamos hablarlo.

Leire: A los padres de segundo les enviamos un escrito explicando cómo hacíamos la resta llevando.

Carla: Sí, pero algunos ni...

Leire: Ni se lo leyeron, ya lo sé...

Carla: Lo que pasa es que como los de tercero ya algunos empiezan a hacer el cambio, los niños mismos. Algunos padres me dijeron: "¿Puedo enseñarle ya de...?

Formadora: De mi manera.

Carla: Claro, lo que decíamos es que a algunos les será más fácil aprenderla. Ya después irán haciendo lo otro.

Formadora: Para mí algo que es importante y, que aunque es muy evidente no se hace en muchos coles, en muchos claustros, es que os planteéis este problema. Porque lo fácil es coger el libro y como lo dé el libro, esto quiere decir que hay cosas que están cambiando. Decir "Oye, Leire, tenemos que ponernos de acuerdo para ver cómo enseñamos esto..." Porque ya el contenido matemático es importante. No es como lo hace el libro.

Leire: No, ya dijimos "esta página del libro no la haremos".

Carla: La página donde se enseña a multiplicar no la haremos.

Leire: Se tiene que hacer en el cuaderno y lo haremos de la forma que decidamos entre todos hacerlo. (Enero 2012)

Leire y Carla han mirado el libro de texto de matemáticas en relación a la explicación de la multiplicación y al algoritmo tradicional para multiplicar por varias cifras, EM y ALG. No indican qué es lo que no les ha convencido de dicha explicación, pero han decidido plantearse otra forma de enseñanza. La cita muestra dos formas de plantear la enseñanza de la multiplicación: Carla desea mantener la explicación contenida en el libro y añadir la nueva explicación que propongan en la discusión conjunta: *La podemos hacer de las dos maneras.* Sin embargo, en un principio parece que Leire se inclina a rechazar la explicación del libro: *Esta página del libro no la haremos. Se tiene que hacer en el cuaderno y lo haremos de la forma que decidamos entre todos hacerlo.*

Resulta interesante que acudan al conjunto de maestros y formadora para consultar esa nueva forma de enseñanza. La pregunta *¿cómo lo hacemos?*, planteada a la formadora y maestros del ciclo, sugiere una apertura al aprendizaje y al cambio de práctica.

La lectura crítica de libros de texto aparece también con contenidos concretos como VP. En la entrevista Leire comenta cómo discute con su maestra paralela el contenido matemático que enseñan en clase:

Leire: Es una manera diferente de empezar a ver las cosas, ¿no? Por ejemplo, el otro día cogimos el cuaderno de matemáticas y, -eso es una duda que tengo yo- y ponía -estamos trabajando la centena y decena más cercana, ¿vale?- y te ponía: treinta y cinco. No, treinta y cuatro está entre treinta y cuarenta. La centena y la decena más cercana es treinta. Yo decía, ¿la decena más cercana es tres?, si hablas de decena, la decena. ¿Sabes? Yo a mi compañera se lo dije: he pensado esto. Digo, ¡es verdad! Entonces le dijimos a los niños si ponéis tres poned tres decenas, si ponéis treinta pues treinta unidades, porque no estamos hablando de lo mismo. Se me quedaron así. Y digo… ¡es verdad!, digo…, claro…, es que los que no han hecho este cuaderno [el del proyecto de innovación asociado a la intervención formativa], aquí no han llegado. Supongo que lo hemos hecho bien porque dices: igual que la centena ¿trescientos o cuatrocientos?, cuatrocientos, pues no, estamos hablando de centenas, estamos hablando de unidades. Si pregunta la centena, la centena más cercana es cuatro. No es…

Investigadora: Es la unidad de criterio en todo, claro.

Leire: Claro, empiezas a ver cosas que dices: no lo haría así. Claro los niños se te quedan así. Les dices: los que habéis puesto treinta ya está bien, pero pon unidades. "¡Ah claro, porque son unidades! ¡Obvio, son unidades!" "Si has puesto tres, tres decenas"

Investigadora: Allí van aprendiendo también lo importante de la palabra.

Leire: Es que eso también nos ha costado a nosotros, ¡eh! No te pienses, porque claro, yo nunca lo había trabajado así, ni nadie me lo había enseñado así. Entonces claro, si tú no lo sabes, tú vas haciendo miméticamente lo que hace todo el mundo. (Marzo 2012)

Leire muestra el interés por el trabajo del valor posicional manteniendo la relación entre las unidades de la base y enfatizando el nombre de las mismas; esta relación es considerada por Verschaffel y De Corte (1996) como clave para la comprensión del sistema decimal posicional. Leire detecta que el libro de texto no respeta esta relación y decide insistir a sus alumnos para que incluyan el nombre de la unidad de la base a la respuesta que ofrecen a la hora de aproximar a la decena o centena más cercana.

Esta forma de trabajar, basada en poner el nombre de la unidad junto al resultado numérico, se propicia en el apartado de resolución de problemas del proyecto de innovación que Leire lleva año y medio implementando en el aula a raíz de su participación en la intervención formativa. Esta puede ser una posible influencia, pues, como afirma Leire: *Yo nunca lo había trabajado así… si tú no lo sabes, tú vas haciendo miméticamente lo que hace todo el mundo.*

La mirada crítica al contenido matemático del libro de texto vuelve a aparecer en el curso siguiente. Al inicio de la primera discusión conjunta con el ciclo superior, surge la discusión sobre la práctica de la formadora observada por los maestros. La formadora ha trabajado los conceptos de cantidad y de posición. Leire expone a la formadora el problema que encuentra en el modo de trabajar el valor posicional, VP, de los libros de texto:

> Es que aquí está el problema: "Tengo cuatro decenas…" Todos los libros de mates. No te dicen "Tengo catorce decenas". (Septiembre 2012)

En esta cita al igual que en la anterior, Leire cuestiona el contenido del libro de texto, considerando que no afina con precisión en el uso de algunos contenidos matemáticos relevantes.

- <u>Aprovechamiento de los recursos propuestos por el libro de texto</u>

Otro análisis realizado por Leire del trabajo de los contenidos matemáticos en el libro de texto se centra en los recursos que ofrece el libro, algunos de los cuales reconoce que no los había aprovechado en ocasiones anteriores.

En la discusión con la formadora y maestras del ciclo superior, Leire comenta estrategias de cálculo, EC, que enseña a sus estudiantes:

> Yo el otro día, explicando la estrategia del once, de multiplicar por once, y yo el año pasado hice la de "multiplicas por diez y sumas otra vez el número". Y al libro viene otra, la segunda estrategia que es la de sumar. Yo el año pasado ni la vi esta estrategia. Entonces dije, venga va, vamos a probar. (Abril 2013)

La estrategia que Leire "no vio" el año pasado y que ella explica al resto de maestras es: *Pones esto* [escribe 23x11=2   3]*, sumas estos dos* [escribe el cinco en la posición de las decenas]*, y doscientos cincuenta y tres. Pones la centena, esta es la unidad, y dos más tres es cinco* (Abril 2013). Esta estrategia se fundamenta en la descomposición polinómica del número en las potencias de la base, que puede representarse así:

$$si\ \ a = a_0 + a_1 \cdot 10 \ \ \Rightarrow$$

$$a \cdot 11 = (a_0 + a_1 \cdot 10) \cdot (1 + 10) \overset{Propiedad\ distributiva}{=}$$

$$= a_0 + a_0 \cdot 10 + a_1 \cdot 10 + a_1 \cdot 10^2 \overset{Factorización}{=} a_0 + (a_0 + a_1) \cdot 10 + a_1 \cdot 10^2$$

Sin embargo, esta estrategia se había mencionado en la primera discusión conjunta del curso anterior en la que la formadora explicó lo siguiente:

> Formadora: Trece por once yo hago: ciento treinta más trece, ciento cuarenta y tres. Y luego te puedo decir artificios: siempre que multiplico un número por once, los dos extremos quedan iguales y los sumo en el medio. Pero aquí no hay concepto, hay un artificio. Trece por once son ciento cuarenta y tres y lo hago rápido. Si está escrito, yo ni pienso *…+Estrategias sin concepto.
>
> Leire: Esto no lo sabía. (Septiembre 2011)

En el curso 2011-2012, Leire se había centrado en la estrategia que ella conocía pasando por alto la explicación de otras estrategias. Sin embargo, en 2012-2013, propone a sus alumnos la otra estrategia planteada en el cuaderno del proyecto de innovación. En la reflexión conjunta con las maestras del ciclo superior -María, Aida y Leonor-, Leire explica la estrategia que el curso anterior afirmaba no conocer.

> Leire: [escribe en la pizarra 23x11] Esto es descomponer el once en diez más uno. Esta es la típica [sigue escribiendo =23x(10+1)=230+23=253]. Ya si lo pones así trabajas además la propiedad distributiva.
>
> Formadora: Esta es la tradicional, doscientos treinta más veintitrés...
>
> Leire: Pero claro, siempre se equivocan y te suman uno. Esta es una de las que había, que es la que yo hice el año pasado. Este año me leí mejor el cuadernillo [del proyecto de innovación].
>
> María: Has mejorado.
>
> Leire: Sí, o vas más segura.
>
> Formadora: ¿Ofreces las dos?
>
> Leire: Yo ofrecí las dos, pero se quedaron con esta [la abreviada que explica a continuación]. Pones esto, sumas estos dos, y doscientos cincuenta y tres. Pones la centena, esta es la unidad, y dos más tres es cinco. (Abril 2013)

Esta cita da cuenta de un mayor dominio matemático en el uso de estrategias de cálculo y de las bases del sistema decimal posicional, EC y VP, que facilita a Leire el aprovechamiento de los recursos didácticos propuestos por el libro de texto.

El análisis de datos da cuenta de otra cita en la que Leire comienza a aprovechar un recurso presentado por el libro de texto al que normalmente no prestaba atención.

> Leire: Pero yo me he encontrado: Por ejemplo, están haciendo los números decimales –en cuarto empiezan– y tengo a dos de cuarto que les doy clases de apoyo, y los he

cogido y se lo he dibujado. Claro con estos niños no habíamos dibujado. Lo vieron y dijeron: ¡Ostras! ¡Ahora lo entendemos!

Leonor: Pero si coges el material de multifunción…

Leire: Sí, pero tardas más, y aquí quieren mucho, mucho, mucho… y rápido, rápido, rápido… y claro.

Formadora: ¿Y cómo lo has dibujado?

Leire: Si lo tienen en el libro, pero es que a veces estos dibujos te los saltas. Había para explicar las décimas, había diez tiras. Y tenían pintadas dos, pero como no tengo pintada una entera, es cero coma... pero claro, que entendiesen que esto era un cero, les costó. Cero coma tres, ¿es que tenemos una entera pintada? (Abril 2013)

En este caso, el recurso aprovechado es la representación de los números decimales tomando como fundamento la equivalencia entre las unidades de distinto orden en el sistema decimal posicional, VP, es decir, una unidad son diez décimas o cien centésimas.

La mirada crítica al libro de texto permite a Leire, por una parte, distanciarse de los planteamientos y explicaciones que ahí se proponen y, por otra, aprovechar los recursos que ofrece el libro. La comprensión y el uso de estos recursos se profundizan con el tiempo. En numerosas ocasiones Leire afirma que esa mirada crítica es nueva en ella y la relaciona con la implementación del proyecto de innovación y la consulta a la formadora. La mejora de la capacidad de análisis didáctico de los libros de texto es considerado por Carrillo y otros (2007) como un indicio de desarrollo profesional.

Códigos	M1 – 1T 2011-12	M2 – 2T 2011-12	M3 – 3T 2011-12	M4 – 1T 2012-13	M5 – 2T 2012-13	M6 – 3T 2012-13
Identifica un contenido matemático a enseñar para afianzar el conocimiento matemático de los estudiantes	VP PR	VP CD ALG PR EC	VP CD EM	VP CD ALG EC	CD MD	
Identifica prácticas matemáticas clave para trabajar un contenido matemático	VP CD EC	CD PR	VP CD TM MD ALG PR EC	VP CD ALG EC	VP EM MD EC	VP CD EM ALG PR
Considera el trabajo de los contenidos matemáticos en libros de texto		ALG	VP	VP	VP ALG PR	VP EC

Tabla 17. Evolución del conocimiento de estrategias para la enseñanza del contenido

La Tabla 17 resume los contenidos matemáticos relevantes que son objeto de este conocimiento sobre qué y cómo enseñar en los diferentes momentos formativos. Esta Tabla recoge los contenidos matemáticos sobre los que versan las citas que han sido codificadas con los códigos que integran el tema del conocimiento. Esta Tabla 17 evidencia un aumento de complejidad en el conocimiento de las estrategias para la enseñanza a lo largo del tiempo. Mayor complejidad en el sentido de ir incorporando más contenidos matemáticos en la reflexión. Durante los tres primeros momentos hay una mayor consideración de qué enseñar, sin embargo, al curso siguiente se observa un mayor énfasis en cómo enseñarlo. También se muestra que no hay evidencia de consideración del trabajo de los contenidos matemáticos relevantes en los libros de texto al principio de la intervención formativa. Esta consideración se inicia lentamente y tiene más fuerza en los dos últimos momentos de la intervención.

En cuanto a los contenidos matemáticos sobre los que se profundiza en este conocimiento de estrategias para la enseñanza, predominan el VP, CD, ALG, PR y EC. La relevancia de estos contenidos puede responder al objeto matemático específico de la intervención formativa, pensamiento numérico y estrategias de cálculo mental, pues coincide con los elementos más trabajados durante la formación.

Conocimiento de cuestiones problemáticas de la práctica de enseñanza

El conocimiento de las cuestiones problemáticas de la práctica de enseñanza centra el análisis en el conocimiento pedagógico del contenido y, más concretamente, en lo relativo a la identificación de prácticas de enseñanza. Dentro de la práctica de enseñanza, este tipo se focaliza en lo identificado como situaciones que plantean cuestiones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que requieren buscar soluciones (Carrillo y Climent, 2011). Esas situaciones se refieren a caminos para representar o exponer un contenido de forma que se haga comprensible a otros. El análisis de este conocimiento se detiene en considerar tres modos de conciencia de la problemática crecientes en profundidad:

- Manifiesta una dificultad para innovar una práctica de enseñanza
- Identifica un error propio sobre un contenido matemático
- Muestra interés por un cambio de práctica

<u>Manifiesta una dificultad para innovar una práctica de enseñanza</u>

Una primera profundización en la problemática de la práctica de enseñanza se da cuando se identifica una nueva práctica de enseñanza y se reconoce una dificultad para llevarla a cabo, pero sin buscar soluciones. Los casos en los que sí se considera ese cambio de práctica fueron considerados como un nivel mayor de profundización. El análisis que sigue se centra en varios aspectos de la práctica de enseñanza discutidos durante la formación.

- Aprovechamiento de juegos matemáticos

Sobre las estrategias de cálculo, Leire encuentra especial dificultad en las estrategias que encierran los juegos que plantea el proyecto de innovación. La dificultad que identifica viene provocada, según su perspectiva, por una *falta de dominio* de esa forma de trabajar:

> Si yo tengo que hacer estos juegos, yo que no los he hecho nunca, yo no domino, no saco esas estrategias. (Abril 2013)

Antes de observar la práctica de aula en la que la formadora muestra cómo trabajar los juegos, Leire no los pone en práctica. Por esta *falta de dominio* Leire prefiere adelantar estrategias de cálculo correspondientes al curso siguiente antes de trabajar los juegos en clase:

> Ahora yo cojo las [estrategias de cálculo] de cuarto, porque ya, claro, las estrategias. Ahora ya estamos haciendo el tercer trimestre: son los juegos [en el cuaderno del proyecto de innovación propuesto por la intervención formativa]. Y aquí, qué hago si aún no hemos hecho los juegos. (Marzo 2013)

Como evidencia esta cita, por desconocimiento de la práctica de enseñanza hay una dificultad para aprovechar los contenidos matemáticos involucrados en los juegos de cálculo. Este desconocimiento lleva a esperar a que la formadora los practique con los alumnos:

> Por mi parte, como siempre, súper agradecida de ver la clase modelo. Siempre me doy cuenta de lo mucho que me falta por aprender, ya que la formadora sabe todas las estrategias de estos juegos. Quizás sería bueno saberlas nosotras para sacar el máximo provecho. (Mayo 2013)

Se plantea la conveniencia de conocer las estrategias que encierran los juegos, pero no hay evidencias de acciones concretas para aprovechar mejor los juegos de cálculo.

- Aprovechamiento de las intervenciones inesperadas de los alumnos

Otro ejemplo de dificultad en la práctica de Leire aparece sobre el aprovechamiento de intervenciones inesperadas de estudiantes. Leire reconoce que cuando está pendiente de poner en práctica una forma de enseñanza, le cuesta aprovechar las oportunidades que ofrecen dichas intervenciones:

> Formadora: También hemos dicho que para generalizar la descomposición. Yo me acuerdo de que el año pasado te salió a la hora de multiplicar por once. Un niño te dijo cinco más seis y tú dijiste no, diez más uno. Porque en ese momento histórico estabas muy centrada en el valor posicional, pero lo chulo habría sido decir: hagámoslo de las dos maneras. Esto es lo que en la literatura se dice oportunidades para que el niño pueda aprender más, con más complejidad.
>
> Leire: Cuando uno está enfrascado en hacerlo de una manera, cuesta mucho cambiar. Ahora, si estás dispuesto a cambiar… (Abril 2013)

En esta ocasión, Leire manifiesta su disposición al cambio de práctica, pero no profundiza sobre la generalización de la descomposición, CD, ni sobre el aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje que ofrecen las intervenciones espontáneas de los estudiantes.

Otro ejemplo se encuentra en la reflexión sobre la actividad de comprensión de la multiplicación que lleva a cabo en su aula durante el curso 2012-2013. En este ejemplo se observa una enseñanza poco fundamentada de ciertas estructuras multiplicativas, EM:

> Investigadora: Y esto del sentido geométrico ¿lo habíais hecho antes?
>
> Leire: No, bueno, sabiendo que íbamos a hacer esto, algún día les puse una muestra. Pero no es como más se ha trabajado. Pero no les he dicho que es la base y esto es la altura. Primero me tengo que acordar yo. Esto lo hizo la formadora, bueno, lo hemos hecho las dos. Estoy muy contenta, porque de lo que me esperaba que hiciesen. Hasta se atreven a representarlo... (Febrero 2013)

Leire reconoce que ha mencionado en clase, con la ayuda de la formadora, las diferentes estructuras multiplicativas, pero que no ha profundizado en todas ellas. En concreto, alude al sentido geométrico de la multiplicación como área de un rectángulo. Leire manifiesta que no lo recuerda bien como para trabajarlo con profundidad en clase. Esta identificación de una dificultad queda en el aire, sin indicios de reflexión posterior sobre ella.

Las prácticas matemáticas sobre las que versan estas dificultades suponen una innovación para la práctica de Leire. El uso de estrategias matemáticas en los juegos, estructuras multiplicativas distintas de la suma repetida o descomposiciones no canónicas son contenidos que el análisis de la identificación del conocimiento del contenido de Leire mostraba que eran poco o nada utilizados

Identifica un error propio sobre e un contenido matemático

Con este código se pretende indagar en el conocimiento de didáctico matemático sobre la práctica que resulta de identificar errores o dificultades propias en el tratamiento matemático del contenido. Al igual que el análisis del error en los estudiantes se considera una oportunidad de aprendizaje para los mismos y para el grupo de la clase (Muñoz-Catalán, 2009), ahora se analiza si la identificación de una dificultad o error ha proporcionado indicios de conocimiento en Leire.

- Estrategias de cálculo desconocidas y generalización

Durante la discusión conjunta Leire identifica algunas estrategias, EC, que no le eran familiares, por ejemplo la estrategia abreviada de multiplicación por once:

> Formadora: Trece por once yo hago: ciento treinta más trece, ciento cuarenta y tres. Y luego te puedo decir artificios: siempre que multiplico un número por once, los dos extremos quedan iguales y los sumo en el medio. Pero aquí no hay concepto, hay un artificio. Trece por once son ciento cuarenta y tres y lo hago rápido. Si está escrito, yo ni pienso *…+Estrategias sin concepto.
>
> Leire: Esto no lo sabía. (Septiembre 2011)

Al curso siguiente, Leire explica a sus compañeras del ciclo superior esta estrategia y cómo la ha enseñado en clase:

> Leire: Yo ofrecí las dos, pero se quedaron con esta [la estrategia abreviada]. Pones esto, sumas estos dos, y doscientos cincuenta y tres. Pones la centena, esta es la unidad, y dos más tres es cinco.
>
> Leonor: ¿Pero qué pasa...?
>
> Leire: Con tres no.
>
> *…+
>
> Leire: Yo lo expliqué de otra manera porque no la había entendido. Había entendido que había que poner... no sé qué, me lié. Me quedo así y dije: no lo estoy haciendo bien. Esta es la primera vez que lo hago...
>
> Formadora: Hay un problema [escribe en la pizarra 82x11]
>
> Leire: Cuando suman diez.
>
> Leonor: Los mayores dicen ‘¿Y si suma más de diez?’
>
> María: Entonces, ¿qué?

Leire: A las centenas. Novecientos dos.

Formadora: Pero explícales cómo lo haces.

Leire: Ocho y dos, diez, se lo sumas a las centenas.

Leonor: Aquí va la otra. ¿Y si tiene tres cifras?

Leire: No funciona, lo he intentado, no funciona.

Investigadora: Sí que funciona.

Formadora: Sí que funciona.

Leire: A mí no, pero yo no soy muy...

[A continuación la formadora e investigadora explican cómo funciona la estrategia para cualquier número, se enfatiza en la estimación de cifras del número resultante] (Abril 2013)

Durante la discusión conjunta se observa que Leire ha asimilado la estrategia que decía no conocer en septiembre de 2011, pero dice que esta estrategia solo funciona cuando se multiplica once por un número de dos cifras. Es decir, explica la estrategia como un "truco" sin comprensión conceptual, por lo que no parece haber llegado a percibir la matemática involucrada. La discusión conjunta ofrece la oportunidad de profundizar sobre los elementos matemáticos de la estrategia.

- Significado matemático de la igualdad aritmética

Otro ejemplo de toma de conciencia de un error matemático, que lleva a explicitar un contenido y a ponerlo en práctica a partir de entonces, se da en relación a la correcta simbolización de la propiedad distributiva, PR, en concreto en el sentido del signo igual como equivalencia numérica entre dos expresiones aritméticas.

En febrero de 2012 se grabó una sesión de implementación del proyecto de innovación impartida por Leire en su aula. La finalidad de esa grabación era la selección de un episodio para la discusión conjunta con el resto de maestros del ciclo durante la tercera sesión de la intervención formativa de ese curso.

Leire: Es multiplicar cualquier número por once. Si tengo que multiplicar doce por once, ya no es tan fácil. Seis por once es fácil.

E1: Sesenta y seis.

Leire: Es sesenta y seis; pero doce por once es más difícil. ¿Qué puedo hacer? Si en vez de once, el once lo descompongo en dos números es más fácil. ¿En qué dos números lo descompongo?

E2: En seis y cinco.

E3: En diez y uno.

Leire: Vale, en [escribe] 10+1. Si hago [escribe] 12x10, ¿cuánto es doce por diez?, ¿os acordáis que multiplicar por diez es poner el mismo número y añadir un cero?

Coro: Sí.

E4: Ciento veinte.

Leire: [Escribe] 120. Y ahora le tendré que sumar... Uno no, un doce que me falta por sumar

E1: Ah, vale.

E5: Ciento veintiuno.

Leire: E5, me puedes escuchar, que no estás escuchando lo que digo. A ver, esta multiplicación es tener: *escribe+12+12+12+12+12… ¿Cuántas veces?

Coro: Once.

Leire: Es esto, ¿no? A ver, lo cuento que he perdido la cuenta. Uno, dos, [cuenta]... diez y once. Esta multiplicación es esto, ¿no? ¿Sí o no?

Coro: Sí.

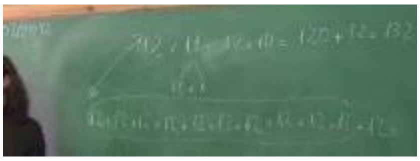
Leire: Si multiplico por diez, he hecho esto [cuenta 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10]. Tengo esto. ¿Cuántos me faltan por sumar?

E5: Doce.

Leire: [Escribe] 12.

E6: Ciento treinta y dos.

Leire: Esto es [escribe] 132. (Febrero 2012)



$$\underset{10+1}{12 \times 11} = 12 \times 10 = 120 + 12 = 132$$

$\boxed{12+ 12 +12 +12 +12 +12 +12 +12 +12 +12}$ + 12

Figura 26. Transcripción de la pizarra del vídeo-episodio M3 (Febrero 2012)

El episodio seleccionado versaba sobre la explicación de una estrategia de cálculo de la multiplicación por once por descomposición y aplicación de la propiedad distributiva. En la grabación (Figura 26) se visionaba un error en la explicación de Leire. Este vídeo-episodio fue mostrado a Leire para su aprobación antes de llevarlo a la reunión de discusión. Como ella afirma, no observó nada raro en su actuación: *Yo lo vi sola con ella y me pareció que estaba bien. … Mira que no me había dado cuenta de este igual, ni pensaba en él* (Marzo 2012). Durante la sesión de discusión conjunta, se analizó matemáticamente este episodio, la estrategia que se utiliza, las propiedades de las operaciones que aparecen y la importancia de la escritura matemática para que los estudiantes aprendan el lenguaje simbólico matemático:

> Después de ver el vídeo de mi actuación, me he dado cuenta del error que cometía explicando la estrategia, referente al lenguaje matemático. De hecho, estos días he detectado que algunos alumnos cometían el mismo error y por tanto ya lo estoy corrigiendo. Estoy mucho más atenta a este tipo de errores. (Marzo 2012)

Al curso siguiente, cuando Leire explica a las maestras del ciclo superior la estrategia de multiplicar por once dice:

> Leire: [escribe en la pizarra 23x11] Esto es descomponer el once en diez más uno. Esta es la típica [sigue escribiendo =23x(10+1)=230+23=253]. Ya si lo pones así trabajas además la propiedad distributiva.
>
> Formadora: Esta es la tradicional, doscientos treinta más veintitrés...
>
> Leire: Pero claro, siempre se equivocan y te suman uno. Esta es una de las que había, que es la que yo hice el año pasado. (Abril 2013)

Burgell y Ochoviet (2015) afirman que de los múltiples significados que posee el signo igual, los estudiantes suelen adjudicarle el de operador o el de propuesta de actividad. En el error inicial de Leire, se puede ver una causa de esa adjudicación en los maestros de primaria, que no suelen prestar atención a la notación. Leire afirma, una vez identificado su error, que muchos de sus estudiantes también lo cometen. En la explicación de una estrategia que propone en la reunión de discusión con las maestras del ciclo superior, se observa que este error ya no se comete y, de hecho, Leire reconoce que así se trabaja la propiedad distributiva.

A diferencia del código anterior, en este caso el conocimiento sobre cuestiones problemáticas de la práctica de enseñanza se inicia con la identificación de un error propio en el tratamiento de contenidos matemáticos durante la práctica. El análisis muestra que estos errores identificados son ocasión para corregir o afinar un conocimiento matemático.

<u>Muestra interés por un cambio de práctica</u>

Dentro del conocimiento de cuestiones problemáticas de la práctica de enseñanza, se analizan a continuación las evidencias de una reflexión sobre la práctica que mueve a la acción, que busca un cambio o mejora en la práctica sostenida en el tiempo. La capacidad de aprender de las experiencias docentes promovidas por la reflexión conjunta es una de las características del profesor competente según Shulman y Shulman (2004). Esta capacidad debe llevar a comprometerse en una revisión pedagógica de la práctica, de manera que promuevan una mejora de la práctica sostenida en el tiempo.

- <u>Enseñanza de algoritmos que respetan el valor posicional del número</u>

En la primera sesión de discusión tras la práctica observada, Leire cuestiona a la formadora sobre la forma habitual que utilizan en la escuela para enseñar los algoritmos:

> Leire: Yo tengo una pregunta. Cuando comenzamos a enseñar a sumar, a restar..., o sea, yo pienso que hacemos... cifras. No insistimos en, yo qué sé, por ejemplo, esto que tú has dicho ahora: "ciento veintitrés más catorce". Tú haces: tres más cuatro, siete. Dos más uno...; pero no vemos que quedan "doce [decenas] más [una decena]", ¿me explico?
>
> Formadora: Ciento veintitrés..., por ejemplo.
>
> Leire: Da igual.
>
> Formadora: Está muy bien, va, vamos a deducir.
>
> Otros: Unidades más unidades.
>
> Leire: Que no se podría decir...
>
> Formadora: Cifras, ella ha dicho cifras, ¡está muy bien, eh!
>
> Otros: Sí.
>
> Formadora: Tres y cuatro, siete; dos y uno, tres...
>
> Leire: Esto es lo que hacemos.
>
> Formadora: Esto es lo que se hace, pero aquí no se trabaja el valor posicional.
>
> Otros: Vale.
>
> Leire: ¿Cómo?, ¿cómo lo podríamos hacer?, esto quiero yo. (Septiembre 2011)

En esta primera reunión, Leire se replantea la forma habitual de enseñanza de los algoritmos, ALG, al contrastarlo con el trabajo del valor posicional en las estrategias de cálculo sobre el que insistía la formadora. Sin embargo, el diario de reflexión no indica una repercusión sobre la práctica de este cuestionamiento. Durante la segunda reunión de discusión, Carla, la maestra paralela de Leire, plantea la pregunta de cómo enseñar el algoritmo de la multiplicación. Se evidencia que ha habido una reflexión entre las dos maestras de tercero sobre la forma de enseñar a multiplicar:

> Carla: También esto de compartir con los otros, por ejemplo: ahora con Leire hablábamos, al empezar la multiplicación, ¿cómo la hacemos? La podemos hacer de las dos formas, para que los niños sepan. *…+ Así que estábamos hablando de cómo hacerla, queríamos preguntarte cómo podemos hacerla. De qué manera hacerla.
>
> Formadora: ¿Cuándo empezaréis a enseñarla?
>
> Leire: Ya. (Enero 2012)

El guión de reflexión que rellenan durante la reunión indica lo siguiente sobre el cuestionamiento de la práctica:

> [¿Qué os aporta como equipo docente estas reflexiones en las reuniones de ciclo o en la programación con tu maestra paralela, y qué problemas pueden surgir?]
> A mí me hace cuestionarme muchas cosas: cómo enseñar los algoritmos. (Enero 2012)

En esta ocasión, el diario de reflexión posterior a la reunión sí evidencia que ha habido un cambio de práctica y muestra el efecto percibido de este cambio en los estudiantes:

> Hace años que pienso que siempre pedimos a los niños los algoritmos y si eso realmente es tan importante. Lo es, pero creo que tener el concepto claro lo es mucho más. Con mi compañera, después de esa reunión decidimos enseñar la multiplicación aplicando la propiedad distributiva y los niños y niñas lo entendieron en seguida. (Marzo 2012).

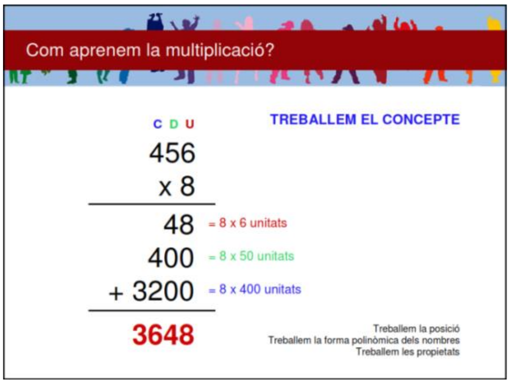


Figura 27. Fragmento de la presentación sobre cómo enseñan matemáticas en la Escuela (Marzo 2012)

Este cambio de práctica se ve reflejado en la presentación que prepara Leire para explicar cómo enseñan en la Escuela la multiplicación (ver Figura 27) y en la práctica sostenida en el tiempo, como se refleja en la siguiente cita del curso 2012-2013.

> Investigadora: ¿Los algoritmos los estáis haciendo como el año pasado la multiplicación?
>
> Leire: No los hemos empezado todavía, pero sí, lo haremos. Ya lo dijimos en la reunión de padres; una de las cosas que hicimos fue explicar cómo haríamos la multiplicación y la división. *…+ La multiplicación la hacemos descomponiendo. (Noviembre 2012)

- <u>Introducción de material manipulativo en la enseñanza</u>

Otro ejemplo de cuestionamiento sobre la práctica del que hay evidencias que conduce a un cambio de práctica versa sobre la enseñanza de la numeración mediante material manipulativo. En la primera sesión de discusión, la formadora concluye la reunión mostrando el material manipulativo de multibase:

> Formadora: Esto, creéis que os sirve para algo, este material...
>
> Leire: Yo con esto tengo un problema. Como no hemos manipulado como alumnos y muchos... (Septiembre 2011)

Leire reconoce que al no haber aprendido la numeración utilizando este material cuando ella era pequeña, no sabe cómo usarlo para enseñar. En el cuestionario pasado en abril, Leire reflexiona de la siguiente manera sobre los aspectos de sus clases de matemáticas que considera mejorables: *Todavía falta manipulación con diferentes materiales. Por ejemplo, no hemos utilizado el material manipulable traído por vosotros* (Abril 2012).

Al identificar esta dificultad, Leire pide ayuda para preparar unas clases para los ciclos inicial y medio en las que se trabaje la numeración manipulando. La formadora y la investigadora preparan unas actividades que se le envían a Leire para que las analice:

> El primer año que trajeron esto yo estaba en segundo y no lo utilizamos, es lo que le dije a la formadora, es que no sé cómo utilizar este material. Me gustaría saber qué puedo hacer. Por esto, la última vez que vinisteis me hizo una clase. Porque le dije: creo que es muy positivo, es decir, que con esto puedo trabajar mucho, pero no sé cómo hacerlo. De aquí es de donde salió la idea esta. Así, cuando lo tenga más claro ya hablaré con las maestras de primero, segundo, tercero y cuarto y a ver qué les parece, porque claro, tampoco quiero imponer nada, pero bueno. Les diré, hay niños que les cuesta, pero hay niños que podrían…, yo pienso que podrían entender mejor cómo funciona la numeración. (Noviembre 2012)

Leire intuye que su dificultad proviene de no dominar suficientemente la práctica de enseñanza con material manipulativo: *Me da un poco de respeto, porque claro, como no dominas. Bueno es como todo, me da cosa, pero bueno* (Noviembre 2012).

Con las clases que prepara, Leire realiza una clase con la formadora en el ciclo inicial. En su diario de reflexión, Leire anota que se siente insegura:

> Tú [formadora], siempre vas más allá y yo todavía no domino suficiente para poder hacerlo tan bien. Supongo que necesito tiempo (yo y mis inseguridades, jajaja). (Enero 2013)

En la entrevista desglosa con más detalle de dónde proviene su dificultad:

> Investigadora: Al final, ¿habéis hecho la reunión de maestros para presentar lo del trabajo de multibase?
>
> Leire: No. Yo he hecho lo de las multibase en los dos terceros. Pero es que cuando vi a la formadora en segundo, no me quedé muy convencida de mí misma. Quiero decir. Le escribí a la formadora para que me mostrase el vídeo que grabasteis, para ver lo que hizo ella y lo que hice yo. Porque yo no me sentí segura. Como no me sentí segura… Yo soy muy insegura en todo. Cuando me siento segura, vale, pero cuando no estoy segura me echo para atrás. Tengo mucho sentido del ridículo. Delante de las compañeras, hacer una cosa de la que no estoy segura, me cuesta. Entonces he dejado pasar. Tendría que ir a primero, segundo y cuarto, pero como no estoy muy convencida yo. De cómo hacerlo, no de que no esté bien la idea, ni mucho menos. De enfrentarme delante de una clase... Noto que todavía tengo carencias, y como tengo carencias…
>
> Investigadora: Pero carencias, ¿en qué sentido? ¿En cómo gestionar la clase en grupos de cuatro?
>
> Leire: Sí, y yo veía que la formadora iba más allá. Yo me quedaba en lo que me mandaste tú, mirando siempre el papel, pero la soltura de: "Y ahora hagamos esto, ahora esto" no la tengo todavía, y eso me coarta. Lo he hecho en mi clase y en el otro tercero, es decir, con los alumnos con los que tengo más trato, sí. Pero, claro, tendría que ir a las otras clases también. [...] Con ellos he trabajado la primera ficha: apropiarse del material; y he hecho también restas llevando. *…+ Me siento más cómoda haciendo operaciones. Creo que me es más fácil con el material. Yo le veo mucha utilidad al material en sí, pero no sé sacarle todo su jugo. (Febrero 2013)

Las citas anteriores sugieren que Leire comienza un cambio de práctica sin perder la sensación de inseguridad y falta de dominio. Como Leire ha tardado más de un año en incorporar a la práctica del aula el material multibase, para buscar evidencias de si el cambio de práctica es sostenido en el tiempo se ha de recurrir a fuentes complementarias de datos. En un correo electrónico en el que se preguntó a Leire sobre este punto, ella contesta:

> El año pasado [curso 2012-2013] usé el material multibase en primero, segundo y tercero. Este curso [2013-2014], la verdad, no lo he usado mucho. En alguna clase, para aclarar algunos problemas (para recordar la resta llevando). (Abril 2014)

Esto contrasta con lo que se expone en un correo posterior:

> Este curso 2014-2015, he comenzado a utilizar el multibase de entrada en mis clases, tanto en segundo como en tercero. En segundo estamos haciendo las decenas y las unidades y con el material les es más sencillo, aunque a la vez plasmarlo en el papel les cuesta mucho más. En tercero hemos empezado explicando los números de tres cifras y creo que con este material les es mucho más fácil distinguir la posición del número respecto del valor posicional, sobre todo a aquellos alumnos que les cuesta la abstracción. Este curso pienso llevar y utilizar el multibase a todas las clases que me sea posible. (Septiembre 2014)

Aquí sí se encuentran evidencias de un uso del material para la enseñanza de la numeración, ya no impulsado por la formación que concluyó más de un año antes. Por otra parte, este uso se ve fortalecido por la consideración de los resultados sobre los estudiantes.

Códigos	M1 – 1T 2011-12	M2 – 2T 2011-12	M3 – 3T 2011-12	M4 – 1T 2012-13	M5 – 2T 2012-13	M6 – 3T 2012-13
Manifiesta una dificultad para innovar una práctica de enseñanza	EC				EM	EC
Identifica un error propio sobre e un contenido matemático	EC		VP CD PR EC	VP		EC
Muestra interés por un cambio de práctica	VP ALG	ALG		VP	VP CD ALG	

Tabla 18. Evolución del conocimiento de cuestiones problemáticas de prácticas de enseñanza

La Tabla 18 resume los contenidos matemáticos relevantes que son objeto de este conocimiento sobre cuestiones problemáticas sobre la práctica según los momentos formativos en los que se han identificado. En esta Tabla se muestra la escasez de esta problematización de la práctica.

La enseñanza de los algoritmos respetando el sentido del valor posicional de los números y la introducción de material manipulativo en el aula son ejemplos en los que se observa un cambio sostenido en el tiempo. Estos ejemplos no son numerosos en los datos.

No todas las ocasiones en las que Leire demuestra identificar lo que para ella supone una problemática sobre la práctica han tenido la misma repercusión sobre la práctica de enseñanza. El argumento que tiende a aducir para justificar la dificultad de innovar ciertas prácticas es la falta de dominio o de conocimiento matemático. También considera un problema el no haber aprendido de esa manera cuando ella era estudiante. En los casos en los que inicia nuevas prácticas en las que percibe la inseguridad por falta de dominio o de experiencia previa, el tiempo que requiere para afianzar la práctica innovada es largo: en ocasiones se requieren de varios años para mantener la práctica y considerarla parte de su propia práctica de enseñanza. Sin embargo, se observa que cuando la identificación de nuevas prácticas responde a un cuestionamiento sobre una práctica habitual que considera mejorable o una identificación de un error propio, la transformación de la práctica es rápida. Los datos evidencian que en menos de un año llega a cambiarla y se sostiene en los siguientes cursos.

Conocimiento práctico de las relaciones entre contenidos matemáticos de diferentes materias / cursos

El análisis del conocimiento didáctico matemático de Leire pasa por indagar sobre el conocimiento de las relaciones de los contenidos matemáticos relevantes con (1) otros contenidos intra o extramatemáticos y (2) las relaciones entre lo que los estudiantes conocen de cursos anteriores o deben conocer para afrontar los contenidos que verán en cursos posteriores. Es decir, el conocimiento curricular considerado por Shulman (1986) en su doble vertiente horizontal y vertical, que tanto Ball, Phelps y Thames (2008) como Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz Catalán (2013) incluyen dentro del conocimiento didáctico.

Para abordar este análisis se define el tema *Conocimiento práctico de las relaciones entre contenidos matemáticos de diferentes materias/cursos* que engloba tres códigos:

- Relaciona contenidos intra/extramatemáticos con contenidos matemáticos relevantes
- Identifica el trabajo de contenidos matemáticos en cursos precedentes
- Identifica el trabajo de contenidos matemáticos en cursos posteriores.

<u>Relaciona contenidos intra/extramatemáticos con contenidos matemáticos relevantes</u>

Se busca identificar el conocimiento de las relaciones de los contenidos matemáticos relevantes con otros contenidos intra o extramatemáticos que los estudiantes ven simultáneamente.

El análisis de este código ha consistido en identificar las citas en las que Leire trabaja los contenidos matemáticos relevantes estudiados en otros contextos ya sea porque surgen en problemas contextualizados del proyecto de innovación propuesto por la formación, ya porque se relaciona con otras asignaturas o contextos matemáticos. Por ejemplo, cuando en la asignatura de conocimiento del medio se estudian los desplazamientos, aprovecha para trabajar las medidas y la conversión de medidas:

> Estamos haciendo medio [conocimiento del medio], y me sale que se desplazan a no sé cuántos kilómetros y… aprovecho para trabajar kilómetros, metros. (Marzo 2012)

En esta ocasión, Leire relaciona esta conversión de medidas con el conocimiento del sistema decimal posicional, VP:

> Leire: Y yo veo esto, que si tú vas a trabajando la posición de los números, luego les es mucho más fácil, todo. El razonamiento matemático es mucho más sencillo.
>
> Investigadora: Va todo unido, ¿verdad?
>
> Leire: Todo. Los kilómetros… Para pasar de kilómetros a metros, a decímetros…, aquel tema era un rollo y decías: "¡Madre mía!", no lo entendían, en ningún momento. (Marzo 2012)

Encontramos otro ejemplo en la asignatura de educación física en la que se forman equipos con atención al concepto y cálculo de la división mediante la propiedad de relación inversa de operaciones, aprovechando así el conocimiento de las tablas de multiplicar que están estudiando los alumnos, PR y TM. Al respecto, Leire explica lo siguiente:

> Yo soy maestra de educación física, y en mis clases de educación física yo ya lo había hecho, desde siempre. Tenemos que repartir en cuatro grupos, tal y cual, ¿cuántos hay? Pero no había dicho que era una división; pues ahora es que: "¿Qué tenemos que hacer? Una división. ¿Cuál? Tal. Y ya están dividiendo. "Di el número que multiplicado por cuatro se acerca al veinticinco. Tal". Como ya empiezan a saber las tablas... (Marzo 2012)

Estas citas dan cuenta de ocasiones en las que Leire relaciona diferentes contextos extramatemáticos trabajados en otras asignaturas con contenidos matemáticos relevantes. En este último ejemplo, se observa que Leire está acostumbrada a aprovechar el contexto de reparto que se da en otras asignaturas, como el deporte, para trabajar la división mediante el uso de la propiedad de relación inversa entre las operaciones multiplicación y división; sin embargo, alude como novedad el hecho de explicitar que lo que se está haciendo es una división.

<u>Identifica el trabajo de contenidos matemáticos en cursos precedentes</u>

- <u>Valor posicional</u>

En cuanto a las relaciones con otros cursos, se busca primero identificar el conocimiento de Leire sobre lo que sus estudiantes conocen o deberían trabajar en cursos precedentes al suyo. Durante el curso 2010-2011, Leire impartía clase en segundo de primaria y durante los cursos 2011-2012 y 2012-2013 imparte clase en tercero. Probablemente por este motivo se encuentran numerosas citas sobre el trabajo de los contenidos matemáticos en segundo. A modo de ejemplo se muestran las siguientes:

> Me acuerdo de que, en segundo era: "diez más diez, veinte o dos decenas…". No se me hubiera ocurrido nunca decir "veinte o dos decenas". Y ahora lo hago con decenas, y ahora lo hago con unidades… Y claro, eso les da un bagaje a los niños. (Marzo, 2012)

Esta cita no solo muestra el trabajo del valor posicional de las cifras, VP, fomentado por la formadora durante las clases modelo comenzadas en 2010-2011 con el ciclo inicial. También se alude a fomentar el conocimiento de los estudiantes sobre el sistema de numeración.

- <u>Algoritmo de la resta</u>

En ocasiones, el trabajo de contenidos matemáticos relevantes en cursos precedentes, como son los algoritmos, ALG, es conocido, pero no continuado. La siguiente cita muestra que Leire conoce cómo se enseña el algoritmo de la resta en segundo –fue ella quien lo enseñó a sus alumnos el curso precedente cuando impartía clase en segundo–, pero como ella no suele restar de esa manera, afirma no recordarlo:

> Ya lo dijimos en la reunión de padres; una de las cosas que hicimos fue explicar cómo haríamos la multiplicación y la división. Claro, se quedan así… "Ah, la resta ya era rara en segundo". Yo ahora ya no sé restar como restamos aquí. De hecho, los niños ya vienen con la resta. Yo no insisto mucho en eso, yo les enseño cómo se hace de la otra

> manera, como hacen los padres; pero si un niño me tacha arriba ¿por qué le tengo que liar? Es mi opinión, por qué le tengo que liar; ahora cambia para que lo haga de la otra manera si ya lo ha aprendido así, ya está. (Noviembre 2012)

Leire dice reconocer el algoritmo de la resta que traen aprendido sus alumnos *si un niño me tacha arriba*. Sin embargo, ella enseña el algoritmo tradicional *como hacen los padres.* Con todo, respeta la forma de hacer de sus alumnos, reconociéndola como correcta. Aunque en esta cita se evidencia ese abandono de la práctica aprendida el primer año de la formación sobre la resta llevando, la introducción del material manipulativo, que se analizó en el tema sobre el conocimiento de cuestiones problemáticas de la práctica de enseñanza, pone de manifiesto que Leire llega a relacionar el trabajo de descomposiciones variables del número con el algoritmo de la resta. El uso de material manipulativo sobre el sistema decimal posicional la lleva trabajar de una forma nueva en tercero los conocimientos previos de los estudiantes.

> El año pasado [curso 2012-2013] usé el material multibase en primero, segundo y tercero. Este curso [2013-2014], la verdad, no lo he usado mucho. En alguna clase, para aclarar algunos problemas (para recordar la resta llevando). (Abril 2014)

Estas citas muestran un conocimiento del trabajo que realizan los estudiantes de la escuela en segundo. Este conocimiento le lleva a utilizar los contenidos matemáticos ya aprendidos o respetar la forma de realizar cálculos que aprendieron sus estudiantes, aunque ella afirme haberse olvidado, o de buscar formas de representar conocimientos previos.

<u>Identifica el trabajo de contenidos matemáticos de cursos posteriores</u>

Las relaciones entre contenidos miran también a los conocimientos que los estudiantes verán en cursos posteriores. Esta mirada hacia delante considera la familiaridad de la maestra con los conocimientos que los estudiantes adquirirán en otros cursos y el tratamiento de los contenidos que imparte de forma que preparen a una matemática más avanzada.

- <u>Propiedad distributiva</u>

Un ejemplo de tratamiento de contenidos matemáticos que aparecen en su clase y que Leire aprovecha para preparar futuros conocimientos es el del uso de la propiedad distributiva, PR. Este contenido se enseña formalmente en cuarto de primaria, pero aparece en relación con contenidos de tercero. En un primer momento, se ve que Leire comienza a utilizarlo con cierta dificultad:

> Ayer, en mi clase salió la propiedad distributiva, y la hice. Preguntándole a ella [formadora] ¿es la propiedad distributiva?, porque claro... (Enero 2012)

En esta sesión de discusión conjunta, Leire comenta que ha identificado la propiedad distributiva en su clase y, previa consulta a la formadora, la ha utilizado. En esta misma sesión, preguntan a la formadora cómo enseñar el algoritmo de la multiplicación y la formadora muestra el algoritmo en columna explicitando la descomposición numérica y uso de la propiedad distributiva:

> Hace años que pienso que siempre pedimos a los niños los algoritmos y si eso realmente es tan importante. Lo es, pero creo que tener el concepto claro lo es mucho más. Con mi compañera, después de esa reunión decidimos enseñar la multiplicación aplicando la propiedad distributiva y los niños y niñas lo entendieron en seguida. (Marzo 2012)

Este primer paso de explicitación de la propiedad distributiva que sostiene un contenido impartido en tercero lleva a Leire a avanzar en la mirada matemática hacia adelante. Al curso siguiente, Leire hizo trabajar por parejas a sus alumnos sobre el sentido de la multiplicación de doce por tres. Una pareja escribe en la pizarra lo siguiente: $12 \times 3 = (10 + 2) \times 3 = 10 \times 3 + 2 \times 3 = 30 + 6 = 36$ (Figura 28).

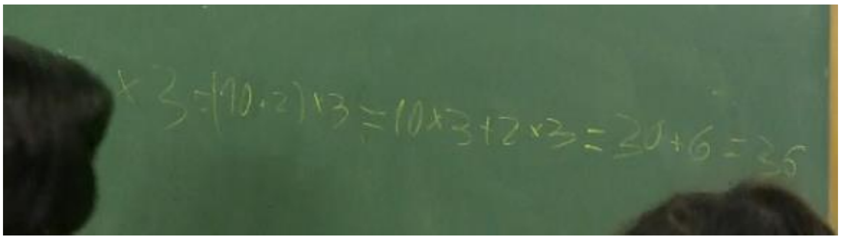


Figura 28. Fotograma de una clase sobre multiplicación (Febrero 2013)

En la entrevista posterior Leire explica el motivo de haber introducido la simbolización de la multiplicación en horizontal en tercero, pese a ser un contenido propio de cuarto de primaria:

> Leire: Hay dos temas de matemáticas que son de multiplicación, como que la hacen [en el libro de texto] tradicionalmente, el primer tema es sin llevarse nada y el segundo tema con llevadas. Pero como nosotros lo hacemos así [algoritmo en columna], son dos temas de multiplicación. Y pensé, ¿y si lo hacemos así? Se me ocurrió. Vamos a hacerlo en horizontal. Ya sé que no entenderéis mucho, pero bueno. Hemos hecho unos cuantos. A veces dudan, ¿qué tenemos que hacer, multiplicar? Pero bueno.

Investigadora: Me ha sorprendido porque ponen bien los paréntesis... ¿cuándo se hace esto?

Leire: Esto, en cuarto se hace la propiedad distributiva. Pero claro, si hacemos así la multiplicación es mucho más fácil, porque esto es lo que están haciendo mentalmente, lo único que aquí les hago que lo escriban, por eso se hacen un lío. Porque esto mentalmente, sí, ya hacen tres por dos y tres por diez o tres por dos y tres por una decena, ya que estamos insistiendo en esto. Yo le he dicho a Carla, lo hemos hecho en horizontal y han sido dos grupos lo que los han hecho. Solo han sido dos grupos, pero ya han sido dos. Y los otros no les suena a chino, porque ya lo han visto. (Febrero 2013)

- <u>Números decimales</u>

Esta cita introduce otro ejemplo donde se muestra cómo Leire aprovecha problemas en contexto para preparar la introducción de contenidos en cursos superiores. Los números decimales aparecen numerosas veces en el contexto de la vida de los alumnos y en los problemas de cálculo que trabajan en tercero.

> Le encuentro aplicaciones [del proyecto de innovación introducido por la intervención formativa] a todo. Y claro, que un niño te sepa pues la propiedad distributiva, la propiedad conmutativa, la propiedad asociativa que empezaremos a hacer, o sea, ¡es fantástico! En mi clase salen números decimales, me han salido fracciones…, y no saben lo que es; sí que saben si es la mitad de uno, pues es cero coma cinco. Entonces “Ah claro, por eso yo veo en casa, o en no sé dónde, la coma”. “Pues eso quiere decir que es medio”. “¡Ah!”. O sea, y “También se puede escribir uno partido por dos”, tú lo vas poniendo, el que lo pilla, lo pilla, y el que no, pues no. (Marzo 2012)

Esta cita muestra que Leire aprovecha la aparición de números decimales para introducir su notación. No profundiza en la explicación de los números, pues no corresponde a su temario curricular y dice ser consciente de que hay alumnos que no lo entienden; pero sí introduce la notación y el vocabulario, a fin de que los alumnos se vayan familiarizando con esos contenidos.

Esta práctica de ir introduciendo los números decimales aprovechando problemas contextualizados se mantiene al curso siguiente:

> En los problemas que hacemos de cálculo mental a veces te sale: siete y medio. Dices es correcto poner 7,5, es correcto poner 7 y ½ . El niño que lo pilla, pues fantástico, y el que no, pues tampoco le toca, quiero decir, no pasa nada. (Abril 2013)

En estas citas se observa la conciencia de ir preparando el terreno con su enseñanza para que en cursos posteriores sus alumnos tengan facilidad para aprender ciertos contenidos.

La Tabla 19 resume los contenidos matemáticos relevantes que son objeto de este conocimiento práctico de las relaciones entre contenidos que se estudian en el mismo curso o en otros pero están vinculados a lo que ella enseña.

Códigos	M1 – 1T 2011-12	M2 – 2T 2011-12	M3 – 3T 2011-12	M4 – 1T 2012-13	M5 – 2T 2012-13	M6 – 3T 2012-13
Relaciona contenidos intra/ extramáticos con contenidos relevantes			VP TM PR	VP ALG		
Identifica el trabajo de contenidos matemáticos en cursos precedentes	EC		VP	VP CD ALG	PR	
Identifica el trabajo de contenidos matemáticos en cursos posteriores		ALG PR	VP ALG PR		VP ALG PR	VP PR

Tabla 19. Evolución del conocimiento práctico de relaciones entre contenidos

Esta Tabla evidencia una escasa relación entre contenidos intra o extramatemáticos que se estudian durante el mismo curso. Estas relaciones aparecen temporalmente tarde en los datos y suelen estar relacionadas con problemas contextualizados.

Las relaciones con contenidos estudiados en otros cursos giran sobre todo en el ámbito del cálculo, siendo notable la ausencia de relaciones en la estructura multiplicativa. Las relaciones entre contenidos se dan en la mayoría de las citas analizadas por la introducción de notación matemática o el uso de vocabulario específico que afianza contenidos o prepara al aprendizaje de futuros contenidos. La introducción de material manipulativo también ha sido ocasión para el trabajo de contenidos ya vistos en orden a facilitar su comprensión significativa.

4.2.2. Identificación e interpretación del conocimiento de los estudiantes

Dentro del conocimiento pedagógico del contenido se considera el aspecto del conocimiento didáctico matemático que identifica e interpreta el conocimiento de los estudiantes. Shulman (1986) considera el conocimiento comprensivo de lo que hace que el aprendizaje de un contenido sea difícil o fácil, las ideas previas típicas de los estudiantes y sus dificultades o errores. En esta línea del conocimiento pedagógico se analiza el tema del conocimiento de las relaciones de los estudiantes con el contenido matemático, que engloba tres códigos, desde un conocimiento más descriptivo a uno más interpretativo:

- Identifica un contenido matemático en una respuesta correcta de un alumno
- Distingue la complejidad y/o potencial de una tarea
- Identifica qué contenido matemático no es comprendido por el alumno

Identifica un contenido matemático en una respuesta correcta de un estudiante

El análisis del conocimiento de las relaciones de los estudiantes con el contenido lleva en primer lugar a considerar las citas en las que identifica respuestas correctas, suponiendo un conocimiento del contenido en los estudiantes que así responden. Zapatera y Callejo (2015) muestran que los maestros de primaria tienen mayor facilidad en identificar los elementos matemáticos usados por sus alumnos que en interpretar la comprensión de los estudiantes.

Cuando Sherin, Linsenmeier y van Es (2009) describen las características de un vídeo-episodio escogido para la discusión entre profesores sobre la comprensión del contenido por parte de los estudiantes, utilizan una gradación en cuanto a la profundidad del pensamiento de los alumnos que refleja el episodio. En las citas que se presentan a continuación no se trata de vídeo-episodios previamente seleccionados, sino de descripciones que realiza Leire sobre respuestas de los estudiantes. Pero se considera válida la clasificación entre: descripción de tareas rutinarias hechas de memoria, descripción de hechos en los que el estudiante busca dar sentido a tareas rutinarias y descripción de tareas matemáticas no rutinarias realizadas por el estudiante para dar sentido a sus acciones.

- Describe situaciones rutinarias

Pocos ejemplos hay de mera descripción de situaciones rutinarias en las que los alumnos hacen uso de la memoria. Un ejemplo se encuentra en la descripción que hace del vídeo-episodio de una compañera de segundo que se visualiza en la discusión conjunta.

> Hay alumnos que saben de memoria la mitad y, los que no, lo hacen gráficamente. (Marzo 2012)

Leire identifica que las respuestas de algunos alumnos son una muestra de un conocimiento aprendido de memoria. Además sabe reconocer otras estrategias que utilizan cuando les falla el recurso de la memoria.

En otra ocasión, Leire identifica la relación inversa entre las operaciones suma y resta en la respuesta correcta de un estudiante que había sido considerada incorrecta por parte de su maestra:

> Formadora: En el primer problema que va de repartir, ¿creéis que las soluciones puestas en la pizarra y aceptadas como buenas por la maestras son adecuadas para este problema de repartir o creéis que como el niño ya lo tiene asumido que la mitad es repartir solo comprueba aunque no tenga que ver con los datos del problemas? La pregunta es cómo hay que gestionarlo. ¿Qué tenemos que trabajar cuando trabajamos la resolución de problemas?
>
> Leire: Cuando la niña pone cuatro más seis igual a diez ella le ha dicho que no, para mí sí es correcta. En el fondo es cuánto le falta para llegar a diez. (Marzo 2012)

El problema que están comentando tiene este enunciado: “Marta tiene cuatro colores, ¿cuántos le faltan para llegar a una decena?”. En esta cita se evidencia que Leire interpreta la respuesta de la estudiante que ha escrito 4 + 6 = 10 como resultado a 4+__=10. En un comentario previo que realiza supone que la estudiante se sabe de memoria los hechos básicos de la suma.

Este tipo de descripción se suele hallar en las respuestas a los guiones de reflexión en los que se pregunta por las diferentes estrategias de resolución que utilizan los alumnos durante las sesiones visualizadas.

- <u>Describe situaciones rutinarias en las que los estudiantes dan sentido a la acción matemática</u>

En el cuestionario inicial se pide valorar las respuestas de varios estudiantes y justificar cuál es “la mejor” matemáticamente de entre ellas. La respuesta escrita del estudiante 1 de la Figura 29 es: ‘Mira, yo sé que treinta + veinte = cincuenta; siete + cinco=12; cincuenta+12=62’; la justificación de Leire a su valoración es:

> Porque entiende la suma y además utiliza la descomposición. (Septiembre 2011)

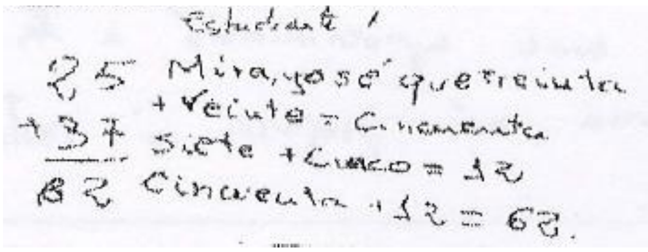


Figura 29. Respuesta mejor valorada por Leire (Septiembre 2011)

Leire identifica en esta respuesta la descomposición aditiva por valor posicional, CD, realizada por el estudiante 1. También interpreta la comprensión de la suma por el correcto uso de un algoritmo no tradicional basado en las propiedades del sistema decimal posicional. La descomposición numérica aparece aquí como elemento clave del algoritmo de la suma utilizado para dar cuenta del conocimiento del estudiante.

- Describe situaciones no rutinarias

Al hablar de situaciones no rutinarias, Leire hace referencia a acciones matemáticas que le sorprenden. Los estudiantes inventan estrategias o procedimientos que muestran un conocimiento matemático profundo de algunos contenidos matemáticos relevantes.

La descomposición numérica es un contenido recurrente en las descripciones que realiza Leire de las producciones de los estudiantes. Tras la participación en la primera clase modelo y la reflexión conjunta, Leire responde a la pregunta de qué han hecho los alumnos que pueda ser significativo para su aprendizaje:

> Algunos descomponen los números para tener más facilidad a la hora de hacer dobles, los problemas... (Septiembre 2011)

Aquí la descomposición aditiva es una estrategia facilitadora del cálculo. Esto mismo identifica en su práctica de aula:

> Formadora: ¿Qué resaltarías de este episodio como importante para el desarrollo numérico de los alumnos?
>
> Leire: Que es muy importante la descomposición de los números... El otro día, con [nombre de una alumna], aluciné. Con un problema con el veinticinco que tenía que quitarle diez. E hizo: veinticinco es diez más diez más cinco, si quito un diez, quince. Es verdad, y es una niña que le cuesta mucho. (Enero 2012)

Al año siguiente, Leire realiza una clase sobre multiplicación de la que se analiza una parte en la discusión con las maestras del ciclo superior. Ella destaca dos elementos matemáticos relevantes como importantes para el desarrollo del pensamiento numérico de sus alumnos, CD y VP: *La mayoría ha adquirido muy bien la descomposición numérica y el valor posicional.* (Abril 2013). Este comentario que se ve desarrollado en la reflexión conjunta:

> Formadora: ¿Qué más hay aquí? Además de las propiedades, además del sentido geométrico, además del valor posicional. ¿Qué más hay aquí?, ¿detectáis más cosas

que se trabajan aquí para desarrollar el sentido numérico que queríamos transmitir?

Leire: Quizás me repito, pero la descomposición de los números. *…+ Tengo un niño que me hace esto. *…+ Este siempre descompone, se lo monta para tener siempre dieces, descompone cinco, cinco y a partir de aquí lo hace todo. (Abril 2013)

Acerca de la estructura de la multiplicación, EM, y de entre los modelos de multiplicación utilizados por sus alumnos en una clase, Leire resalta el esquema de correspondencia: *He visto cosas aquí que me he quedado sorprendida. Con la formadora contábamos que hiciesen multiplicación y suma, pero han hecho esto, incluso reparto...* (Febrero 2013). En la sesión donde se analiza un vídeo-episodio de esta clase, Leire vuelve a insistir:

Formadora: ¿No sé Leire tú qué puedes decir, en el episodio si se ve claramente la diversidad?

Leire: Yo creo que sí

Formadora: ¿Por qué?

Leire: A mí me ha sorprendido mucho esta, la del doce por tres, hace tres líneas. Sí que lo hemos trabajado, pero me ha sorprendido mucho esta forma de representarlo. Se lo he comentado a Isabel [la investigadora].

Formadora: La clave está en dar la oportunidad de que cada niño lo haga de una manera distinta. No es “doce por tres, treinta y seis” porque te tienes que aprender las tablas o el algoritmo. Hay distintos tipos de representación, geométrica, la del árbol, distintos algoritmos… (Abril 2013)

Leire también identifica estrategias de cálculo de algunos estudiantes. Esto conlleva varios contenidos matemáticos relevantes, la relación inversa entre la multiplicación y la división, la descomposición factorial del diez, las propiedades asociativa y conmutativa y la estrategia de multiplicar por diez. Estos elementos no se ven explícitamente identificados en el siguiente comentario escrito de Leire, pero sí se destaca el uso de estrategias de cálculo:

[¿Qué destacarías de este episodio?]

- No había pensado nunca que para multiplicar x5 la estrategia podía ser x10 y :2.
- Me ha sorprendido la estrategia de Paula [alumna que primero halla la mitad del número y luego añade un cero]. (Enero 2013)

Leire menciona pocos elementos matemáticos relevantes. Aparece repetidamente la composición y descomposición de los números, ligeramente el valor posicional y algunas propiedades de las operaciones y estrategias de cálculo. A excepción de la estructura del sistema decimal posicional, se observa que Leire destaca los elementos que le resultan más novedosos o que trabaja menos en sus sesiones de clase como son ciertas estrategias de cálculo o la estructura de correspondencia en la multiplicación. Sherin, Linsenmeier y van Es (2009) afirman que los momentos de error o sorpresa son particularmente educativos para los maestros; aquí no se han considerado los momentos de error, que se verán más adelante.

<u>Distinguir la complejidad y/o potencial de una tarea</u>

Este código se formalizó para dar cuenta del conocimiento sobre los contenidos que muestran dificultad para los estudiantes en general y las tareas matemáticas que pueden facilitar la comprensión de dichos contenidos. El indicador no responde a una dificultad concreta identificada en los estudiantes sino a una idea previa sobre las dificultades que puede generar una tarea. El análisis de este conocimiento cobra mayor interés cuando se observan variaciones en la apreciación de Leire sobre la complejidad o el potencial de una tarea.

En el cuestionario inicial Leire analiza cuatro estrategias de cálculo (Figura 30):

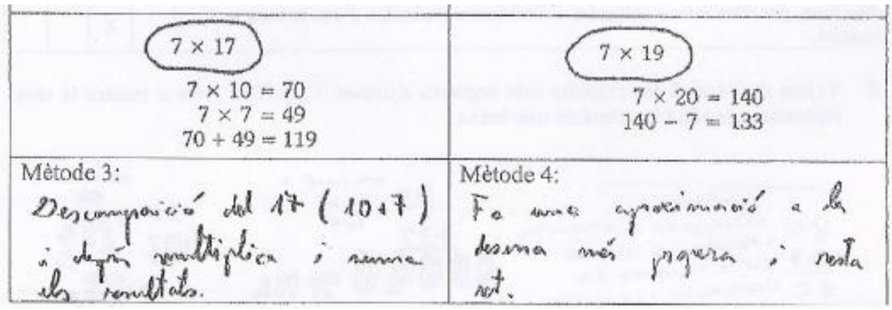


Figura 30. Métodos 3 y 4 de la pregunta 3 del cuestionario inicial (Septiembre 2011)

> [Pregunta 5. ¿Consideras que algunos de los métodos anteriores son fáciles de escribir en la pizarra, pero difíciles de explicar oralmente? ¿Cuáles y por qué?] Creo que el método 3 y 4. Porque los alumnos no tienen tan claras las descomposiciones y aproximaciones. (Septiembre 2011)

Estos métodos 3 y 4 se refieren al uso de la descomposición, aproximación y propiedad distributiva como estrategia de cálculo. Leire afirma que el uso de las descomposiciones, CD, y aproximaciones supone una dificultad generalizada para sus estudiantes, EC. Sin embargo, tras la primera clase modelo de tercero, Leire observa el uso de la descomposición como estrategia de cálculo utilizada por sus estudiantes:

> Algunos descomponen los números para tener más facilidad a la hora de hacer dobles, los problemas... (Septiembre 2011)

En este ejemplo se observa que la idea inicial de Leire sobre la dificultad generalizada para los estudiantes ante una estrategia de cálculo puede verse modificada al permitir el uso espontáneo de estrategias y observar su uso. En esta ocasión, la observación de una práctica ajena muestra un potencial contenido en la descomposición numérica.

Otro ejemplo de reflexión sobre dificultades generalizadas para los estudiantes se halla en el uso de algoritmos tradicionales. Leire reconoce que la falta de conocimiento de las tablas de multiplicar puede suponer una dificultad para efectuar el algoritmo abreviado de la división, ALG. Por eso considera que el uso del algoritmo extendido, que incorpora las operaciones intermedias, es un facilitador para los estudiantes:

> El otro día, Pepe [Director de la escuela y profesor de matemáticas en secundaria] les puso con los de la ESO la división con una resta. Y todos pusieron una cara, no sabían que era una resta. Yo lo digo, yo venía aquí [de alumna] y yo aquí aprendí con la resta, y en cambio, compañeras mías que también vinieron aquí, ellas no, porque ya vino la moda de que… A ver, los niños ya harán el clic después de que no hace falta hacer la resta. Pero saben que hay una resta. Yo lo he sabido siempre. Al niño que le cuesta memorizar las tablas de multiplicar o… Hay niños que no tienen tanta memoria, tanta retentiva, y entonces no se imaginan el número, necesitan escribirlo. Pues lo tienen allí escrito, entonces restan y ya está. Quiero decir, el niño que lo necesite que lo haga y el que no, no. Nosotras enseñamos el año pasado en tercero a dividir con la resta. (Noviembre 2012)

Una discusión previa con los profesores sobre temas de matemáticas permitió también a Leire ampliar el potencial del algoritmo extendido de la división:

> Y fue muy bien [la reunión de discusión con los maestros del proyecto de innovación y el Director] por eso, porque todo el mundo iba diciendo: “pues mira, yo encuentro esto…, yo encuentro lo otro…”, y Pepe, que está en la ESO, que no lo hace aún, pero bueno, que está en la ESO, dice: “A mí me va súper bien esto porque luego en la ESO hacemos esto, esto…”. Y claro es aquello que dices: “Ostras, ves”. Con la división, por ejemplo, la discusión que hay ahora, ¿no?: “¿la hago con resta, o no la hago con resta?”. ¡Con resta!, al niño que le cueste, irá más seguro; y al que no ya llegará un momento que la hará sin resta, pero empecemos. Y aquí dijo Pepe: “Claro, cuando yo haga los polinomios, entonces me es mucho más fácil, porque me entienden, tal y cual”. Claro aquí se acabó la discusión. Y tú dices: “Vale”. (Marzo 2012)

En esta cita se observa que la discusión matemática con otros maestros permite a Leire profundizar sobre el potencial de un tipo de algoritmo de división que evidencia operaciones intermedias para facilitar la comprensión a los estudiantes. A la vez, la discusión conjunta sirve para proyectar este procedimiento a la división de polinomios que aprenderán en secundaria, y dota de mayor relevancia al algoritmo extendido.

Otro ejemplo reiterado a la hora de distinguir la complejidad de unas tareas se encuentra en el análisis de tareas matemáticas que se presenta a Leire para introducir material manipulativo en el aula.

> Formadora: Yo lo que sí que le dije es la idea que tú tenías de aprovechar un material didáctico para trabajar el valor posicional. Ella cogió lo que hemos venido hablado y creó un material muy largo, con lo que ustedes pueden o no dar prioridad a una parte... No sé, ¿cómo lo viste?, ¿qué te parece?
>
> Leire: No, bien. Lo que pasa es que es eso, hay cosas que veo muy claras para el ciclo inicial y otras son más complicadas. Pero bien, en principio bien. (Noviembre 2012)

El conocimiento que capacita a Leire para distinguir la complejidad y/o potencial de una tarea matemática se manifiesta en numerosas ocasiones, pero cabe destacar que las discusiones conjuntas sobre contenido matemático se evidencian como impulsoras de este conocimiento.

<u>Identificar qué contenido matemático relevante no es comprendido por el alumno</u>

Con este código se analiza la práctica a la que Leire hace referencia para reflexionar sobre un contenido matemático relevante que resulta confuso para un estudiante en una situación concreta. El análisis de este conocimiento busca profundizar en la identificación de esas dificultades de los estudiantes y sus consecuencias desde la perspectiva de la maestra.

Un ejemplo se encuentra en la explicación de la estrategia de cálculo de la multiplicación por once, EC. Cuando Leire está explicándola, observa que hay estudiantes que no están siguiendo:

> Me di cuenta, cuando estaba haciendo, de que no me entendían que era multiplicar por once. Sé que saben lo que es la multiplicación, que es una suma del mismo número; pero cuando ya el número era muy grande me di cuenta de que no pillaban. Entonces por eso se me ocurrió de poner el doce más doce más doce más… y entonces la mayoría enseguida lo pilló, y de hecho ahora ya casi todos saben hacer esta

> estrategia. Ese día costó y como se repitió otra vez, la mayoría…, a lo mejor hay cinco que no, pero de veinticinco ya está. (Marzo 2012)

Esta cita evidencia una identificación de la falta de comprensión en los estudiantes de la operación efectuada: 12x11. Muestra que Leire llega a identificar el contenido matemático relevante no comprendido: la estructura de la multiplicación como suma repetida, EM. Y muestra, finalmente, una actuación acorde a esa identificación: la representación de la operación como sumando de once números iguales. Todos estos elementos propios del conocimiento pedagógico del contenido relacionado con la identificación de dificultades matemáticas de los estudiantes se dan simultáneamente en esta cita.

Otro ejemplo de identificación de dificultades para comprender un contenido matemático relevante está en la comprensión del sistema decimal posicional:

> Claro, al trabajar la posición de los números, o sea, nunca en mi vida me había planteado eso. ¡Es verdad! Yo no entendía por qué un niño no me entendía que después del ciento noventa y nueve que venía doscientos, y que luego… O sea, hay una serie de cosas de numeración que al niño le cuesta; dices pues, cómo se lo explico, pero si es que ¡es tan básico! Y yo, veo esto, que si tú vas a trabajando la posición de los números, luego le es mucho más fácil, todo. El razonamiento matemático es mucho más sencillo. (Marzo 2012)

Esta cita evidencia un primer momento de identificación de la dificultad, pero no del contenido matemático relevante que genera la dificultad: *Yo no entendía por qué un niño no me entendía.* También evidencia un segundo momento, el presente de la cita, en el que se identifica el valor posicional, VP, como clave que genera la dificultad en la comprensión del sistema decimal posicional de los estudiantes: *Yo, veo esto, que si tú vas trabajando la posición de los números, luego le es mucho más fácil, todo*. El elemento de actuación acorde con la dificultad identificada e interpretada aparece de forma genérica en la cita. Al curso siguiente Leire se plantea el uso de material manipulativo para resolver esta dificultad:

> Me estoy encontrando a niños ahora también que les cuestan las mates, pero que no tienen muy clara la numeración. Pienso que si se trabaja esto [material multibase+*…+ Claro, como no han manipulado de pequeños, es lo que intuyo, pues no lo tienen claro. Esto de que diez decenas es una centena, lo hacen mecánicamente, pero no entienden lo que están haciendo. Es que entonces, el sistema métrico decimal, o sea todo. Si es que es siempre lo mismo... (Noviembre 2012)

Leire llega a implementar las actividades preparadas para trabajar con el material multibase en su aula, con lo que puede observar dificultades relacionadas que emergen en los estudiantes. Esto es, el trabajo del valor posicional en el algoritmo de la resta:

> Lo he hecho en mi clase y en el otro tercero, es decir, con los alumnos con los que tengo más trato, sí. [...] Con ellos he trabajado la primera ficha, apropiarse del material, y he hecho también restas llevando. Cada día una, hasta que se lo hacen casi mecánicamente, pero verlo *in situ*, creo que les ayuda, bueno a algunos. Pero es eso que dices: 'De aquí tienes que sacar dos centenas y no hay, ¿cómo hacerlo?' Y pensar que tenían que coger el cubo cambiarlo por diez [placas] les costaba. Pero lo acaban haciendo y cuando acabaron les dices que estás haciendo una resta llevando. Te miraban con cara de ¡qué dices!... pero qué has hecho, coges esto, lo cambias por diez. Es eso... Me siento más cómoda haciendo operaciones. Creo que me es más fácil con el material. (Febrero 2013)

Esta cita da cuenta del tiempo que Leire ha necesitado para mirar profesionalmente (Jacobs, Lamb, y Philipp, 2010) la dificultad identificada antes de la intervención formativa.

No todas las citas etiquetadas con este código alcanzan la misma profundidad en la reflexión de Leire. Solo a modo de ejemplo se muestra una cita en la que se identifica una dificultad matemática, para la cual la actuación propuesta es dejar pasar el tiempo:

> Los hay que, por ejemplo, multiplican por diez; y lo hacen mecánicamente, es decir, ponen el número y añaden un cero. Ya llegará un momento en el que... Bien, bien no entienden el porqué, pero bueno, ya llegará un momento en el que... si tienen la mecánica. (Febrero 2013)

La Tabla 20 resume los contenidos matemáticos relevantes que son objeto de este conocimiento sobre las dificultades de los estudiantes. En esta Tabla, se evidencia un periodo de mayor reflexión sobre las dificultades de los estudiantes en el centro de la intervención formativa; esta coincidencia puede venir por el tipo de datos que se han recogido en ese periodo. Las entrevistas semiestructuradas son instrumentos de recogida de datos que permiten una mayor penetración y variedad en los contenidos matemáticos al no ceñirse a un contenido específico. Estas entrevistas se pasaron al inicio del tercer trimestre del curso 2011-2012, y durante el primer y segundo trimestres del curso 2012-2013. Se evidencia en esos momentos formativos una gran variedad de identificaciones de las relaciones de los estudiantes con el contenido matemático, especialmente sobre la complejidad y/o potencial de una tarea.

Códigos	M1 – 1T 2011-12	M2 – 2T 2011-12	M3 – 3T 2011-12	M4 – 1T 2012-13	M5 – 2T 2012-13	M6 – 3T 2012-13
Identifica un contenido matemático en una respuesta correcta de un alumno	CD	CD		CD	CD	VP CD
					EM	EM
					MD	
	PR EC	EC	PR EC	EC	EC	EC
Distingue la complejidad y/o potencial de una tarea	VP CD		VP	VP CD	VP	
			EM TM	TM	EM TM	
			ALG	ALG	MD ALG	
	EC	EC	PR EC	PR EC	PR EC	PR
Identifica qué contenido matemático no es comprendido			VP CD		CD	
			EM	TM	EM	
				ALG	ALG	
			PR			PR

Tabla 20. Evolución del conocimiento de las relaciones de los estudiantes con el contenido matemático

El énfasis de la identificación de contenidos en respuestas correctas de los estudiantes se vincula mayormente a los contenidos composición y descomposición numérica y a las estrategias de cálculo. En estos casos se observan evidencias de interpretación del conocimiento de los estudiantes por la forma no estándar de realizar estrategias de cálculo. Por el contrario, la identificación de contenidos matemáticos que no son comprendidos por los alumnos se centra más en situaciones rutinarias de cálculo.

<u>A modo de resumen de los resultados para la consecución del segundo objetivo</u>

El segundo objetivo específico que se ha planteado en este estudio es caracterizar el conocimiento didáctico matemático, relativo a enseñar la multiplicación, observable en una maestra a lo largo de contextos de reflexión sobre la práctica. La división del conocimiento didáctico matemático en tres aspectos permite realizar una caracterización del conocimiento de la maestra centrado en el contenido en tres ejes fundamentales: respecto del contenido matemático en sí, respecto de la enseñanza del contenido y respecto de su conocimiento de la relación de los estudiantes con el contenido.

El primer aspecto del conocimiento, directamente relacionado con el conocimiento del contenido, está relacionado con el análisis del primer objetivo: identificación y fundamentación de contenidos matemáticos. Ya se indicó que el acercamiento a los datos mediante reflexiones sobre la práctica no ha propiciado las argumentaciones matemáticas. Shulman (1986), al hablar del conocimiento del contenido, enfatiza la comprensión que tiene el profesor del contenido matemático que enseña: no solo ser capaz de definir sino de decir porqué es verdadero. En el caso del estudio se puede afirmar en Leire una buena comprensión del sistema decimal posicional cuyas propiedades vincula con el cálculo de la multiplicación en las diversas formas estudiadas:

algoritmos, propiedades y estrategias de cálculo. Estos vínculos entre el sistema decimal posicional y el cálculo de la multiplicación van en aumento a lo largo de los datos recogidos. Por otra parte, se evidencia una identificación de diversas estructuras multiplicativas, pero solo se observa soltura en el uso y explicación de la estructura de suma repetida, en concordancia con la investigación realizada por Clivaz (2012).

En cuanto al segundo aspecto, identificación y uso de estrategias para enseñar un contenido, el análisis se ha detenido en el conocimiento de estrategias de enseñanza fundamentadas en el contenido matemático, de cuestiones problemáticas de la práctica y el conocimiento práctico de relaciones entre contenidos. Sobre el conocimiento de estrategias de enseñanza, se evidencia una creciente identificación de contenidos a trabajar y de formas de trabajarlos en el aula. Entre las estrategias de enseñanza identificadas, se observa un distanciamiento crítico de propuestas de libros de texto a la vez que un mejor aprovechamiento de recursos que presentan. Sobre el conocimiento de cuestiones problemáticas de la enseñanza, el análisis se ha centrado en la identificación de dificultades propias, por falta de dominio, por error o por la identificación de prácticas habituales de enseñanza que considera que han de mejorar. La identificación de dificultades propias, centradas en el aprovechamiento de las intervenciones inesperadas de los alumnos y en el aprovechamiento de las estrategias matemáticas que encierran los juegos, se evidencia una escasa relevancia que no ofrece indicios de desarrollo. Al contrario –la identificación de errores propios en la enseñanza–, sobre todo cuando se tratan en discusiones conjuntas lleva a la corrección del error que se sostiene en el tiempo. Igualmente, la identificación de prácticas habituales de enseñanza que se cuestionan como problemáticas por el tratamiento del contenido matemático lleva a un planteamiento efectivo de cambio de práctica. Sobre el conocimiento práctico de las relaciones entre contenidos, estas relaciones se concretan mayormente en torno al valor posicional, los algoritmos y las propiedades. La introducción de notación y vocabulario específicos con la consideración de que ayuda a afianzar conocimientos anteriores o prepara el aprendizaje para contenidos posteriores es una de las evidencias de este conocimiento. Para el trabajo de los algoritmos vistos previamente o que introducen contenidos posteriores, Leire tiende a utilizar algoritmos extendidos no tradicionales, pues explicitan las operaciones que subyacen al algoritmo.

Finalmente, en cuanto al aspecto de identificación e interpretación del conocimiento de los estudiantes, se evidencia una vinculación de todos los contenidos matemáticos relevantes con el aprendizaje de los estudiantes, ya por identificar respuestas correctas, ya por identificar dificultades generales o potencialidades de tareas matemáticas, ya por identificar contenidos que no son comprendidos por un estudiante. Esta variedad se produce en el análisis de tareas matemáticas para la evaluación de complejidad y potencialidad de las mismas. Respecto a la interpretación del conocimiento de los estudiantes, las situaciones más rutinarias de cálculo permiten a Leire identificar dificultades de comprensión. Las situaciones más creativas de invención de estrategias no estándares son las que producen mayor riqueza de evidencias en cuanto a la identificación de contenidos conocidos y usados correctamente por los estudiantes.

4.3. Discusión de la influencia de la intervención formativa

En esta tercera fase del análisis se indagan las posibles influencias de la intervención formativa en el desarrollo de conocimiento didáctico matemático de Leire para la consecución del tercer objetivo de la investigación. Se busca, pues, responder a cómo se apropia la maestra de las matemáticas y transforma ese conocimiento en la práctica de enseñanza (Chapman, 2013).

El análisis de la influencia de la intervención formativa está motivado por citas en las que Leire reflexiona sobre los cambios que ha habido en su práctica. En algunas de ellas, Leire se refiere directamente a instrumentos formativos utilizados durante la intervención realizada en la escuela:

> Se ha variado mucho la manera de hacer en clase. *…+ Y lo que añadía aquí también, porque yo esto no lo sabía, lo aprendí con la formadora. (Noviembre 2012)

Para realizar esta tercera fase de análisis se comienza codificando todas las citas señaladas con los indicadores de desarrollo definidos en el capítulo 3. La Tabla 21 recoge lo mostrado en las Tabla 17, Tabla 18, Tabla 19 y Tabla 20 dando diferente intensidad de color a los contenidos matemáticos según el indicador de desarrollo que lo considere. La intensidad de color más fuerte se corresponde a la *transferencia a otras prácticas*. Gradualmente baja la intensidad cuando la cita está codificada con *incorpora a su práctica, valora un contenido o estrategia de enseñanza,* hasta llegar a la intensidad más leve que se refiere al *cuestionamiento de elementos de la práctica sobre ese contenido*. Los señalados sin color de fondo no hacen alusión a ningún indicador de desarrollo.

La Tabla 21 permite varias lecturas de interpretación. Si se hace un barrido cronológico, de izquierda a derecha, observando la intensidad de colores, se evidencia la necesidad de un largo periodo de tiempo para dar cuenta de desarrollo profesional. El primer momento contiene cuestionamientos sobre elementos de la práctica. El segundo y tercer momentos tienen valoraciones positivas sobre contenidos matemáticos y estrategias de enseñanza, además de incorporaciones a la práctica de algunos elementos valorados anteriormente.

Temas	Códigos	M1 – 1T 2011-12	M2 – 2T 2011-12	M3 – 3T 2011-12	M4 – 1T 2012-13	M5 – 2T 2012-13	M6 – 3T 2012-13
Estrategias para la enseñanza del contenido	Identifica un contenido matemático a enseñar para afianzar el conocimiento matemático de los estudiantes	VP PR	VP CD ALG PR EC	VP CD EM	VP CD ALG EC	CD MD	
	Identifica prácticas matemáticas clave para trabajar un contenido matemático	VP CD EC	CD PR	VP CD TM MD ALG PR EC	VP CD ALG EC	VP EM MD EC	VP CD EM ALG PR
	Considera el trabajo de los contenidos matemáticos en libros de texto		ALG	VP	VP	VP ALG PR	VP EC
Cuestiones problemáticas de la práctica de enseñanza	Manifiesta una dificultad para innovar una práctica de enseñanza	EC				EM	EC
	Identifica un error propio sobre un contenido matemático	EC		VP CD PR EC	VP		EC
	Muestra interés por un cambio de práctica	VP ALG	ALG		VP	VP CD ALG	
Relaciones entre contenidos matemáticos	Relaciona contenidos intra/ extramáticos con contenidos relevantes			VP TM PR	VP ALG		
	Identifica el trabajo de contenidos matemáticos en cursos precedentes	EC		VP	VP CD ALG	PR	
	Identifica el trabajo de contenidos matemáticos en cursos posteriores		ALG PR	VP ALG PR		VP ALG PR	VP PR
Relaciones de los estudiantes con el contenido matemático	Identifica un contenido matemático en una respuesta correcta de un alumno	CD PR EC	CD EC	PR EC	CD EC	CD EM MD EC	VP CD EM EC
	Distingue la complejidad y/o potencial de una tarea	VP CD EC	EC	VP EM TM ALG PR EC	VP CD TM ALG PR EC	VP EM TM MD ALG PR EC	PR
	Identifica qué contenido matemático no es comprendido			VP CD EM PR	TM ALG	CD EM ALG	PR

Tabla 21. Resumen del cruce de codificaciones relativas a las tres fases de análisis

Pero para llegar a transferir los conocimientos que se han ido incorporando y valorando a nuevas prácticas se ha de esperar a los momentos 5 y 6, es decir, 2.º y 3.er trimestre del curso 2012-13.

Si el barrido cronológico se realiza deteniéndose en cada uno de los códigos del conocimiento, se observan qué aspectos del conocimiento didáctico matemático han ido ganando complejidad al incorporar mayor número de contenidos matemáticos relevantes para la enseñanza de la multiplicación. Dentro del *conocimiento y uso de estrategias de enseñanza*, la identificación de prácticas de enseñanza no solo considera todos los contenidos matemáticos señalados, sino que dichas prácticas son valoradas, incorporadas a su práctica y en algunos casos la maestra es capaz de proponer nuevas prácticas haciendo una transferencia de lo aprendido. En el aspecto de *identifica e interpreta el conocimiento de los estudiantes*, se observa un énfasis en la distinción de la complejidad y/o potencial de tareas matemáticas en la fase central de la formación, momentos 3, 4 y 5, considerando todos los contenidos matemáticos señalados. También aquí llega a incorporar a la práctica y transferir a otras prácticas como, por ejemplo, cuando considera la multiplicación en horizontal. Primero, Leire identifica que el algoritmo en columnas que han empezado a enseñar es una tarea que encierra un potencial al contener en sí la descomposición numérica y la propiedad distributiva. A esto se une el considerar que el libro de texto resulta redundante al ofrecer dos capítulos completos sobre multiplicación, sin llevadas primero y luego con llevadas. Así Leire decide enseñar la simbolización de la propiedad distributiva con el uso de paréntesis, reconociendo que puede resultar complicado para algunos estudiantes y que no corresponde al temario de tercero.

Otra lectura de esta Tabla es la vertical por momentos formativos. La Tabla 21 da cuenta de la riqueza de identificación tanto de contenidos matemáticos como de conocimiento didáctico de los momentos centrales de la formación. También en estos momentos se concentran la mayoría de los indicadores de desarrollo profesional. Como se ha indicado antes, este resultado evidencia la importancia de intervenciones formativas de larga duración, si pretenden ser formaciones que produzcan desarrollo profesional en los maestros.

Finalmente, se puede hacer una lectura selectiva de la Tabla 21 según cada uno de los contenidos matemáticos considerados como relevantes en este estudio. El *Valor posicional* es el contenido que más aparece, solo está ausente en la manifestación de dificultades por parte de la maestra. Es decir, este contenido, que está en la base de la enseñanza y comprensión de la multiplicación en columnas, es un contenido que la maestra considera que domina. Además se observa que realiza un desarrollo por la variedad de aspectos del conocimiento desde los cuales considera este contenido y por la progresiva profundización e incorporación a la práctica de ese conocimiento. Otro contenido básico del sistema decimal posicional es la *Composición y descomposición* numérica. Este contenido también se considera en todo momento formativo, pero con bastante menor variedad de aspectos del conocimiento didáctico involucrados. La profundización en cuanto a valoración e incorporación a la práctica de este contenido está vinculada al análisis e incorporación de material manipulativo.

La *Estructura multiplicativa* es un contenido bastante ausente en los datos. Solo se observa una pequeña evolución en cuanto a la incorporación a la práctica de estructuras multiplicativas diferentes de la suma repetida en el momento 5, pero no se profundiza más en esas estructuras. Al contrario del Valor posicional, Leire reconoce no dominar estructuras diferentes como el esquema rectangular o el de correspondencia.

En cuanto al cálculo de la multiplicación, las *Tablas de multiplicar* y la *Multiplicación por diez* son contenidos prácticamente ausentes. Los *Algoritmos* tienen su relevancia principalmente en las estrategias de enseñanza y en la relación de los estudiantes con el contenido. Los indicios de desarrollo del conocimiento didáctico relacionado con este contenido aparecen desde el primer momento por el planteamiento de cuestiones sobre la práctica de enseñanza de los algoritmos. En relación con las *Propiedades de las operaciones*, el conocimiento didáctico de Leire sigue también un proceso de desarrollo desde la valoración a la transferencia a otras prácticas. Principalmente este desarrollo se centra en la propiedad distributiva. Finalmente, en cuanto a las *Estrategias de cálculo*, se observa que Leire las abarca desde diferentes aspectos del conocimiento didáctico, pero los indicios de incorporación a la práctica de nuevos conocimientos valorados o cuestionados son escasos.

Una vez codificadas las citas con los indicadores de desarrollo, se procede a identificar secuencias relacionadas entre sí por versar sobre el mismo contenido matemático. Secuencias que informan de influencias de la formación en los cambios de conocimiento didáctico matemático observados.

A modo de ejemplo de análisis de la influencia en la intervención formativa se presentan los cambios identificados en torno al contenido matemático ALG.

<u>La enseñanza de los algoritmos en el cálculo de las operaciones.</u>

En el guión de reflexión de enero de 2012, a la pregunta sobre qué les aportan como equipo docente las reflexiones en las reuniones de ciclo o en la programación con la maestra paralela y qué problemas pueden surgir, Leire responde: *A mí me hace cuestionarme muchas cosas: cómo enseñar los algoritmos*.

Tomando pie de este cuestionamiento general sobre la enseñanza de los algoritmos a raíz de la discusión conjunta entre la formadora y las maestras del ciclo, se han elaborado unas tablas con las citas vinculadas a la enseñanza del algoritmo de cada operación aritmética básica.

Citas relacionadas con el algoritmo de la suma	**Indicador de desarrollo**	**Instrumento formativo relacionado**
Leire: Yo tengo una pregunta. Cuando comenzamos a enseñar a sumar, a restar..., o sea, yo pienso que hacemos... cifras. No insistimos en, yo qué sé, por ejemplo, esto que tú has dicho ahora: "ciento veintitrés más catorce". Tú haces: tres más cuatro, siete. Dos más uno...; pero no vemos que quedan "doce [decenas] más [una decena]", ¿me explico? *…+ Formadora: Tres y cuatro, siete; dos y uno, tres... Leire: Esto es lo que hacemos. Formadora: Esto es lo que se hace, pero aquí no se trabaja el valor posicional. Otros: Vale. Leire: ¿Cómo?, ¿cómo lo podríamos hacer?, esto quiero yo. (Septiembre 2011)	Cuestiona elementos de la práctica	Prácticas observadas Discusión conjunta
Se ha variado mucho la manera de hacer en clase. Antes hacías una suma, ahora que estamos haciendo tantas sumas, tres más cuatro, siete; uno más dos. No una decena más dos decenas. Intento hacerlo así para que vean que son las decenas, porque si no… unidades, decenas, centenas, sí de memoria lo ven, pero dónde están las decenas colocadas. Y qué es cada cosa. Y lo que añadía aquí también, porque yo esto no lo sabía, lo aprendí con la formadora, el ciento veinticuatro tiene doce decenas. Y esto también de tanto en tanto lo hago en clase, lo hago yo, no sé si los otros lo hacen, ya te lo digo, pero lo hago, y Carla también lo hace de tanto en tanto. Son cosas que tenemos que unificar más, pero bueno, bastante es lo que se está haciendo. (Noviembre 2012)	Valora Incorpora a su práctica	Diálogo con la formadora
Yo por ejemplo, mi sobrina hace primero y le dije a mi hermana: trae deberes de sumas, una unidad con tres unidades y una decena con cuatro decenas. Hablo así. Y dices, sí, lo hace sola. (Febrero 2013)	Mantiene su práctica	

Tabla 22. Cambio identificado respecto al algoritmo de la suma

La Tabla 22 muestra un cuestionamiento inicial suscitado por la discusión conjunta sobre la enseñanza del algoritmo de la suma. La identificación del trabajo del valor posicional en la forma de expresarse la formadora para hablar de la suma provoca al menos dos reacciones: identificar que en su práctica habitual de enseñanza de este algoritmo no se trabaja el valor posicional de los sumandos; cuestionarse cómo enseñar el algoritmo para trabajar el contenido matemático relevante VP. En la entrevista de noviembre de 2012, Leire habla de la enseñanza del algoritmo de la suma evidenciando el trabajo explícito del valor posicional y valorando ese trabajo para el aprendizaje de sus alumnos. En febrero de 2013, se evidencia que esta práctica se mantiene cuando Leire habla fuera del contexto del aula de cómo ayuda a su sobrina pequeña. Esta práctica mantenida en otro contexto da cuenta de haber hecho propia la forma de proceder que señala en la cita de noviembre de 2012.

La Figura 31 muestra, mediante una red de trabajo de Atlas.ti, las relaciones vinculadas a las citas identificadas en el desarrollo del conocimiento didáctico de Leire respecto al algoritmo de la suma. Estas citas están codificadas con los códigos del conocimiento didáctico del contenido. El desarrollo que se evidencia no está relacionado directamente con la complejidad del conocimiento didáctico sino con la profundización en la práctica de este conocimiento que sí se ha visto modificado tras el cuestionamiento de la discusión conjunta inicial. Las relaciones puestas en evidencia por la misma maestra con la intervención formativa están focalizadas en el eje de propiciar situaciones colaborativas de reflexión sobre la práctica.

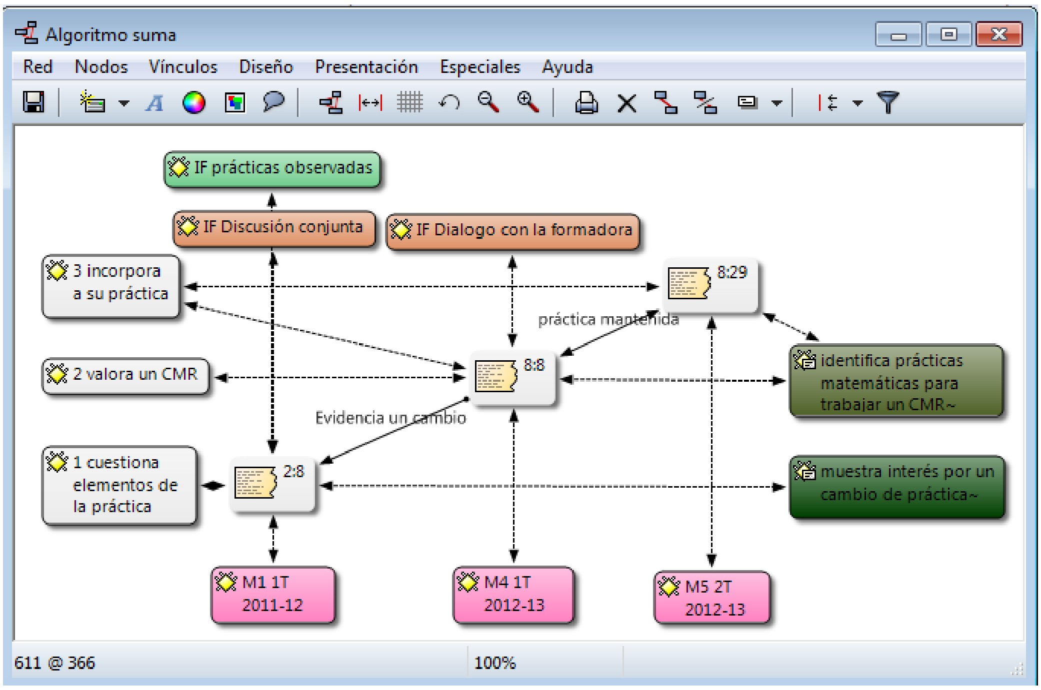


Figura 31. Red de desarrollo del conocimiento didáctico del algoritmo de la suma

Respecto al algoritmo de la resta, la evidencia de cambio encontrada ha sido de carácter distinto a la del algoritmo de la suma. La expresión utilizada en la entrevista de noviembre de 2012 da a entender que en el curso 2010-2011, cuando Leire estaba en segundo, se introdujo una nueva manera de proceder para el cálculo de la resta con llevadas. *Si un niño me tacha arriba* alude al nuevo algoritmo basado en la descomposición del minuendo. Leire afirma que ya no recuerda cómo se hacía, lo cual da cuenta de una escasa asimilación del contenido matemático relevante trabajado el curso anterior. En otra entrevista del mismo mes, pero analizando actividades matemáticas, Leire identifica una práctica matemática útil para trabajar el algoritmo de la resta, la descomposición no canónica de los números, CD, con el material manipulativo multibase.

Citas relacionadas con el algoritmo de la resta	Indicador de desarrollo	Instrumento formativo relacionado
Yo ahora ya no sé restar como restamos aquí. De hecho, los niños ya vienen con la resta. Yo no insisto mucho en eso, yo les enseño como se hace de la otra manera, como hacen los padres; pero si un niño me tacha arriba ¿por qué le tengo que liar? Es mi opinión, por qué le tengo que liar; ahora cambia para que lo haga de la otra manera si ya lo ha aprendido así, ya está. (Noviembre 2012)	No reflexiona, da cuenta de haber olvidado una práctica	
"¿Puedes encontrar alguna manera más de hacerlo?" ¿Si ya has puesto tres [decenas] y siete [unidades]? Bueno a lo mejor, puedes dejarlo libre... Ya sé por dónde va: dos decenas y diecisiete unidades, y esto va bien al inicial para trabajar la resta llevando... O sea, para descomponer... Si un niño no... tú le puedes explicar: ¿Y si cojo una decena y la desmonto? Y entonces ya... *..+ Esto está muy bien para lo que te decía de la resta llevando, o para lo que sea. Que tengan claro que una decena son diez unidades, y que las puedo tener agrupadas o no. (Noviembre 2012)	Valora	Análisis de tareas Diversificación de representa-ciones
Con ellos he trabajado la primera ficha, apropiarse del material, y he hecho también restas llevando. Cada día una, hasta que se lo hacen casi mecánicamente, pero verlo *in situ*, creo que les ayuda, bueno a algunos. Pero es eso que dices: 'De aquí tienes que sacar dos centenas y no hay, ¿cómo hacerlo?' Y pensar que tenían que coger el cubo cambiarlo por 10 les costaba. Pero lo acaban haciendo y cuando acabaron les dices que estás haciendo una resta llevando. Te miraban con cara de ¡qué dices!... pero qué has hecho, coges esto, lo cambias por diez. Es eso... Me siento más cómoda haciendo operaciones. Creo que me es más fácil con el material. Yo le veo mucha utilidad al material en sí, pero no sé sacarle todo su jugo. (Febrero 2013)	Cuestiona elementos de la práctica Valora Incorpora a su práctica	Prácticas observadas Diversificación de representa-ciones
El año pasado usé el material multibase en primero, segundo y tercero. Este curso, la verdad, no lo he usado mucho. En alguna clase, para aclarar algunos problemas (para recordar la resta llevando). (Abril 2014) Se puede utilizar material como el multibase para que vean que si tengo 4 unidades no puedo sacar 8, pero sí que puedo cambiar 1D en unidades (Octubre 2015)	Incorpora a su práctica Valora	Diversificación de representa-ciones

Tabla 23. Cambio identificado respecto al algoritmo de la resta

Hay evidencias de incorporación de la enseñanza del algoritmo de la resta con material manipulativo a su práctica matemática. Esta práctica es identificada como adecuada para trabajar la resta con llevadas, a la vez que se presenta acompañada de dudas sobre cómo aprovechar ese material: *Me siento más cómoda haciendo operaciones. Creo que me es más fácil con el material. Yo le veo mucha utilidad al material en sí, pero no sé sacarle todo su jugo* (febrero 2013). Tras finalizar la intervención formativa, Leire afirma que sigue utilizando el material para trabajar la resta con llevadas. En esta evolución se percibe la necesidad de un tiempo prolongado para afianzar el conocimiento didáctico matemático de Leire respecto al algoritmo de la resta.

La Figura 32 muestra la relación del cambio identificado respecto al algoritmo de la resta con los códigos del conocimiento didáctico del contenido. Los instrumentos formativos que Leire menciona como influyentes en este cambio pertenecen a aquellos que buscan acercar los resultados de la investigación en didáctica al aula y los que pretenden hacer emerger situaciones matemáticamente ricas en el aula. Se observa una mayor complejidad en el conocimiento didáctico principalmente en las citas en las que Leire está analizando unas tareas propuestas para la enseñanza del sistema decimal posicional mediante la diversificación de sus representaciones con material manipulativo. De ahí que se establezcan relaciones entre el análisis de tareas y la evidencia de cambio en la complejidad del conocimiento didáctico matemático sobre el algoritmo de la resta. La evidencia de desarrollo se da cuando además se incorpora a la práctica. Para esta incorporación a la práctica, la cita de febrero de 2013 muestra poca seguridad en la práctica. Leire requiere la observación de prácticas de la formadora, pero de hecho no hay evidencias de una práctica sostenida en el tiempo hasta abril de 2014.

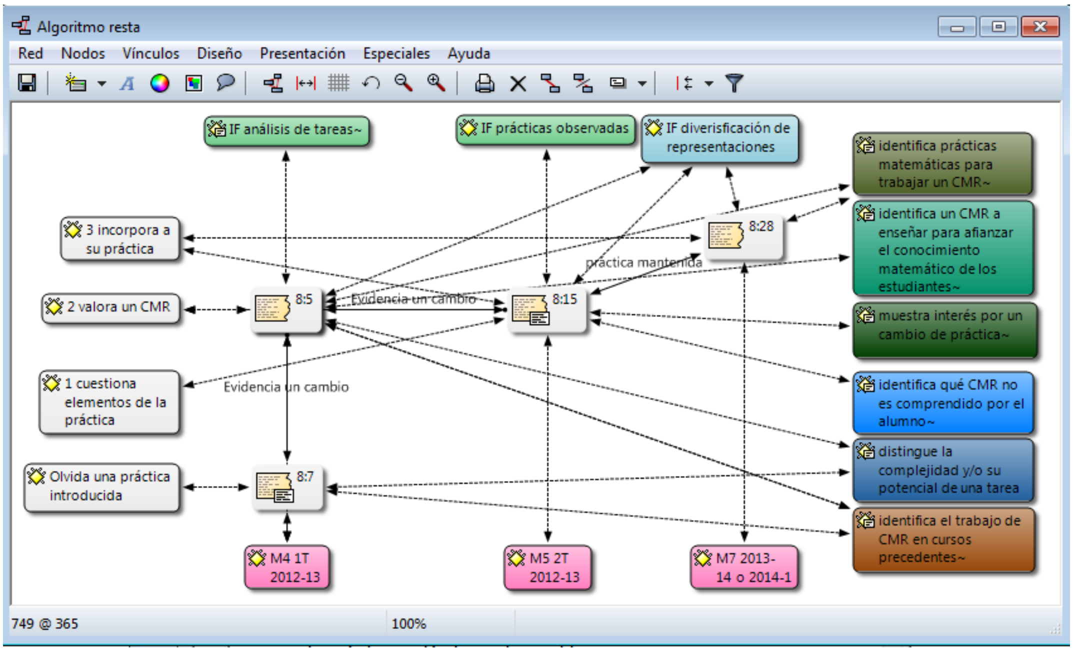


Figura 32. Red de desarrollo del conocimiento didáctico del algoritmo de la resta

El contenido matemático principal sobre el que se ha trabajado en la investigación es la multiplicación. Este contenido surgió de un cuestionamiento que se plantearon Leire y Carla, su maestra paralela, a la hora de enseñar la multiplicación en tercero. En la explicación de la formadora sobre la enseñanza del algoritmo en columnas, Leire identifica el trabajo de la descomposición numérica, CD. Las citas dan cuenta de la realización sostenida de la práctica propuesta en la discusión conjunta para la enseñanza de la multiplicación.

La Tabla 24 evidencia también la consideración de la facilidad que esta forma de operar supone para el aprendizaje. En febrero de 2013, se observa una transferencia a otras prácticas de enseñanza. Leire no se limita a enseñar lo que le mostró la formadora un año antes sino que decide introducir la escritura de la propiedad distributiva mediante el uso de paréntesis. Este contenido matemático corresponde a cursos superiores, pero Leire reconoce su uso implícito en el cálculo del algoritmo en columnas de la multiplicación y decide explicitarlo mediante un lenguaje matemático simbólico.

Citas relacionadas con el algoritmo de la multiplicación	Indicador de desarrollo	Instrumento formativo relacionado
Carla: También esto de compartir con los otros, por ejemplo: ahora con Leire hablábamos, al empezar la multiplicación, ¿cómo la hacemos? La podemos hacer de las dos formas, para que los niños sepan. *…+ Leire: No, ya dijimos "esta página del libro no la haremos". Carla: La página donde se enseña a multiplicar no la haremos. Leire: Se tiene que hacer en el cuaderno y lo haremos de la forma que decidamos entre todos hacerlo. [La formadora explica la multiplicación] Leire: Así también tiene sentido la descomposición que trabajamos siempre. (Enero 2012)	Cuestiona elementos de la práctica	Discusión conjunta
Hacemos multiplicaciones, salen a corregir -lo hago yo, se lo dije a mi compañera, pero no sé si lo hace o no, porque no voy a su clase-, pero yo pongo la misma multiplicación y uno lo hace tradicionalmente y el otro lo hace trabajando la posición del número. Y los dos ahí, tiqui, tiqui, tiqui, lo hacen fantásticos. No sé, encuentro que es muy interesante. (Marzo 2012)	Incorpora a su práctica	
Leire: La multiplicación la hacemos descomponiendo. Incluso hubo una madre, la mujer del Director que tengo a su hija, me dijo, “Ostras, si a mí me hubiesen explicado las mates así, no me hubiesen costado tanto”. Claro porque al ver: esto es cien por tres, esto veinte por… Ostras. Investigadora: Es más fácil Leire: Pero bastante más. (Noviembre 2012)	Valora Incorpora a su práctica	
Leire: Hay dos temas de matemáticas que son de multiplicación, como que [en el libro] la hacen tradicionalmente, el primer tema es sin llevarse nada y el segundo tema con llevadas. Pero como nosotros lo hacemos así, son dos temas de multiplicación. Y pensé, ¿y si lo hacemos así? Se me ocurrió. “Vamos a hacerlo en horizontal. Ya sé que no entenderéis mucho”. Pero bueno, hemos hecho unos cuantos. A veces dudan, ¿qué tenemos que hacer, multiplicar? Pero bueno. Investigadora: Me ha sorprendido porque ponen bien los paréntesis... ¿cuándo se hace esto? Leire: Esto, en cuarto se hace la propiedad distributiva. Pero claro, si hacemos así la multiplicación es mucho más fácil, porque esto es lo que están haciendo mentalmente, lo único que aquí les hago que lo escriban, por eso se hacen un lío. Porque esto mentalmente, sí, ya hacen tres por dos y tres por diez o tres por dos y tres por una decena, ya que estamos insistiendo en esto. (Febrero 2013)	Valora Incorpora a su práctica Transfiere a otras prácticas	Análisis de vídeo-episodios Discusión conjunta

Tabla 24. Cambio identificado respecto al algoritmo de la multiplicación

En esta operación se dan los cuatro indicadores de desarrollo considerados proporcionando mayores evidencias de desarrollo en cuanto a profundización en el conocimiento didáctico y puesta en práctica de los elementos aprendidos.

La Figura 33 añade a la Tabla anterior los códigos de conocimiento didáctico de estas citas y las relaciones con la intervención formativa. El cuestionamiento de la práctica, que sirve de detonante para el cambio identificado, está vinculado a los entornos colaborativos de reflexión sobre el contenido didáctico. La transferencia a otras prácticas está vinculada al análisis de vídeo-episodios llevado a cabo en la discusión conjunta del tercer trimestre de 2012, pues en ellos se identificó un error en la práctica de Leire sobre la simbolización matemática de la igualdad y de la propiedad distributiva. La subsanación de ese error queda de manifiesto no solo en las prácticas inmediatamente posteriores, sino en la explicación que ofrece en la cita de febrero de 2013 aquí presentada. La manera de utilizar la propiedad distributiva con el uso de paréntesis responde a lo tratado en esta discusión.

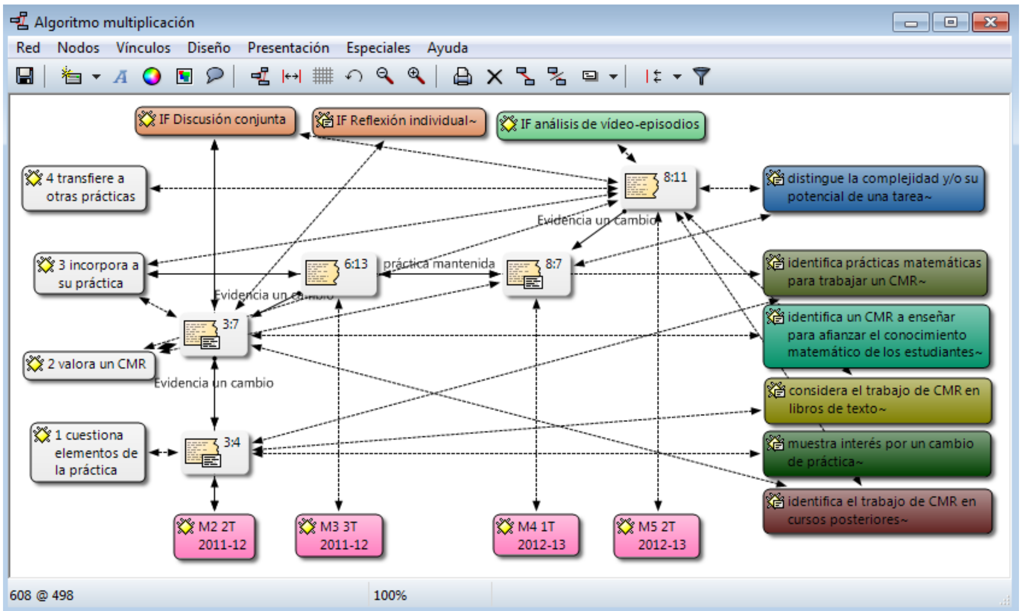


Figura 33. Red de desarrollo del conocimiento didáctico del algoritmo de la multiplicación

La Figura 33 evidencia también un amplio espectro de códigos del conocimiento didáctico matemático vinculados principalmente a las citas en las que se evidencia un cuestionamiento sobre elementos de la práctica y una transferencia a otras prácticas.

La cuarta operación aritmética básica es un ejemplo de transferencia de prácticas. En la formación no se ha tratado explícitamente la división, pero la discusión conjunta con las maestras que participan en la formación lleva a plantearse la forma de explicarlo. En la Tabla 25 se observa cómo Leire muestra el cuestionamiento que se ha planteado el claustro y valora que el algoritmo extendido, escribiendo la resta, facilita el cálculo a los alumnos. Aquí, el cuestionamiento de la práctica está directamente relacionado con la discusión sobre el contenido matemático mantenida en el claustro de profesores. La evidencia de incorporación a la enseñanza del algoritmo extendido en la práctica de Leire está unida a su valoración como facilitador del aprendizaje de los estudiantes. Tras la incorporación de material en el algoritmo de la resta (ver Figura 32), se transfiere la diversificación de representaciones a la enseñanza de la división, el reparto de material de cantidades como introducción al algoritmo de la división (ver Figura 34). Leire afirma que esta es una práctica novedosa para ella, y la relaciona con llevar tres años realizando la formación. La transferencia a otras prácticas pone de manifiesto que el acercamiento de la investigación en didáctica de las matemáticas al aula que procura la formación resulta de influencia en el desarrollo del conocimiento didáctico matemático.

Citas relacionadas con el algoritmo de la división	Indicador de desarrollo	Instrumento formativo relacionado
Y fue muy bien por eso, porque todo el mundo iba diciendo: “pues mira, yo encuentro esto…, yo encuentro lo otro…”, y Joan, que está en la ESO, que no lo hace aún, pero bueno, que está en la ESO, dice: “A mí me va súper bien esto porque luego en la ESO hacemos esto, esto…”. Y claro es aquello que dices: “Ostras, ves”. Con la división, por ejemplo, la discusión que hay ahora, ¿no?: “¿la hago con resta, o no la hago con resta?”. ¡Con resta!, al niño que le cueste, irá más seguro; y al que no ya llegará un momento que la hará sin resta, pero empecemos. Y aquí dijo Joan: “Claro, cuando yo haga los polinomios, entonces me es mucho más fácil, porque me entienden, tal y cual”. Claro aquí se acabó la discusión. Y tú dices: “Vale”. O sea, yo encuentro que va muy bien eso ¿no?, como claustro ir diciendo lo que tú vas haciendo, que los demás lo sepan. (Marzo 2012)	Cuestiona elementos de la práctica Valora un CMR	Discusión conjunta
El otro día, (el Director que es profesor de mates en la ESO) les puso con los de la ESO la división con una resta. Y todos pusieron una cara, no sabían que era una resta. Yo lo digo, yo venía aquí (de alumna) y yo aquí aprendí con la resta, y en cambio, compañeras mías que también vinieron aquí, ellas no, porque ya vino la moda de que… A ver, los niños ya harán el clic después de que no hace falta hacer la resta. Pero saben que hay una resta. Yo lo he sabido siempre. Al niño que le cuesta memorizar las tablas de multiplicar o… Hay niños que no tienen tanta memoria, tanta retentiva, y entonces no se imaginan el número, necesitan escribirlo. Pues lo tienen allí escrito, entonces restan y ya está. Quiero decir, el niño que lo necesite que lo haga y el que no, no. Nosotras enseñamos el año pasado en tercero a dividir con la resta. (Noviembre 2012)	Incorpora a su práctica Valora un CMR	Discusión conjunta
Para mí ya no es tanto cambio, porque yo ya lo llevo haciendo varios cursos [intervención formativa]. Pero claro, por ejemplo, la división yo ya me la he planteado diferente. Yo no he empezado a explicar la división típica, sino que les he hecho dibujar la división: dibujadme círculos, repartídmelos en tres grupos y cuando ya sabían representar, entonces he hecho representar y división. (Abril 2013)	Transfiere a otras prácticas	Intervención formativa en general Diversificación de representa-ciones

Tabla 25. Cambio identificado respecto al algoritmo de la división

Sin embargo, no se observa un conocimiento didáctico matemático complejo, como muestra la escasez de códigos vinculados a estas citas de la Figura 34. El conocimiento de prácticas matemáticas de cursos posteriores a las que prepara la práctica de aula de Leire viene influenciado por la discusión entre las maestras que participan en la formación con el Director que es profesor de matemáticas de secundaria.

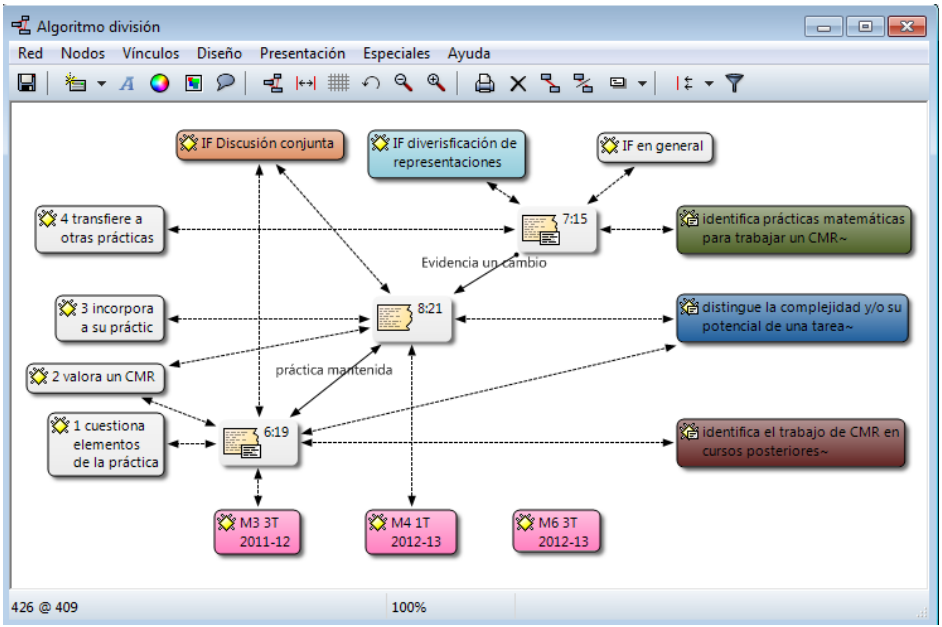


Figura 34. Red de desarrollo del conocimiento didáctico del algoritmo de la división

En resumen, se percibe una mayor evolución en los algoritmos correspondientes al currículo de tercero de primaria, la multiplicación y la división, en los que se da una transferencia de conocimiento más allá de lo tratado en la intervención formativa. Los instrumentos formativos mencionados tienen relación con el acercamiento de la investigación didáctica al aula, es decir, la introducción del proyecto de innovación y la introducción de diversas representaciones de las operaciones con material multibase y dibujos. También se observa influencia de las situaciones colaborativas de discusión sobre el contenido didáctico, ya sean las discusiones conjuntas con la formadora, ya las discusiones entre los maestros que participan en la formación. Estas situaciones colaborativas proporcionan oportunidades para plantearse cuestionamientos sobre la práctica que resultan ser iniciadores de desarrollo en la maestra. La transferencia a otras prácticas no se da hasta momentos formativos tardíos y suele llevar a un aumento de complejidad del conocimiento didáctico.

De forma más esquemática se presentan las evidencias de cambio en el conocimiento didáctico matemático en las secuencias relacionadas con los diferentes contenidos matemáticos. Las Tabla 26, Tabla 27 y Tabla 28 recogen los contenidos matemáticos relevantes que confeccionan la trama de las secuencias de citas relacionadas. Señalan los momentos formativos en los que se dan esas citas y la codificación tanto del conocimiento didáctico matemático como de los indicadores de desarrollo. Finalmente, en la última columna, estas tablas recogen los instrumentos formativos que se relacionan con estas citas. Instrumentos coloreados según el eje formativo de la Figura 7: en color azul se señalan los instrumentos utilizados para acercar la investigación en didáctica de las matemáticas al aula; en color verde los utilizados para hacer emerger situaciones ricas de aula; en color naranja los utilizados para propiciar situaciones colaborativas de reflexión sobre el contenido didáctico.

CMR	Momento formativo	Código de conocimiento didáctico matemático	Indicador de desarrollo	Instrumento formativo
VP	M1 – 1T 2011-12	• Identifica prácticas de enseñanza para trabajar un contenido matemático • Manifiesta interés por un cambio de práctica	• Identifica prácticas de enseñanza para trabajar el VP • Cuestiona la forma de utilizar material manipulativo	Prácticas observadas Diversificación de representaciones
	M2 – 2T 2011-12	• Identifica un contenido matemático que enseñar para afianzar el conocimiento matemático de los estudiantes	• Valora la enseñanza de VP para afianzar el cálculo mental y el razonamiento matemático de los estudiantes.	Análisis de vídeo-episodios
	M3 – 3T 2011-12	• Considera el trabajo de los contenidos matemáticos en libros de texto • Identifica prácticas de enseñanza para trabajar un contenido matemático • Identifica un error propio sobre un contenido matemático • Identifica el trabajo de contenidos matemáticos en cursos precedentes • Identifica el trabajo de contenidos matemáticos en cursos posteriores • Identifica qué contenido matemático no es comprendido por el alumno	• Cuestiona el trabajo del VP propuesto por el libro de texto. • Valora el trabajo del VP del proyecto de innovación y el observado en la clase de la formadora como positivo para el aprendizaje de los alumnos. • Valora la enseñanza del VP enfatizando las palabras de las unidades de la base en 2.º. • Incorpora a su práctica el trabajo de números decimales cuando aparecen en los problemas de cálculo • Incorpora a la práctica la forma de trabajar observada en la formadora.	Discusión conjunta Diálogo con la formadora Proyecto de innovación Prácticas observadas
	M4 – 1T 2012-13	• Considera el trabajo de los contenidos matemáticos en libros de texto • Manifiesta una dificultad para innovar una práctica de enseñanza • Identifica un contenido matemático que enseñar para afianzar el conocimiento matemático de los estudiantes • Relaciona contenidos intra/extramatemáticos con contenidos matemáticos relevantes	• Cuestiona el trabajo del VP propuesto por el libro de texto. • Cuestiona la forma de utilizar material manipulativo para afianzar la numeración de los alumnos con mayor dificultad. • Valora la comprensión del VP para afianzar la numeración y el cambio de unidades de medida.	Diálogo con la formadora Prácticas observadas Diversificación de representaciones
	M5 – 2T 2012-13	• Identifica prácticas de enseñanza para trabajar un contenido matemático • Identifica el trabajo de contenidos matemáticos en cursos precedentes	• Mantiene en el tiempo prácticas de enseñanza del VP.	
	M6 – 3T 2012-13	• Identifica prácticas de enseñanza para trabajar un contenido matemático • Considera el trabajo de los contenidos matemáticos en libros de texto • Identifica el trabajo de contenidos matemáticos en cursos posteriores • Distingue la complejidad y/o potencial de una tarea	• Incorpora a la práctica recursos didácticos para el trabajo de números decimales, propuestos en el libro de texto • Mantiene la práctica de introducir la notación de los números decimales cuando aparece en los problemas de cálculo • Transfiere el uso de material multibase al trabajo de los números decimales.	Proyecto de innovación Diversificación de representaciones

Tabla 26. Influencia de la formación en el desarrollo del conocimiento didáctico sobre VP

Sobre el *Valor posicional* los cambios giran en torno a la diversificación de representaciones: la introducción en el aula de material manipulativo multibase. En la introducción de este material se observa un arranque lento al pasar año y medio año hasta que se lleva a la práctica. Esto no ocurre sin cuestionamientos sobre cómo aprovechar el material a la vez que se valora como herramienta útil para comprender que cada unidad de la base está compuesta por diez unidades del orden inferior.

El análisis de tareas matemáticas, las prácticas observadas y el análisis de grabaciones de aula son instrumentos formativos que Leire relaciona con su desarrollo en este contenido matemático (ver Tabla 26). Se llama la atención sobre el salto que se observa una vez que Leire lleva a la práctica el uso del material. En abril de 2013, Leire aplica el contenido del principio decimal a los números decimales e identifica el dibujo y la manipulación como facilitadores para la comprensión de los decimales en los alumnos de cuarto de primaria que tienen dificultades. Por otro lado, en septiembre de 2014, año y medio después, Leire escribe en un correo electrónico:

> Este curso 2014-2015, he comenzado a utilizar el multibase de entrada en mis clases, tanto en 2.º como en 3.º. En 2.º estamos haciendo las decenas y las unidades y con el material les es más sencillo, aunque a la vez plasmarlo en el papel les cuesta mucho más. En 3.º hemos empezado explicando los números de tres cifras y creo que con este material les es mucho más fácil distinguir la posición del número respecto del valor posicional, sobre todo a aquellos alumnos que les cuesta la abstracción. Este curso pienso llevar y utilizar el multibase a todas las clases que me sea posible. (Septiembre 2014)

Esta última cita, que une el principio decimal y el principio posicional, evidencia una práctica mantenida a lo largo del tiempo. El principio posicional se trató en la formación desde el principio. Como se indicó en el análisis del conocimiento de los contenidos matemáticos relevantes, Leire reconoce haber aprendido de la formadora:

> Se ha variado mucho la manera de hacer en clase. *…+ Y lo que añadía aquí también, porque yo esto no lo sabía, lo aprendí con la formadora, el ciento veinticuatro tiene doce decenas. Y esto también de tanto en tanto lo hago en clase, lo hago yo, no sé si los otros lo hacen, ya te lo digo, pero lo hago, y Carla también lo hace de tanto en tanto. (Noviembre 2012)

La Tabla 26 da cuenta de la cantidad de códigos de conocimiento didáctico relacionados con los principios del valor posicional y de las prácticas mantenidas a lo largo del tiempo.

En cuanto a la *Composición y descomposición* numérica, los cambios identificados respecto al uso de descomposiciones factoriales o aditivas no canónicas no son notables ni se pueden adjudicar directamente a la influencia de la intervención formativa. Sí se observa un uso deliberado de la descomposición aditiva canónica en el algoritmo de la multiplicación tras la explicación de la multiplicación en columnas por parte de la formadora: *Así también tiene sentido la descomposición que trabajamos siempre.* (Enero 2012). Ese uso deliberado se mantiene a lo largo de los cursos siguientes:

> Es que ahora, al comienzo de la multiplicación lo descomponemos todo, yo al menos lo hago, supongo que Alberto [profesor que aplica el proyecto de innovación en la otra clase de tercero] también. Pero llega un momento en que los niños ya no necesitan descomponer, porque ya lo hacen de cabeza. (Abril 2013)

La descomposición aditiva no canónica se ve potenciada también por el análisis de tareas matemáticas respecto de la diversificación de representaciones del sistema decimal posicional con material manipulativo. En cuanto al conocimiento didáctico de este contenido matemático, los tres ejes formativos sirven para potenciarlo, pero no destaca ningún instrumento en particular sino que todos se van complementando a lo largo de la intervención.

Como ya se dijo, Leire no profundiza en la *Estructura multiplicativa*. Desde el principio considera que los estudiantes han de dominar la multiplicación como suma repetida y esto se mantiene a lo largo de toda la formación. Solo cuando Leire prepara con la formadora una actividad para trabajar el concepto de la multiplicación en el aula, esta maestra comienza a evidenciar un ligero conocimiento del esquema de correspondencia y del esquema rectangular que identifica en las respuestas de sus alumnos. Pero los datos no permiten hablar de un desconocimiento previo a la intervención de la formadora, solo manifiestan su influencia para la emergencia en el aula de estos conceptos.

Los datos tampoco evidencian una evolución en el uso de las *Tablas de multiplicar* ni en la estrategia de *Multiplicar por diez*, considerada por separado del resto de estrategias por su relevancia en el cálculo de la multiplicación.

En el uso de las *Propiedades de las operaciones*, las evidencias de cambio identificadas giran en torno a la propiedad distributiva. Ya se mostró la evolución en el uso de esta propiedad para el cálculo del algoritmo en columnas de la multiplicación. La Tabla 27 evidencia una primera consulta a la formadora del uso de la propiedad distributiva para llevarla al aula. Pero el gran salto en la evolución de la simbolización se evidencia tras la discusión conjunta del vídeo-episodio de Leire en el que aparece una simbolización errónea de la propiedad distributiva, al utilizar el signo igual como un operador, sin respetar la igualdad numérica. Tras la identificación de ese error, Leire comienza a trabajar en el aula la correcta simbolización de la propiedad con el uso de paréntesis. En el desarrollo del conocimiento de este contenido evidenciado en los datos, el análisis de vídeo-episodios, no aisladamente sino en entornos de reflexión colaborativos, resulta especialmente potente para la identificación de errores e incorporación de prácticas de enseñanza.

CMR	Momento formativo	Código de conocimiento didáctico matemático	Indicador de desarrollo	Instrumento formativo
PR	M2 – 2T 2011-12	• Identifica el trabajo de contenidos matemáticos en cursos posteriores	• Cuestiona a la formadora sobre la propiedad distributiva que aparece en los problemas de cálculo del proyecto para 3.º	Diálogo con la formadora Proyecto de innovación
	M3 – 3T 2011-12	• Identifica un error propio sobre un contenido matemático • Identifica el trabajo de contenidos matemáticos en cursos posteriores • Identifica qué contenido matemático no es comprendido por el alumno	• Identifica el error en el uso del signo igual en la estrategia de multiplicar por once. • Corrige su práctica incorporando una correcta simbolización de la propiedad distributiva.	Discusión conjunta Análisis de vídeo-episodios
	M5 – 2T 2012-13	• Identifica el trabajo de contenidos matemáticos en cursos posteriores	• Incorpora el uso del lenguaje específico para nombrar la propiedad distributiva	
	M6 – 3T 2012-13	• Identifica un contenido matemático en respuestas correctas de un estudiante • Identifica el trabajo de contenidos matemáticos en cursos posteriores • Distingue la complejidad y/o potencial de una tarea	• Sostiene la práctica de enseñanza de las propiedades, utilizando lenguaje específico para nombrarlas. • Valora su uso al observar cómo reaccionan maestras del ciclo superior al visionar su práctica de aula • Transfiere el trabajo de la propiedad distributiva a la enseñanza de la simbolización de la propiedad mediante el uso de paréntesis: “multiplicación en horizontal”.	Análisis de vídeo-episodios Discusión conjunta

Tabla 27. Influencia de la formación en el desarrollo del conocimiento didáctico sobre PR

Finalmente, en cuanto a las *Estrategias de cálculo*, la Tabla 28 muestra la identificación de dificultades y problemáticas en la práctica evidenciadas por los instrumentos que hacen emerger situaciones ricas de aula. Esta identificación de dificultades no suele ir acompañada de un cuestionamiento que mueva a buscar soluciones, aunque en algunos casos sí se evidencian cambios a lo largo de la intervención. En esta Tabla también se evidencia una práctica mantenida en la variabilidad de estrategias, influidas sobre todo por el proyecto de innovación y las prácticas observadas.

Se observan cambios en el aprendizaje y enseñanza de diferentes estrategias para multiplicar por once; Leire reconoce desconocer en septiembre de 2011 alguna de esas estrategias que enseña en abril de 2013. El desarrollo de este conocimiento didáctico se ve impulsado por la discusión conjunta, tanto para identificar la estrategia en septiembre de 2011, como para generalizarla a todos los casos en abril de 2013.

En cuanto a las estrategias que aparecen en los juegos, Leire se cuestiona la manera de sacar mayor provecho a las estrategias que encierran los juegos, pero no hay evidencia de desarrollo tras ese cuestionamiento por ausencia de evidencia de incorporación al aula independientemente de las prácticas impuestas por el proyecto de innovación.

CMR	Momento formativo	Código de conocimiento didáctico matemático	Indicador de desarrollo	Instrumento formativo
EC	M1 – 1T 2011-12	• Identifica prácticas de enseñanza para trabajar un contenido matemático • Manifiesta una dificultad para innovar una práctica de enseñanza • Distingue la complejidad y/o potencial de una tarea	• Identifica el trabajo de CD en las EC • Valora las estrategias observadas	Prácticas observadas
	M2 – 2T 2011-12	• Identifica un contenido matemático que enseñar para afianzar el conocimiento matemático de los estudiantes • Identifica un contenido matemático en respuestas correctas de un estudiante • Distingue la complejidad y/o potencial de una tarea	• Cuestiona cómo ayudar a los alumnos que les cuestan las EC. • Valora la enseñanza de VP y CD para afianzar el cálculo mental. • Valora la enseñanza de EC para el desarrollo del razonamiento matemático. • Incorpora el trabajo de PR en las EC	Discusión conjunta Proyecto de innovación
	M3 – 3T 2011-12	• Identifica prácticas de enseñanza para trabajar un contenido matemático • Relaciona contenidos intra/extramatemáticos con contenidos matemáticos relevantes • Identifica el trabajo de contenidos matemáticos en cursos precedentes • Identifica el trabajo de contenidos matemáticos en cursos posteriores • Identifica qué contenido matemático no es comprendido por el alumno • Distingue la complejidad y/o potencial de una tarea	• Valora que los alumnos expliquen cómo han hecho las cosas. • Incorpora el uso del lenguaje específico en su práctica de enseñanza. • Retoma el trabajo del cálculo mental en otras asignaturas relacionadas. • Incorpora a la práctica la variabilidad de estrategias propuestas y explicadas por los alumnos.	Proyecto de innovación Prácticas observadas
	M4 – 1T 2012-13	• Identifica prácticas de enseñanza para trabajar un contenido matemático • Identifica un contenido matemático que enseñar para afianzar el conocimiento matemático de los estudiantes	• Valora la comprensión del VP y CD para la aplicación a estrategias de cálculo. • Incorpora la enseñanza flexible de estrategias de cálculo	Proyecto de innovación Prácticas observadas
	M5 – 2T 2012-13	• Identifica prácticas de enseñanza para trabajar un contenido matemático • Identifica qué contenido matemático no es comprendido por el alumno	• Valora el uso de MD como EC, aunque identifica que algunos alumnos no la entienden.	Proyecto de innovación
	M6 – 3T 2012-13	• Identifica prácticas de enseñanza para trabajar un contenido matemático • Considera el trabajo de los contenidos matemáticos en libros de texto • Manifiesta una dificultad para innovar una práctica de enseñanza • Identifica un error propio sobre un contenido matemático	• Cuestiona su capacidad para sacar provecho a las estrategias de los juegos. • Valora la disposición para innovar y reconoce la dificultad en variar estrategias de cálculo que no domina. • Incorpora a la práctica EC desconocidas anteriormente. • Transfiere a las EC el trabajo de las propiedades y su correcta simbolización	Prácticas observadas Proyecto de innovación Discusión conjunta

Tabla 28. Influencia de la formación en el desarrollo del conocimiento didáctico sobre EC

Este contenido matemático, junto con la EM, ponen de manifiesto la dificultad que se observa para el desarrollo del conocimiento didáctico matemático cuando el contenido matemático concreto supone de por sí una dificultad para la maestra.

<u>A modo de resumen de los resultados para la consecución del tercer objetivo</u>

Para dar respuesta al tercer objetivo de la investigación, que proponía discutir la influencia de una intervención formativa en los contenidos identificados y en el conocimiento caracterizado, se crea la Tabla 29 que resume las relaciones explícitas que se dan entre los instrumentos formativos con los indicadores de desarrollo definidos según los diferentes momentos formativos.

Instrumentos formativos	M1 – 1T 2011-12	M2 – 2T 2011-12	M3 – 3T 2011-12	M4 – 1T 2012-13	M5 – 2T 2012-13	M6 – 3T 2012-13
Proyecto de innovación		Cuestiona Valora	Cuestiona Valora Incorpora		Valora	Cuestiona Incorpora
Diversificación de representaciones	Cuestiona			Cuestiona Valora Incorpora	Cuestiona Valora Incorpora	Incorpora Transfiere
Análisis de tareas				Cuestiona Valora Incorpora		
Análisis de vídeo-episodios		Valora	Cuestiona Incorpora		Cuestiona Valora Incorpora Transfiere	
Prácticas observadas	Cuestiona Valora		Valora	Cuestiona Valora	Cuestiona Valora Incorpora	Cuestiona
Diálogo con la formadora		Cuestiona		Cuestiona Valora Incorpora	Cuestiona	
Discusión conjunta	Cuestiona Valora	Cuestiona Valora Incorpora	Cuestiona Valora Incorpora	Valora Incorpora	Valora Incorpora Transfiere	Incorpora

Tabla 29. Influencia de los instrumentos formativos en el desarrollo del conocimiento

Las observaciones realizadas hasta ahora, junto con esta Tabla, sirven para visualizar la relevancia que tienen las situaciones colaborativas de reflexión sobre el contenido didáctico para el cuestionamiento de elementos de la práctica de enseñanza (el diálogo con la formadora y discusiones conjuntas), pero sobre todo para facilitar la incorporación de nuevas prácticas a la enseñanza de la maestra (discusiones conjuntas). Con todo, estos instrumentos resultan de más influencia a partir del momento 2, en el que se incorporan el trabajo prolongado del proyecto de innovación y el análisis de vídeo-episodios.

Los instrumentos utilizados para acercar la investigación en didáctica de las matemáticas al aula proporcionan una práctica prolongada de enseñanza que lleva al cuestionamiento de elementos de la práctica que se identifican como problemáticos durante la misma realización del proyecto de innovación o incorporación de nuevas representaciones de los contenidos matemáticos. El carácter práctico de estos instrumentos, en el sentido de que se llevan a cabo directamente en el aula trabajando con los estudiantes, permite valorar los resultados de la práctica del conocimiento didáctico adquirido en el aprendizaje de los estudiantes.

El eje formativo que busca hacer emerger situaciones ricas en el aula resulta sobre todo de apoyo para potenciar otros instrumentos formativos que llevan a un desarrollo del conocimiento didáctico. Es decir, el análisis de vídeo-episodios resulta un instrumento clave para identificar prácticas de enseñanza o errores en las mismas cuando está acompañado de la discusión conjunta con sus compañeros y la formadora, pues por sí solos no producen ese aprendizaje (como se evidencia en la entrevista realizada en la que se pide a la maestra que analice el episodio sin ningún comentario por parte de la investigadora).

Finalmente, se puede afirmar que los tres ejes formativos suponen una trama que influye en el desarrollo del conocimiento didáctico, pero no de forma aislada. La coordinación de diferentes instrumentos formativos resulta clave para suscitar cuestionamientos sobre la práctica, valoración de la enseñanza y aprendizaje e incorporación a la propia práctica. A la hora de transferir a otras prácticas, las referencias a la formación por parte de la maestra son más genéricas, pero se observan indicios evidentes de influencia de momentos formativos anteriores.

En cuanto a la influencia de la formación sobre los contenidos identificados, se observa un mayor desarrollo del conocimiento didáctico matemático a cerca de los contenidos más trabajados durante la formación. Estos son el cálculo de las operaciones mediante algoritmos basados en el valor posicional y las estrategias de cálculo basadas en las propiedades de las operaciones y la descomposición numérica.

5

Conclusiones y Aportaciones de la Investigación

En este capítulo se presentan las conclusiones de la investigación y se aportan reflexiones sobre el desarrollo profesional extraídas del estudio. En el primer y segundo apartados se responde a las dos preguntas de investigación. El tercer apartado presenta reflexiones más generales sobre desarrollo profesional en entornos formativos para el maestro en ejercicio, junto con perspectivas que abre el estudio e ideas sobre posibles maneras de abordar futuras investigaciones en desarrollo profesional.

5.1. Desarrollo del conocimiento didáctico matemático acerca de la multiplicación

Los resultados del estudio buscan contribuir al conocimiento científico dentro de la línea del desarrollo profesional y, más en concreto, del conocimiento del profesor. Shulman y Shulman (2004), tras definir al profesor experto como aquel miembro de una comunidad profesional que está preparado, dispuesto y capacitado para enseñar y aprender de su experiencia docente, invitan a investigar sobre qué impulsa la mejora del profesor en su visión, comprensión, práctica, motivación, reflexión y pertenencia a la comunidad; y en este sentido, qué tipo de formación favorece la mejora de estas disposiciones. Sin pretender reducir el desarrollo profesional al carácter cognitivo, este estudio se ha centrado específicamente en el conocimiento del profesor con intención de aportar alguna respuesta parcial a estas preguntas planteadas por Lee y Judith Shulman.

El conocimiento didáctico matemático se ha visto desde tres aspectos: identificación y fundamentación de contenidos matemáticos; identificación y uso de estrategias para enseñar un contenido; identificación e interpretación del conocimiento de los estudiantes. Esta distinción permite dar respuesta a la primera pregunta de investigación: *¿Qué conocimiento didáctico matemático de una maestra acerca de la multiplicación podemos observar mediante contextos de reflexión sobre la práctica vinculados a una intervención formativa?*

Distinguir el objeto del conocimiento didáctico matemático según el contenido, la enseñanza o el conocimiento de los estudiantes ha permitido caracterizar de forma estática este conocimiento a la vez que distinguir aspectos del conocimiento didáctico matemático que se han desarrollado y aspectos que emergen, pero permanecen estables a lo largo del tiempo.

Respecto al conocimiento del contenido, se caracteriza la identificación y fundamentación de los contenidos matemáticos relevantes como medio para indagar sobre la comprensión del contenido. Tras distinguir los contenidos matemáticos relevantes acerca de la multiplicación, los resultados muestran que la identificación de los elementos clave del sistema decimal posicional es constante. A su vez, las relaciones de estos elementos con la enseñanza y con el conocimiento de los estudiantes son numerosas. Esto da cuenta de una comprensión amplia y enfocada a la práctica del sistema decimal posicional.

La escasez de identificaciones relativas al concepto de la multiplicación confirma los resultados de Clivaz (2012) sobre el conocimiento de los maestros acerca de este concepto. Este autor afirma que gran parte de los maestros de primaria utilizan de forma predominante y casi única la estructura de suma repetida. La utilización de este modelo de multiplicación ha sido correcta y se ha evidenciado la conciencia del problema que supone este modelo a la hora de explicar la propiedad conmutativa del producto. Sin embargo, la diversidad de representaciones que corresponde al conocimiento de la estructura del concepto es una característica del conocimiento del contenido que se ha manifestado débil: "pensar adecuadamente sobre el conocimiento del contenido requiere profundizar en el conocimiento de los hechos o conceptos de un dominio. Requiere comprender las estructuras del contenido del que se trata" (Shulman, 1986, p. 9). El contraste entre los resultados referentes al sistema decimal posicional y los referentes al concepto de la multiplicación confirma la relación entre profundizar en el conocimiento del concepto y actuar en el aula, especialmente a la hora de utilizar diversas representaciones y comenzar a usar de forma crítica el libro de texto, tanto para alejarse de la forma de exponer los contenidos como para aprovechar las propuestas que ofrece. Este avance en el uso crítico y autónomo del libro de texto es indicador de conocimiento del contenido matemático y signo de desarrollo profesional (Carrillo et al., 2007).

En cuanto al desarrollo o profundización en el conocimiento sobre el contenido, los resultados llevan a relacionar este desarrollo con la problematización de los contenidos y su valoración. Este resultado va en la línea de la relación entre una mayor comprensión de la práctica y las acciones y decisiones de los profesores (Carrillo y Climent, 2011).

El conocimiento didáctico matemático relativo a los estudiantes va emergiendo a lo largo del tiempo según los instrumentos formativos utilizados, sin que se observe desarrollo. Las reflexiones, que empiezan de forma superficial en cuanto a la relación entre contenidos y conocimiento de los estudiantes, se van concretando. Estas relaciones se quedan más en el ámbito teórico que en la práctica de una interpretación de respuestas de los alumnos. Informan más sobre el conocimiento del contenido de la maestra que del mismo conocimiento de los estudiantes, como afirman Lin y Rowland (2016) “la capacidad de reconocer los errores de los estudiantes depende más fuertemente del conocimiento del contenido que del conocimiento pedagógico” (p. 489).

La habilidad para reconocer los elementos matemáticos utilizados por los alumnos en sus respuestas está vinculada al tipo de tareas, enlazando la identificación de contenidos que llevan a un error en las tareas rutinarias y la identificación de contenidos y de conocimiento del estudiante en el uso de estrategias creativas por parte de los alumnos.

No se puede hablar propiamente de evidencias de un crecimiento en la interpretación de la comprensión del contenido por parte de los estudiantes a partir de respuestas concretas. Pero sí podemos observar un análisis más evidente de las dificultades genéricas de aprendizaje de los alumnos respecto a contenidos matemáticos específicos, lo que supone un indicio de ampliación en el conocimiento didáctico del contenido, puesto que da cuenta de una mayor complejidad del mismo (Climent, 2002).

El aspecto del conocimiento didáctico matemático más desarrollado en el caso de este estudio es el relativo a la práctica de enseñanza. La creciente identificación y uso de estrategias para enseñar un contenido comienza centrándose en qué enseñar para ir fijándose paulatinamente más en cómo enseñarlo enfatizando el carácter práctico de la reflexión sobre la práctica que se ha llevado a cabo. Estos resultados están en concordancia con la afirmación de Climent (2002) sobre la reflexión y modificación de la práctica como la verdadera fuerza motriz del desarrollo profesional del maestro.

La identificación de dificultades o errores propios sobre un contenido matemático relevante concreto ha conducido también a un desarrollo manifestado en nuevas prácticas de enseñanza sostenidas en el tiempo. Se puede afirmar que la percepción de que un error en la maestra potencia errores en los estudiantes enfatiza la conciencia por parte del maestro de la importancia del conocimiento del contenido (Climent, 2002).

En conclusión, la identificación de contenidos, prácticas o dificultades revela la existencia de un aspecto de conocimiento didáctico. De forma global se puede afirmar lo siguiente:

El conocimiento didáctico va ganando complejidad con el tiempo, en el sentido de ir involucrando simultáneamente diversos códigos de conocimiento y contenidos matemáticos relevantes para la enseñanza y aprendizaje de la multiplicación.

Por otra parte, se han evidenciado incorporaciones a la práctica que no se mantienen en el tiempo. Estas prácticas de enseñanza han sido propuestas por otros, pero que sin vinculación a un cuestionamiento propio sobre la práctica ni valoración de su influencia en el aprendizaje de los estudiantes. Este hecho confirma que no se cambia por adoptar acríticamente recomendaciones externas sin problematizarlas, sino que se requiere de la comprobación en la propia práctica de los beneficios del cambio (Climent, 2002).

Los resultados muestran un desarrollo profesional cuando la estrategia de enseñanza identificada y valorada conlleva una incorporación a la práctica mantenida en el tiempo. Esta incorporación a la práctica se ve enriquecida en algunos ejemplos con la aplicación a prácticas ajenas a la intervención formativa. Esta transferencia evidencia una apropiación del conocimiento que lleva a innovar más allá de lo observado y discutido en la formación y es fuente de nuevos cuestionamientos. Esa apropiación da cuenta de desarrollo profesional con indicios de afianzarse sin aportación continuada de formación.

Los diferentes aspectos de conocimiento, cuando están vinculados a un cuestionamiento sobre la práctica, llevan con más frecuencia a un cambio estable en la práctica de enseñanza. Pero para que se efectúe ese desarrollo profesional se requiere tiempo, por lo que se puede cuestionar la eficacia de intervenciones formativas puntuales de cara al desarrollo profesional del maestro en ejercicio.

Este estudio evidencia desarrollo profesional del conocimiento didáctico del contenido cuando el maestro entra en una espiral que enlaza cuestionamiento sobre elementos de la práctica, valoración de contenidos matemáticos y/o estrategias de enseñanza, e incorporación a la práctica. Este desarrollo se ve reforzado cuando dicho movimiento provoca nuevos cuestionamientos o transferencia a nuevas prácticas.

Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán (2007) hablan de una hélice de desarrollo profesional cuyo contenido es el conocimiento profesional visto en toda su complejidad, cuya forma viene dada por la reflexión sobre la práctica. Los resultados de esta tesis vienen a confirmar la necesidad de que la comprensión de la práctica y su actuación integren el conocimiento profesional del profesor. Es decir, que el análisis didáctico se vea enriquecido por un conocimiento didáctico matemático cada vez más complejo, que integre más aspectos. Se podría establecer alguna relación entre las fases de desarrollo profesional consideradas por estos autores y las propuestas en este estudio, aunque el enfoque es distinto. La fase de interiorización considerada como la problematización de la enseñanza se puede traducir en un cuestionamiento sobre la práctica. Las fases de condensación y cosificación, contempladas desde un punto de vista reflexivo que lleva a distanciarse de la situación concreta para percibir la problemática desde un punto de vista general y con una creciente complejidad, no están en relación directa con las fases de valoración, incorporación a la práctica y transferencia a otras prácticas. La transferencia a otras prácticas da cuenta, desde la práctica, de ese distanciamiento de la situación concreta que deriva en nuevas situaciones contempladas desde un conocimiento didáctico matemático más complejo.

Shulman y Shulman (2004) incluyen en la categoría de "Comprensión", dentro de su definición de profesional competente, el conocimiento profundo del contenido en el currículum, las diferentes formas de acercar ese contenido a los alumnos, la capacidad de identificar la comprensión de los estudiantes, entre otros requisitos como la capacidad de involucrarse con la comunidad en una reflexión sobre el contenido orientada a la práctica. Es decir, para estos autores, comprender vincula todos los aspectos del conocimiento didáctico del contenido. Este estudio ha evidenciado que los contenidos matemáticos en los que se efectúa un mayor desarrollo en todos los aspectos del conocimiento didáctico matemático son aquellos que la maestra considera que domina más en cuanto al conocimiento del contenido. Esto lleva a reconsiderar el carácter del vínculo entre conocimiento del contenido y desarrollo profesional.

La evidencia de la relación entre el contenido y el desarrollo profesional puede explicar por qué en la investigación sobre desarrollo profesional siguen abundando los estudios de enfoque cognitivo (Lin y Rowland, 2016).

5.2. Influencia de la intervención formativa en el conocimiento didáctico matemático

En este apartado se responde a la pregunta *¿cómo la intervención formativa influye en el desarrollo del conocimiento didáctico matemático?* La intervención formativa llevada a cabo giraba sobre tres ejes: hacer emerger situaciones ricas en el aula, propiciar situaciones colaborativas sobre el contenido didáctico y acercar la investigación en didáctica de las matemáticas al aula. Para cada eje se utilizaban diversos instrumentos formativos. Resumiendo la respuesta a la pregunta, se concluye que cada uno de los ejes formativos ha jugado un papel relevante y distinto en el desarrollo del conocimiento didáctico observado, pero que se necesitan entre sí para favorecer dicho desarrollo.

El eje de *hacer emerger situaciones ricas en el aula* ha resultado clave para propiciar interrogantes sobre la práctica. La discusión de resultados sobre conocimiento didáctico matemático ha evidenciado la importancia que supone un cuestionamiento sobre la práctica para mover a un cambio sostenido en el tiempo. Tanto la observación de prácticas ajenas como el análisis de vídeo-episodios han suscitado interrogantes concretos sobre el contenido matemático y prácticas de enseñanza. Esto confirma la afirmación de Lin y Rowland (2016) "la capacidad de observar adecuadamente las situaciones del aula y razonar apropiadamente, está fuertemente relacionada con ambos aspectos del conocimiento disciplinario (tanto matemático como pedagógico)" (p. 489).

Muir (2010) afirma la relación entre la posibilidad de éxito en el aprendizaje del profesor y la proximidad de la formación al contexto del profesor, entendiendo por éxito la sostenibilidad de las mejoras introducidas durante la formación. Esta efectividad la ratifican Borko, Jacobs, Eiteljorg y Pittman (2008) al considerar que el uso de vídeo-episodios extraídos de la propia práctica de los profesores o de sus compañeros de escuela facilita mejor identificar el currículum y el grupo clase de alumnos que el uso de grabaciones descontextualizadas. En este estudio, la observación de prácticas ajenas en la propia aula y el análisis de vídeo-episodios propios o en otras aulas de la misma escuela evidencian la proximidad de la formación al contexto del profesor.

Estos instrumentos formativos han servido para identificar estrategias de enseñanza que contrastan con la práctica habitual de la maestra y provocan cuestionamientos sobre la práctica con intención de cambiar. El uso de vídeo-episodios se ha mostrado útil para centrar la reflexión sobre el contenido didáctico, sobre estrategias de enseñanza –algunas de ellas con errores de contenido– y sobre estrategias de cálculo de los estudiantes que habían pasado desapercibidas previamente (Geiger, Muir y Lamb, 2016). Esas estrategias didácticas grabadas que encierran un error de contenido han desencadenado reflexiones que evidencian todos los indicadores definidos de desarrollo profesional. En estos ejemplos, la sostenibilidad de las mejoras se ha evidenciado hasta el final de la formación y en los años posteriores, en los que se ha mantenido relación con la maestra estudiada.

Ahora bien, esta emergencia de situaciones ricas en el aula no alcanza tanta influencia si está separada de la discusión conjunta. La verificación de la no-identificación de errores de la práctica en la reflexión individual al visionar un vídeo-episodio pone de manifiesto el papel de las situaciones colaborativas de reflexión. Esta evidencia está en concordancia con la afirmación de Carrillo y Climent (2011) que consideran clave para el desarrollo del conocimiento del profesor en sus diferentes vertientes la posibilidad de examinar la propia profesión y enseñanza mediante una reflexión personal y compartida con colegas. En este sentido, el uso de vídeo-episodios se ha evidenciado potente para propiciar discusiones ricas en contenido matemático y pedagógico, pero insuficiente para generar conocimiento didáctico si se utiliza de forma aislada.

Aunque la petición de utilizar estos instrumentos formativos en contextos ajenos a la formación es señal de la influencia en la maestra, no hay indicios de pervivencia del uso de estos instrumentos independiente de la intervención formativa con vistas a una formación continua. Probablemente sea necesario otro tipo de intervención formativa si se desea que los maestros se apropien de ese estilo de formación continua.

Las *situaciones colaborativas de reflexión sobre contenido didáctico* han resultado clave para profundizar sobre las prácticas observadas o el análisis de vídeo-episodios. La discusión conjunta de prácticas observadas permite interpretar de diferentes maneras los hechos, con lo que amplía la capacidad comprensiva de la práctica y proporciona concreción a reflexiones sobre la enseñanza y el aprendizaje para que no se queden en generalidades (Carrillo y Climent, 2011).

Estas situaciones de reflexión conjunta han servido para propiciar el cuestionamiento y para profundizar en un contenido que ha llevado a una valoración positiva del mismo. La reflexión sobre la práctica con otros compañeros y la formadora ha llevado una toma de conciencia de la práctica con sus fortalezas y debilidades que ha provocado desplazamiento en la espiral de desarrollo profesional mencionada anteriormente.

En la presente investigación, la reflexión sobre la práctica en situaciones colaborativas ha propiciado en algunos ejemplos el paso hacia una *toma de conciencia de la dificultad* y, tras la puesta en práctica, la evidencia de una *competencia consciente*. Cambios que evidencian un desarrollo profesional donde el papel de la formadora como facilitadora que promueve una reflexión crítica ha resultado crucial (Geiger, Muir y Lamb, 2016).

Pese a lo bien valoradas que han sido las situaciones colaborativas de reflexión por todos los profesores, estos instrumentos tampoco dan muestra de pervivencia en el tiempo. No hay evidencias de que a nivel de la escuela se haya asentado una cultura de aprovechar las reuniones de claustro para discutir sobre el contenido matemático y la práctica de enseñanza específica de las materias. Como afirma la maestra, se tiende a discutir más las actitudes de los alumnos o la organización de actividades extracurriculares.

La evidencia del cambio que provocan en la maestra las reflexiones colaborativas y de la ausencia de apropiación de estos instrumentos, lleva a cuestionarse sobre posibles intervenciones formativas que generen no solo desarrollo profesional sino desarrollo de la comunidad profesional según categorías de análisis similares a las que se estudian a nivel individual (Shulman y Shulman, 2004).

El tercer eje formativo, que busca *acercar la investigación en didáctica de las matemáticas al aula*, ha tenido una influencia evidente a la hora de mantener cambios de prácticas y, por tanto, de llevar a un desarrollo sostenido.

La influencia de la introducción de diversas representaciones ha sido patente pero lenta. Patente no por la abundancia de esta introducción sino por la novedad y dificultad que ha supuesto a la maestra. A veces no se ha dado hasta después de dos años de finalizar la intervención formativa. La dificultad que demuestran muchos profesores en promover esas representaciones evidencia la necesidad de profundizar en el conocimiento matemático (Orrill y Kittleson, 2015).

Los resultados se contraponen con la apreciación de Carrillo y Climent (2011) sobre la introducción de nuevos materiales de enseñanza con vistas a implementar un cambio. Estos autores afirman su impacto limitado ya que muchos profesores toleran la incongruencia entre esos materiales y sus creencias sobre la matemática a enseñar. El caso estudiado muestra el papel del proyecto de innovación para sostener una práctica que convierte la mirada sobre el libro de texto en una mirada cada vez más crítica y con capacidad de aprovechar los recursos que ofrece. Esto comenzó restringiéndose a lo pautado en el libro y observado en la práctica de la formadora. El resultado concuerda con resultados de Lin y Rowland (2016) en los que materiales curriculares concebidos como guías para apoyo de los maestros trabajados colaborativamente proporcionan caminos sostenibles para el desarrollo del conocimiento del profesor de matemáticas.

Los resultados de esta investigación muestran que el trabajo sistemático de un proyecto de innovación ha permitido dar continuidad a nuevas prácticas de enseñanza. Estas prácticas no han producido desarrollo profesional por sí solas. Pero unidas a una reflexión conjunta han provocado un esfuerzo para profundizar en el aprendizaje matemático y en prácticas de enseñanza coherentes. Esta reflexión ha repercutido en otros contenidos matemáticos no tratados en el proyecto produciendo una transferencia de conocimiento a otras prácticas que se ha considerado indicio de desarrollo profesional.

Los resultados sobre la influencia del proyecto de innovación van en la línea de proponer una forma en la que el profesor se implica en un aprendizaje activo, de larga duración e interactuando con sus colegas mediante una discusión regular centrada en su trabajo y el aprendizaje de los estudiantes, para desarrollar conocimiento sobre el pensamiento y aprendizaje de los estudiantes (Desimone, Porter, Garet, Yoon y Birman, 2002).

Los instrumentos de este tercer bloque son los que dan mayores indicios de pervivencia tras la intervención formativa. Esto confirma los resultados de Zehetmeier y Krainer (2011) en los que observan mayor sostenibilidad a los cambios incorporados en prácticas matemáticas concretas y conocimiento didáctico del profesor que en las redes de trabajo comunitario para reflexionar sobre la práctica.

Se concluye que la intervención formativa ha resultado de influencia en el desarrollo identificado en la maestra. Los instrumentos formativos considerados aisladamente resultan de corta relevancia para propiciar un cambio sostenido en el tiempo, pero la conjugación de los tres ejes ha ofrecido un resultado interesante en el campo del desarrollo profesional. Si se utiliza la imagen del fuego, la emergencia de situaciones ricas de aula se podría comparar a la chispa necesaria pero insuficiente para encender un fuego. La reflexión colaborativa es comparable al viento que atiza la llama y permite profundizar y prender nuevos fuegos. Y los medios utilizados para acercar la investigación en didáctica al aula, proyecto de innovación y diversificación de las representaciones, son como los troncos gruesos de madera que sostienen el fuego a lo largo del tiempo.

Con todo, el alcance de una intervención formativa siempre resulta limitado en cuanto a los contenidos tratados y al desarrollo alcanzado. Limitado también en cuanto que la intervención estudiada requiere de una alta dedicación por parte del formador, y esto reduce el número de profesores al que se puede llegar con un tipo de intervención formativa como la presentada en esta tesis.

5.3. Perspectiva de futuro sobre el desarrollo de profesores en ejercicio

El desarrollo profesional del maestro no se limita al conocimiento didáctico del contenido. Por desarrollo profesional en matemáticas se entiende un proceso de crecimiento en los aspectos que capacitan al profesor para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de sus estudiantes. Las investigaciones en España en el campo del desarrollo profesional se han enfocado principalmente en la formación inicial (Montes, Escudero-Ávila, Flores-Medrano, Muñoz-Catalán y Carrillo, 2015). La facilidad de recoger datos entre estudiantes para profesor es uno de los motivos, otro es que el resultado de las investigaciones lleva a proponer modos de hacer en la formación de los futuros profesores para impulsar desde el inicio el desarrollo profesional. Sin embargo, la implicación de los profesores en su desarrollo profesional es un factor determinante en la mejora de la enseñanza y no puede limitarse la instrucción formal impartida desde la Universidad.

En este estudio se ha representado la idea de desarrollo profesional como una espiral en la que la reflexión sobre la práctica permite ir pasando de un cuestionamiento a una valoración e incorporación a la práctica que provoca nuevas preguntas y prácticas. El movimiento sobre esta espiral puede ser impulsado por intervenciones formativas (Carrillo et al., 2007). Así, se plantea la necesidad de investigar sobre la forma de llevar a cabo intervenciones formativas que generen cuestionamientos en los profesores. Pues dar una respuesta cuando no se ha planteado una pregunta no parece razonable.

Los entornos formativos revisados, aunque centran su análisis en algún aspecto del conocimiento didáctico matemático, enfatizan el papel de la reflexión y de la colaboración. El estudio que aquí se presenta apuesta también por el uso de algún material que permita una práctica activa y continuada por parte del docente y que acerque la investigación en didáctica al aula. Este estudio muestra, en un caso particular, la conveniencia de coordinar estos tres elementos para lograr un desarrollo profesional sostenido a lo largo del tiempo. Partiendo de los resultados discutidos, se considera que una intervención formativa en matemáticas ha de propiciar situaciones colaborativas de reflexión entre profesores e investigadores sobre el contenido didáctico, acercando la investigación en didáctica de las matemáticas al aula real y haciendo emerger situaciones ricas de aula que propicien el cuestionamiento de la práctica y permitan al maestro hacer suyas las reflexiones emitidas y llevarlas a la práctica.

En esta presentación de intervenciones formativas subyace una idea de desarrollo profesional que entrelaza cuatro elementos clave:

(1) Conocimiento didáctico matemático, entendido como profundización en contenidos matemáticos relevantes para la comprensión del aprendizaje del estudiante, para el diseño de la enseñanza y para la gestión de la práctica matemática en el aula.

(2) Reflexión sobre la práctica, entendida como la interpretación razonada y el cuestionamiento sobre la práctica matemática de aula con búsqueda de propuestas relativas a la enseñanza.

(3) Colaboración en comunidad, entendida como discusión entre profesores y expertos sobre conocimiento didáctico matemático para reflexionar sobre la práctica.

(4) Empoderamiento en la acción, entendido como implementación de cambios en la práctica matemática de aula, fundamentados en la reflexión y la colaboración, para mejorar la enseñanza y potencialmente el aprendizaje del estudiante.

Estos elementos forman una trama progresiva en la que cada uno influye y potencia los otros. Nótese, además, que la definición de estos elementos es independiente de cualquier posible intervención formativa.

La limitación del tiempo y necesidad de centrar el estudio en un marco acotado de investigación no ha permitido abarcar dicha idea de desarrollo, aunque se han hallado indicios que fundamentan en los datos las definiciones propuestas. Por esto, surgen para futuras investigaciones cuestiones interesantes que tocan a los diferentes elementos del desarrollo profesional.

Los aspectos de conocimiento didáctico matemático definidos, fundamentados en los datos, requieren de una triangulación con la práctica de aula de Leire que no se ha dado; los resultados presentados se basan en los datos sobre la reflexión sobre la práctica propia o ajena de la maestra y no sobre la práctica directamente considerada. Seguramente, tras la grabación y análisis de la práctica de Leire, los códigos de cada aspecto de conocimiento se verían aumentados y refinados.

Además, este estudio se ha centrado en un contenido matemático específico: el pensamiento numérico, más concretamente la multiplicación. Para futuras investigaciones sobre el desarrollo profesional, sería interesante ver si las dinámicas de evolución halladas se dan con otros contenidos no tan cercanos al conocimiento de la maestra. Por ejemplo, antes de concluir la formación, el claustro se puso de acuerdo para pedir ayuda a la formadora sobre el bloque de geometría; bloque que Leire afirma en numerosas ocasiones que no domina. Los cuestionamientos que ella comienza a plantear, ¿se quedan en un nivel teórico o apuntan a un interés por el cambio de práctica?, ¿las prácticas innovadoras sobre este contenido se sostienen en el tiempo?, ¿se llegan a transferir los conocimientos didácticos de este contenido trabajados con la formadora a otras prácticas introducidas por la maestra? Es decir, ¿se pueden validar los indicadores de desarrollo que han marcado el dinamismo de desarrollo profesional en este estudio?

Este estudio no ha pretendido realizar un análisis de la reflexión, aunque ha trabajado sobre ella. Así, cabría continuar el caso estudiado profundizando en un análisis de este elemento del desarrollo profesional, en orden a encontrar no solo una caracterización de la reflexión de la maestra, sino indicadores de desarrollo específicos para este elemento.

Pese a la influencia evidenciada de las situaciones colaborativas de reflexión sobre el contenido matemático en el desarrollo profesional, tampoco se ha realizado una caracterización de la colaboración en comunidad ni se han definido indicadores de desarrollo. Un estudio sobre este elemento llevaría a cuestionar preguntas como: ¿qué tipo de participación realiza Leire en las discusiones conjuntas?, ¿se evidencia alguna variación?, ¿qué puede propiciar esas variaciones?

Estas cuestiones llevarían a plantear una reflexión sobre la intervención formativa, de gran interés en el campo de la formación continua del maestro. Los datos no dan indicio de haberse creado una comunidad de aprendizaje en el claustro independiente de la intervención formativa. Así pues: ¿qué elementos habría que enfatizar durante la intervención formativa para propiciar la continuidad de reuniones de claustro o de ciclo centradas en contenidos específicos con vistas a la enseñanza y aprendizaje de los estudiantes? No está claro si se ha llegado a generar una cultura que permita seguir trabajando el desarrollo profesional independiente de una intervención formativa específica, pero es razonable pensar que una cultura en este sentido ha sido iniciada. ¿Qué habría que introducir, enfatizar o eliminar en la intervención formativa con vistas a generar un empoderamiento en el desarrollo profesional del maestro?

Referencias Bibliográficas

Abell, S. K. (2008). Twenty years later: Does pedagogical content knowledge remain a useful idea? *International Journal of Science Education*, *30*(10), 1405–1416.

Adler, J., Ball, D. L., Krainer, K., Lin, F.-L. y Novotná, J. (2005). Reflections on an emerging field: Researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics*, *60*(3), 359–381.

Badillo, E. y Moreno, I. (2012). Case study report 2: Group of teachers from the MDL School. Visitado el 25 de marzo de 2014 en https://ddd.uab.cat/pub/worpap/2012/151550/SPAIN_CASE_STUDIES_REPORT_DEF.pdf

Ball, D. L., Phelps, G. C. y Thames, M. H. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407.

Berch, D. B. (2005). Making sense of number sense: Implications for children with mathematical disabilities. *Journal of Learnig Disabilities*, *38*(4), 333–339.

Borko, H., Jacobs, J., Eiteljorg, E. y Pittman, M. E. (2008). Video as a tool for fostering productive discussions in mathematics professional development. *Teaching and Teacher Education*, *24*(2), 417–436.

Burgell, F. y Ochoviet, C. (2015). Significados del signo de igual y aspectos de su enseñanza. Un estudio realizado con estudiantes de primer año de enseñanza secundaria y sus profesores. *Enseñanza de Las Ciencias*, *33*(3), 77–98.

Buys, K. (2008). Mental arithmetic. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children learn Mathematics. A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school* (pp. 121–146). Rotterdam: Sense Publishers.

Carrillo, J. y Climent, N. (2011). The development of teachers' expertise through their analysis of good practice in the mathematics classroom. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *43*(6), 915–926.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. y Muñoz-Catalán, M. C. (2007). Un modelo cognitivo para interpretar el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas. Ejemplificación en un entorno colaborativo. *Enseñanza de las Ciencias*, *25*(1), 33–44.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the 8th Congress of European Research in Mathematics Education* (pp. 2985–2994). Antalya: ERME.

Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización*. Bogotá: Universidad de los Andes.

Chapman, O. (2013). Investigating teachers' knowledge for teaching mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(4), 237–243.

Clark, F. B. y Kamii, C. (1996). Identification of multiplicative thinking in children in grades 1-5. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(1), 41–51.

Clements, D. H. y Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early Math. The learning trajectories approach*. Nueva York: Routledge.

Climent, N. (2002). *El desarrollo profesional del maestro de Primaria respecto de la enseñanza de la matemática. Un estudio de caso*. Manuscrito de Tesis Doctoral. Universidad de Huelva.

Clivaz, S. (2012). Connaissances mathématiques des enseignants et enseignement de l'algorithme de la multiplication. En J.-L. Dorier y S. Coutat (Eds.), *Enseignement des mathématiques et contrat social: enjeux et défis pour le 21e. siècle - Actes du Colloque EMF2012* (Vol.1, pp. 172–182). Ginebra: EMF2012.

Contreras, L., Carrillo, J., Zakaryan, D., Muñoz-Catalán, M. C. y Climent, N. (2012). Un estudio exploratorio sobre las competencias numéricas de los estudiantes para maestro. *BOLEMA*, *26*(42B), 433–457.

Desimone, L. M., Porter, A. C., Garet, M. S. yoon, K. S. y Birman, B. F. (2002). Effects of professional development on Teachers' Instruction: Results from a Three-year Longitudinal Study. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, *24*(2), 81–112.

Fernández, C. y Llinares, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la educación primaria y secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, *30*(1), 129–142.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S. y Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *16*(1), 3–17.

Fried, M. N. y Amit, M. (2005). Mathematics teacher eduaction around the world. A spiral task as a model for in-service teacher education. *Journal of Mathematics Teacher*

Education, *8*(5), 419–436.

Gallardo, J. (2004). *Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. El caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales*. Manuscrito de Tesis Doctoral. Universidad de Málaga.

Geiger, V., Muir, T. y Lamb, J. (2016). Video-stimulated recall as a catalyst for teacher professional learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *19*(5), 457–475.

Gerring, J. (2004). What is a case study and what is it good for? *American Political Science Review*, *98*(2), 341–354.

Glaser, B. G. y Holton, J. (2007). Remodeling grounded theory. *Historical Social Research*, *32*(19), 47–68.

Godino, J. D., Font, V., Konic, P. y Wilhelmi, M. R. (2009). El sentido numérico como articulación flexible de los significados parciales de los números. En J. M. Cardeñoso y M. Peñas (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Sentido Numérico* (pp. 117–184). Granada: Thales y Universidad de Granada.

Gómez, B. (1995). Tipología de los errores en el cálculo mental. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las Ciencias*, *13*(3), 313–325.

Gómez, B. (2005). La enseñanza del cálculo mental. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *4*, 17–29.

Guskey, T. (2002). Professional development and teacher change. *Teachers and Teaching*, *8*(3/4), 381–391.

Jacobs, V. R., Lamb, L. L. C. y Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*(2), 169–202.

Jaworski, B. (2005). Tools and tasks for learning and meta-learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*(5), 359–361.

Krainer, K. (1999). PFL-Mathematics: Improving professional practice in mathematics teaching. En B. Jaworski, T. Wood, y S. Dawson (Eds.), *Mathematics teacher education: Critical international perspectives* (pp. 102–111). Londres: Falmer Press.

Lampert, M. (2010). Learning teaching in, from, and for practice: What do we mean? *Journal of Teacher Education*, *61*(1–2), 21–34.

Lemaire, P. y Siegler, R. S. (1995). Four aspects of strategic change: Contributions to children's learning of multiplication. *Journal of Experimental Psychology*, *124*(1), 83–97.

Lin, F.-L. y Rowland, T. (2016). Pre-service and in-service mathematics teachers' knowledge and professional development. En Á. Gutiérrez, G. C. Leder, y P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 483–520). Rotterdam: Sense Publishers.

Llinares, S. (2012). Formación de profesores de matemáticas. Caracterización y desarrollo de competencias docentes. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *7*(10), 53–62.

Llinares, S. y Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. En Á. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 429–459). Rotterdam: Sense Publishers.

Llinares, S. y Valls, J. (2009). The building of pre-service primary teachers' knowledge of mathematics teaching: Interaction and online video case studies. *Instructional Science*, *37*(3), 247–271.

MEC. (2006). Ley Orgánica de Educación. *Boletín Oficial del Estado*, *106*, 17158–17207.

Montes, M. A., Escudero-Ávila, D., Flores-Medrano, E., Muñoz-Catalán, M. C. y Carrillo, J. (2015). El foro como contexto de exploración del conocimiento profesional de maestros en activo. En C. Fernández, M. Molina, y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 381–389). Alicante: SEIEM.

Moreno, I. (2012). *Conocimiento para la enseñanza de las matemáticas en un contexto de reflexión conjunta sobre prácticas observadas*. Trabajo de Máster. Universitat Autònoma de Barcelona.

Muir, T. (2010). Using video-stimulated recall as a tool for reflecting on the teaching of mathematics. En L. Sparrow, B. Kissane, y C. Hurst (Eds.), *Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 438–445). Fremantle: MERGA.

Muñoz-Catalán, M. C. (2009). *El desarrollo profesional en un entorno colaborativo centrado en la enseñanza de las matemáticas: el caso de una maestra novel*. Manuscrito de Tesis Doctoral. Universidad de Huelva.

Nataraj, M. S. y Thomas, M. O. J. (2009). Developing understanding of number system structure from the history of mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 96–115.

Nunes, T., Vargas, B., Lin, P. y Rathgeb-Schnierer, E. (2016). *Teaching and learning about whole numbers in primary school*. Hamburgo: ICME.

Orrill, H. C. y Kittleson, J. M. (2015). Tracing professional development to practice: connection making and content knowledge in one teacher's experience. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *18*(3), 273–297.

Park, J. H. y Nunes, T. (2001). The development of the concept of multiplication. *Cognitive*

Development, *16*, 763–773.

Ponte, J. P. (1998). Da formação ao desenvolvimento profissional. En APM (Ed.), *Actas do ProfMat 98* (pp. 27–44). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2009). Conditions of progress in mathematics teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *12*(5), 311–313.

Ponte, J. P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. En N. (Coord) Planas (Ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 83–98). Barcelona: Grao.

Ponte, J. P. y Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. En Á. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 461–494). Rotterdam: Sense Publishers.

Resnick, L. (1983). A developmental theory of number understanding. En H. Ginsburg (Ed.), *The deveolpment of mathematical thinking* (pp. 109–151). Orlando: Academic Press.

Ribeiro, M., González Astudillo, M. T., Fernández, C., Sosa, L., Escudero-Ávila, D., Montes, M. A., … Toscano, R. (2014). Mejorar nuestro propio conocimiento mediante el análisis de un episodio de la práctica - distintos focos de análisis. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 553–562). Salamanca: SEIEM.

Rico, L., Gómez, P. y Cañadas, M. C. (2014). Formación inicial en educación matemática de los maestros primaria en España, 1991-2010. *Revista de Educación*, *363*, 35–59.

Sherin, M. G., Linsenmeier, K. A. y van Es, E. A. (2009). Selecting video clips to promote mathematics teachers' discussion of student thinking. *Journal of Teacher Education*, *60*(3), 213–230.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4–14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1–21.

Shulman, L. S. (2000). Teacher development: Roles of domain expertise and pedagogical knowledge. *Journal of Applied Developmental Psycholgy*, *21*(1), 129–135.

Shulman, L. S. y Shulman, J. H. (2004). How and what teachers learn: A shifting perspective. *Journal of Curriculum Studies*, *36*(2), 257–271.

Sowder, J. (1992). Making sense of numbers in school mathematics. En G. Leinhardt, R. T. Putnam y R. A. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp.

1–52). Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Strauss, A. y Corbin, J. (2002). *Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada*. Medellín: Universidad de Antioquia.

Tempier, F. (2016). New perspectives for didactical engineering: An example for the development of a resource for teaching decimal number system. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *19*(2–3), 261–276.

Treffers, A., Nooteboom, A. y Goeij, E. de. (2008). Column calculation and algorithms. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children learn mathematics. A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school* (pp. 147–172). Rotterdam: Sense Publishers.

van Es, E. A. (2012). Examining the development of a teacher learning community: The case of a video club. *Teaching and Teacher Education*, *28*(2), 182–192.

Verschaffel, L. y De Corte, E. (1996). Number and arithmetic. En A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, y C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 99–137). Dodrecht: Kluwer Academic Publishers.

Villegas-Reimers, E. (2003). *Teacher professional development: An international review of the literature*. París: UNESCO.

Zapatera, A. y Callejo, M. L. (2015). Caracterización de la “mirada profesional” de los estudiantes para maestro sobre la comprensión de la generalización de patrones. En C. Fernández, M. Molina, y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 521–528). Alicante: SEIEM.

Zazkis, R. y Mamolo, A. (2016). On numbers: Concepts, operations and structure. En Á. Gutiérrez, G. C. Leder, y P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 39–71). Rotterdam: Sense Publishers.

Zehetmeier, S. y Krainer, K. (2011). Ways of promoting the sustainability of mathematics teachers’ professional development. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *43*(6–7), 875–887.