



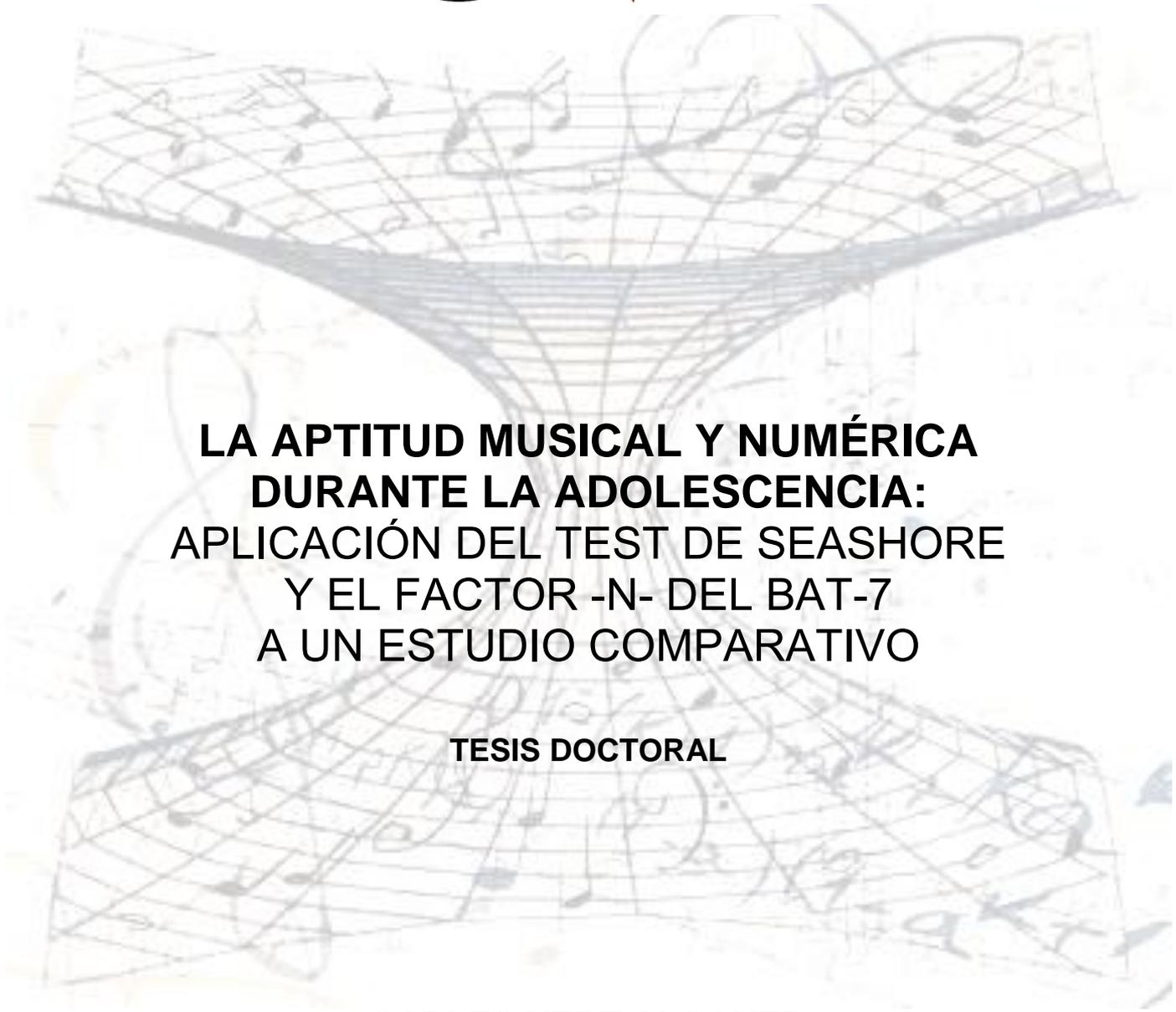
Universitat Autònoma de Barcelona

**ADVERTIMENT.** L'accés als continguts d'aquesta tesi doctoral i la seva utilització ha de respectar els drets de la persona autora. Pot ser utilitzada per a consulta o estudi personal, així com en activitats o materials d'investigació i docència en els termes establerts a l'art. 32 del Text Refós de la Llei de Propietat Intel·lectual (RDL 1/1996). Per altres utilitzacions es requereix l'autorització prèvia i expressa de la persona autora. En qualsevol cas, en la utilització dels seus continguts caldrà indicar de forma clara el nom i cognoms de la persona autora i el títol de la tesi doctoral. No s'autoritza la seva reproducció o altres formes d'explotació efectuades amb finalitats de lucre ni la seva comunicació pública des d'un lloc aliè al servei TDX. Tampoc s'autoritza la presentació del seu contingut en una finestra o marc aliè a TDX (framing). Aquesta reserva de drets afecta tant als continguts de la tesi com als seus resums i índexs.

**ADVERTENCIA.** El acceso a los contenidos de esta tesis doctoral y su utilización debe respetar los derechos de la persona autora. Puede ser utilizada para consulta o estudio personal, así como en actividades o materiales de investigación y docencia en los términos establecidos en el art. 32 del Texto Refundido de la Ley de Propiedad Intelectual (RDL 1/1996). Para otros usos se requiere la autorización previa y expresa de la persona autora. En cualquier caso, en la utilización de sus contenidos se deberá indicar de forma clara el nombre y apellidos de la persona autora y el título de la tesis doctoral. No se autoriza su reproducción u otras formas de explotación efectuadas con fines lucrativos ni su comunicación pública desde un sitio ajeno al servicio TDR. Tampoco se autoriza la presentación de su contenido en una ventana o marco ajeno a TDR (framing). Esta reserva de derechos afecta tanto al contenido de la tesis como a sus resúmenes e índices.

**WARNING.** The access to the contents of this doctoral thesis and its use must respect the rights of the author. It can be used for reference or private study, as well as research and learning activities or materials in the terms established by the 32nd article of the Spanish Consolidated Copyright Act (RDL 1/1996). Express and previous authorization of the author is required for any other uses. In any case, when using its content, full name of the author and title of the thesis must be clearly indicated. Reproduction or other forms of for profit use or public communication from outside TDX service is not allowed. Presentation of its content in a window or frame external to TDX (framing) is not authorized either. These rights affect both the content of the thesis and its abstracts and indexes.

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BARCELONA**  
Departamento de Psicología Básica, Evolutiva y de la Educación



**LA APTITUD MUSICAL Y NUMÉRICA  
DURANTE LA ADOLESCENCIA:  
APLICACIÓN DEL TEST DE SEASHORE  
Y EL FACTOR -N- DEL BAT-7  
A UN ESTUDIO COMPARATIVO**

**TESIS DOCTORAL**

**CARLES VERT ALCOVER**

Doctorado en Psicología de la Comunicación y Cambio  
Directora de Tesis: Dra. Carrasumada Serrano Pau  
Bellaterra, Barcelona. 2017

**Dra. Carrasumada Serrano Pau, Directora de la Tesis titulada:**

**LA APTITUD MUSICAL Y NUMÉRICA DURANTE LA  
ADOLESCENCIA: APLICACIÓN DEL TEST DE SEASHORE  
Y EL FACTOR -N- DEL BAT-7  
A UN ESTUDIO COMPARATIVO**

Adscrita al programa de Doctorado de Psicología de la Comunicación y Cambio, del Departamento de Psicología Básica, Evolutiva y de la Educación, doy el visto bueno, que dicha tesis cumple con la normativa vigente regulada por el Real Decreto de Doctorado 99/2011, y para que conste a todos los efectos firmo.

Dra. Carrasumada Serrano Pau  
**Directora de Tesis**

Carles Vert Alcover  
**Doctorando**



Agradezco y dedico este estudio a todas las personas que me quieren, que han participado directa o indirectamente en él. A los que me han ofrecido su tiempo de forma incondicional, y a todos los que se alegran de que esta obra pueda sonar bien afinada. Gracias



## ÍNDICE

### Prefacio. Aproximación al problema de la investigación

1	Pretensiones de la investigación.....	11
2	Antecedentes y estado actual del tema.....	13
3	Limitaciones de la investigación.....	15
4	Forma y programas informáticos utilizados en la investigación.....	16

### PRIMERA PARTE.

### LA MÚSICA Y LAS MATEMÁTICAS: UN MATRIMONIO SECRETO

#### Capítulo 1. El origen de la analogía: una perspectiva teórica

1.1	Introducción.....	21
1.2	Correlación entre la música y las matemáticas.....	21
1.2.1	La división del currículo: el quadrium y el trivium.....	21
1.2.2	Afinaciones y temperamentos.....	22
1.2.2.1	La afinación pitagórica.....	23
1.2.2.1.1	El monocordio-diapason.....	24
1.2.2.1.2	La escala pitagórica.....	25
1.2.2.1.3	El círculo de quintas.....	26
1.2.2.2	El sistema de Aristógenes.....	28
1.2.2.3	La división de Ptolomeo.....	29
1.2.2.4	La justa entonación.....	30
1.2.2.4.1	La música práctica de Ramos de Pareja.....	32
1.2.2.4.2	Las aportaciones de Zarlino.....	34
1.2.2.4.3	El sistema perfecto de Salinas.....	36
1.2.2.5	Temperamentos mesotónicos.....	38
1.2.2.6	El temperamento igual.....	39
1.2.2.7	Temperamentos irregulares.....	40
1.2.3	La armonía de las esferas.....	42

#### Capítulo 2. De la teoría a la práctica: procedimientos matemáticos utilizados en la composición musical

2.1	Introducción.....	45
2.2	Las matemáticas en la música de J. S. Bach.....	45
2.3	El juego de dados de W. A. Mozart.....	49
2.4	La sucesión de Fibonacci y el número áureo.....	50
2.5	El dodecafonismo.....	54
2.5.1	Arnold Schonberg.....	56
2.5.2	Alban Berg.....	56
2.5.3	Anton Webern.....	57
2.6	El serialismo integral.....	59
2.6.1	Olivier Messiaen.....	59
2.6.2	Pierre Boulez.....	60

2.7 La música estocástica.....	61
2.7.1 Iannis Xenakis.....	62
2.8 El uso de las nuevas tecnologías en la actualidad.....	64

### Capítulo 3. Desde el prisma de la psicología: una mirada científica

3.1 Introducción.....	79
3.2 La aptitud musical.....	79
3.2.1 Adquirida en el periodo de operaciones concretas.....	82
3.2.2 Que se desarrolla durante el periodo de operaciones formales.....	88
3.2.3 Los tests que la miden.....	89
3.3 La aptitud numérica.....	92
3.3.1 Adquirida en el periodo de operaciones concretas.....	93
3.3.2 Que se desarrolla durante el periodo de operaciones formales.....	96
3.3.3 Los tests que la miden.....	100
3.4 La influencia de la música y las matemáticas en el desarrollo cognitivo.....	104
3.4.1 Desarrollo de habilidades cognitivas.....	104
3.4.2 Metodologías educativas y formación del profesorado.....	113
3.4.3 La correlación músico-matemática en el ámbito educativo.....	123
3.5 Neurociencia educativa.....	129
3.5.1 Aplicada a la aptitud musical.....	130
3.5.2 Aplicada a la aptitud numérica.....	134

## SEGUNDA PARTE: ESTUDIO EMPÍRICO

### Capítulo 4. El diseño y los participantes de la investigación

4.1 Introducción.....	143
4.2 Objetivos de la investigación.....	143
4.3 Metodología de la investigación.....	144
4.4 Teorías educativas implicadas en el proceso de investigación.....	145
4.5 Hipótesis planteadas.....	147
4.6 Las variables, el diseño y la validez de la investigación.....	147
4.6.1 Las variables por su papel en una función o modelo.....	148
4.6.2 Las variables asociadas a las escales de medida.....	149
4.6.3 El diseño de la investigación.....	151
4.6.4 La validez interna y externa de la investigación.....	152
4.7 Selección y descripción de los participantes.....	153
4.7.1 Distribución de los participantes según el género.....	154
4.7.2 Distribución de los participantes según el nivel educativo.....	154

### Capítulo 5. El desarrollo de la investigación

5.1 Introducción.....	157
5.2 Procedimiento utilizado en la aplicación de las pruebas.....	157
5.3 Técnicas e instrumentos de medida.....	158

5.3.1 Test de aptitud musical de Seashore.....	158
5.3.1.1 Justificación de la elección.....	159
5.3.1.2 Aplicabilidad.....	159
5.3.1.3 Descripción de las pruebas.....	159
5.3.1.3.1 Altura.....	159
5.3.1.3.2 Intensidad.....	160
5.3.1.3.3 Ritmo.....	161
5.3.1.3.4 Tiempo.....	161
5.3.1.3.5 Timbre.....	162
5.3.1.3.6 Memoria tonal.....	162
5.3.1.4 Administración de la prueba.....	163
5.3.1.4.1 Condiciones de la prueba.....	163
5.3.1.4.2 Material de la prueba.....	164
5.3.1.4.3 Tiempo de aplicación.....	164
5.3.1.4.4 Aplicación de la prueba.....	164
5.3.1.5 Justificación estadística.....	165
5.3.1.5.1 Fiabilidad.....	165
5.3.1.5.2 Validez.....	166
5.3.1.5.3 Tipificación española.....	167
5.3.1.6 Su relación con la formación musical.....	169
5.3.2 Test de aptitud numérica del BAT-7.....	169
5.3.2.1 Justificación de la elección.....	170
5.3.2.2 Descripción del test.....	171
5.3.2.3 Aspectos a considerar antes y durante.....	171
5.3.2.4 Instrucciones específicas del test.....	174
5.3.2.5 Justificación estadística.....	175
5.3.2.5.1 Fiabilidad.....	176
5.3.2.5.2 Validez.....	177
5.3.2.6 Cuestiones éticas y deontológicas.....	178
5.3.2.7 Su relación con el rendimiento académico.....	179

## Capítulo 6. Exposición, análisis y discusión de los resultados

6.1 Introducción.....	181
6.2 Exposición de los resultados del test de aptitud musical de Seashore.....	181
6.2.1 Resultados globales por género y nivel educativo.....	182
6.2.2 Resultados específicos por género y nivel educativo.....	184
6.2.2.1 Test de altura.....	184
6.2.2.2 Test de intensidad.....	185
6.2.2.3 Test de ritmo.....	187
6.2.2.4 Test de tiempo.....	188
6.2.2.5 Test de timbre.....	190
6.2.2.6 Test de memoria tonal.....	191
6.3 Exposición de los resultados del test de aptitud numérica del BAT-7.....	193
6.3.1 Resultados por género y nivel educativo.....	193
6.4 Análisis bivariable entre el test de aptitud musical y numérica.....	195
6.4.1 Según la teoría de los específicos.....	195
6.4.1.1 La altura y la aptitud numérica.....	195
6.4.1.2 La intensidad y la aptitud numérica.....	197

6.4.1.3 El ritmo y la aptitud numérica.....	198
6.4.1.4 El tiempo y la aptitud numérica.....	199
6.4.1.5 El timbre y la aptitud numérica.....	200
6.4.1.6 La memoria tonal y la aptitud numérica.....	201
6.4.2 Según la teoría ómnibus.....	203
6.4.2.1 Análisis por género y nivel educativo.....	204
6.4.2.2 Análisis por grupos (bajo, medio y alto).....	214
6.5 Análisis discriminante.....	218
6.5.1 Información descriptiva.....	219
6.5.2 Resumen de las funciones canónicas discriminantes.....	223
6.5.3 Resumen de la clasificación.....	225
6.6 Contraste de hipótesis.....	228

## Capítulo 7. Conclusiones y consideraciones finales

7.1 Conclusiones.....	230
7.2 Consideraciones y sugerencias para futuras investigaciones.....	231

## Referencias bibliográficas

**Anexo I-a. Hoja de respuestas del Test de Seashore**

**Anexo I-b. Baremos de PD/Centiles del Test de Seashore**

**Anexo II-a. Test de aptitud numérica del BAT-7 Nivel E**

**Anexo II-b. Baremos de PD/Centiles del BAT-7 Nivel E**

**Anexo III-a. Test de aptitud numérica del BAT-7 Nivel M**

**Anexo III-b. Baremos de PD/Centiles del BAT-7 Nivel M**

**Anexo IV. Situación de aprendizaje**



# APROXIMACIÓN AL PROBLEMA DE LA INVESTIGACIÓN

Prefacio



## 1 Pretensiones de la investigación

Con la implantación de la LOGSE en 1990, la Música empezó a instaurarse en el panorama educativo; se necesitaron miles de profesores especialistas para que esto fuera posible, se dotaron las aulas con todos los instrumentos necesarios y empezó a formarse una generación con conocimientos musicales que perdura hasta nuestros días.

Pero esta dinámica está cambiando; en la siguiente tabla podemos observar una comparación de los bloques de contenidos y la distribución horaria de la asignatura *Música* según los decretos que establecen la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Canarias (donde están escolarizados los participantes de la investigación), en la LOE (Decreto 127/2007, de 24 de mayo), y en la LOMCE (Decreto 83/2016, de 4 de julio).

	<b>LOE 2006</b>	<b>LOMCE 2013</b>
<b>Bloques de Contenidos 2º ESO</b>	1. Escucha 2. Interpretación 3. Creación 4. Contexto musicales	1. Interpretación y creación 2. Escucha 3. Contextos musicales y culturales 4. Música y tecnologías
<b>Bloques de Contenidos 3º ESO</b>	1. Escucha 2. Interpretación 3. Creación 4. Contextos musicales	1. Interpretación y creación 2. Escucha 3. Contextos musicales y culturales 4. Música y tecnologías
<b>Bloques de Contenidos 4º ESO</b>	1. Audición y referentes musicales 2. La práctica musical 3. Música y tecnologías	1. Interpretación y creación 2. Escucha 3. Contextos musicales y culturales 4. Música y tecnologías
<b>Distribución horaria (semanal)</b>	<b>Obligatoria</b> 2ºESO 3 horas <b>Optativa</b> 3ºESO 2 horas <b>Optativa</b> 4ºESO 3 horas	<b>Obligatoria</b> 2ºESO 2 horas <b>Optativa</b> 3ºESO 2 horas <b>Optativa</b> 4ºESO 2 horas

**Tabla N° 1.** Comparación de la asignatura música en las últimas leyes educativas

Si retrocedemos a la Ley General de Educación de 1970, en la que únicamente se impartía 1 hora de Música de carácter obligatorio en 1º de BUP, (el equivalente a 3º ESO), impartida en muchas ocasiones por profesores de otras materias (en mi caso particular me la impartió la profesora de catalán), el avance fue muy significativo. Aunque en los últimos años, concretamente en la última ley educativa (LOMCE, 2013), la educación musical se ha visto empeorada respecto a la dinámica proyectada en las anteriores legislaciones.

Podemos observar que tanto en la LOE, como en la LOMCE, única y exclusivamente se imparte la asignatura en 2.º, 3.º y 4.º de ESO, y nos preguntamos ¿qué ocurre en 1.º de ESO?, pues bien, esta pregunta, la podremos responder empíricamente explicada en el apartado *6.4.2.1 Análisis por género y nivel educativo* del Capítulo 6, así que para no adelantar conclusiones vamos a seguir con lo que ocurre en los niveles educativos que sí se imparte la asignatura de Música. Observamos que más o menos los bloques de contenidos son muy parecidos en una Ley y en otra (mi experiencia docente me lleva a la conclusión de que son exactamente iguales en la práctica), por lo tanto debería haber la misma carga horaria, pero podemos observar claramente que tanto en 2.º, como en 4.º de ESO se ha reducido de 3 a 2 horas lectivas semanales (con los mismos contenidos, no lo olvidemos).

No suficiente con esto, hacemos hincapié en la obligatoriedad u optatividad de la materia, observamos que únicamente en 2.º de ESO la asignatura es obligatoria, es decir, que un alumno puede cursar toda la Educación Secundaria Obligatoria recibiendo solamente educación musical en un curso, durante 2 horas a la semana en el actual sistema educativo.

No vemos la necesidad de aludir explícitamente en este apartado a los cientos de miles de artículos científicos (de los cuales muchos citaremos en el marco teórico de esta investigación), que hablan de los beneficios para todo tipo de desarrollo: psicomotor, cognitivo, etc., que la educación musical ejerce en el niño, y después en el adolescente; las pretensiones de esta investigación son demostrarlos una vez más mediante una investigación empírica.

## 2 Antecedentes y estado actual del tema

A principios del siglo XX, el interés de la Psicología por el mundo de la Música fue en aumento, y a raíz de éste, en Estados Unidos e Inglaterra principalmente, empezaron a crearse instrumentos psicométricos destinados a evaluar el talento musical, unos sin conocimientos previos y otros evaluando tareas realizadas con anterioridad.

Seashore fue pionero en este tipo de investigaciones cuando en 1919 empezó a realizar pruebas de sus tests de aptitudes musicales; también aportaron su trabajo en este tema Bentley, Wing, Drake, etc. con sus respectivos tests. No se hicieron esperar las numerosas investigaciones que utilizaron los distintos tests mencionados. Pero no fue hasta 1982 cuando el Doctor del Río llevó a cabo una importante investigación utilizando el test de Seashore, que administró a 4.664 escolares y 568 adultos, realizando al mismo tiempo la tipificación española del test para TEA Ediciones.

A raíz de la investigación del Doctor del Río, se realizaron dos grandes investigaciones en España (Tesis doctorales) utilizando el test de Seashore: la realizada por el Doctor Martínez en el año 1992, que administró este test a más de 3.000 escolares y adultos de Asturias, y la realizada por el Doctor Nebreda en 1999, dirigida por el propio del Río, en la que participaron 873 adolescentes de la Comunidad de Madrid, las cuales comentaremos posteriormente. También hay que destacar la realizada por Vera en 1985 utilizando el test de Bentley.

A partir del año 2000, se han seguido realizando tesis doctorales en España relacionadas con el tema, pero ya no tienen como objetivo principal las aptitudes musicales, sino que en ellas se utilizan los tests, para evaluar alguna mejora musical en el niño o en el adolescente: en 2003, la Doctora Guerra realiza una investigación con grupos control y grupos experimentales utilizando el test de Bentley como evaluación inicial y evaluación sumativa de un programa específico de actividades para mejorar la habilidad musical en niños de educación primaria, también cabe destacar la investigación realizada por el Doctor Vitoria en 2005, que trabajó con alumnos con necesidades educativas

especiales; la Doctora Martín en 2006, en la que analiza la relación de causa efecto entre una intervención en atención y la mejora de las aptitudes musicales medidas con el test de Seashore. En 2009, Ramos realiza una investigación con 350 sujetos, para conocer la relación existente entre la aptitud musical y aspectos sobre la personalidad y la inteligencia emocional, en 2013, Vert realiza una investigación con 1.818 adolescentes en la que investiga la relación entre las aptitudes musicales y los hábitos musicales en alumnos de 2.º, 3.º y 4.º de ESO de 15 centros educativos, y por último la investigación del Doctor Lázaro que, en 2015, analiza la relación existente entre las aptitudes musicales, intelectuales, los rasgos de la personalidad y la identificación del talento en escolares de diez a doce años en su tesis doctoral.

Respecto al ámbito numérico, hemos realizado un barrido para conocer las tesis doctorales escritas sobre aptitudes numéricas; al no encontrar ningún estudio explícitamente sobre este tema, realizamos otra búsqueda con tesis relacionadas con la competencia matemática, con alguna referencia a la educación secundaria, y encontramos las siguientes, que ordenamos cronológicamente.

La Doctora Marcos en 2008 analizó la eficacia de un entorno virtual de aprendizaje (EVA), en relación al desarrollo de competencias matemáticas vinculadas con el aprendizaje de la Geometría y con la comunicación en Matemáticas, observando beneficios positivos tanto en relación al aprendizaje de la Geometría como respecto al desarrollo de su Competencia Comunicativa. En 2010, Barbarán diseñó una prueba validada por expertos denominada PRUCOMAT para estudiar si el programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas desarrollaba la competencia matemática de alumnos de 1º y 2º de Educación Secundaria Obligatoria.

Por otro lado, en 2011 Zakaryan elaboró y propuso un Modelo OTL-CM, adaptado a la realidad observada, que trata de describir, explicar y predecir los fenómenos de la enseñanza-aprendizaje, en términos de que ciertas OTL (que ofrecen profesores en sus aulas) puedan favorecer el desarrollo de ciertas CM.

La investigación desarrollada por García en 2014 describe el proceso llevado a cabo en la elaboración y validación de la *Batería de Evaluación de la Competencia Matemática* (BECOMA). Mientras que la conclusión principal que pudo extraer Cabeza en 2015 de sus estudios, fue que los estudiantes con DAM y TDAH+DAM presentan inicialmente un perfil en la competencia matemática claramente inferior al de los estudiantes sin dificultades de aprendizaje; no obstante, la intervención con una herramienta informatizada (RDI) desarrollada para la mejora de la competencia y resolución de problemas, resulta efectiva tanto en estudiantes sin dificultades como en estudiantes con TDAH y, sobre todo, en estudiantes con DAM.

El estudio más reciente es el de Pereira en 2016, que analizó la influencia que la Inteligencia Verbal *versus* no-Verbal ejerce en la competencia matemática, medida a través de tareas de cálculo y resolución de problemas matemáticos, con alumnos de 4º E.P., 6º E.P. y 2º de ESO.

### **3 Limitaciones de la investigación**

En este apartado, nos vemos obligados a recordar cómo fue el proceso de recogida de datos, las dificultades encontradas en éste, que muchas veces se han sumado a las limitaciones implícitas de una investigación, que ha demandado un trabajo de campo de estas características.

Siempre se procuró realizar las pruebas en las primeras horas de la mañana; la experiencia docente nos aconseja ofrecer en las últimas horas lectivas del día actividades con menos carga cognitiva, ya sea de atención o de percepción, debido al progresivo cansancio físico e intelectual acumulado por los alumnos a lo largo de la jornada lectiva; aun así, no hemos podido evitar, aunque en contadas ocasiones, realizar las pruebas en las horas lectivas situadas justo después del recreo.

Antes de administrar el test de aptitud musical a los alumnos, nos hemos interesado por las condiciones de insonoridad del aula, así como por el equipo de audio que íbamos a utilizar en la prueba, reproduciendo las pruebas del test

de aptitud musical de Seashore y situándonos por todos los rincones del aula para cerciorarnos de que no existían problemas para su correcta realización (todas las pruebas fueron aplicadas por el investigador en el aula de música del IES participante en la investigación). De igual forma hemos cuidado el procedimiento para la ejecución del test de aptitud numérica del BAT-7, interesándonos y preocupándonos de que la aplicación de la prueba se realizara en condiciones óptimas para todos sus participantes.

La experiencia como docente en la Educación Secundaria Obligatoria del investigador, le recuerda que va a trabajar con el mismo tipo de alumnos con los que se encuentra a diario en sus clases, es decir, que va a trabajar no sólo con alumnos con dificultades de aprendizaje (a los cuales debía explicarles individualmente las pruebas), sino con alumnos sensiblemente desmotivados, y con poco interés en realizar correctamente las pruebas; algunos de estos casos han sido eliminados de la muestra por dejar las pruebas incompletas.

#### **4 Forma y programas informáticos utilizados en la investigación**

Para la redacción de nuestra investigación hemos utilizado la siguiente combinación de fuentes y párrafos:

- **Fuente:** Arial
- **Tamaño:** 12
- **Interlineado:** 1'5
- **Alineación:** Justificada
- **Sangría especial:** Primera línea en la redacción
- **Sangría especial:** Francesa en las referencias bibliográficas

Para las tablas, figuras, gráficos y mapas conceptuales (y sus pies) hemos utilizado la siguiente combinación:

- **Fuente:** Arial
- **Tamaño:** 11

- **Interlineado:** Sencillo
- **Alineación:** Centrada
- **Sangría especial:** Ninguna

Así como seguir el *Manual of the American Psychological Association* en su 6ª edición para las citas de autores y sus referencias bibliográficas.

Para el tratamiento informático hemos utilizado los siguientes programas:

- **Microsoft Word 2016:** Como procesador de texto
- **Microsoft Excel 2016:** Como hoja de cálculo
- **Microsoft Access 2016:** Como base de datos
- **Spss 17.0:** Para el tratamiento estadístico de los datos





# LA MÚSICA Y LAS MATEMÁTICAS: UN MATRIMONIO SECRETO

Primera Parte

W. G. Leibniz (filósofo y matemático alemán), en una carta a Goldbach (matemático prusiano), *Epistolae ad diversos* (1712), expone su célebre definición de la música como “*Exercitium arithmeticae occultum nescientis se numerare animi*”.

**Ejercicio matemático inconsciente en el que la mente  
no sabe que está calculando.**

## Capítulo 1. El origen de la analogía: una perspectiva teórica

### 1.1 Introducción

Se trata la relación Música y Matemáticas desde un punto de vista teórico; se expone la división del currículo que se le atribuye a Pitágoras y su Hermandad. Se realiza una extensa exposición entre las afinaciones y los temperamentos (la afinación pitagórica, el sistema de Aristógenes, la división de Ptolomeo, los temperamentos mesotónicos, irregulares, etc.), para terminar comentando brevemente las características principales relacionadas con la teoría de la armonía de las esferas.

### 1.2 Correlación entre la música y las matemáticas

Entramos en la esencia más primaria de esta analogía, y basamos el siguiente apartado haciendo una relación de muchas de las afinaciones y temperamentos utilizados desde el origen de la música hasta Johann Sebastian Bach; empezamos con la división pitagórica del currículo y la inclusión de la Música dentro del quadrivium.

#### 1.2.1 La división del currículo: el quadrivium y el trivium

De entre lo más destacado que nos dejó Pitágoras y su Hermandad, fue la división del currículo en Quadrivium (Aritmética, Música, Geometría y Astronomía) y Trivium (Gramática, Retórica y Dialéctica), esta división del currículo se mantuvo durante bien entrada la Edad Media; la música pertenecía a un subconjunto de las Matemáticas.

Esta división, hace referencia en nuestro sistema educativo a las Ciencias (Quadrivium) y las Artes y Humanidades (Trivium); la cual no está exenta de discusión, la consideración de la música como un arte y no una ciencia, como en épocas antiguas.

Quadrivium			
Cantidad Hace referencia a lo discreto		Magnitud Hace referencia a lo continuo	
Aritmética	Música	Geometría	Astronomía
Números en reposo	Números en movimiento	Medidas en reposo	Medidas en movimiento

**Tabla Nº 2.** *Quadrivium*

En nuestra opinión la música tiene de ciencia y de arte; de ciencia la parte de la teoría en toda su amplitud, y de arte la parte de la interpretación, como bien explica Ramos de Pareja (1440-1522) desde su cátedra de música en la Universidad de Salamanca, o en su tratado *De música práctica*. Otros autores que también opinan al respecto como Pietro Cerone (1566-1625) en *El melopeo y maestro: tractado de música theorica y practica*, dejan clara la distinción entre la parte científica y artística de la música.

### 1.2.2 Afinaciones y temperamentos

En ocasiones podemos confundir la afinación con el temperamento, por este motivo vemos la necesidad de definir los términos; Goldáraz (1992) en su libro *Afinación y temperamento en la música occidental*, (que citaremos con frecuencia en este apartado), los define de la siguiente manera:

“Hablamos de **afinación** cuando el objetivo del sistema es conseguir consonancias justas. En este sentido van la afinación pitagórica, con sus quintas justas, y la afinación justa, un intento de combinar quintas y terceras justas. El **temperamento** consiste más bien en un compromiso entre consonancias justas incomparables, en un ajuste entre consonancias con el que, a costa de desafinar ciertos intervalos, el sistema adquiera determinadas ventajas.” (p. 13)

Prosigue comentando las diversas divisiones de *la octava* que se realizaron en la antigüedad y resaltando las tres que tuvieron más importancia y notabilidad en la época, que fueron:

1. La afinación pitagórica
2. El sistema de Aristógenes
3. La división diatono-sintónica de Ptolomeo

Siendo únicamente la pitagórica la que se dilató en el tiempo debido a la monodia utilizada en el Canto Gregoriano y a los escritos de Boecio, el cual la explicaba con todo lujo de detalles (como veremos en los siguientes apartados).

### **1.2.2.1 La afinación pitagórica**

En la antigua Grecia, Pitágoras de Samos, en griego antiguo Πυθαγόρας (572-497 a.C.), aunque no existe unanimidad entre la fecha exacta de su nacimiento y su muerte, sabemos que fue considerado como el primer matemático puro, en ocasiones no disponemos de fuentes fidedignas para afirmar ciertos conocimientos, puesto que no se ha conservado ningún escrito oficial de Pitágoras, y en muchas ocasiones, sus discípulos justificaban sus doctrinas citando a su maestro constantemente, de ahí la dificultad en ocasiones de delimitar la mano de Pitágoras o de los pitagóricos.

Podemos distinguir tres etapas en la vida de Pitágoras, según Flores (2008); una primera etapa la situamos en el mundo griego, en la que conoció a un anciano ya, Thales de Mileto, el cual, entre otras cosas, le aconsejó viajar a Egipto para profundizar sus conocimientos. Los viajes a Babilonia y a Egipto forman su segunda etapa, en ésta asimiló tanto conocimientos matemáticos, como astronómicos, y las costumbres de los sacerdotes de los Templos egipcios, los cuales utilizó posteriormente en su Hermandad.

Después de una breve estancia en la isla de Samos (entre la segunda y la tercera etapa), en lo que más tarde se llamó la Magna Grecia, aprendió

conocimientos aritméticos y musicales, para después volver a Crotona, donde fundó su escuela y gozó de gran prestigio y poder.

### 1.2.2.1.1 El monocordio-diapason

Diógenes Laercio (215-250 d. C.), también le atribuye la invención del monocordio-diapason, de múltiples cuerdas, el cual utilizó para verificar la relación entre números, pesos y sonidos.



**Figura Nº 11.** Jubal y Pitágoras descubriendo las razones de la consonancia: recuadro inferior izquierdo, Pitágoras con su monocordio-diapason

También descubrió las relaciones aritméticas de la escala musical, es decir, los intervalos musicales regulares (la consonancia), basándose entre otras cosas, en que la frecuencia del sonido es inversamente proporcional a la longitud de la cuerda.

### 1.2.2.1.2 La escala pitagórica

Una anécdota que conocemos gracias a los escritos de Boecio (480-524 d. C.) y que rescatamos en Britos (2015), nos hace admirar la persistencia y la capacidad de observación de este genio.

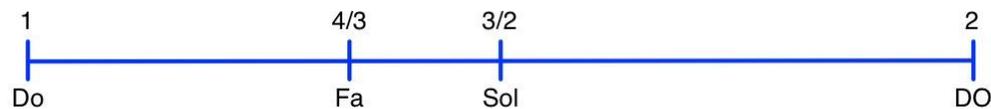
Pitágoras obsesionado por explicar matemáticamente los intervalos, al pasar por una herrería quedó sorprendido por el sonido rítmico del golpe de los martillos en el yunque. Entró, observó y experimentó utilizando cinco martillos. Comprobó que uno, que rompía la escala perfecta de sonidos, tenía un peso sin relación numérica con el resto, por lo que lo eliminó. Con los restantes, obtuvo las siguientes conclusiones: sus pesos estaban en la proporción 12, 9, 8 y 6; el mayor (12), de peso doble del más pequeño (6), producía un sonido (una octava) más bajo que el menor. El peso de los otros dos martillos (9 y 8) correspondía a la media aritmética y armónica respectivamente de los de peso 12 y 6, por lo que dedujo que darían las otras notas fijas de la escala. (p. 90 y ss)



**Figura Nº 2<sup>2</sup>.** Jubal cincelando notas en dos columnas, dos hombres en una herrería, y Pitágoras detrás de ellos con dos pesos

Así se dio cuenta de que si cogía dos cuerdas de distinta longitud, algunas veces sonaban bien, y si variaba la longitud de alguna de ellas sonaban mal, de esta forma descubrió las consonancias y las disonancias (aspectos que trataremos con más profundidad en el siguiente capítulo).

Al mismo tiempo, descubrió que las mejores consonancias se daban cuando una cuerda tenía el doble de longitud que la otra (relación 2/1), y cuando las relaciones de longitudes eran 3/2 y 4/3, es decir, utilizando siempre números naturales, como podemos apreciar en la siguiente figura.



**Figura Nº 3<sup>3</sup>. Escala pitagórica**

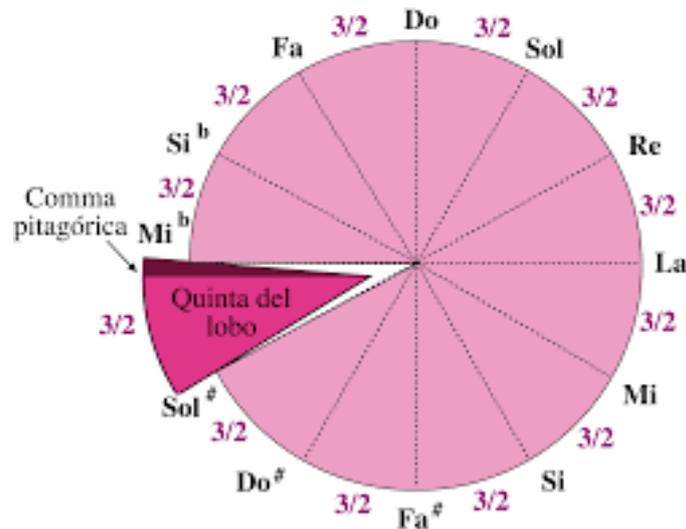
Llamando octava o *diapason* a la relación 2/1, quinta o *diapente* a la 3/2 y cuarta o *diatessaron* a la relación 4/3; nomenclaturas que seguimos utilizando en la actualidad en la música tonal occidental.

Noll (2014) ofrece un interesante estudio sobre los enfoques algebraicos conocidos en el estudio de la escala diatónica y el círculo de quintas, que podremos ver resumido en el Capítulo 3.

### 1.2.2.1.3 El círculo de quintas

Es la relación que existe entre los doce sonidos de la escala cromática, con sus relativas tonalidades mayores o menores y armaduras. Para Lehmans (2014), el círculo de quintas sirve para facilitar la memorización de las escalas, y relaciona lo que anteriormente Pitágoras descubrió con su Monocordio-diapason; si nos fijamos bien, el Do está al lado de los grados más importantes y consonantes de la armonía, a la derecha el Sol (V) y a la izquierda el Fa (IV). Esto sucederá en todos los grados correspondientes; en todos los casos a la

derecha del tono se hallará la Dominante (V) y a su izquierda la Subdominante (IV), como podemos apreciar en la siguiente figura.



**Figura N° 4<sup>4</sup>.** Círculo de quintas pitagórico (quinta del lobo y comma pitagórica)

Pero el círculo de quintas pitagórico no era perfecto, porque estaba formado por doce quintas, once de las cuales eran puras según el sistema pitagórico ( $3/2$ ), y una doceava que no lo era, que es la denominada quinta del lobo.

La diferencia entre la quinta del lobo pitagórica y las quintas puras pitagóricas, es la misma que existe entre doce quintas puras y siete octavas; a esta diferencia se le llama *comma pitagórica*, y Liern (2009) lo ejemplifica de forma matemática de la siguiente manera:

$$12 \text{ quintas pitagóricas es igual a } \left(\frac{3}{2}\right)^{12} = 129,7463$$

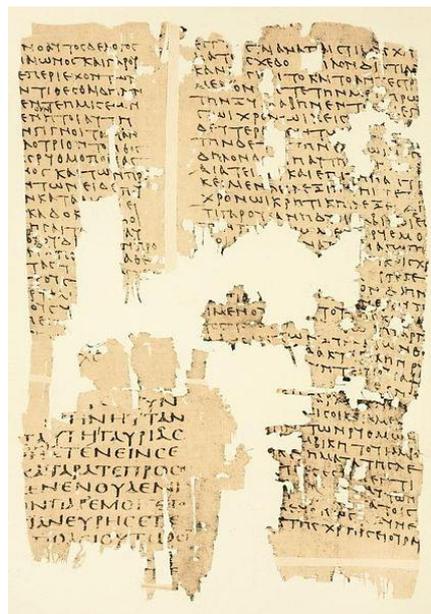
$$7 \text{ octavas pitagóricas es igual a } 2^7 = 128$$

Utilizando la regla para restar intervalos<sup>5</sup>, la diferencia entre estos dos valores, **1,0136** es la llamada *comma pitagórica*, y por minúsculo que parezca este desajuste, ha sido uno de los grandes temas de investigación por los musicólogos a lo largo de más de veinte siglos, debido a que este desajuste se

produce en una nota u otra, dependiendo de la nota por la que se empiece, concluye Liern (2009).

### 1.2.2.2 El sistema de Aristógenes

Αριστόξενος (354-300 a.C.), conocido en castellano como Aristógenes, filósofo, músico y teórico de la música griego, nació en el sur de Italia, la actual Tarento, educado por Spintaro, su padre, que a su vez fue discípulo de Sócrates, escribió 453 escritos siguiendo el estilo de Aristóteles y la escuela peripatética, de los que solo han llegado hasta nuestros días algunos fragmentos de los *Elementos de rítmica* y los dos libros de los *Elementos de armonía*.



**Figura Nº 5.** Fragmento del tratado de Aristógenes, *Rythmica Stoicheia*

El sistema de Aristógenes es importante porque se aleja del encadenamiento del círculo de quintas de Pitágoras, y se basa única y exclusivamente en la serie armónica y en la concepción del espacio de alturas.

Para Fubini (1988), Aristógenes fue capaz de desviar el centro de interés de los aspectos intelectuales de la música, hasta los aspectos más sensibles

(recordemos la división del currículo), es decir, el estudio de la música no solo tiene un carácter teórico (Pitágoras), sino también práctico.

Aunque la novedad más sensible que aporta su sistema de afinación se concentra en dividir los intervalos (tetracordo) en partes iguales (30), a diferencia de lo que realizaban los pitagóricos con su método; para ello calcula dicha división con números enteros (anticipándose al temperamento igual que posteriormente estudiaremos); esta forma de proceder fue olvidada en Europa después de las invasiones germánicas, y ya en el Renacimiento, Zarlino la retoma y la expone de forma magistral en su tratado de 1558 *Instituciones Armónicas* (que en el apartado 1.2.2.4.2 analizaremos con detenimiento), por este motivo el sistema posteriori, toma el nombre de Aristógenes-Zarlino.

### 1.2.2.3 La división de Ptolomeo

Claudius Ptolomeus, Claudio Ptolomeo en castellano (Ptolemaida, Tebaida, 100-170 d.C. Cánope), vivió y trabajó en Egipto (cuando era una provincia del Imperio Romano), se cree que en la famosa Biblioteca de Alejandría, escribió sobre astronomía, óptica, geografía y música.

Ptolomeo estaba en desacuerdo con la división de Aristógenes y retomó la afinación pitagórica. Cuando escribe su *Harmónica*, conocía toda la historia y los tratados anteriores a él; también tenía a su favor que la teoría de la música helena ya llevaba un desarrollo previo de cerca de seis siglos. Claudio la retoma y es favorable a la *armonía de las esferas*, porque para él, el orden subyacente a los intervalos es el mismo que subyace en los cielos; teoría compartida por los Pitagóricos, Platón, Plinio o Boecio y criticada por Aristóteles (como veremos en el apartado 1.2.3).

Según Redondo (2002), la doctrina musical de Ptolomeo tiene que ser considerada de interés científico, al ser su tratado una nueva perspectiva a problemas antiguos, y destaca dos rasgos de su teoría; en primer lugar, el uso sincrético de las fuentes, valiéndose de muchos autores conocidos en la

tratadística (Platón, Aristóteles, Dídimo, Aristógenes, etc.), y en segundo lugar la posición ecléctica referente al planteamiento epistemológico: la percepción y la razón.

Mediante la percepción, el estudioso de la música puede aprehender los intervalos y las relaciones sonoras fundamentales; mediante la razón, obtendrá resultados exactos en la medición de intervalos para los que, debido a su tamaño mínimo, la percepción no basta. (...) desde mucho antes de la época de nuestro autor la teoría musical estaba dividida en dos facciones: pitagóricos y aristoxénicos. Ptolomeo acepta la confianza de éstos en la capacidad de la percepción, pero su carácter matemático le lleva a aceptar las líneas fundamentales de los pitagóricos: un trasfondo numérico para toda la realidad, incluidos los intervalos musicales –expresados entonces en armónicos– y las estructuras más complejas. Con ello se pretende alcanzar un objetivo propio de más largo alcance que lo habitual en la tratadística musical: demostrar la coherencia y analogía entre el modelo matemático –las hipótesis– y los fenómenos naturales (entre ellos los musicales, pero también los celestes). (p. 75 y 76)

Las divisiones tretacordiales en dos tonos de tamaño diferente (mayor,  $9/8$  y menor  $10/9$ ) de Ptolomeo se asemejan mucho a la justa entonación de intervalos puros, como vamos a ver a continuación.

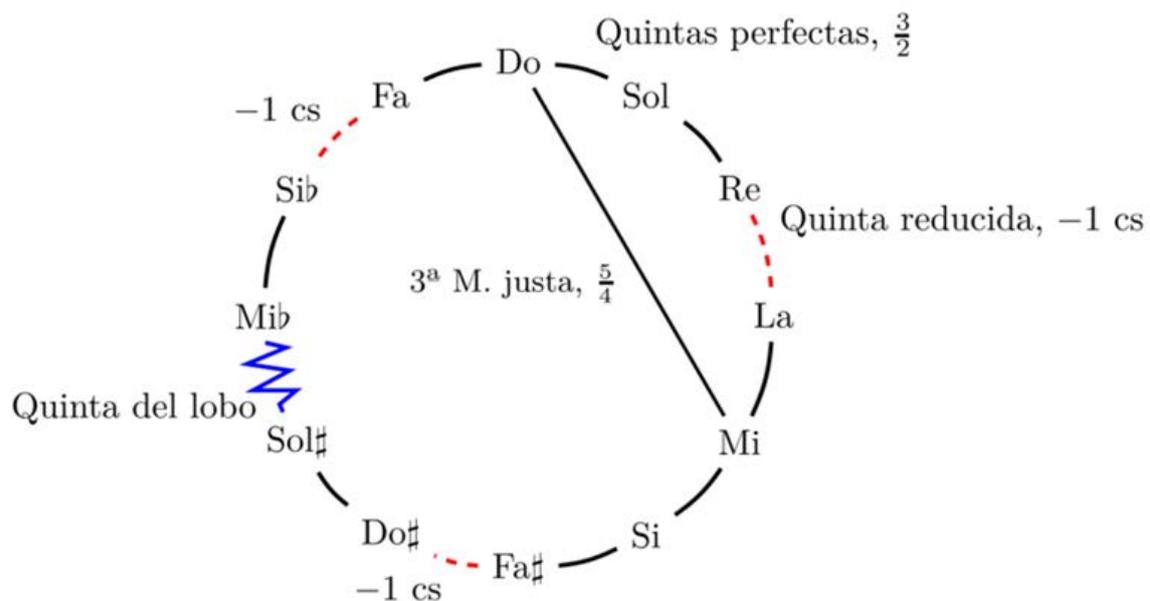
#### 1.2.2.4 La justa entonación

Nos referimos como justa entonación a la afinación de los instrumentos musicales que sigue el criterio de adoptar en lo posible los intervalos de la serie armónica, para Goldáraz (1992), “la afinación justa o natural tiene por objeto afinar las terceras puras (tercera mayor  $5/4$ , tercera menor  $6/5$ ). Ambas forman

las tríadas acórdicas mediante las divisiones armónica (triada mayor) y aritmética (triada menor).” (p. 33)

Dicho de otro de modo, la justa entonación busca producir intervalos armónicos sin batimientos, es decir, si nosotros producimos el  $la^3$  con el diapason a 440hz, y al mismo tiempo un instrumentista toca el mismo  $la$  pero no está afinado a 440hz, sino a 435hz, esta diferencia de 5hz producirá que la vibración de la onda no sea igual, por lo tanto: un batimiento.

Esto nos crea nuevos problemas en la afinación, el círculo de quintas de Ptolomeo lo explica de la siguiente manera: si Pitágoras construía la tercera mayor sumando cuatro quintas justas (ditono pitagórico)  $\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}$ ; siguiendo la justa entonación debe formarse con dos octavas, más una tercera mayor, es decir,  $2^2 \times \frac{5}{4} = \frac{20}{4}$ , si ahora realizamos la siguiente división  $\frac{81}{16} : \frac{20}{4} = \frac{324}{320} = \frac{81}{80}$ , a esta pequeña diferencia entre la tercera mayor justa y el ditono pitagórico la llamamos *comma sintónica*.



**Figura Nº 6º.** Círculo de quintas correspondiente a la diatónico-sintónica de Ptolomeo

### 1.2.2.4.1 La música práctica de Ramos de Pareja

Bartolomé Ramos de Pareja (1440-1522), nació en Baeza (Jaén), teórico musical español y compositor, fue Catedrático en la Universidad de Salamanca, residió en Bolonia y Roma, ciudad en la última donde falleció. Se han perdido todos sus tratados, y solo ha llegado hasta nuestros días *De música práctica*. Se le reconoce como el primer autor que expuso en su tratado la *afinación justa*, al expandir el sistema de afinación pitagórico (solo consonancia en las cuartas, quintas y octavas), y añadir nuevos intervallos consonantes, la tercera Mayor  $5/4$ , la tercera menor  $6/5$ , la sexta Mayor  $5/3$ , y la sexta menor  $8/5$ .

Todos estos ensayos tuvieron lugar con su monocordio, su instrumento científico, en el cual exploraba todas las posibilidades de afinación prácticas, no exentas de críticas; si extendemos la división del monocordio de Ramos en el círculo completo de quintas, nos damos cuenta *ipso facto* de una estructura peculiar; una mezcla de afinación pitagórica (ditono pitagórico) y justa (tercera Mayor), esto produce dos quintas falsas, por lo tanto, una afinación irregular, afirma Goldáraz (1992).

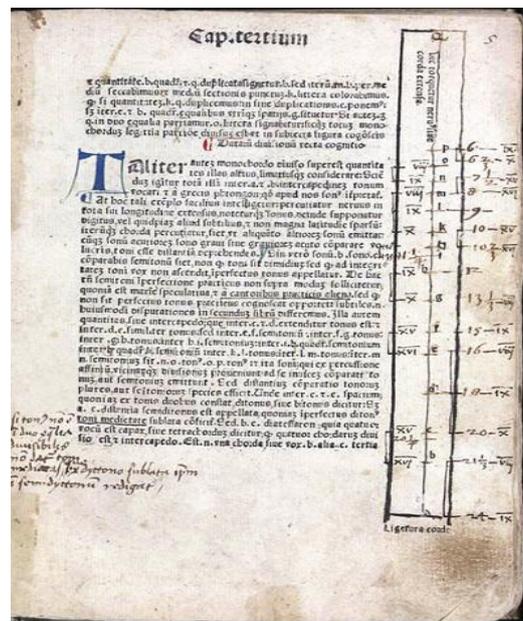


Figura Nº 7. Tratado A. 80. Monocordio de Ramos de Pareja, junto a las anotaciones marginales de F. Gaffurio.

Estamos completamente de acuerdo con Calderón (2013b) cuando comenta la simplicidad y el primitivismo del monocordio, y la inmensa cantidad de tratados que se han realizado experimentando con él, y que vamos a seguir conociendo en los siguientes apartados; se refiere a la reconstrucción del monocordio de Ramos de Pareja que realizó para su investigación (**Figura Nº 8**).

Hubo varias disputas entre detractores y defensores de la teoría de Ramos de Pareja, pero cabe destacar la que tuvieron Spataro (1460-1541), discípulo de Bartolomé, y Gaffurio (1451-1522), quien envía un tratado explicando todos los errores que ha encontrado en la *Música práctica* de Ramos; Spataro replica, y Gaffurio denuncia otra vez en *De harmonia musicorum instrumentorum opus*, a lo que vuelve a replicar Spataro, Gaffurio ya cansado, esta vez no solo ataca a Ramos, sino también al propio Spataro, el cual, zanja esta polémica de forma magistral con su obra más conocida *Errori de Franchino Gaffurio da Lodi*, publicada en Bolonia en 1521, como afirma Goldáraz (1992).



**Figura Nº 8<sup>7</sup>.** Reconstrucción del Monocordio de Ramos de Pareja por Calderón (2014) dimensión 48 x 7 x 1,5 cm, (p. 27)

### 1.2.2.4.2 Las aportaciones de Zarlino

Gioseffo Zarlino nació en Chioggia, una pequeña ciudad al otro lado de la laguna de Venecia en 1517. Fue educado por los franciscanos, y en 1540 se ordenó sacerdote, un año más tarde se presentó en Venecia, donde estudió con el gran compositor flamenco Adrian Willaert (Maestro de Capilla de la Basílica de San Marcos), puesto que ocuparía desde 1565, sustituyendo a Cipriano de Rore, hasta su muerte.

Su número y calidad de composiciones musicales fueron muy modestas, pero sus tratados no, escribió tres: *Instituciones armónicas* (1558), *Demostraciones armónicas* (1571), y *Suplementos musicales* (1588), siendo el más destacado su primer tratado (**Figura Nº 9**).

Ya hemos analizado como hasta principios del siglo XVIII, la pitagórica y la justa entonación eran las afinaciones más habituales en los tratados, no estando *a priori* determinada la cantidad de notas que componían una octava, aunque generalmente este número se fijaba en 12 notas. En dichos sistemas las notas eran generadas con los números 2 y 3, sus potencias y cocientes en el caso pitagórico; y con los números 2, 3 y 5 en la justa entonación, como se demuestra detalladamente en la siguiente tabla (Liern, 2008, p. 138).

	Do	Do <sup>#</sup>	Re	Mi <sup>b</sup>	Mi	Fa	Fa <sup>#</sup>	Sol	Sol <sup>#</sup>	La	Si <sup>b</sup>	Si
<b>12 Notas Pitagóricas</b>	1	$\frac{3^7}{2^{11}}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{2^5}{3^3}$	$\frac{3^4}{2^6}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{3^6}{2^9}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^8}{2^{12}}$	$\frac{3^3}{2^4}$	$\frac{2^4}{3^2}$	$\frac{3^5}{2^7}$
<b>12 Notas Justa Enton.</b>	1	$\frac{5^2}{3 \cdot 2^3}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3 \cdot 2}{5}$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{5^2}{2 \cdot 3^2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5^2}{2^4}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3^2}{5}$	$\frac{3 \cdot 5}{2^3}$

**Tabla Nº 3.** Potencias y cocientes de las 12 notas de la escala según la afinación pitagórica y la justa entonación

Otra cuestión es si hablamos de las consonancias, mientras los pitagóricos las reducían al *tetractys* (los primeros cuatro números), en la justa

entonación eran ampliadas hasta el *senario* (los seis primeros números), Zarlino consideraba que el 6 era el número perfecto, hasta el punto de la obsesión, todas las consonancias simples que jamás podrían ocurrir en armonía están, según él, contenidas dentro de ese número.

La octava es producida por dos longitudes de cadena relacionadas por la proporción 2/1, la quinta justa por 3/2, la cuarta justa por 4/3, la tercera mayor de 5/4 y la tercera menor por 6/5. El resto de las consonancias son meros compuestos de esos pilares básicos. Un número perfecto en cuyas partes no sólo se suman a sí mismo, sino que también son capaces de dividirlo en segmentos enteros iguales. Por ejemplo, 6 contiene los miembros más pequeños 1, 2 y 3, que sumados, producen 6 también. Por otra parte, 6 divisible por 1, por 2, y 3. Pero lo que Zarlino encuentra particularmente notable, es que el *senario* también pasa a formar parte de lo que él llama *la armónica* o *número sonoro*.

## LE ISTITVTIONI HARMONICHE

DI M. GIOSEFFO ZARLINO DA CHIOGGIA;

Nelle quali, oltra le materie appartenenti

ALLA MUSICA;

Si trouano dichiarati molti luoghi  
di Poeti, d'Historici, & di Filosofi;

Si come nel leggere si potrà chiaramente vedere.

Et non d'altre, d'altre lingue altro.  
Et non d'altre, d'altre lingue altro.



Con Priuilegio dell'Illustrissima Signoria di Venetia,  
per anni X.

IN VENETIA M D LVIII.

Figura Nº 9. Portada de *Institutioni harmoniche* de Zarlino.

He aquí, dice, cómo la maravillosa perfección del *senario* se manifiesta no sólo en el arte sino también en la naturaleza. De los doce signos del zodíaco, *seis* se encuentran por encima del hemisferio y *seis* a continuación. *Seis* planetas se mueven a lo largo del zodiaco. Hay *seis* círculos en el cielo. Hay *seis* cualidades de la sustancia, *seis* estados naturales, *seis* tipos de movimiento, y así sucesivamente. Prodigios como éstos, demuestran que con la bendición de la naturaleza el *senario* reemplaza al *tetractys* como repositorio favoreciendo la consonancia musical, afirma Rivera (1995).

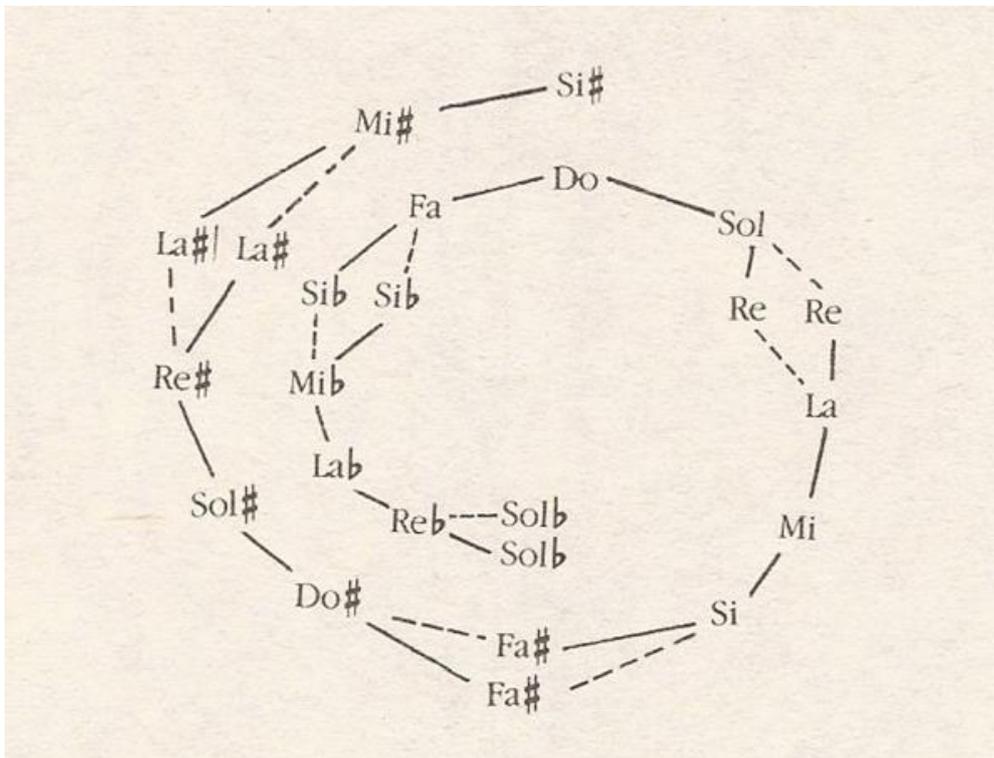
El problema se le presentó con la sexta menor  $8/5$ , al considerarse una consonancia y tener entre sus miembros el ocho, que no pertenece al *senario*. ¿Por qué no proponer el *ottonario* como recinto de las consonancias? Pregunta Liern (2008). En su primer tratado, *Le institutioni Harmoniche* (1558) lo resuelve de la siguiente manera; aceptar el *ottonario* soportaría aceptar el número siete como consonante, y los intervalos que conllevan este número, es decir  $7/6$  y  $8/7$ , a lo cual no estaba dispuesto aceptar bajo ningún concepto, por lo pronto explicó que la naturaleza del 8, era muy distinta a la del 7, puesto que se podía expresar como  $2^3$ , por lo tanto no supondría añadir números primos al *senario*, concluye Liern (2008).

#### 1.2.2.4.3 El sistema perfecto de Salinas

Francisco de Salinas, nace en Burgos en 1513 y fallece en Salamanca en 1590; músico, compositor y humanista castellano, quedando casi ciego a los 10 años, no impidió que el maestro Vicente Espinel lo definiera como *el más docto varón en música especulativa que ha conocido la antigüedad*. Estudió humanidades, cultura clásica, órgano y canto en la Universidad de Salamanca, poco después marcharía a Roma, donde permaneció 23 años, regresando después a España donde fue organista de la Catedral de León y posteriormente ocupó durante más de veinte años (hasta el día de su muerte) la Cátedra de Música de la Universidad de Salamanca, donde conoció al también Catedrático Fray Luís de León, el cual, a modo de gratitud por ayudarlo en sus litigios judiciales ocasionados por traducir la Biblia a la lengua vulgar sin licencia, le

dedicó el fantástico poema *Oda a Francisco de Salinas*. De su música nos ha llegado muy poco, pero sí de su obra maestra, *De música, libri septem*, escrita en latín.

El sistema perfecto de Salinas no podía ser utilizado por los instrumentos de teclado o instrumentos de cuerda con trastes, es decir, los instrumentos de afinación fija. El sistema era más teórico que práctico, combinó la justa entonación, con la duplicación de notas del monocordio de Flogliano y dio cabida a las *diesis* (en este caso la diferencia o separación que existe entre 7 octavas y 12 quintas) prolongando el círculo de quintas de Zarlino, obteniendo el siguiente resultado (Goldáraz, 1992, p. 58).



**Figura Nº 10.** *Espiral de quintas abierta de Salinas*

El objetivo de Salinas no era la interpretación de piezas enarmónicas ni cromáticas, sino mantener siempre la justa entonación para modular al mayor número de tonalidades posibles, conteniendo su sistema 24 notas, de las cuales 19 no se repiten, pero (Solb, Sib, Re, Fa# y La#) 5 sí, concluye Goldáraz.

### 1.2.2.5 Temperamentos mesotónicos

Considerada la imposibilidad de una afinación práctica de la justa entonación basada en los armónicos sin batimientos, aparecen los temperamentos; recordamos que Goldáraz (1992), concretó que consistían en “un compromiso entre consonancias justas incomparables, en un ajuste entre consonancias con el que, a costa de desafinar ciertos intervalos, el sistema adquiera determinadas ventajas.” (p. 13)

Concretamente el temperamento mesotónico reduce ligeramente la afinación de las quintas, para al mismo tiempo hacer bajar las terceras aproximándose de esta forma a su justa entonación. Explicaremos únicamente los tipos de temperamentos mesotónicos a nuestro entender más interesantes, aunque existen muchos más.

- Temperamento mesotónico de  $1/4$  de comma o mesotónico clásico. Terceras Mayores justas (Aron, 1529)
- Temperamento mesotónico de  $2/7$  de comma. Desviación igual de las terceras (Zarlino, 1558)
- Temperamento mesotónico de  $1/3$  de comma. Terceras menores justas (Salinas, 1577)

El nombre en forma de fracción de los temperamentos, viene del número de partes de *comma* en que se reduce cada una de las quintas. Como una tercera Mayor está formada por cuatro quintas, en el temperamento mesotónico de  $1/4$  de *comma*, repartimos dicha *comma* entre las cuatro quintas de la que está formada la tercera Mayor, así reducimos cada una de las quintas en  $1/4$  de *comma pitagórica*, cantidad que el oído humano puede tolerar perfectamente; fue el más sencillo, y el más utilizado de los tres. Ocurre lo mismo con el temperamento mesotónico de  $1/3$  de *comma*, con la diferencia que las terceras menores se forman con tres quintas, y la *comma* se debe repartir en tres partes.

Mientras que Zarlino en su temperamento mesotónico priorizó las *nuevas* terceras y sextas justas, en menoscabo de las *antiguas* consonancias pitagóricas de cuartas y quintas, y lo hizo de la siguiente manera; descendiendo todas las quintas justas en  $2/7$  de *comma sintónica*, premiando de esta manera las terceras mayores y menores, y como resultado las cuartas justas serían sensiblemente más agudas al aumentar  $2/7$  de *comma sintónica*, no siendo dañino para el oído humano según Zarlino, concluye Calderón (2013b).



**Figura Nº 11<sup>8</sup>.** Detalle de los  $2/7$  de *comma sintónica* de monocordio según Zarlino

### 1.2.2.6 El temperamento igual

Denominamos temperamento igual a la división de la octava en doce partes iguales basándose en el semitono temperado; si es cierto que hay otros temperamentos que también forman el círculo de quintas cerrado dividiendo la octava en partes iguales, pero lo original del temperamento igual y de los temperamentos irregulares (que estudiaremos a continuación), es que eliminan la quinta del lobo, reduciendo las quintas del círculo pitagórico un doceavo de *comma*, es decir un *schisma*, un pequeño intervalo de 2 *cents*, quedando así todas las fracciones iguales.

El *cent* es la unidad más pequeña que se utiliza para medir intervalos musicales, su razón o constante de proporcionalidad de frecuencias es  $\sqrt[1200]{2} = 1.00057778950655\dots$  y equivale a una centésima de semitono temperado. Podemos apreciar en la siguiente tabla la comparación en *cents* de la afinación pitagórica, la justa entonación y el temperamento igual.

	<b>Afinación Pitagórica</b>	<b>Justa Entonación</b>	<b>Temperamento Igual</b>
<b>2ª menor</b>	90.2 cents	117.7 cents	100 cents
<b>2ª Mayor</b>	203.9 cents	203.9 cents	200 cents
<b>3ª menor</b>	294.1 cents	315.6 cents	300 cents
<b>3ª Mayor</b>	407.8 cents	386.3 cents	400 cents
<b>4ª Justa</b>	498.1 cents	498.1 cents	500 cents
<b>5ª disminuida</b>	588.3 cents	590.2 cents	600 cents
<b>5ª Justa</b>	702 cents	702 cents	700 cents
<b>6ª menor</b>	792.2 cents	813.7 cents	800 cents
<b>6ª Mayor</b>	905 cents	884.4 cents	900 cents
<b>7ª Mayor</b>	1109.8 cents	1088.3 cents	1100 cents
<b>8ª</b>	1200 cents	1200 cents	1200 cents

**Tabla Nº 4.** *Comparación de la afinación pitagórica, la justa entonación y el temperamento igual*

Acabamos de observar en la tabla como se aprecia perfectamente en la columna dedicada al temperamento igual, la distribución uniforme de la escala en doce partes iguales.

### 1.2.2.7 Temperamentos irregulares

Debido a la especulación teórica que hemos visto en los temperamentos mesotónicos, era necesario crear otros temperamentos con los que poder

modular de forma práctica a todas las tonalidades, creando así dos o más quintas de diferentes distancias (irregulares), facilitando las relaciones entre sus intervalos y que cada tonalidad tenga personalidad propia, que era el objetivo que se perseguía.

Debido a que no hay reglas escritas sobre dichos temperamentos, vamos a ordenarlos en tres tipos, siguiendo el consejo de Goldáraz (1992).

- Temperamentos irregulares del siglo XVI. Modificación de la afinación pitagórica

Comprende una serie de temperamentos propios del siglo XVI y principios del XVII, para órgano o laúd; que modifican la afinación pitagórica para acercarse a la justa en unos casos, o presentan diferentes distribuciones de la comma pitagórica. Pueden ser cíclicos o no. (p. 121)

- Temperamentos irregulares del siglo XVIII

Los temperamentos de Werckmeister, Neidhart, Valloti, Marpurg, Kinberger, más los de Barca, Kellner y Barnes, los veremos en el siguiente capítulo, puesto que los exponemos junto con la teoría de la disonancia para conocer cuáles de las piezas del I libro del Clave bien temperado de Bach son las más disonantes y cuales las más consonantes, para poder poner luz al dilema sobre que temperamento utilizó para componer los preludios y las fugas de su famosa obra.

- Temperamentos franceses

Los cuales no vamos a entrar a comentar porque no tuvieron demasiada trascendencia y tampoco queremos extendernos más en el tema. Si están interesados podrán encontrar detallada información sobre los temperamentos franceses en Goldáraz (1992).

### 1.2.3 La armonía de las esferas

Los pitagóricos pensaban que los cuerpos celestes estaban separados unos de otros por intervalos correspondientes a las longitudes de las cuerdas armónicas, una teoría que, bajo la influencia de las concepciones platónicas (*La República*, 530d y 617b; *Critón*, 405c) y Aristotélicas (*Tratado del cielo*, 290b12), ejerció bastante influencia hasta finales del Renacimiento.

Aunque la siguiente clasificación no está propuesta en las fuentes originales, Barker (1989), realiza tres grandes distinciones:

1. Los intervalos se definen por **la distancia** entre los planetas

Plinio el viejo en *Historia Natural II, 84*, calculó la distancia entre la Tierra y la Luna en un tono.

2. Los intervalos se definen por **la velocidad** relativa de los planetas

El sonido emitido por la Luna, que es el planeta que gira más despacio, se presenta como el más grave, mientras que la esfera inmóvil emite el sonido más agudo. Afirma Cicerón en su *Somnium Scipionis*.

3. Y por último la fabricación de **las proporciones** del Alma del Mundo por el Demirgo

Interpretación filosófica del conocido pasaje del *Timeo* (35-36), en el que Platón se basa en la serie numérica 1, 2, 3, 4, 9, 8, 27 para describir la fabricación del Alma del Mundo.

Hubo muchos autores que se interesaron por estas teorías, tal fue así, que la idea de que la armonía de las esferas estaba compuesta de una escala ascendente o descendente ordenada por grados conjuntos, y en la cual los intervalos se definen por las distancias entre los planetas, la recogió

Kepler y afirmó que la velocidad de cada planeta corresponde a una nota de la escala musical. Cuanto más rápido sea el movimiento, más agudo será el sonido que emita, defendía en su *Harmonicis Mundi* (1619), y creó la *música celeste*, ya no basada en las distancias entre planetas sino en la velocidad de los mismos.

En función de la segunda ley de Kepler (ley de las áreas: la velocidad de un planeta aumenta cuando este se acerca al Sol), una vez asumida esta creencia, compuso seis melodías, una diferente para cada planeta, como podemos observar en su *Libri V*.

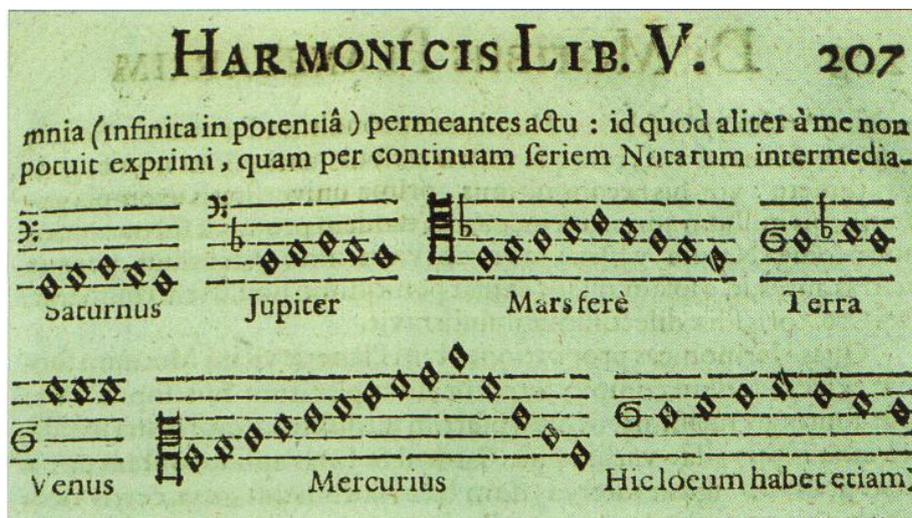


Figura Nº 12. *Libri V* de Kepler

Descartes (1596-1650), también vio la base de la música como un matemático, platónico, fiel en su prescripción de ritmos templados y melodías sencillas para que la música no produjese efectos imaginativos, emocionantes, y por lo tanto inmorales.

Por otro lado Leibniz (1646-1716), filósofo y matemático alemán ve la música como un ritmo universal, y refleja una realidad que era fundamentalmente matemática, que se experimentó en la mente como un temor subconsciente de relaciones numéricas. El cual en una carta a Goldbach (matemático prusiano), *Epistolae ad diversos* de 1712, expone su célebre

definición de la música como *exercitium arithmeticae occultum nescientis se numerare animi*, traducido al castellano: ejercicio matemático inconsciente en el que la mente no sabe que está calculando, que citamos al principio de este marco teórico, por estar completamente de acuerdo con la definición de Leibniz, y ser la base y punto de partida de nuestra investigación.

## Capítulo 2. De la teoría a la práctica: procedimientos matemáticos utilizados en la composición musical

### 2.1 Introducción

En el siguiente capítulo se exponen algunos de los procedimientos matemáticos, como la probabilidad, la aleatoriedad, etc., utilizados por varios compositores en la composición de sus obras, citaremos autores tan importantes para la historia de la música como J. S. Bach, W. A. Mozart, A. Schonberg, etc. El interés se centra especialmente en cómo llevar a la práctica la relación teórica entre la música y las matemáticas que acabamos de ver en el capítulo anterior.

### 2.2 Las matemáticas en la música de J. S. Bach

Johann Sebastian Bach (Eisenach 1685-1750 Leipzig), fue un compositor, organista, clavecinista, violinista, violista, maestro de capilla y cantor alemán del periodo barroco. Son innumerables las relaciones que encontramos entre la música de este genial compositor y las matemáticas, en este apartado solo vamos a reflejar las que nos han parecido más interesantes relacionadas con los objetivos de nuestra investigación.

Una de las grandes genialidades que se le atribuye, fue zanjar el problema ancestral que nos perseguía desde los pitagóricos a través de *El clave bien temperado*. Aunque él no fue totalmente consciente hasta el final de su vida, en esta obra utilizó magistralmente las matemáticas para resolver el problema anteriormente comentado de la *Comma pitagórica*, que se producía en la última quinta (quinta del lobo) cuando utilizábamos la afinación pitagórica. Bach creó dos ciclos de preludios y fugas en todas las tonalidades mayores y menores de la gama cromática. Según Liern (2009), Bach utilizó el sistema de afinación  $1/4$  de *comma*, que cerraba el círculo de quintas  $1/4$  de *comma* en las quintas: Do-Sol, Sol-Re, Re-La y Si-Fa#, esto correspondería al temperamento Werckmeister  $1/4$ .

Pero no todos los autores están de acuerdo con estas afirmaciones, Barnes (1979), demostró en un estudio que Bach utilizó el temperamento Werckmeister 1/3 en su obra, Kellelat (1960), afirmaba que el Kirnberger II fue el temperamento usado, mientras que Martínez (2004), de la misma opinión que este último, realizó una investigación tomando los 12 preludios y fugas correspondientes a las tonalidades mayores de la primera parte utilizando un programa informático que:

Permite la representación gráfica de los espectros, las partituras y las ondas en formato WAVE. Además, permite el cálculo numérico y la representación gráfica de la curva de disonancia para los espectros, así como la partitura de disonancia para las partituras. En este último caso será necesario tomar como parámetro un espectro y una escala editadas con el mismo programa. (p. 903)

Con el objetivo de conocer, cuáles de los temperamentos conocidos y utilizados en esa época, fue el que utilizó Bach para su famosa obra *El clave bien temperado*, por reflejar en sus estudios que era el menos disonante, obteniendo los resultados que podemos apreciar en la siguiente tabla, pudo ser el Kirnberger II (Martínez, 2004, p. 908).

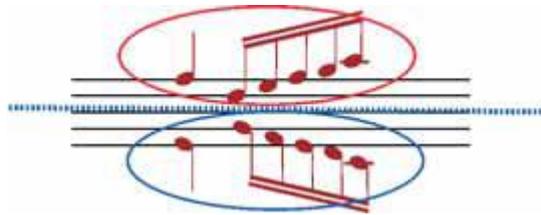
### Resultados de las disonancias de los 12 primeros preludios y fugas de *El clave bien temperado*

	846	848	850	852	854	856	858	860	862	864	866	868	Media	Desviación estándar
Tonalidad Mayor	Do	Do#	Re	Mib	Mi	Fa	Fa#	Sol	Lab	La	Sib	Si		
Temperamento igual	0,00	-0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,01	-0,01	0,00	0,00	0,01	<b>0,00</b>	0,006685579
Werckmeister I	-3,09	-0,26	4,11	-3,35	-1,38	-11,43	1,82	2,75	-3,19	-0,73	-10,20	2,40	<b>-1,88</b>	4,855065693
Werckmeister II	2,66	-0,13	-4,56	-4,63	-3,85	-13,82	1,93	8,34	-3,38	-3,59	-12,05	2,80	<b>-2,52</b>	6,247667686
Werckmeister III	-3,09	-0,26	4,11	-3,35	-1,38	-11,43	1,82	2,75	-3,19	-0,73	-10,20	2,40	<b>-1,88</b>	4,855065693
Werckmeister IV	-5,53	22,63	-1,86	14,52	3,36	-6,10	32,63	-11,68	25,16	-6,59	1,09	20,89	<b>7,38</b>	14,97779589
Werckmeister V	-7,72	22,63	3,06	1,75	2,35	0,26	14,76	-8,44	12,06	-0,27	-2,50	7,75	<b>3,81</b>	9,128810661
Kirnberger II	-27,51	-0,83	-2,21	-3,72	4,29	-5,90	1,94	-26,88	-3,53	-6,33	-7,96	-0,04	<b>-6,56</b>	10,25022424
Kirnberger III	-9,32	-0,42	3,91	-3,51	3,01	-10,45	1,39	-3,17	-3,08	0,85	-9,94	-0,38	<b>-2,59</b>	4,985386144
Neidhardt I	-4,41	-1,73	1,15	0,14	3,37	-5,06	-0,28	-2,07	0,23	-0,16	-5,34	1,13	<b>-1,09</b>	2,710744475
Marpurg I	-3,54	9,50	-4,60	-5,21	0,15	1,66	-3,88	-6,26	-2,03	0,01	-1,96	-6,10	<b>-1,86</b>	4,389927521
Tartini-Valloti	-5,58	-0,29	-3,22	-2,30	2,43	-6,07	1,96	-5,00	-2,71	-3,98	-7,14	2,97	<b>-2,41</b>	3,460292837
Barca	-4,37	-1,19	-2,22	-0,58	2,52	-4,72	1,36	-3,73	-1,91	-2,97	-5,19	2,78	<b>-1,69</b>	2,750733786
Kellner	-6,56	-0,30	0,93	-2,75	1,80	-8,07	1,77	-2,14	-2,98	-1,75	-8,23	2,27	<b>-2,17</b>	3,766846101
Barnes	-2,79	-0,42	1,53	-4,49	1,67	-5,73	1,42	-0,31	-4,05	-0,45	-6,64	1,54	<b>-1,56</b>	3,045992897

**Tabla Nº 5.** *Disonancias de los 12 primeros preludios y fugas de El clave bien temperado*

Como hemos podido apreciar, el valor más bajo respecto a los resultados de disonancia lo logra el temperamento de Kirnberger II, con un -6,56, seguido del Kirnberger III con un -2,59; pudiendo descartar claramente los Werckmeister IV y V. Quedando así científicamente, resulta la duda de qué temperamento utilizó Bach para cerrar las quintas surgidas de la afinación pitagórica.

Pero no solo fue esta la relación de la música de Bach con las matemáticas, como nos comenta Liern (2009), el maestro utiliza mucho el recurso de la simetría como vemos en el siguiente ejemplo.



**Figura Nº 13.** Simetría utilizada por Bach

La serie de la primera eclipse (roja) seguiría la siguiente secuencia:

$$\text{Do x [ 1, } 2^{2/12}, 2^{4/12}, 2^{5/12}, 2^{2/12}, 2^{4/12}, 1, 2^{7/12}]$$

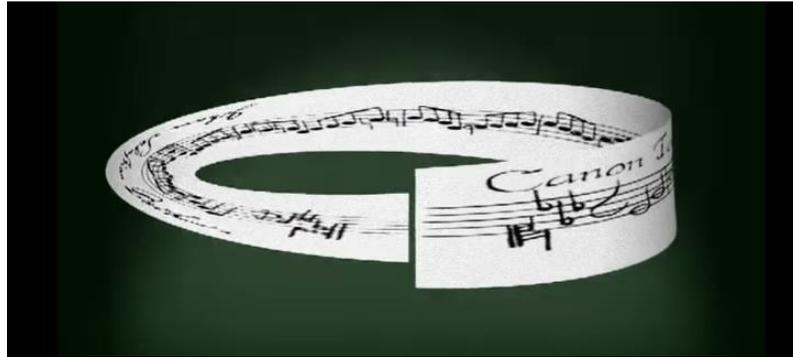
Mientras que la serie de la eclipse simétrica (azul) seguiría esta serie

$$\text{La x [ 1, } 2^{-2/12}, 2^{-4/12}, 2^{-5/12}, 2^{-2/12}, 2^{-4/12}, 1, 2^{-4/12}]$$

Podemos observar que salvo la última nota, con el signo contrario, los exponentes del 2 en ambas series son los mismos, concluye Liern.

Un ejemplo más de este matrimonio secreto lo apreciamos estudiando la relación de la música de Bach con la banda de Moebius; es un elemento matemático, descubierto en 1858 de forma independiente por los matemáticos alemanes August Ferdinand Moebius y Johann Benedict Listing, siendo una superficie con una sola cara y un solo borde, que tiene la propiedad matemática de ser un objeto no orientable, la cual Bach, 111 años antes de su

descubrimiento la plasmó en su obra *El canon del Cangrejo*; su genialidad reside en que la pieza se toca normal, pero su acompañamiento se interpreta en sentido contrario, lo que denominamos palíndromo musical, y provoca la mencionada banda de Moebius, como podemos visualizar gráficamente en el montaje del video que se muestra en el siguiente enlace: <https://www.youtube.com/watch?v=nlbwxxNrvxw>



**Figura Nº 14.** Banda de Moebius en el Canon del Cangrejo de Bach

La relación de Bach con las matemáticas no termina aquí, pero no podemos extendernos más en este apartado, por consiguiente, emplazamos a los más interesados a la lectura del genial libro del Dr. Hofstadter titulado *Gödel, Escher, Bach. Un eterno y grácil bucle*, citado en nuestras referencias bibliográficas.

### 2.3 El juego de dados de W. A. Mozart

Mozart no compuso un minuetto, creó un sistema de composición basado en la probabilidad, se trata de su *Musikalisches Würfelspiel* o juego de dados musical, que el genio compuso en 1787, apareciendo publicado en 1793 por la Edición de J.J. Hummel. Mozart compuso 176 compases, y los enumeró del 1 al 176, posteriormente los agrupó en 16 conjuntos de 11 compases cada uno (que son los números que podemos alcanzar sumando una tirada de dos dados a la vez, es decir, del 2 al 12). El objetivo final consiste en crear una obra musical de 16 compases. Vemos la tabla que creó con los 176 números distribuidos de la siguiente manera.

1. Walzerteil									2. Walzerteil								
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
2	96	22	141	41	105	122	11	30	2	70	121	26	9	112	49	109	14
3	32	6	128	63	146	46	134	81	3	117	39	126	56	174	18	116	83
4	69	95	158	13	153	55	110	24	4	66	139	15	132	73	58	145	79
5	40	17	113	85	161	2	159	100	5	90	176	7	34	67	160	52	170
6	148	74	163	45	80	97	36	107	6	25	143	64	125	76	136	1	93
7	104	157	27	167	154	68	118	91	7	138	71	150	29	101	162	23	151
8	152	60	171	53	99	133	21	127	8	16	155	57	175	43	168	89	172
9	119	84	114	50	140	86	169	94	9	120	88	48	166	51	115	72	111
10	98	142	42	156	75	129	62	123	10	65	77	19	82	137	38	149	8
11	3	87	165	61	135	47	147	33	11	102	4	31	164	144	59	173	78
12	54	130	10	103	28	37	106	5	12	35	20	108	92	12	124	44	131

Figura Nº 15<sup>o</sup>. Tabla del juego de dados de Mozart

Se estima que el número de vals distintos que se pueden generar con este juego es de  $11^{16} = 4.594973e+16$ .

Cualquier persona que se atreva a componer su vals, en la siguiente dirección electrónica <http://sunsite.univie.ac.at/Mozart/dice/#options> puede hacerlo de forma fácil, rápida y sencilla.

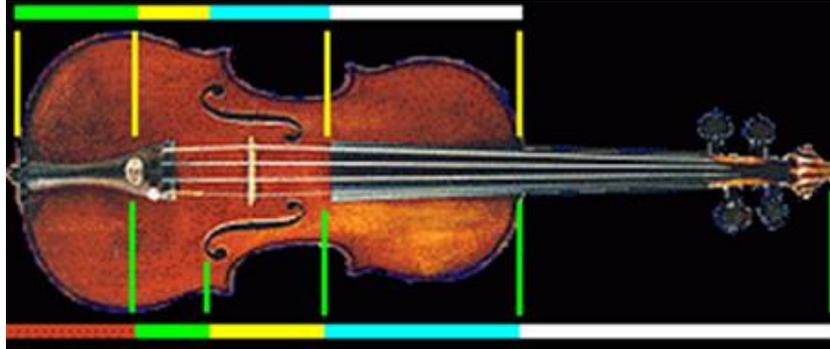
## 2.4 La sucesión de Fibonacci y el número áureo

Cogiendo los dos primeros términos iguales a 1, conseguimos cualquier número sumando los dos anteriores, descrita por Leonardo de Pisa, más conocido como Fibonacci, en su *Liber Abbaci*, escrito en 1202 y revisado y aumentado en 1228, la sucesión 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, se conoce como la sucesión de Fibonacci.

La razón entre un número y el inmediatamente anterior, muestra tendencia hacia *el número de oro* representado por la letra griega  $\phi$  (phi) (en minúscula) o  $\Phi$  (Phi) (en mayúscula) en honor al escultor griego Fidias.

$1/1 = 1$ ,  $2/1 = 2$ ,  $3/2 = 1.5$ ,  $5/3 = 1.666$ ,  $8/5 = 1.6$ ,  $13/8 = 1.625$ ,  $21/13 = 1.6154$ ,  
 $34/21 = 1.6190$ ,  $55/34 = 1.6176$ ,  $89/55 = 1.6182$ ,  $144/89 = 1.617978$ ,  
 $233/144 = 1.618056$ ,  $377/233 = 1.618026$ ,  $\longrightarrow \Phi = 1.61803398875$ .

Se dice que el gran lutier Antonio Stradivarius utilizó la razón aurea para la ubicación de las *efes* (los oídos u orificios de la tapa) de sus afamados instrumentos, aunque se descarta que esta sea la única causa de la gran calidad que aportan sus instrumentos.



**Figura Nº 16<sup>10</sup>.** *Violín Stradivarius*

También se relaciona algunas obras de grandes autores como Bach, Mozart o Beethoven con los números de Fibonacci o la razón aurea, aunque no hay ninguna investigación rigurosa que confirme directamente esta intencionalidad de los compositores, por lo tanto algunas coincidencias quedan en un sencillo análisis casuístico, que no vamos a tratar. En cambio, no podemos decir lo mismo del compositor húngaro Béla Bartók, que desarrolló una escala basada en los números de Fibonacci.



**Figura Nº 17<sup>11</sup>.** *Escala Fibonacci de Béla Bartók*

La cual utilizó junto con la razón áurea en su *Música para instrumentos de cuerda, percusión y celesta*, como podemos apreciar en la siguiente figura de forma muy gráfica.

Bartók: *Music for String Instruments, Percussion and Celeste* I. Fugue

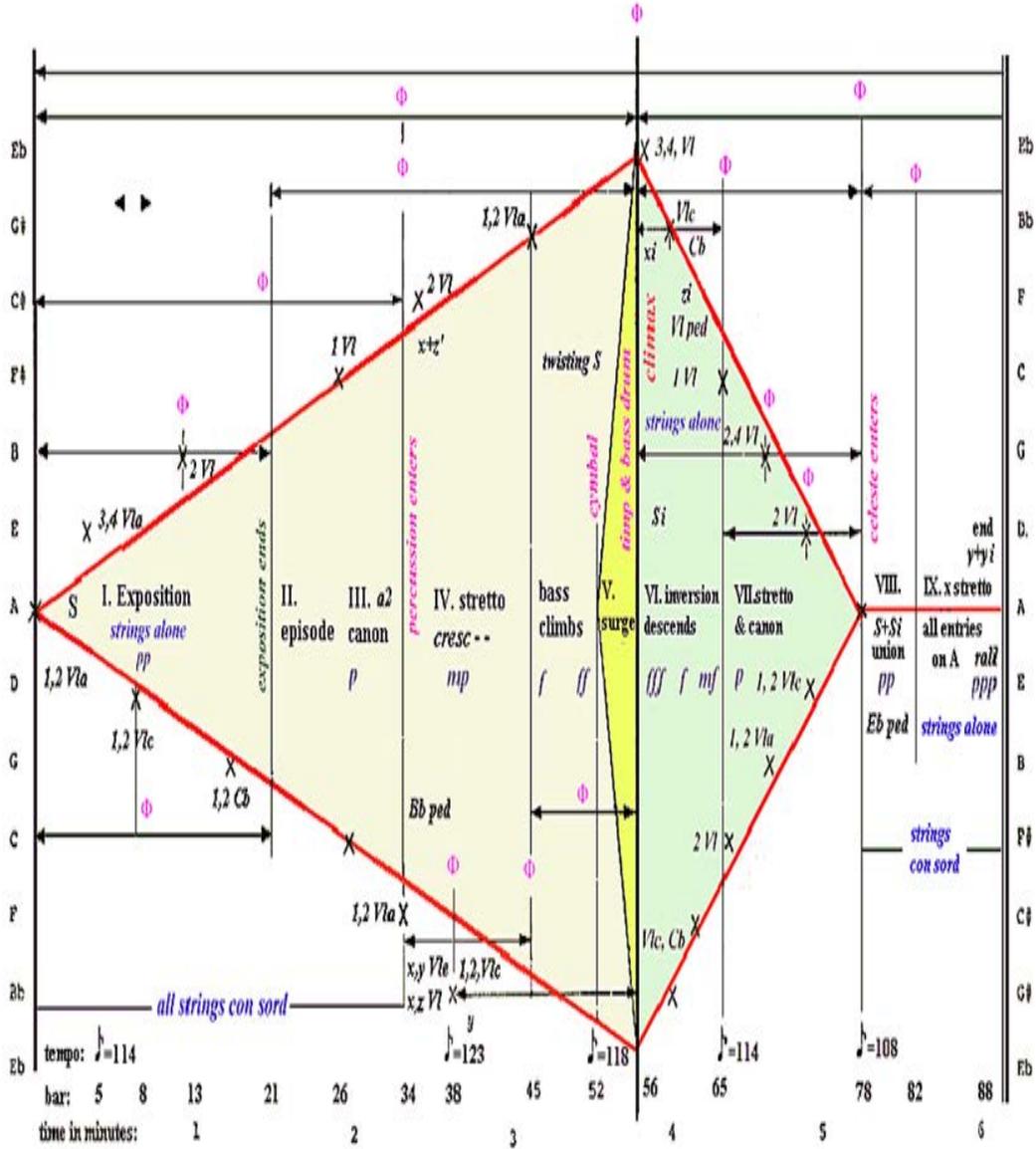
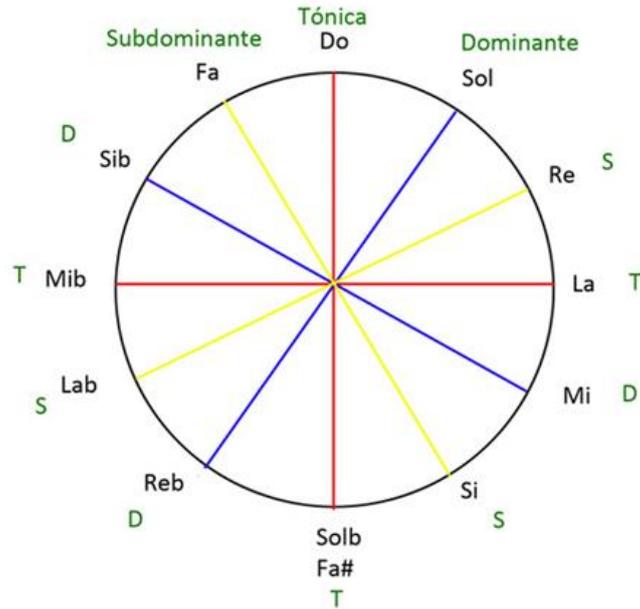


Figura Nº 18<sup>12</sup>. Música para instrumentos de cuerda, percusión y celesta

Bartók también utilizó en sus composiciones el *sistema axial* o *sistema de ejes* (que podemos apreciar en la siguiente figura), descubierto por Erno Lendvai, musicólogo húngaro que dedicó gran parte de su vida a estudiar la obra de Béla.

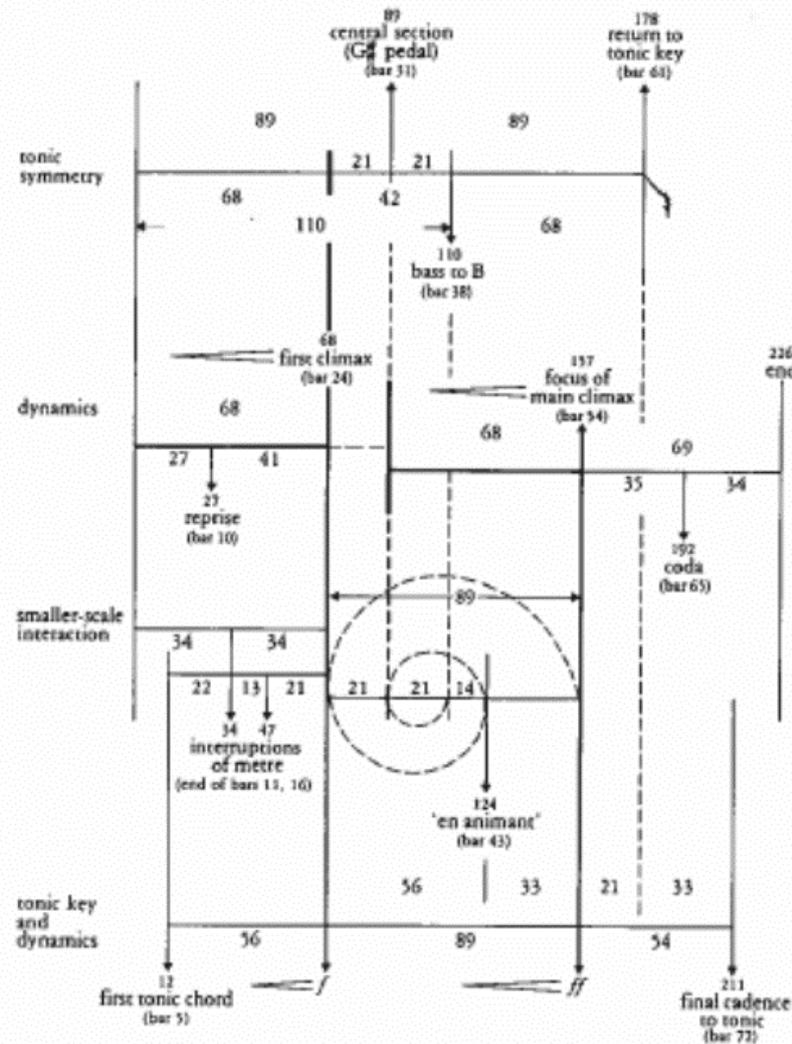


**Figura Nº 19<sup>13</sup>.** Sistema axial o sistema de ejes

Para una información más amplia y detallada sobre la relación músico-matemática de sus obras, les invitamos a que consulten el libro *Béla Bartók: Un análisis de su música*, escrito por el propio Lendvai y publicado por Idea Books en 2003, citado en nuestras referencias bibliográficas.

Otro de los grandes compositores que se dejó llevar por la razón áurea en algunas piezas para piano, fue Claude Debussy, pero sobre todo en su *Hommage a Rameau*, como vemos en la siguiente figura, gracias a un análisis realizado por Howat (1983), podemos observar todos los elementos matemáticos utilizados para su composición, especialmente la espiral áurea perfectamente delimitada en el centro de su obra, como podemos apreciar gráficamente en la siguiente figura.

Fig. 10.4: 'Homage à Rameau'

Figura N $^{\circ}$  20<sup>14</sup>. *Homage a Rameau*

## 2.5 El dodecafonismo

El Maestro de la Segunda Escuela de Viena, Arnold Schonberg, durante su época atonal libre (1908-1923), época de crisis familiar y social (I Guerra Mundial), experimentó un momento de gran reflexión teórica y formal, durante el cual estuvo siete años sin componer; en estos años escribió su tratado de armonía, el cual ya negaba la jerarquización de la tonalidad, y realizaba los ensayos de su método dodecafónico, que definió como: *Método de composición de doce sonidos, con la sola relación de uno con otro*<sup>15</sup>.

Con esto quería decirnos que los 12 sonidos de la escala cromática tienen el mismo valor tonal; una vez tomadas las 12 notas de la escala, el compositor les da un orden determinado, dicho orden será la forma original; también puede utilizar la forma original en sus tres variantes, retrograda, invertida, o retrograda de la inversión.

The image displays four musical staves, each representing a different arrangement of the 12 chromatic notes. The notes are numbered 1 through 12 below each staff. The first staff is labeled 'Original (O)' and shows the notes in their natural order: C, C#, D, D#, E, F, F#, G, G#, A, B, B#. The second staff is labeled 'Retrogrado (R)' and shows the notes in reverse order: B, B#, A, G, G#, F, F#, E, D, D#, C#, C. The third staff is labeled 'Inversión (I)' and shows the notes in an inverted order: C, D, E, F, G, A, B, C#, D#, E#, F#, G#, A#. The fourth staff is labeled 'Retrogrado de la inversión (RI)' and shows the notes in reverse order of the inverted series: A#, G#, F#, E#, D#, C#, B, A, G, F, E, D.

Figura Nº 21<sup>16</sup>. La serie dodecafónica original y sus tres variantes

Y cerramos el apartado del dodecafonismo con otro gran estudioso del tema, Theodor W. Adorno (2011), que se pregunta:

Ahora bien, ¿qué pasa con el dodecafonismo? ¿Es realmente una matemática que flota libremente, o tiene en sí una justificación histórica? Desde aquí se ha de comprender su necesidad. Pues Justamente constituye su esencia el hecho de que no estatuye al tuntún o según reglas abstractas, sin relación con el estado mismo del material, este material para la composición; sino que todas sus reglas, incluso aquellas formas que tanto gusta de tachar de *matemáticas*, no son otra cosa que la expresión concisa, y ahora por supuesto también perentoria, de aquellas normas que el material

compositivo mismo hace valer hoy en día frente al compositor. (p. 121)

### 2.5.1 Arnold Schonberg

Nace en Viena el 13 de septiembre de 1874, y fallece en Los Ángeles el 13 de julio de 1951, fue compositor, teórico musical y pintor austriaco de origen judío, creador del dodecafonismo y fundador de la Segunda Escuela de Viena.

En su época dodecafónica (1923-1933), creó sus primeras obras seriales vertidas en esquemas formales cercanos al neobarroco y al neoclasicismo, en las que utiliza grandes esquemas seriales y los proyecta a la Gran Orquesta, de entre sus obras dodecafónicas destacamos: *Un superviviente en Varsovia*, Op. 46 (1947), de sus años de emigración (1933-1951), en los que tuvo que refugiarse en Estados Unidos, por la persecución alemana a los judíos.

Figura Nº 22<sup>17</sup>. Serie dodecafónica original de *Un superviviente en Varsovia*

### 2.5.2 Alban Berg

Nace en Viena el 9 de febrero de 1885, lugar donde fallece el 24 de diciembre de 1935, compositor austríaco, discípulo de Schoenberg y perteneciente a la Segunda Escuela de Viena.

Nos interesa el segundo periodo de su vida creativa, en la que utiliza el método dodecafónico de Schoenberg con fidelidad; en su Cantata, la Suite

Lírica, el Concierto a la memoria de un ángel y la Ópera inacabada Lulú (sobre la cual interpreté una selección con la *Jove Orquestra Simfónica de Catalunya* (1998), bajo la Dirección de Josep Pons, en el *Palau de la Música Catalana*).

En la siguiente figura, podemos apreciar la *serie* utilizada por Berg para su concierto *A la Memoria de un ángel*, dedicado a Manon Gropius, hija de Walter Gropius y Alma Mahler (viuda del genial compositor Gustav Mahler) fallecida a causa de la poliomielitis, realizándose el estreno mundial el 19 de abril de 1936, en el citado *Palau de la Música Catalana*, por motivo del XIV Festival de Música Contemporánea de la Sociedad Internacional, siguiendo la siguiente serie dodecafónica.



**Figura Nº 23<sup>18</sup>.** Serie dodecafónica original de *A la memoria de un ángel*

### 2.5.3 Anton Webern

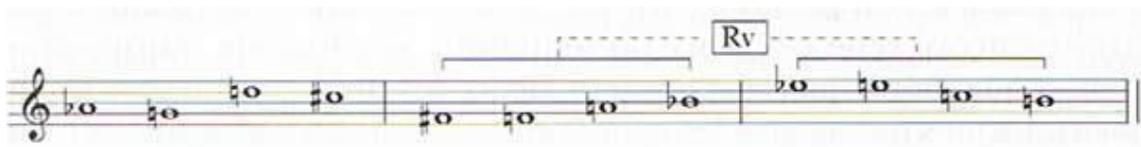
Nace en Viena el 3 de diciembre de 1883, y fallece el 15 de septiembre de 1955 en Salzburg, al igual que Berg fue discípulo de Schoenberg y perteneciente a la Segunda Escuela de Viena.

Utilizó el dodecafonismo a partir de su opus 17, respetando casi siempre la división hexacordal que proponía Schoenberg, llegando a una complejidad contapuntística en ocasiones inejecutable (se quejaban los propios intérpretes), aunque finalmente fue uno de los introductores de la nueva corriente compositiva, *el serialismo*.

De su época dodecafónica destacamos, sus tres melodías populares Opus 17, el trío para cuerdas Opus 20, la sinfonía Opus 21, el concierto para

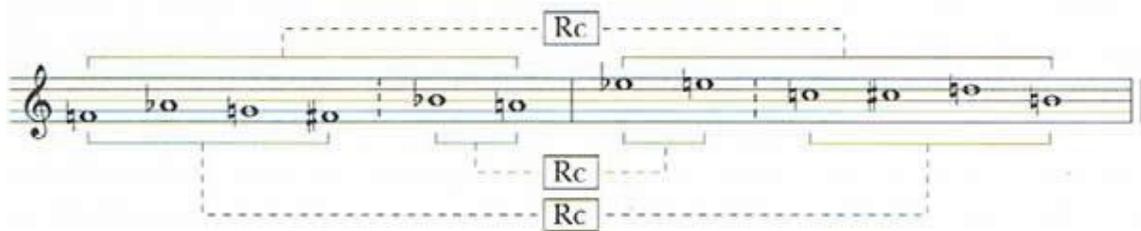
nueve instrumentos Opus 24, las variaciones para piano Opus 27, y su cuarteto para cuerdas Opus 28.

A continuación podemos apreciar en las siguientes figuras, las series dodecafónicas<sup>19</sup> sobre las que Anton Webern edificó, de forma magistral y con exactitud matemática, el método dodecafónico en su trío para cuerdas, la sinfonía, y el concierto para nueve instrumentos.



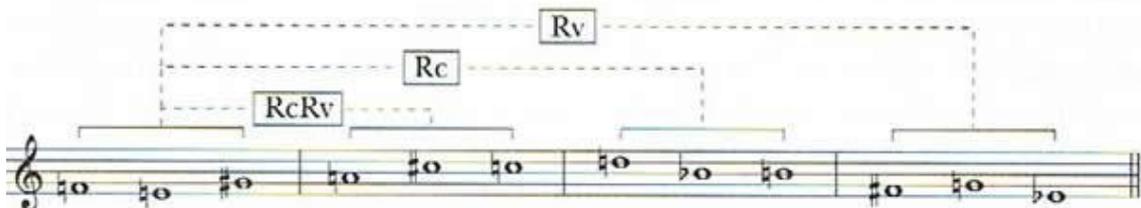
*Ex. 6 : série du Trio à cordes op. 20*

**Figura Nº 24.** Serie dodecafónica original de Trio para cuerdas



*Ex. 7 : série de la Symphonie op. 21*

**Figura Nº 25.** Serie dodecafónica original de La sinfonía



*Ex. 8 : série du Concerto op. 24*

**Figura Nº 26.** Serie dodecafónica original del Concierto para nueve instrumentos

## 2.6 El serialismo integral

Consiste en trasladar el principio del dodecafonismo serial de Schonberg, que se basa en la altura de los sonidos, a los demás parámetros sonoros: duración, intensidad, timbre, etc. Olivier Messiaen fue el primer compositor en utilizar esta técnica; analizando la *Suite Lírica* de Alban Berg en sus clases del Conservatorio de París, Olivier, criticó que la Segunda Escuela de Viena no hubiera experimentado el sistema serial en otros campos, y se limitaran únicamente a trabajar las alturas, según Smith (1987).

### 2.6.1 Olivier Messiaen

Esto ocurre cuando escribe *Mode de valeurs et d'intensités* (el tercero de los *Quatre études de rythme* para piano). Nace en Aviñón el 10 de diciembre de 1908, y muere en Clichy, Île-de-France, el 27 de abril de 1992. Compositor, organista y ornitólogo francés, alumno de Paul Dukas (orquestración), Marcel Dupré (contrapunto y formas musicales), y Maurice Emmanuel (historia de la música), en el Conservatorio de París. Con 23 años fue elegido organista de la Iglesia de la Santa Trinidad de París, puesto que ocupó hasta su muerte, prueba de su profundo espíritu religioso.

No nos centraremos tanto en Olivier Messiaen, sino en su discípulo, Pierre Boulez, el cual fue muy influenciado por el incipiente serialismo de su maestro, quien Díaz (2005), lo describe de la siguiente forma:

Teniendo en su haber una amplia formación no solo musical sino también matemática, adoptó una concepción rigurosísima de la música, organizando sus procedimientos compositivos a partir de técnicas matemáticas. En este sentido, la música serial se basa, desde un punto de vista epistemológico, en el concepto de “estructura”, entendida como un conjunto de elementos (sonidos, duraciones, etc.) ordenados según

una ley (combinatoria serial) que determina sus relaciones. (p. 122)

## 2.6.2 Pierre Boulez

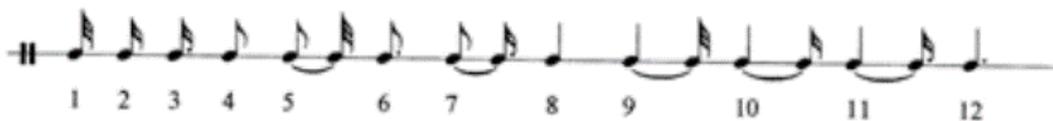
Nace en Montbrison (Francia), el 26 de marzo de 1925, compositor, pedagogo y director de orquesta, y fallece el 5 de enero de 2016 en Baden-Baden (Alemania). Antes de tomar clases de armonía de Olivier Messiaen en el Conservatorio de París, estudió matemáticas en el Politécnico de Lyon. Fue Director de la Orquesta Sinfónica de la BBC de 1971 a 1976, sustituyendo a Sir Colin Davis, así como de la Filarmónica de Nueva York de 1971 hasta 1977, en sustitución de Leonard Bernstein, fue propietario de la Cátedra de Composición, Técnica y Lenguaje Musical en el Colegio de Francia desde 1976 hasta 1995.

Manejando las mismas series que su Maestro utilizó en su *Mode de valeurs et d'intensités*; vamos a conocer la serie de alturas que Boulez usó en sus *Structures pour deux pianos. Primer libro*<sup>20</sup>, compuesto entre 1951-52.



**Figura Nº 27.** Serie de alturas de *Structures pour deux pianos. Primer libro*

La serie de doce duraciones:



**Figura Nº 28.** Serie de duraciones de *Structures pour deux pianos. Primer libro*

La serie de doce intensidades:

<i>pppp</i>	<i>ppp</i>	<i>pp</i>	<i>p</i>	<i>quasi p</i>	<i>mp</i>	<i>mf</i>	<i>quasi f</i>	<i>f</i>	<i>ff</i>	<i>fff</i>	<i>ffff</i>
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

**Figura Nº 29.** Serie de intensidades de *Structures pour deux pianos*. Primer libro

Y la serie de doce ataques:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
>	⤵	.	—	normal	⌢	∩	<i>sfz</i> ^	∩	<i>f</i> (perc. lég.)	∩	⌢

**Figura Nº 30.** Serie de ataques de *Structures pour deux pianos*. Primer libro

## 2.7 La música estocástica

En esta ocasión no vamos a ser nosotros los que definamos lo que es la música estocástica, vamos a utilizar las palabras de su creador, Iannis Xenakis (1992), que en su libro *Formalized music: thought and mathematics in composition*, la define:

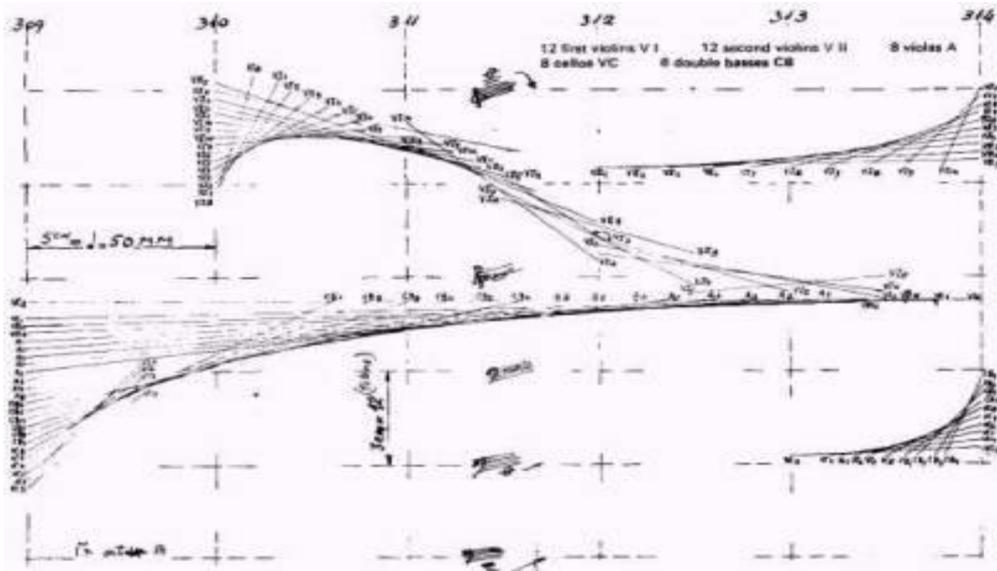
Como resultado del punto muerto en la música serial, así como de otros motivos, en 1954 originé una música construida en base al principio de la indeterminación; dos años más tarde la llamé “música estocástica”. Las leyes del cálculo de probabilidades entraron en la composición por pura necesidad musical. Pero otros caminos también llevaron a la misma encrucijada, el más importante: los acontecimientos naturales, tales como la colisión del granizo o la lluvia sobre superficies duras, o el canto de las cigarras en un campo veraniego. Estos acontecimientos sonoros están constituidos por miles de sonidos aislados; esta multitud de sonidos, vista como una totalidad, es un nuevo

acontecimiento sonoro. Este acontecimiento masivo está articulado y forma un molde temporal flexible, que de por sí sigue las leyes aleatorias y estocásticas. Si alguien desea formar una gran masa a partir de notas puntuales, como con pizzicati de cuerdas, debe saber estas leyes matemáticas, que, en cualquier caso, no son más que una estricta y concisa expresión de cadenas de razonamiento lógico. Todo el mundo ha observado los fenómenos sonoros de una multitud política de decenas o cientos de miles de personas. El río humano grita un lema con un ritmo uniforme. Entonces otro lema surge desde la cabeza de la manifestación; se extiende hacia la cola, reemplazando el primero. Una onda de transición pasa de la cabeza a la cola. El clamor llena la ciudad y la fuerza inhibidora de la voz y el ritmo llegan a un clímax. Es un acontecimiento de gran poder y belleza en su ferocidad. Entonces, el impacto entre los manifestantes y el enemigo se produce. El perfecto ritmo del último lema se rompe en un gran grupo de gritos caóticos, que también se extiende hasta la cola. Imagina, además, los estallidos de las ametralladoras y el silbido de las balas intercalándose en ese desorden total. La multitud se dispersa rápidamente y después del infierno sonoro y visual sólo queda el silencio, lleno de desesperación, polvo y muerte. Las leyes estadísticas de estos acontecimientos, separadas de su contexto político o moral, son las mismas que aquellas de las cigarras o de la lluvia. Son las leyes de transición desde el orden absoluto al desorden total de una manera continua o explosiva. Son leyes estocásticas. (p. 8-9)

### **2.7.1 Iannis Xenakis**

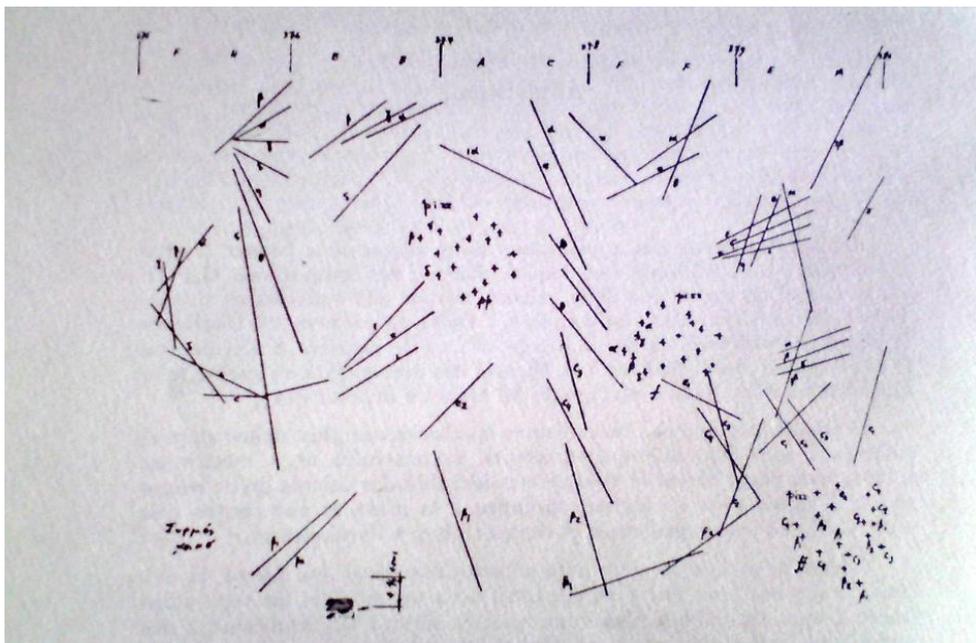
Iannis Xenakis, Γιάννης Ξενάκης, Yannis Xénakis, compositor y arquitecto nacido el 29 de mayo de 1922 en Brăila, Rumania, con ascendencia

griega. Nacionalizado francés, pasó gran parte de su vida en París, donde falleció el 4 de febrero de 2001.



**Figura Nº 31.** *Glisando de cuerdas de Metastasis* (Xenakis, 1992, p. 3)

En la figura anterior podemos apreciar el glisando de cuerdas de *Metastasis*, relacionado con su música estocástica libre, y en la figura siguiente su *Syrmios* para 18 cuerdas, respecto a su música estocástica Markoviana.



**Figura Nº 32.** *Syrmios para 18 cuerdas* (Xenakis, 1992, p. 80)

También *Herma* para piano solo, de 1973, utilizando la música simbólica, en la que las tres clases A, B, C resultan un conjunto apropiado para las teclas del piano. Existe una correspondencia estocástica entre los componentes de tono y los momentos de ocurrencia en conjunto T, que a su vez siguen la propia ley estocástica. Las intensidades y densidades (número de vectores seg.), así como los silencios, ayudan a clarificar los niveles de la composición, afirma Xenakis (1992).

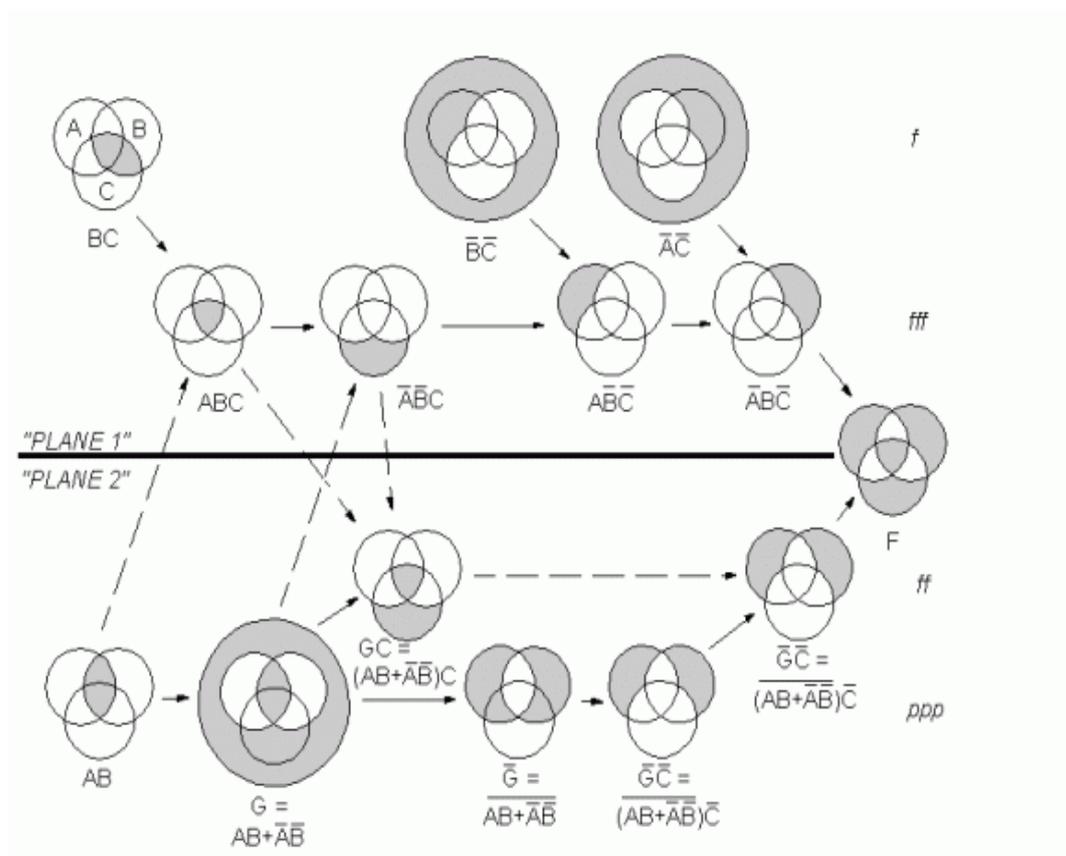


Figura Nº 33. *Herma para piano solo* (Xenakis, 1992, p. 176)

## 2.8 El uso de las nuevas tecnologías en la actualidad

De Lemos (2015) nos presenta un aspecto concreto de una amplia investigación que tiene como objetivo la realización de un estudio analítico y compositivo; basados en los principios de *grundgestalt* y el desarrollo de la variación, elaborados por Arnold Schoenberg. Su estudio introduce un grupo de cuatro módulos complementarios y secuenciales modelado como algoritmos

genéticos (creando el geneMus), empleado para la producción sistemática de las variantes de una célula musical básica.

En 2013, basándose en los elementos del modelo de análisis, en un proceso de ingeniería inversa, de Lemos (2015) creó el Gr-System ("Gr" de grundgestalt), diseñado para realizar diversas variaciones en la composición musical. El objetivo de esta investigación fue conocer si los procesos de producción de variantes de una célula musical básica podrían ser sistematizados; para esta empresa creó un complejo algoritmo genético, llamado geneMus (GM), formado por cuatro módulos secuenciales y complementarios, realizados con el programa informático MATLAB.

- **Módulo 1:** Producción de variantes abstractas



**Figura Nº 34.** Axioma hipotético

Vamos a ver como desarrolla en **4 módulos** esta pequeña célula musical o axioma como lo denomina el autor, y la convierte en varias frases musicales.

- **Módulo 2:** Producción de variantes concretas



**Figura Nº 35.** Primera posible variación el axioma de la imagen Nº 34

- **Módulo 3:** Producción de variantes abstractas

axG <1 0 0 0 0 0 0>

metrical displacement      last note suppressed

(no transposition)      (transp.: minor 3<sup>rd</sup> up)      (transp.: perf. 4<sup>th</sup> up)

pT's 2. 1. 3.

**Figura Nº 36.** Posible grupo de axiomas formado a raíz de la Imagen Nº 35

- **Módulo 4:** Producción de variantes abstractas

axG <1 0 0 0 0 0 0>

thG's

...      ...

**Figura Nº 37.** Posibles variantes de los grupos de axiomas de la Imagen Nº 36

El complejo geneMus, puede considerarse como una herramienta auxiliar robusta para el compositor, ya que es capaz de sistemáticamente proporcionar una gran cantidad de formas derivadas de una célula musical, habiendo sido ya aplicada a la composición de algunas piezas musicales (con variada instrumentación, extensión o género), concluye el autor.

Siguiendo la línea de, de Lemos (2015), Tanaka y Fujii (2015), proponen un modelo que puede definir las características de las estructuras musicales globales en el contexto de crear música. El modelo propuesto puede ayudar a los usuarios a generar nuevas piezas de música y/u obtener las estructuras musicales deseadas.

Cuando componemos una nueva pieza o secuencia, tenemos que elegir una secuencia de todas las posibles combinaciones de los patrones, cuyo número aumenta de manera exponencial en función del número de patrones básicos. Para hacer frente a este tipo de problemas combinatorios y con el fin de aplicar la programación entera, las especificaciones estructurales tienen que ser descritas por las igualdades y desigualdades lineales.

La programación entera es un marco para resolver problemas de programación lineal cuyas variables se limitan a variables enteras o variables 0-1. Aunque comparte algo en común con la programación con restricciones, que ha sido de uso frecuente en el ámbito de la música; una de las ventajas de la programación entera es que tiene un algoritmo eficiente para encontrar la solución óptima, mediante la actualización de las estimaciones de los límites inferior y superior de la solución óptima, basada en la técnica de relajación de programación lineal, concluyen los autores.

El estilo musical del enorme catálogo musical de sonatas para clave de Domenico Scarlatti, ha sido identificado por diferentes especialistas como barroco, como precursor del clasicismo, o como creador de un estilo musical propio basado en sus propias experiencias con la música popular española. En cualquier caso, es difícil extraer una opinión común y objetiva entre dichos especialistas. Vila, Cifre y Díaz (2012), extraen indicadores de bajo nivel (porcentaje de uso de cada nota y porcentajes de uso de los diferentes intervalos melódicos posibles) de 390 sonatas a partir de su formato MIDI, comparándolas por medio de técnicas estadísticas (análisis discriminante) con dos muestras de piezas musicales barrocas y clásicas; el resultado que obtienen es cuantificable y objetivo de la distancia a cada estilo, que sitúa el

catálogo de sonatas analizado como más próximo al clasicismo, respecto al barroco, en una proporción del 70%.

La música aleatoria generalmente no logra captar el estilo y la calidad de la música en su formación creativa. En el contexto de la armonización melódica, este trabajo demuestra en primer lugar, que trasgresiones de las normas generales de la armonía son claramente relacionadas con el método de la entropía cruzada, según Whorley y Conklin (2015).

En su estudio describen y evalúan un método de paso aleatorio en el que la relación entre la entropía cruzada y la calidad de armonización se hace aún más evidente, y afirman que los resultados tendrán un impacto en los futuros trabajos con la generación de música a partir de modelos estadísticos.

Y llegan a la conclusión de que la armonía generada a partir de modelos estadísticos mejora a medida que la entropía cruzada disminuye, y que la aplicación de la aleatoriedad de forma iterativa en conjunción con umbrales de probabilidad, es capaz de encontrar soluciones muy bajas en el método de la entropía cruzada; y en consecuencia que el espacio de la solución producida por el uso de umbrales optimizados es muy superior a la producida por la norma aleatoria iterativa.

En futuros trabajos, tratarán de demostrar que estos resultados son de aplicación más general, consolidándolos y validándolos con los resultados de un muestreo con más melodías, concluyen los autores.

Hall (2014) describe las manifestaciones y experimentos de audio que utilizó en el curso de educación general de matemáticas *Número sonoro: Música y Matemáticas desde los tiempos antiguos a los modernos*. Estos experimentos particulares ilustran la frecuencia, el timbre, la altura, los golpes, los espectros, la disonancia, la afinación y la construcción de escalas, que son un subconjunto de los temas tratados en la clase. Éstos se pueden realizar con el editor gratuito de audio de código abierto y grabador Audacity.

Acotto y Andreatta (2012), analizaron los diferentes tipos de representaciones de música, tanto desde el punto de vista cognitivo como del computacional, y afirman que si las representaciones mentales de la música son el tema del espíritu musical y por lo tanto, constituyen una cuestión filosófica y cognitiva; se puede suponer que las representaciones matemáticas también tienen correlatos cognitivos para la comprensión de la música atonal.

Desde un punto de vista más lúdico, Devlin (2013), matemático de la Universidad de Stanford y recientemente uno de los fundadores de una pequeña compañía de videojuegos (innertubegames.net), se inspira en la música para sus creaciones, y afirma que, hasta la invención de diversos tipos de dispositivos de grabación, la notación musical simbólica era la única manera de almacenar y distribuir la música, sin embargo, nadie confunde la música en sí, con una partitura musical. Del mismo modo que se crea la música y se disfruta dentro de la mente, también lo son las matemáticas. En el fondo, la matemática es una actividad mental, una forma de pensar, y concluye que los videojuegos que proporcionan un buen aprendizaje de matemáticas deben mirar hacia el piano como un modelo.

¿Puede la música suplantar a las matemáticas en la planificación de sistemas ambientales? Esta pregunta se la realizó Geem (2015) antes de realizar su investigación. En primer lugar, se formula un problema de optimización en el cual el número de reservas ecológicas va a ser minimizado mientras se conservan todas las especies en una región. A continuación, el autor describe un algoritmo de optimización de la música-inspirada, llamado *búsqueda de armonía*, que se centra en la analogía entre el rendimiento de la música y el problema de optimización. Por último, se muestran los resultados del cálculo, que vienen a corroborar en cierto modo su hipótesis.

Venegas et al. (2013) presentan en su artículo, el diseño, desarrollo y evaluación de una solución modular informática denominada AudioGráficos, que parte de un proyecto de mayor alcance denominado Picalab: MMSI (Laboratorio Virtual para el Programa de Innovación en Ciencias y Arte).

Este programa proporciona actividades que relacionan las matemáticas con la música y el sonido. Su objetivo es el de favorecer los procesos de aprendizaje de representación matemática, a través de actividades en las que el alumnado tiene que realizar gráficos de ejes de coordenadas, que describen la variación de la frecuencia del sonido en el tiempo (patrones de altura).

AudioGráficos ha sido diseñado para su uso en los niveles 3.º, 4.º y 5.º de Educación Primaria en el sistema educativo de Chile. Para la realización del programa, se siguió una metodología en tres etapas:

1. Generación de metáforas significativas que vinculan la representación de coordenadas y el sonido.
2. Desarrollo de un prototipo funcional con una guía didáctica, sometido a proceso de evaluación de usabilidad.
3. Evaluación del programa por parte de profesores y alumnos. (Esta última mostrada en este artículo)

Los resultados de valoración del alumnado (N=67) en 3 centros prioritarios chilenos, muestran una excelente recepción del programa. Las dimensiones de evaluación (aprendizaje matemático, aprendizaje musical, global, técnica) han mostrado altas puntuaciones. Asimismo, muestran un excelente balance emocional positivo; el alumnado sintió más emociones positivas que negativas en el trabajo con el programa. Esto constituye un indicador de validación respecto a las dimensiones de evaluación reseñadas, concluyen los autores.

Buteau y Anagnostopoulou (2012), revisan un modelo matemático de análisis motivico junto con su realización computacional desde una perspectiva interdisciplinaria; y lo relacionan con conceptos y métodos en el campo del análisis de la música computacional. Se discuten temas tales como la segmentación, la formación motivica, la representación del conocimiento, la

similitud, la categorización, y la interpretación de los resultados. Una introspección más en el enfoque sobre el contexto de las matemáticas, la computación y el análisis de la música como un gran campo interdisciplinario, revela las relaciones entre los tres: el modelo matemático (topologías motívicas), su contraparte computacional (OM-Melos), y el análisis de la música (métodos de Réti y Nattiez). Al concebir esto, subrayamos la importancia de la neutralidad, la objetividad y el rigor científico en la parte de modelado y, al mismo tiempo, preservamos la libertad del analista en música con el fin de crear resultados musicalmente interesantes.

Algo más lúdico, pero también relacionado con el tema, lo encontramos en Tillman, An, Boren, Paez-Paez y Zhang (2015), que nos hablan de una investigación sobre la utilización de las tecnologías de diseño de prototipos rápidos, para apoyar la integración de la educación matemática contextualizada en las actividades temáticas musicales en un campamento de verano interdisciplinario.

El *World Music & Math Camp* se centró en las actividades relacionadas con la música que emplea las tecnologías de prototipado rápido, incluyendo el diseño de impresoras 3D, y otras tecnologías de fabricación digital para dar apoyo a los estudiantes en el diseño de instrumentos musicales, así como composición cromática, clave para ayudar a los estudiantes en la producción de vídeos musicales sobre temas matemáticos. El artículo concluye con implicaciones para los futuros esfuerzos de investigación en pedagogía matemática contextualizada, que emplean las tecnologías de diseño de prototipos rápidos, para dar apoyo a entornos de aprendizaje interdisciplinarios, como la música.

El objetivo principal de la investigación de Fréitez (2014), era la composición de una obra musical utilizando mecanismos de automatización de computación y melodías indígenas como material temático. El proceso de composición se basaba en la selección de una melodía, su despliegue en las alturas y duraciones, y su traducción a la notación numérica. Las alturas son

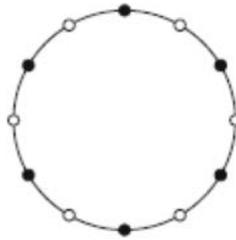
tratadas por la teoría *Pitch Class Sets* y las operaciones aritméticas básicas se aplican a las duraciones. Inmediatamente después, las estructuras musicales eran elaboradas y más tarde formalizadas. Utilizó un software compositor de asistencia (PWGL) para llevar a cabo este trabajo, y la computación del entorno de programación gráfica orientada a objetos basada en el lenguaje *Common Lisp*.

Moorefield-Lang y Evans (2011), nos presentan *Rhythmical*, una aplicación educativa para el iPhone y el iPod Touch, que transmite temas matemáticos a través de técnicas interactivas musicales, rítmicas, o de movimiento. Creado por un equipo de profesores, un bibliotecario, estudiantes y miembros de la industria del desarrollo de juegos, esta aplicación para iPhone y iPod Touch conecta música y matemáticas para estudiantes desde cuarto a octavo grado. En el artículo se describe la historia de la aplicación y la creación de la nueva entrega y ofrecen ideas sobre nuevos prototipos que pudieran crearse en un futuro.

Nierhaus (2009), afirma que la composición algorítmica (componer mediante métodos formalizables) cuenta con una tradición centenaria, no sólo en la historia de la música occidental (recordemos el juego de dados de W. A. Mozart, que vimos en el apartado anterior). Y en su libro nos muestra una descripción detallada de los procedimientos destacados de composición algorítmica de manera pragmática y no por el tratamiento de los aspectos formalizables en las obras individuales. Además de un resumen histórico, cada capítulo presenta una clase específica de algoritmo en un contexto de composición, proporcionando una introducción general a su desarrollo y base teórica y describe diferentes aplicaciones musicales, en los que se describen las fortalezas, debilidades y posibles implicaciones estéticas derivadas de la aplicación de los enfoques tratados. Los temas tratados son: modelos de Markov (recordemos *Syrmios* para 18 cuerdas de Iannis Xenakis, basándose en su música estocástica Markoviana), gramáticas generativas, redes de transición, caos y la auto-similitud, algoritmos genéticos, autómatas celulares, redes neuronales e inteligencia artificial. La completa bibliografía hace que este trabajo sea ideal para el músico y para el investigador por igual.

Y concluimos este apartado con Milne, Bulger, Herff y Sethares (2015), que identifican una clase de patrones periódicos en escalas musicales que están perfectamente equilibrados. Dichos patrones tienen elementos que son distribuidos alrededor del círculo periódico, de tal manera que su centro de gravedad es precisamente el centro del círculo. (Aunque nos hace recordar formalmente el círculo de quintas de Pitágoras, visto en el capítulo anterior, son propuestas antagónicas).

Un patrón perfectamente equilibrado, es un conjunto de puntos en un círculo cuya posición media o centro de gravedad, es el centro del círculo.



**Figura N° 38<sup>21</sup>.** Patrón perfectamente equilibrado, uniforme y subperiódico

Dicho equilibrio está implícito en el concepto establecido de uniformidad perfecta. Sin embargo, identifican una clase menos trivial de perfecto equilibrio, patrones que no tienen repeticiones dentro del período, tales patrones pueden ser claramente desiguales.



**Figura N° 39.** Patrón perfectamente equilibrado, desigual y subperiódico



**Figura N° 40.** Patrón perfectamente equilibrado, desigual e irreduciblemente periódico (no hay subperiodos)

Exponen tres patrones periódicos perfectamente equilibrados, que exhiben diferentes clases de uniformidad y subperiodicidad. Los pequeños círculos representan un universo de clases de tonos disponibles o especificaciones métricas (hay doce, que corresponden a doce clases de tono cromáticos o doce pulsos métricos). Los círculos rellenos son las notas o el patrón métrico.

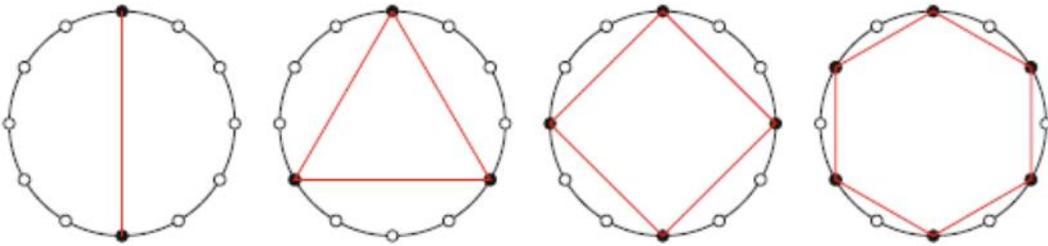
Para demostrar las relaciones entre la uniformidad y equilibrio, expresan un patrón periódico como un vector complejo, y toman la transformada discreta de Fourier para obtener una representación en el dominio de la frecuencia, siendo la función original una función en el dominio del tiempo.

El coeficiente  $t$ th de la transformada discreta de Fourier del vector escala viene dada por:

$$\mathcal{F}z[t] = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} z[k] e^{-2\pi itk/K}.$$

Utilizaron el cero y los primeros coeficientes para caracterizar el equilibrio y la uniformidad. Una vez realizados todos los análisis matemáticos pertinentes, expusieron cinco teoremas sobre la relación entre la uniformidad y el equilibrio, que podemos apreciar a continuación.

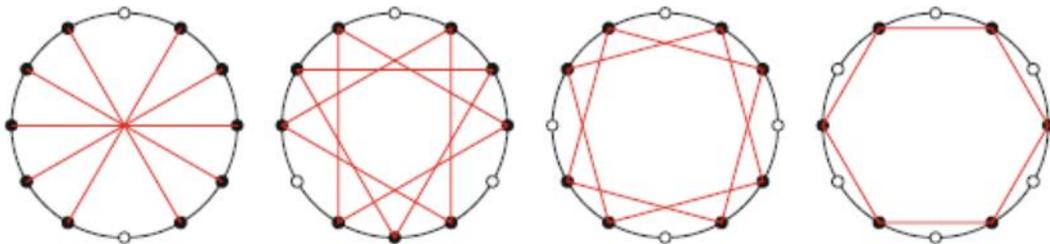
- **1<sup>er</sup> Teorema.** La uniformidad perfecta implica equilibrio perfecto.



- **2<sup>o</sup> Teorema.** El desequilibrio maximal, implica irregularidad máxima.



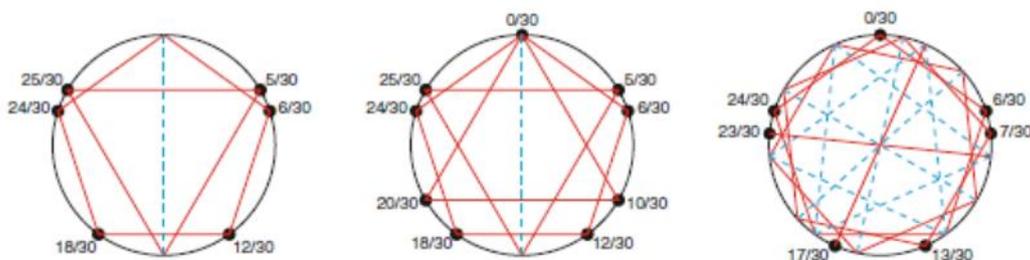
- **3<sup>er</sup> Teorema.** El equilibrio perfecto no implica uniformidad perfecta (perfectamente equilibrado, pero subperiódico).



- **4º Teorema.** En un universo perfectamente uniforme hasta N veces, el complemento de un patrón equilibrado también es perfectamente equilibrado.



- **5º Teorema.** Sea  $N \in \mathbb{N}$ . Cualquier vector perfectamente equilibrado  $a \in \{0, 1\}^N$  puede ser expresado como un número entero de combinación de polígonos regulares.



En este interesante a la vez que complejo artículo solo hemos dado unas pinceladas sobre este método, Milne, Bulger, Herff y Sethares (2015), han creado un innovador método analítico utilizando la transformada discreta de Fourier, así como han impulsado geoméricamente enfoques usando combinaciones de números enteros disjuntos, o intersección de polígonos regulares, para construir perfectamente ritmos y escalas equilibradas.

Los métodos sugeridos en este artículo son un primer intento de dar a músicos e investigadores la oportunidad de crear y manejar el equilibrio dentro de la música; pueden encontrar la investigación completa en (Milne, Bulger, Herff y Sethares, 2015), citados en la bibliografía.



## Capítulo 3. Desde el prisma de la psicología: una mirada científica

### 3.1 Introducción

Se definen los términos: aptitud musical y aptitud numérica, y se comentan los aspectos que pueden ser evaluados, así como los diferentes tests que las miden, y las aptitudes desarrolladas en la infancia y durante la adolescencia, para terminar mostrando la relación entre las aptitudes (musical y numérica), desde el punto de vista de la neurociencia educativa.

### 3.2 La aptitud musical

Los mismos autores que escriben, investigan, o estudian la aptitud musical, no consiguen ponerse de acuerdo en unificar el significado general en un único término para designarla; esta situación permite darnos cuenta de la complejidad del tema que se va a tratar.

Algunos autores nos hablan de musicalidad, así el Doctor Horst-Peter Hesse y sus colaboradores en las investigaciones realizadas por el Instituto Valenciano de Musicología utilizan el término *musicalidad*; otros investigadores usan el término *aptitud musical*. Del Río (1982, 1984, 1999 y 2000), Vera (1985 y 1988), Martínez (1992), Nebreda (1999a, 1999b y 2002), etc. en sus Tesis doctorales y sus publicaciones sobre el tema, nos hablan de aptitud musical; aunque también son utilizados los vocablos *talento musical*, derivado del título original en inglés de la traducción española del Test de aptitud musical de Seashore, *Seashore Measures of Musical Talents*, y *capacidad musical*. Por otra parte, hay muchos autores que utilizan el término *habilidad musical*, pero no como sinónimo de aptitud, sino para diferenciarla de ésta; este fenómeno de sinónimos no ocurre únicamente en castellano, algo parecido sucede en la lengua inglesa con los vocablos *ability* y *aptitude*.

Frecuentemente la expresión más usada en la lengua castellana es la de *Aptitud musical*, cuando se traducen los vocablos ingleses *ability* y *aptitude* al

castellano, es el más utilizado, como ocurre en las traducciones de los títulos de los tests de Bentley, Seashore y otros.

En el artículo titulado *Naturaleza de la Aptitud musical*, que Vera (1988) publicó en la Revista de Musicología, la autora hace una exposición de los significados y distinciones que los investigadores hacen sobre el término Aptitud musical, término que utilizaremos en nuestra investigación, excepto en las citas que se hagan de autores que utilicen otro sinónimo. En el artículo citado presenta las distinciones que hace Schoen entre:

Talento musical (capacidad de ejecución) y musicalidad (recepción musical), pudiendo un sujeto poseer uno o los dos aspectos, que son complementarios, mientras que para Seashore y otros autores el talento musical incluye la musicalidad. Revesz entiende por musicalidad la capacidad de disfrutar de la música estéticamente, pudiendo clasificar a las personas a lo largo del continuo musical no-musical. (pp. 171 y 172)

Podemos distinguir dos teorías acerca de la *naturaleza de la aptitud musical*; por una parte, la *teoría de los específicos*, que son los que afirman que la aptitud musical se puede analizar por parámetros independientes, defendida por Seashore y también por el genial Director de Orquesta inglés Sir Thomas Beecham; por otro lado, tenemos a Mursell (citado en Vera, 1988), como representante de la *teoría ómnibus*, que defiende, una aptitud musical única, global e inherente.

Vera (1988) concreta los elementos más característicos de la teoría de los específicos, como vemos a continuación:

La teoría de los específicos, concebida por Seashore basándose en sus trabajos acerca de los atributos de la onda sonora, relaciona cada uno de los atributos físicos, con una sensación psicológica

(paralelismo psicofísico). El sentido del tono se corresponde con la frecuencia, la sonoridad con la intensidad, el tiempo con la duración y el timbre con la cualidad. Estas capacidades sensoriales son básicas, innatas y funcionan desde la infancia, no variando con la inteligencia o la formación. El talento musical, según Seashore tiene cuatro aspectos: tonal (sensibilidad al tono y al timbre, relacionado con la melodía y la armonía), dinámico (sonoridad), temporal (ritmo, tiempo y compás) y cualitativo (sensibilidad al timbre). Puesto que estas capacidades son independientes entre sí, es posible poseer unas en alto grado y no poseer otras. (pp. 172-173)

Mursell, expone una teoría opuesta a la anterior en su libro titulado *The Psychology of Music*, en la que nos afirma que:

La musicalidad no depende directamente de las capacidades sensoriales, sino que es una combinación de procesos mentales entre los que destacan básicamente tres: la respuesta afectiva al sonido y patrones rítmicos, el conocimiento perceptivo de las relaciones tonales y el conocimiento perceptivo de las agrupaciones rítmicas. (p. 173)

Por otro lado, del Río (1982) define el término *aptitud musical* como vemos continuación:

La aptitud musical sería el rasgo o los rasgos característicos que distinguen a las personas musicales de las no musicales. Y abre un tema de discusión preguntándose cuál sería la línea divisoria entre lo musical y lo no musical, porque un compositor, un ejecutante y un oyente atento poseen, los tres, características distintivas respecto de quienes ni

componen, ni ejecutan, ni oyen música. Los tres puede decirse que tienen aptitud musical, pues participan activamente en una experiencia musical; pero, ¿qué características los distinguen? (p. 92)

### 3.2.1 Adquirida en el periodo de operaciones concretas

Cuando Seashore nos aconseja que la aplicación de su test de aptitud musical debe realizarse a individuos de más de 9-10 años, es porque, a partir de esta edad, el individuo ya ha desarrollado casi todas las cualidades aptitudinales referentes a la música.

Aunque la tarea de conservación exige un desarrollo cognitivo superior que el de discriminación, Lacárcel (1995), corrobora la afirmación de Seashore, con un estudio de conservación musical que realizó a 100 niños de edades comprendidas entre los 5 y 9 años, en él, transformaba el timbre, la tonalidad, el nivel de tono (octava), el intervalo-contorno, el tiempo y la armonía; y los resultados que obtuvo en la conservación de los diferentes ítems musicales fueron los siguientes:

- 7 sujetos no contestaron bien a ningún ítem
- 12 sujetos contestaron bien a 1 ítem
- 25 sujetos contestaron bien a 2 ítems
- 24 sujetos contestaron bien a 3 ítems
- 13 sujetos contestaron bien a 4 ítems
- 15 sujetos contestaron bien a 5 ítems
- 4 sujetos con criterio conservador a los 6 ítems

Con estos resultados, la autora sospecha que algunos elementos se adquieren más tardíamente (de los 9 años en adelante), y por consecuencia el mayor número de sujetos que son capaces de realizar correctamente una tarea de conservación musical no estaban comprendidos en su muestra.

Lacárcel (1995) y Nebreda (1999a, 1999b, 2002) con el apoyo de otros investigadores, nos comentan el desarrollo musical que acontece en el periodo preadolescente y adolescente, etapa esta última, en la cual se encuentran todos los participantes de nuestra investigación. Según Lacárcel (1995) y Hargreaves (1986), la gran mayoría de los integrantes de nuestra muestra deberían ser capaces de valorar aspectos como el desarrollo estético, melódico, y rítmico. Nebreda (1999a) también está parcialmente de acuerdo con estos autores al afirmar que:

En la adolescencia se alcanza la madurez perceptiva en los parámetros de percepción musical, dependiendo su desarrollo de los condicionantes socio-educativos, del nivel de motivación y de las cualidades personales. (p. 601)

Lacárcel (1995), basando su estudio en Gardner y Piaget, nos indica la edad en la cual los niños son capaces de apreciar la estética, y afirma que la mayoría de los niños de 7 años, tienen la suficiente madurez, para desarrollar las características necesarias del público que asiste a un concierto o contempla una obra de arte, ya sea mediante la percepción auditiva o visual, y se puede considerar que participan en el mismo proceso artístico. Según la misma autora, para Gardner, las agrupaciones y grupos de operaciones que Piaget realiza y nosotros hemos descrito anteriormente, no parecen primordiales para dominar o comprender el lenguaje humano o cualquiera de las bellas artes, en las que está incluida la música. Lacárcel concluye afirmando que, “el desarrollo artístico puede ser explicado sin sistemas de símbolos, es decir, sin la necesidad de ninguna destreza en las operaciones lógicas subrayadas.” (p. 73)

Hargreaves (1986), encuentra una gran contradicción entre las teorías de la apreciación estética de Gardner y Piaget y concluye que, “los niños preadolescentes pueden, con seguridad, ser entrenados para hacer discriminaciones finas de estilo entre pinturas, pero, bajo circunstancias normales, tienden a no hacerlo.” (p. 68)

En cuanto al apartado melódico, Lacárcel (1995) propone los elementos que lo potencian:

- La discriminación tonal.
- La comprensión de secuencias melódicas.
- Y la adquisición de la tonalidad. (pp. 75 y ss.)

Y afirma que cuando un niño haya tomado conciencia de los elementos que forman la melodía y de que se compone de un determinado ritmo, tonalidad, compás, etc., será capaz de distinguir si una melodía ha sido interpretada correcta o incorrectamente.

Bentley (1966), afirma que casi todos los niños de 7 años, pueden discriminar diferencias de hasta un cuarto de tono; con 10 y 11 años la mitad de los sujetos son capaces de discriminar octavos de tono, y con 12 años casi todos, mientras que casi ninguno es capaz de distinguir los dieciseisavos de tono. Con respecto a los tests utilizados, nos aconseja que siempre que se hagan análisis de intervalos se empiece por los más amplios (como ocurre en el test que utilizamos en nuestra investigación).

Por otra parte, Duell y Anderson (1967), en las investigaciones que realizaron en EEUU, demostraron que el 59% de los niños de 6 años y el 80% de los niños de 8 años distinguían perfectamente diferencias de semitono.

Algunas de las investigaciones realizadas conjuntamente por Hargreaves, Castell y Crowther, citadas por el propio Hargreaves (1986), demuestran que niños en edad escolar pueden conservar melodías familiares con mucha mayor facilidad que melodías que les resulten desconocidas.

Al tratar el desarrollo de la percepción musical, Lacárcel (1995), se apoya en una de las primeras investigadoras en este campo, Zenatti, quien según Lacárcel, utilizó acordes y pasajes musicales significativos para los niños a fin de estudiar las reacciones de éstos en el ámbito de su cultura musical, y

prosigue explicándonos una de las pruebas elaboradas por Zenatti, consistente en la audición de dos grupos de tres notas (esta prueba es muy parecida a la que realizamos en nuestra investigación en el test de Memoria Tonal). En el segundo grupo de tres notas una de ellas estaba modificada en lo referente a su tono, y los niños tenían que identificar cuál de las tres era. Utilizó dos tipos de grupos: tonales y atonales, y una de las principales conclusiones a las que llegó fue que los niños de 6-7 años eran capaces de discriminar, en gran número, la nota modificada, y que generalmente se obtenían mejores resultados cuando los grupos eran tonales que atonales.

Algunos autores como Imberty (1969), Barlett y Dowling (1980) afirman que el niño de 6-7 años es capaz de distinguir cambios de tonalidad en una melodía, y hacen especial hincapié en la importancia de la aculturación musical del sujeto, es decir, los hábitos musicales de éste.

Muchos investigadores se han ocupado de la capacidad de percepción musical en los niños, respecto a cadencias y tonalidad. Para no extendernos en este aspecto, vamos a comentar seguidamente las conclusiones que según Lacárcel (1995), son más representativas:

- Los niños de 6 años pueden percibir la bondad de la tríada tónica como un final, mostrando que podían detectar los cambios en tales finales más fácilmente que los cambios que no afectaban a la tríada tónica.
- Los niños de 8 años podían distinguir entre melodías completas y aquellas que no poseían una nota final estable tal como la tónica.
- Los niños de 9 años pueden seleccionar la tónica como la nota final más apropiada para la melodía, cuando se les pregunta cuál de una serie de melodías tenía mejor final. (p. 81)

Cuando hablamos de desarrollo rítmico, para Lacárcel (1995), son fundamentales los siguientes apartados:

- Tempo rítmico.
- Comprensión y desarrollo de las estructuras rítmicas.

Según Fraisse, (citado en Martínez, 1992), si medimos con las pruebas del compás espontáneo a niños de 5 a 13 años, se observa que:

Evoluciona poco entre esas edades; no obstante, el compás parece acelerarse hasta los 7-8 años haciéndolo después un poco más lento (de una medida de 2 por segundo a los cinco años, a 3 aproximadamente por segundo, hacia los 7-8 años). A partir de los 8 años las diferencias con relación a la media de dos por segundo aumentan, como si cada niño adquiriese entonces un compás espontáneo individualizado. (p. 73)

Lacárcel (1995) afirma que “los niños de edades comprendidas entre 6 y 12 años son capaces de secuenciar y progresivamente moverse, siguiendo ritmos adaptados a las formas de canon, copla y estribillo, lied, rondo, etc.” (p. 83).

Hargreaves (1986) en su libro *Música y desarrollo psicológico* en relación con las habilidades rítmicas del niño, comenta como Gardner (1971), Moog (1976) y Shuter-Dyson y Gabriel (1981), entre otros autores, hallaron una notable mejoría cuando los ejercicios habían sido realizados con anterioridad.

Siguiendo la misma línea, Zenatti (1976), citada en (Martínez, 1992) señala que:

A los 6 años se observa un nivel elevado de logros en experiencias de percepción rítmica, debido a unos mecanismos de estructuración perceptiva, y por otra

parte ponen en juego un elemento temporal, pero descartan el factor musical. (p. 74)

En el desarrollo rítmico infantil, podemos hacer dos distinciones bien definidas referidas a la conducta rítmica y al tempo rítmico, que son las que Lacárcel (1995) nos aconseja a continuación:

- La primera se refiere a la reacción ante el estímulo, es decir, la respuesta se produce después que se desencadena el estímulo.
- La otra es más compleja e implica más profundamente la percepción musical, alude a la sincronización senso-motora. Ésta hace posible que coincida nuestro movimiento con unas determinadas pautas sonoras, que pudieran ser los tempos musicales o cualquier otra (compás, motivo...). (p.84)

Y afirma que en la sincronización senso-motora:

Existe simultaneidad entre la realización rítmica del pulso y el modelo estructurado que se propone, repitiendo éste en forma de obstinato. (...) a los 3 años el niño es capaz de seguir el metrónomo, con más o menos sincronización, a los 7 años podemos considerar que ésta ya es la correcta, (...) esta sincronización se da sin mayor dificultad en niños de edades inferiores a 10 años. (p. 85)

En la investigación que realizó Vera (1985) para su tesis doctoral, (utilizando el test de Benley) en el apartado del test de memoria rítmica nos revela:

Un aumento continuo en la medida de las puntuaciones de año en año. Excepto a los 7, 8 y 9 años, hay niños en todos los grupos que consiguen la

puntuación máxima, y por debajo de los 12 años hay siempre algún niño que consigue un solo punto o ninguno. (p. 21)

En esta ocasión, Lacárcel (1995) utiliza los estudios de Seashore y Stamback para explicar la evolución rítmica de los niños, y señala que:

En la aplicación de pruebas y tareas sobre reproducción de fórmulas y estructuras rítmicas, (Seashore, Stamback...) han podido demostrar que los niños de 12 años son capaces de retener y reproducir formas rítmicas de 7 y 8 elementos; esto prueba que se ha llegado a cubrir una etapa de desarrollo que comenzaba en sus orígenes, con la reproducción de 3 o 4 elementos en niños de 3 a 4 años y que la complejidad de las estructuras rítmicas más variadas siguen siendo proporcionalmente dominadas por los niños conforme van ascendiendo en su evolución, por lo tanto, contando con el mismo número de elementos, la complejidad de su disposición podrá ser superada por los niños de más edad. (p. 87)

Tanto en este capítulo como en los siguientes que traten sobre las aptitudes musicales y numéricas desarrolladas en el pensamiento lógico-concreto y lógico-formal, únicamente se van a tratar las aptitudes que estén directamente relacionadas con los objetivos de nuestra investigación.

### **3.2.2 Que se desarrolla durante el periodo de operaciones formales**

Como acabamos de observar en el anterior apartado, la gran mayoría de aptitudes musicales se adquieren antes de los 11 años, aunque todavía hay algunas que estaban en proceso y terminan de desarrollarse en esta etapa, que son las que Nebreda (1999a) nos enumera a continuación.

- Se desarrolla la capacidad de organización de la obra musical, y se es capaz de organizar la obra en el plano rítmico, melódico y polifónico.
- Acceso a la comprensión de los elementos simbólicos.
- Capacidad de interpretación de la obra siguiendo los datos escritos en las partituras.
- Formación del propio concepto de la interpretación.
- Aparición de la sensibilidad estética.
- Capacidad de composición y creación de obras musicales.
- Aumenta significativamente el grado de abstracción en este periodo.
- Mejora sensiblemente la habilidad de discriminar entre diferencias de tono, hasta los octavos de tono.

Aunque no podemos olvidar la influencia que ejerce la aculturación musical en la sociedad del siglo XXI, la música está presente en todos los ámbitos sociales, se escucha música con los amigos, en las fiestas, reuniones familiares, en la radio, televisión, el cine, y en cualquier tipo de acto social. Por este motivo no debemos obviar la influencia del enfoque sociocultural del aprendizaje de Vygotsky, en el que el conocimiento también se produce mediante la acción entre el sujeto y el medio, entendiéndose por éste, un medio social y cultural; confirmándose en la investigación que realizó Vert (2013), en la cual reflejaba que los estilos de música que tenían más influencia en el desarrollo de las aptitudes musicales de los adolescentes eran: la música culta, el jazz, el rock y la música ligera melódica, en este orden.

### **3.2.3 Los tests que la miden**

Los tests de aptitudes musicales fueron novedad a principios del siglo XX, hoy en día son usados por la gran mayoría de la comunidad científico-musical. La utilización de la psicometría en la investigación musical data de los años 20; fue el psicólogo Seashore en 1919 quien sentó las bases al crear su *Seashore Measures of Musical Talent*, que ha sido revisado en dos ocasiones.

Basándose en el Test de Seshore, otros autores, fueron creando el suyo propio, pero sin tener en sus días, ni en la actualidad, la relevancia e importancia que tuvo y sigue teniendo el de Seashore, debido a su visión analítica de la aptitud musical, sus posteriores revisiones y su tipificación española en 1982 gracias a la investigación del Dr. del Río.

Desde principios de siglo XX hasta nuestros días, en diferentes estudios realizados por profesores de distintos países, se han estado utilizando tests para medir la musicalidad, el talento musical, las aptitudes musicales, etc. sin ponerse de acuerdo en cuál era el más preciso, puesto que cada uno de los investigadores pertenecen a escuelas y corrientes intelectuales diferentes y, como consecuencia, fomenta distintas formas de ver y apreciar el término aptitud musical.

Según Laucírca (1998), existen tests que miden la aptitud musical sin ser necesario haber recibido aprendizajes previos, como los de Bentley, Gordon, Seashore, Wing, etc. y también los que miden los resultados obtenidos por un aprendizaje como los de Aliferis, Colwell, etc. y, ampliando el tema de las aptitudes, citaremos asimismo el test de Gaston, que mide el interés de un sujeto hacia la música y los de Adler, Bradley, Long, Taylor, etc. que miden la sensibilidad hacia la Música.

Una vez más, al hablar de las aptitudes musicales, los especialistas vuelven a no ponerse de acuerdo con respecto a los aspectos (que anteriormente mencionaba Seashore), y a la metodología para medirlos que nos llevan a conocer la aptitud musical de un individuo concreto. Los autores más representativos nos hablan de dos concepciones de aptitud musical, una global o única y otra específica.

Hemos visto como Lundin, Mursell y Wing (citados en del Río, 1999), eran defensores de la aptitud musical global, y afirman que, “si la música es una unidad, la aptitud musical, aunque compleja, será una unidad única.” (p. 76)

Los de la concepción analítica, (entre los que encontramos a Seashore) nos dicen que la música es analizable en sus partes componentes, dada la complejidad de la aptitud musical. Los partidarios de esta concepción, piensan en función de aptitudes separadas y las evalúan como tal, (altura, intensidad, ritmo, etc.) como también consideran que estas aptitudes son innatas.

En este sentido, vemos como del Río (1982) señala que:

Es interesante observar que, cuando los críticos del enfoque analítico y defensores de la “música como un todo único”, tratan de determinar la aptitud musical, utilizan tests separados de los diferentes factores, precisamente compelidos por la auténtica complejidad de esta aptitud. (p. 95)

Como ejemplo claramente significativo, vemos el caso del anteriormente citado Wing, en el que los tests de aptitudes musicales que utiliza y lleva su nombre trata las pruebas desde tres aspectos; el primero para conceptos armónicos, el segundo para la medición de la altura y el último para las melodías.

En el aspecto de las características que debe tener los tests de aptitudes musicales para la escuela, Samperio (1994) señala algunas características que no deben faltar:

- Test de memoria rítmica de duraciones: cada ítem podría constar de una propuesta o modelo (una frase rítmica) que debería ser recordada por el sujeto, a la que seguirían varias imitaciones exactamente iguales al modelo o incluyendo alguna diferencia en las duraciones, que serían comparadas con aquél.

- Test de memoria rítmica de acentuaciones: similar al anterior, variando, en su caso, los acentos de algunos sonidos en lugar de las duraciones.
- Test de memoria melódica: consistiría en comparaciones de parejas de melodías.
- Test de memoria armónica: comparaciones entre pares de series de acordes iguales o diferentes.  
(p. 178)

A nuestro juicio, sumaríamos a los que acabamos de exponer, una prueba que midiese el aspecto del timbre musical como parte de la aptitud, ya que la complejidad de la música en sí nos obliga a diferenciar entre los diferentes instrumentos ejecutantes de cada obra.

### 3.3 La aptitud numérica

Acabamos de ver la diversidad terminológica que utilizan los autores para referirse a la aptitud musical, en el apartado numérico nos ocurre lo mismo que con su equivalente musical; no hay uniformidad a la hora de utilizar un término concreto, encontramos los términos *aptitud numérica*, *habilidad numérica*, *factor N*, etc. indistintamente en varios autores. Para evitar errores en nuestra investigación vamos a utilizar siempre el término aptitud numérica.

El término ha sufrido bastantes revisiones, antiguamente considerábamos una persona competente numéricamente si era capaz de dominar la aritmética y los porcentajes, pero en el mundo actual, los requisitos de esta competencia son mucho mayores según Nunes y Bryant (2003), hecho que corroboramos con el test de aptitud numérica del BAT-7, debido a que no sólo demanda cierta aptitud aritmética, conocimientos de cifras y hechos numéricos básicos, sino que basa el acierto de la resolución de los ítems en la capacidad inductiva y deductiva (que definimos en el siguiente apartado) del individuo.

### 3.3.1 Adquirida en el periodo de operaciones concretas

Piaget (1955 con Inhelder, y 1961 con Beth) llama periodo de operaciones concretas, al periodo de edad que transcurre desde los 7 a los 11 años, y se caracteriza por un *pensamiento concreto* sin llegar a lo abstracto.

En relación al desarrollo cognitivo de las estructuras lógico-matemáticas de esta etapa, realizó muchas aportaciones al tema, vamos a destacar únicamente las que tienen relación con nuestra investigación:

- **La conservación**

Hallamos una evolución a través de la etapa; el niño primero logra la conservación numérica, después la conservación de área y masa, y por último la conservación del volumen. Según Piaget (1961), para efectuar las tareas de conservación los niños se basan en operaciones mentales básicas, como la identidad, la compensación o la negación.

Lacárcel (1995) realizó un estudio en el que diseñó tareas de conservación musical (que ya hemos citado en el anterior apartado), conservación de las cantidades discretas y conservación de las cantidades continuas, en el que obtuvo varias conclusiones; los niños no conservadores en las cantidades continuas suelen ser conservadores en las cantidades discretas, en cambio no registró ningún niño conservador en las cantidades continuas, que no fuera conservador en las cantidades discretas, puesto que la adquisición de la conservación de las cantidades discretas es anterior a las continuas. Destacó que a partir de los 7/8 años los niños realizaban correctamente la tarea de conservación de cantidades continuas, y tenían una alta capacidad predictiva en la tarea de conservación musical, exceptuando el parámetro n.º 6, que trataba sobre el acompañamiento armónico. Aunque la verdadera pionera en este campo (su tesis doctoral versaba sobre este tema), y su posterior perfeccionamiento, estudiándolo ampliamente más que ningún otro investigador, fue Marilyn Pflederer Zimmerman, de la Universidad de Illinois.

- **Las relaciones espaciales**

Hay tres aspectos centrales que deben considerarse de la teoría piagetana según Córdoba (2011).

1. El espacio no es un concepto que surja de forma espontánea en el niño.
2. Hay tres tipos de relaciones espaciales: topológicas, proyectivas y euclidianas.
3. Y se comenzarán a contemplar las relaciones proyectivas y euclidianas, gracias al hecho de que las características de su pensamiento son ahora más flexibles y reversible.

En una disertación inédita, Wade (2011), nos cita algunos de los estudios que han demostrado una relación causal entre el hábito de audiciones musicales y el razonamiento espaciotemporal (Rauscher, 1994), por medio de la recepción de clases de música y las tareas de representación espacial (Hetland, 2000), y la enseñanza de la música y las capacidades cognitivas espaciales (Costa-Giomi, 1999).

Por otro lado, Geist, K., Geist, E. A. y Kuznik (2012) consideran que hay elementos musicales como el tiempo constante, el ritmo, la melodía y el compás, que poseen principios matemáticos inherentes a las propiedades espaciales, así como a la seriación, que tratamos a continuación.

- **La categorización, inclusión de clases y seriación**

La teoría piagetana está convencida que la aptitud numérica no aparece hasta el estadio de operaciones concretas, relacionándola intrínsecamente con el desarrollo de la capacidad lógica, y se basa en la relación conceptual del número con la competencia de resolver pruebas de conservación numérica, de seriación y de clasificación, afirman varios autores coordinados por Montañés

(2003), prosiguen advirtiéndonos que también existen diversos experimentos que no aceptan taxativamente tal sincronismo. Otros autores que critican los trabajos de inclusión de clases, clasificación y seriación piagetanos son Modgil, S, Modgil, C y Brown, G. (2006), en la 6ª edición de su *Jean Piaget: an interdisciplinary critique*.

- **Razonamiento deductivo y razonamiento inductivo**

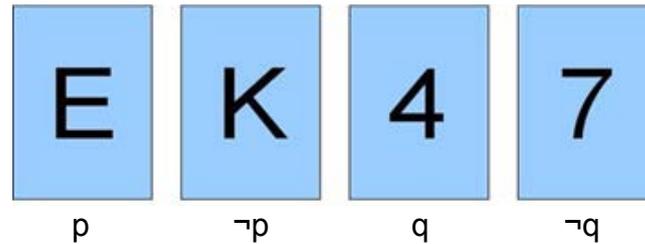
El razonamiento deductivo es el tipo de razonamiento que parte de una premisa general para terminar deduciendo conclusiones particulares, por ejemplo, todas las mujeres sienten emociones, Claudia es una mujer, por lo tanto Claudia siente emociones; la propiedad que le da validez al razonamiento es que la veracidad de la conclusión está condicionada a la veracidad de sus premisas.

Wason (1968) puso en duda las tareas sobre las operaciones formales de Piaget con su *tarea de las cuatro tarjetas*, en ella, se presentaban cuatro tarjetas en las que por un lado de la tarjeta tenían un número, y por el otro una letra, y se realiza el siguiente enunciado en forma de regla:

*Si en una tarjeta hay una E por una cara, entonces hay un 4 por la otra.*

La tarea consistía en saber cuál o cuáles tarjetas, habría que dar la vuelta para confirmar que la regla que acabamos de formular es verdadera o falsa. Es decir, pensar en lo verdadero para seleccionar lo falso, como aseveran Santamaría y Espino (2006).

La solución reside en levantar solo las tarjetas E (p) y 7 ( $\neg$ q), ya que es la única combinación en la que *la implicación* en la verdad del condicional (si p, entonces q), es falsa.



**Figura Nº 41<sup>22</sup>.** Tarea de las cuatro tarjetas de Wason

Wason (1968) quedó tan asombrado por la dificultad para resolver la tarea que habían mostrado sus propios compañeros de departamento (que radicaba únicamente en la utilización de la lógica de la implicación del condicional), que se planteó la posibilidad de que los colegas que se mostraron incapaces de resolver dicha tarea, aun poseyendo un alto nivel intelectual, tampoco serían capaces de realizar las tareas relacionadas con las operaciones formales de Piaget, y por consiguiente cuestionó con solidez la teoría piagetana. (Gutiérrez, García y Carriedo, 2002).

Al contrario que en el deductivo, el razonamiento inductivo parte de lo particular hacia lo general, es decir, consiste en obtener conclusiones generales a partir de premisas, este tipo de razonamiento ha presentado muchas críticas y solo se aceptan sus conclusiones mientras no aparezca ningún caso que contradiga la generalización.

Para no resultar gravosos, dejaremos sin exponer aspectos como la transformación, la reversibilidad o la descentración (aunque este último fue el aspecto que utilizó Lacárcel en su tarea de conservación musical que acabamos de comentar), por no estar directamente relacionadas con los objetivos de nuestra investigación.

### **3.3.2 Que se desarrolla durante el periodo de operaciones formales**

La evolución cognitiva que se da a partir de los 11 años es denominada por Piaget (1955, 1961) *periodo de operaciones formales*. A continuación, con

la ayuda de Navas (2002) y Lara (1994), apuntamos los rasgos más reseñables de esta etapa.

- Lo real está subordinado a lo posible

Se posee la capacidad potencial de concebir y elaborar todas, o casi todas las situaciones posibles que podrían coexistir en una situación dada. No sólo se tienen en cuenta los datos reales presentes, sino que, además, prevé todas las situaciones y relaciones causales posibles.

- Carácter hipotético deductivo

En la adolescencia, las abstracciones o teorías de los sujetos, se convierten en hipótesis. Se utiliza una estrategia que consiste en formular un conjunto de explicaciones posibles y someterlas a prueba para comprobar su conformación empírica. Igualmente utiliza un razonamiento deductivo, lo que supone el uso del llamado Esquema de Control de Variables, el cual se realiza disociando los factores.

- Carácter proposicional

Se sirve de proposiciones verbales como medio de expresión de las hipótesis; las proposiciones son afirmaciones sobre lo que puede ser posible, son de naturaleza abstracta e hipotética.

- Naturaleza combinatoria

Ante un determinado problema, el adolescente es capaz de realizar combinaciones, variaciones y permutaciones de los objetos y proposiciones que en ellos intervienen, para conseguir formular todas las posibles soluciones (Lara, 1994, p. 166).

Acabamos de ver las características funcionales del pensamiento lógico-formal, a continuación, conoceremos las características estructurales, que fueron parte de las aportaciones de Piaget al estudio del desarrollo cognitivo; la búsqueda de los modelos lógico-matemáticos que se correspondieran con dichas estructuras cognitivas, siguiendo a Lara (1994).

- Las operaciones interproposicionales como retículo: el sistema de las 16 operaciones binarias.

Siguiendo el ejemplo y la codificación de los términos de la balanza de Piaget, un individuo que esté desarrollando el pensamiento lógico-formal, antes de empezar a experimentar puede plantearse las siguientes cuatro posibles soluciones al problema.

- $p \wedge q$ : la variación del peso hace variar la inclinación de la balanza.
- $p \wedge \neg q$ : la variación del peso no hace variar la inclinación de la balanza.
- $\neg p \wedge q$ : la no variación del peso hace variar la inclinación de la balanza.
- $\neg p \wedge \neg q$ : la no variación del peso no hace variar la inclinación de la balanza.

1: $\emptyset$	$\neg [(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)]$
2: $\{a\}$	$p \wedge q$
3: $\{b\}$	$p \wedge \neg q$
4: $\{c\}$	$\neg p \wedge q$
5: $\{d\}$	$\neg p \wedge \neg q$
6: $\{a, b\}$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$
7: $\{a, c\}$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$
8: $\{a, d\}$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
9: $\{b, c\}$	$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
10: $\{b, d\}$	$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
11: $\{c, d\}$	$(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
12: $\{a, b, c\}$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
13: $\{a, b, d\}$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
14: $\{a, c, d\}$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
15: $\{b, c, d\}$	$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
16: $\{a, b, c, d\}$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

**Figura N° 42.** Sistema de las 16 operaciones binarias<sup>23</sup>

Asociándose entre ellas podrían conseguir las 16 combinaciones posibles, como acabamos de observar en la **Figura N° 42**.

- Las operaciones interproposicionales como grupo: INRC.

Identidad (I): No variar una determinada proposición.

Negación (N): La inversión de la proposición, es decir, la afirmación en negación, y la negación en afirmación.

Reciprocidad (R): Cambiar la afirmación por negación y la negación por afirmación, dejando conjunciones y disyunciones tal como están.

Correlatividad (C): Cambiar conjunción por disyunción y viceversa, dejando las afirmaciones y las negaciones como están.

- Esquemas operatorios formales.

Todas estas estructuras cognitivas que acabamos de ver exigen al individuo el empleo de los esquemas operatorios formales, que surgen del retículo y del grupo, y que vamos a enumerar con la ayuda de Lara (1994):

- El esquema de las proporciones: Consistente en comprender la relación entre dos funciones que varían conjuntamente.
- El esquema de doble sistema de referencia: Consistente en comprender la acción de dos sistemas que varían conjuntamente, pudiendo sus acciones compensarse, anularse, sumarse, etc.
- El esquema de equilibrio mecánico: Consistente en la comprensión del principio newtoniano de acción-reacción.

- El esquema de probabilidad: Que consiste en comprender la posibilidad de aparición de un determinado fenómeno entre un conjunto de otros posibles.
- El esquema de correlación: Que consiste en comprender la posible relación existente entre diversas variables.  
(p. 166-167)

No podemos terminar estos apartados sin valorar las críticas que recibió Piaget al respecto de sus teorías; él mismo, revisó su teoría sobre el pensamiento formal en 1970, y retrasó la edad de adquisición, así como limitó su nivel de generalidad. Otras veces provenían del rechazo de sus colegas sobre las relaciones entre aprendizaje y desarrollo de éstas; aunque también tuvo que lidiar con numerosos estudios (citados en Castorina, 1998), que criticaban su teoría psicogenética por la aplicación de ciertos métodos instructivos que producían mejoras en el aprendizaje, pero no así en el nivel de desarrollo cognitivo.

### **3.3.3 Los tests que la miden**

En un primer momento queríamos crear un instrumento propio para medir la aptitud numérica, pero pronto nos pudimos dar cuenta de la gran dificultad que entrañaba, y del poco tiempo del que disponíamos, así que optamos por la opción de utilizar un test estandarizado que tuviera la validez y fiabilidad suficientemente contrastadas. Tenía que cumplir mínimo 2 requisitos:

1. Estar creado en castellano, o en su defecto que tuviera una tipificación española lo suficientemente contrastada y validada por expertos en la materia.
2. Que estuviera actualizado a las nuevas leyes educativas y publicado por alguna editorial de prestigio, para poder adquirirlo con total garantía de

que cumple las máximas exigencias de los organismos competentes, para realizar un estudio de este nivel.

Y éste fue el resultado de nuestra búsqueda.

- **TEDI-MATH. Test para el Diagnóstico de las Competencias Básicas en Matemáticas (b) -de 4 a 8 años-**

Completa batería en la que los tests están contruidos con referencia a un modelo de funcionamiento cognitivo, lo que permite comprender las causas profundas de los fenómenos observados. No debe ser considerado como un instrumento de evaluación del rendimiento escolar sino como una batería de evaluación con profundidad, tanto en el ámbito escolar como en el clínico, que permite describir y comprender las dificultades que presentan los niños en el campo numérico.

- **TEMA-3. Test de Competencia Matemática Básica 3 (b) -de 3 a 8 años-**

Diseñado para evaluar la competencia matemática en niños de 3 a 8 años, pero también resulta útil en alumnos de más edad con problemas en el aprendizaje de las matemáticas. Permite identificar desde las primeras etapas de escolaridad, alumnos con dificultades de aprendizaje o que pudieran llegar a desarrollarlas. Evalúa conceptos y habilidades formales e informales en diferentes campos: conteo, comparación de números, lectura de los números y los signos, dominio de los hechos numéricos, habilidades de cálculo y comprensión de conceptos.

En un primer momento habíamos contemplado la posibilidad de obtener la muestra de nuestra investigación de alumnos que cursaran Educación Primaria, pero por diversos motivos desestimamos esta opción; por lo tanto los tests que acabamos de ver, que eran los únicos destinados únicamente a la medición de la disciplina numérico-matemática ya no nos servían.

Al no encontrar ningún test específico que midiera la aptitud numérica en el nivel educativo de nuestra investigación (ESO), decidimos estimar la posibilidad de estudiar las baterías de aptitudes que contemplasen algún test de aptitud numérica, que se pudiera aplicar de forma independiente, y que estuviera diseñado para administrarse a alumnos de Educación Secundaria, y encontramos las siguientes baterías:

- **BTDA-2. Batería de Tests para el Diagnóstico de los Adolescentes-2 (b) -1º y 2º de ESO-**

Extensa batería que permite planificar el aprendizaje en la ESO y facilita la toma de decisiones relacionadas con la orientación educativa. Mantiene la continuidad en las áreas analizadas, en las baterías aplicadas en cursos anteriores, lo que aporta coherencia al seguimiento del alumno.

- **A-2. Batería de tests para Adolescentes-2 (b) -3º y 4º de ESO-**

Batería pensada para facilitar la orientación de los alumnos que terminan los estudios correspondientes a la Enseñanza Secundaria Obligatoria y antes de iniciar los estudios de Bachillerato. Se trata de una herramienta que facilita las acciones de orientación en un momento educativo de gran importancia, ya que han de tomarse decisiones trascendentales para los alumnos.

- **EFAI 3. Evaluación Factorial de las Aptitudes Intelectuales (b) -1º a 4º ESO-**

Instrumento de aplicación de referencia en la evaluación de las aptitudes intelectuales, que permite evaluar de una forma muy completa y con un enfoque homogéneo a personas con diferente formación. Evalúa la capacidad para resolver ágilmente problemas de muy diverso tipo, mantener una adecuada flexibilidad intelectual y realizar procesos lógicos de deducción e inducción.

Está formado por cuatro baterías, cada una dirigida a un nivel de edad o de formación diferente, y compuestas por cinco tests: Aptitud espacial, Aptitud numérica, Razonamiento abstracto, Razonamiento verbal y Memoria.

- **TEA. Tests de Aptitudes Escolares (a) Nivel 2 -de 11 a 14 años- Nivel 3 -de 14 a 18 años-**

Tests para evaluar la inteligencia desde el enfoque clásico que entiende ésta como la aptitud del sujeto para aprender. Sin embargo, la posibilidad de convertir las puntuaciones obtenidas en los tests en CI, le sitúa en la línea de la medida de la inteligencia general y sus factores.

Se divide en 3 niveles, que reconcilian la evaluación del rendimiento en tareas escolares con la medida de variables psicológicas puras, como lo es la inteligencia. Cada nivel explora 3 aptitudes escolares fundamentales: Verbal, Numérica y Razonamiento.

- **Y por último el BAT-7. Batería de Aptitudes de TEA (b) -1º de ESO en adelante, y adultos-**

El BAT-7 es una nueva batería para la evaluación de las aptitudes que han demostrado ser más relevantes en los ámbitos escolar y profesional: Aptitud verbal (V), Aptitud espacial (E), Atención (A), Concentración (CON), Razonamiento (R), Aptitud numérica (N), Aptitud mecánica (M) y Ortografía (O). Que pueden ser aplicadas individualmente o de forma conjunta, siendo ésta una característica fundamental para decantarnos por él.

El test de aptitud numérica del BAT-7 fue el elegido como instrumento de medida para nuestra investigación; para no extendernos en este apartado, la reflexión que motivó esta decisión la exponemos ampliamente en el apartado 5.3.2.1 Justificación de la elección del Capítulo 5.

### **3.4 La influencia de la música y las matemáticas en el desarrollo cognitivo**

La Música forma parte del desarrollo del ser humano y llega a ser tan importante que no se debe prescindir de ella. Durante los primeros años de vida del niño, se sientan las bases pedagógicas que permitirán un desarrollo armonioso de sus facultades, en el plano cognitivo, este desarrollo implica un correcto estímulo y ejercicio de las habilidades para percibir, pensar, comprender, conceptualizar y operar dentro de la realidad musical con superación, afirma Grandas (2011).

#### **3.4.1 Desarrollo de habilidades cognitivas**

Weiss (2015), examinó los efectos cognitivos de la música ambiental que se utiliza con los estudiantes de secundaria durante las clases y las pruebas de matemáticas; 8 escuelas, 9 profesores, 23 clases y 302 estudiantes participaron en el proyecto. Utilizó una serie de discos compactos de selecciones de Mozart. Las pruebas fueron diseñadas por los profesores para su uso durante un día lectivo ordinario de clases y pruebas. Las condiciones de música y sin música se invirtieron para que estuvieran sobre el propio control de los estudiantes. Los resultados mostraron una adquisición no estadística en general; se encontró un incremento gradual de los que habían tocado instrumentos, respecto a los que no. Otros logros que se observaron, hacen relación a si a los estudiantes les gustaba o no les gustaba la música ambiental durante las clases y las pruebas, si les gustaba o no les gustaba escuchar música mientras se hacía la tarea, si les gustaba cantar o no, y si sentían que la música era una ayuda o un estorbo para su atención.

Vert (2013), realizó un estudio similar con más de 1.800 adolescentes participantes, en el que comparó los hábitos musicales con su capacidad de percepción auditiva, concluyendo que tanto el hábito de la práctica instrumental, como vocal, desarrollaba un mayor rendimiento en las tareas de discriminación auditiva.

De la misma opinión es Yang (2015) cuando analiza el impacto de la práctica de la música en los resultados educativos. Las estimaciones de regresiones multivariantes y efectos fijos individuales sugieren que la actividad musical en la infancia, ya sea por medio de tocar un instrumento o cantar, se relaciona positivamente con los logros educativos en la adolescencia.

La magnitud y la significación de los coeficientes estimados para los diferentes indicadores de la música son contundentes cuando se incrementa la cantidad de variables de control individual y familiar. Sin embargo, el tamaño de las estimaciones de música disminuye cuando se mantiene constante el efecto de la educación de los padres, otras actividades en el tiempo de libre, y los logros educativos previos, concluyó el autor.

Esta conclusión la comparte Theorell (2014), que afirma que los experimentos controlados en las escuelas indican que la actividad musical puede reducir los niveles de estrés, de la misma opinión son Cabanac A., Perlovsky, Bonniot-Cabanac y Cabanac, M. (2013), y Praise y Meenakshi (2015), cuando afirman estos últimos que la música actúa como un calmante para el estrés, ayuda en el aprendizaje, y alienta el desarrollo personal y el bienestar. Los diferentes tipos de música tienen diferentes efectos sobre los oyentes.

Sin embargo, los autores seguían teniendo dudas en cuanto a las causas de la prueba de rendimiento más alto de estos estudiantes: ¿Se desempeñan mejor porque escuchan música durante sus exámenes, o los realizarían mejor de cualquier modo porque están más dotados/motivados?

Esto motivó el presente estudio como un paso preliminar hacia esa pregunta general: ¿Los estudiantes a quienes les gusta y/o practican música tienen mejores calificaciones que los demás? Sus resultados confirmaron la hipótesis de que: los estudiantes que estudian música tienen mejores calificaciones en todas las asignaturas. A la misma conclusión llega Thornton (2013) en su estudio, y Morrison (1994), que analizó las notas de 13.327

estudiantes de 10º grado (4º de ESO), y concluyó que los alumnos que poseían alguna formación musical obtenían mejores resultados académicos en Historia, Ciencia, Matemáticas y Lengua Inglesa, que sus compañeros que carecían de formación musical.

Las intenciones de demostrar al entorno científico los beneficios de la música, hacen de ella un papel importante en la formación de los jóvenes durante la escolarización. Por lo tanto, la música debe tener ese papel importante en el sistema educativo a través de una educación musical funcional, que estimulará y facultará además de los musicales, los efectos positivos mencionados en todas las áreas de la educación, concluyen Zelenkovska e Islam (2015), siguiendo la misma línea que los anteriores autores.

A través de 14 años de enseñanza de la música en el área metropolitana de Toronto, *la música te hace más inteligente* es una noción que ha impregnado muchas de las conversaciones que ha tenido el autor con múltiples partes interesadas en la educación pública. Dichas conversaciones han sugerido que los beneficios secundarios de enseñanza de la música se han convertido en la principal razón por la que enseñamos música, lo que Vitale (2011) concibe como un nuevo cambio de paradigma en educación musical.

Estamos de acuerdo con los innumerables beneficios que aporta la educación musical demostrados en infinidad de investigaciones, pero, tampoco debemos olvidar que la música es un arte, y que no única y exclusivamente debemos enseñar música por sus beneficios secundarios, sino por la música en sí, como concluye en su trabajo el autor, que a través de una muestra de 100 participantes (cuatro grupos de partes interesadas en educación primaria; profesores de música, estudiantes, padres y profesores no musicales), y un enfoque de múltiples métodos de investigación, explora las percepciones y perspectivas de la citada frase *la música te hace más inteligente*, validándola.

El debate científico sobre los posibles efectos beneficiosos de las experiencias musicales durante la infancia, junto a las referencias a la

musicalidad, han centrado los posibles efectos sobre la cognición y la capacidad de procesar las emociones. Para Theorell (2014), la musicalidad, la capacidad cognitiva y la capacidad de procesar las emociones están relacionadas entre sí, y esas relaciones, también tienen correlatos neurobiológicos que potencialmente indican efectos sobre las estructuras cerebrales de la amplia práctica musical. Los experimentos realizados con seguimiento prospectivo en niños pequeños, han mostrado efectos beneficiosos pero escasos de la temprana práctica de la música entorno a la cognición, pero los resultados no son consistentes. Un gran estudio poblacional idéntico mostró una relación estadística entre la cantidad de práctica musical durante toda la vida y la capacidad de manejar las emociones, pero esta relación se explica por las relaciones genéticas, concluye el autor.

Williams, Barrett, Welch, Abad y Broughton (2015), nos cuentan que los beneficios de la temprana lectura compartida entre padres e hijos siempre se han conocido, sin embargo, lo mismo no puede decirse de las tempranas actividades musicales compartidas en el hogar.

Este estudio investigó las actividades musicales en casa de padres e hijos en una muestra de 3.031 niños australianos que participan en el estudio *Creciendo en Australia: Estudio Longitudinal de Niños australianos* (LSAC). Una serie de análisis de regresión (por medio del control de un conjunto de importantes variables sociodemográficas) revelaron que la frecuencia de las actividades musicales compartidas en casa tenía una asociación parcial significativa con las medidas en el vocabulario, la aritmética, la regulación emocional y de la atención y las habilidades prosociales en los niños. Después incluyeron, tanto en la lectura de libros como en las actividades musicales compartidas en casa, los mismos modelos, y se encontró que la frecuencia de las actividades musicales compartidas en casa, mantenían las asociaciones parciales con las medidas de habilidades prosociales, la regulación de atención, y la aritmética. Estos hallazgos sugieren que las actividades musicales en casa, compartidas entre padres e hijos, pueden jugar un papel en el apoyo al desarrollo de los niños, concluyeron los autores.

Según Zelenkovska e Islam (2015), gracias a los logros tecnológicos acaecidos en las últimas décadas, han aparecido enfoques científicos que penetran más profundamente en el estudio de la importancia de la música y su influencia positiva en las actividades humanas. Algunos se centran en las áreas neuronales y cognitiva del cerebro humano que se activan durante la percepción y procesamiento de la música (como veremos en el siguiente apartado de Neurociencia educativa). Esta cognición musical es un enfoque interdisciplinario para la comprensión de los procesos mentales que apoyan conductas musicales, incluyendo la percepción, la comprensión, la memoria, la atención y el rendimiento.

Así mismo vemos como Ruthsatz, J., Ruthsatz, K. y Stephens (2014a), definen los niños prodigio como aquellos individuos que alcanzan un nivel profesional de logro, en un dominio culturalmente relevante, antes de los 10 años o en la adolescencia.

Estudios recientes han comenzado a abordar este enigma, y han surgido algunos rasgos como bases fundamentales de prodigiosidad a través de dominios: un coeficiente intelectual promedio o superior, extraordinaria memoria a corto plazo, y una mayor atención a los detalles. Los autores investigaron si los perfiles cognitivos de los prodigios difieren de acuerdo a su área de especialidad, por medio del uso de la quinta edición del test de inteligencia Stanford Binet, evaluaron los perfiles cognitivos de 18 niños prodigio en todos los dominios del arte, la música y las matemáticas.

Los resultados sugieren que los niños prodigio tienen perfiles cognitivos distintos en cada dominio. Aunque todos los niños prodigio tenían recuerdos excepcionales, los niños prodigio en música y matemáticas puntuaron significativamente más alto en memoria a corto plazo, que los niños prodigio en arte.

Las clases de música aumentan el rendimiento de los niños en las pruebas de habilidad cognitiva y promueven el logro académico; afirman Degé,

Wehrum, Stark y Schwarzer (2014), la asociación entre los logros académicos y las lecciones de música sigue siendo fiables, incluso cuando el coeficiente intelectual se mantiene constante, lo que indica que la asociación es más que un efecto de transferencia cognitiva. Por lo tanto, se plantea la cuestión de si las clases de música se asocian con otras variables que están relacionadas con el rendimiento académico.

Los autores investigaron si el número de clases de música se asociaba con un autoconcepto académico del niño, el cual se relaciona con el rendimiento académico. La muestra fue de 92 niños de 12 a 14 años que variaban en su experiencia musical. Se midió el autoconcepto y el coeficiente intelectual académico. Los padres también proporcionaron información de base demográfica detallada (incluida la información relativa a la educación en música). Un análisis de regresión múltiple, reveló que las clases de música contribuyeron significativamente a la predicción de las puntuaciones de autoconcepto académico, y significativamente mejoraron el ajuste del modelo.

Los datos indicaron una asociación positiva significativa entre las clases de música y el autoconcepto académico, incluso cuando la controlábamos por variables de confusión, y apoyan la idea de que las clases de música se asocian con una variable de la personalidad (autoconcepto académico) que se relaciona con el rendimiento académico. Sin embargo, todavía hay que investigar la dirección de causalidad porque el presente estudio es sólo correlacional, concluyen los autores.

Ruthsatz, J., Ruthsatz, K. y Stephens (2014a), abren el debate sobre si las habilidades excepcionales son innatas o se pueden adquirir. Recientemente, gran parte de este debate se ha llevado a cabo a la hora de considerar las capacidades de músicos excepcionales.

Varios de estos estudios, prosiguen los autores, sugieren que la inteligencia general y el dominio de habilidades específicas, las cuales caen en el lado de la naturaleza del espectro, juegan un papel importante en el desarrollo

de habilidades musicales. En su trabajo, se demuestra que los estudios que trataron de argumentar a favor de una explicación puramente sostenida por tal talento musical, no pudieron descartar la posibilidad de que factores como la inteligencia general y de dominio de habilidades específicas, también contribuyen al desarrollo de las capacidades de rendimiento excepcionales.

Si la evidencia generada por los estudios de músicos excepcionales proporciona una base sólida para creer que la naturaleza es el principal impulsor de talento excepcional, esa evidencia recibe un poderoso impulso a partir de estudios recientes entorno a los niños prodigio, concluyen los autores.

Para Eubank (2015), escuchar música y sus patrones rítmicos pueden alterar la organización y ejecución de los movimientos del cuerpo en general, crear cambios fisiológicos en el sistema nervioso autónomo, y se ha demostrado que afecta el procesamiento cognitivo. El objetivo de su trabajo fue proporcionar la base para la incorporación de la música en el ámbito de la terapia visual para mejorar las habilidades de procesamiento visual-motor y visual, así como describir la interacción entre la audición y la visión y una introducción de cómo se utiliza la música en el ámbito de rehabilitación.

Sobol (2014), basa su estudio en los hallazgos de la neurociencia sobre la capacidad natural del cerebro para sufrir cambios físicamente a través de la modificabilidad cognitiva, mediante la creación de nuevas rutas y conexiones neuronales. El propósito de su investigación fue conocer las aplicaciones didácticas en música, para la mejora en las habilidades básicas de matemáticas, con los estudiantes que están en el espectro del autismo y que tienen trastornos de desarrollo intelectual con significativos retrasos cognitivos-lingüísticos. Setenta y siete (N=77) estudiantes en edad escolar de un programa basado en educación especial en el Condado de Nassau, Long Island, participaron en este estudio de metodología mixta.

Una muestra intencional de seis estudiantes fue seleccionada para los estudios de caso de los participantes en la investigación. El estudio de ocho

semanas se llevó a cabo durante el último período de calificaciones del año escolar, mayo-junio de 2013 en el aula de música del investigador principal.

Las siguientes preguntas de investigación guiaron este estudio:

- ¿Puede la aptitud musical medirse en los estudiantes con retrasos significativos cognitivos-lingüísticos, incluyendo trastornos del espectro autista?
- ¿De qué manera ayuda la formación rítmica y tonal a los estudiantes con retraso cognitivo o de lenguaje significativo, incluyendo los trastornos del espectro autista, y en los logros de desarrollo académico de las habilidades básicas en matemáticas?

Los resultados de la investigación, a través tanto del análisis estadístico como descriptivo inferencial de los datos, apuntan hacia la mejora del estudiante con enseñanza musical basada en estándares e instruido a través de experiencias de aprendizaje mediado. El autor observó un crecimiento significativo hacia la independencia funcional en habilidades de recuento en matemáticas pre y post-básicas. Las implicaciones educativas de la investigación representan un cambio de paradigma para las expectativas de esta población estudiantil.

Costa-Giomi (2015) revisa varias investigaciones sobre los efectos de la instrucción de la música en las habilidades cognitivas generales. La revisión de más de 75 informes muestran los siguientes resultados:

- La consistencia en los resultados relativos a los efectos a corto plazo de la instrucción de la música en las habilidades cognitivas y la falta de evidencia clara sobre los efectos a largo plazo sobre la inteligencia.
- La naturaleza compleja de la relación entre la instrucción musical y las medidas intelectuales debido a la intervención de los factores asociados

con quién está interesado, los estudia, persevera, y tiene éxito en el aprendizaje de la música.

- Y la importancia de la práctica de la música en los beneficios cognitivos a largo plazo de la instrucción musical.

Smith (2014) realizó un trabajo para discutir los beneficios de tener clases de arte y música en las escuelas primarias y los efectos que las clases tienen en el desarrollo de un niño. Así como, tratar el controvertido tema de si las clases de arte y música deben mantenerse, o ser eliminadas, a consecuencia de la financiación y las normas académicas.

El objetivo principal fue descubrir los beneficios que el arte y la música tienen en los estudiantes de primaria, independientemente de algunas de las conclusiones a discutir como el desarrollo del arte y la ayuda de la música en los años posteriores. El autor afirma que el arte y la música en las escuelas primarias son importantes, porque realmente ayudan al desarrollo del niño de una manera más positiva, y muestra su preocupación por que algunas personas creen que el arte y la música (o cualquier actividad extracurricular) no son importantes y que se debería enfocar más tiempo en el aprendizaje curricular en las escuelas.

Shin (2011) se propuso conocer cómo el programa *I Am A Dreamer Musician* (IDMP) afectaba el autoconcepto académico y la autoestima de los estudiantes de secundaria en comunidades de bajos ingresos.

Durante las siete semanas de los talleres de música semanales, los estudiantes participaron en diferentes actividades musicales, entre ellas tocar instrumentos de percusión, canto, improvisación, *jammig*, bailes de grupo y exploración dinámica y rítmica. La evaluación de IDMP tenía los modos naturalista y objetivo, e incluía:

- La modificación Self-Description Questionnaire. (SDQ-I)

- Una encuesta a los padres.
- Y una entrevista con el estudiante.

Los resultados demostraron que hubo diferencias significativas en el autoconcepto de la escuela general y concepto de sí mismo en matemáticas desde el pre-test al post-test. Tanto los padres como los estudiantes revelaron que la participación en el programa influyó positivamente en la autoestima de los estudiantes. Además de los objetivos declarados de este estudio, también se encontró un impacto inesperado del programa en las experiencias musicales de los estudiantes, concluyó Shin.

Y para cerrar este apartado, vamos a conocer los detalles de la investigación que realizaron Southgate y Roscigno (2009) sobre la asociación entre la participación en música y el rendimiento académico en la niñez y la adolescencia, a través de tres medidas de participación en actividades musicales: en la escuela, fuera de la escuela, y con la participación de los padres en forma de asistencia a conciertos.

Obteniendo los siguientes resultados; la participación varía bastante de manera sistemática por clase y condición de género, y esa participación tiene implicaciones tanto para el rendimiento en matemáticas y lectura, como para los niños y adolescentes. En particular, prosiguen los autores, las asociaciones con los logros persisten en nuestro modelo, incluso cuando se contabilizan los niveles de logro anterior. Aunque la música hace mediar algunos efectos antecedentes de los estudiantes, esta mediación es mínima, pero les condujo a la conclusión de que la participación en música, tanto dentro como fuera de la escuela, se asocia con las medidas de rendimiento académico entre los niños y adolescentes.

### **3.4.2 Metodologías educativas y formación del profesorado**

En las discusiones con los profesores de matemáticas, de varios niveles de grado, Yoho (2011) llevó a cabo una observación constante, cada año, los

estudiantes requieren que se les enseñen de nuevo los conceptos matemáticos que se les enseñó el curso anterior, pero que han olvidado. Con el incremento de contenidos sobre los planes de estudios que los profesores tienen que cubrir en el transcurso de un año escolar, se hace plausible que es insuficiente el tiempo que se invierte en la preparación de material para que pueda ser internalizado y verdaderamente aprendido a largo plazo. La cantidad de contenidos no es probable que disminuya, así ¿Qué es lo que se puede hacer para ayudar a la enseñanza a ser más eficaz?, ¿Qué se puede hacer para ayudar a los estudiantes a retener información y ser capaces de recordarla y utilizarla cuando sea necesario?, su proyecto de investigación-acción ha evolucionado para responder a la pregunta: ¿La música que se utiliza mejoraría la adquisición de habilidades matemáticas y la retención? Sí, concluyó finalmente el autor. Conclusión con la que estamos totalmente de acuerdo e intentaremos confirmarla en este estudio.

Para Nagisetty (2014), el propósito de su investigación fue probar una estrategia que utiliza conceptos relacionados con la música para enseñar matemáticas. Realizó un estudio cuasi-experimental de dos secciones de geometría correctiva en escuelas de secundaria, durante una lección crítica de la razón, proporción, y la multiplicación cruzada. Se dio una prueba preliminar a ambos grupos.

Luego, el grupo A recibió los libros de texto de instrucción normal, mientras que el Grupo B recibió el tratamiento del enfoque, *Get the Math in Music*, que es una actividad en línea que implica razonamiento proporcional en un contexto relacionado con la música. Después, prosigue el autor, se realizó un post-test a ambos grupos. Se utilizaron puntuaciones pretest y posttest para comparar las adquisiciones de conocimiento de la materia entre los grupos.

Una vez realizados los análisis pertinentes, los resultados de las encuestas mostraron que a los estudiantes no les gustaban más las matemáticas después del tratamiento. Las entrevistas revelaron que varios de estos estudiantes no eran apáticos a la geometría, en particular, si no a las

matemáticas en general. El caso de la mejora de un estudiante sugirió que las relaciones positivas entre profesores y alumnos son más eficaces, que ningún método en particular, para aumentar el rendimiento académico y la participación de los estudiantes. Serían útiles estudios adicionales en el futuro sobre las ventajas de utilizar la música para enseñar matemáticas en secundaria. Las afirmaciones de que el razonamiento proporcional es un reto fueron apoyadas, concluye el autor.

Muchos de los educadores de hoy en día apoyan el currículo integrado. Con el fin de preparar a futuros profesores para enseñar un currículo integrado en las escuelas primarias, se ofreció un curso de métodos que cubría múltiples disciplinas, a futuros profesores inscritos en el programa de formación docente de una universidad pública en la ciudad de Nueva York. A través de observaciones y diarios reflexivos, Zhou y Kim (2010), experimentaron cómo este curso influenciaba las perspectivas de los futuros profesores en la enseñanza de la ciencia, las matemáticas y la música de una manera integrada.

Los resultados indicaron que la comprensión de la integración curricular de los futuros profesores fue reforzada por el curso. También demostraron gran entusiasmo por la integración curricular durante su práctica docente, y se destacó el crecimiento profesional de los instructores en el proceso de la planificación y en la enseñanza de este curso, concluyeron los autores.

Noll (2014) ofrece una ruta didáctica a través de una serie de resultados atractivos de los enfoques algebraicos conocidos en el estudio de la escala diatónica. Este ensayo aboga por la integración del razonamiento matemático en la enseñanza de la teoría de la música. Las estrategias que se tratan, permiten a los estudiantes volver a representar los procesos de investigación y descubrimiento. El contenido se centra en el estudio de intervalos y acordes dentro de la escala diatónica. Esto implica la distinción entre las descripciones genéricas y específicas, la combinatoria de voz líder e inversión acorde, así como el poder explicativo del ciclo de quintas. Para alcanzar sus objetivos, el

ensayo cuenta con la introducción de medios poco ortodoxos, como el *Tonkreisel*, la baliza giratoria, o el cable diatónico (cuerda).

En la década de 1960 y principios de 1970, la educación matemática en las escuelas de Primaria y Secundaria americanas se sometió a una, breve pero importante, reforma: *la nueva matemática*. Se trataba de sustituir el aprendizaje de memoria, con un énfasis en la conceptualización axiomática (configuración teórica). Varios aspectos de este movimiento tienen implicaciones para la pedagogía de la teoría de la música-matemática (que trataremos en el siguiente apartado), algunos positivos y otros negativos. Este ensayo examina esa relación, y ofrece algunas sugerencias consiguientes para la enseñanza exitosa de los conceptos y técnicas de la teoría música-matemática, Peck (2014).

Montiel y Gómez (2014), abordan el tema de la música en la pedagogía de las matemáticas desde la perspectiva de dos investigadores en teoría de la música matemática (MMT). Su tema principal es el proyecto de divulgación en relación con la música y las matemáticas de la Real Sociedad Matemática Española, y su extensión a escala internacional. En segundo lugar, presentan algunas ideas y esquemas para la creación de material didáctico para cursos de matemáticas en el marco de MMT.

Una encuesta entorno al lugar que ocupa la educación musical en los sistemas escolares, ha provocado que algunos sistemas escolares eliminaran su programa de música por completo. Según Deere (2010) los sistemas escolares se ven obligados a poner más énfasis en el aumento de las pruebas y en la responsabilidad con la ley *No Child Left Behind* de 2001. En su investigación examinó el impacto que la educación musical tiene en el rendimiento académico, en lectura y matemáticas.

Así mismo analizó las percepciones de los administradores, de los miembros del consejo escolar y de los educadores en dos sistemas escolares. A continuación se utilizaron los datos de pruebas TCAP desde el año escolar 2008-2009 en los dos sistemas escolares del oeste de Tennessee, y concluyó

que había una correlación entre las puntuaciones en el TCAP obtenidas en educación musical, lectura y matemáticas.

Suganuma (2010) nos muestra un sistema de enseñanza de la música y las matemáticas con cálculos de fracciones, utilizando los nombres de las notas musicales y los valores de la nota en forma de bloques con diferentes longitudes, mientras simultáneamente instruye en temas rítmicos de compases, ritmos, y del tempo. Utiliza un tablero de ritmo para montar bloques de notas y marcar el ritmo de los bloques en el proceso y usa una persiana para bloquear la visión de un estudiante que trabaja con los bloques.

El propósito de Martin y Pickett (2013) en su investigación, es aumentar la motivación y el compromiso de los estudiantes. Parecía haber una creciente desconexión entre el potencial y el rendimiento de los estudiantes, especialmente entre los estudiantes dotados para las matemáticas y los principiantes en música. Dos docentes investigadores llevaron a cabo esta investigación con 25 estudiantes de quinto grado en dos sitios diferentes, en una clase de matemáticas talentosa y en una clase de banda que se iniciaba. Utilizaron tres instrumentos de medida, una encuesta a los maestros, una encuesta a los estudiantes y una lista de verificación comportamiento de los estudiantes.

Durante la instrucción directa, hubo varios comportamientos fuera de lugar (hiperactivo, retirado, con mala atención, perturbador, no cooperativo) que reflejaban una falta de motivación y compromiso.

Los docentes investigadores concluyeron que la intervención tuvo un impacto positivo en los cambios de percepción de compromiso y motivación de los estudiantes, y atribuyen este resultado a un aumento de la instrucción diferenciada en sus clases y un aumento en las opciones abiertas fuera del horario de instrucción. Cuando se les daba a los estudiantes más opciones en el aula, percibían sus tareas escolares más apropiadamente desafiantes, este

aumento se debió a la creación de un ambiente de clase más centrado en el alumno.

An, Capraro y Tillman (2013) presentan una investigación exploratoria que busca la manera en que los maestros integran la música en sus lecciones de matemáticas regulares, así como los efectos de las clases interdisciplinarias de música-matemáticas, en cuanto a modelado, estrategia y aplicación, en las habilidades matemáticas de los estudiantes de primaria.

Dos profesores y dos grupos de estudiantes de primer y tercer grado (n=46) participaron en el presente estudio. Los dos profesores diseñaron e implementaron actividades musicales como parte integrante de sus clases de matemáticas regulares en cinco semanas. Los resultados demostraron que ambos maestros integraron una variedad de actividades musicales con diferentes contenidos matemáticos, y sus lecciones interdisciplinarias música-matemáticas tuvieron efectos positivos en múltiples áreas de la habilidad matemática.

El propósito principal del estudio que Miksza y Gault (2014) realizaron a niños de primaria en Estados Unidos, fue describir las experiencias musicales que reciben en el ambiente académico del aula. Los datos se extrajeron del *Estudio Longitudinal de la Primera Infancia* de la clase de jardín de infancia de 1998-1999 (ECLS-K), un estudio representativo a nivel nacional que siguió a los más pequeños a través de su año escolar de octavo grado con la última ola de recogida de datos en el período 2006-2007.

Las variables relacionadas con experiencias musicales en el aula académica que estaban disponibles en el ECLS-K fueron, la frecuencia y duración con la que los niños reciben instrucción musical, la frecuencia con que la música se utiliza para enseñar matemáticas y el porcentaje de niños que reciben instrucción musical formal fuera de la escuela.

Cada una de estas variables también se analizaron en función de la urbanidad, nivel socioeconómico (SES), y la raza del niño. Se hallaron diferencias estadísticamente significativas ( $p < 0,001$ ) entre los niños, basadas en la urbanidad, el SES, y la raza en cada una de las variables de la experiencia musical. En general, los estudiantes suburbanos blancos de altos niveles de SES tendían a recibir significativamente más experiencias musicales que los estudiantes de color de los entornos urbanos y rurales y de nivel socioeconómico bajo. Los hallazgos apoyan la necesidad de abogar por programas de música de alta calidad para todos los estudiantes y en particular para los de poblaciones tradicionalmente marginadas.

La integración curricular ofrece excelentes oportunidades para que los estudiantes se centren en aplicaciones relacionadas con el mundo real y hagan conexiones significativas a través de diferentes disciplinas. Bazinet y Marshall, (2015) tratan de ir más allá, intentan integrar el currículum de educación en música y en matemáticas en un aula de educación matemática de postgrado, con estudiantes graduados *no músicos*.

Enseñan a un grupo de estudiantes de postgrado en matemáticas, una lección centrada en matemáticas y en la percusión del mundo de la música, para explorar las formas en que los maestros en proceso de formación que no son músicos podrían experimentar y utilizar las conexiones específicas entre las matemáticas y la música.

El programa *Senso-Math* promueve el conocimiento matemático de la primera infancia en los centros preescolares. Hassidov (2015), da un informe de un estudio de cinco años que siguieron 500 facilitadores de *Senso-matemáticas*, durante su formación y experiencia en la enseñanza posterior de preescolar, junto con los maestros de preescolar regulares. Estos 500 facilitadores activan 10.000 niños de tres a seis años de edad, niños de diversos sectores demográficos (ortodoxos judíos, inmigrantes judíos procedentes del Cáucaso, y rusos). Cuarenta y nueve fueron entrevistados en profundidad para examinar su desarrollo profesional, incluyendo su cambio de actitud a la

educación matemática en preescolar, y para evaluar la contribución del programa a la educación matemática en preescolar. Los resultados del estudio indican que, en general, el programa contribuyó a una tendencia positiva en su actitud con respecto a la educación matemática preescolar, aunque hubo diferencias significativas en la actitud entre los distintos sectores demográficos estudiados. Nuestra pregunta sería, ¿estas actitudes distintas entre los distintos sectores demográficos ocurrirían en la educación musical preescolar?

O'Keefe, Dearden y West (2016), realizaron un estudio con el objetivo de identificar y describir la naturaleza de las clases de primaria de Dakota del Norte en la integración de música por parte de los maestros (NDECT) en el aula general.

La mayoría de integración de música de NDECTs se realizó con las asignaturas de Lengua y Literatura (62,01%), Matemáticas (55,00%), y Educación Física (50,89%); la configuración del grupo de trabajo de tiempo (64,29%), la cobertura de tiempo de mañana, y tiempo de bienvenida (58,54%), el tiempo libre (58,13%), y el tiempo de trabajo individual (55,43%); y las habilidades matemáticas (62,01%) y habilidades cotidianas (53,99%). Escuchar música (89,13%) y cantar canciones (72,83%) fueron las actividades musicales más frecuentes. Se encontraron diferencias significativas entre la integración de la música en las materias básicas y otras variables (el género, el nivel de grado enseñado, la formación musical, y la colaboración con el profesor de música). Las materias proporcionaron razones en cuanto a por qué se incluye la música sólo en raras ocasiones en sus aulas.

En 2008, 201 profesores principiantes generalistas de Queensland, Australia, respondieron a un cuestionario destinado a crear una instantánea de las creencias de autoeficacia actuales hacia la enseñanza de la música, asevera Garvis (2013). Se pidió a los maestros principiantes que clasificaran su nivel de percepción de autoeficacia docente para la música, el inglés y las matemáticas.

Los resultados fueron analizados a través de una serie de medidas repetidas ANOVA para comparar las puntuaciones medias de diferencia estadística. Los resultados sugieren que el maestro generalista principiante disminuye su autoeficacia en música a medida que aumentan sus años de experiencia en la enseñanza, mientras que la autoeficacia del maestro en inglés y en matemáticas aumenta durante este periodo.

Un músico y un maestro de matemáticas diseñan un conjunto de clases de educación primaria para integrar la música y las matemáticas. Para Jones y Pearson (2013) los estudiantes implicados en este método, aprenden los fundamentos de la teoría de la música, incluyendo la identificación de las notas y el aprendizaje de sus valores fraccionarios. Los estudiantes están motivados por escuchar música de la cultura popular. La actividad final implica a los estudiantes crear su propia frase de cuatro barras usando su conocimiento de compás, valores de nota, y la adición de fracciones, para finalizar, el profesor de música o el estudiante pueden cantar o realizar frases creadas por los estudiantes. En este artículo, además, se proporcionan estrategias para ayudar a los educadores musicales y maestros de la escuela primaria a integrar la música con las matemáticas.

Ladipo (2014) centró su estudio en la mejora de la enseñanza a través del desarrollo profesional. La sistematización y el diseño del desarrollo profesional innovador basado en el maestro (que integra la música en las matemáticas).

El objetivo final es compartir percepciones y sugerencias de los maestros con respecto a la integración de la música, con la esperanza de mejorar la instrucción matemática y el aprendizaje de los estudiantes. Los hallazgos de esta investigación, a partir de datos cualitativos, revelaron que la realización del desarrollo profesional de calidad a través de la colaboración docente es necesario para facultar a los educadores que conduzcan a un mejor aprendizaje de los estudiantes y del ambiente de la organización, también revelaron que los maestros ganaron las habilidades, conocimientos, capacidad y alta confianza

para integrar la música en matemáticas y así estar al tanto de los problemas actuales de la educación que pueden mejorar el aprendizaje del estudiante.

En la actualidad, un cambio de paradigma dentro de la terapia educativa de la música, el estudio de desarrollo humano y la psicología de la educación, sugiere que los planes de estudio deben integrar métodos alternativos en su marco, cambiar la definición de riesgo, y reconocer la aptitud matemática y la competencia social como predictores de la capacidad del estudiante para conseguir movilidad ascendente y autosuficiencia, sugiere Heiskell (2010).

Para justificar la necesidad de los educadores consistente en integrar la musicoterapia educativa y los programas de competencias sociales en los planes de estudios estándar, Heiskell (2010), realizó un estudio con 23 estudiantes principiantes de guitarra de la escuela secundaria, y cuatro estudiantes de un programa de la escuela de secundaria. Dichos estudiantes participaron en un estudio de diez semanas que incluía: terapia de la educación musical, competencia social y aptitud en matemáticas.

Los participantes completaron las secciones de fluidez en matemáticas y cálculos matemáticos del *Examen de Desempeño Individual versión de Wechsler 3*, junto con un cuestionario que analiza las creencias de los participantes acerca de la influencia de la música en la aptitud matemática y competencia social. Aunque los resultados del pre-test y del post-test muestran diferencias estadísticamente significativas entre la musicoterapia educativa y las aptitudes matemáticas, los resultados de los cuestionarios administrados sugieren que los estudiantes perciben que la competencia social y la interacción musical aumentan el rendimiento académico y social.

Siguiendo a López y Gustems (2007), Segarra (2008), Sanders (2012), Casals, Carrillo y González-Martín (2014), entre otros, nosotros también hemos querido realizar nuestra aportación al tema de la didáctica interdisciplinar entre la música y las matemáticas. Aprovechándonos de toda la información teórica recogida en nuestro marco teórico, hemos creado una Situación de Aprendizaje

(SA) titulada *La Música y las Matemáticas: un matrimonio secreto*, que hemos trabajado con alumnos de 2º ESO (también participantes en la muestra de nuestra investigación) obteniendo unos resultados alentadores en pro de la metodología del aprendizaje interdisciplinar entre la música y las matemáticas. Dicha Situación de Aprendizaje fue publicada en marzo de 2017 por la Revista de Situaciones de Aprendizaje N° 24, con ISSN 2387-0117, de la Consejería de Educación del Gobierno de Canarias, y que adjuntamos como anexo para que puedan consultarla, y si así lo desean trabajarla con sus alumnos.

### **3.4.3 La correlación músico-matemática en el ámbito educativo**

Las investigaciones que pregonan los efectos positivos de la instrucción musical en la habilidad matemática son abundantes. En una disertación inédita, Wade (2011), nos cita algunos de los estudios que han demostrado una relación causal entre la escucha de la música y el razonamiento espaciotemporal (Rauscher, 1994), por medio de la recepción clases de música y las tareas de representación espacial (Hetland, 2000), y la enseñanza de la música y las capacidades cognitivas espaciales (Costa-Giomi, 1999).

Este creciente cuerpo de investigación presenta una plataforma sobre la que pueden incidir futuros estudios. La pregunta de investigación sobre el estudio de Wade fue, ¿cómo las matemáticas modelan las habilidades y conceptos desarrollados, cuando la experiencia de los niños pequeños se integraba en las clases de matemáticas y de música?, los participantes fueron 11 preescolares, de cuatro y cinco años de edad, que se inscribieron en jardín de infancia de una escuela preescolar privada en un suburbio de una gran ciudad metropolitana. Las dos cosas que más le impresionaron, fue contemplar las implicaciones de las lecciones sobre desarrollo matemático de los niños, porque subestimó comprensión de los conceptos abstractos de éstos, y el ritmo con el que la clase se reubicó una vez que se introdujeron los conceptos, afirmó Wade.

El siguiente estudio fue diseñado para investigar las relaciones entre las matemáticas y las habilidades musicales de los estudiantes que participan en programas musicales instrumentales exitosos de la escuela secundaria. Según Deppe (2012), los participantes de este estudio fueron seleccionados a propósito, y se incluyó un profesor y jefe del departamento de matemáticas, y el director de la banda u orquesta de 4A o 5A de 10 escuelas secundarias de Texas, consideradas como exitosas por un panel de expertos en educación musical de Texas.

La investigación para este estudio utilizó la narrativa como método de recopilación de datos. Se analizaron preguntas abiertas para temas comunes. Los resultados del estudio demostraron puntos en común entre las habilidades matemáticas y la música, como las formas en que los profesores de matemáticas y los directores de música integran las matemáticas y la música, las observaciones sobre el rendimiento académico general de los instrumentistas y las percepciones de los profesores de las matemáticas y de música que diferencian los estudiantes de bandas y orquestas de los estudiantes de la población general.

Para los directores de escuela, estos resultados proporcionan información sobre cómo promover la integración de la música y las matemáticas en el aula para mejorar el comportamiento emocional de los estudiantes, o la capacidad de organización en el logro de matemáticas, concluye Deppe (2012).

Wiggins (2012), consideró la naturaleza de la música como un constructo cognitivo y cultural y analizó la relación entre los sistemas matemáticos y los musicales; propuso que la modelización matemática de ciertos tipos puede ser apropiada para modelar ciertas relaciones musicales, pero esto es así debido a los principios cognitivos subyacentes. La conclusión a la que llegó es que para modelar la música matemáticamente es esencial modelar parte de la cognición matemática, lo que significa modelar la música en abstracto, como si fuera en sí una construcción matemática, divorciada de su origen en la mente humana.

Anderson (2014), centró su tesis a partir de su fascinación por los estudios de la música y las matemáticas. Quiso usar su conocimiento de la aritmética y la estética musical para investigar las conexiones entre la música y las matemáticas y su aplicación a sus intereses académicos y estudios; realizó una reflexión en que lo más destacable es la cita teórica de Lewin sobre el uso conjunto y grupo de teorías para entender las relaciones y transformaciones en los intervalos y acordes.

Clampitt (2009) examina una selección de relaciones entre las matemáticas y la música, y afirma que hay una escasez de tratamientos de amplio alcance que dan por supuesto un trasfondo muy pequeño, tanto en matemáticas como en música.

Geist, K., Geist, E. A. y Kuznik (2012), consideran que la investigación sobre música y terapia de la música sugiere que las matemáticas y la música están relacionadas en el cerebro desde muy temprano en la vida (Burack 2005).

Elementos musicales como el tiempo constante, el ritmo, la melodía y el compás, prosiguen los autores, poseen principios matemáticos inherentes tales como propiedades espaciales, secuenciación, cuentas, patrones, y correspondencia uno-a-uno. La música también parece estar relacionada con partes muy primitivas del cerebro (Hudson 2011). Nuestro cuerpo no puede dejar de reaccionar fisiológicamente a la entrada de música (Thaut y Kenyon 2003; Hasan & Thaut 2004). Esto implica que incluso los niños más pequeños tienen la posibilidad de responder por sí mismos a la música y a las construcciones matemáticas que contiene, afirman Geist, K., Geist, E. A. y Kuznik.

Mientras Geist, E y Geist K (2008), sugieren que la participación activa de los niños pequeños en música respalda su emergente conocimiento de las matemáticas, definen y explican el tiempo constante, el ritmo, la melodía, el compás, la dinámica y estilo, y sugieren modos para que los profesores puedan utilizar estos elementos de la música con bebés y niños pequeños para de esta

manera fomentar el pensamiento matemático temprano. En su artículo dan ejemplos detallados de actividades musicales simples, apropiadas para el desarrollo de los niños pequeños que todos los maestros (incluyendo aquellos sin formación musical) pueden utilizar en el aula.

Examinar los resultados de arte, inglés y matemáticas en las pruebas de 37.222 estudiantes de octavo grado matriculados en música y/o clases de artes visuales, y aquellos estudiantes que no estaban matriculados en cursos de arte, es el trabajo que realizó Baker (2011).

Hubo más de 12.000 estudiantes que fueron elegidos, pero no inscritos en cursos de arte. La metodología consistió en la comparación de las puntuaciones medias de los estudiantes que reciben enseñanza en música y artes visuales con las puntuaciones medias de los estudiantes excluidos de esta instrucción.

La muestra fue constituida por todos los estudiantes de educación no especial, que realizaron la evaluación estatal de las escuelas públicas en la primavera de 2008. Los estudiantes inscritos en música, prosigue el autor, tenían puntuaciones medias significativamente más altas que los que no están inscritos en música donde ( $p < 0,001$ ). La matriculación en música fue un predictor positivo de los logros académicos. Los resultados para artes visuales y artes duales no fueron tan concluyentes. En una de sus conclusiones criticó la práctica de recomendar más tiempo al inglés y matemáticas en lugar de la música, los directores deben construir horarios, incluyendo la atención adecuada, de modo que todos los estudiantes reciban una educación más equilibrada.

Boyd (2013) encontró que existía una correlación positiva entre la participación de los estudiantes en música y su rendimiento en matemáticas, así como, una correlación positiva entre las variables de participación en la música vocal y la música de viento, respectivamente, y el rendimiento en matemáticas.

Aunque la mayor correlación fue entre los años de música vocal y el logro en matemáticas. Los resultados del ANOVA indicaron que, cuando los estudiantes participaron en música durante 3 años o más, hubo un aumento significativo en las puntuaciones de matemáticas, concluyó el autor.

La intención de la investigación de An y Tillman (2015) fue examinar los efectos de una secuencia de actividades de aula, que integra contenidos de matemáticas, con elementos de música destinados a proporcionar a los profesores un enfoque alternativo para la enseñanza de las matemáticas.

Dos clases de estudiantes de tercer grado (n=56), de una escuela primaria en la costa oeste de los Estados Unidos, participaron en la investigación. Una asignación al azar del diseño de grupo control pretest-postest se utilizó para examinar los cambios de los estudiantes en la habilidad matemática entre los dos grupos. Un diseño de series de tiempo cuasi-experimental con pruebas preliminares múltiples, midtests y post-test fue utilizado para investigar los efectos de las lecciones de música-matemática en el nivel de habilidad del proceso matemático en los estudiantes. Los resultados demostraron que la intervención de las clases de música-matemática integradas tuvo una mejoría estadísticamente significativa en las habilidades matemáticas de los grupos de música de los alumnos, concluyeron los autores.

¿Cómo perciben los estudiantes las relaciones entre los campos de música y de matemáticas?, Cranmore y Tunks (2015) emplearon un enfoque cualitativo que permitió a 24 estudiantes de la escuela compartir sus experiencias directas con la música y las matemáticas, así como su percepción de cómo se relacionan los dos campos. Los participantes fueron divididos en cuatro grupos en función de la participación de la escuela de música y el nivel de rendimiento en matemáticas. Curiosamente, la mayoría de los estudiantes vieron las matemáticas como base para la habilidad musical, lo que sugiere una dirección diferente a la mayoría de los estudios previos. El elemento musical de ritmo parecía tener la mayor conexión matemática. Esto implica varias posibilidades para los educadores, incluyendo alentar a los estudiantes en las

dos áreas de estudio para reconocer las conexiones entre los dos elementos, particularmente la influencia de uno sobre el otro. Además, los maestros en ambos campos, pueden fomentar la colaboración, para apoyar el aprendizaje conjunto entre ambas áreas de contenido, concluyeron los autores.

Mirzai, et al. (2015) realizaron un estudio que tiene como objetivo comparar el rendimiento académico de los estudiantes de música y de los estudiantes ordinarios en la asignatura de matemáticas.

Para ello, 100 estudiantes fueron seleccionados mediante una muestra de varias etapas recogida desde el tercer grado de los estudiantes de secundaria, hasta las escuelas ordinarias y de música de Teherán durante el año 2011 - 2012. La prueba TIMSS se utilizó para la recolección de datos con el fin de investigar el rendimiento académico en la asignatura de matemáticas. Los resultados sugieren que hay diferencias significativas entre los estudiantes de las escuelas de música y los estudiantes de las escuelas normales en el rendimiento académico en la asignatura de matemáticas. Se puede concluir que los estudiantes de música muestran mayor rendimiento académico en comparación con los estudiantes ordinarios, de la misma opinión es Bowen (2010).

La lateralidad hemisférica puede ser un concepto útil en la enseñanza, el aprendizaje, la formación, y en la mayor comprensión sobre el desarrollo humano. Szirony, Burgin y Pearson (2008) abordaron esta cuestión haciendo un estudio comparativo entre la aptitud musical y la aptitud matemática.

El instrumento de la Encuesta del Procesamiento Humano de la Información (HIPS), diseñado para medir la lateralidad hemisférica, se administró a 101 participantes, a quienes luego se les pidió que proporcionaran una medida de su aptitud conceptual para las matemáticas y la música.

Las puntuaciones fueron comparadas mediante la correlación canónica, para poner a prueba la hipótesis de que la capacidad matemática percibida

puede explicarse por el predominio del hemisferio del cerebro izquierdo y la musical por el hemisferio derecho.

Una correlación relativamente fuerte se encontró entre la capacidad en música y la preferencia del hemisferio derecho del cerebro. Una relación entre las matemáticas y la preferencia del hemisferio izquierdo del cerebro o las puntuaciones de procesamiento integrado del cerebro resultó ser marginal, concluyeron Szirony, Burgin y Pearson (2008), como veremos en el siguiente apartado que nos introduce en la relación de la aptitud musical y numérica con la neurociencia educativa.

### **3.5 Neurociencia educativa**

La intención del siguiente apartado es tratar el tema desde el punto de vista de la neurociencia cognitiva aplicada a la educación, vamos a citar varios estudios relacionados con la neuroimagen; en primer lugar aplicados a la aptitud musical, y en segundo término a la aptitud numérica, enfocados a dar un punto de vista neurocientífico que respalden nuestros objetivos e hipótesis de investigación.

En ningún momento pretendemos exponer una visión única de la teoría locacionista de las áreas cerebrales especializadas de Brodmann; porque somos ampliamente conocedores de la multitud de estudios que hablan de la inducción a la neuroplasticidad del aprendizaje musical, Zatorre (2013), y Kolb & Muhammad (2014), entre otros; al igual que el aumento de la conectividad de las áreas multisensoriales en los músicos, visto en Luo et al. (2012), así como las innumerables aportaciones del profesor Levitin (2014, 2015), Chanda y Levitin (2013), y Levitin y Grafton (2016), sobre el tema. Únicamente pretendemos con el apoyo de las siguientes investigaciones conocer las áreas cerebrales que puedan estar directamente relacionadas con el aprendizaje de la música y las matemáticas.

De igual manera debemos dejar claro que el desarrollo del cerebro de un sujeto normal no es constante, y que en el periodo que va desde el nacimiento hasta la infancia es donde se producen los cambios morfológicos más importantes (la formación de los bloques cognitivos), pero es durante la adolescencia cuando se refinan (Radford y André, 2009).

### 3.5.1 Aplicada a la aptitud musical

En 2001, Stewart y Walsh ya estaban convencidos de que el uso de técnicas de neuroimagen, en combinación con modelos psicológicos del tipo propuesto por Cappelletti, Waley-Cohen, Butterworth y Kopelman (2000), les proporcionaría una base racional para investigar las correlaciones neuronales del componente musical como la estructura, la organización perceptiva, la memoria, etc. así como los estudios de adquisición de aptitudes musicales relacionados con la neurobiología del aprendizaje perceptivo y la plasticidad visomotora de Marin y Perry (1992).

Una vez que estos procesos componentes sean identificados, será tan apropiado como útil, preguntar cómo el cerebro coordina estos distintos procedimientos, para lograr la complejidad e integración que da como resultado final la comprensión neurobiológica de la música.

Según Blakemore y Frith (2005), en su exitoso *The learning brain*, afirman que no existe ninguna investigación en la que se haya efectuado una prueba de neuroimagen al mismo individuo antes y después de aprender a leer, en cambio, Lauren Stewart, del *Institute of Cognitive Neuroscience, Department of Psychology, University College London*, en el Capítulo 5: *Functional correlates of learning to read and play music*, de su tesis doctoral *Neurocognitive studies of music reading* realiza un estudio longitudinal con Resonancia Magnética funcional (RMf), para conocer los cambios en la función cerebral de doce individuos sin ningún conocimiento musical, antes y después de enseñarles a leer música y a tocar el piano.

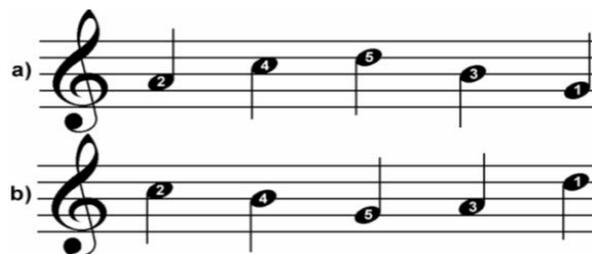
Stewart les hizo escáneres mediante la técnica de RMf antes y después del aprendizaje; para que ganara validez el experimento, utilizó un grupo control, que debían de carecer de cualquier experiencia musical, y a los que solo les iba a realizar dos escáneres de RMf, igual que a los individuos del grupo experimental.

Después de quince semanas de formación musical (90 minutos por semana) y un mínimo de tres sesiones de media hora por semana, un profesor de música independiente examinó a los participantes del grupo experimental, a los que se les estaba enseñando a leer música y tocar el piano, y confirmó que todos ellos, habían alcanzado los conocimientos de Grado 1, que define el Consejo Británico de Escuelas Reales de Música.

Y demostró, valiéndose del paradigma de Stroop, que después del aprendizaje podían realizar perfectamente las tareas:

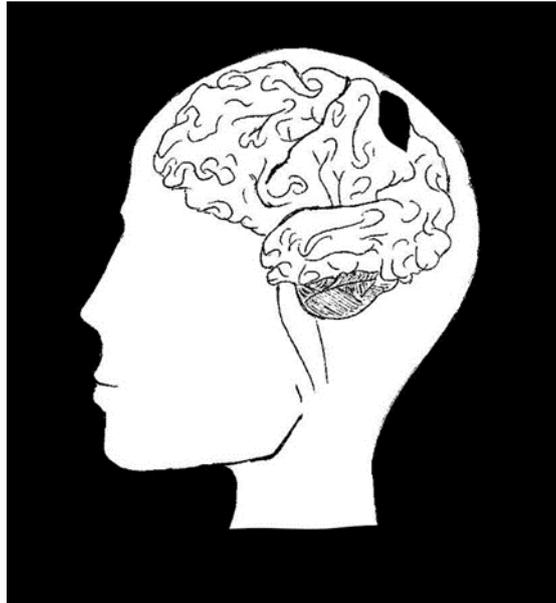
- a) Combinación de notas y números que indicaban los dedos bien ubicados.
- b) Combinación de notas y números que indicaban los dedos mal ubicados.

Anteponían el aprendizaje musical y no podían dejar de leer las notas musicales e interpretar adecuadamente el ejercicio, aun estando mal los números que indican los dedos (1 = pulgar, 2 = índice, etc.), (Blakemore y Frith, 2005).



**Figura Nº 43.** Estímulo efecto Stroop para la lectura musical de pianistas<sup>24</sup>

Una vez obtenido el éxito de corroborar el aprendizaje de la notación musical al grupo experimental, una pequeña área situada en la corteza parietal superior derecha estaba activada (**Figura N° 44**), esta área tiene distintas funciones, en este caso las que nos interesan para nuestra investigación son las funciones que están implicadas directamente con la aptitud numérica; que podremos estudiar detalladamente en el siguiente apartado.



**Figura N° 44.** *La corteza parietal superior derecha estaba activada después de que los participantes aprendieran a leer y a tocar música<sup>25</sup>*

El siguiente dilema era como demostrar que dicha activación cerebral en la corteza parietal superior derecha, pertenecía al aprendizaje musical realizado y no a cualquier factor externo. Stewart resolvió este dilema con un ingenioso paradigma; utilizando el siguiente dibujo (**Figura N° 45**), los sujetos tenían que realizar la siguiente tarea: indicar si destacaba una línea individual en una cuadrícula (que en realidad no era el objetivo del estudio).

Podemos apreciar perfectamente como, el estímulo superior son notas musicales reales, y el de abajo, aunque se parezcan, no lo son.



**Figura Nº 45.** *Estímulo de lectura implícita de música utilizada en el estudio de RMf<sup>26</sup>*

Para los sujetos no músicos, no hubo activación cerebral entre los dos tipos de estímulos (notas musicales, dibujos parecidos a notas musicales), en cambio los sujetos que habían participado en el aprendizaje musical obtenían una alta activación en la corteza parietal superior derecha con la RMf, que ponía de manifiesto que no podían pasar por alto el estímulo musical, aunque esto no les ayudara a realizar la tarea encomendada, por lo tanto, la activación cerebral sufrida antes y después del aprendizaje musical refleja claramente un cambio en esa área cerebral concreta, (Blakemore y Frith, 2005).

Para enlazar este apartado con el siguiente, citamos a Schmithorst y Holland (2004), que investigaron las correlaciones neuronales entre el entrenamiento musical formal y el rendimiento en las matemáticas mediante Resonancia Magnética funcional (RMf), utilizaron para su investigación quince adultos normales, de los cuales siete poseían formación musical desde su infancia y los ocho restantes no. Plantearon la hipótesis de que la correlación entre el entrenamiento musical y la competencia matemática puede estar asociada con una mejora en el rendimiento de la memoria y una mayor representación abstracta de cantidades numéricas; concluyendo la existencia de diferencias estadísticamente significativas entre los correlatos neuronales del procedimiento matemático entre músicos y no músicos (incluso con la pequeña muestra que utilizaron), motivando para un futuro estudio longitudinal realizado con niños, con el fin de investigar una posible causa relacional entre la formación musical y la arquitectura neuronal usada para el procesamiento de las matemáticas, y asociar esas diferencias con cualquier diferencia en la aptitud numérica.

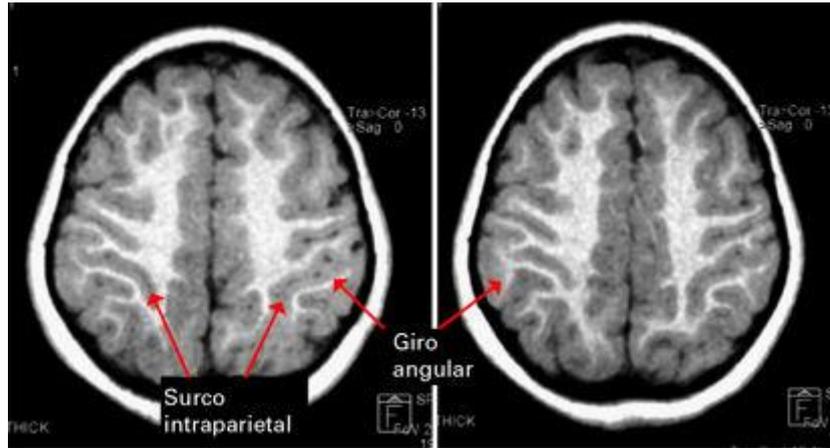
### 3.5.2 Aplicada a la aptitud numérica

El primer estudio de imágenes que relacionó directamente las matemáticas con el lóbulo parietal tuvo lugar en la década de 1980 en Suecia, a partir de entonces muchos han sido los estudios que han ido en esta dirección; cuando los participantes comparan números y realizan sumas y restas, se activa el lóbulo parietal inferior derecho, al igual que con la multiplicación, cuando comparamos, se activan ambos hemisferios, con una leve predilección por el derecho, mientras la activación del lóbulo parietal izquierdo se produce cuando multiplicamos.

Así mismo en estudios con neuroimágenes en pacientes adultos con lesiones cerebrales, han encontrado correspondencia con el conocimiento de cantidades y relaciones, asociadas al procesamiento visoespacial, tanto en la corteza parietal izquierda, como en la derecha. (Blakemore y Frith, 2005).

Por otro lado, Martínez y Argibay (2007) realizaron un estudio mediante procedimientos como la tomografía por emisión de positrones y la resonancia magnética funcional, en el que comprobaron que, durante el desarrollo de actividades aritméticas, en el lóbulo parietal y concretamente en la región surco intraparietal (HIPS), se alteraba el consumo de oxígeno y glucosa, lo que indica que estas regiones estaban activadas al realizar tareas aritméticas, como podremos apreciar en la **Figura N° 46**.

Aunque si bien el HIPS era la región más activa en el desarrollo de las habilidades numéricas de su investigación, no es el único sistema involucrado en su procesamiento (recordemos la teoría de la neuroplasticidad cerebral), concluyeron los autores.



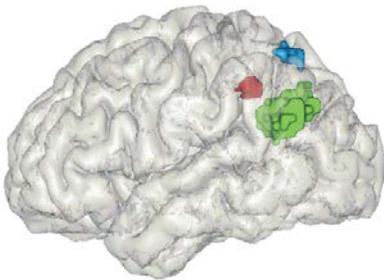
**Figura Nº 46.** Imagen transversal del cerebro, obtenida por técnica de resonancia magnética nuclear, donde se observan dos estructuras parietales involucradas en el procesamiento de objetos matemáticos, el surco intraparietal y el giro angular<sup>27</sup>

En una investigación realizada por Cantlon, Brannon, Carter y Pelphey (2006), con sujetos que habían sufrido daños en la corteza parietal, a los que les presentaban dos números escritos, por ejemplo 31 y 38, y tenían que diferenciar entre cuál de los dos números era el mayor y cuál el menor, observaron que los pacientes tenían muchísimas dificultades para poder distinguirlos.

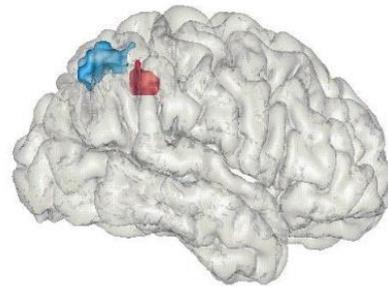
En un primer momento las investigaciones de Dehaene, Spelke, Pinel, Stanescu y Tsivikin (1999), apoyan la idea más extendida de que los cálculos exactos están intrínsecamente relacionados con el hemisferio izquierdo y los cálculos aproximados en la parte derecha del lóbulo parietal, pero en estudios posteriores, Dehaene, Piazza, Pinel y Cohen (2003), sin rechazar la hipótesis anterior, añaden más información sobre el tema, y nos sugieren que la información numérica puede ser procesada por el cerebro en tres regiones del lóbulo parietal, mediante tres sistemas diferentes:

1. Sistema verbal en el que los números se representan mediante palabras. Por ejemplo, cuarenta y tres. Se activa el giro angular izquierdo que interviene en los cálculos exactos.

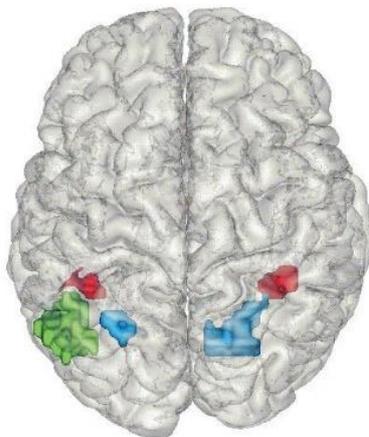
2. Sistema visual en el que los números se representan según una asociación de números arábigos conocidos. Por ejemplo, 43. Se activa un sistema superior posterior parietal relacionado con la atención.
  
3. Sistema cuantitativo no verbal en el que podemos establecer los valores de los números. Por ejemplo, entendemos el significado del número cuarenta y tres generado por cuatro decenas y tres unidades. En este sistema participa la región más activa e importante en la resolución de problemas numéricos, el segmento horizontal del surco intraparietal (HIPS), coincidiendo con Martínez y Argibay (2007). Su activación aumenta más cuando se hace una estimación de un resultado aproximado que cuando realizamos un cálculo exacto. En la aproximación, aunque se activan los dos hemisferios cerebrales, existe una cierta preferencia por el derecho (Guillén, 2012).



**Figura Nº 47.** *Hemisferio izquierdo*<sup>28</sup>



**Figura Nº 48.** *Hemisferio derecho*



**Figura Nº 49.** *Vista superior*

Representando tridimensionalmente las tres regiones implicadas en los procesamientos numéricos por colores; vemos en verde la perteneciente al giro angular izquierdo, en rojo el surco intraparietal (HIPS), y en azul el lóbulo parietal superior de ambos hemisferios.

Basándonos en las investigaciones que acabamos de comentar, podemos observar una relación directa entre los cálculos matemáticos con la activación de algunas áreas cerebrales, entre las que se encuentra la corteza parietal, como afirman Blakemore y Frith (2005).



**Figura Nº 50.** *Los cálculos matemáticos activan la corteza parietal<sup>29</sup>*

En la misma línea, Sanz (2016), cita un estudio de Marie Almaric y el propio Dehaene realizado en la Unidad de Neuroimagen Cognitiva Inserm-CEA, del sur de París (Francia), en el que realizaron una investigación con 15 matemáticos profesionales, y 15 que no lo eran cuando realizaron el estudio. Mientras los investigadores analizaban la reacción de su cerebro con un escáner, los participantes tenían cuatro segundos para reflexionar si eran verdaderos, falsos o carecían de sentido, enunciados del tipo:

*“Una función suave cuyas derivadas son todas no negativas es analítica.”*

Los resultados obtenidos hablan de varias zonas de los dos hemisferios cerebrales (entre las que se encuentra la corteza parietal), que única y exclusivamente se activaban cuando los matemáticos se enfrentaban a enunciados relacionados con su especialidad. Coincidiendo, según los investigadores, con las áreas cerebrales que se activan cuando cualquier persona realiza operaciones aritméticas, maneja números o simplemente ve una fórmula matemática escrita.

### *Notas al final*

---

<sup>1</sup> Gaffurio (1492) *Theorica musicae*.

<sup>2</sup> Grabado en madera de *Flores musicae omnis cantus Gregoriani* of Hugo Spechtshart of Reutlingen. (c.1285-c.1360)

<sup>3</sup> Extraída el 3 de abril de 2015 de:  
[http://enriquealexandre.es/wpcontent/uploads/2013/02/EscalaPitagorica\\_1.jpg?8cd549](http://enriquealexandre.es/wpcontent/uploads/2013/02/EscalaPitagorica_1.jpg?8cd549)

<sup>4</sup> Extraída el 7 de agosto de 2015 de:  
[https://www.google.es/search?q=quinta+del+lobo+comma+pitagorica&biw=1242&bih=612&source=Inms&tbm=isch&sa=X&ved=0CAYQ\\_AUoAWoVChMI37GeoJ-VxwIVzFgUCh2VoQuB#imgrc=1aVnayTpyx9cOM%3A](https://www.google.es/search?q=quinta+del+lobo+comma+pitagorica&biw=1242&bih=612&source=Inms&tbm=isch&sa=X&ved=0CAYQ_AUoAWoVChMI37GeoJ-VxwIVzFgUCh2VoQuB#imgrc=1aVnayTpyx9cOM%3A)

- 
- <sup>5</sup> Consultar la aritmética de los intervalos en Liern, V. y Queralt, T. (2008).
- <sup>6</sup> Extraída el 11 de agosto 2015 de <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Circulo-justa.png>
- <sup>7</sup> Extraída de Calderón, C. (2014). *Experiencia estética y formulación científica: dos casos de estudio*. En A. García y P. Otaola. (Cords.), Francisco de Salinas. *Música, teoría y matemáticas en el Renacimiento*. Salamanca, España: Ediciones Universidad de Salamanca. (p. 27)
- <sup>8</sup> Extraída de Calderón, C. (2014). *Experiencia estética y formulación científica: dos casos de estudio*. En A. García y P. Otaola. (Cords.), Francisco de Salinas. *Música, teoría y matemáticas en el Renacimiento*. Salamanca, España: Ediciones Universidad de Salamanca. (p. 32)
- <sup>9</sup> Extraída el 20 de agosto de 2015 de <http://sabiasqueestadistica.blogspot.com.es/2013/06/sabias-que-puedes-componer-un-vals-con.htm>
- <sup>10</sup> Extraída el 22 de agosto de 2015 de <http://artigoo.com/los-numeros-mas-famosos-del-mundo>
- <sup>11</sup> Extraída el 22 de agosto de 2015 de [http://web.educastur.princast.es/ies/pravia/carpetas/recursos/mates/recursos\\_2005/textos/Fibonacci/Fibonacci.htm](http://web.educastur.princast.es/ies/pravia/carpetas/recursos/mates/recursos_2005/textos/Fibonacci/Fibonacci.htm)
- <sup>12</sup> Extraída el 22 de agosto de 2015 de <http://goo.gl/5eKCxL>
- <sup>13</sup> Extraída el 22 de agosto de 2015 de <http://www.elsaposabio.com/musica/?p=2199>
- <sup>14</sup> Extraída de Howat, R. (1983). *Debussy in proportion: a musical analysis*. Cambridge, England: Cambridge University Press.
- <sup>15</sup> Definición del propio Schoenberg que dio el 26 de marzo y 2 de mayo de 1941, en dos conferencias impartidas en la Universidad del Sur de California en Los Ángeles y en la Universidad de Chicago, y que luego se convertirían en uno de los 15 ensayos recopilados por Dika Newlin en el libro *STYLE and IDEA* (1950).
- <sup>16</sup> Extraída el 21 de agosto de 2015 de [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Serialismo\\_\(O,\\_R,\\_I,\\_RI\).png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Serialismo_(O,_R,_I,_RI).png)
- <sup>17</sup> Extraída el 26 de agosto de 2015 de <http://espiademahler.blogspot.com.es/2007/05/un-superviviente-de-varsovia.html>
- <sup>18</sup> Extraída el 29 de agosto de 2015 de [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Berg\\_vn\\_conc\\_tone\\_row.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Berg_vn_conc_tone_row.png)
- <sup>19</sup> Extraídas todas el 23 de agosto de 2015 de <http://www.polyphonies.eu/lemensuel/Musique-serielle-exemples-de,428.html>
- <sup>20</sup> Extraídas de Díaz, A. (2005). *Estructura y significado en la Música Serial y Aleatoria*. (Tesis doctoral). UNED, Madrid, España.

---

<sup>21</sup> Todas las figuras referentes a este artículo han sido extraídas de Milne, A. J., Bulger, D., Herff, S. A., & Sethares, W. A. (2015). Citados en nuestras referencias bibliográficas.

<sup>22</sup> Extraída el 3 de febrero de 2017 de [http://psicoteca.blogspot.com.es/2007/09/contrastacin-de-hipotesis-las-tarjetas\\_22.html](http://psicoteca.blogspot.com.es/2007/09/contrastacin-de-hipotesis-las-tarjetas_22.html)

<sup>23</sup> Extraída de Lara, F. (1994) *El desarrollo cognitivo en la adolescencia*. En A. Aguirre. (Ed.), *Psicología de la adolescencia*. Barcelona, España: Editorial Boixareu Universitaria Marcombo. (p. 164)

<sup>24</sup> Stewart, L. (2003). *Neurocognitive studies of music reading*. (Ph.D). Department of Psychology, University College London, London. (p. 42)

<sup>25</sup> Figura dibujada por una alumna participante en la investigación de 3º ESO B.

<sup>26</sup> Stewart, L. (2003). *Neurocognitive studies of music reading*. (Ph.D). Department of Psychology, University College London, London. (p. 159)

<sup>27</sup> Figura cortesía de la Dra. Cristina Besada, Sección de Neurorradiología del Servicio de Diagnóstico por Imágenes del Hospital Italiano de Buenos Aires, extraída del artículo de Martínez y Argibay (2007).

<sup>28</sup> Las tres figuras siguientes: hemisferio izquierdo, hemisferio derecho y vista superior han sido extraídas del artículo de Dehaene S., Piazza M., Pinel P. & Cohen. L. (2003). *Three parietal circuits for number processing*, *Cognitive Neuropsychology*, 20: 487-506.

<sup>29</sup> Figura dibujada por una alumna participante en la investigación de 3º ESO B.



# ESTUDIO EMPÍRICO

Segunda Parte



## Capítulo 4. El diseño y los participantes de la investigación

### 4.1 Introducción

Presentamos los objetivos de la investigación, las teorías educativas implicadas en el proceso de investigación, así como la metodología utilizada, cuantitativa tanto para el análisis de los resultados del test de aptitud musical de Seashore, como para el test de aptitud numérica del BAT-7, para enumerar las hipótesis de la investigación. Analizamos las variables de la investigación asociadas a las escalas de medida, que pueden ser nominales, ordinales o de intervalo, y también por su papel en una función, dependientes o independientes, para seguir mostrando gráficamente el diseño de la investigación (diseño ex post facto prospectivo de grupo único). A continuación describimos lo participantes desde el punto de vista de las variables independientes, el género y el nivel educativo.

### 4.2 Objetivos de la investigación

**Objetivo 1º.** Analizar el grado de correlación existente entre el nivel de aptitud musical y aptitud numérica entre los participantes de nuestra investigación.

**Objetivo 2º.** Estudiar en qué medida influyen en la discriminación de la aptitud musical y la aptitud numérica el género y el nivel educativo de los participantes de nuestra investigación.

**Objetivo 3º.** Conocer el grado de discriminación de la aptitud musical y la aptitud numérica de los participantes de nuestra investigación, y que influencia tiene el primero (aptitud musical), sobre el segundo (aptitud numérica).

### 4.3 Metodología de la investigación

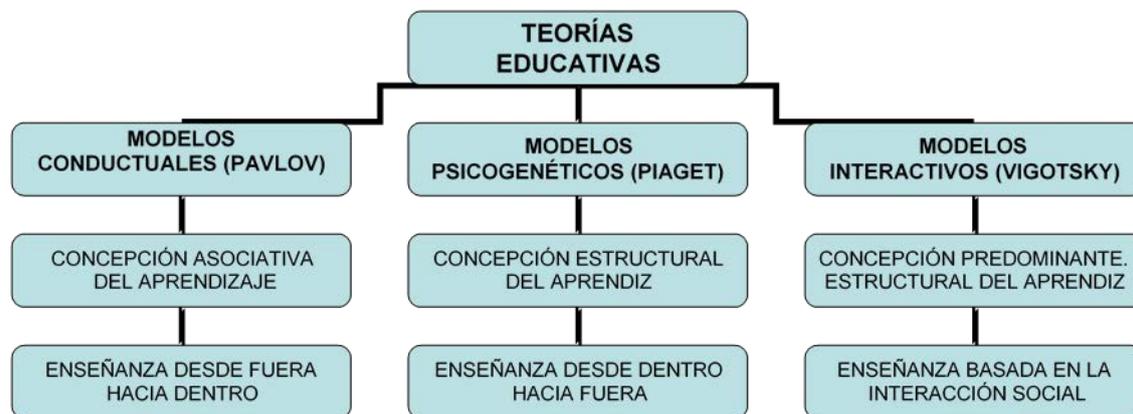
Según el Diccionario de términos clave, del Centro Virtual Cervantes, perteneciente al Instituto Cervantes (2017), toda investigación que siga una metodología cuantitativa (que es la que hemos utilizado en nuestra investigación), tiene que poseer un planteamiento, un acercamiento a la realidad objeto de estudio y a la teoría, y una finalidad como investigación que tiene que asumir las siguientes características:

- El objeto de análisis tiene que ser una realidad observable, medible y que se pueda percibir de manera precisa, por ejemplo, el rendimiento académico de los estudiantes.
- La relación entre teoría e hipótesis es muy estrecha pues la segunda deriva de la primera. A partir de un marco teórico se formula una hipótesis, mediante un razonamiento deductivo, que posteriormente se intenta validar empíricamente.
- Se busca establecer una relación de causa-efecto entre dos fenómenos. Dicha relación está ligada con la interconexión entre conceptos que supone la hipótesis. La validación de la hipótesis supone explicitar esa relación de causa-efecto latente en dicha hipótesis.
- Asimismo, se analizan las variables, tratadas con procedimientos matemáticos y estadísticos. Una variable es una característica que puede adoptar distintos valores. Por ejemplo, el peso, la edad, la inteligencia, el rendimiento académico, el sexo, etc.
- Además, una investigación de este tipo tiene capacidad de predicción y generalización. Se trabaja sobre una muestra representativa del universo estudiado.

Todas las características que acabamos de enumerar están reflejadas en nuestro proceso de investigación.

#### 4.4 Teorías educativas implicadas en el proceso de investigación

Aunque toda clasificación de las teorías educativas que pueda sustentar el currículo escolar es necesariamente parcial, y más o menos arbitraria, realizamos una recapitulación de las que más influencia, a nuestro juicio, han tenido en el sistema educativo español, y por consiguiente en nuestra investigación.



**Mapa conceptual Nº 1.** *Teorías educativas implicadas en la investigación*

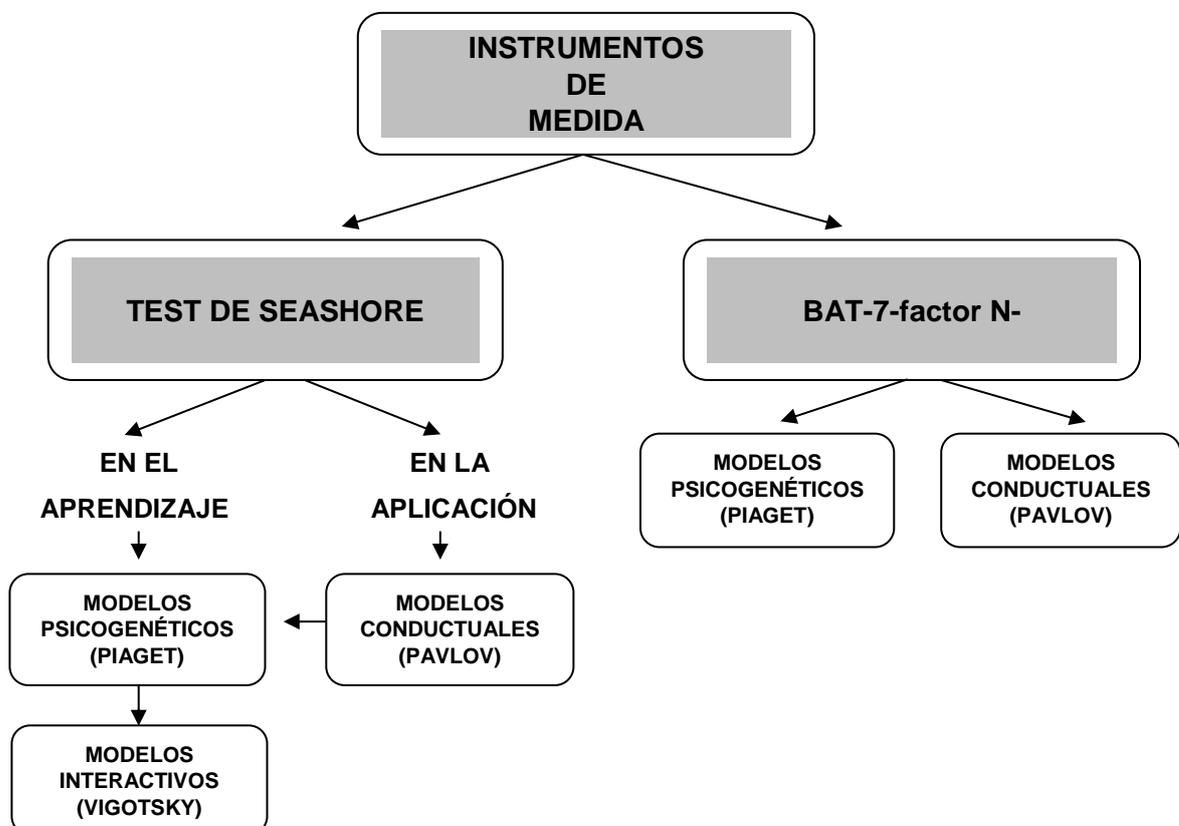
Los tres modelos educativos tienen en el niño y en el preadolescente, gran poder de influencia, pero a medida que avanzamos evolutivamente van tomando mayor importancia los modelos interactivos, basados en la interacción social, porque contienen elementos conductuales y psicogenéticos que añaden un elemento, en cierto modo, nuevo para los adolescentes.

Si en los dos enfoques, o conjuntos de modelos conductistas y psicogenéticos, existe una enorme variedad de planteamientos, dentro del enfoque interactivo vamos a encontrar una mayor gama de diferencias que en ellos: desde los planteamientos del origen social de la inteligencia de Vigotsky

de principio claramente ambientalista, que detallamos a continuación, hasta las posiciones del aprendizaje significativo de Ausubel, ejemplo de cognitivismo.

Vigotsky (1988), en su modelo interactivo distingue entre el desarrollo real (adquisiciones que pueden realizarse sin la ayuda de otros) y el desarrollo potencial (conjunto de adquisiciones que el sujeto puede hacer con la ayuda de otros más capaces), denominando *zona de desarrollo próximo* a la diferencia entre el nivel de desarrollo real y el nivel de desarrollo potencial de un sujeto, en la que plantea que es la acción conjunta del niño y los que le rodean, el factor que hace posible que los aprendizajes se interioricen. Así como la aculturación musical recibida por éstos, basada principalmente en la interacción social, como vimos en el apartado de la aptitud musical.

Podemos apreciar en el siguiente mapa conceptual cómo han influido las teorías de la enseñanza en el proceso de investigación.



**Mapa conceptual Nº 2.** Instrumentos de medida y teorías educativas

## 4.5 Hipótesis planteadas

**Hipótesis 1<sup>a</sup>.** La aptitud musical y la aptitud numérica están intrínsecamente relacionadas entre sí: los adolescentes que logren buenos resultados globales en el test de aptitud musical, obtendrán buenos resultados en el test de aptitud numérica.

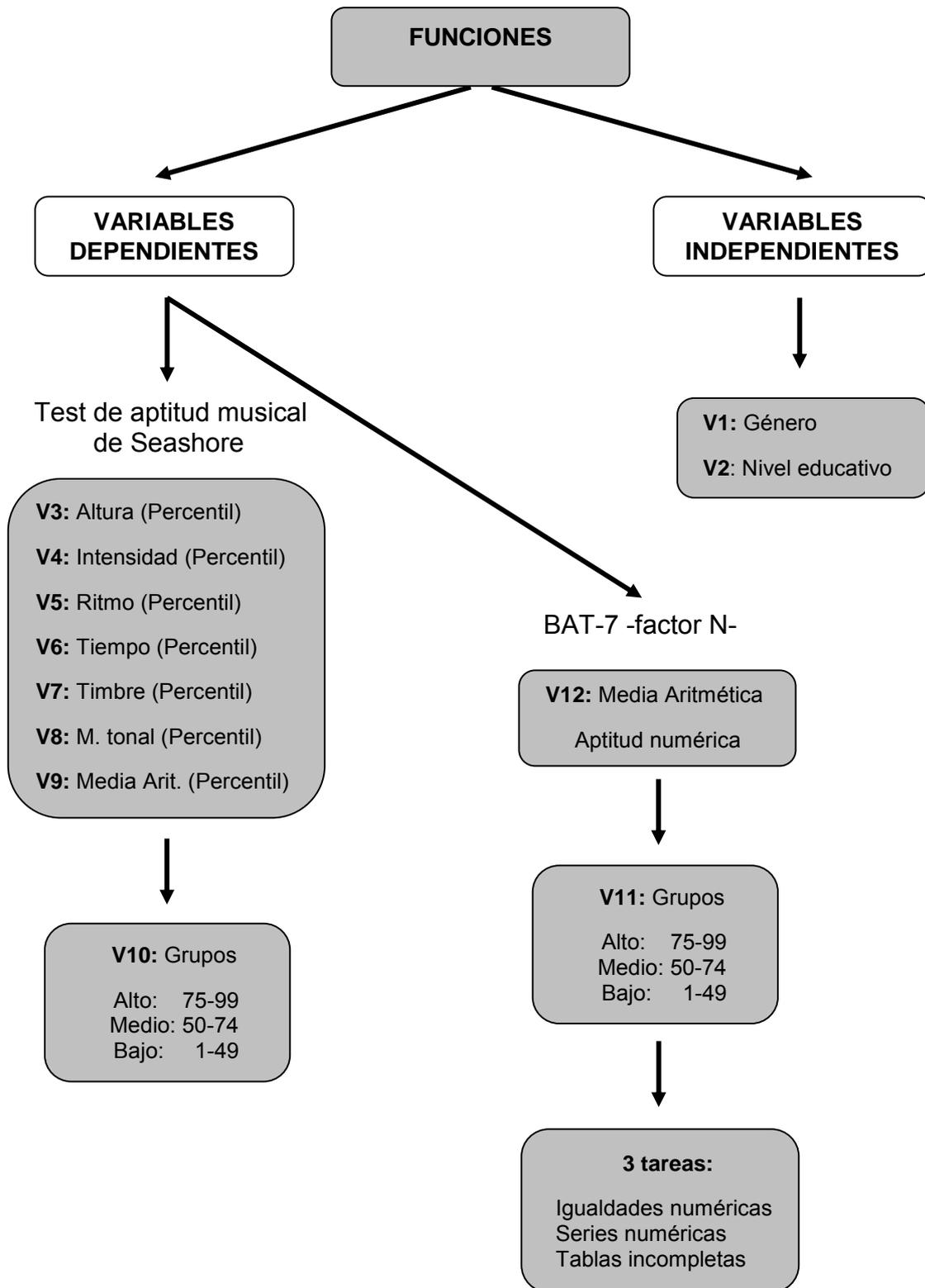
**Hipótesis 2<sup>a</sup>.** Dependiendo del **género** del adolescente, no deberían existir diferencias estadísticamente significativas entre el género masculino y femenino para discriminar las variables que miden la aptitud musical y la aptitud numérica.

**Hipótesis 3<sup>a</sup>.** El desarrollo cognitivo durante la adolescencia, favorece un mayor grado de discriminación de las variables que miden la aptitud musical y la aptitud numérica: cuanto mayor sea el **nivel escolar** del adolescente, mejores serán los resultados en los tests.

## 4.6 Las variables, el diseño y la validez de la investigación

En el siguiente apartado tratamos el tema de las variables utilizadas en la investigación, ya sean por su papel en una función, dependientes o independientes, o asociadas a escalas de medida, y el tipo de diseño de investigación utilizado.

#### 4.6.1 Las variables por su papel en una función o modelo

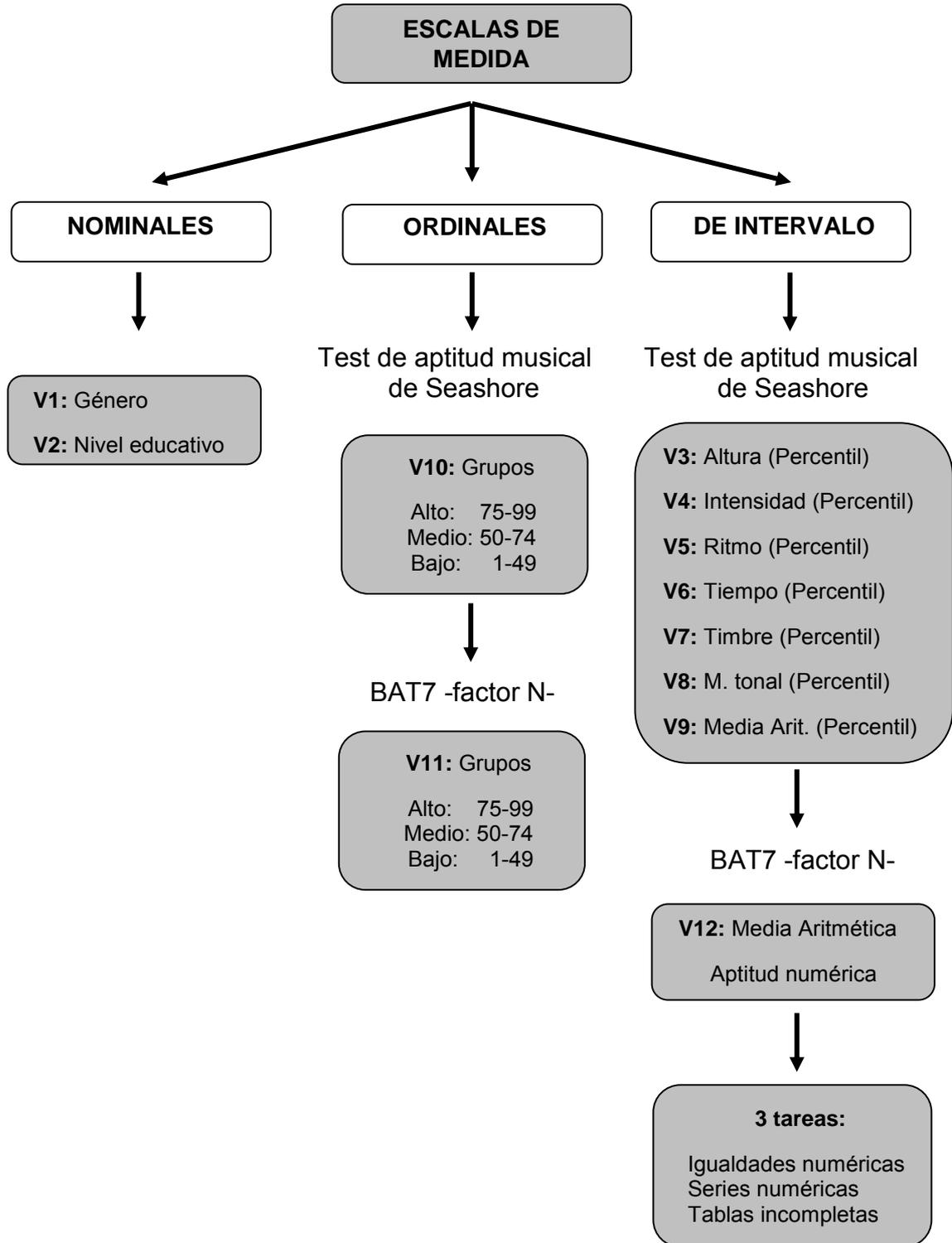


**Mapa conceptual Nº 3.** Variables de la investigación por su papel en una función o modelo

- V1.** Género: masculino, femenino
- V2.** Nivel educativo: 1º ESO, 2º ESO, 3º ESO y 4º ESO
- V3.** Altura: percentil de 1-99
- V4.** Intensidad: percentil de 1-99
- V5.** Ritmo: percentil de 1-99
- V6.** Tiempo: percentil de 1-99
- V7.** Timbre: percentil de 1-99
- V8.** Memoria tonal: percentil de 1-99
- V9.** Media aritmética aptitud musical (altura, intensidad, ritmo, tiempo, timbre y memoria tonal): percentil de 1-99
- V10.** Grupos: alto, medio y bajo de las medias aritméticas de la aptitud musical
- V11.** Grupos: alto, medio y bajo de la aptitud numérica
- V12.** Aptitud numérica: percentil de 1-99

#### **4.6.2 Las variables asociadas a las escalas de medida**

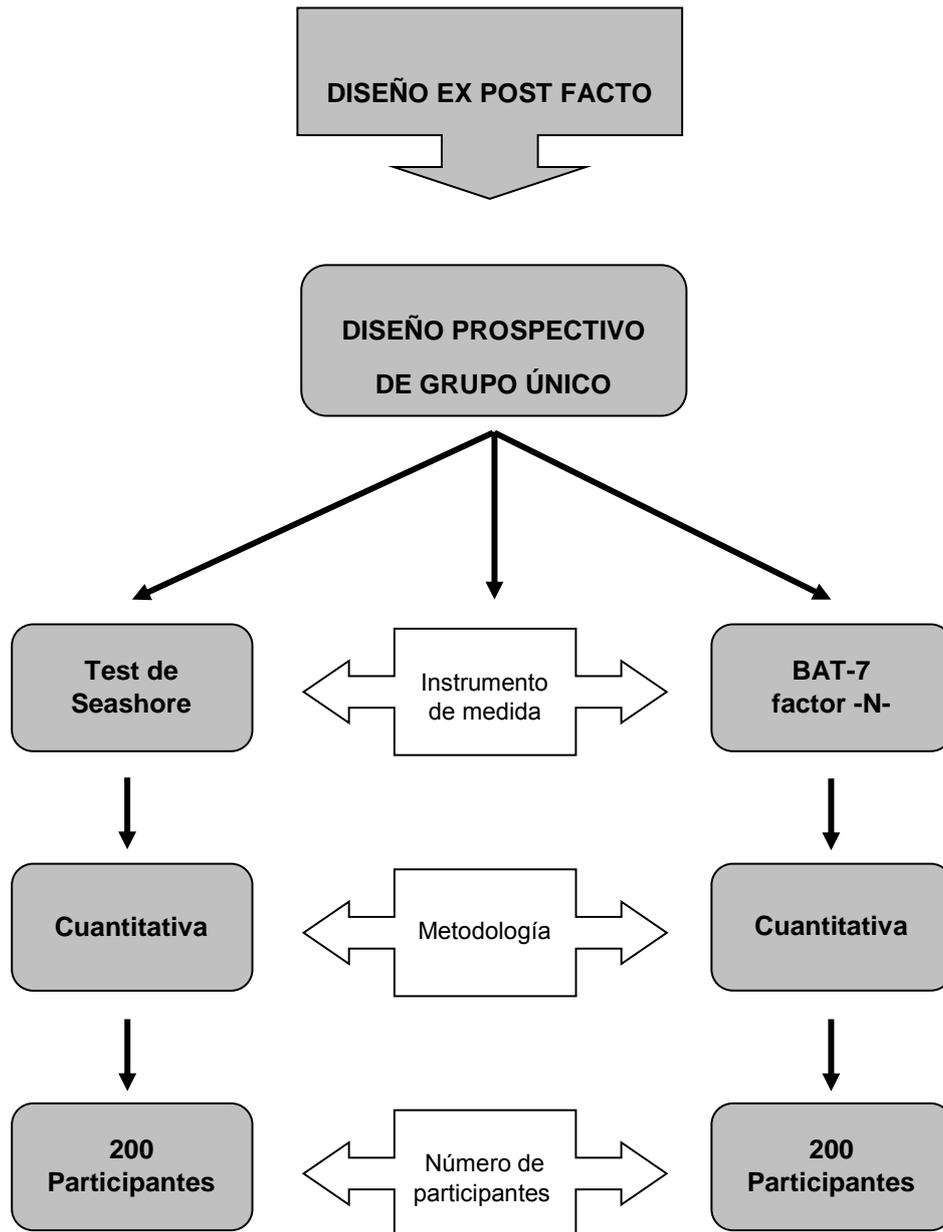
Llamamos nominales a aquellas variables en las que sólo se puede comprobar la igualdad o desigualdad entre ellas, ordinales a las que además de la igualdad o desigualdad se pueden ordenar en función del valor de una característica, y de intervalo a las variables que nos permiten “establecer la igualdad o desigualdad de las diferencias entre las magnitudes de los objetos medidos.” (Merino, Moreno, Padilla, Rodríguez-Miñón y Villarino, 2002, p. 37).



**Mapa conceptual N° 4.** Variables de la investigación asociadas a las escalas de medida

### 4.6.3 El diseño de la investigación

El proceso de investigación se rige por las características propias del diseño *ex post facto*, debido a que se seleccionan los sujetos participantes después de que hayan acontecido las variables independientes (género y nivel educativo). Dentro del diseño *ex post facto*, las características de la investigación se encuadran en un diseño prospectivo de grupo único, prospectivo porque se seleccionan y se miden en primer lugar, todas las variables independientes que consideramos que influyen en las variables dependientes que después vamos a analizar. (García, 2001)



**Mapa conceptual N° 5. El diseño de la investigación**

#### 4.6.4 La validez interna y externa de la investigación

La validez interna de una investigación la encontramos con el control del experimento, y éste a su vez se obtiene mediante:

- La comparación de varios grupos.
- La equivalencia de los grupos.

En nuestra investigación comparamos hasta cuatro grupos, los cuales obtienen una equivalencia inicial debido a la aleatoriedad de la muestra, y una equivalencia durante la prueba, por la cuidadosa selección de las condiciones de aplicación de ésta en cada caso. También hemos controlado las variables que pueden amenazar la validez interna como: la regresión estadística, motivación y expectativas, la maduración, el agotamiento experimental o pérdida de sujetos y el error de medida.

La validez externa hace referencia al grado en que pueden generalizarse los resultados de una investigación. Al igual que en la validez interna, hemos vigilado las posibles amenazas controlando los factores situacionales, los efectos del tratamiento múltiple y el efecto del experimentador, así como mantener controlada la validez interna, que sin ésta no podríamos generalizar nuestros resultados.

#### **4.7 Selección y descripción de los participantes**

Los participantes han sido seleccionados de forma aleatoria del alumnado de un IES público perteneciente a la Consejería de Educación y Universidades del Gobierno de Canarias. En éste se imparten las enseñanzas de ESO y Bachillerato, obteniendo los siguientes grupos para el curso 2016/2017, curso en el que se administró la prueba durante los meses de noviembre de 2016 a marzo de 2017.

**1º ESO:** 5 grupos

**2º ESO:** 6 grupos

**3º ESO:** 5 grupos

**4º ESO:** 3 grupos

**1º Bachillerato:** 2 grupos

**2º Bachillerato:** 3 grupos

Los grupos están formados de entre 23 a 32 alumnos, pudiendo variar según el nivel; para nuestra investigación utilizamos aleatoriamente 2 grupos

de cada nivel de ESO, conformando un total de 200 participantes, 50 de cada uno de los niveles.

#### 4.7.1 Distribución de los participantes según el género

En los dos instrumentos de medida utilizados en nuestra investigación, el porcentaje de los participantes con respecto al género ha sido muy similar, cerca del 50% de los participantes pertenecían al género masculino, y el otro tanto al género femenino.

Género	Participantes	
	Casos	%
Masculino	101	50,5
Femenino	99	49,5
<b>Total</b>	<b>200</b>	<b>100,00</b>

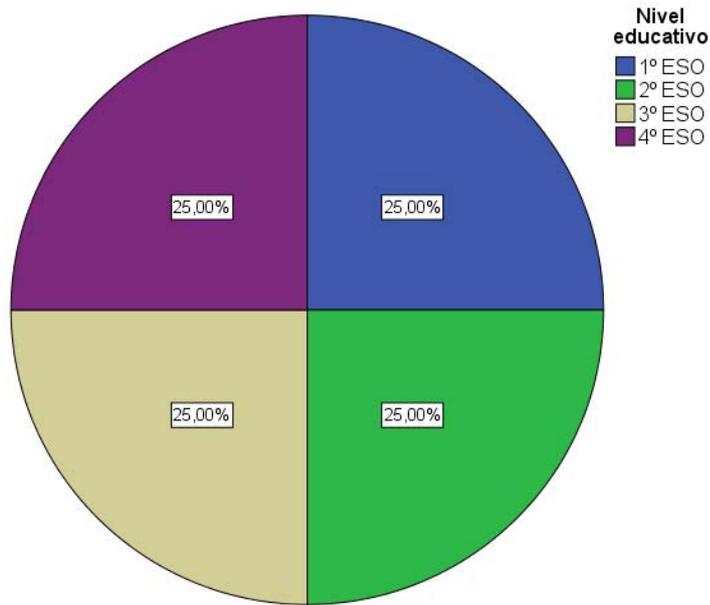
**Tabla Nº 6.** Casos y porcentajes de participantes según su género

#### 4.7.2 Distribución de los participantes según el nivel educativo

En lo referente al nivel educativo, la distribución es equitativa, 50 casos en cada uno de los niveles, lo que equivale al 25% de la muestra, como podemos observar en la siguiente tabla y su gráfico asociado.

Nivel educativo	Participantes	
	Casos	%
1º ESO	50	25
2º ESO	50	25
3º ESO	50	25
4º ESO	50	25
<b>Total</b>	<b>200</b>	<b>100,00</b>

**Tabla Nº 7.** Casos y porcentajes de participantes según su nivel educativo



**Gráfico Nº 1.** *Porcentajes de participantes según su nivel educativo*



## Capítulo 5. El desarrollo de la investigación

### 5.1 Introducción

Conocidas las características espaciales, temporales y los criterios seguidos para asegurar una correcta aplicación de las pruebas, explicamos el procedimiento seguido en la administración del test de aptitud musical de Seashore y el test de aptitud numérica del BAT-7.

Continuamos comentando la justificación de la elección de las pruebas utilizadas, describiendo su fiabilidad y validez, aportando los baremos utilizados para convertir en centiles las puntuaciones directas según su edad y nivel educativo, así como la relación de los tests con la formación y el rendimiento académico.

### 5.2 Procedimiento utilizado en la aplicación de las pruebas

La administración de las pruebas tuvo lugar durante los meses de noviembre de 2016 a marzo de 2017, se realizaron en horas lectivas del calendario escolar, siendo el lugar de aplicación el aula de música del centro participante porque consignaba muchos elementos de insonorización.

Para la aplicación del test de aptitud musical de Seashore, realizada siempre por el investigador (al igual que el test de aptitud numérica), nos aseguramos con anterioridad del buen funcionamiento y la alta fidelidad del reproductor que íbamos a utilizar. Antes de empezar la prueba se explicó a los alumnos el funcionamiento de ésta, cerciorándonos de que en su totalidad habían entendido la tarea que debían realizar, pues antes de empezar hacíamos varios ensayos abiertos.

Las pruebas se realizaron en las horas lectivas de la asignatura de música, de las que se usaron 55 minutos, tiempo en el que en todos los casos pudimos administrar los tests.

Antes de administrar el test de aptitud numérica del BAT-7 se les explicó el contenido a todos los alumnos participantes, así como la correcta realización del test y se les informó de que los datos obtenidos, al igual que los resultados del test de Seashore, se iban a utilizar para una investigación científica, por este motivo debían de realizar la prueba muy concentrados y hacerla lo mejor que supieran; también se les comentó que en todos los casos se iba a reservar el anonimato de los participantes.

### **5.3 Técnicas e instrumentos de medida**

Para recoger la información sobre la aptitud musical y numérica de los adolescentes en el trabajo de campo, hemos utilizado dos instrumentos de medida: el Test de Aptitudes Musicales de Seashore y el Test de Aptitud Numérica del BAT-7. Hemos sido lo más rigurosos posibles en la aplicación de los tests, basándonos siempre en las recientes directrices desarrolladas por la Comisión Internacional de Tests, y estamos de acuerdo con la afirmación de Muñiz, Hernández y Ponsoda (2015) sobre el esfuerzo de los editores y las distintas organizaciones nacionales e internacionales para mejorar y validar estos instrumentos de medida, como son el Consejo General de Psicología de España (COP), la Federación Europea de Asociaciones de Psicólogos (EFPA), y la antes citada Comisión Internacional de Tests (ITC), que nos sirve a los investigadores para utilizarlos con total garantía de fiabilidad y validez de lo que pretendemos medir.

#### **5.3.1 Test de aptitud musical de Seashore**

A continuación justificamos los motivos de su elección para nuestra investigación, recogemos una amplia descripción de sus pruebas, las normas para su correcta aplicación, así como la justificación estadística y su tipificación española (parte del siguiente apartado ha sido entresacado del Manual del Test de aptitud musical de Seashore).

### **5.3.1.1 Justificación de la elección**

Cuando nos planteamos el problema de investigación sobre el que íbamos a trabajar, contemplamos dos posibilidades para medir las aptitudes musicales de los adolescentes: una de ellas era el test de Seashore, y la segunda el de Bentley; nos decidimos por el primero porque las cualidades que medía (altura, intensidad, ritmo, tiempo, timbre y memoria tonal) se ajustaban a los objetivos de nuestra investigación. También influyó la aplicabilidad de las pruebas y la tipificación española que realizó el Doctor del Río para la editorial TEA, así como varias tesis doctorales realizadas en distintas Comunidades Autónomas, como las de Martínez (1992) en Asturias, Nebreda (1999a) en la Comunidad de Madrid, Vert (2013) en la Comunidad Valenciana, y la del propio del Río (1982) de ámbito nacional.

### **5.3.1.2 Aplicabilidad**

La prueba está indicada para aplicarse de forma individual o colectiva a individuos a partir de 9-10 años; el tiempo estimado de la aplicación, incluidas las explicaciones previas, oscila alrededor de una hora, dependiendo de la edad de los individuos; no se exige un nivel cultural determinado.

### **5.3.1.3 Descripción de las pruebas**

La prueba de Seashore consta de seis tests que miden diferentes aspectos de las aptitudes musicales.

#### **5.3.1.3.1 Altura**

En este test se mide el sentido de la Altura. Está constituido por cincuenta pares de notas. En cada par, el sujeto debe determinar si la segunda nota es más alta o más baja que la primera, es decir, precisar si es más aguda o más grave que la primera. Los estímulos fueron obtenidos por un oscilador de frecuencia por medio de un circuito que producía tonos puros, sin armónicos ni

sobretonos. Los tonos tienen alrededor de 500 ciclos de frecuencia y una duración de 0,6 segundos cada uno.

Las diferencias de frecuencia entre los tonos dentro de cada par son las siguientes:

Nº de orden de los pares	Diferencias de los ciclos
1-5	17
6-12	12
13-22	8
23-32	5
33-40	4
41-45	3
46-50	2

**Tabla N° 8.** *Diferencias de frecuencia en el test de Altura*

### 5.3.1.3.2 Intensidad

Este test está compuesto por 50 pares de notas, y el sujeto debe indicar en cada par si la segunda nota es más fuerte o más débil que la primera. Los estímulos fueron producidos por el mismo aparato usado para el test de *Altura*, pero la frecuencia se mantuvo constante en 440 ciclos. La diferencia de la intensidad entre los tonos de cada par es:

Número de elementos	Diferencias en decibelios
1-5	4,0
6-10	2,5
11-20	2,0
21-30	1,5
31-40	1,0
41-50	0,5

**Tabla N° 9.** *Diferencias de decibelios en el test de Intensidad*

### 5.3.1.3.3 Ritmo

Para medir esta aptitud se presentan 30 pares de modelos rítmicos. El sujeto debe indicar, en cada par, si los modelos son iguales o diferentes. Los estímulos fueron originados por un oscilador de frecuencia colocado a 500 ciclos. El tiempo se mantiene constante, a razón de 92 cuartos de nota por minuto. Los diez primeros pares contienen modelos de cinco notas en compás de  $\frac{2}{4}$ ; los diez siguientes son modelos de seis notas en compás de  $\frac{3}{4}$  y los diez últimos modelos de siete notas en compás de  $\frac{4}{4}$ .

### 5.3.1.3.4 Tiempo

Lo forman 50 pares de notas de diferente duración. El sujeto debe determinar si la segunda nota es más larga o más corta que la primera. Los estímulos fueron producidos por el oscilador citado en el test de *Altura*.

La duración de las notas fue controlada automáticamente por un aparato controlador de tiempo, en el que se había preparado un esquema predeterminado de intervalos de tiempo. La frecuencia de los tonos se mantuvo constante a 440 ciclos.

Las diferencias de duración entre las notas en cada par es la siguiente:

Número de elementos	Diferencias en decibelios
1-5	0,300
6-10	0,200
11-20	0,150
21-30	0,125
31-40	0,100
41-45	0,075
46-50	0,050

**Tabla N° 10.** Diferencias de duración en el test de *Tiempo*

### 5.3.1.3.5 Timbre

El propósito de este test es medir la aptitud para discriminar entre sonidos complejos que difieren únicamente en su estructura armónica.

Consta de 50 pares de notas. El sujeto debe juzgar en cada par si las notas son iguales o diferentes en timbre. Las notas fueron producidas por un generador especial. Cada nota está compuesta por un componente fundamental, cuya frecuencia es de 180 ciclos, y sus primeros cinco armónicos. La estructura tonal se varía por medio de una alteración recíproca en las intensidades del tercero y cuarto armónicos.

La tabla siguiente muestra la cuantía en la que difieren las intensidades del tercero y cuarto armónicos, en los sonidos variables, de sus niveles en el tono normal:

Número de elementos	Aumento decibelios en el 4º armónico	Aumento decibelios en el 3º armónico
1-10	10,0	9,6
11-20	8,5	4,0
21-30	7,0	2,4
31-40	5,5	1,2
41-50	4,0	0,7

**Tabla N° 11.** *Diferencias de decibelios en el 4º y 3º armónico en la prueba de Timbre*

### 5.3.1.3.6 Memoria tonal

Este test tiene 30 pares de secuencias de notas subdivididas en tres grupos de diez elementos cada uno, y con tres, cuatro o cinco notas, respectivamente. En cada par hay una nota diferente en las dos secuencias y el sujeto debe identificar cada uno por el número de orden.

Se utilizó un órgano Hammond para producir los pares de secuencias. Se usaron los 18 pares cromáticos, hacia arriba, a partir del tono *Do*. El tiempo fue controlado cuidadosamente, y la intensidad se mantuvo constante.

#### **5.3.1.4 Administración de la prueba**

En los siguientes apartados se explican las condiciones, el material y el tiempo de aplicación de la prueba, así como las indicaciones que debemos facilitar a los alumnos antes de administrarles los tests, requisitos éstos que se cumplieron debidamente en todas las aplicaciones que realizamos del test en los distintos centros educativos.

##### **5.3.1.4.1 Condiciones de la prueba**

Los tests de aptitud musical de Seashore se han de administrar en una habitación con buenas condiciones acústicas y en la que no se produzcan, ni en la misma habitación ni en lugares cercanos, ruidos que puedan perturbar la audición (dichas condiciones las reunía la clase de Música del IES donde fueron aplicadas las pruebas).

Los tests pueden administrarse individualmente o en grupos de cualquier tamaño, incluso de 100 o más sujetos. Si se examina a un sujeto o a un grupo pequeño, no se deben colocar a menos de dos metros, aproximadamente, del altavoz; de otro modo, pueden oírse los ruidos normales de la electrónica del amplificador.

Para grupos grandes son importantes unas buenas condiciones de examen: las condiciones acústicas deben ser tales que los estímulos auditivos lleguen claramente a todas las partes de la habitación. Cuando el grupo es de 25 o más sujetos se necesita un ayudante para la administración de la prueba (únicamente se realizaron 2 sesiones con más de 25 alumnos, y fue la propia compañera del departamento de música la que ayudó en la administración de la prueba en estos casos).

#### **5.3.1.4.2 Material de la prueba**

Es obvio que ha de disponerse de un aparato reproductor que ofrezca un sonido con suficiente grado de fidelidad.

El examinador debe probar, con anterioridad, y en la misma habitación donde va a hacerse la reproducción, si existe un satisfactorio volumen, claridad, etc. Es esencial que el examinador estudie el Manual y se aplique a sí mismo la prueba antes de administrarla a otros (este procedimiento fue realizado en varias ocasiones).

#### **5.3.1.4.3 Tiempo de aplicación**

El tiempo real de la administración de los 6 tests es de 30 minutos, pero debe contarse con una hora para la total aplicación, incluyendo la distribución de material, instrucciones, demostraciones, etc.

#### **5.3.1.4.4 Aplicación de la prueba**

Después de que el grupo ha sido distribuido convenientemente en la clase, se les explicó que la prueba mide algunos aspectos de la habilidad para oír sonidos como los que existen en la música, en el lenguaje hablado y en muchas otras actividades.

Seguidamente se les indicó que las contestaciones deben anotarlas en las hojas especiales (reflejadas en el Anexo I-a) que se distribuyeron a continuación; y se pidió a los sujetos que escribieran los datos personales en las casillas correspondientes de la hoja de respuestas.

Luego se comenzó con las palabras siguientes:

*Esta hoja de respuestas que ustedes tienen delante contiene varios cuadros o secciones correspondientes a cada uno de los tests. Cada sección*

*consta de varias columnas numeradas en la parte superior; y en cada columna están escritas dos letras. Cuando tengan que indicar su respuesta deberán rodear una de las dos letras con un circulito de la siguiente forma (se dibuja un ejemplo en la pizarra y se les explica cómo hacerlo). En cada test coloquen las respuestas una debajo de otra, primero en la columna 1ª hasta que esté completa, luego en la 2ª y así sucesivamente. En cada uno de los tests se darán las instrucciones necesarias. Ahora se desea que comprendan cómo y dónde deben señalar las respuestas de modo claro y en los espacios indicados. Si se equivocan al anotar una respuesta, táchenla poniendo una cruz o aspa (se hace el gesto con la mano) sobre el circulito y rodeen la letra verdadera.*

Para avisar cuál es la prueba que sigue, en el soporte de audio (mp3), están grabadas las palabras: “Este es el test de.....”, “Preparados para la columna 1” “Preparados para la columna 2”, etc., con lo que se pueden evitar posibles equivocaciones al anotar las respuestas.

### **5.3.1.5 Justificación estadística**

Reflejamos los resultados de la prueba de fiabilidad a la que fue sometido el test, las palabras sobre la validez de la prueba que el propio autor nos aporta y la tipificación española realizada por el Doctor del Río (1982) en su tesis doctoral, para TEA Ediciones, que hemos podido aprovechar para nuestra investigación.

#### **5.3.1.5.1 Fiabilidad**

Esta característica de los tests de aptitud musical de Seashore, fue estimada a partir de los coeficientes de consistencia interna (fórmula 21 de Kuder-Richardson). Este procedimiento permite alcanzar coeficientes moderados, ya que su uso es más apropiado para subestimar que para sobrestimar la fiabilidad.

Los coeficientes hallados para cada test y en cada nivel de tipificación figuran en la tabla siguiente:

### Coeficientes de fiabilidad en el test de Seashore

	Tono	Intensidad	Ritmo	Tiempo	Timbre	Memoria Tonal
<b>4º - 5º grados</b>	0.82	0.85	0.67	0.72	0.55	0.81
<b>6º - 8º grados</b>	0.84	0.82	0.69	0.63	0.63	0.84
<b>9º - 16º grados</b>	0.84	0.74	0.64	0.71	0.68	0.83

**Tabla N° 12.** *Coeficientes de fiabilidad en el test de Seashore*

Aquellos coeficientes que son relativamente bajos (fórmula 21 de Kuder-Richardson), subrayan la importancia de interpretar las puntuaciones en amplias categorías. Solamente, cuando hay que tomar decisiones importantes con respecto a una aplicación o realización dudosa, es necesario hacer una nueva aplicación al sujeto.

#### 5.3.1.5.2 Validez

El autor ha mantenido, constante y enérgicamente, que su validez interna está bien establecida y que es inapropiado todo intento de validarlos con criterios externos falibles, tales como juicios sobre toda la conducta musical.

Seashore explica su punto de vista detalladamente, diciendo que los tests de aptitudes musicales, "...han sido validados para lo que se propusieron... Cuando en el laboratorio hemos medido la sensibilidad para la altura, esto es, la discriminación de alturas, con una fiabilidad, y sabemos que la altura ha sido aislada entre otros factores, ningún científico (conocedor de estos conceptos) pondrá en duda que nosotros hemos medido la altura".

El autor explica después el papel de las medidas específicas obtenidas a partir de estos tests y dice que "es fácil demostrar que no podemos encontrar un buen violinista que no tenga una buena sensibilidad para la altura, o un buen pianista que no tenga una buena sensibilidad para la intensidad... Pero no se

sigue que una buena dotación en estas aptitudes solas haga un buen artista”; y continúa: “la validación de la medida de la altura con la ejecución artística del violinista en su situación musical actual requeriría que correlacionáramos la sensibilidad para la altura con registros objetivos de ejecución musical en la reproducción de alturas o con la aptitud para detectar desviaciones artísticas de la altura en una pieza musical; pero no con otros incontables méritos o deméritos que el violinista puede presentar...”

Además de saber que los tests son verdaderas medidas de aptitudes específicas, y que para evaluarlas fueron diseñadas, el administrador de las pruebas puede estar interesado en saber el tipo de predicciones que puede obtener. En este sentido se han realizado estudios de correlaciones de estos tests con criterios externos, estimaciones del alcance del éxito musical, y en la bibliografía que se acompaña (citados en Seashore, 2008), pueden hallarse referencias a esos trabajos: Bienstock (1942) y Ludin (1953) presentan resúmenes de tales estudios de validación; Farnum (1950, 1953) expone las relaciones entre las puntuaciones en su *Music Notation Test* y la ejecución instrumental.

### 5.3.1.5.3 Tipificación española

Recogidos en una labor de varios años y en diversas partes de la geografía española, los miles de casos estudiados, 4.664 escolares de 5.º de Primaria a 4.º de Secundaria y con 568 adultos, han mostrado que los tests son discriminadores con certeza a partir de los 9-10 años de edad (5.º de Primaria), y que las variables medias maduran lentamente y son relativamente independientes, entre sí y en relación con otros rasgos de la personalidad.

En los análisis, los datos directos de cada una de las seis pruebas de Seashore se han clasificado, casi exhaustivamente, por las siguientes variables de los sujetos: edad, género, curso escolar, nivel socioeconómico, región geográfica y formación musical previa. Las variables que han mostrado una mayor influencia han sido la edad (lógica consecuencia, entre los escolares, del

fenómeno de la maduración) y el nivel educativo (íntimamente ligada a la anterior). El género y la región geográfica no han presentado una tendencia definitiva.

En una muestra de 174 sujetos de 6.º de Primaria y en otra de 88 adultos se han analizado las relaciones entre las seis pruebas; en ambos grupos las variables resultan bastante independientes; únicamente la Memoria Tonal (la prueba menos aptitudinal, en el sentido puro del concepto, porque parece implicar una entidad intelectual compleja) presenta claras y significativas relaciones con todas las demás, sobre todo con Altura y Ritmo. Se han calculado las correlaciones parciales compuestas de cada pareja de tests cuando se elimina la influencia de los otros cuatro, y los resultados confirman la independencia antes aludida: de los quince índices obtenidos en cada muestra sólo cuatro resultan significativos en cada una y son los mismos en ambos grupos (Memoria Tonal con Altura, Ritmo con Timbre, y Tiempo con Intensidad). Las dos matrices de correlaciones simples se sometieron a sendos análisis factoriales (oblicuo Direct Quartimin con componentes principales). La solución en ambos es muy similar; los dos factores extraídos explican entre el 52% y el 56% (según se trate de niños o adultos) de la varianza total de las variables; el primero agrupa los tests de Altura, Ritmo y Memoria Tonal, y el segundo Intensidad y Tiempo. En los niños, Timbre se agrupa al lado del primer factor (Altura), mientras que entre los adultos este test no se define con claridad, y tal vez apunta a una tercera dimensión muy específica.

En la elaboración de los tres tipos de baremos (construidos según el modelo habitual de TEA, con centiles y eneatis), se han seguido los siguientes criterios de equivalencia de niveles educativos.

	<b>LGE (1970)</b>	<b>LOMCE (2013)</b>
<b>Niños</b>	5.º de EGB	5.º de Primaria
<b>Adolescentes</b>	6.º, 7.º y 8.º de EGB	6.º de Primaria, 1.º y 2.º de ESO
<b>Adultos</b>	Adultos	Adultos

**Tabla Nº 13.** *Equivalencias de niveles educativos entre LGE (1970) y LOMCE (2013)*

En este apartado, debemos matizar que en nuestra investigación hemos utilizado para nuestra muestra de alumnos de 1.º, 2.º, 3.º y 4.º de Secundaria el mismo baremo, para convertir las puntuaciones directas en centiles, que Seashore utiliza para los alumnos de 6.º, 7.º y 8.º de EGB (que se puede consultar en el Anexo I-b), debido a que el siguiente cohorte de edad sería ya el grupo de adultos, y los participantes de nuestra investigación son adolescentes.

#### **5.3.1.6 Su relación con la formación musical**

De forma más global, también queríamos conocer cómo influía la formación musical de los adolescentes en los resultados del test de aptitud musical; para este cometido nos apoyamos en el estudio que Vert (2013) realizó con 1.818 adolescentes de 15 centros de Educación Secundaria, en el que comparó las medias de los resultados del Test de Seashore, con las respuestas que los mismos alumnos apuntaban sobre una pregunta del Cuestionario de hábitos musicales de Nebreda, relacionada con el lugar donde habían realizado estudios musicales, y aprendido a tocar algún instrumento musical, las opciones eran: en el Conservatorio, en una Escuela de música, con un profesor particular, en el Colegio o Instituto, etc.

Obteniendo los resultados más altos en todos los tests (Altura, Intensidad, Ritmo, etc.) el alumnado que respondió en el cuestionario que había realizado sus estudios musicales en un Conservatorio; podemos constatar con este resultado, que existe una relación directa entre la formación musical del adolescente y su capacidad de discriminación auditiva.

#### **5.3.2 Test de aptitud numérica del BAT-7**

En el siguiente apartado recogemos la justificación de la elección del test para nuestra investigación, una descripción del mismo, aspectos a considerar antes, durante y después de la aplicación, así como instrucciones específicas, su justificación estadística y baremación, cuestiones éticas y deontológicas

relacionadas con la prueba, y finalmente la relación del BAT-7 con el rendimiento académico (parte del siguiente apartado ha sido entresacado del Manual de BAT-7).

### 5.3.2.1 Justificación de la elección

Varios fueron los motivos para decidimos a utilizar el test de aptitud numérica del BAT-7 en nuestra investigación; uno de ellos fue que la creación y redacción del test están en castellano, señalo esto porque todos los tests de aptitudes musicales están escritos en lenguas extranjeras, generalmente en inglés, y no es la primera vez que la traducción de algún término ocasiona ciertos problemas de comprensión en los alumnos, por ejemplo: la tipificación española del Test de Seashore traduce *Pitch* por Tono, no es que sea incorrecta la traducción, sino que desde los años 90 tanto en Educación Primaria como en Secundaria para definir la cualidad física del sonido que nos permite distinguir entre sonidos graves o agudos, utilizamos el término *Altura*, son pequeñas disfunciones que se solucionan si el test está creado en la lengua materna del alumnado a los que se les va a aplicar.

Otros motivos como la novedad de las tareas, la eficiencia de la evaluación, la flexibilidad de la aplicación, el amplio abanico de puntuaciones, el desarrollo psicométrico basado en la TRI (desarrollado en el apartado de justificación estadística), o la representatividad y actualidad de las muestras, hacen del BAT-7 una de las baterías más completas existentes en el mercado. Su año de publicación fue 2013, y nosotros hemos utilizado la 2ª edición, revisada y ampliada en 2015.

La especificidad por niveles escolares del test fue otra característica determinante para nuestra elección, la batería se compone de 3 niveles o cuadernillos de dificultad creciente, adecuados para diferentes tipos de población de escolares y adultos:

- **Nivel elemental (E):** Escolares de 1.º a 2.º de ESO

- **Nivel medio (M):** Escolares de 3.º a 4.º de ESO
- **Nivel superior (S):** Escolares de 1.º a 2.º de Bachillerato

Aunque por los participantes de nuestra investigación (alumnos de Educación Secundaria) solo vamos a utilizar los niveles elemental (E), y medio (M). Y por último, el que puedan aplicarse por separado cada uno de los test, es decir, a nosotros solo nos interesa medir la aptitud numérica, por lo tanto, únicamente aplicamos dicho test y no la batería completa, ahorrando así en tiempo y costes de ejecución.

### 5.3.2.2 Descripción del test

Incluye tres tipos de tareas (igualdades numéricas, series y tablas incompletas) con mayor carga de razonamiento numérico que de cálculo. Se trata de ítems de elección múltiple en los que el examinado debe seleccionar entre 5 opciones de respuesta el valor numérico que cumple una igualdad, que continúa una serie o que completa una tabla de valores.

### 5.3.2.3 Aspectos a considerar antes y durante

Algunas consideraciones de tipo general que conviene tener en cuenta antes de la sesión de evaluación, especialmente cuando se realicen aplicaciones colectivas, pueden ser las siguientes:

- Se recomienda tener reunido, verificado y custodiado todo el material de evaluación. Suele ser recomendable disponer de un número de materiales mayor del necesario para posibles problemas durante la aplicación (errores de anotación, lápices defectuosos, etc.), así como el manual por si fuera necesario realizar alguna consulta puntual.
- El lugar donde se realice la aplicación debe ser amplio y lo suficientemente ventilado, iluminado y confortable.

- Se debe tratar de evitar en la medida de lo posible las interrupciones, por lo que conviene colocar un letrero en la puerta con una indicación del tipo “Por favor, no molesten. Sesión de evaluación en curso”.
- Se debe situar a las personas lo suficientemente distanciadas entre sí para que trabajen con total independencia.
- En grupos muy numerosos, conviene planificar que haya un examinador o ayudante por cada 25 o 30 examinados (como ya comentamos anteriormente, la profesora adjunta al departamento de música, fue la ayudante del investigador en 2 grupos en los que habían más de 25 alumnos).

Igualmente, durante la sesión de aplicación se pueden tener en cuenta las siguientes indicaciones:

### **Antes de la lectura de las instrucciones**

- Se debe tratar de crear un ambiente relajado que disminuya la ansiedad ante la evaluación. Una forma de hacerlo, acorde a las normas deontológicas, es informar de modo positivo sobre la finalidad de la evaluación, la duración de la sesión, el tipo de tests que se va a utilizar, el uso que se hará de las puntuaciones y las condiciones que pueden hacer que la prueba sea invalidada.
- Del mismo modo, antes del comienzo de cada test, se deberá motivar a los examinados induciéndoles a que pongan su máximo interés y atención.
- En este momento se recomienda indicar al grupo que desconecte las fuentes potenciales de distracción, tales como alarmas, dispositivos móviles, etc.

- Especialmente en el caso de los adultos, se debe verificar la identidad de las personas que van a realizar el examen.

### **Durante las instrucciones**

- Se deben hacer las aclaraciones necesarias en voz alta y apoyándose en los ejemplos, así como responder a las preguntas que puedan surgir, asegurando así que todos los evaluados comprenden perfectamente la tarea a realizar. Si alguna persona no solicita las aclaraciones en voz alta, se repetirá a todo el grupo la duda u observación y se contestará en voz alta, con objeto de igualar las condiciones de aplicación.
- Una pregunta recurrente que suele aparecer en determinado tipo de colectivos durante el tiempo dedicado a las instrucciones se refiere a la penalización de los errores. En este sentido, el examinador debe ceñirse a las instrucciones que aparecen en el cuadernillo, repitiendo si fuera necesario la frase: “Si en algún ejercicio no estás completamente seguro de cuál puede ser la respuesta correcta, elige la opción que crees que es más correcta de las que aparecen; no se penalizará el error”.

### **Durante el tiempo de respuesta a los tests**

- Se recomienda pasearse por las mesas una vez comenzada la tarea para comprobar uno a uno que se están anotando correctamente las respuestas en los espacios habilitados para ello. La detección en este momento de la sesión hace posible enmendar pequeños errores y evitar una posible invalidación de la evaluación.
- Una vez comenzado el test, no se darán explicaciones ni se harán comentarios en conjunto o individualmente sobre cualquiera de los ejercicios. Ante cualquier pregunta que se exponga, se contestará: “Piénsalo bien y contesta lo que creas que es correcto”.

- Se debe supervisar personalmente todo el proceso, para lo cual resulta necesaria la presencia y la disponibilidad del examinador durante toda la sesión.
- Se debe poner un especial cuidado en el cumplimiento estricto de los tiempos indicados para cada test, especialmente en el caso del test A. Igualmente se deberá prestar atención a que nadie pase las hojas del cuadernillo hacia otros tests posteriores al que se esté realizando.
- Se deberá prestar atención a la preocupación de algunos escolares por “terminar cuanto antes la prueba”, ya que con la intención de acabar los primeros pueden poner poco cuidado en contestar con atención los elementos.
- Dadas las características de los tests que incorpora el BAT-7, es muy probable que gran parte de los examinandos termine antes del tiempo concedido. En esos casos, se instará al repaso de las respuestas o, en su defecto, al cierre del cuadernillo.

#### **5.3.2.4 Instrucciones específicas del test**

Cada test que forma la Bateria de aptitudes de TEA tiene unas instrucciones específicas, para el test de aptitud numérica, test N, son las siguientes:

- Es el único test del BAT-7 con 5 opciones de respuesta.
- Es posible que algunos examinandos hagan numerosas anotaciones en la hoja en blanco, por lo que conviene contar con hojas en blanco de más para repartir.
- En los ítems con formato de tabla, durante las instrucciones se debe poner énfasis en que no es necesario calcular todos los valores borrados

para obtener la solución. La tarea consistente en obtener el valor del interrogante, no el de todos los valores borrados.

### 5.3.2.5 Justificación estadística

Entre los aspectos a tener en cuenta en la definición de cualquier constructo que se desee medir psicométricamente está su dimensionalidad, es decir, el número de dimensiones o factores explicativos de la conducta o rasgo a evaluar (García-Cueto y Fidalgo, 2005). Al igual que en el estudio piloto, se puso a prueba la unidimensionalidad de los tests con dos finalidades principales: por un lado, la aplicación de los modelos TRI unidimensionales a los datos y por otro, la corroboración de que existe fundamentalmente una única dimensión que explica las respuestas a los ítems.

También abordamos el análisis de ítems, propiamente dicho, desde la perspectiva de los dos principales enfoques psicométricos: la Teoría Clásica de los Tests (TCT) y la Teoría de Respuesta al Ítem (TRI). Este tipo de análisis suele estar asociado al proceso de construcción de tests, específicamente a la selección y ordenación de los ítems, tal y como ocurrió durante la fase de desarrollo del BAT-7. No obstante, en esta ocasión perseguimos una doble finalidad: argumentar la calidad métrica de los elementos y permitir una explicación más cualitativa del rendimiento de los evaluados en cada una de las tareas.

Desde la perspectiva clásica, se calculó el índice de dificultad (P) y los índices de discriminación D y  $R_{bp}$  (correlación biserial-puntual). Para ello, se utilizó el programa ITEMAN 4.2 (Assessment Systems Corporation, 2011), el cual calcula el índice de dificultad asumiendo que las omisiones son errores, algo que no es aplicable al caso del BAT-7; por esta razón, se recalculó el valor de este índice teniendo en cuenta únicamente el número de casos con respuestas, lo que hizo variar levemente los valores (apenas existen omisiones al tratarse de tests principalmente de potencia).

### 5.3.2.5.1 Fiabilidad

En Psicología, como en otras ramas del conocimiento, cualquier proceso de medición lleva asociado un margen de error y determinado grado de precisión. A este último es precisamente al que se suele referir el concepto de fiabilidad, aunque existen tantas definiciones como autores se han acercado a su estudio. Constatamos aquí una definición que a nuestro juicio destaca sobre las demás por su sencillez y su aplicación específica a nuestro ámbito: Bajo la denominación genérica de fiabilidad se agrupan todo un conjunto de métodos y técnicas utilizadas por los psicólogos para estimar el grado de precisión con el que están midiendo sus variables (Muñiz, 1998).

Existen por tanto diferentes métodos y técnicas para estimar la fiabilidad, cada uno de los cuales aportará un tipo de información. La elección de un método u otro vendrá determinada, entre otras razones, por las posibles circunstancias aleatorias que hagan disminuir la precisión de la medida (y por tanto aumentar el error) y que sean relevantes para el objeto de estudio. Algunos autores (p. ej., Feldt y Brennan, 1989; Brennan, 2001; Thompson, 2003) clasifican estas circunstancias en temporales (estabilidad temporal), de contenido de las formas (equivalencia), de contenido de los ítems (consistencia interna) o procedentes de los calificadores (fiabilidad entre jueces); para otros (Schmidt y Hunter, 1996, 1999; Schmidt, Le y Ilies, 2003) se pueden dividir en factores transitorios, específicos y aleatorios. Independientemente de la fuente de error y de su clasificación, es importante tener en cuenta que el estudio de la fiabilidad contempla múltiples perspectivas y teorías enfocadas a informar sobre el grado de precisión que subyace a la medida, por lo que la fiabilidad en términos estrictos no es un concepto unitario.

Estos métodos están a disposición de los psicólogos que tienen que tratar con un objeto de medida complejo, lo que produce oscilaciones en los resultados que incluyen diversos motivos no contemplados en otras disciplinas: efectos de aprendizaje, maduración, fatiga, distracción, etc. Igualmente, cabe destacar que la fiabilidad siempre es estimada y no exacta, además de gradual.

De esta forma, cada uno de los métodos anteriores arrojará una estimación de la fiabilidad relacionada con la fuente de error que trate y, además, estimará dicha fiabilidad a partir de una o varias técnicas, lo que puede hacer que los resultados varíen y deban entenderse como aproximaciones a la fiabilidad *real*.

Como indican Abad et al. (2011), actualmente se considera un error hablar de fiabilidad del test, siendo más correcto hablar de fiabilidad de las puntuaciones obtenidas en el test (Fan y Yin, 2003; Thompson y Vacha-Haase, 2000). Esta distinción terminológica desplaza el énfasis al uso que se hace de las puntuaciones, a la muestra en la cual se basan dichas puntuaciones y, consecuentemente, al método utilizado para extraer conclusiones apropiadas sobre su precisión. La fiabilidad, por tanto, no es un concepto inherente al test, sino que va íntimamente ligada al uso que se haga de él. Desde el punto de vista de la consistencia interna, el test de aptitud numérica del BAT-7 fue analizado con el Alfa de Cronbach y coeficientes ordinales.

#### **5.3.2.5.2 Validez**

Tradicionalmente la validez se clasificaba en tres grandes tipos: validez de contenido, validez de criterio y validez de constructo. Además, se entendía como un criterio categórico, es decir, los tests tenían o no validez. Un test tenía validez de contenido si representaba los aspectos más relevantes del constructo que pretendía medir; la validez de criterio se refería a las relaciones mostradas con un criterio externo, como el rendimiento en alguna otra medida o la pertenencia a un grupo; por último, la validez de constructo se alcanzaba cuando la estructura y el significado del rasgo psicológico a medir eran realmente evaluados por el test.

Las definiciones actuales del concepto de validez son más unitarias. Los Standards for Educational and Psychological Testing (AERA, 1999), uno de los referentes internacionales en cuestiones de evaluación psicológica, indican que “en el desarrollo del concepto de validez ya no se habla de diferentes tipos de validez; en su lugar se analizan diferentes evidencias sobre la validez, todas

ellas encaminadas a proporcionar una información relevante para alcanzar una interpretación específica de las puntuaciones del test” (p. 5). En definitiva, la validez se refiere al grado en el que existen datos empíricos que apoyan la interpretación de las puntuaciones en un sentido determinado. En el BAT-7 se han recogido diversas evidencias de validez para apoyar la interpretación de las puntuaciones:

Desde el punto de vista de la validez interna:

- Intercorrelaciones
- Análisis factorial confirmatorio (AFC)
- Invarianza factorial
- Desarrollo de los índices de inteligencia
- Relación de los estilos atencionales con el rendimiento

Desde el punto de vista de la validez externa:

- Relación con otros tests de aptitudes
- Relación con variables sociodemográficas
- Relación con el rendimiento académico (que veremos en el apar. 5.3.2.7)

### **5.3.2.6 Cuestiones éticas y deontológicas**

El uso y la aplicación de pruebas psicológicas se rigen por una serie de principios cuyo conocimiento puede ser de gran utilidad. Existen varios organismos que han articulado normas éticas sobre el uso de los tests psicológicos, entre los cuales destacamos el Código Deontológico del Psicólogo (CDP; COP, Colegio Oficial de Psicólogos, 2010), los Principios Éticos y el Código de Conducta de la APA (American Psychological Association, 2010), las Normas Mínimas para el Uso de los Tests (Moreland et al., 1995) y las Directrices Internacionales para el Uso de los Tests de la ITC (International Test Commission, 2000).

Se recomienda encarecidamente la lectura de estos documentos, ya que incluyen cuestiones importantes en relación con la evaluación de personas. Presentamos a continuación un breve resumen sobre los aspectos más relacionados con la evaluación psicométrica, los cuales deben tenerse en mente para asegurar una práctica ajustada a la deontología que rige la profesión. Así, el investigador:

- Debe utilizar instrumentos de evaluación cuya fiabilidad y validez con la población a evaluar haya sido comprobada (Art. 9.02; APA, 2010).
- Debe usar tests para los que esté debidamente capacitado (ITC, 2000).
- Debe ser prudente a la hora de aplicar instrumentos y técnicas y debe fundamentar objetiva y científicamente sus intervenciones (art. 6 del CDP; COP, 2010).
- Debe asegurarse de la confidencialidad de los resultados de los tests (ITC, 2000).
- Debe proporcionar una información clara sobre la finalidad de la evaluación e informar a las personas evaluadas sobre sus resultados de forma constructiva y positiva.
- Debe abstenerse de facilitar los materiales de evaluación psicológica a personas no competentes y debe garantizar su custodia, su integridad y su seguridad (art. 19 del CDP; COP, 2010; arts. 9.07 y 9.11; APA, 2010). Igualmente, debe mantener la seguridad de las plantillas y abstenerse de entrenar a las personas en los ítems del test (Moreland et al., 1995).

### **5.3.2.7 Su relación con el rendimiento académico**

Durante la fase de tipificación se recogieron datos sobre el rendimiento académico de una muestra de 3.403 escolares, a los que se pidió que informaran sobre la nota global alcanzada durante el curso en el que estuvieran

matriculados. Este estudio, tradicionalmente enmarcado bajo la etiqueta de validez referida a criterio, ha permitido correlacionar las puntuaciones del BAT-7 de cada nivel con las calificaciones académicas.

Los valores del coeficiente de correlación indican una elevada relación entre las puntuaciones del BAT-7 y el rendimiento escolar, acorde a la encontrada en otros estudios del mismo tipo. Los tests que más se relacionan con la calificación escolar son los propios del factor Gc, V y O, así como el test N (Aptitud Numérica), el cual se comprueba que está relacionado con los contenidos cristalizados aprehendidos académicamente.

## Capítulo 6. Exposición, análisis y discusión de los resultados

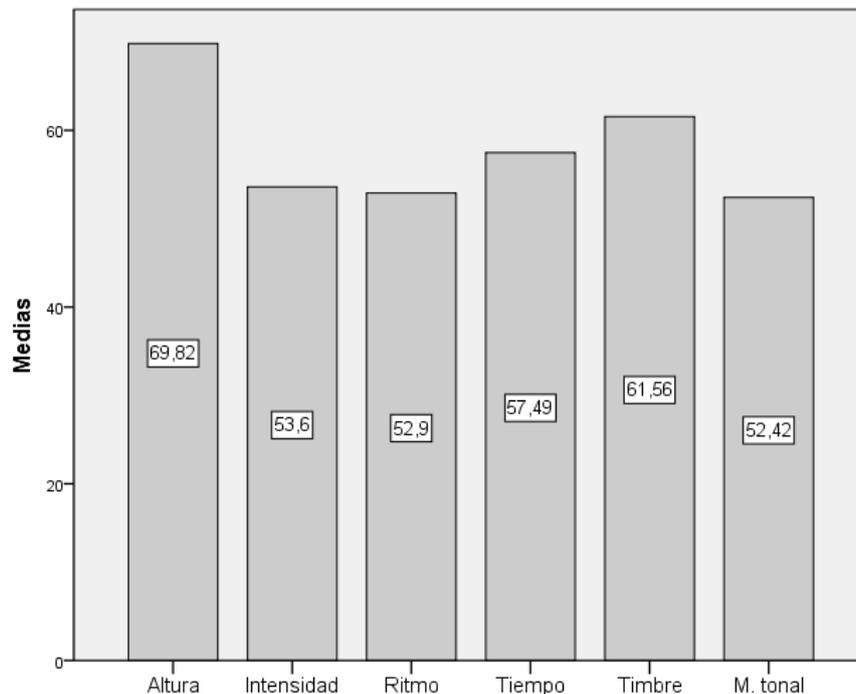
### 6.1 Introducción

Se presenta la media de los resultados del test de aptitud musical de Seashore en el total de la muestra, para posteriormente desglosarlos por nivel escolar y género, a continuación se realiza la misma exposición con el test de aptitud numérica del BAT-7.

Se analizan los datos resultantes de la aplicación del test de Seashore y el test de aptitud numérica del BAT-7, para conocer en primer término si existen diferencias estadísticamente significativas entre sus medias, para posteriormente analizar con la codificación realizada (grupo bajo, medio o alto), el comportamiento de los participantes; para ello se aplican las pruebas de U de Mann-Whitney y Wilcoxon (versiones no paramétricas de la habitual prueba t de Student, aplicada a dos muestras independientes y/o relacionadas). Seguidamente realizamos un análisis discriminante para conocer las diferencias existentes entre dos grupos con base en los valores que toman ciertas variables sobre los individuos **de cada uno de los grupos**. Para concluir realizando un contraste de las hipótesis planteadas en la investigación.

### 6.2 Exposición de los resultados del test de aptitud musical de Seashore

El test de aptitudes musicales de Seashore se administró a 200 adolescentes participantes en nuestra investigación; la media aritmética de los resultados obtenidos en los centiles de la prueba fue de 69,82 en el test de altura, 53,60 en el de intensidad, 52,90 en la prueba de ritmo, 57,49 en tiempo, en el test de timbre 61,56 y finalmente, en memoria tonal el resultado obtenido fue de 52,42, obteniendo una media aritmética de los seis test de 58,02. En el siguiente gráfico podemos observar claramente los resultados que acabamos de indicar.



**Gráfico Nº 2.** *Medias obtenidas con el test de Seashore sobre el total de los participantes*

### 6.2.1 Resultados globales por género y nivel educativo

Se exponen los resultados según los partidarios de la globalidad de la aptitud musical, Lundin, Mursell y Wing (citados en del Río, 1999), que se basan en la teoría ómnibus, anteriormente citada, de que “si la música es una unidad, la aptitud musical, aunque compleja, será una aptitud única.” (p. 76). Para transformar los resultados en una unidad, hemos calculado la media aritmética de los seis tests (en centiles) que conforman el test de Seashore, para de este modo obtener una única medida, que exponemos a continuación por género y por nivel educativo.

Género	Test de Seashore		
	Media	Casos	Desviación típica
Masculino	59,34	101	17,177
Femenino	56,69	99	19,611
<b>Total</b>	<b>58,02</b>	<b>200</b>	<b>18,424</b>

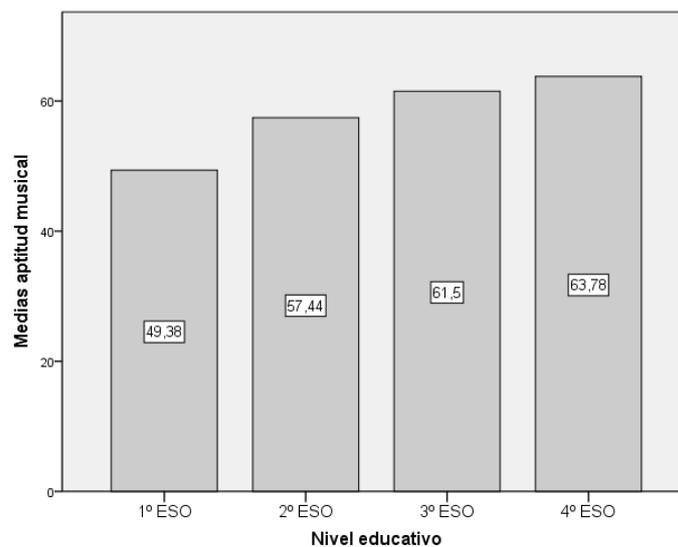
**Tabla Nº 14.** *Medias globales del test de Seashore por género*

En primer lugar vamos a ver cómo se comporta el factor género con los resultados globales del test de aptitud musical de Seashore, apreciando que el género masculino obtiene una media de 59,34, y el femenino de 56,69; en el apartado 6.4 de este capítulo, estudiaremos si estas diferencias que se dan entre las medias globales con el factor género, son estadísticamente significativas o no.

A continuación podemos observar cómo se comporta el nivel educativo con las medias globales obtenidas con el test de aptitud musical, obteniendo medias de 49,38 para los participantes de 1.º ESO, 57,44 los participantes de 2.º ESO, y 61,50 y 63,78, los participantes de 3.º y 4.º ESO respectivamente.

Nivel educativo	Test de Seashore		
	Media	Casos	Desviación típica
1º ESO	49,38	50	18,617
2º ESO	57,44	50	16,821
3º ESO	61,50	50	17,841
4º ESO	63,78	50	17,548
<b>Total</b>	<b>58,02</b>	<b>200</b>	<b>18,424</b>

**Tabla Nº 15.** *Medias globales del test de Seashore por nivel educativo*



**Gráfico Nº 3.** *Medias globales del test de Seashore por nivel educativo*

## 6.2.2 Resultados específicos por género y nivel educativo

Por otra parte, exponemos los resultados de los partidarios de la teoría de los específicos (vista en el Capítulo III, cuando definimos la aptitud musical), formados por Seashore y sus colaboradores (citados en del Río, 1999), que afirman que “por la complejidad de la aptitud musical, es preciso analizar la música en sus partes componentes y piensan en función de grupos de aptitudes separadas e independientes” (p. 77).

Como en el anterior apartado, exponemos los resultados según su género y nivel educativo, pero de forma independiente.

### 6.2.2.1 Test de altura

En esta ocasión vemos como los participantes de género masculino obtienen una media de 71,55, con una desviación típica de 27,262, mientras que sus compañeras obtienen una media de 68,05, con una desviación típica de 25,699.

Género	Test de altura		
	Media	Casos	Desviación típica
Masculino	71,55	101	27,262
Femenino	68,05	99	25,699
<b>Total</b>	<b>69,82</b>	<b>200</b>	<b>26,492</b>

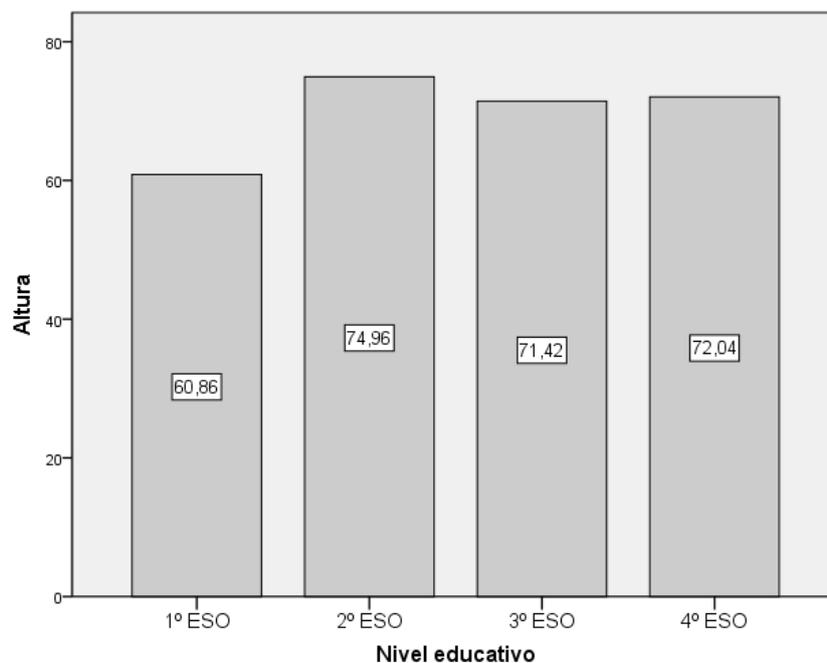
**Tabla Nº 16.** *Medias de altura por género*

Referente al nivel educativo, observamos que los mejores resultados se encuentran en 2.º, seguidos de 4.º, 3.º y 1.º de ESO respectivamente, con unas medias de 74,96, 72,04, 71,41, y 60,86, y unas desviaciones típicas de 23,741, 26,387, 25,437, y 28,752 correspondientemente.

Nivel educativo	Test de altura		
	Media	Casos	Desviación típica
1º ESO	60,86	50	28,752
2º ESO	74,96	50	23,741
3º ESO	71,42	50	25,437
4º ESO	72,04	50	26,387
<b>Total</b>	<b>69,82</b>	<b>200</b>	<b>26,492</b>

**Tabla Nº 17.** *Medias de altura por nivel educativo*

En el siguiente gráfico podemos observar plásticamente los resultados que acabamos de comentar en la tabla anterior.



**Gráfico Nº 4.** *Medias de altura por nivel educativo*

### 6.2.2.2 Test de intensidad

Si hablamos del test de intensidad, podemos apreciar en la siguiente tabla como los participantes de género masculino obtienen una media de 53,97, con una desviación típica de 28,920; mientras que sus compañeras obtienen una media de 53,22, con una desviación típica de 27,828.

Género	Test de intensidad		
	Media	Casos	Desviación típica
Masculino	53,97	101	28,920
Femenino	53,22	99	27,828
<b>Total</b>	<b>53,60</b>	<b>200</b>	<b>28,316</b>

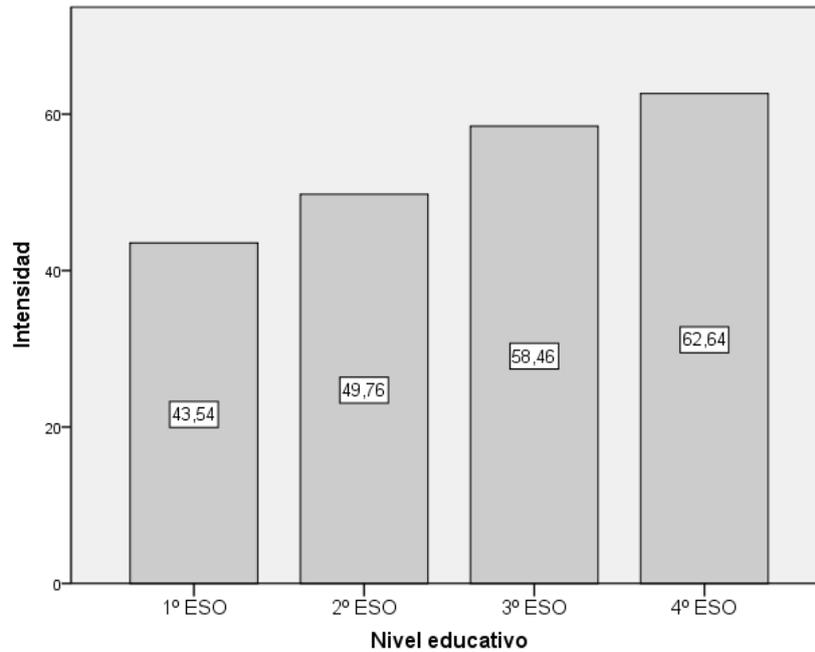
**Tabla Nº 18.** *Medias de intensidad por género*

En la siguiente tabla vamos a conocer los resultados del test de intensidad y el nivel educativo, en los que observamos que los mejores resultados se encuentran en 4.º, seguidos de 3.º, 2.º y 1.º de ESO respectivamente, con unas medias de 62,64, 58,46, 49,76, y 43,54, y unas desviaciones típicas de 27,448, 26,468, 24,300, y 31,401 correspondientemente.

Nivel educativo	Test de intensidad		
	Media	Casos	Desviación típica
1º ESO	43,54	50	31,401
2º ESO	49,76	50	24,300
3º ESO	58,46	50	26,468
4º ESO	62,64	50	27,448
<b>Total</b>	<b>53,60</b>	<b>200</b>	<b>28,316</b>

**Tabla Nº 19.** *Medias de intensidad por nivel educativo*

En el siguiente gráfico podemos observar plásticamente los resultados que acabamos de comentar en la tabla anterior.



**Gráfico Nº 5.** Medias de intensidad por nivel educativo

### 6.2.2.3 Test de ritmo

En lo referente al ritmo, vemos como los participantes de género masculino obtienen una media de 54,46, con una desviación típica de 27,100; mientras que sus compañeras obtienen una media de 51,31, con una desviación típica de 29,327.

Género	Test de ritmo		
	Media	Casos	Desviación típica
Masculino	54,46	101	27,100
Femenino	51,31	99	29,327
<b>Total</b>	<b>52,90</b>	<b>200</b>	<b>28,197</b>

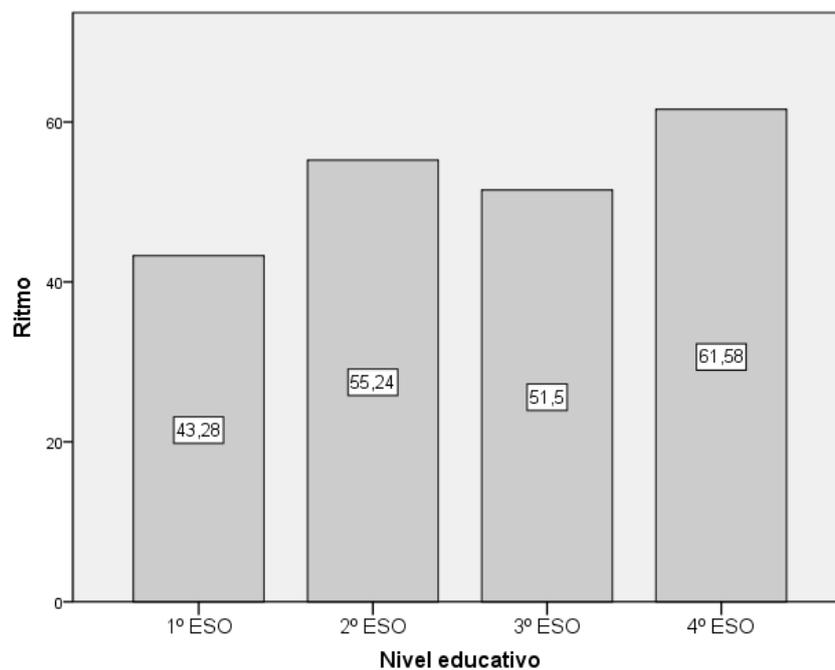
**Tabla Nº 20.** Medias de ritmo por género

Referente al nivel educativo, observamos que los mejores resultados se encuentran en 4.º, seguidos de 2.º, 3.º y 1.º de ESO respectivamente, con unas medias de 61,58, 55,24, 51,50, y 43,28, y unas desviaciones típicas de 24,044, 28,247, 26,170, y 31,452 correspondientemente.

Nivel educativo	Test de ritmo		
	Media	Casos	Desviación típica
1º ESO	43,28	50	31,452
2º ESO	55,24	50	28,247
3º ESO	51,50	50	26,170
4º ESO	61,58	50	24,044
<b>Total</b>	<b>52,90</b>	<b>200</b>	<b>28,197</b>

**Tabla Nº 21.** *Medias de ritmo por nivel educativo*

En el siguiente gráfico podemos observar plásticamente los resultados que acabamos de comentar en la tabla anterior.



**Gráfico Nº 6.** *Medias de ritmo por nivel educativo*

#### 6.2.2.4 Test de tiempo

Pasamos a conocer los resultados del test de tiempo, y observamos como los participantes de género masculino obtienen una media de 57,97, con una desviación típica de 29,198; mientras que sus compañeras obtienen una media de 56,99, con una desviación típica de 26,447.

Género	Test de tiempo		
	Media	Casos	Desviación típica
Masculino	57,97	101	29,198
Femenino	56,99	99	26,447
<b>Total</b>	<b>57,49</b>	<b>200</b>	<b>27,805</b>

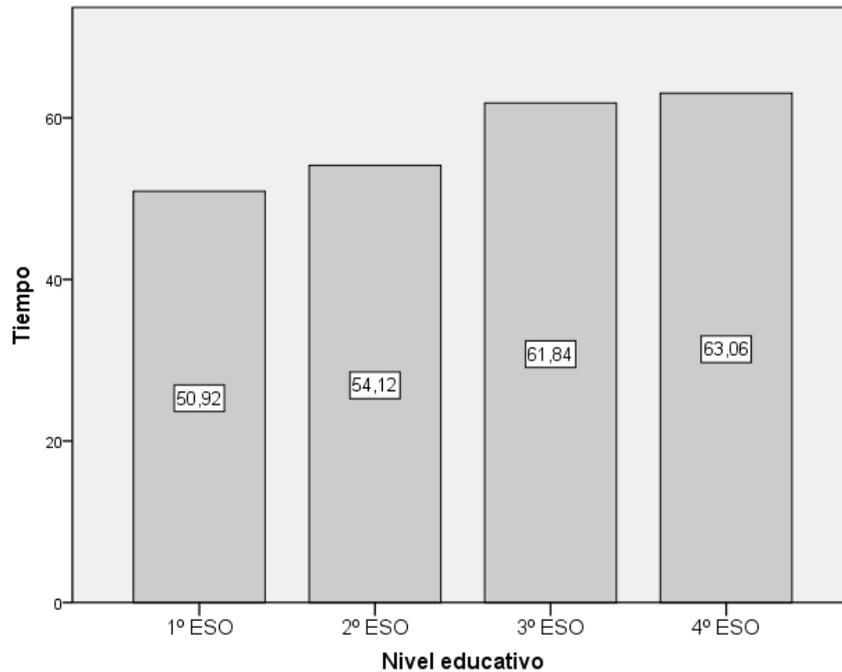
**Tabla Nº 22.** *Medias de tiempo por género*

Concerniente al nivel educativo, observamos que los mejores resultados se encuentran en 4.º, seguidos de 3.º, 2.º y 1.º de ESO respectivamente, con unas medias de 63,06, 61,84, 54,12, y 50,92, y unas desviaciones típicas de 27,934, 26,787, 26,785, y 28,598 correspondientemente.

Nivel educativo	Test de tiempo		
	Media	Casos	Desviación típica
1º ESO	50,92	50	28,598
2º ESO	54,12	50	26,785
3º ESO	61,84	50	26,787
4º ESO	63,06	50	27,934
<b>Total</b>	<b>57,49</b>	<b>200</b>	<b>27,805</b>

**Tabla Nº 23.** *Medias de tiempo por nivel educativo*

En el siguiente gráfico podemos observar plásticamente los resultados que acabamos de comentar en la tabla anterior.



**Gráfico Nº 7.** *Medias de tiempo por nivel educativo*

#### 6.2.2.5 Test de timbre

Podemos apreciar en la siguiente tabla como los participantes de género masculino obtienen una media de 64,31, con una desviación típica de 26,763; mientras que sus compañeras obtienen una media de 58,75, con una desviación típica de 28,819.

Género	Test de timbre		
	Media	Casos	Desviación típica
Masculino	64,31	101	26,763
Femenino	58,75	99	28,819
<b>Total</b>	<b>61,55</b>	<b>200</b>	<b>27,870</b>

**Tabla Nº 24.** *Medias de timbre por género*

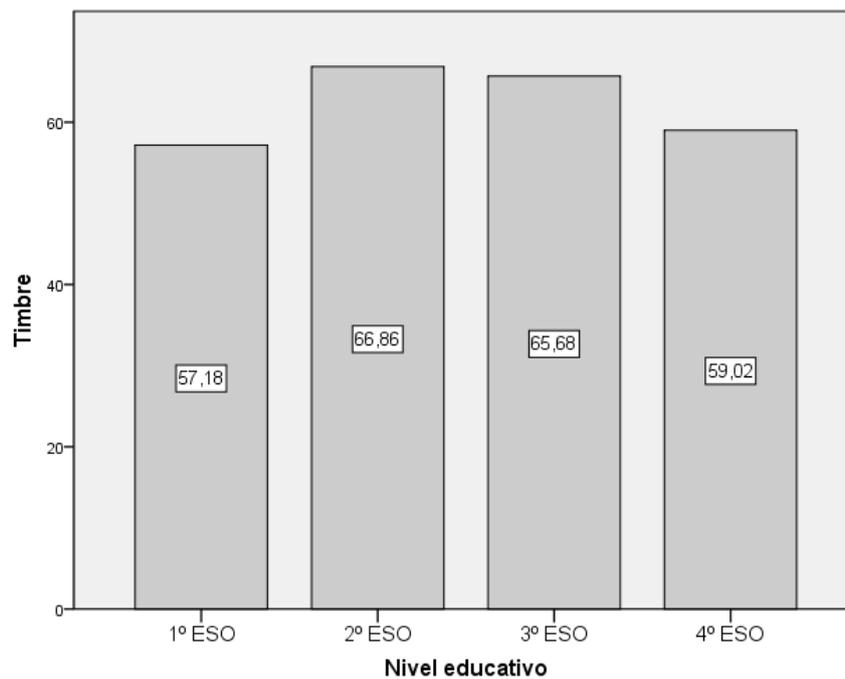
Si nos referimos al nivel educativo, podemos apreciar en la siguiente tabla que los mejores resultados se encuentran en 2.º, seguidos de 3.º, 4.º y 1.º de ESO respectivamente, con unas medias de 66,86, 65,68, 59,02, y 57,18, y

unas desviaciones típicas de 26,374, 28,268, 23,507, y 31,872 correspondientemente.

Nivel educativo	Test de timbre		
	Media	Casos	Desviación típica
1º ESO	57,18	50	31,872
2º ESO	66,86	50	26,374
3º ESO	65,68	50	28,268
4º ESO	59,02	50	23,507
<b>Total</b>	<b>61,55</b>	<b>200</b>	<b>27,870</b>

**Tabla Nº 25.** Medias de timbre por nivel educativo

En el siguiente gráfico podemos observar plásticamente los resultados que acabamos de comentar en la tabla anterior.



**Gráfico Nº 8.** Medias de timbre por nivel educativo

### 6.2.2.6 Test de memoria tonal

En esta ocasión vemos como los participantes de género masculino obtienen una media de 53,47, con una desviación típica de 29,495; mientras

que sus compañeras obtienen una media de 51,34, con una desviación típica de 32,090.

Género	Test de memoria tonal		
	Media	Casos	Desviación típica
Masculino	53,47	101	29,495
Femenino	51,34	99	32,090
<b>Total</b>	<b>52,42</b>	<b>200</b>	<b>30,748</b>

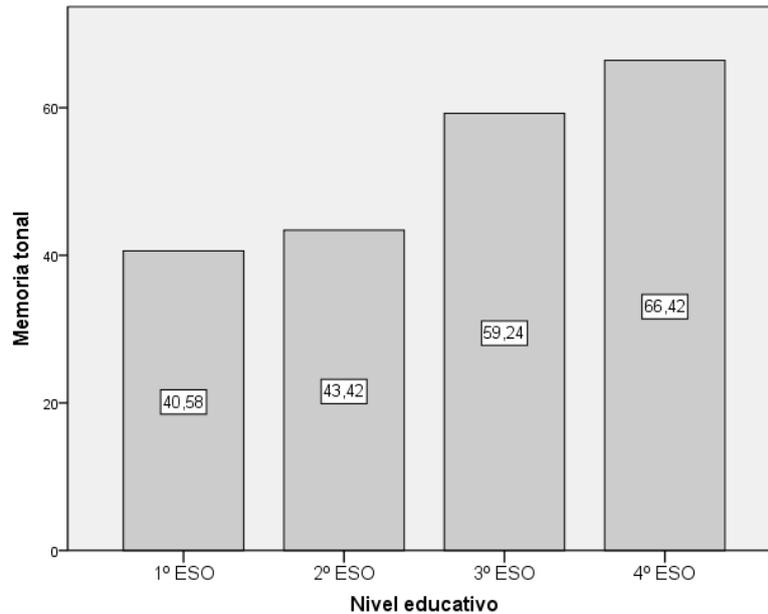
**Tabla Nº 26.** *Medias de memoria tonal por género*

Referente al nivel educativo, observamos que los mejores resultados se encuentran en 4.º, seguidos de 3.º, 2.º y 1.º de ESO respectivamente, con unas medias de 66,42, 59,24, 43,42, y 40,58, y unas desviaciones típicas de 30,438, 27,176, 29,861, y 28,456 correspondientemente.

Nivel educativo	Test de memoria tonal		
	Media	Casos	Desviación típica
1º ESO	40,58	50	28,456
2º ESO	43,42	50	29,861
3º ESO	59,24	50	27,176
4º ESO	66,42	50	30,438
<b>Total</b>	<b>52,42</b>	<b>200</b>	<b>30,748</b>

**Tabla Nº 27.** *Medias de memoria tonal por nivel educativo*

En el siguiente gráfico podemos observar plásticamente los resultados que acabamos de comentar en la tabla anterior.



**Gráfico N° 9.** Medias de memoria tonal por nivel educativo

### 6.3 Exposición de los resultados del test de aptitud numérica del BAT-7

El test de aptitud numérica se administró a 200 adolescentes participantes en nuestra investigación; obteniendo una media aritmética de 59,49, y unos resultados desglosados por género y nivel educativo que podemos apreciar en el siguiente apartado.

#### 6.3.1 Resultados por género y nivel educativo

A continuación vamos a ver desglosada la media anterior teniendo en cuenta las variables género y nivel educativo, obteniendo el género masculino un 63,34 de media, y el femenino un 55,56.

Género	Test de aptitud numérica BAT-7		
	Media	Casos	Desviación típica
Masculino	63,34	101	23,987
Femenino	55,56	99	27,464
<b>Total</b>	<b>59,49</b>	<b>200</b>	<b>25,996</b>

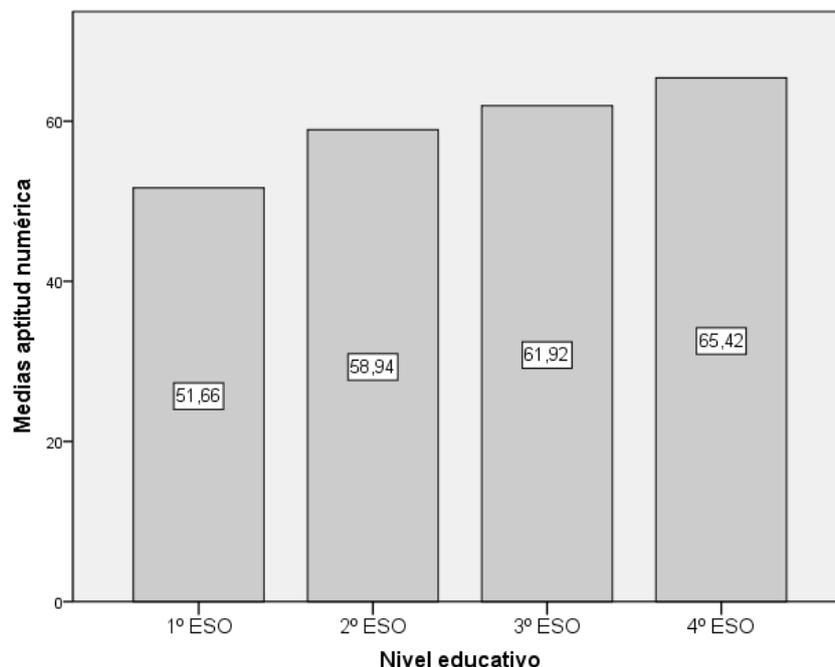
**Tabla N° 28.** Medias del test de aptitud numérica del BAT-7 por género

Respecto al nivel educativo, los resultados han sido graduales, obteniendo una media de 51,66 para los participantes de 1.º ESO, 58,94 los participantes de 2.º ESO, y 61,92 y 65,42, los participantes de 3.º y 4.º ESO respectivamente. En el apartado 6.4 de este capítulo, estudiaremos si los resultados obtenidos entre el test de aptitud numérica y los factores género y nivel educativo, son estadísticamente significativos o no.

Nivel educativo	Test de aptitud numérica BAT-7		
	Media	Casos	Desviación típica
1º ESO	51,66	50	27,861
2º ESO	58,94	50	26,892
3º ESO	61,92	50	23,644
4º ESO	65,42	50	24,110
<b>Total</b>	<b>59,49</b>	<b>200</b>	<b>25,996</b>

**Tabla Nº 29.** Medias del test de aptitud numérica del BAT-7 por nivel educativo

En el siguiente gráfico podemos observar plásticamente los resultados que acabamos de comentar en la tabla anterior.



**Gráfico Nº 10.** Medias del test de aptitud numérica BAT-7 por nivel educativo

## 6.4 Análisis bivariable entre el test de aptitud musical y numérica

Una vez realizadas las pruebas de normalidad de Kolmogorov-Smirnov y Shapiro-Wilk a las variables del test de aptitud musical de Seashore (altura, intensidad, ritmo, tiempo, timbre y memoria tonal), y del test de aptitud numérica del BAT-7, dieron como resultado que los datos no provienen de una distribución normal de la población; de este modo, desestimamos realizar el análisis de comparación de medias de forma paramétrica (t de Student) por el hecho de que incumple uno de los requisitos fundamentales; conocido este dato, debemos aplicar las correspondientes pruebas no-paramétricas (Wilcoxon, o U de Mann-Whitney), dependiendo de si el análisis es para dos muestras relacionadas o independientes.

### 6.4.1 Según la teoría de los específicos

Como ya hemos visto en el Capítulo 3, Seashore y sus colaboradores defienden una aptitud musical fragmentada, lo que vino a llamarse *teoría de los específicos*, en el siguiente apartado vamos a comparar los resultados obtenidos específicamente en cada uno de los seis tests (altura, intensidad, ritmo, tiempo, timbre y memoria tonal) que conforman el test de Seashore, con los resultados obtenidos en el test de aptitud numérica del BAT-7.

#### 6.4.1.1 La altura y la aptitud numérica

En primer lugar vamos a conocer las medias obtenidas por los participantes de nuestra investigación en el test de altura, y en el test de aptitud numérica del BAT-7, que son las que podemos apreciar en la siguiente tabla.

Estadísticos descriptivos	Media	Casos	Desviación típica
Test de altura	69,82	200	26,492
Test de aptitud numérica BAT-7	59,49	200	25,996

**Tabla Nº 30.** Medias del test de altura y del test de aptitud numérica del BAT-7

A continuación vamos a analizar si entre los resultados obtenidos en el test de altura, y los resultados obtenidos en el test de aptitud numérica del BAT-7 de todos los participantes de la investigación, existen diferencias estadísticamente significativas; para este cometido (y las comparaciones de los siguientes tests de intensidad, ritmo, tiempo, timbre y memoria tonal, con el test de aptitud numérica) aplicaremos la prueba no paramétrica de Wilcoxon, porque las variables que queremos estudiar son de intervalo (1-99), y provienen de una muestra relacionada.

Observando los resultados siguientes, podemos comprobar que el estadístico con su *p-valor* asociado (,000), es menor que el nivel de significación (0,05), por consiguiente, podemos concluir que, entre las medias obtenidas en el test de altura y las medias obtenidas en el test de aptitud numérica del total de los participantes en nuestra investigación, existen diferencias estadísticamente significativas, a favor del test de altura.

Rangos				
		Casos	Rango promedio	Suma de rangos
Altura-Aptitud numérica	Rangos negativos	64	87,18	5579,50
	Rangos positivos	124	98,28	12186,50
	Empates	12		
	Total	200		

Estadísticos de contraste <sup>a</sup>	
	Altura-Aptitud numérica
Z	-4,423 <sup>b</sup>
Sig-asintót (bilateral)	,000

a. Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon.

b. Basado en los rangos negativos.

**Tabla Nº 31.** Wilcoxon entre los resultados del test de altura y del test de aptitud numérica del BAT-7

### 6.4.1.2 La intensidad y la aptitud numérica

A continuación vamos a conocer las medias obtenidas por los participantes de nuestra investigación en el test de intensidad y en el test de aptitud numérica del BAT-7, que son las que podemos apreciar en la siguiente tabla.

Estadísticos descriptivos	Media	Casos	Desviación típica
Test de intensidad	53,60	200	28,316
Test de aptitud numérica BAT-7	59,49	200	25,996

**Tabla Nº 32.** Medias del test de intensidad y del test de aptitud numérica del BAT-7

Vamos a analizar si entre los resultados obtenidos con el test de intensidad, y los resultados obtenidos con el test de aptitud numérica del BAT-7 de todos los participantes de la investigación, existen diferencias estadísticamente significativas.

Rangos				
		Casos	Rango promedio	Suma de rangos
Intensidad-Aptitud numérica	Rangos negativos	106	103,62	10984,00
	Rangos positivos	83	83,99	6971,00
	Empates	11		
	Total	200		

Estadísticos de contraste <sup>a</sup>	
	Intensidad-Aptitud numérica
Z	-2,666 <sup>b</sup>
Sig-asintót (bilateral)	,008

a. Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon.

b. Basado en los rangos negativos.

**Tabla Nº 33.** Wilcoxon entre los resultados del test de intensidad y del test de aptitud numérica del BAT-7

Al comprobar que el estadístico con su *p-valor* asociado ( $,008$ ), es menor que el nivel de significación ( $0,05$ ), podemos concluir que, entre las medias obtenidas en el test de intensidad y las medias obtenidas en el test de aptitud numérica del total de los participantes en nuestra investigación, existen diferencias estadísticamente significativas, a favor del test de aptitud numérica.

#### 6.4.1.3 El ritmo y la aptitud numérica

En la siguiente tabla podemos apreciar las medias obtenidas por los participantes de nuestra investigación en el test de ritmo y en el test de aptitud numérica del BAT-7, que son  $52,90$  y  $59,49$  respectivamente, a continuación les aplicaremos el mismo análisis que al test de altura e intensidad.

Estadísticos descriptivos	Media	Casos	Desviación típica
Test de ritmo	52,90	200	28,197
Test de aptitud numérica BAT-7	59,49	200	25,996

**Tabla Nº 34.** Medias del test de ritmo y del test de aptitud numérica del BAT-7

Vamos a conocer si entre los resultados obtenidos con el test de ritmo, y los resultados obtenidos con el test de aptitud numérica del BAT-7 de todos los participantes de la investigación, existen diferencias estadísticamente significativas.

En la siguiente tabla podemos observar como el estadístico con su *p-valor* asociado ( $,001$ ), es menor que el nivel de significación ( $0,05$ ), debemos concluir que, entre las medias obtenidas con el test de ritmo y las medias obtenidas con el test de aptitud numérica del total de los participantes en nuestra investigación, existen diferencias estadísticamente significativas, a favor del test de aptitud numérica, como podemos apreciar en los rangos; siendo 109 casos negativos a ritmo, y sólo 73 casos positivos.

Rangos				
		Casos	Rango promedio	Suma de rangos
Ritmo-Aptitud numérica	Rangos negativos	109	98,30	10714,50
	Rangos positivos	73	81,35	5938,50
	Empates	18		
	Total	200		

Estadísticos de contraste <sup>a</sup>	
	Ritmo-Aptitud numérica
Z	-3,358 <sup>b</sup>
Sig-asintót (bilateral)	,001

a. Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon.

b. Basado en los rangos negativos.

**Tabla Nº 35.** Wilcoxon entre los resultados del test de ritmo y del test de aptitud numérica del BAT-7

#### 6.4.1.4 El tiempo y la aptitud numérica

A continuación vamos a conocer las medias obtenidas por los participantes de nuestra investigación en el test de tiempo y en el test de aptitud numérica del BAT-7.

Estadísticos descriptivos	Media	Casos	Desviación típica
Test de tiempo	57,49	200	27,805
Test de aptitud numérica BAT-7	59,49	200	25,996

**Tabla Nº 36.** Medias del test de tiempo y del test de aptitud numérica del BAT-7

Vamos a analizar si entre los resultados obtenidos con el test de tiempo, y los resultados obtenidos con el test de aptitud numérica del BAT-7 de todos los participantes de la investigación, existen diferencias estadísticamente significativas; para este cometido (como ya hemos comentado anteriormente) aplicamos la prueba no paramétrica de Wilcoxon.

Rangos				
		Casos	Rango promedio	Suma de rangos
Tiempo-Aptitud numérica	Rangos negativos	104	94,08	9784,00
	Rangos positivos	86	97,22	8361,00
	Empates	10		
	Total	200		

Estadísticos de contraste <sup>a</sup>	
	Tiempo-Aptitud numérica
Z	-,938 <sup>b</sup>
Sig-asintót (bilateral)	,348

a. Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon.

b. Basado en los rangos negativos.

**Tabla Nº 37.** Wilcoxon entre los resultados del test de tiempo y del test de aptitud numérica del BAT-7

Al comprobar que el estadístico con su *p*-valor asociado (,348), es mayor que el nivel de significación (0,05), podemos concluir que, entre las medias obtenidas con el test de tiempo y las medias obtenidas con el test de aptitud numérica del total de los participantes en nuestra investigación, no existen diferencias estadísticamente significativas.

#### 6.4.1.5 El timbre y la aptitud numérica

A continuación podemos apreciar en la siguiente tabla las medias obtenidas por los participantes de nuestra investigación en el test de timbre y en el test de aptitud numérica del BAT-7.

Estadísticos descriptivos	Media	Casos	Desviación típica
Test de timbre	61,55	200	27,870
Test de aptitud numérica BAT-7	59,49	200	25,996

**Tabla Nº 38.** Medias del test de timbre y del test de aptitud numérica del BAT-7

Ahora debemos analizar mediante la prueba no paramétrica de Wilcoxon, si entre los resultados obtenidos con el test de timbre, y los resultados obtenidos con el test de aptitud numérica del BAT-7 de todos los participantes de la investigación, existen diferencias estadísticamente significativas.

Rangos				
		Casos	Rango promedio	Suma de rangos
Timbre-Aptitud numérica	Rangos negativos	90	91,64	8247,50
	Rangos positivos	98	97,13	9518,50
	Empates	12		
	Total	200		

Estadísticos de contraste <sup>a</sup>	
	Timbre-Aptitud numérica
Z	-,851 <sup>b</sup>
Sig-asintót (bilateral)	,395

a. Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon.

b. Basado en los rangos negativos.

**Tabla Nº 39.** *Wilcoxon entre los resultados del test de timbre y del test de aptitud numérica del BAT-7*

Al comprobar que el estadístico con su *p-valor* asociado (,395), es mayor que el nivel de significación (0,05), podemos concluir que, entre las medias obtenidas en el test de timbre y las obtenidas en el test de aptitud numérica del total de los participantes en nuestra investigación, no existen diferencias estadísticamente significativas.

#### 6.4.1.6 La memoria tonal y la aptitud numérica

A continuación vamos a conocer las medias logradas por los participantes de nuestra investigación en el test de memoria tonal y en el test de aptitud numérica del BAT-7, que son las que podemos observar en la siguiente tabla.

Estadísticos descriptivos	Media	Casos	Desviación típica
Test de memoria tonal	52,42	200	30,748
Test de aptitud numérica BAT-7	59,49	200	25,996

**Tabla Nº 40.** Medias del test de memoria tonal y del test de aptitud numérica BAT-7

Analizamos si entre los resultados obtenidos con el test de memoria tonal, y los resultados obtenidos con el test de aptitud numérica del BAT-7 de todos los participantes de la investigación, existen diferencias estadísticamente significativas.

Rangos				
		Casos	Rango promedio	Suma de rangos
Memoria tonal- Aptitud numérica	Rangos negativos	110	101,76	11193,50
	Rangos positivos	77	82,92	6384,50
	Empates	13		
	Total	200		

Estadísticos de contraste <sup>a</sup>	
	Memoria tonal- Aptitud numérica
Z	-3,247 <sup>b</sup>
Sig-asintót (bilateral)	,001

a. Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon.

b. Basado en los rangos negativos.

**Tabla Nº 41.** Wilcoxon entre los resultados del test de memoria tonal y del test de aptitud numérica del BAT-7

Al comprobar que el estadístico con su *p*-valor asociado (*,001*), es menor que el nivel de significación (*0,05*), podemos concluir que, entre las medias obtenidas con el test de memoria tonal y las medias obtenidas con el test de aptitud numérica del total de los participantes en nuestra investigación, existen diferencias estadísticamente significativas, a favor del test de aptitud numérica del BAT-7, podemos apreciar en los rangos que, 110 de los casos fueron negativos a memoria tonal, y solamente 77 fueron positivos.

### 6.4.2 Según la teoría ómnibus

Vamos a conocer la media obtenida por los participantes de nuestra investigación en el test de aptitud musical de Seashore siguiendo la teoría de Mursell y sus colaboradores (media aritmética de los tests de altura, intensidad, ritmo, tiempo, timbre y memoria tonal), y la media del test de aptitud numérica del BAT-7, que son las que podemos apreciar en la siguiente tabla.

Estadísticos descriptivos	Media	Casos	Desviación típica
Test de aptitud musical de Seashore	58,02	200	18,424
Test de aptitud numérica BAT-7	59,49	200	25,996

**Tabla Nº 42.** *Medias globales del test de Seashore y del test de aptitud numérica del BAT-7*

Queremos analizar si entre los resultados obtenidos con el test de aptitud musical de Seashore, a los que como acabamos de ver tenemos que realizarles una media aritmética para obtener un resultado global (teoría ómnibus), y los resultados obtenidos con el test de aptitud numérica del BAT-7 de todos los participantes de la investigación, existen diferencias estadísticamente significativas; para este cometido aplicamos la prueba no paramétrica de Wilcoxon, porque las variables que queremos estudiar son de intervalo (1-99), y provienen de una muestra relacionada.

Rangos				
		Casos	Rango promedio	Suma de rangos
Aptitud musical- Aptitud numérica	Rangos negativos	109	98,39	10725,00
	Rangos positivos	88	99,75	8778,00
	Empates	3		
	Total	200		

Estadísticos de contraste <sup>a</sup>	
	Aptitud musical- Aptitud numérica
Z	-1,215 <sup>b</sup>
Sig-asintót (bilateral)	,224

a. Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon.

b. Basado en los rangos negativos.

**Tabla Nº 43.** *Wilcoxon entre los resultados del test de aptitud musical de Seshore y del test de aptitud numérica del BAT-7*

En primer lugar, observamos el número de veces en que los rangos de cada par de valores son negativos (109), positivos (88) o empates (3), porque en caso de rechazar la hipótesis nula ( $H_0$ ) de no existencia de diferencias estadísticamente significativas, nos indicaría la dirección en la que se manifiestan estos posibles efectos significativos. En este caso al comprobar que el estadístico con su *p-valor* asociado ( $,224$ ), es mayor que el nivel de significación ( $0,05$ ), podemos concluir que, entre las medias obtenidas con el test de aptitud musical de Seashore y las medias obtenidas con el test de aptitud numérica del total de los participantes en nuestra investigación (200), no existen diferencias estadísticamente significativas.

#### 6.4.2.1 Análisis por género y nivel educativo

Acabamos de ver en los anteriores apartados de estadística descriptiva los resultados obtenidos en los dos tests administrados a los participantes según su género y su nivel educativo, el objetivo de los siguientes análisis es saber si dichos resultados (siguiendo la teoría omnibus), son estadísticamente significativos o no, y en el caso de que lo sean, en qué dirección irían los

posibles efectos significativos. En esta ocasión vamos a utilizar la prueba no-paramétrica (U de Mann-Whitney), empezaremos con la variable de la aptitud musical y el factor género.

Rangos				
Aptitud musical	Género	Casos	Rango promedio	Suma de rangos
	Masculino	101	103,91	10494,50
	Femenino	99	97,03	9605,50
	Total	200		

Estadísticos de contraste <sup>a</sup>	
	Aptitud musical
U de Mann-Whitney	4655,500
W de Wilcoxon	9605,500
Z	-,841
Sig-asintót (bilateral)	,400

a. Variable de agrupación: Género.

**Tabla Nº 44.** U de Mann-Whitney entre las medias del test de aptitud musical de Seashore y el factor género

En los resultados de la tabla anterior podemos apreciar que, comparando la variable género, con la media de la variable aptitud musical, debemos retener la hipótesis nula (H0) de igualdad de medias, debido a que el *p-valor* (,400) asociado al estadístico es mayor que el nivel de significación (0,05), es decir que, entre los resultados obtenidos con el test de aptitud musical de Seashore y el factor género no existen diferencias estadísticamente significativas.

Pasamos a ver cómo se comporta el factor nivel educativo con los resultados del test de aptitud musical aplicando la misma prueba no-paramétrica (U de Mann-Whitney) para muestras independientes.

En esta ocasión podemos observar como el *p-valor* (,024) asociado al estadístico, es inferior al nivel de significación (0,05), por lo tanto, debemos rechazar la hipótesis nula (H0) de igualdad de medias; observando los rangos promedios, podemos afirmar que estas diferencias significativas son favorables

al grupo de 2.º de ESO, respecto al grupo de 1.º de ESO. Ocurriendo lo mismo cuando comparamos el grupo de 1.º ESO con los grupos de 3.º y 4.º de ESO, es decir, entre los resultados del test de aptitud musical obtenidos por el grupo 1.º de ESO y los grupos 2.º, 3.º y 4.º de ESO, existen diferencias estadísticamente significativas favorables a éstos últimos.

Rangos				
Aptitud musical	Nivel educativo	Casos	Rango promedio	Suma de rangos
	1.º ESO	50	43,95	2197,50
	2.º ESO	50	57,05	2852,50
	<b>Total</b>	<b>100</b>		

Estadísticos de contraste <sup>a</sup>	
	Aptitud musical
<b>U de Mann-Whitney</b>	922,500
<b>W de Wilcoxon</b>	2197,500
<b>Z</b>	-2,258
<b>Sig-asintót (bilateral)</b>	,024

a. Variable de agrupación: Nivel educativo.

**Tabla Nº 45.** *U de Mann-Whitney entre las medias del test de aptitud musical de Seashore y el factor nivel educativo*

Estos resultados no son fruto de la casualidad, acabamos de ver en el apartado 5.3.1.6 del capítulo anterior, como Vert (2013), relacionaba directamente los resultados del test de aptitud musical de Seashore con la formación musical, esta información cobra mucho más sentido cuando sabemos que en el nivel educativo de 1.º de ESO, tanto en la ley educativa anterior (LOE, 2006), como en el ley actual (LOMCE, 2013), la asignatura *Música*, no aparece en ninguno de los currículos de las leyes como asignatura obligatoria, ni tan siquiera como optativa, de ahí los resultados que acabamos de observar.

Entre los resultados del test de aptitud musical obtenidos por el grupo 1.º de ESO y los grupos 2.º, 3.º y 4.º de ESO, existen diferencias estadísticamente significativas siempre favorables a éstos últimos.

Veamos a continuación cómo se comporta en este caso el grupo de 2.º de ESO en los resultados del test de aptitud musical de Seashore respecto a sus compañeros de 3.º y 4.º de ESO.

Rangos				
Aptitud musical	Nivel educativo	Casos	Rango promedio	Suma de rangos
	2.º ESO	50	46,59	2329,50
	3.º ESO	50	54,41	2720,50
	<b>Total</b>	<b>100</b>		

Estadísticos de contraste <sup>a</sup>	
	Aptitud musical
<b>U de Mann-Whitney</b>	1054,500
<b>W de Wilcoxon</b>	2329,500
<b>Z</b>	-1,348
<b>Sig-asintót (bilateral)</b>	,178

a. Variable de agrupación: Nivel educativo.

**Tabla Nº 46.** *U de Mann-Whitney entre las medias del test de aptitud musical de Seashore y el factor nivel educativo*

A tenor de los resultados, apreciamos que según el *p-valor* (,178) asociado al estadístico entre los alumnos de 2.º y 3.º de ESO, no existen diferencias estadísticamente significativas, mientras que entre los alumnos de 2.º y 4.º de ESO (,041), si existirían diferencias significativas favorables al grupo de mayor nivel educativo.

Rangos				
Aptitud musical	Nivel educativo	Casos	Rango promedio	Suma de rangos
	2.º ESO	50	44,58	2229,00
	4.º ESO	50	56,42	2821,00
	<b>Total</b>	<b>100</b>		

Estadísticos de contraste <sup>a</sup>	
	Aptitud musical
<b>U de Mann-Whitney</b>	954,000
<b>W de Wilcoxon</b>	2229,000
<b>Z</b>	-2,041
<b>Sig-asintót (bilateral)</b>	,041

a. Variable de agrupación: Nivel educativo.

**Tabla Nº 47.** *U de Mann-Whitney entre las medias del test de aptitud musical de Seashore y el factor nivel educativo*

Continuamos con el análisis para conocer en este caso cómo se comporta el grupo de 3.º de ESO en los resultados del test de aptitud musical de Seashore respecto a sus compañeros de 4.º de ESO; observando en la siguiente tabla que entre estos dos niveles educativos, no existen diferencias significativas en los resultados del test de aptitud musical de Seashore, debido a un *p-valor* asociado al estadístico de (,446).

Rangos				
Aptitud musical	Nivel educativo	Casos	Rango promedio	Suma de rangos
	3.º ESO	50	48,29	2414,50
	4.º ESO	50	52,71	2635,50
	<b>Total</b>	<b>100</b>		

Estadísticos de contraste <sup>a</sup>	
	Aptitud musical
U de Mann-Whitney	1139,500
W de Wilcoxon	2414,500
Z	-,762
Sig-asintót (bilateral)	,446

a. Variable de agrupación: Nivel educativo.

**Tabla Nº 48.** *U de Mann-Whitney entre las medias del test de aptitud musical de Seashore y el factor nivel educativo*

Acabamos de ver los análisis con estadísticos de contraste de la aptitud musical por género y nivel educativo, ahora nos interesa conocer cómo se comporta la variable aptitud numérica en este sentido.

Rangos				
Aptitud numérica	Género	Casos	Rango promedio	Suma de rangos
	Masculino	101	107,62	10870,00
	Femenino	99	93,23	9230,00
	<b>Total</b>	<b>200</b>		

Estadísticos de contraste <sup>a</sup>	
	Aptitud numérica
U de Mann-Whitney	4280,000
W de Wilcoxon	9230,000
Z	-1,762
Sig-asintót (bilateral)	,078

a. Variable de agrupación: Género.

**Tabla Nº 49.** *U de Mann-Whitney entre las medias del test de aptitud numérica del BAT-7 y el factor género*

En la tabla anterior podemos apreciar como, en la variable género con respecto a la variable media numérica, debemos retener la hipótesis nula ( $H_0$ ) de igualdad de medias, debido a que el *p-valor* (*,078*) asociado al estadístico es mayor que el nivel de significación (*0,05*), es decir, entre los resultados obtenidos con el test de aptitud numérica del BAT-7 y el factor género no existen diferencias estadísticamente significativas.

Pasamos a ver de que manera se comporta el factor nivel educativo, con los resultados del test de aptitud numérica, aplicando la misma prueba no-paramétrica (U de Mann-Whitney) para muestras independientes.

En esta ocasión podemos observar como el *p-valor* (*,224*) asociado al estadístico entre en el nivel educativo 1.º y 2.º de ESO, es superior al nivel de significación (*0,05*), por lo tanto, debemos retener la hipótesis nula ( $H_0$ ) de igualdad de medias. Ocurre lo mismo entre el nivel educativo 1.º y 3.º de ESO, con un *p-valor* de (*,060*).

Rangos				
Aptitud numérica	Nivel educativo	Casos	Rango promedio	Suma de rangos
	1.º ESO	50	46,98	2349,00
	2.º ESO	50	54,02	2701,00
	<b>Total</b>	<b>100</b>		

Estadísticos de contraste <sup>a</sup>	
	Aptitud numérica
<b>U de Mann-Whitney</b>	1074,000
<b>W de Wilcoxon</b>	2349,000
<b>Z</b>	-1,217
<b>Sig-asintót (bilateral)</b>	,224

a. Variable de agrupación: Nivel educativo.

**Tabla Nº 50.** U de Mann-Whitney entre las medias del test de aptitud numérica del BAT-7 y el factor nivel educativo

Rangos				
Aptitud numérica	Nivel educativo	Casos	Rango promedio	Suma de rangos
	1.º ESO	50	45,05	2252,50
	3.º ESO	50	55,95	2797,50
	<b>Total</b>	<b>100</b>		

Estadísticos de contraste <sup>a</sup>	
	Aptitud numérica
<b>U de Mann-Whitney</b>	977,500
<b>W de Wilcoxon</b>	2252,500
<b>Z</b>	-1,883
<b>Sig-asintót (bilateral)</b>	,060

a. Variable de agrupación: Nivel educativo.

**Tabla N° 51.** *U de Mann-Whitney entre las medias del test de aptitud numérica del BAT-7 y el factor nivel educativo*

No ocurre lo mismo cuando comparamos el nivel educativo de 1.º y 4.º de ESO, donde debemos rechazar la hipótesis nula ( $H_0$ ) de igualdad de medias con un *p-valor* asociado al estadístico de ( $,010$ ).

Rangos				
Aptitud numérica	Nivel educativo	Casos	Rango promedio	Suma de rangos
	1.º ESO	50	43,09	2154,50
	4.º ESO	50	57,91	2895,50
	<b>Total</b>	<b>100</b>		

Estadísticos de contraste <sup>a</sup>	
	Aptitud numérica
<b>U de Mann-Whitney</b>	879,500
<b>W de Wilcoxon</b>	2154,500
<b>Z</b>	-2,559
<b>Sig-asintót (bilateral)</b>	,010

a. Variable de agrupación: Nivel educativo

**Tabla N° 52.** *U de Mann-Whitney entre las medias del test de aptitud numérica del BAT-7 y el factor nivel educativo*

Veamos cómo se comporta en este caso el grupo de 2.º de ESO con los resultados del test de aptitud numérica respecto a sus compañeros de 3.º y 4.º de ESO.

Rangos				
Aptitud numérica	Nivel educativo	Casos	Rango promedio	Suma de rangos
	2.º ESO	50	48,64	2432,00
	3.º ESO	50	52,36	2618,00
	<b>Total</b>	<b>100</b>		

Estadísticos de contraste <sup>a</sup>	
	Aptitud numérica
<b>U de Mann-Whitney</b>	1157,000
<b>W de Wilcoxon</b>	2432,000
<b>Z</b>	-,643
<b>Sig-asintót (bilateral)</b>	,520

a. Variable de agrupación: Nivel educativo.

**Tabla Nº 53.** *U de Mann-Whitney entre las medias del test de aptitud numérica del BAT-7 y el factor nivel educativo*

Podemos afirmar por el *p-valor* (,520) asociado al estadístico, que entre los alumnos de 2.º y 3.º de ESO, no existen diferencias estadísticamente significativas entre las medias del test de aptitud numérica del BAT-7, ocurriendo lo mismo entre los alumnos de 2.º y 4.º de ESO con un *p-valor* (,185), como podemos apreciar en la siguiente tabla.

Rangos				
Aptitud numérica	Nivel educativo	Casos	Rango promedio	Suma de rangos
	2.º ESO	50	46,66	2333,00
	4.º ESO	50	54,34	2717,00
	<b>Total</b>	<b>100</b>		

Estadísticos de contraste <sup>a</sup>	
	Aptitud numérica
<b>U de Mann-Whitney</b>	1058,000
<b>W de Wilcoxon</b>	2333,000
<b>Z</b>	-1,327
<b>Sig-asintót (bilateral)</b>	,185

a. Variable de agrupación: Nivel educativo.

**Tabla N° 54.** *U de Mann-Whitney entre las medias del test de aptitud numérica del BAT-7 y el factor nivel educativo*

Continuamos el análisis para conocer cómo se comporta en este caso el grupo de 3.º de ESO con los resultados del test de aptitud numérica respecto a sus compañeros de 4.º de ESO; apreciando en la siguiente tabla que, entre estos dos niveles educativos, no existen diferencias significativas en los resultados del test de aptitud numérica del BAT-7, con un *p-valor* asociado al estadístico de (,356).

Rangos				
Aptitud numérica	Nivel educativo	Casos	Rango promedio	Suma de rangos
	3.º ESO	50	47,83	2391,50
	4.º ESO	50	53,17	2658,50
	<b>Total</b>	<b>100</b>		

Estadísticos de contraste <sup>a</sup>	
	Aptitud numérica
U de Mann-Whitney	1116,500
W de Wilcoxon	2391,500
Z	-,923
Sig-asintót (bilateral)	,356

a. Variable de agrupación: Nivel educativo.

**Tabla Nº 55.** *U de Mann-Whitney entre las medias test de aptitud numérica del BAT-7 y el factor nivel educativo*

#### 6.4.2.2 Análisis por grupos (bajo, medio y alto)

Para realizar un análisis con mayor profundidad y estudiar el comportamiento de las variables objetivos principales de nuestra investigación (la aptitud musical y la aptitud numérica), hemos agrupado a los participantes en tres grupos, bajo, medio y alto, según los resultados en percentiles que hayan obtenido en los tests de la siguiente manera:

#### Grupos

**Grupo bajo:** participantes con un percentil entre (1-49)

**Grupo medio:** participantes con un percentil entre (50-74)

**Grupo alto:** participantes con un percentil entre (75-99)

En la siguiente tabla podemos conocer el número de casos y el porcentaje del total de los participantes, entre los resultados obtenidos con el test de aptitud musical de Seashore por grupos (bajo, medio y alto), observando que el mayor número de casos lo encontramos en el grupo medio con 83, seguido del grupo bajo con 65, y 52 del grupo alto.

Grupos	Test de aptitud musical de Seashore	
	Casos	Porcentaje
<b>Grupo bajo (1-49)</b>	65	32,5
<b>Grupo medio (50-74)</b>	83	41,5
<b>Grupo alto (75-99)</b>	52	26,0
<b>Total</b>	<b>200</b>	<b>100,0</b>

**Tabla Nº 56.** *Test de aptitud musical de Seashore por grupos*

Realizamos la misma operación, pero con los resultados obtenidos con el test de aptitud numérica del BAT-7 por grupos; podemos apreciar que el mayor número de casos lo encontramos en el grupo medio, seguido del grupo alto y el grupo bajo, con 76, 69 y 55 casos respectivamente, como podemos comprobar en la siguiente tabla.

Grupos	Test de aptitud numérica BAT-7	
	Casos	Porcentaje
<b>Grupo bajo (1-49)</b>	55	27,5
<b>Grupo medio (50-74)</b>	76	38,0
<b>Grupo alto (75-99)</b>	69	34,5
<b>Total</b>	<b>200</b>	<b>100,0</b>

**Tabla Nº 57.** *Test de aptitud numérica del BAT-7 por grupos*

En la siguiente tabla hemos seleccionado únicamente los participantes que el test de aptitud musical de Seashore hayan obtenido un percentil entre 1-49, es decir, los pertenecientes al grupo bajo, que son un total de 65, y queremos conocer cuáles fueron los resultados de éstos en el test de aptitud numérica, apreciando que el 56,9% de los participantes que se encuentran en el grupo bajo del test de aptitud musical, también los encontramos en el grupo bajo del test de aptitud numérica, mientras un 36,9% se encuentran en el grupo medio, y solo un 6,2% en el grupo alto, perteneciendo los cuatro casos a participantes de 1.º de ESO, que no tienen música entre sus asignaturas curriculares en su nivel educativo, como hemos comentado anteriormente.

Comparación de grupos	Grupo bajo del test de aptitud musical de Seashore			
	Grupos	Casos	Porcentaje	Participantes y Nivel educativo
Test de aptitud numérica BAT-7	Grupo bajo (1-49)	37	56,9	13 de 1.ºESO
				10 de 2.ºESO
				8 de 3.ºESO
				6 de 4.ºESO
	Grupo medio (50-74)	24	36,9	9 de 1.ºESO
				8 de 2.ºESO
				4 de 3.ºESO
				3 de 4.ºESO
	Grupo alto (75-99)	4	6,2	4 de 1.ºESO
	<b>Total</b>	<b>65</b>	<b>100,0</b>	

**Tabla Nº 58.** Comparación del grupo bajo del test de aptitud musical de Seashore con los grupos bajo, medio y alto del test de aptitud numérica del BAT-7

A continuación (**Tabla Nº 59**), hemos seleccionado los participantes que en el test de aptitud musical de Seashore han obtenido un percentil entre 50-74, es decir, los pertenecientes al grupo medio, que son un total de 83, y queremos conocer cuáles fueron los resultados de éstos en el test de aptitud numérica, observando que el 21,7% de los participantes que se encuentran en el grupo medio del test de aptitud musical, los encontramos en el grupo bajo del test de aptitud numérica, mientras un 48,2% se encuentran en el grupo medio, y un 30,1% en el grupo alto.

Aquí podemos apreciar en cierto modo la influencia de la aptitud musical frente a la numérica, debido a que un 78,3% (grupo medio y grupo alto), de los sujetos que forman parte del grupo medio del test de aptitud musical, han sacado igual o más nota en el test de aptitud numérica.

Comparación de grupos	Grupo medio del test de aptitud musical de Seashore			
	Grupos	Casos	Porcentaje	Participantes y Nivel educativo
Test de aptitud numérica BAT-7	Grupo bajo (1-49)	18	21,7	8 de 1.ºESO
				4 de 2.ºESO
				2 de 3.ºESO
				4 de 4.ºESO
	Grupo medio (50-74)	40	48,2	6 de 1.ºESO
				11 de 2.ºESO
				14 de 3.ºESO
				9 de 4.ºESO
	Grupo alto (75-99)	25	30,1	2 de 1.ºESO
				7 de 2.ºESO
				7 de 3.ºESO
				9 de 4.ºESO
	<b>Total</b>	<b>83</b>	<b>100,0</b>	

**Tabla Nº 59.** Comparación del grupo medio del test de aptitud musical de Seashore con los grupos bajo, medio y alto del test de aptitud numérica del BAT-7

Y para concluir este apartado hemos seleccionado (**Tabla Nº 60**), los participantes que han obtenido un percentil entre 75-99 en el test de aptitud musical de Seashore, es decir, los pertenecientes al grupo alto, que son un total de 52, y queremos conocer cuáles fueron los resultados de éstos en el test de aptitud numérica, observando que únicamente encontramos sujetos en el grupo medio, y en el grupo alto; perteneciendo el 23,1% de los participantes al grupo medio, mientras que el 76,9% corresponden al grupo alto (75-99).

Confirmando en cierto modo lo que acabamos de ver en el grupo medio; el 76,9% de los sujetos que pertenece al grupo alto en el test de aptitudes musicales, los encontramos también en el grupo alto del test de aptitud numérica del BAT-7.

Comparación de grupos	Grupo alto del test de aptitud musical de Seashore			
	Grupos	Casos	Porcentaje	Participantes y Nivel educativo
Test de aptitud numérica BAT-7	Grupo bajo (1-49)	0	0	8 de 1.ºESO
				4 de 2.ºESO
				2 de 3.ºESO
				4 de 4.ºESO
	Grupo medio (50-74)	12	23,1	3 de 1.ºESO
				3 de 2.ºESO
				3 de 3.ºESO
				3 de 4.ºESO
	Grupo alto (75-99)	40	76,9	5 de 1.ºESO
				7 de 2.ºESO
				12 de 3.ºESO
				16 de 4.ºESO
	<b>Total</b>	<b>52</b>	<b>100,0</b>	

**Tabla Nº 60.** Comparación del grupo alto del test de aptitud musical de Seashore con los grupos bajo, medio y alto del test de aptitud numérica del BAT-7

### 6.5 Análisis discriminante

El análisis discriminante (AD), puede considerarse una técnica multivariante de clasificación de individuos en la que se presupone la existencia de dos o más grupos bien definidos *a priori*. Es además la técnica adecuada cuando la variable dependiente es categórica y las independientes son cuantitativas. El AD puede ser la técnica adecuada cuando se persigue uno de los siguientes objetivos:

1. Describir las diferencias existentes entre esos grupos con base en los valores que toman ciertas variables sobre los individuos de cada uno de los grupos.

2. Clasificar nuevos individuos en alguno de los grupos preexistentes en función de los valores que toman ciertas variables para esos individuos.

Para aplicar un análisis discriminante, el primer paso es especificar la variable dependiente y sus niveles, es decir, los grupos que se analizarán, que deben ser mutuamente exclusivos y exhaustivos. Estos grupos pueden ser grupos naturales o definidos por el investigador estableciendo cortes en alguna variable cuantitativa (diferente de las que se utilizarán como predictoras o independientes). Para este estudio, se nos presenta el primer caso (naturales), donde una variable predefinida concierne los tres grupos en los que se basa nuestro AD. Nuestro objetivo, es tratar de determinar qué variables caracterizan las diferencias existentes entre estos tres grupos. Por tanto, en este análisis, se persigue únicamente el objetivo nº1 del AD.

Las variables relevantes que se consideran, hacen referencia a la aptitud musical según la teoría de los específicos (V3, V4, V5, V6, V7 y V8), según la teoría ómnibus (V9), y a la aptitud numérica (V12), y son las siguientes:

- **V3.** Altura
- **V4.** Intensidad
- **V5.** Ritmo
- **V6.** Tiempo
- **V7.** Timbre
- **V8.** Memoria tonal
- **V9.** Media aritmética de la aptitud musical (V3, V4, V5, V6, V7 Y V8)
- **V12.** Aptitud numérica

### **6.5.1 Información descriptiva**

Dado que los alumnos han contestado correctamente a las cuestiones que se les han realizado, nuestra muestra se compone de 200 registros totalmente válidos para el análisis a realizar. Clasificamos a los alumnos en tres

grupos según su aptitud numérica con la variable **V11** que se estructura de la siguiente manera.

Grupos	V11. Aptitud numérica
1	1 - 49
2	50 - 74
3	75 - 99

**Tabla Nº 61.** Grupos de la V11. Aptitud numérica

Donde la variable agrupada para la creación de la nueva variable es la variable **V12** asociada a la aptitud numérica de cada alumno, cuyos descriptivos son los siguientes.

Estadísticos		
N	Válido	200
	Perdidos	0
Media		59,485
Mediana		65
Desviación estándar		25,9961299
Rango		98
Mínimo		1
Máximo		99

**Tabla Nº 62.** Estadísticos descriptivos de la V12 asociada a la aptitud numérica

Para la variable **V11** la tabla de categorías es la que sigue.

Grupos	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Bajo	55	27,5	27,5	27,5
Medio	76	38,0	38,0	65,5
Alto	69	34,5	34,5	100,0
Total	200	100,0	100,0	

**Tabla Nº 63.** Tabla de categorías de la V11. Aptitud numérica

A continuación detallamos las medias y desviaciones típicas de todas las variables, para cada uno de los grupos.

Grupos	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9
<b>Bajo</b>	58,2545	39,0909	34,8000	45,6909	51,7455	31,2909	43,5455
<b>Medio</b>	67,0658	55,7237	50,8289	54,6579	62,7237	50,2895	56,9211
<b>Alto</b>	82,0725	62,8261	69,6087	70,0000	68,0870	71,5942	70,7826
<b>Total</b>	69,8200	53,6000	52,9000	57,4850	61,5550	52,4150	58,0250

**Tabla Nº 64.** Medias de las variables V3, V4, V5, V6, V7, V8 y V9

Grupos	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9
<b>Bajo</b>	25,8430	29,0964	27,1835	27,3766	28,2451	25,2951	14,6841
<b>Medio</b>	29,2786	27,3913	25,8263	29,1472	26,8401	28,2020	16,5382
<b>Alto</b>	17,5778	24,1855	21,2431	21,2118	26,8759	25,3414	13,5775
<b>Total</b>	26,4916	28,3161	28,1973	27,8050	27,8697	30,7477	18,4237

**Tabla Nº 65.** Desviaciones típicas de las variables V3, V4, V5, V6, V7, V8 y V9

La siguiente prueba (Lambda de Wilks) nos indica que las medias de todas las variables a estudiar, variables **V3, V4, V5, V6, V7, V8 y V9**, son distintas en cada grupo: 1, 2 y 3.

	Lambda de Wilks	F	gl1	gl2	Sig.
<b>V3</b>	0,8690	14,8453	2	197,000	0,000
<b>V4</b>	0,8885	12,3638	2	197,000	0,000
<b>V5</b>	0,7623	30,7127	2	197,000	0,000
<b>V6</b>	0,8761	13,9327	2	197,000	0,000
<b>V7</b>	0,9460	5,6181	2	197,000	0,004
<b>V8</b>	0,7328	35,9123	2	197,000	0,000
<b>V9</b>	0,6617	50,3685	2	197,000	0,000

**Tabla Nº 66.** Pruebas de igualdad de las medias de los grupos de las variables V3, V4, V5, V6, V7, V8 y V9

La variable de mayor poder discriminatorio es aquella cuyo valor de estadístico F es el mayor de todos, o la que menor valor tiene del estadístico

Lambda de Wilks. Apreciamos entonces, que las variables **V5**, **V8** y **V9**, que hacen referencia al ritmo, la memoria tonal y la media aritmética de la aptitud musical respectivamente, son las que destacan por encima de las demás, teniendo mayor poder discriminatorio a la hora de clasificar a los alumnos en cada uno de los tres grupos establecidos.

Atendiendo al valor del estadístico F o al nivel de significación, el orden que se pide es el siguiente: **V9**, **V8**, **V5**, **V3**, **V6**, **V4**, y **V7**, teniéndose en cuenta todas ellas a la hora de describir las funciones discriminantes. Sin embargo, en una de las etapas para este AD, la realización de la Prueba de Box, utilizada para la comparación entre las matrices de covarianzas, nos ofrece los siguientes resultados:

<b>M de Box</b>		77,851
<b>F</b>	<b>Aprox.</b>	1,771
	<b>gl1</b>	42
	<b>gl2</b>	100220,984
	<b>Sig.</b>	,002

Prueba la hipótesis nula de las matrices de covarianzas de población iguales.

**Tabla Nº 67.** Prueba M de Box

	<b>Varianza dentro de grupos</b>	<b>Tolerancia</b>	<b>Tolerancia mínima</b>
<b>V9</b>	226,868	,000	,000

Todas las variables que pasan los criterios de tolerancia se especifican de forma simultánea.  
a. El nivel de tolerancia mínimo es ,001.

**Tabla Nº 68.** Prueba de tolerancia

Dada la *intolerancia* que presenta la variable **V9**, a pesar del alto valor del estadístico F, esta variable no será utilizada en adelante para la clasificación de la muestra. Este resultado era esperado, debido a que la **V9**, está compuesta de las medias aritméticas de **V3**, **V4**, **V5**, **V6**, **V7** y **V8**.

### 6.5.2 Resumen de las funciones canónicas discriminantes

El número de funciones canónicas discriminantes que existen viene dado por  $\min\{p, k-1\}$  donde  $p$  denota el número de variables independientes y  $k$  representa el número de grupos. Por tanto, en nuestro ejemplo, como  $p = 7$  y  $k = 3$ , tenemos dos funciones canónicas discriminantes. En la siguiente tabla presentamos una descripción de ambas, resultante del análisis realizado, que nos permite ver su poder discriminante y su significación:

Función	Autovalor	% de varianza	% acumulado	Correlación canónica
1	,642 <sup>a</sup>	96,9	96,9	,625
2	,020 <sup>a</sup>	3,1	100,0	,142

a. Se utilizaron las primeras 2 funciones discriminantes canónicas en el análisis.

**Tabla Nº 69.** Autovalores

Prueba de funciones	Lambda de Wilks	Chi-cuadrado	gl	Sig.
1 a 2	0,597	100,352	12,000	0,000
2	0,980	3,941	5,000	0,558

**Tabla Nº 70.** Lambda de Wilks

La primera función explica el 96,9 % de la variabilidad disponible en los datos, mientras que la segunda función sólo explica el 3,1 %. De manera similar, la correlación canónica de la primera función es alta (0,625) frente a la de la segunda función que es mucho más baja (0,142). La Lambda de Wilks de la tabla siguiente contrasta de manera jerárquica la significación de las dos funciones obtenidas. En la primera línea (1 a 2) se contrasta la hipótesis nula de que el modelo completo (ambas funciones discriminantes tomadas juntas) no permite distinguir las medias de los grupos; puesto que el valor de la lambda de Wilks tiene asociado un nivel crítico (0,000) menor que 0,05, podemos concluir que el modelo permite distinguir significativamente entre los grupos. En la segunda línea (2) se contrasta si las medias de los grupos son iguales en la segunda función discriminante.

La lambda de Wilks toma un valor de nivel crítico mayor que 0,05, luego, se rechaza la hipótesis nula de igualdad de medias. Se observa que la primera función tiene mayor poder discriminante que la segunda, lo que nos permite analizar casi el 99% de la varianza, y constatar un coeficiente de correlación canónica superior también al de la segunda función. También se constata que las diferencias entre las medias de las puntuaciones discriminantes de los grupos son estadísticamente significativas, ya que su índice es menor que una milésima. En resumen, sólo la primera de las funciones discriminantes canónicas es significativa.

Las siguientes tablas nos muestran los coeficientes de las dos funciones canónicas discriminantes y los coeficientes estandarizados.

	Función	
	1	2
<b>V3</b>	,013	-,015
<b>V4</b>	,010	,028
<b>V5</b>	,020	-,003
<b>V6</b>	,007	-,019
<b>V7</b>	-,005	,017
<b>V8</b>	,018	,000
<b>(Constante)</b>	-3,451	-,286

**Tabla N° 71.** *Coefficientes de la función discriminante canónica*

	Función	
	1	2
<b>V3</b>	,313	-,375
<b>V4</b>	,265	,758
<b>V5</b>	,491	-,072
<b>V6</b>	,179	-,493
<b>V7</b>	-,147	,463
<b>V8</b>	,469	,009

**Tabla N° 72.** *Coefficientes estandarizados de la función discriminante canónica*

Al igual que los coeficientes estandarizados, las correlaciones entre las variables originales y las nuevas nos dan una idea de su interpretación, (correlaciones dentro de grupos combinados entre las variables discriminantes y las funciones discriminantes canónicas estandarizadas y variables ordenadas por el tamaño absoluto de la correlación dentro de la función).

	Función	
	1	2
<b>V8</b>	,754*	,048
<b>V5</b>	,697*	-,007
<b>V3</b>	,482*	-,300
<b>V6</b>	,467*	-,294
<b>V4</b>	,423	,717*
<b>V7</b>	,288	,427*

\*. La mayor correlación absoluta entre cada variable y cualquier función discriminante.

**Tabla Nº 73.** *Matriz de estructuras*

El programa estadístico SPSS, también nos ofrece las medias de las funciones discriminantes canónicas, (las funciones discriminantes canónicas sin estandarizar se han evaluado en medias de grupos):

Grupos aptitud numérica	Función	
	1	2
<b>Bajo</b>	-1,051	-,134
<b>Medio</b>	-,118	,180
<b>Alto</b>	,968	-,092

**Tabla Nº 74.** *Funciones en centroides de grupos*

### 6.5.3 Resumen de la clasificación

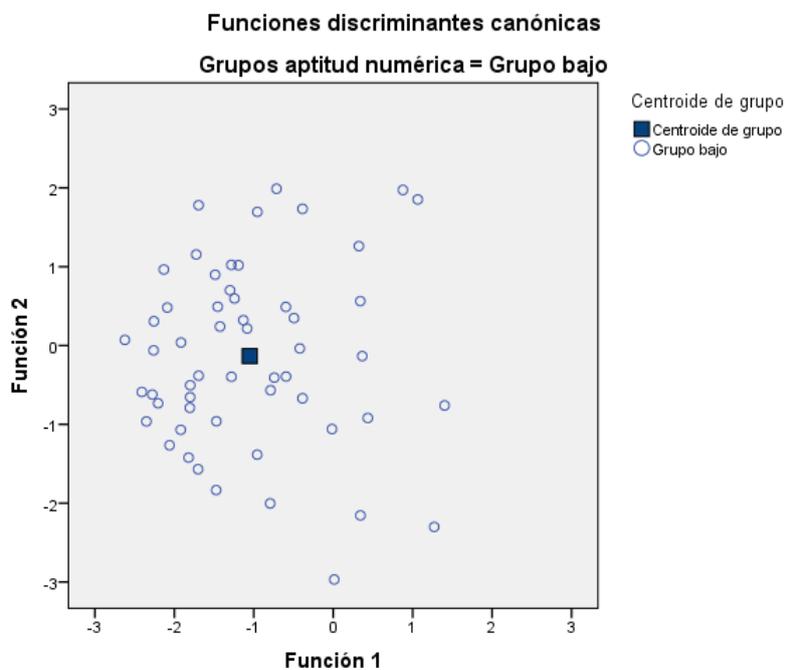
La siguiente tabla nos indica que se ha clasificado correctamente el 62,5 % de los alumnos, lo cual ya es más del 33% esperable en una clasificación realizada completamente al azar y supone, por tanto, una buena mejora. Los errores de clasificación no se distribuyen de manera simétrica.

Debemos destacar que en el grupo de los alumnos con alto nivel en cuenta a su aptitud numérica (3) se consigue el porcentaje más alto de clasificación correcta (85,5 %) frente a un porcentaje del 32,9 % del grupo de nivel medio (2) y del 74,5 % del grupo más bajo (1).

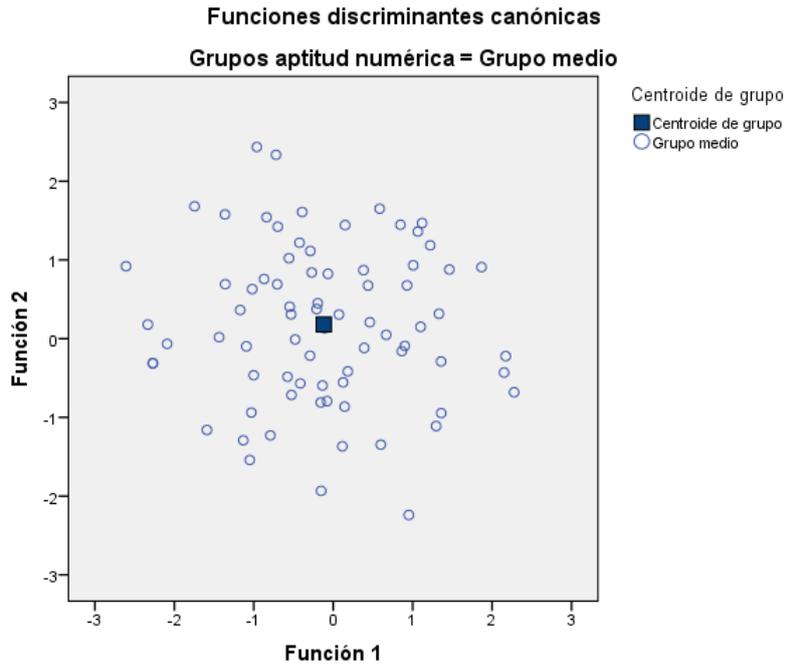
Grupos de aptitud numérica			Perteneencia a grupos pronosticada			Total
			Grupo bajo	Grupo medio	Grupo alto	
Original	Recuento	Bajo	41	10	4	55
		Medio	23	25	28	76
		Alto	5	5	59	69
	%	Bajo	74,5	18,2	7,3	100,0
		Medio	30,3	32,9	36,8	100,0
		Alto	7,2	7,2	85,5	100,0

**Tabla N° 75.** Funciones en centroides de grupos

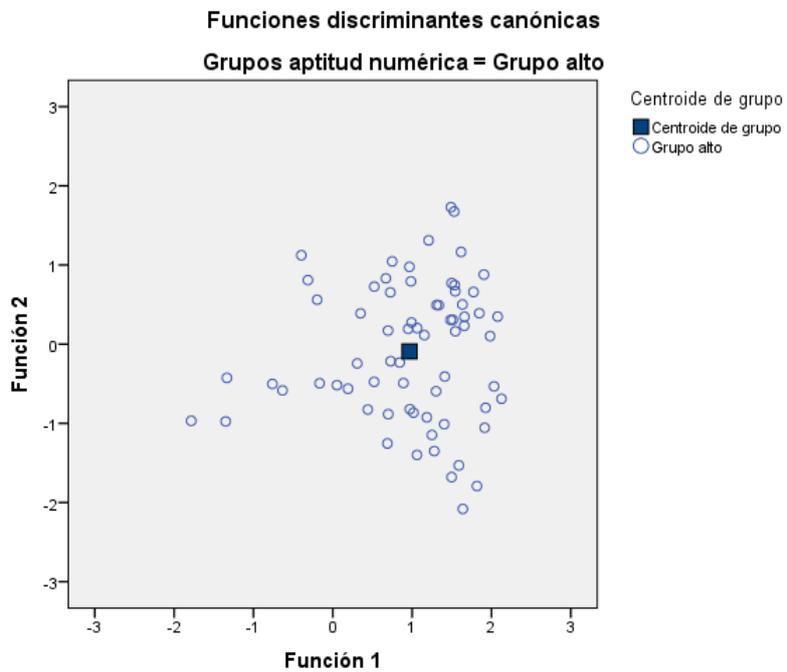
Para verlo de forma más visual, a continuación se presentan los gráficos correspondientes a las clasificaciones por grupo.



**Gráfico N° 11.** Funciones discriminantes canónicas del grupo bajo de aptitud numérica



**Gráfico Nº 12.** *Funciones discriminantes canónicas del grupo medio de aptitud numérica*



**Gráfico Nº 13.** *Funciones discriminantes canónicas del grupo alto de aptitud numérica*

El primer y último de los gráficos, asociados al grupo de menor y mayor nivel respectivamente en cuanto a la aptitud numérica, muestra una mayor concentración de datos con respecto a los otros dos niveles, y de la misma manera, el segundo gráfico, correspondiente al grupo de nivel medio, es el que presenta los datos más dispersos (es el grupo más numeroso), como habíamos dicho anteriormente.

Por tanto podemos concluir que las variables que más discriminan son las **V8** y **V5**, que corresponden a la memoria tonal y el ritmo del test de Seashore, respectivamente. No es casualidad que de las 6 variables que conforman el test, todas estén compuestas por 50 ítems, excepto estas dos; la memoria tonal y el ritmo, que están formadas sólo por 30 ítems, ello conlleva que el abanico de baremación de puntuaciones directas a percentiles sea menor, que las variables con 50 ítems (Anexo I-b. Baremos de PD/Centiles del Test de Seashore).

## 6.6 Contraste de hipótesis

La autenticidad de las hipótesis planteadas en la investigación son examinadas observando los resultados obtenidos en el análisis estadístico realizado, utilizando las pruebas no paramétricas de comparación de medias de Wilcoxon y U de Mann-Whitney, entre el test de aptitud musical de Seashore y el test de aptitud numérica del BAT-7.

**Hipótesis 1<sup>a</sup>.** La aptitud musical y la aptitud numérica están intrínsecamente relacionadas entre sí: los adolescentes que logren buenos resultados globales en el test de aptitud musical, obtendrán buenos resultados en el test de aptitud numérica.

En primer lugar conocemos la media obtenida por los participantes de nuestra investigación en el test de aptitud musical, que es de 58,02 y en el test de aptitud numérica de 59,49. En segundo término aplicamos la prueba no paramétrica de Wilcoxon, para averiguar si estas diferencias, de algo más de 1

punto, son estadísticamente significativas; al comprobar que el estadístico con su *p-valor* asociado ( $,224$ ), es mayor que el nivel de significación ( $0,05$ ), podemos concluir que entre las medias obtenidas con el test de aptitud musical y las medias obtenidas con el test de aptitud numérica, no existen diferencias estadísticamente significativas; con estos resultados, y los obtenidos de la comparación de los grupos medio y alto en los resultados del test de aptitud musical, y los resultados obtenidos por los mismos participantes en el test de aptitud numérica, en el que casi el 80% de éstos obtuvieron resultados iguales o mejores, podemos reafirmarnos en nuestra 1ª Hipótesis.

**Hipótesis 2ª.** Dependiendo del **género** del adolescente, no deberían existir diferencias estadísticamente significativas entre el género masculino y femenino para discriminar las variables que miden la aptitud musical y la aptitud numérica.

Realizamos un análisis de comparación de medias utilizando la prueba no paramétrica de U de Mann-Whitney para conocer si entre la media de los resultados del test de aptitud musical, y el test de aptitud numérica, en relación al género de los participantes, existen diferencias estadísticamente significativas. Una vez realizado el análisis, los resultados nos indican que debemos retener la hipótesis nula ( $H_0$ ) de igualdad de medias, debido a que el *p-valor* ( $,400$ ) asociado al estadístico es mayor que el nivel de significación ( $0,05$ ) obtenido, entre los resultados logrados con el test de aptitud musical y el factor género; ocurre lo mismo si comparamos los resultados del test de aptitud numérica y el factor género, debido a que el *p-valor* ( $,078$ ) asociado al estadístico es mayor que el nivel de significación ( $0,05$ ), por lo tanto reafirmamos la 2ª Hipótesis una vez demostrado que, entre los resultados obtenidos con los tests de aptitud musical y numérica y el factor género, no existen diferencias estadísticamente significativas.

**Hipótesis 3ª.** El desarrollo cognitivo durante la adolescencia, favorece un mayor grado de discriminación de las variables que miden la aptitud

musical y la aptitud numérica: cuanto mayor sea el **nivel escolar** del adolescente, mejores serán los resultados en los tests.

En primer lugar vamos a ver cómo se comporta el nivel escolar con los resultados del test de aptitud musical, obteniendo medias de 49,38 para los participantes de 1.º ESO, 57,44 los participantes de 2.º ESO, y 61,50 y 63,78, los participantes de 3.º y 4.º ESO respectivamente. Conforme al nivel educativo, y los resultados obtenidos en el test de aptitud numérica, medias de 51,66 para los participantes de 1.º ESO, 58,94 para los participantes de 2.º ESO, y 61,92 y 65,42, para los participantes de 3.º y 4.º ESO respectivamente, observamos claramente que también han sido graduales, si a estos datos le añadimos la relación directa de los resultados del test con el rendimiento académico que citábamos en el capítulo 5, apartado 5.3.2.7, podemos confirmar la 3ª Hipótesis: cuanto mayor sea el nivel escolar de los participantes, mejores serán sus resultados en los tests de aptitud musical y numérica.

## Capítulo 7. Conclusiones y consideraciones finales

### 7.1 Conclusiones

A continuación se presentan las conclusiones a las que hemos llegado después del proceso de investigación realizado con los participantes de nuestra investigación (200).

**1ª Conclusión.** Entre la media de los resultados obtenidos por los participantes en los tests de aptitud musical y numérica, no existen diferencias estadísticamente significativas según la teoría omnibus; basándonos en la teoría de los específicos, sí existirían diferencias estadísticamente significativas: entre la altura y la aptitud numérica favorable a la altura, y entre la intensidad, ritmo, memoria tonal y la aptitud numérica, favorable a esta última.

**2ª Conclusión.** El 78,3% de los participantes que obtienen buenos resultados en el test de aptitud musical (grupo medio), obtienen buenos y muy buenos resultados en el test de aptitud numérica (grupo medio y grupo alto).

**3ª Conclusión.** El 76,9% de los participantes que obtienen muy buenos resultados en el test de aptitud musical (grupo alto), obtienen muy buenos resultados en el test de aptitud numérica (grupo alto).

**4ª Conclusión.** Los participantes masculinos de nuestra investigación tienen mayor capacidad (a la vista de los resultados obtenidos) para discriminar las variables que miden la aptitud musical global y la aptitud numérica, aunque en ningún caso se muestren diferencias estadísticamente significativas.

**5ª Conclusión.** El nivel educativo influye en los resultados del test de aptitud musical: los participantes de mayor nivel educativo obtienen mejores resultados globales que sus compañeros que cursan niveles inferiores; destacando sobre los demás, las diferencias estadísticamente significativas que encontramos en detrimento de los sujetos de 1.º de ESO, respecto al resto de los participantes.

## 7.2 Consideraciones y sugerencias para futuras investigaciones

Habiendo quedado definidos y concluidos los objetivos propuestos en nuestra investigación, queremos no obstante, sugerir otros campos para futuras investigaciones, y puesto que estudios de este tipo acrecientan el campo pedagógico y didáctico del tema, proyectamos algunas líneas para su ampliación.

- **Las aptitudes musicales y la etnografía**

La experiencia como docente en la Educación Secundaria, nos muestra cada día la gran diversidad cultural que, en la actualidad, se encuentra dentro de un aula de cualquier centro educativo en cualquiera de las diecisiete provincias españolas. Asimismo, desde la administración pública, se fomentan proyectos relacionados con la interculturalidad en las aulas. Parece interesante el tema y no se descarta abordarlo en un futuro.

- **Las aptitudes musicales y la educación especial**

Las aptitudes musicales y la educación especial, es un objetivo de futuro por el interés que encierra el estudio desde esta realidad y las posibles vías de adaptación o mejora del método, en orden a incidir en la propia expresión de los sujetos y en posibles caminos de mejora de sus dificultades.

Otra faceta que nos ofrece el tema es el denominado síndrome Williams. Sería interesante saber en qué medida y qué aptitudes se presentan con mayor amplitud en adolescentes que pudiesen cumplir las características de este síndrome.

- **Los hábitos musicales y la aptitud numérica**

Ya estudiamos las relaciones entre los hábitos musicales y la aptitud musical en Vert (2013), así mismo, nos resultaría muy interesante conocer las relaciones que pudiesen existir entre las variables que definen la aptitud numérica y sus hábitos musicales (Cuestionario de hábitos musicales de P. L. Nebreda), tanto creativos, como auditivos; es decir, cómo influye el nivel de aptitud numérica del adolescente en la elección de un instrumento musical o en sus hábitos de canto o de creación musical, también sobre sus preferencias estilísticas auditivas, ya sean relacionadas con la música clásica, el rock, la música electrónica u otros tipos.

## Referencias bibliográficas

Abdounur, O. J. (2009). Razones, proporciones y pensamiento proporcional en la música pitagórica: un abordaje histórico-didáctico. En *La proporción, arte y matemáticas* (pp. 61-86). Barcelona, España: Graó.

Abraira, C. y Maz, A. (2012). Desarrollo de procesos cognitivos y afectivos en la enseñanza de las matemáticas en primaria mediante el uso del video. *Revista de ciencias humanas*, 2 (2), 103-111.

Acotto, E. & Andreatta, M. (2012). Between mind and mathematics: Different kinds of computational representations of music. *Mathématiques et sciences humaines. Mathematics and social sciences*, 199, 7-25.

Adorno, Th. W. (2011). *Escritos musicales V*. Madrid, España: Akal.

Alsina, A. (2012). Hacia un enfoque globalizado de la educación matemática en las primeras edades. *Números*, 80, 7-24.

American Psychological Association. (2010). *Publication manual of the American Psychological Association (6th edition)*. Washington, USA: American Psychological Association.

An, S., Capraro, M. M. & Tillman, D. A. (2013). Elementary teachers integrate music activities into regular mathematics lessons: Effects on students' mathematical abilities. *Journal for Learning through the Arts*, 9 (1). Retrieved from <http://eric.ed.gov/?id=EJ1018326>

An, S. A. & Tillman, D. A. (2015). Music activities as a meaningful context for teaching elementary students mathematics: a quasi-experiment time series design with random assigned control group. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 3 (1), 45-60.

- Anderson, M. (2014). *A three-part study in the connections between music and mathematics*. (Thesis graduate). Butler University, Indianapolis, USA. Retrieved from <http://digitalcommons.butler.edu/ugtheses/193>
- Arbonés, J. y Milrud, P. (2011). *La armonía es numérica: música y matemáticas*. Barcelona, España: RBA.
- Arribas, D., Santamaría, P., Sánchez-Sánchez, F. y Fernández-Pinto, I. (2015). *Bateria de aptitudes de TEA. BAT-7* (2ª edición, revisada y ampliada). Madrid, España: TEA.
- Arroyave, M. (2012). La metáfora geométrica en la música: Una transferencia de experiencias de pensamiento entre dos disciplinas. *Calle 14: Revista de investigación en el campo del arte*, 6 (8), 16-37.
- Artículo de periódico online: Sanz, E. (17 de mayo de 2016). ¿Existe un cerebro matemático? *El País*. Recuperado de [http://elpais.com/elpais/2016/05/09/ciencia/1462803900\\_977624.html](http://elpais.com/elpais/2016/05/09/ciencia/1462803900_977624.html)
- Baker, R. A. (2011). *The relationship between music and visual arts formal study and academic achievement on the eighth-grade louisiana educational assessment program (LEAP) test*. (Ph.D. Dissertation). University of New Orleans, New Orleans, USA. Retrieved from <http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED518493.pdf> (ED518493)
- Barbarán, J. J. (2010). *Investigación evaluativa sobre la resolución de problemas para el desarrollo de la competencia matemática en alumnos de educación secundaria obligatoria, mediante la invención-reconstrucción de situaciones problemáticas. Estudio de casos*. (Tesis doctoral). Departamento de Didáctica, organización escolar y didácticas especiales de la UNED, Madrid, España.

- Barker, A. (1989). *Greek musical writings, t. II: harmonic and acoustic theory*. Cambridge, England: Cambridge University Press.
- Barlett, J.C. & Dowling, W.J. (1980). The recognition of transposed melodies: a keydistance effect in developmental perspective. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 6, 501-515.
- Barnes, J. (1979). Bach's keyboard temperament: Internal evidence from the "Well-Tempered Clavier". *Early Music*, 7, 236-249.
- Bazinet, R. & Marshall, A. M. (2015). Ethnomusicology, Ethnomathematics, and Integrating Curriculum. *General Music Today*, 28 (3), 5-11.
- Berrio, N. J. (2015). La música y el desarrollo cognitivo. Una ciencia: *Revista de estudios e investigaciones*, 7. Recuperado de <http://revistas.unac.edu.co/index.php/unc/article/view/99>
- Beth, E. W. et Piaget, J. (1961). *Épistémologie mathématique et psychologie essai sur les relations entre la logique formelle et al pensée réelle*. Paris, France: Presses Universitaires de France.
- Blakemore, S. J. & Frith, U. (2005). *The learning brain: lessons for education*. Oxford, England: Blackwell Publishing Ltd.
- Blázquez, R. M. (2014). *Música y matemáticas*. (Trabajo fin de Grado). E.U. de Educación y Turismo de Ávila, Ávila, España. Recuperado de <http://gredos.usal.es/jspui/handle/10366/123098>
- Bentley, A. (1966). *La aptitud musical de los niños*. Buenos Aires, Argentina: Víctor Leru.
- Bowen, R. C. (2010). *Effects of pre-kindergarten music instruction on kindergarten reading and math scores for low SES ELL students*. (Ed.D.

Dissertation). (3413118). Trevecca Nazarene University, School of Education, Tennessee, USA. Retrieved from <http://www.bowensclass.org/uploads/8/3/5/4/8354830/study.docx>

Boyd, J. R. (2013). *The relationship between music participation and mathematics achievement in middle school students*. (Ed.D. Dissertation). Liberty University, Virginia, USA. Retrieved from <http://digitalcommons.liberty.edu/doctoral/674/> (Paper 674)

Britos, G. (2015). *Música y ciencia*. Editada por el autor y publicada bajo licencia Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 4.0. Recuperado de [https://books.google.es/books?id=mFYABwAAQBAJ&pg=PA3&lpg=PA3&dq=M%C3%BAsica+y+ciencia+britos+2015&source=bl&ots=78udFm3Bmq&sig=V1TgfYDTnGSIH40AB-yLiHlZg&hl=es&sa=X&ved=0ahUKEwiy-M\\_MnZjUAhWK1xoKHatMDwsQ6AEIKDAA#v=onepage&q=M%C3%BAsica%20y%20ciencia%20britos%202015&f=false](https://books.google.es/books?id=mFYABwAAQBAJ&pg=PA3&lpg=PA3&dq=M%C3%BAsica+y+ciencia+britos+2015&source=bl&ots=78udFm3Bmq&sig=V1TgfYDTnGSIH40AB-yLiHlZg&hl=es&sa=X&ved=0ahUKEwiy-M_MnZjUAhWK1xoKHatMDwsQ6AEIKDAA#v=onepage&q=M%C3%BAsica%20y%20ciencia%20britos%202015&f=false)

Buteau, C. & Anagnostopoulou, C. (2012). Mathematical and computational modelling within a music analysis framework: motivic topologies as a case study. *Journal of Mathematics and Music*, 6 (1), 1-16.

Butterworth, B. (1999). *The mathematical brain*. London, England: MacMillan.

Cabanac, A., Perlovsky, L., Bonniot-Cabanac, M. C. & Cabanac, M. (2013). Music and academic performance. *Behavioural brain research*, 256, 257-260.

Cabeza, M. L. (2015). *Diseño y aplicación de un modelo de representación dinámica integrado para estimular las competencias matemáticas básicas en estudiantes con déficit de atención y dificultades para el*

*aprendizaje de las matemáticas*. (Tesis doctoral). Departamento de Psicología Universidad de Oviedo, Oviedo, España.

Calderón, C. (2013a). Experiencia estética y formulación científica: El caso del armonices mundi de johannes kepler. *Anuario Musical: Revista de Musicología del CSIC*, 68, 81-132.

Calderón, C. (2013b). *El Monocordio como instrumento científico*. (Tesis doctoral). Universitat Pompeu Fabra, Barcelona, España.

Calderón, C. (2014). Experiencia estética y formulación científica: dos casos de estudio. En A. García y P. Otaola. (Coords.), *Francisco de Salinas. Música, teoría y matemáticas en el Renacimiento* (pp. 19-43). Salamanca, España: Ediciones Universidad de Salamanca.

Cantlon, J. F., Brannon, E. M., Carter, E. J. & Pelphrey, K. A. (2006). Functional imaging of numerical processing in adults and 4-y-old children. *PLOS Biology*, 4 (5), 844-854.

Cappelletti M., Waley-Cohen H., Butterworth B. & Kopelman M. (2000). A selective loss of the ability to read and write music. *Neurocase*, 6, 332-341.

Cartró, S. (2011). *Matemàtiques i música. El taller pitagòric*. (Trabajo fin de Master). Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, España.

Casals, A., Carrillo, C y González-Martín C. (2014). La música también cuenta: combinando matemáticas y música en el aula. *Revista Electrónica de Lista Electrónica Europea de Música en la Educación, LEEME*, 34, 1-17.

Castorina, J. A. (1998). Los problemas de una teoría del aprendizaje: una discusión crítica de la tradición psicogenética. En J. A. Castorina, C. Coll, A. Díaz, F. Díaz, B. García, G. Hernández, L. Moreno, I. Muriá, A. M.

- Pessoa de Carvalho y C. E. Vasco. *Piaget en la educación. Debate en torno a sus aportaciones* (pp. 53-77). Ciudad de México, México: Paidós y UNAM.
- Castrillón, M. (2013). Matemáticas en la construcción de escalas musicales. *Pensamiento Matemático*, 3 (1), 177-188.
- Chanda, M. L. & Levitin, D. J. (2013). The neurochemistry of music. *Trends in Cognitive Sciences*, 17 (4), 179–193.
- Clampitt, D. (2009). The math behind the music. *Journal of Mathematics and Music: Mathematical and Computational Approaches to Music Theory, Analysis, Composition and Performance*, 3 (1), 59-61.
- Cordoba, D. (2011). *Desarrollo cognitivo, sensorial, motor y psicomotor de la infancia*. Málaga, España: IC Editorial.
- Costa-Giomi, E. (1999). The effects of three years of piano instruction on children's cognitive development. *Journal of Research in Music Education*, 47 (3), 198-212.
- Costa-Giomi, E. (2015). The long-term effects of childhood music instruction on intelligence and general cognitive abilities. *Update: Applications of Research in Music Education*, 33 (2), 20-26.
- Courage, M. L., Bakhtiar, A., Fitzpatrick, C., Kenny, S. & Brandeau, K. (2015). Growing up multitasking: The costs and benefits for cognitive development. *Developmental Review*, 35, 5-41.
- Cranmore, J. & Tunks, J. (2015). High School Students' Perceptions of the Relationship between Music and Math. *Mid-Western Educational Researcher*, 27 (1), 51-69.

Dávila, J. C. G. (2009). Matemáticas y música. *Matemáticas y Sociedad*, 19. Recuperado de <http://imarrero.webs.ull.es/sctm04/modulo1/mod1res04.pdf#page=19>

de Fabritiis, C. (2013). From canvas to music: Mathematics as a tool for the composition of jacksontime. In M. Emmer. (Ed.), *Imagine math 2* (pp. 161-169). Berlin, Germany: Springer.

de Lemos, C. (2015). Genetic Algorithms Based on the Principles of Grundgestalt and Developing Variation. In T. Collins, D. Meredith & A. Volk. (Eds), *Mathematics and computation in music: 5th international conference*, MCM 2015, London, England, june 22-25, 2015, proceedings (pp. 42-51). Berlin, Germany: Springer.

Decreto 127/2007, de 24 de mayo, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Canarias (BOC n.º 113, de 7 de junio de 2007).

Decreto 83/2016, de 4 de julio, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Canarias (BOC n.º 136, de 15 de julio de 2016).

Deere, K. B. (2010). *The impact of music education on academic achievement in reading and math*. (Dissertation Ed.D.). (ED521942). Union University, Tennessee, USA. Retrieved from <http://eric.ed.gov/?id=ED521942>

Degé, F., Wehrum, S., Stark, R. & Schwarzer, G. (2014). Music lessons and academic self-concept in 12-to 14-year-old children. *Musicae Scientiae*, 18 (2), 203-215.

Dehaene, S. (1997). *The number sense. how the mind create mathematics*. Oxford, England: Oxford University Press.

- Dehaene S., Spelke E., Pinel P., Stanescu R. & Tsivikin S. (1999). Sources of mathematical thinking: behavioral and brain-imaging evidence, *Science*, 284, 970-974.
- Dehaene S., Piazza M., Pinel P. & Cohen L. (2003). Three parietal circuits for number processing, *Cognitive Neuropsychology*, 20, 487-506.
- del Río, D. (1982). *Aptitudes musicales de la población escolar española*. (Tesis Doctoral). Facultad de Filosofía y Ciencias de la Educación, Universidad Complutense de Madrid, Madrid, España.
- del Río, D. (1984). El factor “zona” y el “nivel socioeconómico” en la investigación de las aptitudes musicales. *Revista española de pedagogía*, 166, 605-615.
- del Río, D. (1999). *Las aptitudes musicales y su diagnóstico* (2ª edición). Madrid, España: UNED.
- del Río, D. (2000). La investigación sobre las aptitudes musicales. *Revista Electrónica de Lista Electrónica Europea de Música en la Educación, LEEME*, 5. Recuperado de <http://www.unirioja.es/dptos/dea/leeme/revista/mesadelrio.htm>
- Deppe, S. (2012). *An investigation of the relationships between mathematics and music skills of students participating in successful high school instrumental music programs*. (Dissertation Ed.D.). (3510144). Lamar University Beaumont, Texas, USA. Retrieved from <http://gradworks.umi.com/35/10/3510144.html>
- Devlin, K. (2013). The music of math games. *American Scientist*, 101 (2), 87-91.

- Díaz, A. (2005). *Estructura y significado en la Música Serial y Aleatoria*. (Tesis doctoral). UNED, Madrid, España.
- Díaz-Báñez, J. M. (2013). Sobre problemas de matemáticas en el estudio del cante flamenco. *Gaceta de la Real Sociedad Matematica Española*, 16 (3), 513-542.
- Doyle, M. & McCoy, L. (2012). Creative expression in the math classroom: How incorporating performance arts affects student engagement and motivation. *Studies in teaching 2012 research digest* (pp. 37-41). Retrieved from <http://college.wfu.edu/education/wp-content/uploads/proceedings12.pdf#page=41>
- Duell, O. & Anderson, R.C. (1967). Pitch discrimination among primary school children. *Journal of Educational Psychology*, 58 (6), 315-318.
- Elsner, L., & van den Driessche, P. (2010). Max-algebra and pairwise comparison matrices, II. *Linear Algebra and its Applications*, 432 (4), 927-935.
- Eubank, T. (2015). Timing–Rhythmicity–movement: How we get from “Hear” to there. *Optometry & Visual Performance Journal*, 3 (1), 47-55.
- Feng, S., Suri, R. & Bell, M. (2014). Does classical music relieve math anxiety? Role of tempo on price computation avoidance. *Psychology & Marketing*, 31 (7), 489-499.
- Fernández J. A. (2010). Neurociencia y enseñanza de la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*, 51 (3).
- Flores, F. L. (2008). *Matemáticas en la antigüedad*. Jaén, España: Itakus.
- Fraisse, P. (1976). *Psicología del ritmo*. Madrid, España: Morata.

- Fréitez, A. G. (2014). La composición asistida por computadora usando melodías indígenas como material temático. *Mayéutica. Revista del Decanato Experimental de Humanidades y Artes UCLA*, 2 (2). Recuperado de [http://bibvirtual.ucla.edu.ve/DB/psm\\_ucla/edocs/mayeutica/0202/articulo2.pdf](http://bibvirtual.ucla.edu.ve/DB/psm_ucla/edocs/mayeutica/0202/articulo2.pdf)
- Fubini, E. (1988). *La estética musical desde la Antigüedad hasta el siglo XX*. Madrid, España: Alianza editorial.
- Gan, S. K., Lim, K. M. & Haw, Y. (2015). The relaxation effects of stimulative and sedative music on mathematics anxiety: A perception to physiology model. *Psychology of Music*, (June 19). Retrieved from <http://pom.sagepub.com/content/early/2015/06/19/0305735615590430.abstract>
- García, I. y Lacasa, P. (1990). *Psicología evolutiva II. Desarrollo cognitivo y social*. Madrid, España: UNED.
- García, M.C. (2001) Diseños ex post facto. En S. Fontes, M. C. García, A. J. Garriga, M. C. Perez-Llantada y E. Sarriá. *Diseños de investigación en psicología (2ª edición)* (pp. 405-429). Madrid, España: UNED.
- García, R. (2014). *Diseño y validación de un instrumento de evaluación de la competencia matemática. Rendimiento matemático de los alumnos más capaces*. (Tesis doctoral). Departamento MIDE I de la UNED, Madrid, España.
- Garvis, S. (2013). Beginning generalist teacher self-efficacy for music compared with maths and english. *British Journal of Music Education*, 30 (1), 85-101.

- Garvis, S. & Pendergast, D. (2011). An investigation of early childhood teacher self-efficacy beliefs in the teaching of arts education. *International Journal of Education & the Arts*, 12 (9), 1-15.
- Geist, K. & Geist, E. (2008). Do re mi, 1-2-3: That's how easy math can be-- using music to support emergent mathematics. *Young Children*, 63 (2), 20-25.
- Geist, K., Geist, E. A. & Kuznik, K. (2012). The patterns of music. *Young Children*, 75 (2), 74-79.
- Geem, Z. W. (2015). Can music supplant math in environmental planning? *Leonardo*, 48 (2), 147-150.
- Goldáraz, J. J. (1992). *Afinación y temperamento en la música occidental*. Madrid, España: Alianza Editorial.
- Goldáraz, J. J. (2004). *Afinación y temperamentos históricos*. Madrid, España: Alianza Editorial.
- Goldáraz, J. J. (2014). La teoría armónica después de Francisco de Salinas: En A. García y P. Otaola. (Coords.), *Francisco de Salinas. Música, teoría y matemáticas en el Renacimiento* (pp. 45-60). Salamanca, España: Ediciones Universidad de Salamanca.
- González Dávila, J. C. (2009). Matemáticas y música. *Matemáticas y Sociedad*, 19-20.
- Grandas, N. J. B. (2011). La música y el desarrollo cognitivo. *Unaciencia: Revista de Estudios e Investigaciones*, 7, 14-23.

- Guerra, M. (2003). *Intervención para la mejora de la habilidad musical en alumnos de educación primaria*. (Tesis doctoral). Facultad de Formación del Profesorado de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, Las Palmas de Gran Canaria, España.
- Guillén, J. C. (20 de marzo de 2012). *Matemáticas y Neurociencia*. Escuela con cerebro. Recuperado de <https://escuelaconcerebro.wordpress.com/2012/03/20/matematicas-y-neurociencia>
- Gutiérrez, F., García, J. A. y Carriedo, N. (Eds.). (2002). *Psicología Evolutiva II. Desarrollo cognitivo y lingüístico. Volumen 2*. Madrid, España: UNED.
- Hall, R. W. (2014). Acoustics labs for a general education math and music course. *Journal of Mathematics and Music*, 8 (2), 125-130.
- Hargreaves, D.J. (1986). *The Developmental Psychology of Music*. Cambridge, England: Cambridge University Press.
- Hassidov, D. (2015). The “Senso-Math” Preschool Mathematics Program, Facilitator Training and Their Contribution to the Preschool. *International Journal for Cross-Disciplinary Subjects in Education (IJCDSE)*, 6 (2). 2133-2141.
- Heiskell, J. D. (2010). *Measure to measure: Additional lengths using educative music therapy to increase the math aptitude and social competency of the forgotten middle*. (Master of Music). Arizona State University, Arizona, USA. Retrieved from <http://gradworks.umi.com/14/83/1483435.html> (1483435)
- Herranz, P. y Sierra, P. (2002). *Psicología evolutiva I. Volumen 2. Desarrollo social*. Madrid, España: UNED.

- Hetland, L. (2000). Listening to music enhances spatial-temporal reasoning: Evidence for the "Mozart effect" *The Journal of Aesthetic Education*, 34 (3-4), 105-148.
- Hofstadter, D. R. (1979). *Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid*. New York, USA: Basic Books.
- Howat, R. (1983). *Debussy in proportion: a musical analysis*. Cambridge, England: Cambridge University Press.
- Hughes, J. R. (2015). Using fundamental groups and groupoids of chord spaces to model voice leading. *Mathematics and computation in music*, 267-278.
- Imberty, M. (1969). *L'acquisition des structures tonales chez l'enfant*. Paris, France: Klincksieck.
- Inhelder, B. et Piaget, J. (1955). *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent: essai sur la construction des structures opératoires formelles*. Paris, France: Presses Universitaires de France.
- Instituto Cervantes. (2017). Diccionario de términos clave de ELE, en Centro Virtual Cervantes. Recuperado de [http://cvc.cervantes.es/ensenanza/biblioteca\\_ele/diccio\\_ele/](http://cvc.cervantes.es/ensenanza/biblioteca_ele/diccio_ele/)
- Jones, S. M. & Pearson, D. (2013). Music highly engaged students connect music to math. *General Music Today*, 27 (1), 18-23.
- Jones-Lewis, S. D. (2015). *The impact of non-band music participation on the academic achievement of 6th grade mathematics students*. (Ed.D. Dissertation). Liberty University, Lynchburg, USA. Retrieved from <http://digitalcommons.liberty.edu/doctoral/995/>

- Kelletat, H. (Ed.). (1960) *Zur musikalischen temperatur, insbesondere bei Johann Sebastian Bach*. Berlin, Deutschland: Merseburger edition.
- Kochavi, J. (2014). Musica speculativa for the twenty-first century: Integrating mathematics and music in the liberal arts classroom. *Journal of Mathematics and Music*, 8 (2), 117-123.
- Kolb, B. & Muhammad, A. (2014). Harnessing the power of neuroplasticity for intervention. *Frontiers in Human Neuroscience*, 8, art 377.
- Lacarcel, J. (1995). *Psicología de la música y educación música*. Madrid, España: Visor Distribuciones.
- Ladipo, J. L. (2014). *An action research of teachers' perceptions and attitudes of professional development: Integrating music into mathematics*. (Ed.D. Dissertation). Capella University, USA. Retrieved from: <http://gradworks.umi.com/36/21/3621591.html>
- Lara, F. (1994) El desarrollo cognitivo en la adolescencia. En A. Aguirre. (Ed.), *Psicología de la adolescencia* (pp 143-171). Barcelona, España: Editorial Boixareu Universitaria Marcombo.
- Laucírca, A. (1998). Los métodos cuantitativos en la investigación educativo-musical. *Revista Electrónica de Lista Electrónica Europea de Música en la Educación, LEEME*, 2. Recuperado de <http://www.unirioja.es/dptos/dea/leeme/revista/laucirca.html>
- Lázaro, F. R. (2015). *Relación de aptitudes musicales, intelectuales y rasgos de personalidad e identificación del talento musical en escolares de diez a doce años*. (Tesis doctoral). Facultad de Educación de la Universidad de Murcia, Murcia, España.

Lehmans, R. M. (2014). *Música fácil: Teoría de la Música*. Bloomington, USA: Palibrio LLC.

Lendvai, E. (2003). *Bela Bartok: un análisis de su música*. Barcelona, España: Idea Books.

Levitin, D. J. (2014). *El cerebro musical*. Barcelona, España: RBA.

Levitin, D. J. (2015). *Tu cerebro y la música. El estudio científico de una obsesión humana*. Barcelona, España: RBA.

Levitin, D. J. & Grafton, S. T. (2016). Measuring the representational space of music with fMRI: a case study with Sting. *NeuroCase*, 22 (6), 548–567.

Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (BOE núm. 106, de 4 de mayo de 2006)

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (BOE núm. 295, de 10 de diciembre de 2013).

Liern, V. y Queralt, T. (12 de mayo de 2008). *Música y matemáticas: La armonía de los números*. Día escolar de las matemáticas. Servicio de Publicaciones de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. Recuperado de [https://www.fespm.es/IMG/pdf/dem2008\\_-\\_musica\\_y\\_matematicas.pdf](https://www.fespm.es/IMG/pdf/dem2008_-_musica_y_matematicas.pdf)

Liern, V. (2008). La Música y el número siete. Historia de una relación controvertida. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 58, 137-143.

Liern, V. (2009). Las matemáticas de Johann Sebastian Bach. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 61, 113-118.

- Liern, V. (2011). MUSYMÁTICAS: Música y matemáticas en educación primaria. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 66, 107-112.
- Liern, V., Pérez, B. M. y Pérez, V. (2012). Música, danza y matemáticas, naturalmente. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 69, 115-120.
- Liern, V. (2014). *El eco de la música en las esferas: las matemáticas de las consonancias*. Barcelona, España: Reial Acadèmia de Doctors: Fundació Universitària ESERP.
- López, P. y Gustems, J. (2007). Reflexiones y dificultades interdisciplinares: una experiencia conjunta de matemáticas y música. *UNO. Revista de didáctica de las matemáticas*, 44, 110-116.
- Luo C, Guo Z-w, Lai Y-x, Liao W, Liu Q, Kendrick KM, et al. (2012). Musical training induces functional plasticity in perceptual and motor networks: insights from resting-state fMRI. *PLoS ONE*, 7 (5), e36568.
- Lluis-Puebla, E. (2014). La matemática en la música. *Pro Mathematica*, 16 (31-32), 129-143.
- Mallory, C. (2012). *The effect of music on math and science standardized test scores*. (Project submitted for the degree of Bachelor of Science No. 022812-093901). Worcester Polytechnic Institute, Massachusetts, USA. Retrieved from <https://www.wpi.edu/Pubs/E-project/Available/E-project-022812093901/unrestricted/IQPFinalDraft.pdf>
- Marcos, G. (2008). *Un modelo de análisis de competencias matemáticas en un entorno interactivo*. (Tesis doctoral). Departamento de Matemáticas y computación de la Universidad de La Rioja, La Rioja, España.

- Marin, O.S. & Perry D.W. (1992). Neurological aspects of musical processing. In D. Deutsch. (Ed.), *Psychology of Music* (2nd edition) (pp. 653-724). New York, USA: Academic Press.
- Marsden, A. (2012). Response to Geraint Wiggins. *Journal of Mathematics and Music*, 6 (2), 125-128.
- Martín, E. (2006). *Atención y aptitudes musicales en niños entre diez y doce años*. (Tesis doctoral). Facultad de Educación, Universidad de Extremadura, Extremadura, España.
- Martin, M. R., & Pickett, M. T. (2013). *The effects of differentiated instruction on motivation and engagement in fifth-grade gifted math and music students*. (Master of Arts Action Research Project). (ED541341). Saint Xavier University, Illinois, Chicago, USA. Retrieved from <http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED541341.pdf>
- Martínez, J. (1992). *Aptitudes musicales en la población asturiana*. (Tesis doctoral). Facultad de Filosofía y Ciencias de la Educación de la UNED, Madrid, España.
- Martínez, J. y Argibay, P. (2007). El Aprendizaje de las Matemáticas y el Cerebro. *Ciencia hoy*, N° 99, 17, 46-51.
- Martínez, S. (2003). *Desarrollo de un software para el estudio de aplicaciones del análisis espectral en la musicología histórica y la etnomusicología*. (Proyecto Final de Carrera para la obtención del título de Ingeniero de Telecomunicaciones). Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, España.
- Martínez, S. (2004). La teoría de la disonancia y la afinación en la obra de El clave bien temperado de J. S. Bach. *Revista de Musicología*, 27 (2), 895-931.

- Martínez-Artero, R. N. y Checa, A. N. (2014). Los talleres en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. En J. I. Alonso, C. J. Gómez y T. Izquierdo. (Eds.), *La formación del profesorado en educación infantil y primaria* (pp. 91-104). Murcia, España: Ediciones de la Universidad de Murcia
- Merino, J.M., Moreno, E., Padilla, M., Rodríguez-Miñón, P. y Villarino, A. (2002) *Análisis de datos en psicología I*. Madrid, España: UNED.
- Milne, A. J., Bulger, D., Herff, S. A., y Sethares, W. A. (2015). Perfect Balance: A Novel Principle for the Construction of Musical Scales and Meters. In T. Collins, D. Meredith & A. Volk. (Eds.), *Mathematics and computation in music: 5th international conference, MCM 2015, London, England, june 22-25, 2015, proceedings* (pp. 97-108). Berlin, Germany: Springer.
- Miksza, P. & Gault, B. M. (2014). Classroom Music Experiences of US Elementary School Children: An Analysis of the Early Childhood Longitudinal Study of 1998-99. *Journal of Research in Music Education*, 62 (1), 4-17.
- Mirzai, Z. E., Jam, B. M., Soltani, S., Firoozmanesh, A., Ghoncheh, A., Mahmoud, Y. & Afshar, Z. (2015). Comparing academic achievement in math course in music students and ordinary students. *Bulletin of Environment, Pharmacology and Life Sciences*, 4 (5), 24-30.
- Modgil, S, Modgil, C & Brown, G. (2006). *Jean Piaget: an interdisciplinary critique, (6th edition)*. London, England: Routledge Library Editions.
- Montañés, J. (Coord.). (2003). *Aprender y jugar: actividades educativas mediante el material lúdico-didáctico PrismakerSystem*. Cuenca, España: Ediciones de la Universidad de Castilla La Mancha.

- Montiel, M. & Gómez, F. (2014). Music in the pedagogy of mathematics. *Journal of Mathematics and Music*, 8 (2), 151-166.
- Moorefield-Lang, H. & Evans, M. A. (2011). Rhythmical: a game to combine music and mathematics for mobile devices. *Music Reference Services Quarterly*, 14 (1-2), 46-51.
- Moreno, A. (2007). *La adolescencia*. Barcelona, España: Editorial UOC.
- Morrison, S. J. (1994) Music students and academic growth. *Music Educators Journal*, 81 (2), 33-36.
- Muñiz, J., Hernández, A. y Ponsoda, V. (2015). Nuevas directrices sobre el uso de los tests: investigación, control de calidad y seguridad. *Papeles del Psicólogo*, 36 (3), 161-173.
- Mursell, J. L. (1937). *The psychology of music*. New York, USA: W.W. Norton & Company.
- Nagisetty, V. (2014). *Using music-related concepts to teach high school math*. (Master of Science in Teaching). Portland State University, Portland USA. Retrieved from [http://pdxscholar.library.pdx.edu/open\\_access\\_etds/1958/](http://pdxscholar.library.pdx.edu/open_access_etds/1958/)
- Navas, L. (2002). *El desarrollo durante la adolescencia. Implicaciones para el diseño curricular*. (Curso de doctorado del programa Investigación educativa: Desarrollo curricular y profesional). Facultad de Educación de la Universidad de Alicante, Alicante, España.
- Nebreda, P.L. (1999a). *Aptitudes y hábitos musicales en el adolescente*. (Tesis doctoral). Facultad de Educación de la UNED, Madrid, España.

- Nebreda, P.L. (1999b). *Música y adolescencia*. Madrid, España: Editado por el autor.
- Nebreda, P.L. (2002). La inteligencia musical. *Revista educación y futuro*. Recuperado de [http://www2.cesdonbosco.com/revista/profesores/6\\_noviembre/inteligencia\\_musical.pdf](http://www2.cesdonbosco.com/revista/profesores/6_noviembre/inteligencia_musical.pdf)
- Newlin, D. (Ed.). (1950). *Style and Idea*, by Arnold Schoenberg. New York, USA: Philosophical Library.
- Nierhaus, G. (2009). *Algorithmic composition: paradigms of automated music generation*. Mörlenbach, Germany: Springer-Verlag Wien.
- Noll, T. (2014). Getting involved with mathematical music theory. *Journal of Mathematics and Music*, 8 (2), 167-182.
- Nunes, T. y Bryant, P. (2003). *Las matemáticas y su aplicación: la perspectiva del niño*. Ciudad de México, México: Siglo veintiuno editores.
- O'Connor, J. (1992). La estructura de la memoria musical, *Revista Música y Educación*, 9, 11-26.
- O'Keefe, K., Dearden, K. N. & West, R. (2016). A Survey of the Music Integration Practices of North Dakota Elementary Classroom Teachers. *Update: Applications of Research in Music Education*, 35 (1), 13-22.
- Oliva, A. (2001). Desarrollo de la personalidad durante la adolescencia. En J. Palacios, A. Marchesi y C. Coll. (Coords.), *Desarrollo psicológico y educación (Volumen 1): Psicología evolutiva* (pp. 471-491). Madrid, España: Alianza Editorial.

- Oliva, A. y Parra, A. (2004). Contexto familiar y desarrollo psicológico durante la adolescencia. En E. Arranz. (Ed.), *Familia y desarrollo psicológico* (pp. 96-123). Madrid, España: Pearson Educación.
- Peck, R. W. (2014). Mathematical music theory pedagogy and the “New Math”. *Journal of Mathematics and Music*, 8 (2), 145-150.
- Peralta, J. (2011). Modelos matemáticos del sistema de afinación pitagórico y algunos de sus derivados: propuesta para el aula. *Educación matemática*, 23 (3), 67-90.
- Pereira, R. (2016). *Análisis de los factores causales relacionados con la competencia matemática: inteligencia verbal e inteligencia no verbal*. (Tesis doctoral). Departamento de Psicología evolutiva y de la educación de la Universidad de A Coruña, A Coruña, España.
- Pérez, F. J. (2001). *La Harmónica de Aristóxeno de Tarento: edición crítica con introducción, traducción y comentario*. (Tesis doctoral). Universidad de Murcia, Murcia, España.
- Praise, S. P. & Meenakshi, K. (2015). The effect of music on human brain in developing learning skills and physical health. *Mediterranean Journal of Social Sciences*, 6 (2), 244-250.
- Radford, L. y André, M. (2009). Cerebro, cognición y matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 12 (2), 215-250.
- Ramos, J. C. (2009). *Modelo de aptitud musical. Análisis y evaluación del enfoque de aprendizaje, la personalidad y la inteligencia emocional en alumnos de 13 a 18 años*. (Tesis doctoral). Departamento de Psicología, Sociología y Filosofía de la Universidad de León, León, España.

- Redondo, P. (2002). *La Harmónica de Claudio Ptolomeo: edición crítica con introducción, traducción y comentario*. (Tesis doctoral). Universidad de Murcia, Murcia, España.
- Rivera, B. V. (1995). Theory ruled by practice: Zarlino's reversal of the classical system of proportions. *Indiana Theory Review*, 16, 145-170.
- Ruthsatz, J., Ruthsatz, K., & Stephens, K. R. (2014a). The cognitive bases of exceptional abilities in child prodigies by domain: Similarities and differences. *Intelligence*, 44, 11-14.
- Ruthsatz, J., Ruthsatz, K., & Stephens, K. R. (2014b). Putting practice into perspective: Child prodigies as evidence of innate talent. *Intelligence*, 45, 60-65.
- Samperio, M. A. (1994). Características de un test de aptitudes musicales para la escuela. *Revista interuniversitaria de formación del profesorado*, 19, 171-178.
- Sanders, E. (2012). Investigating the Relationship Between Musical Training and Mathematical Thinking in Children. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 55, 1134-1143.
- Santamaría, C. y Espino, O. (2006). Pensar en lo verdadero para seleccionar lo falso. *Psicológica*, 27, 195-206.
- Schmithorst, V. J. & Holland, S. K. (2004). The effect of musical training on the neural correlates of math processing: a functional magnetic resonance imaging study in humans. *Neuroscience Letters* 354, 193–196.
- Seashore, C. E., Lewis, D. y Saetveit, J. G. (2008). Manual del Test de Aptitudes Musicales de Seashore. Adaptación española. Madrid, España: TEA Ediciones.

- Segarra, L. (2008). Matemàtiques amb música: aprenem les taules de multiplicar cantant. *Guix. Elements d'acció educativa*, 348, 24-25.
- Sethares, W. A. (2014). The geometry of musical rhythm: What makes a “good” rhythm good? *Journal of Mathematics and the Arts*, 8 (3-4), 135-137.
- Shin, J. (2011). An investigation of participation in weekly music workshops and its relationship to academic self-concept and self-esteem of middle school students in low-income communities. *Contributions to Music Education*, 38 (2), 29-42.
- Sierra, P. y Giménez, M. (2002). Familia y desarrollo psicosocial. En P. Herranz y P. Sierra. (Coords.), *Psicología evolutiva I. Volumen 2, Desarrollo social* (pp. 114-156). Madrid, España: UNED.
- Sloboda J. A. & O'Neill S. A. (2001). Emotions in everyday listening to music. In P. N Juslin & J. A. Sloboda. (Eds.), *Music and emotion: Theory and research* (pp. 415–430). New York, USA: Oxford University Press.
- Smith, R. (1987). *The New Music. The Avant-Garde since 1945*. New York, USA: Oxford University Press.
- Smith, S., Tillman, D., Mishra, P., Slykhuis, D., Alexander, C., Henriksen, D., Church, R. & Goodman, A. (2014). Building Multidisciplinary Connections: Intersections of Content, Creativity, and Digital Fabrication Technologies. In M. Searson & M. Ochoa (Eds.), *Proceedings of Society for Information Technology & Teacher Education International Conference 2014* (pp. 2506-2510).
- Sobol, E. S. (2014). *Autism research: Music aptitude's effect on developmental/academic gains for students with significant cognitive/language delays*. (Ed.D. Dissertation). (3581407). St. John's

University, School of Education and Human Services, Michigan, USA.  
Retrieved from <http://search.proquest.com/docview/1586068132>

Southgate, D. E. & Roscigno, V. J. (2009). The impact of music on childhood and adolescent achievement. *Social science quarterly*, 90 (1), 4-21.

Stewart, L. & Walsh, V. (2001). Neuropsychology: Music of the hemispheres, *Current Biology*, 11 (4), 125–127.

Stewart, L. (2003). *Neurocognitive studies of music reading*. (Ph.D). Department of Psychology, University College London, London, England.

Stewart, L., Henson, R., Kampe, K., Walsh, V., Turner, R. & Frith, U. (2003). Brain changes after learning to read and play music. *Neuroimage*, 20, 71-83.

Suganuma, A. K. (2010). Patent no. 7,709,721. Washington, DC: Google Patents. Retrieved from <https://www.google.com/patents/US7709721>

Szirony, G. M., Burgin, J. S. & Pearson, L. C. (2008). Hemispheric laterality in music and math. *Learning Inquiry*, 2 (3), 169-180.

Tanaka, T. & Fujii, K. (2015). Describing Global Musical Structures by Integer Programming on Musical Patterns. In T. Collins, D. Meredith & A. Volk. (Eds), *Mathematics and computation in music: 5th international conference*, MCM 2015, London, England, june 22-25, 2015, proceedings (pp. 52-63). Berlin, Germany: Springer.

Theorell, T. (2014). *Psychological health effects of musical experiences. Theories, studies and reflections in music health science*. Dordrecht, Netherlands: Springer.

- Thornton, L. (2013). A comparison of state assessment scores between music and nonmusic students. *Update: Applications of Research in Music Education*, 32 (1), 5-11.
- Tillman, D. A., An, S. A., Boren, R., Paez-Paez, C. & Zhang, M. (2015). Employing Rapid Prototyping Design Technologies to Support Contextualized Mathematics Education. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 34 (4), 455-483.
- Torres, J. A. (2009). La música como ciencia. *Revista de Arte y Estética Contemporánea*, 14, 103-112.
- Urreiztieta, C. C. (2013). Experiencia estética y formulación científica: el caso del Harmonices Mundi de Johannes Kepler. *Anuario musical: Revista de musicología del CSIC*, 68, 81-132.
- Vargas, R. A. (2013). Matemáticas y neurociencias: una aproximación al desarrollo del pensamiento matemático desde una perspectiva biológica, *Unión: Revista iberoamericana de educación matemática*, 36, 37-46.
- Venegas, A., Tejada, J., Cádiz, R., Cuadra, P., Thayer-Ojeda, T., Lecaros, A. y Petrovich, M. (2013). Audiográficos: Implementación y evaluación de un programa informático para el aprendizaje de la interpretación y representación matemática de coordenadas a través de la música y el sonido. *Revista Electrónica de Lista Electrónica Europea de Música en la Educación, LEEME*, 32, 153-155.
- Vera, A. (1985). *Las aptitudes musicales*. (Tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid, Madrid, España.
- Vera, A. (1988). Naturaleza de la aptitud musical, *Revista de Musicología*, 11, 171-204.

- Vert, C. (2013). *Las aptitudes y los hábitos musicales de los adolescentes de la Comunidad Valenciana*. (Tesis doctoral). Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, Las Palmas de Gran Canaria, España.
- Vert, C. (2014). *El oído musical y su desarrollo durante la adolescencia*. Sevilla, España: Punto Rojo.
- Vert, C. (2017). La Música y las Matemáticas: un matrimonio secreto. *Sitúate. Revista Digital de Situaciones de Aprendizajes*, N.º 24. Recuperado de <http://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/ecoescuela/sa/2017/04/01/la-musica-y-las-matematicas-un-matrimonio-secreto/>
- Vigotsky, L. (1988). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Ciudad de México, México: Editorial Crítica, Grupo editorial Grijalbo.
- Vila, A. T., Cifre, B. J. y Díaz, A. (2012). Identificación de rasgos en el estilo musical de las sonatas para teclado de Domenico Scarlatti por medio de herramientas matemáticas y tecnológicas. *El artista: revista de investigaciones en música y artes plásticas*, 9, 267-286.
- Vitale, J. L. (2011). Music makes you smarter: A new paradigm for music education? perceptions and perspectives from four groups of elementary education stakeholders. *Canadian Journal of Education/Revue Canadienne de l' Education*, 34 (3), 317-343.
- Vitoria, J.R. (2005). *Aptitudes musicales y aprendizaje instrumental de personas con necesidades educativas especiales*. (Tesis doctoral). E.U. Magisterio de la Universidad del País Vasco, País Vasco, España.
- Volk, A. & Honingh, A. (2012). Mathematical and computational approaches to music: Challenges in an interdisciplinary enterprise. *Journal of Mathematics and Music*, 6, 73-81.

- Wade, C. (2011). *Exploring the development of mathematics patterning skills and concepts in young children who experience integrated music and math lessons*. (Ed.D. Dissertation). University of Houston, Houston, USA. Retrieved from <http://repositories.tdl.org/uh-ir/handle/10657/253>
- Wason, P. C. (1968). Reasoning about a rule. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 20, 273-281.
- Weiss, M. R. (2015). *Background music and cognitive learning effects in mathematics with middle school students*. (Ph.D. Dissertation). Notre Dame of Maryland University, Maryland, USA. Retrieved from <http://gradworks.umi.com/3687583.pdf> (3687583)
- Wiggins, G. A. (2012). Music, mind and mathematics: Theory, reality and formality. *Journal of Mathematics and Music*, 6 (2), 111-123.
- Willems, E. (1985). *L'oreille musicale. La preparation auditive de l'enfant*. (5<sup>o</sup> edition). Fribourg, Suisse: Pro Musical.
- Willems, E. (1992) Naturaleza del oído musical. Oír, escuchar, entender. *Revista Música y Educación*, 11, 23-28.
- Williams, K. E., Barrett, M. S., Welch, G. F., Abad, V. & Broughton, M. (2015). Associations between early shared music activities in the home and later child outcomes: Findings from the longitudinal study of australian children. *Early Childhood Research Quarterly*, 31, 113-124.
- Whorley, R. & Conklin, D. (2015). Improved iterative random walk for four-part harmonization. In T. Collins, D. Meredith & A. Volk. (Eds), *Mathematics and computation in music: 5th international conference*, MCM 2015, London, England, june 22-25, 2015, proceedings (pp. 64-70). Berlin, Germany: Springer.

- Xenakis, I. (1992). *Formalized music: thought and mathematics in composition: harmonologia series nº. 6*. New York, USA: Pendragon Press.
- Yang, P. (2015). The impact of music on educational attainment. *Journal of Cultural Economics*, 39 (4), 369-396.
- Yoho, C. (2011). Using music to increase math skill retention. *Journal of the American Academy of Special Education Professionals*, 146-151. Retrieved from <http://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1136896.pdf>
- Zakaryan, D. (2011). *Oportunidades de aprendizaje y competencias matemáticas de estudiantes de 15 años. Un estudio de casos*. (Tesis doctoral). Departamento de expresión musical, plástica, corporal y sus didácticas de la Universidad de Huelva, Huelva, España.
- Zatorre, R. J. (2013). Predispositions and plasticity in music and speech learning: neuronal correlates and implications. *Science*, 342, 585-589.
- Zelenkovska, S. & Islam, A. (2015). The significant role of music in the educational system through the various scientific disciplines. *International Journal of Sciences: Basic and Applied Research*, 22 (1), 354-359.
- Zhou, G. & Kim, J. (2010). Impact of an integrated methods course on preservice teachers' perspectives of curriculum integration and faculty instructors' professional growth. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 10 (2), 123-138.

Anexo I-a. Hoja de respuestas del Test de Seashore

N.º 56

(a)

**TESTS DE APTITUDES MUSICALES**  
SEASHORE - Revisión 1960  
**Hoja de Respuestas**

Tests	P. D.	Cantid.
Tono		
Intensidad		
Ritmo		
Tiempo		
Timbre		
Memoria Tonal		

G. normativo: \_\_\_\_\_

TONO					
	1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª
1	A B	A B	A B	A B	A B
2	A B	A B	A B	A B	A B
3	A B	A B	A B	A B	A B
4	A B	A B	A B	A B	A B
5	A B	A B	A B	A B	A B
6	A B	A B	A B	A B	A B
7	A B	A B	A B	A B	A B
8	A B	A B	A B	A B	A B
9	A B	A B	A B	A B	A B
10	A B	A B	A B	A B	A B

RITMO			
	1.ª	2.ª	3.ª
1	I D	I D	I D
2	I D	I D	I D
3	I D	I D	I D
4	I D	I D	I D
5	I D	I D	I D
6	I D	I D	I D
7	I D	I D	I D
8	I D	I D	I D
9	I D	I D	I D
10	I D	I D	I D

En cada test, coloque sus respuestas una debajo de otra en la columna 1.ª hasta que esté completa, luego en la columna 2.ª, y así sucesivamente en las otras columnas.

INTENSIDAD					
	1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª
1	F D	F D	F D	F D	F D
2	F D	F D	F D	F D	F D
3	F D	F D	F D	F D	F D
4	F D	F D	F D	F D	F D
5	F D	F D	F D	F D	F D
6	F D	F D	F D	F D	F D
7	F D	F D	F D	F D	F D
8	F D	F D	F D	F D	F D
9	F D	F D	F D	F D	F D
10	F D	F D	F D	F D	F D

Perfil individual						
Percentil	TONO	INTENSIDAD	RITMO	TIEMPO	TIMBRE	MEMORIA TONAL
	99					
95						
90						
80						
75						
70						
60						
50						
40						
30						
25						
20						
10						
5						
1						

Nombre .....  
 Profesión ..... Ciudad ..... Sexo .....  
 Fecha ..... Edad ..... Y.M.  
 Ultimo curso o estudios seguidos .....

(b)

Figura Nº 51. Hoja de respuestas del Test de Seashore -Cara A-

a

TIEMPO

	1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª
1	L C	L C	L C	L C	L C
2	L C	L C	L C	L C	L C
3	L C	L C	L C	L C	L C
4	L C	L C	L C	L C	L C
5	L C	L C	L C	L C	L C
6	L C	L C	L C	L C	L C
7	L C	L C	L C	L C	L C
8	L C	L C	L C	L C	L C
9	L C	L C	L C	L C	L C
10	L C	L C	L C	L C	L C

MEMORIA TONAL

	A	C
1	1 2 3	1 2 3 4 5
2	1 2 3	1 2 3 4 5
3	1 2 3	1 2 3 4 5
4	1 2 3	1 2 3 4 5
5	1 2 3	1 2 3 4 5
6	1 2 3	1 2 3 4 5
7	1 2 3	1 2 3 4 5
8	1 2 3	1 2 3 4 5
9	1 2 3	1 2 3 4 5
10	1 2 3	1 2 3 4 5

P. D.	
Tests	
Tiempo	
Timbre	
Memoria Tonal	

En cada test, coloque sus respuestas una debajo de otra hasta completar cada columna antes de pasar a la siguiente.

TIMBRE

	1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª
1	I D	I D	I D	I D	I D
2	I D	I D	I D	I D	I D
3	I D	I D	I D	I D	I D
4	I D	I D	I D	I D	I D
5	I D	I D	I D	I D	I D
6	I D	I D	I D	I D	I D
7	I D	I D	I D	I D	I D
8	I D	I D	I D	I D	I D
9	I D	I D	I D	I D	I D
10	I D	I D	I D	I D	I D

	B
1	1 2 3 4
2	1 2 3 4
3	1 2 3 4
4	1 2 3 4
5	1 2 3 4
6	1 2 3 4
7	1 2 3 4
8	1 2 3 4
9	1 2 3 4
10	1 2 3 4

b



Copyright © 1960 by The Psychological Corporation, U.S.A.  
 Edita: TEA Ediciones, S.A.; Fray Bernardino de Sahagún, 24; 28036 MADRID - Prohibida la reproducción total o parcial. Todos los derechos reservados - Este ejemplar está impreso en tinta azul. Si le presentan otro en tinta negra, es una reproducción ilegal. En beneficio de la profesión y en el suyo propio, NO LA UTILICE - Printed in Spain. Impreso en España por Aguirre Campano; Daganzo, 15 dpdo.; 28002 MADRID - Depósito

Figura Nº 52. Hoja de respuestas del Test de Seashore -Cara B-

## Anexo I-b. Baremos de PD/Centiles del Test de Seashore

### Escolares de 6.º, 7.º y 8.º de EGB (Equivalentes a 6.º de Primaria y 1.º y 2.º de Secundaria)

Centiles	Altura	Intensidad	Ritmo	Tiempo	Timbre	M.Tonal	Eneatipos
99	46-50	49-50	30	47-50	43-50	30	9
97	44	47	-	46	42	-	9
96	43	-	-	45	41	-	8
95	42	46	-	44	40	29	8
90	39	45	29	43	38	28	8
89	38	-	-	42	-	-	7
85	37	44	-	41	37	27	7
80	36	43	28	-	36	26	7
77	35	-	-	40	-	-	6
75	34	42	-	-	35	25	6
70	33	41	27	39	34	24	6
65	32	-	-	38	33	23	6
60	-	40	-	-	-	-	5
55	31	-	26	37	32	22	5
50	30	39	-	36	-	21	5
45	29	38	25	-	-	20	5
40	28	-	-	35	31	-	4
34	27	37	24	34	30	19	4
30	26	-	-	-	29	18	4
25	25	36	23	33	-	17	4
23	24	35	-	32	28	16	3
20	23	34	22	31	27	15	3
15	22	33	21	30	-	14	3
11	21	32	-	29	26	12	2
10	20	31	20	28	25	11	2
5	18	28	18	26	23	10	2
4	17	27	17	25	22	9	1
1	0-13	0-21	0-14	0-21	0-20	0-7	1
N	3.644	2.291	3648	2177	2202	3643	N
Media	29,47	38,24	24,83	35,76	31,45	20,34	Media
Dt	7,16	5,49	3,46	5,39	4,93	5,9	Dt

Tabla Nº 76. Baremación de los escolares de 6º, 7º y 8º de EGB



## Anexo II-a. Test de aptitud numérica del BAT-7 Nivel E

## Nivel E

## N

## Instrucciones

En esta prueba encontrarás distintos ejercicios numéricos que tendrás que resolver. Para ello tendrás que analizar la información que se presenta y determinar qué debe aparecer en lugar del interrogante. Cuando lo hayas decidido, deberás marcar la letra de la opción correspondiente (A, B, C, D o E) en la hoja de respuestas, en la **columna N**, asegurándote de que coincida con el ejercicio que estás contestando. Ten en cuenta que en este ejercicio hay 5 posibles opciones de respuesta.

En un primer tipo de ejercicios aparecerá una igualdad numérica en la que se ha sustituido uno de los elementos por un interrogante (?). Tu tarea consistirá en averiguar qué valor numérico debe aparecer en lugar del interrogante para que se cumpla la igualdad.

Fíjate en el **ejemplo N1**.

**N1. ¿Qué número debe aparecer en lugar del interrogante (?) para que se cumpla la igualdad?**

$$16 - 4 = ? + 2$$

A. 8      B. 10      C. 12      D. 14      E. 16

La primera parte de la igualdad,  $16 - 4$ , da lugar a 12. Para que en la segunda parte se obtenga el mismo resultado sería necesario sustituir el interrogante por 10, quedando la igualdad como  $16 - 4 = 10 + 2$ . Por tanto, la respuesta correcta a **N1** sería la **B**, opción que ya se ha marcado en la **columna N** de la hoja de respuestas.

En otros ejercicios tendrás que observar una serie de números ordenados de acuerdo con una ley y determinar cuál debe continuar la serie ocupando el lugar del interrogante.

Fíjate en el **ejemplo N2**.

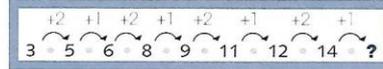
**N2. ¿Qué número debe aparecer en lugar del interrogante (?) de modo que continúe la serie?**

$$3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 14 \cdot ?$$

A. 13      B. 15      C. 16      D. 18      E. 20

Figura Nº 53. Test de aptitud numérica del BAT-7 Nivel E

En este ejemplo la serie combina aumentos de 2 unidades y de 1 unidad (+2, +1, +2, +1...). Como puede observarse, en el lugar del interrogante debe aumentarse 1 unidad con respecto al número anterior, por lo que el número que continuaría la serie sería el 15. Por tanto, la respuesta correcta a **N2** es **B**.



Marca ahora la respuesta a este ejemplo en la hoja de respuestas en el espacio correspondiente al **ejemplo N2** de la **columna N**.

Finalmente, en un tercer tipo de ejercicios, aparecen tablas en las que un valor se ha sustituido intencionadamente por un interrogante (?) y otros valores han sido borrados («»). Tu tarea consistirá en averiguar el número que debería aparecer en lugar del interrogante.

Fijate en el **ejemplo N3**.

**N3. De acuerdo con los datos de la tabla, ¿qué número debe aparecer en lugar del interrogante (?)?**

Puntos obtenidos en la compra				
Artículo	Unidades	Puntos/Unidad	Total puntos	
Jabón	10	?	30	A. 3
Aceite	20	2	<del>      </del>	B. 5
			<b>70</b>	C. 10
				D. 40
				E. 60

A partir de los datos de la tabla sabemos que se han comprado 10 unidades de jabón y que se han obtenido 30 puntos, por lo que se puede deducir que el valor del interrogante es igual a 3 (10 unidades x 3 puntos/unidad = 30 puntos). Por tanto, la respuesta correcta al **ejemplo N3** es **A**; mácala ahora en la **columna N** de la hoja de respuestas. Fijate que en este ejemplo no es necesario calcular el valor que ha sido borrado para obtener el valor del interrogante, pero en otros ejercicios sí será necesario calcular todos o algunos de estos valores para alcanzar la solución.

Cuando comience la prueba encontrarás más ejercicios como estos. El tiempo máximo para su realización es de **20 minutos**, por lo que deberás trabajar rápidamente, esforzándote al máximo en encontrar la respuesta correcta. Si en algún ejercicio no estás completamente seguro de cuál puede ser, elige la opción que creas que es más correcta de las cinco que aparecen; no se penalizará el error.

Si terminas antes del tiempo concedido, repasa tus respuestas, pero **NO** continúes con las demás pruebas.



**Espera a las instrucciones del examinador.**

31

**Figura Nº 54. Test de aptitud numérica del BAT-7 Nivel E**

Nivel E  
**N**  
BAT-7

En los ejercicios 1 a 5, ¿qué número debe aparecer en lugar del interrogante (?) para que se cumpla la igualdad?

1  $6 + 22 = 30 - ?$   
A. 2    B. 8    C. 10    D. 12    E. 28

2  $18 - 6 = 16 - ?$   
A. 2    B. 3    C. 4    D. 6    E. 10

3  $7^2 - 9 = ? \times 2$   
A. 2    B. 7    C. 10    D. 20    E. 40

4  $(6 + 8) \times ? = 4 \times 7$   
A. 2    B. 3    C. 4    D. 7    E. 10

5  $(3 + 9) \times 3 = (? \times 2) \times 6$   
A. 1    B. 2    C. 3    D. 4    E. 6

En los ejercicios 6 a 10, ¿qué número debe aparecer en lugar del interrogante (?) de modo que continúe la serie?

6  $23 \cdot 18 \cdot 14 \cdot 11 \cdot ?$   
A. 5    B. 6    C. 7    D. 8    E. 9

7  $9 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 13 \cdot ?$   
A. 11    B. 12    C. 13    D. 14    E. 15

8  $2 \cdot 6 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 24 \cdot 32 \cdot ?$   
A. 36    B. 37    C. 40    D. 41    E. 42

9  $21 \cdot 23 \cdot 20 \cdot 24 \cdot 19 \cdot 25 \cdot 18 \cdot ?$   
A. 16    B. 20    C. 21    D. 22    E. 26

10  $16 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 20 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 24 \cdot 12 \cdot ?$   
A. 4    B. 6    C. 14    D. 24    E. 25

32

Figura Nº 55. Test de aptitud numérica del BAT-7 Nivel E

En los ejercicios 11 a 15, ¿qué número debe aparecer en lugar del interrogante (?) a partir de los datos de la tabla?

11 Puntos obtenidos en la compra				A. 4
Artículo	Unidades	Puntos/Unidad	Total puntos	B. 40
Café	55	15	<b>825</b>	C. 60
Galletas	?	6	<b>240</b>	D. 75
Sal	20	5	<b>100</b>	E. 234
			<b>1.165</b>	

12 Venta de productos por meses					A. 10
	Televisión	Altavoces	Auriculares	Total	B. 20
Meses	Enero	?	<del>    </del>	35	<b>85</b>
	Febrero	45	<del>    </del>	80	<b>175</b>
	Marzo	60	45	<del>    </del>	<del>    </del>
	Total	<b>125</b>	<del>    </del>	<b>155</b>	<del>    </del>

13 Venta de productos por meses					A. 30
	Secadoras	Lavadoras	Frigoríficos	Total	B. 45
Meses	Enero	<del>    </del>	<del>    </del>	30	<b>90</b>
	Febrero	5	40	25	<b>70</b>
	Marzo	<del>    </del>	30	35	<b>105</b>
	Abril	50	45	?	<del>    </del>
Total	<del>    </del>	<b>155</b>	<b>145</b>	<del>    </del>	<b>90</b>

14 Venta de productos por meses					A. 10
	Televisión	Altavoces	Auriculares	Total	B. 15
Meses	Abril	5	8	<del>    </del>	<b>33</b>
	Mayo	<del>    </del>	15	5	<b>30</b>
	Junio	10	<del>    </del>	<del>    </del>	<del>    </del>
	Total	?	<b>38</b>	<b>32</b>	<del>    </del>

15 Venta de productos por meses					A. 10
	Televisión	Altavoces	Auriculares	Total	B. 15
Meses	Enero	20	<del>    </del>	15	<del>    </del>
	Febrero	?	30	<del>    </del>	<b>70</b>
	Marzo	20	<del>    </del>	30	<del>    </del>
	Abril	<del>    </del>	15	10	<b>55</b>
Total	<b>85</b>	<del>    </del>	<b>80</b>	<del>    </del>	<b>45</b>

33

No te detengas. Pasa la página y continúa respondiendo. → → →

Figura Nº 56. Test de aptitud numérica del BAT-7 Nivel E



En los ejercicios 16 a 20, ¿qué número debe aparecer en lugar del interrogante (?) para que se cumpla la igualdad?

16  $(30 : 5) : (14 : 7) = [(? \times 5) + 3] : 11$

- A. 1    B. 2    C. 3    D. 4    E. 6

17  $[(23 - 9) - 4] \times 2 = [(? : 6) - 3] \times 5$

- A. 7    B. 20    C. 24    D. 30    E. 42

18  $20 + 35 - 14 = (? \times 2) - 19$

- A. 11    B. 25    C. 30    D. 35    E. 60

19  $(9 \times 7) : (? - 2) = 9 + 7 + 5$

- A. 3    B. 4    C. 5    D. 6    E. 12

20  $[(? : 7) - 3] : 2 = 21 : 7$

- A. 2    B. 9    C. 42    D. 49    E. 63

En los ejercicios 21 a 26, ¿qué número debe aparecer en lugar del interrogante (?) de modo que continúe la serie?

21  $14 \cdot 11 \cdot 15 \cdot 12 \cdot 17 \cdot 14 \cdot 20 \cdot 17 \cdot 24 \cdot 21 \cdot ?$

- A. 18    B. 25    C. 26    D. 27    E. 29

22  $2 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 16 \cdot 8 \cdot ?$

- A. 4    B. 14    C. 24    D. 26    E. 32

23  $5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 18 \cdot 24 \cdot 23 \cdot ?$

- A. 22    B. 24    C. 26    D. 28    E. 30

24  $11 \cdot 13 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 19 \cdot 24 \cdot 22 \cdot ?$

- A. 23    B. 24    C. 25    D. 26    E. 28

25  $3 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 6 \cdot ?$

- A. 4    B. 9    C. 10    D. 11    E. 12

26  $3 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 24 \cdot 16 \cdot 48 \cdot 32 \cdot 96 \cdot ?$

- A. 64    B. 80    C. 89    D. 92    E. 95

34

Figura Nº 57. Test de aptitud numérica del BAT-7 Nivel E

En los ejercicios 27 a 32, ¿qué número debe aparecer en lugar del interrogante (?) a partir de los datos de la tabla?

27		Venta de productos por meses				A. 60
		Plancha	Depiladora	Afeitadora	Total	B. 65
Meses	Mayo	20	5	<del>   </del>	<b>40</b>	C. 75
	Junio	<del>   </del>	<del>   </del>	10	<del>   </del>	D. 90
	Abril	<del>   </del>	5	5	<b>25</b>	E. 95
	Total	<b>40</b>	<b>20</b>	<del>   </del>	<b>?</b>	

28		Venta de productos por meses				A. 10
		Hornos	Microondas	Vitrocerámica	Total	B. 15
Meses	Septiembre	25	40	5	<b>70</b>	C. 20
	Octubre	<del>   </del>	45	50	<del>   </del>	D. 30
	Noviembre	30	<del>   </del>	<b>?</b>	<b>90</b>	E. 60
	Diciembre	35	30	<del>   </del>	<b>105</b>	
Total	<b>145</b>	<b>155</b>	<del>   </del>	<del>   </del>		

29		Venta de productos por meses				A. 5
		Cafetera	Tostadora	Freidora	Total	B. 10
Meses	Enero	<del>   </del>	5	20	<b>35</b>	C. 15
	Febrero	5	<del>   </del>	<del>   </del>	<b>30</b>	D. 20
	Marzo	15	30	<b>?</b>	<del>   </del>	E. 25
	Total	<del>   </del>	<b>55</b>	<b>40</b>	<del>   </del>	

30		Puntos obtenidos en la compra				A. 26
		Artículo	Unidades	Puntos/Unidad	Total puntos	B. 265
	Chocolate		5	225	<b>1.125</b>	C. 270
	Harina		6	<b>?</b>	<del>   </del>	D. 280
	Nueces		8	140	<del>   </del>	E. 1.680
	Total				<b>3.925</b>	

31		Venta de productos por meses				A. 25
		Hornos	Microondas	Vitrocerámica	Total	B. 35
Meses	Mayo	<del>   </del>	15	20	<b>45</b>	C. 40
	Junio	15	10	<del>   </del>	<b>55</b>	D. 45
	Julio	<del>   </del>	5	20	<del>   </del>	E. 50
	Agosto	10	<del>   </del>	10	<b>25</b>	
	Total	<b>?</b>	<del>   </del>	<b>80</b>	<b>155</b>	

32		Puntos obtenidos en la compra				A. 0,03
		Artículo	Unidades	Puntos/Unidad	Total puntos	B. 0,1
	Grapa		2.500	0,05	<b>125</b>	C. 0,2
	Chincheta		3.000	<b>?</b>	<del>   </del>	D. 0,5
	Tornillo		1.200	0,1	<del>   </del>	E. 5
	Total				<b>845</b>	

35



FIN DE LA PRUEBA. SI HAS TERMINADO ANTES DEL TIEMPO CONCEDIDO, REPASA TUS CONTESTACIONES.

Figura Nº 58. Test de aptitud numérica del BAT-7 Nivel E

**Anexo II-b. Baremos de PD/Centiles del BAT-7 Nivel E****1.º ESO (nivel E, 12 a 13 años)**

<b>Centiles</b>	<b>Factor -N-</b>
99	28-32
98	27
97	26
96	25
95	24
90	22-23
85	20-21
80	19
75	18
70	17
65	16
60	15
55	14
50	13
45	12
40	11
35	10
30	-
25	9
20	8
15	7
10	6
5	5
4	-
3	4
2	-
1	0-3
<b>N</b>	<b>835</b>
<b>Media</b>	<b>13,60</b>
<b>Dt</b>	<b>5,92</b>

**Tabla Nº 77. Baremación 1.º ESO (nivel E, 12 a 13 años)**

## Baremos de PD/Centiles del BAT-7 Nivel E

### 2.º ESO (nivel E, 13 a 14 años)

Centiles	Factor -N-
99	29-32
98	28
97	27
96	26
95	25
90	24
85	22-23
80	21
75	-
70	19-20
65	17-18
60	-
55	16
50	15
45	14
40	13
35	-
30	12
25	10-11
20	9
15	8
10	7
5	5-6
4	-
3	-
2	4
1	0-3
<b>N</b>	<b>700</b>
<b>Media</b>	<b>15,13</b>
<b>Dt</b>	<b>6,17</b>

**Tabla Nº 78.** Baremación 2.º ESO (nivel E, 13 a 14 años)

## Anexo III-a. Test de aptitud numérica del BAT-7 Nivel M

## Nivel M

## N

## Instrucciones

En esta prueba encontrarás distintos ejercicios numéricos que tendrás que resolver. Para ello tendrás que analizar la información que se presenta y determinar qué debe aparecer en lugar del interrogante. Cuando lo hayas decidido, deberás marcar la letra de la opción correspondiente (A, B, C, D o E) en la hoja de respuestas, en la **columna N**, asegurándote de que coincida con el ejercicio que estás contestando. Ten en cuenta que en este ejercicio hay 5 posibles opciones de respuesta.

En un primer tipo de ejercicios aparecerá una igualdad numérica en la que se ha sustituido uno de los elementos por un interrogante (?). Tu tarea consistirá en averiguar qué valor numérico debe aparecer en lugar del interrogante para que se cumpla la igualdad.

Fíjate en el **ejemplo N1**.

**N1. ¿Qué número debe aparecer en lugar del interrogante (?) para que se cumpla la igualdad?**

$$16 - 4 = ? + 2$$

A. 8    B. 10    C. 12    D. 14    E. 16

La primera parte de la igualdad,  $16 - 4$ , da lugar a 12. Para que en la segunda parte se obtenga el mismo resultado sería necesario sustituir el interrogante por 10, quedando la igualdad como  $16 - 4 = 10 + 2$ . Por tanto, la respuesta correcta a N1 sería la **B**, opción que ya se ha marcado en la **columna N** de la hoja de respuestas.

En otros ejercicios tendrás que observar una serie de números ordenados de acuerdo con una ley y determinar cuál debe continuar la serie ocupando el lugar del interrogante.

Fíjate en el **ejemplo N2**.

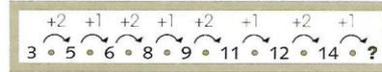
**N2. ¿Qué número debe aparecer en lugar del interrogante (?) de modo que continúe la serie?**

3 • 5 • 6 • 8 • 9 • 11 • 12 • 14 • ?

A. 13    B. 15    C. 16    D. 18    E. 20

Figura Nº 59. Test de aptitud numérica del BAT-7 Nivel M

En este ejemplo la serie combina aumentos de 2 unidades y de 1 unidad (+2, +1, +2, +1...). Como puede observarse, en el lugar del interrogante debe aumentarse 1 unidad con respecto al número anterior, por lo que el número que continuaría la serie sería el 15. Por tanto, la respuesta correcta a **N2** es **B**.



Marca ahora la respuesta a este ejemplo en la hoja de respuestas, en el espacio correspondiente al **ejemplo N2** de la **columna N**.

Finalmente, en un tercer tipo de ejercicios, aparecen tablas en las que un valor se ha sustituido intencionadamente por un interrogante (?) y otros valores han sido borrados («»). Tu tarea consistirá en averiguar el número que debería aparecer en lugar del interrogante.

Fíjate en el **ejemplo N3**.

**N3. De acuerdo con los datos de la tabla, ¿qué número debe aparecer en lugar del interrogante (?)?**

Puntos obtenidos en la compra				
Artículo	Unidades	Puntos/Unidad	Total puntos	
Jabón	10	?	30	A. 3
Aceite	20	2	<del>      </del>	B. 5
			70	C. 10
				D. 40
				E. 60

A partir de los datos de la tabla sabemos que se han comprado 10 unidades de jabón y que se han obtenido 30 puntos, por lo que se puede deducir que el valor del interrogante es igual a 3 (10 unidades x 3 puntos/unidad = 30 puntos). Por tanto, la respuesta correcta al **ejemplo N3** es **A**; márcala ahora en la **columna N** de la hoja de respuestas. Fíjate que en este ejemplo no es necesario calcular el valor que ha sido borrado para obtener el valor del interrogante, pero en otros ejercicios sí será necesario calcular todos o algunos de estos valores para alcanzar la solución.

Cuando comience la prueba encontrarás más ejercicios como estos. El tiempo máximo para su realización es de **20 minutos**, por lo que deberás trabajar rápidamente, esforzándote al máximo en encontrar la respuesta correcta. Si en algún ejercicio no estás completamente seguro de cuál puede ser, elige la opción que creas que es más correcta de las cinco que aparecen; no se penalizará el error.

Si terminas antes del tiempo concedido, repasa tus respuestas, pero **NO** continúes con las demás pruebas.



**Espera a las instrucciones del examinador.**

31

**Figura Nº 60.** Test de aptitud numérica del BAT-7 Nivel M

Nivel M  
**N**  
**BV**

En los ejercicios 1 a 5, ¿qué número debe aparecer en lugar del interrogante (?) para que se cumpla la igualdad?

1  $14 \times 3 = 6 \times ?$   
A. 6    B. 7    C. 8    D. 9    E. 42

2  $(4 + 8) \times 3 = (3 \times 3) \times ?$   
A. 2    B. 3    C. 4    D. 6    E. 9

3  $100 : 4 = ?^2$   
A. 4    B. 5    C. 10    D. 25    E. 50

4  $? - 12 = 16 + 7 - 13$   
A. 2    B. 12    C. 22    D. 25    E. 28

5  $250 : 5 = 5 \times ?$   
A. 5    B. 10    C. 15    D. 25    E. 50

En los ejercicios 6 a 10, ¿qué número debe aparecer en lugar del interrogante (?) de modo que continúe la serie?

6  $16 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 20 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 24 \cdot 12 \cdot ?$   
A. 4    B. 6    C. 14    D. 24    E. 25

7  $2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 30 \cdot 31 \cdot ?$   
A. 32    B. 34    C. 38    D. 61    E. 62

8  $100 \cdot 50 \cdot 60 \cdot 30 \cdot 40 \cdot 20 \cdot ?$   
A. 5    B. 7    C. 10    D. 15    E. 30

9  $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 6 \cdot ?$   
A. 3    B. 4    C. 5    D. 7    E. 8

10  $62 \cdot 68 \cdot 64 \cdot 32 \cdot 38 \cdot 34 \cdot 17 \cdot 23 \cdot ?$   
A. 11    B. 17    C. 19    D. 21    E. 29

32

Figura Nº 61. Test de aptitud numérica del BAT-7 Nivel M

En los ejercicios 11 a 15, ¿qué número debe aparecer en lugar del interrogante (?) a partir de los datos de la tabla?

**11** Venta de productos por meses

		Secadoras	Lavadoras	Frigoríficos	Total
Meses	Enero	█	█	30	<b>90</b>
	Febrero	5	40	25	<b>70</b>
	Marzo	█	30	35	<b>105</b>
	Abril	50	45	?	█
	Total	█	<b>155</b>	<b>145</b>	█

A. 30  
B. 45  
C. 55  
D. 65  
E. 90

**12** Venta de productos por meses

		Ventiladores	Estufas	Aspiradoras	Total
Meses	Abril	5	8	█	<b>33</b>
	Mayo	█	15	5	<b>30</b>
	Junio	10	█	█	█
	Total	?	<b>38</b>	<b>32</b>	█

A. 10  
B. 15  
C. 20  
D. 25  
E. 30

**13** Venta de productos por meses

		Cámara	Impresora	Escáner	Total
Meses	Enero	20	█	15	█
	Febrero	?	30	█	<b>70</b>
	Marzo	20	█	30	█
	Abril	█	15	10	<b>55</b>
	Total	<b>85</b>	█	<b>80</b>	█

A. 10  
B. 15  
C. 25  
D. 40  
E. 45

**14** Venta de productos por meses

		Televisión	Altavoces	Auriculares	Total
Meses	Julio	█	█	5	<b>35</b>
	Agosto	5	█	10	<b>30</b>
	Septiembre	15	5	█	█
	Total	<b>30</b>	█	<b>35</b>	?

A. 40  
B. 65  
C. 95  
D. 100  
E. 105

**15** Venta de productos por meses

		Televisión	Altavoces	Auriculares	Total
Meses	Octubre	█	?	15	<b>60</b>
	Noviembre	█	10	10	<b>30</b>
	Diciembre	20	20	█	█
	Total	<b>45</b>	█	<b>30</b>	█

A. 4  
B. 5  
C. 15  
D. 30  
E. 45

33

No te detengas. Pasa la página y continúa respondiendo. → → →

Figura Nº 62. Test de aptitud numérica del BAT-7 Nivel M



En los ejercicios 16 a 20, ¿qué número debe aparecer en lugar del interrogante (?) para que se cumpla la igualdad?

16  $(2 \times 9) - 11 = [(9 + ?) : 2] - 1$

- A. 3    B. 5    C. 7    D. 9    E. 16

17  $[(? \times 2) - 7] + 4 = (7 \times 2) + 11$

- A. 6    B. 7    C. 9    D. 14    E. 16

18  $\{[(? \times 4) : 3] - 5\} \times 5 = (13 + 19 - 2) : 2$

- A. 2    B. 3    C. 6    D. 8    E. 15

19  $30 + 25 - 16 = [(? \times 2) : 4] - 1$

- A. 5    B. 20    C. 40    D. 80    E. 160

20  $(? - 5)^2 : 8 = 42 : 21$

- A. 3    B. 7    C. 9    D. 13    E. 41

En los ejercicios 21 a 26, ¿qué número debe aparecer en lugar del interrogante (?) de modo que continúe la serie?

21  $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 54 \cdot ?$

- A. 35    B. 53    C. 55    D. 56    E. 108

22  $48 \cdot 47 \cdot 49 \cdot 46 \cdot 50 \cdot 45 \cdot 51 \cdot 44 \cdot 52 \cdot 43 \cdot ?$

- A. 42    B. 50    C. 51    D. 52    E. 53

23  $3 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 24 \cdot 16 \cdot 48 \cdot 32 \cdot 96 \cdot ?$

- A. 64    B. 80    C. 89    D. 92    E. 95

24  $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 6 \cdot 8 \cdot ?$

- A. 4    B. 5    C. 10    D. 13    E. 16

25  $52 \cdot 50 \cdot 46 \cdot 52 \cdot 60 \cdot 50 \cdot 38 \cdot 52 \cdot 68 \cdot 50 \cdot ?$

- A. 14    B. 30    C. 48    D. 52    E. 70

26  $39 \cdot 40 \cdot 38 \cdot 19 \cdot 22 \cdot 18 \cdot 9 \cdot 14 \cdot 8 \cdot 4 \cdot ?$

- A. 2    B. 5    C. 7    D. 10    E. 11

34

Figura Nº 63. Test de aptitud numérica del BAT-7 Nivel M

En los ejercicios 27 a 32, ¿qué número debe aparecer en lugar del interrogante (?) a partir de los datos de la tabla?

**27** **Venta de productos por meses**

		Plancha	Depiladora	Afeitadora	Total
Meses	Mayo	20	5	?	40
	Junio	?	?	10	?
	Abril	?	5	5	25
	Total	40	20	?	?

A. 60  
B. 65  
C. 75  
D. 90  
E. 95

**28** **Venta de productos por meses**

		Hornos	Microondas	Vitrocéramica	Total
Meses	Septiembre	25	40	5	70
	Octubre	?	45	50	?
	Noviembre	30	?	?	90
	Diciembre	35	30	?	105
Total		145	155	?	?

A. 10  
B. 15  
C. 20  
D. 30  
E. 60

**29** **Venta de productos por meses**

		Cafetera	Tostadora	Freidora	Total
Meses	Enero	?	5	20	35
	Febrero	5	?	?	30
	Marzo	15	30	?	?
	Total	?	55	40	?

A. 5  
B. 10  
C. 15  
D. 20  
E. 25

**30** **Puntos obtenidos en la compra**

Artículo	Unidades	Puntos/Unidad	Total puntos
Chocolate	5	225	?
Harina	6	?	?
Nueces	8	140	?
			3.925

A. 26  
B. 265  
C. 270  
D. 280  
E. 1.680

**31** **Venta de productos por meses**

		Armarios	Mesas	Sillas	Total
Meses	Mayo	?	15	20	45
	Junio	15	10	?	55
	Julio	?	5	20	?
	Agosto	10	?	10	25
	Total	?	?	80	155

A. 25  
B. 35  
C. 40  
D. 45  
E. 50

**32** **Puntos obtenidos en la compra**

Artículo	Unidades	Puntos/Unidad	Total puntos
Grapa	2.500	0,05	125
Chincheta	3.000	?	?
Tornillo	1.200	0,1	?
			845

A. 0,03  
B. 0,1  
C. 0,2  
D. 0,5  
E. 5

35



FIN DE LA PRUEBA. SI HAS TERMINADO ANTES DEL TIEMPO CONCEDIDO, REPASA TUS CONTESTACIONES.

Figura Nº 64. Test de aptitud numérica del BAT-7 Nivel M

### Anexo III-b. Baremos de PD/Centiles del BAT-7 Nivel M

#### 3.º ESO (nivel M, 14 a 15 años)

Centiles	Factor -N-
99	29-32
98	28
97	27
96	-
95	26
90	24-25
85	22-23
80	21
75	20
70	19
65	18
60	17
55	16
50	15
45	-
40	14
35	13
30	12
25	11
20	10
15	9
10	8
5	6-7
4	-
3	5
2	4
1	0-3
<b>N</b>	<b>767</b>
<b>Media</b>	<b>15,52</b>
<b>Dt</b>	<b>5,94</b>

**Tabla Nº 79.** Baremación 3.º ESO (nivel M, 14 a 15 años)

## Baremos de PD/Centiles del BAT-7 Nivel M

### 4.º ESO (nivel M, 15 a 16 años)

Centiles	Factor -N-
99	30-32
98	29
97	28
96	-
95	27
90	25-26
85	23-24
80	22
75	21
70	20
65	19
60	18
55	17
50	16
45	15
40	14
35	-
30	-
25	12-13
20	10-11
15	9
10	8
5	6-7
4	-
3	5
2	4
1	0-3
<b>N</b>	<b>567</b>
<b>Media</b>	<b>16,16</b>
<b>Dt</b>	<b>6,39</b>

**Tabla Nº 80.** Baremación 4.º ESO (nivel M, 15 a 16 años)

## Anexo IV. Situación de aprendizaje



### SITUACIÓN DE APRENDIZAJE La Música y las Matemáticas: un matrimonio secreto

#### Sinopsis

En esta situación de aprendizaje vamos a abordar la relación existente entre la Música y las Matemáticas, desde dos puntos de vista, en primer término teórico (el **alumnado va a aprender el origen teórico de la relación existente entre la música y las matemáticas**) y posteriormente práctico (el **alumnado va a aplicar los conocimientos teóricos obtenidos en la creación de una composición musical**). Nos basaremos en las teorías de Pitágoras y su Hermandad, construiremos el Monocordio que utilizó Ramos de Pareja en sus experimentos, comprobaremos un Vals según el sistema de composición basado en la probabilidad que Mozart utilizó en su juego de dados, para terminar interpretando nuestra propia composición.

#### Datos técnicos

**Autoría:** Carlos Vert Alcover  
**Centro educativo:** IES SAN BARTOLOMÉ  
**Tipo de Situación de Aprendizaje:** Tareas  
**Estudio:** 2º Educación Secundaria Obligatoria (LOMCE)  
**Materias:** Matemáticas (MAT), Tecnología (TEP), Música (MUS)

#### Identificación

**Justificación:** De entre lo más destacado que nos dejó Pitágoras y su Hermandad, fue la división del currículo en Quadrivium (Aritmética, Música, Geometría y Astronomía) y Trivium (Gramática, Retórica y Dialéctica), esta división del currículo se mantuvo durante bien entrada la Edad Media; la música pertenecía a un subconjunto de las Matemáticas. Esta división, hace referencia en nuestros sistemas educativos a las ciencias (Quadrivium) y las artes y humanidades (Trivium); la cual no está exenta de discusión, la consideración de la música como un arte y no una ciencia, como en épocas antiguas. Efectivamente la música tiene de ciencia y de arte, de ciencia la parte de la teoría en toda su amplitud, y de arte la parte de la interpretación, como bien explica Ramos de Pareja (1440-1522), desde su cátedra de música en la Universidad de Salamanca, o en su tratado De música práctica. Otros autores que también opinan al respecto como Pietro Cerone (1566-1625) en El melopeo y maestro, tratado de música teorica y practica, dejan clara la distinción entre la parte científica y artística de la música. **Esta SA se puede aplicar de forma interdepartamental (Matemáticas, Música y Tecnología).**

#### Fundamentación curricular

Criterios de evaluación para Matemáticas

Código	Descripción
SMA.T02C01	<p><b>Identificar, formular y resolver problemas numéricos, geométricos, funcionales y estadísticos de la realidad cotidiana, desarrollando procesos y utilizando leyes de razonamiento matemático; anticipar soluciones razonables; reflexionar sobre la validez de las estrategias aplicadas para su resolución; y aplicar lo aprendido para futuras situaciones similares. Además, realizar los cálculos necesarios y comprobar las soluciones obtenidas, profundizando en problemas resueltos y planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc.; enjuiciar críticamente las soluciones aportadas por las demás personas y los diferentes enfoques del mismo problema, trabajar en equipo, superar bloqueos e inseguridades, reflexionar sobre las decisiones tomadas; y expresar verbalmente y mediante informes el proceso, los resultados y las conclusiones obtenidas en la investigación.</b></p> <p>Con este criterio se pretende comprobar si el alumnado reconoce y resuelve problemas aritméticos, geométricos, funcionales y estadísticos de la vida cotidiana, y se enfrenta a ellos, siguiendo una secuencia consistente en la comprensión del enunciado, la discriminación de los datos y su relación con la pregunta, la realización de un esquema de la situación, la elaboración de un plan de resolución, la ejecución del plan según la estrategia más adecuada (estimación, ensayo-error, modelización, matematización, reconocimiento de patrones, regularidades y leyes matemáticas...), la realización de los cálculos necesarios, la obtención de una solución y la comprobación de la validez de</p>

15/04/17

La Música y las Matemáticas: un matrimonio secreto (Carlos Vert Alcover)

1/9

Figura Nº 65. Situación de aprendizaje 1/9



Código	Descripción
Competencias del criterio STEB02C04	<p>Con este criterio se pretende que el alumnado manipule y mecanice materiales convencionales (especialmente metales) en el taller, manteniendo sus características y propiedades específicas, con el fin de construir un prototipo a partir de unas indicaciones dadas, asociando la documentación técnica al proceso de producción de este objeto, identificando y manipulando las herramientas y técnicas adecuadas en cada caso, trabajando en igualdad de condiciones y trato con sus compañeros o compañeras, valorando el proceso creativo, de diseño y las aportaciones del grupo, respetando las normas de salud, seguridad e higiene, a la vez que prestando atención a la necesidad de mantener el entorno de trabajo en condiciones adecuadas y economizando los recursos materiales utilizados y aplicando criterios medioambientales.</p> <p>  <b>Calificación 0-4:</b> Manipula y  <b>Calificación 5-6:</b> Manipula y  <b>Calificación 7-8:</b> Manipula y  <b>Calificación 9-10:</b> Manipula y mecaniza con imprecisión materiales mecaniza sin imprecisiones mecaniza con bastante precisión mecaniza con precisión materiales convencionales (especialmente metales) importantes materiales convencionales materiales convencionales (especialmente metales) en el taller, manteniendo sus características y propiedades específicas, manteniendo sus características y propiedades específicas, con el fin de construir un prototipo con suficiente construcción un prototipo con suficiente construcción un prototipo de unas dadas, y asocia con dificultad la profundidad a partir de unas de unas indicaciones dadas, y asocia con documentación técnica al proceso de indicaciones dadas, y asocia sin fluidez la documentación técnica al producción de este objeto, identifica y dificultad destacable la documentación proceso de producción de este objeto, manipula de forma confusa las técnica al proceso de producción de este identifica y manipula con seguridad y herramientas y técnicas adecuadas en objeto, identifica y manipula sin dudas claridad las herramientas y técnicas cada caso y trabaja en igualdad de importantes las herramientas y técnicas adecuadas en cada caso y trabaja en condiciones y trato con sus compañeros o adecuadas en cada caso y trabaja en igualdad de condiciones y trato con sus compañeros, valora para una vez el proceso igualdad de condiciones y trato con sus compañeros o compañeras, valora creativo, de diseño y las aportaciones del creativo, de diseño y las aportaciones del grupo, respeta las normas de salud, seguridad e higiene, a la vez que presta seguridad e higiene, a la vez que presta desinterés por la necesidad de mantener respeta las normas de salud, seguridad e higiene, a la vez que presta interés el entorno de trabajo en condiciones higiénico, a la vez que presta interés constante por la necesidad de mantener adecuadas y por la economía de recursos Inconsciente por la necesidad de el entorno de trabajo en condiciones y la defensa del medio ambiente. mantener el entorno de trabajo en adecuadas y por la economía de recursos condiciones adecuadas y por la economía de recursos y la defensa del medio ambiente. de recursos y la defensa del medio ambiente.</p>

**Criterios de evaluación para Música**

15/04/17

La Música y las Matemáticas: un matrimonio secreto (Carlos Vela Alcover)

3/9

Figura Nº 67. Situación de aprendizaje 3/9

**SITUACIÓN DE APRENDIZAJE**  
**La Música y las Matemáticas: un matrimonio secreto**

Código	Descripción
SMUS02C01	<p> <b>Distinguir los parámetros del sonido y los elementos básicos del lenguaje musical, así como su representación gráfica, y aplicarlos a la lectura, escritura, interpretación o audición de pequeñas obras o fragmentos musicales en el centro o en el entorno cercano, utilizando distintos tipos de partituras como apoyo a las tareas de Interpretación y audición, con el fin de comprender el lenguaje de la música y apreciar el proceso creativo.</b> </p> <p>           Mediante este criterio se pretende evaluar la capacidad de percepción auditiva del alumnado para reconocer los parámetros del sonido y los elementos básicos del lenguaje musical (compás, ritmo, melodía, acorde, tempo, dinámica, textura, formas o estructura) cuando escucha obras en vivo, grabadas o interpretadas en clase, y expresa lo que ha identificado con un lenguaje técnico apropiado. También se quiere valorar si distingue y emplea los elementos de la representación gráfica de la música (clave de sol y fá en cuarta línea, notas, figuras, matices y tempos) cuando escribe o lee partituras de distintos tipos con el fin de aplicarlos a actividades de interpretación (vocal, instrumental, de percusión corporal, coreográfica, etc.) o de audición asociadas a diferentes contextos, y si identifica y transcribe patrones rítmicos y melódicos con formulaciones sencillas en estructuras binarias, ternarias y cuaternarias. Finalmente se comprobará que el alumnado aplica algunas estrategias de atención y audición durante la interpretación, con una actitud de silencio y respeto hacia las demás personas durante la escucha.         </p> <p> <b>Calificación 0-4:</b> Reconoce auditivamente con ayuda de guías los parámetros del sonido y los elementos básicos del lenguaje musical, expresando con un lenguaje técnico apropiado lo que ha identificado; emplea solo si recibe ayuda para los elementos de representación gráfica de la música, y patrones rítmicos sencillos con formulaciones sencillas en estructuras binarias, ternarias y cuaternarias a través de la lectura, audición e interpretación de pequeñas piezas musicales, usando como apoyo aplicaciones de diferentes tipos como apoyo aplicando estrategias de atención y audición durante la interpretación, con una actitud de silencio y respeto hacia las demás personas durante la escucha.         </p> <p> <b>Calificación 5-6:</b> Reconoce auditivamente con cierta facilidad los parámetros del sonido y los elementos básicos del lenguaje musical, expresando con un lenguaje técnico apropiado lo que ha identificado; emplea de forma guiada y fluida mejorable los elementos de representación gráfica de la música, y patrones rítmicos sencillos con formulaciones sencillas en estructuras binarias, ternarias y cuaternarias a través de la lectura, audición e interpretación de pequeñas piezas musicales, usando si se le indica mucha ayuda y con escasa motivación de manera repetida partituras de diferentes tipos como apoyo aplicando estrategias de atención y audición durante la interpretación, con una actitud de silencio y respeto hacia las demás personas durante la escucha.         </p> <p> <b>Calificación 7-8:</b> Reconoce auditivamente con forma correcta los parámetros del sonido y los elementos básicos del lenguaje musical, expresando con un lenguaje técnico apropiado lo que ha identificado; emplea de forma guiada y fluida los elementos de representación gráfica de la música, y patrones rítmicos sencillos con formulaciones sencillas en estructuras binarias, ternarias y cuaternarias a través de la lectura, audición e interpretación de pequeñas piezas musicales, usando con autonomía personal partituras de diferentes tipos como apoyo aplicando estrategias de atención y audición durante la interpretación, con una actitud de silencio y respeto hacia las demás personas durante la escucha.         </p> <p> <b>Calificación 9-10:</b> Reconoce auditivamente con forma correcta los parámetros del sonido y los elementos básicos del lenguaje musical, expresando con un lenguaje técnico apropiado lo que ha identificado; emplea de forma guiada y fluida los elementos de representación gráfica de la música, y patrones rítmicos sencillos con formulaciones sencillas en estructuras binarias, ternarias y cuaternarias a través de la lectura, audición e interpretación de pequeñas piezas musicales, usando con autonomía personal partituras de diferentes tipos como apoyo aplicando estrategias de atención y audición durante la interpretación, con una actitud de silencio y respeto hacia las demás personas durante la escucha.         </p>
Competencias del criterio SMUS02C01	Comunicación lingüística, Aprender a aprender, Conciencia y expresiones culturales.

**Figura Nº 68. Situación de aprendizaje 4/9**

Código	Descripción
SMIUS02C02	<p>Mediante este criterio se pretende evaluar la capacidad del alumnado de interpretar e improvisar, individualmente o en grupo, estructuras musicales elementales en diferentes actividades de aula o centro, partiendo de pautas previamente establecidas y utilizando los modos, los ritmos y las escalas más comunes para crear sus propias composiciones y arreglos sencillos de canciones, piezas instrumentales o coreográficas, empleando las posibilidades sonoras que ofrece la voz, los instrumentos musicales, la percusión corporal, los dispositivos electrónicos o cualquier otro objeto. Asimismo, se valorará si el alumnado participa en procesos de autoevaluación y coevaluación, valora las ideas ajenas e integra las aportaciones propuestas para tomar conciencia del proceso de mejora de sus posibilidades creativas, respetando el trabajo de otras personas y evitando el plagio y la copia.</p> <p>                 ➤ <b>Calificación 0-4:</b> Interpreta con <b>muchos errores de tipo rítmico o melódico e improvisa dentro de las pautas establecidas con grandes errores de tipo rítmico o melódico e improvisa dentro de las pautas establecidas con pautas establecidas con grandes final e improvisa dentro de las pautas establecidas con corrección, estructuras musicales elementales utilizando modos, ritmos y escalas más usuales, para crear estructuras musicales elementales utilizando modos, ritmos y escalas más usuales, para crear estructuras más usuales, para crear con gran dificultad y constante ayuda del docente y siguiendo arreglos, mostrando una evolución y una evolución y una mejora escasa o mejora ocasional de sus posibilidades creativas. Participa siguiendo indicaciones en procesos de inseguridad y de forma mecánica en procesos de autoevaluación y coevaluación en contextos de creación.</b> </p> <p>                 ➤ <b>Calificación 5-6:</b> Interpreta con <b>errores de tipo rítmico o melódico e improvisa dentro de las pautas establecidas con pautas establecidas con corrección, estructuras musicales elementales utilizando modos, ritmos y escalas más usuales, para crear estructuras más usuales, para crear con gran dificultad y constante ayuda del docente y siguiendo arreglos, mostrando una evolución y una evolución y una mejora escasa o mejora ocasional de sus posibilidades creativas. Participa siguiendo indicaciones en procesos de inseguridad y de forma mecánica en procesos de autoevaluación y coevaluación en contextos de creación.</b> </p> <p>                 ➤ <b>Calificación 7-8:</b> Interpreta con <b>leves errores de tipo rítmico o melódico e improvisa dentro de las pautas establecidas con pautas establecidas con corrección, estructuras musicales elementales utilizando modos, ritmos y escalas más usuales, para crear estructuras más usuales, para crear con gran dificultad y constante ayuda del docente y siguiendo arreglos, mostrando una evolución y una evolución y una mejora escasa o mejora ocasional de sus posibilidades creativas. Participa siguiendo indicaciones en procesos de inseguridad y de forma mecánica en procesos de autoevaluación y coevaluación en contextos de creación.</b> </p> <p>                 ➤ <b>Calificación 9-10:</b> Interpreta con <b>precisión rítmico-melódica e improvisa dentro de las pautas establecidas con pautas establecidas con corrección, estructuras musicales elementales utilizando modos, ritmos y escalas más usuales, para crear estructuras más usuales, para crear con gran dificultad y constante ayuda del docente y siguiendo arreglos, mostrando una evolución y una evolución y una mejora escasa o mejora ocasional de sus posibilidades creativas. Participa siguiendo indicaciones en procesos de inseguridad y de forma mecánica en procesos de autoevaluación y coevaluación en contextos de creación.</b> </p>
Competencias del criterio SMUS02C02	<p>Aprender a aprender, Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor, Conciencia y expresiones culturales.</p>

Figura Nº 69. Situación de aprendizaje 5/9





Gobierno de Canarias  
 Consejería de Educación y  
 Universidades

**SITUACIÓN DE APRENDIZAJE**  
**La Música y las Matemáticas: un matrimonio secreto**

funcionamiento teórico de éstos. En la parte práctica trabajaremos el aprendizaje cooperativo basándonos en sus principios: interdependencia positiva, interacción simultánea, habilidades sociales, responsabilidad individual y evaluación grupal.

**Actividades de la situación de aprendizaje**

[1]- La escala pitagórica	Criterios Ev.	Productos/Inst.Ev.	Agrupamiento	Sesiones	Recursos	Espacios/context.	Observaciones.
<p>Pitágoras, obsesionado por explicar matemáticamente los intervalos, al pasar por una herrería quedó sorprendido por el sonido rítmico del golpe de los martillos en el yunque. Entró, observó y experimentó utilizando cinco martillos. Comprobó que uno, que rompía la escala perfecta de sonidos, tenía un peso sin relación numérica con el resto, por lo que lo eliminó. Con los restantes, obtuvo las siguientes conclusiones: sus pesos estaban en la proporción 12, 9, 8 y 6; el mayor (12), de peso doble del más pequeño (6), producía un sonido (una octava) más bajo que el menor. El peso de los otros dos martillos (9 y 8) correspondía a la media aritmética y armónica respectivamente de los de peso 12 y 6, por lo que dedujo que daban las otras notas fijas de la escala. El profesorado al tiempo que desarrolla esta explicación realizará la demostración práctica para que el alumnado observe y compruebe para entender la relación existente entre la altura de los sonidos y el peso de los martillos.</p>		- Gran Grupo	1	1 Yunque 4 Martillos de distintas proporciones	Aula de Tecnología	Se demostrará de forma empírica la relación entre el peso de los martillos y la distinta altura (sonido) que emite cada uno de ellos al golpear el yunque, después de explicar la teoría pitagórica al respecto.	
<p><b>[2]- El Monocordio de Ramos de Pareja</b></p> <p>Siguiendo la línea de la tarea anterior, Pitágoras se dio cuenta de que, si cogía dos cuerdas distintas en longitud, algunas veces sonaban bien, y si variaba la longitud de alguna de ellas sonaban mal, de esta forma descubrió las consonancias y las disonancias; y averiguó que las mejores consonancias se daban cuando una cuerda tenía el doble de longitud que la otra (relación 2/1), y cuando las relaciones de longitudes eran 3/2 y 4/3, es decir, utilizando siempre números naturales. Llamando octava o diapasón a la relación 2/1, quinta o diapasón a la 3/2 y cuarta o diapasón a la relación 4/3, nomenclaturas que seguimos utilizando en la actualidad en la música tonal occidental. Siguiendo los pasos del creado por Ramos de Pareja, el alumnado construirá un Monocordio, que será el instrumento base de nuestro experimento y les servirá para entender en este caso utilizando una cuerda, la relación de alturas de la escala pitagórica antes mencionada.</p>	Criterios Ev. - SMUS02C01 - SMA102C01 - STEE02C04	- Monocordio	Agrupamiento - Grupos Fijos	4	Recursos 1 Listón de madera 1 Cuerda de guitarra 2 Clavos	Espacios/context. Aula de Tecnología	Observaciones. Basándonos en el Tratado A. 80 de Ramos de Pareja, junto a las anotaciones marginales de F. Gaffurio, construiremos nuestro Monocordio para comprobar las relaciones de consonancia de la escala pitagórica.

15/04/17

La Música y las Matemáticas: un matrimonio secreto (Carlos Vért Alcover)

7/9

Figura Nº 71. Situación de aprendizaje 7/9

**SITUACIÓN DE APRENDIZAJE**  
**La Música y las Matemáticas: un matrimonio secreto**

[3]- Componer una obra musical utilizando las matemáticas							
<p>Mozart no compuso un minuetto, creo un sistema de composición basado en la probabilidad, se trata de su Musikalisches Würfelspiel o juego de dados musical, que el genio compuso en 1787, apareciendo publicada en 1793 por la Edición de J.J. Hummel. Mozart creó 176 compases, y los números del 1 al 176, posteriormente los agrupó en 16 conjuntos de 11 compases cada uno (que son los números que podemos alcanzar sumando una tirada de dos dados a la vez, es decir, del 2 al 12). El objetivo final de esta actividad consiste en crear una obra musical de 16 compases. El alumnado, compondrá un Vals con el sistema mencionado y haciendo uso de las TIC poniendo en práctica la relación de la música con las matemáticas (probabilidad) para entender que la relación entre la música y las matemáticas no solo es teórica, sino que puede convertirse en una creación musical.</p>	<p>Crterios E.v.</p> <p>- SMUS02C10</p>	<p>Productos/Inst.E.v.</p> <p>- composición musical</p>	<p>Agrupamiento</p> <p>- Grupos Heterogéneos</p>	<p>Sesiones</p> <p>2</p>	<p>Recursos</p> <p>Un ordenador con conexión a Internet</p>	<p>Español/contex.</p> <p>Aula con recursos TIC</p>	<p>Observaciones</p> <p>Para agilizar el procedimiento los alumnos y alumnas compondrán su Vals mediante una aplicación que facilita todo el procedimiento, que encontraremos en la siguiente dirección electrónica <a href="http://sunsite.univie.ac.at/Mozart/dice/#options">http://sunsite.univie.ac.at/Mozart/dice/#options</a> De este modo cualquier alumno/a podrá hacerlo de forma fácil, rápida y sencilla.</p>
[4]- Interpretar nuestra obra							
<p>El alumnado ensayará los Vals que han creado con el sistema de probabilidad de Mozart, para posteriormente realizar una audición para compartir lo aprendido en esta situación de aprendizaje con los demás compañeros y compañeras del Centro.</p>							
<p>Crterios E.v.</p> <p>- SMUS02C02</p>	<p>Productos/Inst.E.v.</p> <p>- Actuación</p>	<p>Agrupamiento</p> <p>- Grupos Heterogéneos</p>	<p>Sesiones</p> <p>4</p>	<p>Recursos</p> <p>Instrumentos Orff del aula de Música Flautas Cualquier instrumento propio que aporte el alumnado o el profesorado</p>	<p>Español/contex.</p> <p>Aula de Música Salón de Acos del Centro</p>	<p>Observaciones</p> <p>Los alumnos y alumnas ensayarán su composición para poder ofrecer una audición a sus compañeros y compañeras del Centro</p>	

Fuentes, Observaciones, Propuestas

Figura Nº 72. Situación de aprendizaje 8/9

## SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

### La Música y las Matemáticas: un matrimonio secreto

- Fuentes:** Britos, G. (2015). *Música y ciencia. Editada por el autor y publicada bajo licencia Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObrasDerivada 4.0*.  
 Calderón, C. (2013a). *Experiencia estética y formulación científica: El caso del armonista y compositor Johannes Kepler*. Anuario Musical: Revista de Musicología del CSIC (68), 81-132.  
 Calderón, C. (2013b). *El Monocordio como instrumento científico*. (Tesis Doctoral no publicada), Universitat Pompeu Fabra.  
 Calderón, C. (2014). *Experiencia estética y formulación científica: dos casos de estudio*. En García Pérez, A., y Oriola González, P., Francisco de Salinas. *Música, teoría y matemáticas en el Renacimiento* (pp. 19-43). Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.  
 Goldfraz, J. J. (2004). *Afinación y temperamentos históricos*. Madrid: Alianza Editorial.  
 Goldfraz, J. J. (2014). *La teoría armónica después de Francisco de Salinas*. En García Pérez, A., y Oriola González, P., Francisco de Salinas. *Música, teoría y matemáticas en el Renacimiento* (pp. 45-60). Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.  
 Liern, V., & Queral, T. (2008). *Música y matemáticas: La armonía de los números. Día escolar de las matemáticas. Servicio de Publicaciones de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas*.  
 Liern, V. (2008). *La Música y el número siete. Historia de una relación controvertida*. Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 58, 137-143.  
 Liern, V. (2009). *Las matemáticas de Johann Sebastian Bach*. Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 61, 113-118.  
 Liern, V. (2011). *MUSYMATICAS: Música y matemáticas en educación primaria*. Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 66, 107-112.  
 Liern, V., Pérez, B. M., & Pérez, V. (2012). *Música, danza y matemáticas, naturalmente*. Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 69, 115-120.  
 Liern, V. (2014). *El eco de la música en las esferas: las matemáticas de las consonancias*. Barcelona: Real Academia de Doctores: Fundación Universitaria ESERP.  
 Para la creación del Vals <http://sunsite.univie.ac.at/Mozart/dice/#options>  
**Imágenes:**  
**Monocordio:** <https://es.wikipedia.org/wiki/Monocordio>  
**Plátgoras:** [http://clastica2.com/?\\_clasticaLa-Musica-y-la-Filosofia-La-Armonia-de-las-Esferas-1](http://clastica2.com/?_clasticaLa-Musica-y-la-Filosofia-La-Armonia-de-las-Esferas-1)  
**Observaciones:** En todo momento el nivel de dificultad se adecuará al alumnado que esté realizando la tarea, se pretende con esto la inclusión de todos los alumnos y alumnas de un grupo clase en la situación de aprendizaje, tengan o no dificultades de aprendizaje de cualquier tipo, en el momento de calificar al alumnado mediante las rúbricas pertinentes se tendrán en cuenta estos aspectos.  
**Propuestas:** Se ha planteado realizar esta situación de aprendizaje con alumnado de 2º de ESO por ser éste el único nivel de la Educación Secundaria donde la asignatura de Música es obligatoria, por lo tanto tenemos un campo de pruebas mucho más extenso que en 3º o 4º de ESO por ser una materia optativa, aunque se puede adaptar igualmente y aplicar a niveles superiores.

**Figura Nº 73. Situación de aprendizaje 9/9**





**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BARCELONA**  
Departamento de Psicología Básica, Evolutiva y de la Educación

**UAB**