Universitat Autònoma de Barcelona

Revoicing. Estudio de discursos de profesores en clase de matemáticas

Kaouthar Boukafri i Itahriouan

Revoicing. Estudio de discursos de profesores en clase de matemáticas

Kaouthar Boukafri i Itahriouan

Tesis doctoral dirigida por Núria Planas i Raig

Deptartament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals

Universitat Autònoma de Barcelona

Bellaterra, septiembre de 2017

kaouthar.boukafri@uab.cat

Universitat Autònoma de Barcelona

DEPARTAMENT DE DIDÀCTICA DE LA MATEMÀTICA I DE LES CIÈNCIES EXPERIMENTALS

Doctorat en EDUCACIÓ

Revoicing. Estudio de discursos de profesores en clase de matemáticas

Doctoranda

Kaouthar Boukafri i Itahriouan

Directora

Núria Planas i Raig

BELLATERRA, septiembre de 2017

Dra. Núria Planas i Raig, profesora del Departamento de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals, con sede en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad Autónoma de Barcelona.

HAGO CONSTAR QUE:

La Investigación realizada bajo la dirección de la firmante para la Licenciada Kaouthar Boukafri i Itahriouan, con el título Revoicing. Estudio de discursos de profesores en clase de matemáticas, reúne todos los requerimientos científicos, metodológicos y formales exigidos por la legislación vigente para su Lectura y defensa pública ante la correspondiente Comisión, por la obtención del Grado de Doctor en Educación por la Universidad Autónoma de Barcelona, por lo tanto consideramos procedente autorizar su presentación

Bellaterra, 29 de septiembre de 2017.

Firmado:

Al Redu, a la Saida i al Narcís

Agraïments

La primera paraula que tinc consciència d'haver après i dit en català és *ceba*. La prenc com a model per estructurar aquests agraïments.

Deixeu-me que comenci per la capa més externa, la que ha permès que això tingués un final: la capa *NP*. Aquesta tesi no hauria estat possible sense les directrius i consells de la Núria Planas. Moltes gràcies pel temps, temps de reunions, temps en avions i aeroports, temps de revisions, temps de formació, temps que hem compartit parlant de tot una mica, temps... temps en què m'has donat oportunitats d'aprenentatge que desitjo haver aprofitat.

La capa *UAB*. Gràcies a la Facultat de Ciències de l'Educació, als membres del Departament de Didàctica de la Matemàtica i les Ciències Experimentals; al Benja, l'Àngels i l'Àngel; a l'equip del GEI; a l'equip GIPEAM; als i les estudiants del GEI i el GEP; al grup consolidat de les Passejades per la UAB; a les ioguis; a l'Edel i els seus momentos repánicos; al Quartet d'infantil format per la Tona, la Yuly, la Mequè i servidora; al Josep Maria; a la Iolanda; els i les doctorandes i doctors nacionals i internacionals que ens han visitat; als companys de doctorat, especialment la Joana i l'Abraham; a la Loli; a la Prat i a les seves fortes abraçades, a l'equip consolidat de Dinars a les 14h (10 minuts més, Jordi; Laura, baixes o no?; Edith ya terminamos; Gemma, et quedes?); al despatx 108, gràcies Miquel I per la rebuda i pels moments compartits, gràcies Miquel II per portar aires nous, i gràcies Isabel, amiga i confident, les nostres directores (gràcies Conxita i Núria) van estar molt encertades, havíem d'estar juntes.

La capa *veu*. Gràcies a les professores A i B per deixar-me entrar a les seves classes i per ser tan atentes. Gràcies als nois i noies dels centres A i B. Els vostres discursos han estat la base principal dels discursos d'aquesta tesi. Gràcies.

La capa *viatge*. Gràcies a la Marta Civil per accedir a tutoritzar-me durant la meva estada a la Univesrity of Arizona. Quin plaer treballar i aprendre al teu costat! Revoicing neix d'una de les nostres reunions, gràcies. Gracias José David y Arnulfo por dejarme asitir y colaborar en vuestras clases. Thanks to the Math 506A course classmates, specially to Amy and Maggie. Thanks to all the friends that made my visit to USA unforgettable: Jesús, Eniko and their friends, y por

supuesto a Noelia, Mamen, Raquel, Carmen e Imanol. Gràcies al investigadors que he tingut l'oportunitat de conèixer en els congressos, especialment a la Ahlam, la Kristan, l'Aitzol, l'Anna, la Glória, la Cene, el Matías, la Judith Moschkovich i el Dave Wagner. Gràcies als joves investigadors de les SEIEM, especialment a l'Àngela, la Míriam i el Miguel Ángel.

La capa *UB*. Gràcies als companys i companyes de la Facultat d'Educació de la UB, molt especialment a la Roser, la Carme, la Núria, la Berta, la Gemma, la Cristina, l'Andrea, al Vicenç, al Manel i al Joaquim, amb vosaltres va començar la idea de fer un doctorat i això no s'oblida. Als i les estudiants del GEI i el GEP de la UB. Gràcies a l'Anton Aubanell. Em declaro fan de la teva energia. Gràcies als meus amics i amigues de batalla de la Facultat de Matemàtiques: la Neus, la Sílvia, la Cris, el Iago, el Víctor, el Dani Garrido, el Facchi, la Júlia, la Xesca, el Roig, el Kiko, la Zairis, la Roser, la Núria, la Judith, el Dani Pérez i els joves profes Ari i Jordi. Gràcies a la Laia, moltes gràcies.

La capa *for fun*. Gràcies als eXploriums i Betacampistes que m'ajuden a no oblidar que la recerca en educació ha d'arribar a la societat. Gràcies Laura, Tresa, Guille Jesús, Marc, Tinoco, Andrea, Sergi, Lo Sergi, Jordi, Abraham, Helena, Javi, Salva, Carla, Rai, node cuina i Petits Betes.

La capa *origen*. Gràcies a les meves mestres del CEIP El Bruc i als i a les professores de l'institut El Castell, gràcies per posar-me bastides que m'han permès construir el meu edifici. Gràcies a la Míriam, la Mariona, la Núria E, l'Eduard, la Mireia, l'Àngel, l'Adrià, la Pili i la Pilar per ajudar-me a construir-ne els fonaments.

La capa *casa*. Gràcies al meu pare que ha lluitat sense defallir perquè tinguéssim oportunitats, a la meva mare per seguir-lo i ser la millor comptable sense anar a la universitat, al meu germà, el petit, el Redu, per les seves preguntes desconcertants que m'obliguen estar actualitzada, a la meva germana, la gran, la Saida i família (l'Ilyas, la Sara i l'Ahmed), per la generositat que la caracteritza. Gràcies!

Ah! La capa *SOS*. El 61 que per mi sempre serà el 237, el Narcís. Al meu Narcís i a la resta de Miguel i Baños. Gràcies, infinites gràcies.

Cada una de les capes que conformen una ceba la protegeixen, la fan més robusta i única.

Kau Bou

Índice

Introducción

La tesis doctoral *Revoicing. Estudio de discursos de profesores en clase de matemáticas*, se sitúa en el área de investigación en Educación Matemática, dentro del Programa de Doctorado en Educación de la Universitat Autònoma de Barcelona. El trabajo se enmarca en la línea de investigación de lengua, particularmente, de lengua en uso o discurso en clases de matemáticas.

El trabajo forma parte del conjunto de investigaciones iniciadas en el Proyecto *Análisis de entornos colaborativos de aula desde la perspectiva de la mediación en la construcción discursiva de conocimiento matemática* - EDU2012-31464, del cual la autora se ha beneficiado de la Beca BES-2013-063859. Estas investigaciones tienen continuidad en el Proyecto *Construcción de conocimiento matemático escolar: discurso del profesor y actividad de enseñanza* - EDU2015-65378-P. Ambos proyectos están financiados por el Ministerio de Economía y Competitividad de España. Además, este es un trabajo del *Grup d'Investigació en Pràctica Educativa i Activitat Matemàtica* (GIPEAM) - SGR-2014-972, financiado por la Generalitat de Catalunya. Entre agosto y diciembre de 2015, la autora realizó una estancia formativa en el Department of Mathematics, University of Arizona (Tucson, EEUU), tutorizada por la Dra. Marta Civil y financiada con la Beca EEBB-I-15-10216 del Ministerio de

Economía y Competitividad.

Durante el período de formación, la autora ha participado en seminarios y congresos nacionales e internacionales tal y como requiere el Programa de Doctorado de la UAB. Se destaca la participación en seminarios coordinados por GIPEAM a cargo de expertos en Educación Matemática; en los congresos del European Society of Research in Mathematics Education (CERME-9, Praga), International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME-39, Hobart) e International Congress on Mathematical Education (ICME-13, Hamburgo); en la Spring School of REASON (Munich) y en las tres ediciones de las Jornades Formatives de Doctorat organizadas por el Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals de la UAB.

Antes de iniciar los capítulos, se explica la motivación y justificación del estudio y la pregunta de investigación y objetivos. El primer capítulo resume los aspectos teóricos principales sobre discurso y revoicing en clase de matemáticas. Acorde con objetivos y teoría, el segundo capítulo presenta el tratamiento de datos y el diseño de instrumentos. La aplicación de instrumentos y los resultados configuran el tercer capítulo. Finalmente, las conclusiones, cuarto (y quinto, en inglés) capítulo, formulan respuestas a la pregunta de investigación y abren nuevas preguntas sobre revoicing en la clase de matemáticas.

Motivación y justificación del estudio

El interés inicial de la investigación era el estudio de la construcción de conocimiento matemático en clases de matemáticas, desde un punto de vista discursivo y en contexto de gran grupo. Algunos antecedentes de investigaciones similares son Sfard y Kieran (2001), Kieran (2001) y Saxe et al. (2009). Las dos primeras en grupos reducidos y la última con grupos mayores de alumnos estudian la interacción en clase de matemáticas. Las tesis doctorales de compañeros de GIPEAM como Chico (2014), Ferrer (2016), Goizueta (2015) y Morera (2013) han inspirado en aspectos teóricos y metodológicos de esta tesis. Las cuatro investigaciones proponen tareas y analizan discusiones en clases de secundaria. Ferrer (2016) y Morera (2013) sirven como modelo del diseño de la experimentación substituyendo software dinámico por materiales manipulativos.

Entre las dimensiones del Currículum de Matemáticas de Educación Secundaria Obligatoria de Catalunya (Decret 187/2015), hay la de comunicación y representación. Un alumno es competente si expresa ideas matemáticas con claridad y precisión y comprende las ideas de otros, y utiliza la comunicación y el trabajo colaborativo para compartir y construir conocimiento a partir de ideas matemáticas. La comunicación es pues decisiva en la construcción colectiva de conocimiento. Al examinar la enseñanza de las matemáticas, Pimm (1990) afirma que el principal interés es enseñar matemáticas para la comunicación: "La comunicación supone un intercambio de significados" (Pimm, 1990, p. 282). Las discusiones colectivas permiten la comunicación matemática colectiva.

En Boukafri (2015a) y Boukafri, Ferrer y Planas (2015) explicamos que en las discusiones conjuntas había solapamientos de contenido matemático que sugerían relaciones entre intervenciones no consecutivas. Al estudiar la construcción de conocimiento matemático (Boukafri y Planas, 2015) vimos que las ideas se podían agrupar según el contenido matemático. Para cada agrupación, asumimos que ciertas acciones de argumentación colectiva promovían condiciones favorables para el aprendizaje matemático. Así, decidimos centrarnos en el análisis del discurso matemático comunicado en discusiones conjuntas. Los discursos presentaban ciertas similitudes: el profesor intervenía más que sus alumnos, el diálogo principalmente era de profesor-alumno(s) y el profesor realizaba preguntas o comunicaba ideas de alumnos. Nos centramos en esta última similitud y la literatura permitió ponerle nombre y profundizar. Así se llegó al estudio de revoicing en clase de matemáticas. En Boukafri, Civil y Planas (s.f.) presentamos los primeros resultados entorno al uso de revoicing.

Pregunta de investigación y objetivos

Para contribuir al estudio de revoicing, planteamos la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué se entiende por revoicing del profesor en discusiones conjuntas de tareas matemáticas?

Concretamente para estudiar la noción de revoicing, nos centramos en su uso por parte de profesores que interactúan con sus alumnos sobre resoluciones de tareas de matemáticas. Para responder a la pregunta definimos tres objetivos:

1. Interpretar la noción de revoicing a nivel de turnos de habla.

2. Interpretar la noción de revoicing a nivel de episodios.

3. Interpretar la noción de revoicing a nivel de sesiones de clase.

Los tres objetivos siguen un orden de logro sucesivo: el análisis para la consecución de un objetivo sirve como punto de partida del siguiente. Estos objetivos pretenden interpretar la noción de revoicing desde tres niveles. El primer objetivo, nivel 1, se centra en entender revoicing a nivel de los turnos de habla. Para ello es necesario definir turnos, identificar turnos con actividad matemática y revoicing e interpretar cómo y qué ideas matemáticas se comunican. El segundo objetivo, nivel 2, se centra en estudiar relaciones entre turnos y generar así episodios con ideas matemáticas en común. Finalmente, el tercer objetivo, nivel 3, se centra en estudiar conexiones entre episodios e interpretar así la noción revoicing en la discusión conjunta de una sesión.

Marco Teórico 1

En este capítulo presentamos el enfoque teórico de la investigación. En primer lugar revisamos investigaciones de educación matemática y lengua (1.1), situándonos en la línea de investigación de la lengua del profesor y de la clase. En segundo lugar explicamos qué entendemos por discurso (1.2), desde perspectivas sociales y discursivas y centrándonos en aspectos particulares del discurso matemático (1.2.1) y aspectos que caracterizan revoicing (1.2.2).

1.1. Revisión de la literatura

Austin y Howson (1979) clasifican las primeras investigaciones de educación matemática y lengua que se remontan a la década de 1940 en tres temas:

- *La lengua del alumno*: la lengua o lenguas y las habilidades lingüísticas que los alumnos aprenden en la clase de matemáticas.
- *La lengua del profesor y de la clase*: la lengua o lenguas y las habilidades lingüísticas que los profesores traen a la clase de matemáticas.
- *La lengua de las matemáticas*: la lengua o lenguas y las características lingüísticas de los textos que surgen dentro de la práctica de las matemáticas.

En la revisión de los avances en educación matemática y lengua en Planas (2017), se expone que el mayor número de estos trabajos trata la complejidad lingüística de la lengua de las matemáticas, sin considerar la complejidad social, pedagógica y cultural de la enseñanza y aprendizaje matemático en entornos con diversidad de lenguas. Son trabajos donde se considera que los alumnos cuya lengua es distinta a la del profesor presentan carencias de aprendizaje. Se considera la lengua de las matemáticas como única (una sola lengua) y se excluyen así las lenguas que no se asemejan a la usada por matemáticos. Del mismo modo se asocia una única lengua al alumno cuyo reto es aprender la lengua del profesor y la lengua del matemático profesional. Con la publicación de Adler (2001) se pasa a hablar de multilingüismo en la clase de matemáticas. Por lo tanto, se asume que hay una diversidad de lenguas durante el uso de la lengua en cualquier situación de enseñanza y aprendizaje. Particularmente, en clase de matemáticas, algunas de estas lenguas serán modelos concretos de formas de hablar y escribir matemáticas.

En Planas, Morgan y Schütte (s.f.) los autores revisan los trabajos presentados en los Congresos de la Sociedad Europea para la Investigación en Educación Matemática (CERME) referentes a lengua durante las dos últimas décadas. Siguiendo la distinción de temas propuesta por Austin y Howson (1979), los autores explican mediante ejemplos de contribuciones de qué trata y qué se trata en cada tema en la actualidad.

La lengua del alumno. Se distinguen dos líneas de interés: el discurso del alumno y el multilingüismo en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Estas líneas se basan en los refinamientos teóricos de la lengua como base social y del aprendizaje como cambio del discurso. Se pone atención a la diversidad de lenguas involucradas en el proceso de aprendizaje y a la negociación de significados, o bien se presta atención a la lengua en contexto del alumno. El alumno es alguien que necesita aprender la lengua de las matemáticas. Esto requiere el acceso y uso de otras lenguas y discursos en clase.

La lengua del profesor y de la clase. El aprendizaje de las matemáticas tiene lugar en diferentes entornos sociales, donde a menudo en la interacción, hay uno o varios participantes con habilidades avanzadas, por ejemplo, el profesor. El enfoque se centra en la lengua del profesor y en la lengua de la clase. El estudio del funcionamiento de la lengua entre personas puede contribuir a comprender los aspectos sociales de la educación matemática, incluyendo cómo los profesores manejan las interacciones en clase y cómo los alumnos de diversos grupos sociales y culturales crean oportunidades de aprendizaje matemático.

La lengua de las matemáticas. Las formas de la lengua que se utilizan para hacer y comunicar las matemáticas, considerando cómo funciona la lengua en la construcción del conocimiento matemático, permiten estudiar la relación entre matemáticas y lengua. Cualquier consideración de la lengua matemática necesita tener en cuenta las formas especializadas de comunicación que son distintivas de la matemática escrita como la notación algebraica. El enfoque es el de qué papel tiene la lengua en la construcción de conocimientos matemáticos y cómo la comunicación contribuye a estructurar el razonamiento matemático.

La contribución de Adler (2001) da lugar al dominio contemporáneo (Planas, 2017) sobre educación matemática y lengua. En esta etapa se trata la relación entre lengua y educación matemática considerando la noción de lengua dentro del área como múltiple y que la multiplicidad se da en el uso. Aún así, sigue habiendo trabajos relevantes que toman la noción formal de lengua con preguntas y problemas propios de etapas anteriores. El estado de la cuestión actual articula el contexto social, cultural, histórico y político de uso de la lengua en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se considera el uso de la lengua en un entorno que es lingüístico, cultural, social y político, y las cuestiones para entender el aprendizaje matemático del alumno son las que tratan sus oportunidades de desarrollar un capital lingüístico, cultural y social que sea reconocido como legítimo en clase de matemáticas.

En esta nueva etapa se supone el significado de lengua en uso para cualquiera que sea la conceptualización de lengua (Tabla 1.1). Se pueden identificar tres conceptualizaciones principales de lengua que aluden a las nociones de sistema (Morgan, 2006), cultura (Radford, 2008) y discurso (Sfard, 2008). Estas tres nociones se reflejan en las lenguas de las matemáticas, del alumno y del profesor, teniendo en cuenta el carácter multilingüe propuesto por Adler (2001).

Temas en Austin y Howson (1979)	**Conceptualizaciones de lengua**
Las lenguas del alumno	sistema → cultura → discurso
Las lenguas del profesor y de la clase	
Las lenguas de las matemáticas	

Tabla 1.1: Elementos del dominio contemporáneo de la lengua (Planas, 2017, p. 7)

Durante la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, alumnos y profesores producen las lenguas de la clase como sistema organizado de signos de la actividad conjunta. Sfard (2008) asemeja las nociones de lengua y discurso y les otorga un papel fundamental en la construcción de los objetos matemáticos. Al hablar de matemáticas, se da estatus de existencia a estos objetos y a las propiedades y cualidades que se comunican. En este sentido y como ocurre con las conceptualizaciones anteriores, la lengua se produce como unitaria y única pero necesariamente múltiple por ser múltiples los significados culturales, sociales y políticos que produce. Las matemáticas que se consideran cultas y aceptables son las que se construyen de tal modo en el discurso. En particular, esto imposibilita la existencia de una lengua de las matemáticas delimitada con patrones sintácticos únicos.

La importancia de la lengua en la educación matemática incluye el uso o función de la lengua, así como su forma. Las funciones de la lengua permiten considerar cuestiones sobre procesos de razonamiento, argumentación y prueba, así como sobre objetos matemáticos y relaciones. Estudiar la interacción puede contribuir a comprender los aspectos sociales de la educación matemática, incluyendo cómo los profesores manejan las interacciones en la clase y cómo los alumnos de diversos grupos sociales y culturales pueden experimentar la educación matemática de manera diferente (Planas et al., s.f.).

La presente investigación se sitúa dentro de las lenguas del profesor y de la clase dado que se estudia el uso de revoicing del profesor en clase de matemáticas. No obstante, no ignoramos que las lenguas del profesor y de la clase interactúan con las lenguas del alumno y de las matemáticas.

1.2. Discurso en clase de matemáticas

En clase de matemáticas, el estudio del uso de revoicing (O'Connor y Michaels, 1993, 1996) se da en los discursos que comunican profesores y alumnos. Esto requiere determinar qué entendemos por discurso, particularmente, discurso matemático. Para ello la investigación considera aspectos de tres perspectivas que se complementan: la perspectiva sociocultural tomada como marco general (Yackel y Cobb, 1996; Sfard, 1998), según la cual la participación en clase de matemáticas se concibe como un tipo de socialización dentro de las prácticas matemáticas de discusión de tareas (Civil, 2014; Civil y Planas, 2004); el interaccionismo simbólico (Godino y Llinares, 2000; Goffman, 1981), en que la cultura de clase se construye en la interacción de profesor y alumnos; y aspectos de la perspectiva discursiva (Gee, 2005; Moschkovich, 2003, 2007; Pimm, 1990; Sfard, 2007, 2008), centrada en el uso de la lengua y sus efectos en clase.

De acuerdo con Gee (2005), desde la perspectiva social en la que nos situamos, los discursos son mucho más que 'lo que se dice': son una combinación de decir (escribir)-hacer-ser-valorar-comportarse. Gee diferencia entre discurso y Discurso, entendiendo que el primero se refiere a características lingüísticas de un texto hablado o escrito, y el segundo se refiere a:

> *Una asociación socialmente aceptada de formas de utilizar la lengua, otras expresiones simbólicas y "artefactos", de pensar, sentir, creer, valorar y actuar que puede utilizarse para identificarse uno mismo como miembro de un grupo socialmente significativo o red social", o para indicar (que uno está desempañando) un "papel"socialmente significativo* (Gee, 2005, p. 144).

Como otros investigadores en educación matemática (Barwell, 2016; Moschkovich, 1999, 2003, 2007; Sfard, 2000, 2007, 2008), tomamos la noción de Discurso en mayúscula de Gee, dada nuestra perspectiva social, pero en adelante escribiremos discurso. Por lo tanto, consideramos discurso como lengua en uso, que tal y como afirma Gee, puede interpretarse de diferente manera según el contexto.

El autor muestra un ejemplo, el caso de Jane (Gee, 2005, p. 82), una joven que afirma que su discurso es invariante. Para constatarlo, Jane se graba a si misma, explicando un relato trabajado en clase a sus padres y a su novio. Al escucharse, la joven evidencia el uso de dos formas de lengua diferentes. Aunque en ambos casos habla en inglés, hay dos lenguas sociales: "dos versiones distintas de quién es uno mismo".

Barwell (2016) considera tres dimensiones de la lengua: discursos, que corresponden a las lenguas sociales de Gee (2005); voces, intenciones del hablante en el discurso; y lenguas percibidas como naturales. Cuando uno habla lo hace desde múltiples voces (polifonía) y múltiples discursos (heteroglosia). En el contexto de la clase de matemáticas, el profesor usa múltiples discursos como el matemático, el de los libros de texto o el de la escuela; y múltiples voces incluyendo voces de alumnos cuyas ideas son reconocibles en las palabras del profesor. Para evitar la ambigüedad en el uso de la palabra discurso, nos referiremos a heteroglosia como diversidad de registros del discurso matemático y, a registro como "conjunto de significados apropiados para una función de la lengua, con las palabras y estructuras que expresan estos significados" (Halliday, 1975, citado en Pimm (1990, p. 116)). Por lo que aquí consideramos que un registro es matemático si se usa la lengua para fines matemáticos. Tomamos como objeto de estudio el discurso matemático que emerge de la participación de alumnos y profesores en discusiones de tareas.

1.2.1. Hablar en clase de matemáticas

Hablar es, según el diccionario de la Real Academia Española, emitir palabras. Consideramos que el pensamiento es una forma de comunicación y, por tanto, que una persona que piensa es una persona que se comunica consigo misma (Sfard, 2007), es decir, que habla para si misma (Pimm, 1990). Según Pimm, en clase de matemáticas hay dos razones principales para que los alumnos hablen: hablar para uno mismo y hablar para los demás. Este enfoque dialógico (Barwell, 2016) da lugar a oportunidades de aprendizaje para alumnos, por ejemplo, cuando tratan de expresar sus soluciones o de entender puntos de vista alternativos (Yackel, Cobb y Wood, 1991).

Smith y Stein (2011) afirman que las discusiones conjuntas permiten a alumnos comunicar y evaluar sus pensamientos y al profesor guiar dichos pensamientos en direcciones matemáticamente sólidas. Para ello, el profesor debe seleccionar tareas desafiantes a nivel cognitivo y orquestar discusiones usando ideas y estrategias de alumnos de manera productiva. Orquestar discusiones "provee de un espacio donde los alumnos se alinean entre ellos y con el contenido del trabajo académico, y de forma simultánea los socializa en maneras particulares de hablar y pensar" (O'Connor y Michaels, 1996).

Consideramos hablar en voz alta durante discusiones conjuntas, a las que definimos como conjunto de intervenciones de profesor y alumnos durante la puesta en común de una tarea matemática. Un conjunto de intervenciones de tales características constituye un discurso matemático.

Discurso matemático

El discurso matemático incluye, además de formas de hablar, actuar, interactuar, pensar, creer, leer y escribir, valores matemáticos, creencias y puntos de vista. Participar en las prácticas del discurso matemático es en general hablar y actuar de la manera en que las personas matemáticamente competentes hablan y actúan cuando hablan de matemáticas (Moschkovich, 2003).

La perspectiva interaccionista considera el carácter discursivo del conocimiento (Godino y Llinares, 2000). Así, la matemática es vista como un tipo de discurso (Sfard, 2007, 2008) y el aprendizaje matemático como un proceso de cambio de discurso que requiere: "llegar a dominar un discurso que sea reconocido como matemático por interlocutores expertos" (Kieran, Forman y Sfard, 2001, p. 5). El cambio es entendido como transformación de formas discursivas y no como un reemplazamiento, dado que los discursos nunca se crean desde cero.

El discurso matemático, como cualquier otro, se caracteriza por sus palabras, mediadores visuales, narrativas y rutinas (Sfard, 2007):

Las *palabras* del discurso matemático son las propias de la matemática, como las relativas a cantidad y forma, y compartidas con otros discursos. Esto lleva a diversidad de usos de una palabra, es decir, a diversidad de significados (Wittgenstein, 1953, citado en Sfard (2007, p. 571)). Pimm (1990, p. 33) muestra un ejemplo con el uso de la palabra 'diferencia'. A la pregunta ¿cuál es la diferencia entre 24 y 9? dos niños de nueve años respondieron: *uno es par y el otro impar y uno tiene dos números y el otro uno.* Las respuestas incorporan palabras matemáticas tales como par, impar o números, por lo que en el sentido de Sfard los discursos de ambos niños son matemáticos, pero no comparten el uso de la palabra diferencia como sinónimo de substracción. Ignorar dichas diferencias supone dificultades de comprensión (Moschkovich, 2003; Pimm, 1990), por lo tanto, dificultades de comunicación (Sfard y Kieran, 2001).

Los *mediadores visuales* son medios de la lengua que permiten identificar los objetos del discurso y coordinar la comunicación. Mientras que los discursos coloquiales suelen estar mediados por imágenes de objetos concretos, los discursos matemáticos a menudo implican artefactos simbólicos específicos. Algunos ejemplos son números, símbolos algebraicos y gráficos.

Las *narrativas* son cualquier texto, hablado o escrito, que describe objetos, relaciones entre objetos y actividades con objetos, que pueden ser aceptados o rechazados. En el discurso matemático, las narrativas aceptadas han sido construidas y sustanciadas de acuerdo con un conjunto de reglas bien definidas y específicas (Escudero, Gavilán y Sánchez-Matamoros, 2014). Las narrativas matemáticas aceptadas son conocidas como teorías matemáticas. Esto incluye definiciones, teoremas y demostraciones.

Las *rutinas* son patrones repetitivos bien definidos en las acciones de los participantes, característicos de un discurso. Las rutinas matemáticas se pueden identificar observando el uso de palabras y mediadores matemáticos o siguiendo el proceso de crear o fundamentar narrativas matemáticas. Algunas de las rutinas implementadas por los participantes del discurso matemático derivan de las propiedades de los objetos matemáticos que se consideran.

Richards (1991) (citado en Moschkovich (2007, p. 27)) describe cuatro tipos de discurso matemático: de *investigación* (research mathematics), habla del matemático profesional y científico; de *consulta* (inquiry mathematics), habla del adulto matemáticamente alfabetizado; de *revista* (journal math), lengua de las publicaciones y artículos matemáticos y; de *escuela* (math school) lengua de una clase en la que se enseñan matemáticas. Dado que el contexto de la investigación es la clase de matemáticas, el discurso matemático corresponde principalmente a la última acepción de Richards (1991).

En el discurso matemático escolar, en adelante discurso matemático, podemos distinguir niveles de formalización o registros (Pimm, 1990). Sfard (2008) distingue entre registro matemático formal y coloquial (también llamado informal (Barwell, 2016) o cotidiano (Moschkovich, 2003)). Aunque ambos son parte del proceso de aprendizaje, el aprendizaje matemático requiere participar en un registro formal. Los alumnos no pasan del registro informal al formal de manera lineal, sino que trabajan con el profesor para ampliar las maneras de dar sentido en matemáticas (Barwell, 2016). Esto requiere aprender significados matemáticos de palabras, así como precisar el significado de palabras cotidianas y refinar usos de significados cotidianos para reflejar conocimiento conceptual (Moschkovich, 2003). Es decir, requiere de negociación de significados mediante interacción de profesor y alumnos y gestión de normas sociales.

Las normas sociales en clase son acuerdos que describen cómo colaborar y relacionarse con los demás (Godino y Llinares, 2000) y obligaciones que rigen la interacción entre participantes (Planas, Font y Edo, 2009). Concretamente en la clase de matemáticas existen normas propias de la discusión matemática, normas sociomatemáticas (Yackel y Cobb, 1996) que regulan la argumentación e influyen en las oportunidades de aprendizaje (Godino y Llinares, 2000). Aunque la identificación de normas no es un objetivo de esta investigación, permite organizar el conjunto de interacciones que conforman el discurso matemático. Nos interesan las normas sociomatemáticas relativas a valorar la solución de un problema o a explicaciones consideradas como matemáticamente correctas (Voigt (1995), citado en Planas et al. (2009, p. 128)).

Discurso matemático del profesor

El discurso matemático del profesor puede servir de modelo para sus alumnos y a su vez para moldear los usos de sus palabras hacia el registro aceptado (Pimm, 1990). El constructo de *Mathematical Discourse in Instruction* (en adelante MDI) propuesto por Adler y Ronda (2015) es un marco que permite estudiar el discurso matemático del profesor (Arnal-Bailera, Fortuny, García-Honrado y Planas, 2016; Planas, García-Honrado y Arnal-Bailera, 2017). El MDI se caracteriza por cuatro componentes propias de la enseñanza de matemáticas: ejemplificación, explicación, participación del alumno en la interacción con otros participantes y objeto de aprendizaje de la lección. Si nos fijamos en el análisis sobre la participación del alumno, Adler y Ronda (2015) describen tipos de intervención de alumnos cuando tienen oportunidad de hablar matemáticamente y exponer razonamientos. Destacan tres tipos: (a) responder a preguntas de sí o no, o añadir palabras sueltas a oraciones inacabadas del profesor; (b) responder a preguntas de qué y cómo mediante oraciones; y (c) responder a preguntas de por qué, presentar ideas a discutir o hacer preguntas. Estos tipos aluden al estudio de Pimm (1990) sobre alumnos que hablan en una discusión matemática para responder preguntas del profesor.

Esto lleva a la frecuencia en clase de la estructura de iniciación-respuesta-retroalimentación de Sinclair y Coulthard (1975). Tomando como punto de partida esta estructura, Ruthven y Hofmann (2016) definen reacción como la intervención del profesor a raíz de la respuesta o intervención de un alumno. Una reacción puede darse a continuación de la retroalimentación o en la misma iniciación. Los autores consideran que incluso no realizar una retroalimentación puede ser considerado un tipo de reacción. En la Tabla 1.2 se detallan los tipos de reacciones del profesor identificadas por los autores.

Reacciones a las intervenciones de los alumnos		
1	Aprobar	Indicar aprobación a la intervención de alumnos
2	Desaprobar	Indicar desaprobación a la intervención de alumnos
3	Repetir	Repetir (contenido relevante) de la intervención de alumnos con las mismas palabras
4	Replantear	Replantear (contenido relevante) de la intervención de alumnos con diferentes palabras
5	Traducir	Traducir (contenido relevante) con forma o ideas equivalentes
6	Redirigir	Redirigir el conocimiento mostrado en intervenciones de alumnos
7	Sondear	Sondear la intervención de alumnos
8	Ampliar	Ampliar la intervención de alumnos
9	Incidir	Incidir en una pregunta o intervención
10	Devolver	Devolver reflexiones de la intervención de un alumno a otro alumno o a la clase

Tabla 1.2: Tipos de reacción del profesor (Ruthven y Hofmann, 2016, p. 12-13)

Las intervenciones de profesor y alumnos se influyen mutuamente. Pimm (1990) propone estrategias discursivas que el profesor puede usar para comunicarse con sus alumnos e invitarlos a participar en el discurso matemático de clase. Algunos ejemplos son: (a) subir el tono seguido de una pausa para indicar al alumno que intervenga; (b) aceptar la respuesta de un alumno mediante repetición; (c) hacer preguntas retóricas para romper el monólogo del profesor y comprobar que el alumno sigue el discurso; (d) hablar con oraciones inacabadas o hacer eco de la intervención de un alumno para dirigir el discurso al resto de la clase y motivar intervenciones relacionadas. Tal y como afirma Pimm, muchas de las estrategias discursivas no se realizan conscientemente. No se trata de dar instrucciones al profesor dado que es incompatible con la imprevisibilidad del discurso de clase. Aun así, identificar las estrategias discursivas del profesor permite investigar sobre el discurso en la enseñanza de las matemáticas y los efectos en discursos de alumnos.

Aquí nos interesan reacciones (e.g. 3, 4, 5 y 8) y estrategias (e.g. b y d) que tienen que ver con re-expresar intervenciones de alumnos por parte del profesor (revoicing en Forman y Ansell (2001, 2002); O'Connor y Michaels (1993, 1996)).

1.2.2. Revoicing

En el estudio de discusiones de clase de ciencias y matemáticas, O'Connor y Michaels (1993) identifican y definen *revoicing* como una estrategia discursiva que consiste en re-expresar (Rosemberg, Borzone y Diuk, 2003, p. 3) la intervención de un alumno, oral o escrita, por parte de otro participante. La estrategia de revoicing tiene resonancias con el *reported speech* al que se refiere Goffman en base a los trabajos de Gumperz (Goffman, 1981, p. 127). El reported speech o estilo indirecto es una estructura gramatical para hacer mención a una intervención anterior. Así, el estilo indirecto se puede considerar un caso particular de revoicing en el que se da crédito a quien realiza la intervención original. Dentro de esta aproximación, consideramos que hay revoicing cuando se re-expresa oralmente una intervención, de otro participante o de uno mismo, manteniendo al menos una idea en común entre la intervención origen y la re-expresada. En el contexto de clase de matemáticas, la práctica de revoicing puede darse tanto por parte de profesor como de alumnos. Aquí nos fijamos en el profesor, puesto que las discusiones conjuntas de esta investigación son orquestadas por profesoras y los alumnos principalmente se dirigen a ellas.

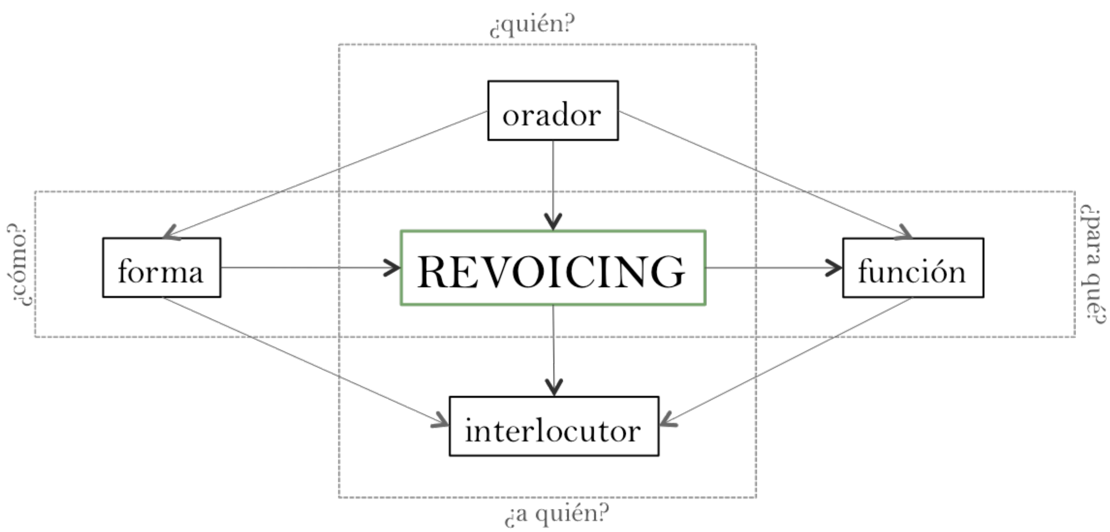


Figura 1.1: Principales aspectos asociados a revoicing

Para estudiar el uso de revoicing nos fijamos en primer lugar en aspectos como: quién realiza el revoicing -orador- y a quién(es) va dirigido -interlocutor- (Goffman, 1981; O'Connor y Michaels, 1993, 1996); y cómo se manifiesta -aspecto literal- y para qué se comunica -efecto discursivo-, es decir, forma y función (Herbel-Eisenmann, Drake y Cirillo, 2009) (Figura 1.1). Posteriormente, nos fijamos en aspectos como contextos particulares de clase donde se ha analizado el uso de revoicing (Enyedy et al., 2008; Moschkovich, 1999), y posibles maneras de usar revoicing en discusiones de clase (Smith y Stein, 2011). En lo que sigue abordamos dichos aspectos.

Orador e interlocutor

En la perspectiva de Goffman de práctica discursiva, el acto de habla se da en contextos de interacción social con orador (speaker) e interlocutor (recipient). Al orador se le reconocen tres roles: *animador*, voz que emite la palabra o manos que la escriben; *autor*, voz que codifica lingüísticamente seleccionando palabras y sentimientos; y *principal*, voz de persona o institución que asume la responsabilidad de lo que se dice. Aunque el orador suele asumir los tres roles al mismo tiempo, Duranti (1997) propone un ejemplo de la descomposición del orador donde tres voces distintas se oyen:

> *Todo el mundo sabe que el Secretario de prensa suele actuar como animador de palabras que pueden haber sido escritas por otra persona (uno o más escritores de la Casa Blanca -autor(es)-) y que se dicen en nombre del Presidente -principal-* (Duranti, 1997, p. 297).

En las discusiones de clase donde se manifiesta el uso de revoicing por parte de profesores (Enyedy et al., 2008; Forman y Ansell, 2001, 2002; Forman, Larreamendy-Joerns, Stein y Brown, 1998), éstos "prestan su voz" a sus alumnos. En términos de Goffman, el profesor es animador de intervenciones de alumnos, que asumen la voz principal. La autoría es compartida entre profesor y alumno, puesto que aunque el profesor re-exprese la intervención usando las mismas palabras, puede complementar su re-expresión, por ejemplo, con gestos, miradas o pausas. Esto es hacer eco de la intervención (Ingram, 2012; Pimm, 1990).

Goffman señala que en cualquier situación puede haber varias personas que escuchen lo que se dice, pero sólo algunas están invitadas a participar (Duranti, 1997). Al interlocutor se le reconocen dos roles: *destinatario*, a quien van dirigidas la palabras; y *asistente*, quien forma parte de la discusión sin que se le dirijan las palabras expresadas. En discusiones de clase, el profesor se dirige a sus alumnos, que asumen el rol de destinatario. En nuestro caso, el rol de asistente no se considera, ya que aunque en las ocasiones en que el profesor se dirige a unos pocos alumnos (incluso a un solo alumno), todos los alumnos pueden participar en la discusión. Este hecho es rastreable lingüísticamente en los tiempos verbales y los nombres y pronombres usados.

Forma lingüística

Tal y como se define, revoicing implica vínculos entre intervención origen y intervención re-expresada. Esto constituye un par adyacente en el sentido de Sacks, Schegloff y Jefferson (1974) como por ejemplo lo son intervenciones del tipo pregunta - respuesta o saludo - saludo (en (Chico, 2014) se documenta un fenómeno similar de pares adyacentes). Además de compartir al menos una idea uno puede reconocer marcas lingüísticas. O'Connor y Michaels (1993) destacaron el uso de: marcadores discursivos como 'así' (*so* en el original, p. 323) que enlazan una afirmación a una declaración anterior y permiten al orador hacer una inferencia sobre las palabras re-expresadas; nombres o pronombres personales que permiten al profesor-orador crear una relación entre el contenido y el alumno-principal que ha expresado una intervención atribuyéndole las ideas; y verbos como 'pensar' y 'decir' que permiten al profesor vincular al alumno-principal con otras intervenciones. Es de esperar que ambas intervenciones compartan palabras idénticas o equivalentes para expresar una misma idea. Forman et al. (1998), en sus análisis del uso de revoicing durante discusiones en clases de matemáticas, vieron una tendencia en la profesora a repetir, ampliar, refrasear y relatar (*reporting* en el original, p. 531) intervenciones de los alumnos. En trabajos posteriores, Forman y Ansell añadieron traducir y reestructurar (2001) y sintetizar y desarrollar (2002). Forman y sus colegas definen revoicing atendiendo al aspecto literal en el que se manifiesta (no traducimos para evitar añadir significados no intencionados):

> *Revoicing involves the reuttering of another person's speech through repetition, expansion, rephrasing, and reporting* (Forman et al., 1998, p. 531).
> *Revoicing involves repeating, rephrasing, summarizing, elaborating, or translating someone else's speech* (Forman y Ansell, 2002, p. 258).

En su forma más sencilla (repetir), el interlocutor tiene tiempo para reflexionar sobre la intervención re-expresada, y en su forma más elaborada (refrasear, sintetizar, desarrollar o traducir), el interlocutor replantea y evalúa la intervención propia o de otro participante (Forman y Ansell, 2002).

En nuestro estudio tomamos las cuatro formas de Forman et al. (1998) entendidas en contextos de enseñanza y aprendizaje de matemáticas. Esto tiene resonancias con la descripción de reacciones de profesores de Ruthven y Hofmann (2016): repetir, usando las mismas palabras; refrasear, sustituyendo palabras por otras similares para la misma idea; ampliar, sustituyendo palabras por otras similares añadiendo contenido matemático; y relatar, usando otras palabras para la misma idea. Llamamos *forma lingüística* a cada una de estas formas de manifestación de revoicing. Omitimos el resto de formas (Forman y Ansell, 2001, 2002), dado que tal y como las hemos definido, están contenidas en las cuatro anteriores. Analizando los ejemplos que proponen las autoras, vemos que la forma re-estructurar está incluida en refrasear; sintetizar en relatar; y traducir y desarrollar están incluidas en ampliar, relatar o en ambas.

Función discursiva

O'Connor y Michaels (1993) afirman que cuando un profesor usa revoicing da la oportunidad al alumno de aclarar, corregir o aceptar la intervención origen y a su vez posiciona la intervención a debate para el resto de participantes. En su trabajo muestran tres ejemplos de revoicing a cargo del profesor. En el primer ejemplo, se recurre a esta práctica como modo de provocar que un alumno confirme o rechace como suya una proposición. En el segundo, como modo de añadir inferencias validadas por el profesor. Por último, en el tercero, para estrategias de resolución de problemas introducidas por alumnos con una lengua distinta a la de instrucción. Más tarde, en su trabajo de 1996, asocian el uso de revoicing con clarificar contenidos, introducir ideas, explicar un razonamiento con precisión y reorientar una discusión, entre otros. En ambos trabajos, estos autores ponen de relieve el efecto de unos usos de revoicing, con sus particulares formas lingüísticas, en el desarrollo del discurso de clase. Llamamos *función discursiva* al efecto asociado al uso de revoicing.

Enyedy et al. (2008) destacan la función discursiva de posicionar (*revoicing to* *position*, p. 141) que permite reconocer al alumno como autor de ideas matemáticas. Esto implica posicionar a los alumnos respecto a: la evaluación de sus ideas; las normas sociales y sociomatemáticas (Yackel y Cobb, 1996); y la relación con la estructura de tareas. En Herbel-Eisenmann et al. (2009), los autores examinan las discusiones de un grupo con ocho profesores-investigadores de secundaria, un profesor de universidad y dos alumnos de grado de Estados Unidos, sobre revoicing en clases de matemáticas. Se elabora un listado de funciones partiendo de autores como Forman et al. (1998) y O'Connor y Michaels (1993, 1996). En la Tabla 1.3 se recogen las funciones traducidas del inglés. En cursiva se indican aquellas añadidas por los profesores-investigadores del estudio.

	Funciones de revoicing
1	Posicionar a los alumnos en términos de la actividad matemática
2	Dar roles a los alumnos (como hacer hipótesis y demostrar enunciados)
3	Explicar el razonamiento
4	Resumir o repetir o agregar
5	Crear alineaciones y oposiciones sobre las ideas matemáticas
6	Ayudar a los alumnos a ser escuchados entre ellos
7	Ofrecer lengua matemática
8	Aclarar
9	Enfatizar o destacar importancia
10	Ayudar a los alumnos a hablar más matemáticamente
11	Extender los pensamientos del alumno
12	Empujar al desarrollo de una idea
13	*Ayudar a los alumnos a escuchar*
14	*Poner a veces al profesor en el centro de una idea en lugar del alumno*
15	*Cambiar el patrón de interacción con más participación de los alumnos*

16	*Evitar referencias vagas por parte de los alumnos*
17	*Prestar atención por parte de los alumnos*
18	*Captar la atención de los alumnos cuando están fuera de la tarea*
19	*Establecerse como la autoridad*
20	*Controlar*
21	*Comentar ideas de otros compañeros*
22	*Permitir que los alumnos no escuchen porque el profesor volverá a decirlo*
23	*Interrumpir el discurso*
24	*Permitir que el profesor recoja ideas y descubra qué decir o hacer*
25	*Seguir una estrategia*
26	*Hacer accesibles las ideas*
27	*Aumentar la participación de los alumnos*

Tabla 1.3: Funciones de revoicing (Herbel-Eisenmann et al., 2009, p. 274)

Las funciones identificadas hablan de matemáticas y de su compresión, de participación de los alumnos y de gestión de la discusión del profesor. En el sentido de Brown y Yule (1993) hay funciones descriptivas sobre expresión de contenidos y funciones interactivas sobre relaciones sociales y actitudinales. En nuestro caso, funciones orientadas a la matemática u orientadas a su pedagogía, aunque sobre todo nos ocuparemos de las funciones centradas en el contenido.

Debido a la relevancia que damos al uso de la lengua por delante de su apariencia lingüística, seguimos un procedimiento inductivo en la identificación y nominación de funciones discursivas. Sin embargo, coincidimos con Herbel-Eisenmann et al. (2009) en que conviene hablar de la forma de manifestación de revoicing dado que la forma conlleva un efecto discursivo. Por ejemplo, refrasear puede iniciar la construcción de comprensión matemática; y repetir puede amplificar o llamar la atención de los interlocutores. Aunque aquí no se distingan los efectos asociados a formas, se considera un paso necesario para identificar revoicing.

Usar revoicing en clase de matemáticas

A menudo es difícil entender qué comunican los alumnos al hablar de matemáticas. Si el profesor sólo considera las intervenciones que son fáciles de comprender, no logrará mejorar el razonamiento de todos sus alumnos. Pensamiento y razonamiento no siempre se correlacionan con una expresión verbal clara (Chapin, O'Connor y Anderson, 2003). Según Forman y Ansell (2001), en clases donde se usa revoicing, hay mayor tendencia de los alumnos a realizar intervenciones. Las autoras plantean el uso de revoicing como una práctica 'positiva' para la participación en discusiones matemáticas. En clases donde hay alumnos que se resisten a comunicar sus intervenciones en la lengua de instrucción (Enyedy et al., 2008; Moschkovich, 1999; O'Connor, 2001), el profesor debe entender la intervención de los alumnos y tratar de centrar la discusión en el contenido matemático aunque presente errores gramaticales o léxicos. El apoyo a la participación de los alumnos en discusiones matemáticas requiere escuchar y descubrir el contenido matemático comunicado; y re-expresar intervenciones con términos más adecuados matemáticamente (Moschkovich, 1999). En el marco del proyecto QUASAR para fomentar y estudiar programas de mejora de las matemáticas de alumnos de 13-15 años, Forman, McCormick y Donato (1997) vieron en una clase que con el uso de revoicing la responsabilidad de dar explicaciones era compartida entre profesora y alumnos. Esto también se evidenció en otra clase (Forman et al., 1998) donde la profesora implica a sus alumnos en la presentación y defensa de ideas matemáticas.

En Chapin et al. (2003), Cirillo (2013) y Smith y Stein (2011), los autores proponen usar revoicing al profesor para conseguir discusiones matemáticamente productivas. Distinguen tres posibles usos: (a) el profesor re-expresa la intervención de un alumno; (b) pide a un alumno que re-exprese su propia intervención; (c) pide a un alumno que re-exprese la intervención de otro. Chapin et al. (2003) defienden que este último uso tiene un gran potencial en clases con alumnos cuya lengua no coincide con la de instrucción dado que ofrece otra interpretación de la intervención del alumno.

Hasta aquí, se puede pensar que el uso de revoicing siempre tiene efectos positivos para el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, pues la mayoría de la literatura se ha centrado en sus beneficios (Ingram, 2012). Herbel-Eisenmann et al. (2009) identifican inconvenientes como: el responsable (principal) de las ideas puede pensarse que es el profesor en vez del alumno; los alumnos pueden prescindir de escuchar entendiendo que el profesor re-expresará las ideas importantes; el profesor puede enmascarar las comprensiones de sus alumnos; los alumnos pueden verse obligados a estar de acuerdo o en desacuerdo con la intervención re-expresada; se pueden re-expresar ideas incorrectas. La presente investigación no se posiciona a favor o en contra del uso de revoicing, sino, a favor de estudiar cómo emerge y se desarrolla en discusiones de clase.

2 Metodología y métodos

En este capítulo presentamos el enfoque metodológico de la investigación, así como los métodos diseñados y aplicados para el alcance de los objetivos. En primer lugar resumimos las teorías metodológicas (2.1); después presentamos el contexto empírico (2.2) y las tareas de la experimentación (2.3); y finalmente describimos la recogida de datos (2.4) y los métodos de análisis (2.5).

2.1. Aproximación metodológica

A nivel metodológico distinguimos y concretamos elementos del paradigma de la Teoría Fundamentada y elementos de Análisis del Discurso.

La investigación adopta aspectos de la Teoría Fundamentada (Corbin y Strauss, 1990), en parte porque el estudio de revoicing surgió de mirar datos. El estudio no fue diseñado inicialmente para indagar sobre el uso de revoicing, sino que al obtener y transcribir datos de clases de secundaria emergió esta práctica y el interés por averiguar su incidencia en la actividad matemática. Se trata, pues, de una investigación inductiva (Charmaz, 2006), además de cualitativa y comparativa en el sentido de Corbin y Strauss (1990). La comparación viene dada por la interacción entre datos y perspectivas durante la recogida y análisis, siendo la mirada a los datos lo que hace emerger objetivos de estudio y, de ahí, teorías. Comparación constante y teorías permiten generar códigos inductivos para analizar y conectar datos en aras al logro de objetivos (Boeije, 2002).

Según Dey (1993), hay dos actividades básicas en el análisis de datos: fragmentar y conectar. La fragmentación permite obtener unidades más manejables para el análisis. En nuestra investigación las unidades de análisis principales son los turnos de habla, en adelante turnos, obtenidos de la transcripción cronológica y literal de las intervenciones en la discusión en gran grupo de cada tarea. A su vez, la conexión consiste en discutir para obtener resultados. En nuestro caso la conexión se establece al focalizar la atención en el contenido matemático, pedagógico y comunicativo de los turnos con revoicing identificado.

El objeto de estudio son discursos de clase que se comunican en discusiones conjuntas de tareas. Los discursos se entienden como intervenciones de habla entre alumno y profesor o entre alumnos. En las discusiones conjuntas se reconoce una estructura profesora-alumno(s)-profesora. Esto llevó a pensar en discursos ligados a la estructura IRF -iniciación, respuesta y retroalimentación (feedback)- (Sinclair y Coulthard, 1975) y a la estructura IRE -iniciación, respuesta y evaluación- (Mehan, 1979), donde el profesor inicia, retroalimenta y evalúa. Pero el análisis de intervenciones de profesoras evidenció más reacciones (p. 19). En el estudio de discusiones conjuntas de clases de matemáticas Ruthven y Hofmann (2016) tipifican reacciones como: aprobar, desaprobar, repetir, re-exponer, traducir, re-direccionar, averiguar, expandir, retomar y transferir. Prestamos atención a la re-expresión por parte de profesoras a contribuciones de alumnos mediante repetición o ampliación.

Las opciones teórica y metodológica adoptadas coinciden con las teorías sociales contemporáneas del discurso sin prescindir de sistemas semióticos y configuraciones culturales de la clase de matemáticas. Además de las estructuras que se pueden reconocer en el discurso, nos centramos en las palabras habladas y los significados que con ellas se comunican. El discurso matemático incluye palabras especializadas y significados diferentes de los habituales en el habla cotidiana (Pimm, 1990). Aquí, el discurso matemático es escolar. Este hecho es relevante puesto que si se restringe la mirada al discurso matemático formal se pierde información matemáticamente valiosa que se pone de manifiesto con palabras y expresiones del discurso ordinario (Moschkovich, 2007). Esto llevó a definir las *expresiones clave*: términos propios de la matemática y del contexto de la tarea con formas y significados específicos.

El discurso hablado se complementa con gestos, miradas y representaciones gráficas y, más en general, con elementos paralingüísticos que caracterizan la naturaleza multimodal de la lengua (Arzarello, Paola, Robutti y Sabena, 2009). Por ello se presta atención a elementos paralingüísticos que complementan intervenciones implicadas en el uso de revoicing.

2.2. Contexto del estudio empírico

La experimentación se llevó a cabo en dos clases de educación secundaria de dos centros de Barcelona. En el primer centro (A) participaron un grupo de 28 alumnos de primer curso de educación secundaria y su profesora (PA); y en el segundo centro (B) participaron 15 alumnos de tercer curso y su profesora (PB). La elección de centros surgió de la disposición de las profesoras a participar en el estudio. Ambas profesoras además de tener una experiencia de más diez años en centros de secundaria, son licenciadas en matemáticas y doctoras en educación matemática. Están familiarizadas con protocolos de recogida de datos, como la obtención de las autorizaciones de las familias y de la dirección del centro, así como con el uso de cámaras y grabadoras en sesiones de clase. Se han usado pseudónimos a fin de garantizar el anonimato de los participantes y centros.

La diferencia de edad entre alumnos de ambos centros no se consideró un inconveniente dado que las tareas trataban contenidos matemáticos con presencia curricular en distintos cursos. Ninguno de los grupos había trabajado antes la resolución de problemas con materiales (Boukafri, 2015b). Era una dinámica de trabajo nueva para alumnos y profesoras.

2.3. Diseño y desarrollo de tareas

Se adaptaron e implementaron cuatro tareas en los cursos 2013-2014 y 2014-2015 en el centro A y tres tareas en el curso 2014-2015 en el centro B. De acuerdo con Smith y Stein (2011) se seleccionaron y adaptaron problemas que trataban ideas matemáticas pertinentes a nivel curricular y que admitían más de una estrategia de resolución (Schoenfeld, 1985). Las tareas originales están en: Nrich -Millennium Mathematics Project, University of Cambridge; y PuntMat –Repositorio de recursos de profesorado de secundaria y de la Universitat Autònoma de Barcelona. La Tabla 2.1 resume las fechas de implementación y fuentes por tarea.

Tarea	**Fecha de implementación**		**Fuente**
	Centro A	Centro B	
Cuadrados inclinados	Mayo 2014	-	Nrich, *Tilted Squares* `http://nrich.maths.org/2293`
La araña y la mosca	Mayo 2014	Diciembre 2014	Nrich, *The Spider and the Fly* `http://nrich.maths.org/2365`
Empaquetando vasos	Mayo 2014	Diciembre 2014	Nrich, *Covering Cups* `http://nrich.maths.org/880`
Módulo	Mayo 2015	Junio 2015	PuntMat, *Casas de cuatro cubos* `http://puntmat.blogspot.com.es/2014/01/cases-de-quatre-cubs.html`

Tabla 2.1: Tareas, fechas de implementación y fuentes

Las tareas son principalmente de geometría. Para cada tarea se seleccionó material que complementaba la lectura y comprensión del enunciado escrito a fin de representar condiciones, construir estrategias y obtener posibles soluciones (Boukafri, 2015b; Boukafri y Ferrer, 2015; Boukafri, Ferrer y Morera, 2015). A cada alumno se le entregaba un dosier de trabajo con los enunciados escritos y materiales acorde a cada tarea, cuyo uso era voluntario.

Cada tarea ocupó una sesión de clase de aproximadamente una hora. Primero los alumnos debían leer el enunciado, después trabajar en grupos reducidos de entre dos y cuatro personas y finalmente se realizaba una discusión conjunta. El material se daba durante el trabajo en grupos, momento en el cual el registro escrito era individual. Durante y después de la discusión conjunta, los alumnos podían corregir, modificar o completar sus textos individuales.

Selección de tareas

De las cuatro tareas preliminares se seleccionaron dos, *La araña y la mosca* (Tarea 1) y *Empaquetando vasos* (Tarea 2). De las tareas implementadas en ambos centros, se eligieron aquellas para las cuales los alumnos de cada clase eran los mismos al haber sido llevadas a cabo en el mismo mes y curso. Además, la investigadora constató que los alumnos de ambos centros propusieron más de una estrategia de resolución para cada tarea. Algunas estrategias eran originales de los alumnos, es decir, no habían sido consideradas previamente por profesoras ni investigadora.

La primera tarea, en adelante T1, plantea hallar el camino óptimo que debe recorrer una araña para cazar una mosca (Figura 2.1). Los animales están situados en paredes opuestas de un salón que es un ortoedro. La tarea es pertinente a nivel curricular debido a que trata contenidos como posición y orientación de figuras en dos y tres dimensiones, longitudes, desarrollos planos de cuerpos geométricos, Teorema de Pitágoras y selección de unidades adecuadas a cada magnitud.

> Una araña está situada en medio de una de las paredes más pequeñas de mi salón y una mosca está en la ventana de la pared opuesta, 1.5 m por encima del suelo y 0.5 m de la pared adyacente (pared con cuadros).
> La sala mide 5 m de largo, 4 m de ancho y 2.5 m de alto.
> ¿Cuál es el camino más corto que la araña deberá recorrer para cazar a la mosca?
> Suponed que la araña no utiliza telarañas para desplazarse, lo hace caminado por las paredes.

Figura 2.1: Enunciado de T1

Para explicar el camino solución se pueden realizar razonamientos geométricos que implican visualizar un ortoedro, hallar relaciones entre plano y espacio y percatarse de los distintos desarrollos de un ortoedro; y realizar razonamientos analíticos que implican hallar la medida de longitud del camino, relacionándolo con la distancia entre dos puntos del plano y el Teorema de Pitágoras. También intervienen propiedades de la distancia tales como la desigualdad triangular (ver resolución de T1 en Anexo A.1).

Como material de soporte para T1, se facilitó un ortoedro abierto por una cara que representaba el techo del salón y los siguientes detalles: imagen de una ventana, cuadros y baldosas en la cara que simulaba el suelo (Figura 2.2). Se facilitaron adhesivos para simbolizar a los animales en el salón. Se indicó que se podía manipular el ortoedro y que no se usara si no se consideraba pertinente.

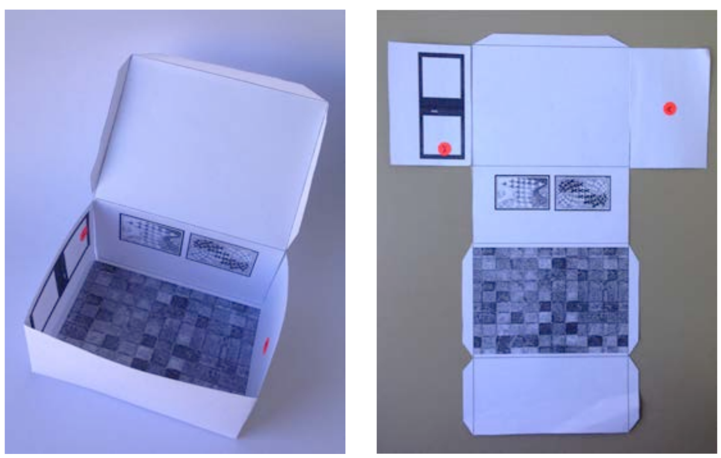


Figura 2.2: Maqueta del salón

La segunda tarea, en adelante T2, plantea hallar una caja que contenga doce vasos y que requiera la menor cantidad de material para su construcción verificando ciertas restricciones (Figura 2.3). La tarea es pertinente a nivel curricular debido a que trata contenidos como longitud, perímetro, área, volumen, desarrollos planos de cuerpos geométricos o selección de unidades adecuadas a cada magnitud.

> Disponemos de 12 vasos. Cada vaso mide 92 mm de altura y 74 mm de diámetro del borde por donde se bebe. Queremos construir una caja lo más económica posible que contenga los 12 vasos.
> Además, queremos que:
> - La base de la caja sea rectangular.
> - Los vasos estén mirando hacia arriba en la caja.
> - Los vasos no estén situados uno dentro de otro.
>
> Con las restricciones anteriores, ¿qué hace falta minimizar para construir la caja más económica posible? Razona tu respuesta.

Figura 2.3: Enunciado de T2

Dadas las restricciones del problema hay tres posibles cajas solución, es decir, tres posibles ortoedros. La tarea es un problema clásico de optimización de superficies de ortoedros con igual volumen. Para justificar la solución, se pueden comparar áreas y perímetros de caras del ortoedro. Esto implica identificar qué dimensiones caracterizan un ortoedro y relacionar propiedades en el plano y el espacio. A su vez esto implica estudiar magnitudes invariantes para las posibles cajas solución, como volumen y área de sus bases (ver resolución de T2 en Anexo A.2).

Como material de soporte para T2, se facilitaron doce vasos de plástico con las medidas indicadas en el enunciado. A las profesoras se les facilitaron las tres cajas candidatas a solución.

2.4. Diseño y desarrollo de la experimentación

La investigadora se reunió con PA y PB por separado para presentar y discutir las tareas y su resolución. En la reunión se facilitó el dosier de trabajo, una propuesta de resolución (Anexo A) y el *Esquema de la tarea*. El Esquema de la tarea es una adaptación de la noción de árbol del problema (Cobo, 1998; Morera, 2013) . Se utilizó como instrumento para planificar la discusión de estrategias y procedimientos mediante la preparación de preguntas de apoyo al aprendizaje del alumno (ver los esquemas de T1 y de T2 en las Figuras 3.3 y 3.4).

Se diseñan las sesiones de clase con la investigadora como profesora para ayudar en la resolución de dudas de alumnos. En la discusión conjunta pasa a ser observadora y anota comentarios de la discusión.

Se registraron en vídeo y audio tres grupos reducidos por centro, seleccionados con la ayuda de las profesoras por tener alumnos que acostumbran a realizar aportaciones interesantes durante las clases de matemáticas (Saxe et al., 2009). Tres videocámaras registraron las discusiones conjuntas: dos situadas delante de los alumnos para identificar quién interviene; y una al fondo para captar qué dicen PA y PB y a quién y qué anotan en la pizarra. Disponemos pues de varias fuentes de datos:

i. Dosieres de trabajo de cada alumno.

ii. Vídeos y audios de seis grupos reducidos por tarea, tres por centro.

iii. Vídeos de las discusiones conjuntas de cada sesión.

iv. Notas de campo y conversaciones informales con las profesoras.

Los objetivos (p. 4) fueron reformulados con posterioridad a la recogida de datos y para su consecución se consideraron los vídeos de las discusiones conjuntas por tarea. Ahí está registrado el discurso hablado de los participantes. Los datos de vídeo permiten reconocer quién interviene y resolver parte de la ambigüedad del discurso hablado (Pimm, 1990) en el uso, por ejemplo, de expresiones inacabadas. Las notas de campo sirvieron como soporte para el tratamiento de los vídeos. El resto de datos no forma parte del cuerpo de análisis.

2.5. Objetivos y métodos

Los vídeos de las discusiones de cada tarea fueron transcritos asignando turnos por participante. Cada turno corresponde a la intervención de un participante. Cuando ha sido posible y pertinente, se ha incluido texto figural a fin de representar acciones durante discursos pronominales y circunstanciales (Figura 2.4). Las transcripciones comunican las lenguas orales usadas, mayormente el catalán; se han respetado las palabras usadas por los participantes.

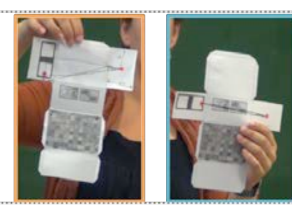
21	**PA:** A veure... ho teniu fet?
22	**Cris y Alma:** Sí.
23	**PA:** Mireu això, quina diferència hi ha entre **aquesta habitació** i **aquesta**? Clara? 
24	**Clara:** És la mateixa només que les parets s'han ajuntat de maneres diferents.

Figura 2.4: Ejemplo de transcripción multimodal

Para dar respuesta a los objetivos de la investigación, en primer lugar se llevó a cabo un análisis local de datos; se pasó progresivamente a un punto de vista más global, que pasó a local. El análisis local consiste en el estudio de unidades contenidas en la discusión conjunta de una tarea. Las unidades más pequeñas que se consideraron fueron partes de un turno y las mayores fueron conjuntos de turnos no necesariamente consecutivos. El análisis se inicia en la descripción de las unidades más pequeñas (local), se sigue agrupando y finaliza conectando agrupaciones (global). Reinterpretamos el ciclo del análisis cualitativo de Dey (1993), compuesto por los procesos: describir, clasificar y conectar. Substituimos el proceso de clasificar por agrupar (Figura 2.5). Según el autor, el proceso clasificar requiere categorizar datos y en nuestro caso las relaciones entre unidades de análisis no son necesariamente excluyentes.

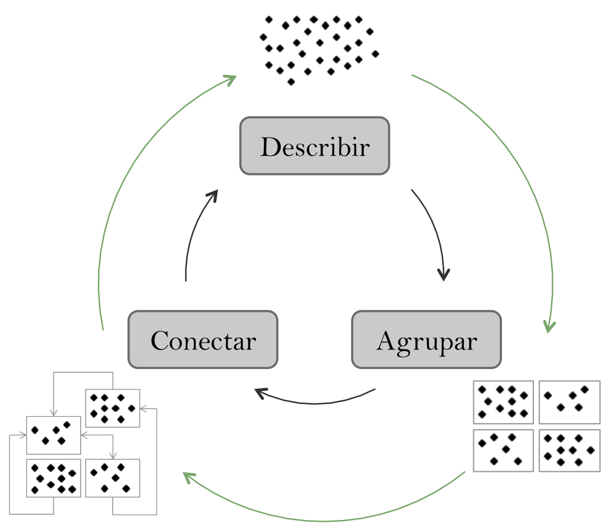


Figura 2.5: Reinterpretación del ciclo de análisis cualitativo de Dey (1993, p. 32)

El método de codificación de datos partió de una codificación inicial, que consistió en describir de manera detallada qué y cómo se comunica, a nivel matemático, en los turnos en que las profesoras re-expresan contribuciones de alumnos.

A estos turnos se les asignó dos códigos sobre cómo y qué se re-expresa. Posteriormente se analizaron los códigos y se identificaron códigos equivalentes que se podían fusionar en un código o dividir en más de uno. Nuestro proceso de codificación se asemeja a las fases de codificación de Charmaz (2006): codificación inicial y codificación selectiva o centrada. En la codificación inicial se detallan y asignan códigos a cada línea de texto; y en la codificación selectiva o centrada, se enfatizan los códigos más frecuentes, se combinan códigos y se descartan códigos iniciales.

La Tabla 2.2 detalla los instrumentos de análisis para cada objetivo. Retomamos la pregunta de investigación y los objetivos (p. 4).

¿Qué se entiende por revoicing del profesor en discusiones conjuntas de tareas matemáticas?

De acuerdo con el objetivo de interpretar la noción de revoicing a nivel de turnos de habla (Objetivo 1), se necesitó:

1. Identificar los turnos con revoicing y actividad matemática.
2. Interpretar formas lingüísticas y funciones discursivas de dichos turnos.

De acuerdo con el objetivo de interpretar la noción de revoicing de episodios (Objetivo 2), se necesitó:

1. Estudiar relaciones entre funciones discursivas respecto a la actividad matemática.

De acuerdo con el objetivo de interpretar la noción de revoicing de sesiones de clase (Objetivo 3), se necesitó:

1. Estudiar conexiones entre episodios respecto a la actividad matemática.

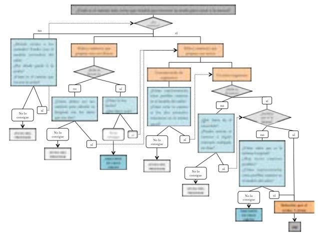
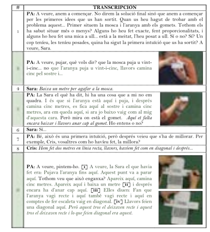
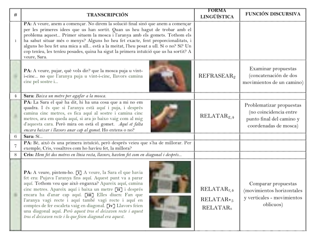
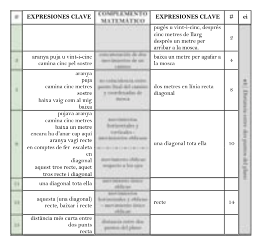
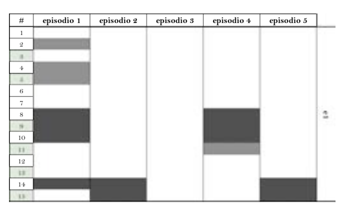
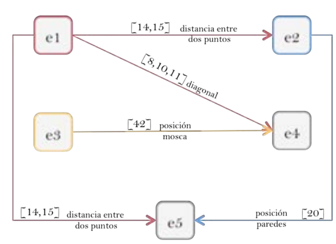
	Objetivos	Instrumentos	
1	Turnos con actividad matemática explícita	 *Esquema de la tarea*	 *Horizontal*
1	Forma y función	 *Horizontal*	
2	Forma y función	 *Vertical*	
3	Conexiones entre episodios	 *Turnos origen*	 *Conectividad*

Tabla 2.2: Objetivos e instrumentos de análisis

2.5.1. Instrumentos referentes al Objetivo 1

Para la consecución del Objetivo 1 se identificaron los turnos con actividad matemática explícita mediante el Esquema de la tarea. Los turnos con revoicing permiten asociar formas lingüísticas y funciones discursivas recogidas en el instrumento denominado Horizontal.

Esquema de la tarea

El Esquema de la tarea (Figura 2.6) es un instrumento para la identificación de turnos de comunicación de contenidos matemáticos. Permite identificar expresiones clave de la tarea asociadas a: contenido matemático, estrategias de resolución, respuestas a preguntas de apoyo y enunciado escrito. A las respuestas de las preguntas de apoyo y al enunciado escrito se asocian principalmente expresiones que atañen a los datos, incógnitas y sujetos de la tarea (p. ej. araña y mosca en T1, y vasos en T2).

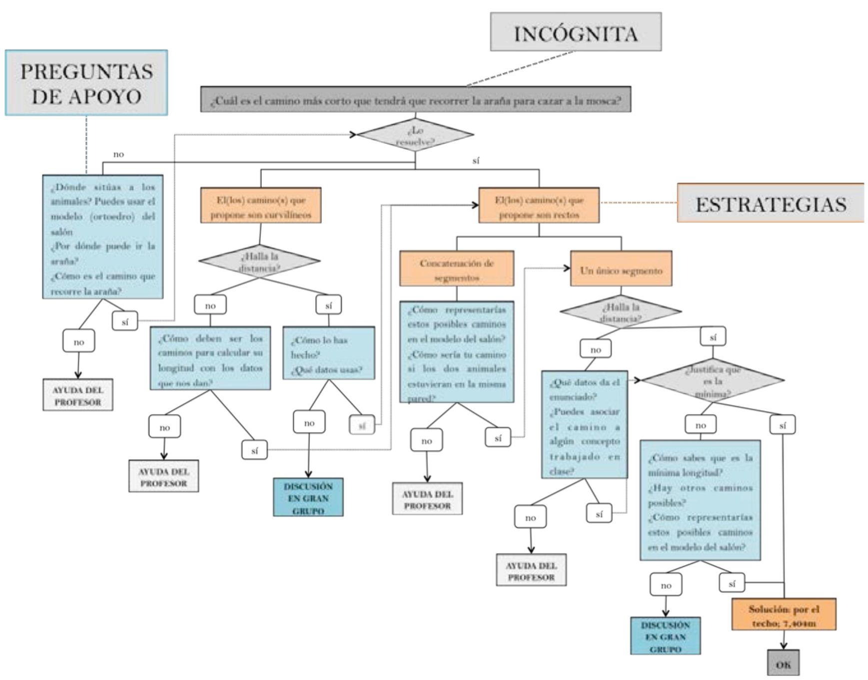


Figura 2.6: Leyenda de un Esquema de la tarea

De este modo se distinguen los turnos con revoicing que interesan para proseguir el estudio. La Tabla 2.3 muestra turnos con revoicing que no se han considerado por no haber expresiones clave.

[204-T2]	**PB**: Sí, ya lo sé. Tú has decidido que todos los prismas son pirámides y divides por tres cuando te da la gana. Ya lo sabemos, esto ya lo sabemos. *Tú no te confundes cuando pones las fórmulas, Mohamed.* <u>Nunca te confundes, Mohamed nunca se confunde cuando pone una fórmula, jamás</u>.
[218-T2]	**PB**: *Perdón*, <u>perdón, perdón, perdón, perdón, perdón</u>.

Tabla 2.3: Ejemplos de turnos sin expresiones clave

Instrumento Horizontal

El instrumento Horizontal muestra qué contenido matemático se re-expresa y cómo mediante revoicing. Consiste en una tabla con cuatro columnas (Figura 2.7). En la primera columna se enumeran los turnos transcritos y se señalan aquellos con revoicing (verde). En la segunda columna figura la transcripción multimodal con los turnos de origen (cursiva) de aquellos con revoicing (verde). Así se marcan parejas de turnos de origen y turnos con revoicing. Identificamos *auto-revoicing* (asterisco) cuando la misma persona comunica los turnos con revoicing y los de origen. La lectura reiterada de la discusión permitió seleccionar turnos con revoicing y actividad matemática, a la vez que interpretar cómo se re-expresa el contenido lingüísticamente; esto lleva a la tercera columna donde se indican las formas lingüísticas. En un mismo turno con revoicing se puede identificar más de una forma lingüística. Finalmente, en la cuarta columna se indican las funciones discursivas del turno con revoicing (entre paréntesis). La función puede coincidir para más de un forma identificada en un mismo turno.

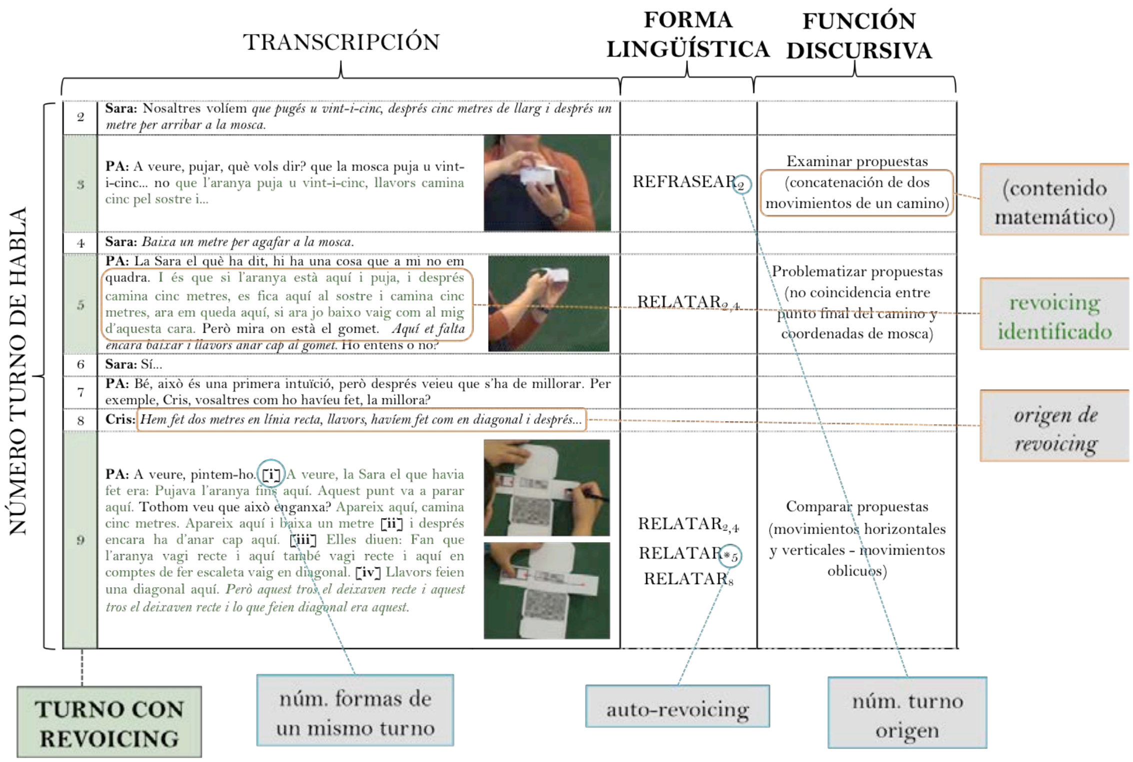


Figura 2.7: Leyenda del instrumento Horizontal

La *forma lingüística* indica un aspecto de cómo se manifiesta el uso de revoicing. Distinguimos cuatro tipos: repetir, refrasear, relatar y ampliar. En la Tabla 2.4 se detalla la descripción y un ejemplo de cada tipo extraídos de T1-PA.

Tipo	**Descripción**	**Ejemplo**
Repetir	Usar exactamente las mismas palabras	[10] **Maria**: Però el millor *és fer una diagonal...* [11] **PA**: Fer una diagonal...
Refrasear	Substituir palabras por otras similares para la misma idea	[10] **Maria**: Però el millor és *fer una diagonal des de l'aranya fins la mosca.* [11] **PA**: Fer una diagonal tota ella.

Relatar	Usar otras palabras para la misma idea	[8] **Cris**: *Hem fet dos metres en línia recta, llavors, havíem fet com en diagonal i després...* [9] **PA**: [...] Elles diuen: Fan que l'aranya vagi recte i aquí també vagi recte i aquí en comptes de fer escaleta vaig en diagonal.
Ampliar	Sustituir palabras por otras similares añadiendo contenido matemático	[31] **Pol**: *Dos hexaminós diferents.* [32] **PA**: [...] Aquí hem desplegat així, veieu on hem posat les pestanyes? aquí és com si haguéssim desplegat d'una altra manera.

Tabla 2.4: Tipos de forma lingüística

La *función discursiva* indica un aspecto de qué se comunica. Nos referimos al contenido matemático asociado a las formas lingüísticas identificadas. Esto requirió el análisis del turno con revoicing en relación con turnos anteriores y posteriores. La cantidad de turnos considerados fue particular y de acuerdo con el contenido matemático comunicado. El cambio de contenido marcaba el límite de turnos a considerar. Mediante triangulación de datos se elaboró un listado usando palabras que describen en qué consiste la función interpretada. La Tabla 2.5 ilustra los tipos y su descripción ostensiva. La descripción ostensiva es una práctica metodológica habitual en la investigación cualitativa que consiste en describir mediante un ejemplo que se considera explicativo.

Tipo		**Descripción ostensiva**
Problematizar	ARGUMENTOS	[7-T2-PB] Més lògic...? què estem en filo? més lògic...
Proporcionar		[223-T2-PB] ¡Si no, no caben señores! ¡Si el setenta y cuatro fuera el de la parte inferior no cabrían! Ah, no lo habíamos pensado.
Solicitar		[55-T1-PB] Ah, per què? Espera, espera, espera. Qiu, perquè dius que els altres són més llargs?
Enfatizar	IDEAS	[115-T2-PA] Contra menys... El que ha dit la Clara. La frase de la Clara: Contra menys gots toquin la vora millor.

Conectar	CONCEPTOS	[32-T1-PA] Dos hexaminós diferents, és a dir, dos desplegaments del cub diferents.
Formalizar		[15-T1-PA] Sempre la distància més curta entre dos punts és la que és recta. A veure, Albert, què proposes.
Enfatizar	DATOS	[47-T1-PA] Cinc metres. I ara aquí tenim una aranya.
Puntualizar		[82-T2-PB] Setenta y cuatro. Eso sí. Lo he hecho un poco pequeño. Creo que voy a mover la naranja si me lo permitís. Dotze per setanta quatre. Algú ho ha calculat què dóna això?
Solicitar		[208-T2-PB] ¿La altura de los vasos aquí cuál es?
Problematizar	EXPRESIONES	[121-T2-PB] Milímetros... ¿Esto qué son? Noelia nadie más.
Solicitar		[119-T2-PB] Vamos a ver. ¿Esto qué son?
Comparar	PROPUESTAS	[13-T1-PA] Val, de moment de les opcions que estem donant aquesta és la millor. Com ho sabem això de què aquesta serà més curt que fer recte, baixar i recte?
Ejecutar		[80-T2-PA] Veieu que aquí de parets d'aquestes en necessitem una, dos, tres, quatre, cinc, sis, set, vit, nou, deu, onze, dotze, tretze... ja no sé quantes voltes he donat. Necessitem aquestes quatre i aquestes quatre, vuit, i tres, onze i tres, catorze. Vale. En canvi aquí necessitem, sis i sis dotze, tretze, catorze, quinze i setze. Necessitem setze d'aquestes. Per tant, clar, en necessitem més. I aquí, en necessitem, dotze i dotze vint-i-quatre, vint-i-cinc i vint-i-sis. Per tant, parets d'aquestes en necessitem vint-i-sis. Vale. Sí, tothom?
Examinar		[15-T2-PA] Les dos tapes. La del terra i la de dalt. La de terra li dóna?
Identificar		[21-T2-PA] Posar-ne tres i quatre, posar-ne dos i sis... o posar-ne?
Problematizar		[115-T2-PA] Clar pel raonament de l'Alma, si omples el forat millor perquè així tens menys parets.
Solicitar		[59-T1-PB] A veure, aquest camina per els quadros, i aquest camina per el sostre. L'altra possibilitat quina era? Que no sigui pels quadros i pel sostre.
Validar		[69-T1-PA] Anant [i] pel sostre.

Problematizar	RESULTADOS	[106-T2-PB] Cuatrocientos cuarenta y cuatro ¿no? Seguro que no.
Obtener		[102-T1-PB] Set coma quatre? Anant pel sostre?
Solicitar		[70-T2-PB] Voy a volverlo a repetir, para ver si tenemos suerte y me escucháis: área de la base de la que sería nuestra caja azul.

Tabla 2.5: Tipos de función discursiva

En el instrumento Horizontal (cuarta columna, Figura 2.7) se detallan los argumentos, conceptos, datos, expresiones, ideas, propuestas y resultados relativos a cada función discursiva, actuando como complemento de qué matemática se comunica. La Tabla 2.6 ilustra ejemplos de estos complementos correspondientes a las funciones de la Tabla 2.5.

ARGUMENTOS	
[7-T2-PB]	Razonamiento intuitivo
[223-T2-PB]	Mayor diámetro de un vaso para garantizar volumen suficiente
[55-T1-PB]	Longitud de caminos candidatos a solución
IDEAS	
[115-T2-PA]	Optimización de paredes por vaso
CONCEPTOS	
[32-T1-PA]	Hexaminós y ortoedro
[15-T1-PA]	Distancia entre dos puntos del plano
DATOS	
[47-T1-PA]	Longitudes del problema
[82-T2-PB]	Diámetro de un vaso
[208-T2-PB]	Altura de un vaso
EXPRESIONES	
[121-T2-PB]	Incoherencia entre unidad-magnitud
[119-T2-PB]	Unidades de medida
PROPUESTAS	
[13-T1-PA]	Movimientos horizontales y oblicuo – movimiento único oblicuo
[80-T2-PA]	Número de paredes laterales por caja según posición de los vasos
[15-T2-PA]	Área de las bases caja 3x4

[21-T2-PA]	Distribución de los vasos en dos filas de seis, 2x6
[115-T2-PA]	Pared interior de la caja con forma de corona
[59-T1-PB]	Ampliación de posibles camino solución
[69-T1-PA]	Menor longitud
RESULTADOS	
[106-T2-PB]	Número incorrecto
[102-T1-PB]	Longitud de un camino por el techo
[70-T2-PB]	Área de una base de la caja 1x12

Tabla 2.6: Complemento matemático de las funciones discursivas

2.5.2. Instrumentos referentes al Objetivo 2

La consecución del Objetivo 2 partió del análisis y resultados para el Objetivo 1. Se usaron las formas y funciones de turnos con revoicing. Para el estudio de funciones discursivas de turnos se diseñó el instrumento denominado Vertical que deriva del Horizontal. Así, se obtuvieron agrupaciones de turnos consecutivos.

Instrumento Vertical

El instrumento Vertical consiste en una tabla con seis columnas (Figura 2.8). En la primera y segunda columna aparece la numeración de los turnos con revoicing y sus expresiones clave, respectivamente. En la tercera columna se retoman los complementos matemáticos de las funciones discursivas (Tabla 2.6) para hallar relaciones entre expresiones clave. En la cuarta y quinta columna se indican las expresiones clave de los turnos intermedios entre turnos con revoicing expresados por alumnos y la numeración de estos turnos, respectivamente. Las funciones discursivas se agrupan según la actividad matemática tratada mediante la identificación de expresiones clave y los turnos intermedios permiten confirmar que la agrupación comunica una misma idea matemática. Llamamos *episodios* a la agrupación de turnos consecutivos que comparten una misma actividad matemática, y los enumeramos según el orden de manifestación. En la sexta columna se indica la numeración de episodios y se nombran con un título explicativo según la actividad matemática en la agrupación de turnos.

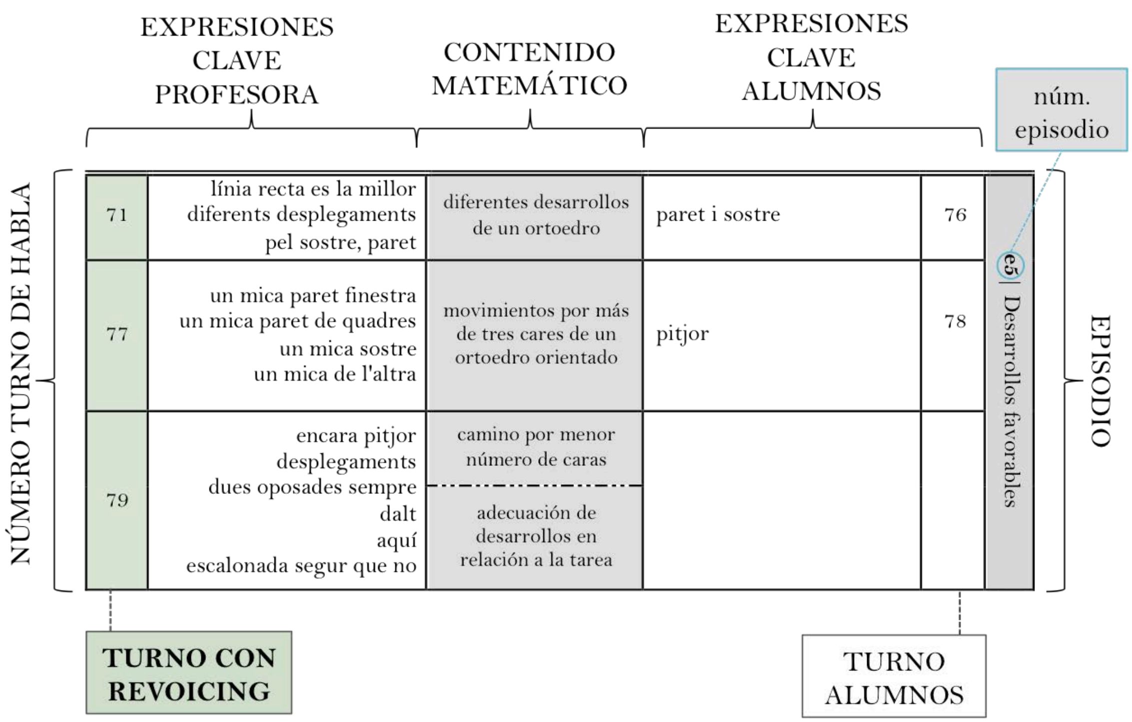


Figura 2.8: Leyenda del instrumento Vertical

2.5.3. Instrumentos referentes al Objetivo 3

La consecución del Objetivo 3 partió del análisis y resultados para los Objetivos 1 y 2. Se estudió la conexión entre episodios mediante el instrumento denominado Turnos origen que permitió evidenciar turnos compartidos entre episodios, es decir, turnos con ideas matemáticas compartidas. La conexión entre agrupaciones se estableció mediante el instrumento denominado Conectividad.

Instrumento Turnos origen

El instrumento Turnos origen muestra las relaciones entre episodios mediante la identificación de los turnos origen de cada episodio. Consiste en una tabla (Figura 2.9) en cuya primera columna se indica la numeración de los turnos ordenados cronológicamente y se señalan aquellos con revoicing (verde). En las demás columnas se presentan los episodios identificados mediante el instrumento Vertical. De la Figura 2.7 tomamos los subíndices asociados a cada forma que indican los turnos origen que corresponden a cada turno con revoicing. Para cada episodio se señala la numeración correspondiente a turnos de origen (gris claro) y se resaltan turnos origen re-expresados en más de un episodio (gris oscuro), a fin de identificar los contenidos matemáticos re-expresados en la discusión.

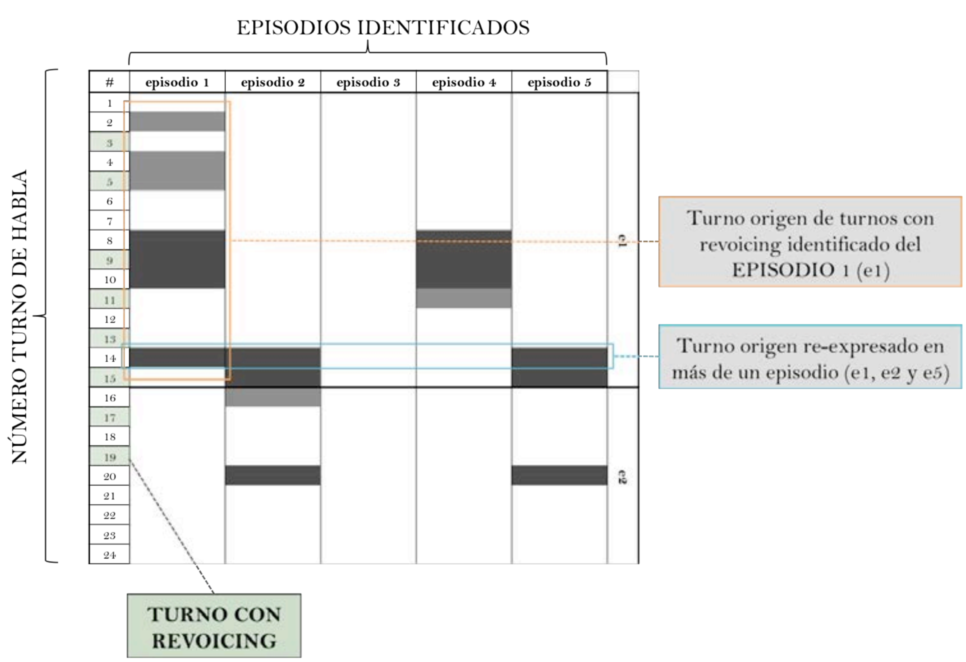


Figura 2.9: Leyenda del instrumento Turnos origen

Instrumento Conectividad

El instrumento Conectividad muestra conexiones entre episodios según la actividad matemática. Consiste en un esquema (Figura 2.10) donde se indican las conexiones entre episodios mediante los turnos origen compartidos a raíz del instrumento Turnos origen. La construcción del instrumento parte del primer episodio (e1). Se coloca una etiqueta con la numeración del episodio y se le asigna un color. Si el siguiente episodio (e2) no tiene turnos origen en su anterior (e1), se coloca la etiqueta del nuevo episodio debajo; en caso contrario, se sitúa a su lado derecho y se enlazan ambos episodios con una flecha (color de e1) en la que se indican la numeración de turnos compartidos y una referencia que resume las ideas que comunican dichos turnos. Se repite el proceso para todos los episodios. Llamamos *grafo* al esquema que resulta de aplicar el instrumento Conectividad.

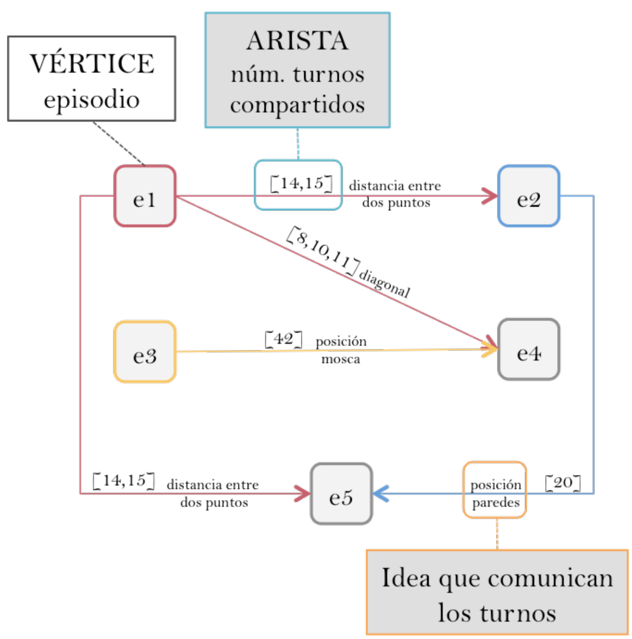


Figura 2.10: Leyenda del instrumento Conectividad

Usando la nomenclatura de la Teoría de Grafos, representamos discusiones conjuntas de sesiones como un grafo que tiene tantos vértices como episodios. Dos vértices distintos están conectados mediante una arista si los episodios correspondientes comparten al menos un turno. Los números indicados en cada arista corresponden a la numeración de turnos compartidos ordenados cronológicamente, separados por comas y entre corchetes.

Hay un salto sustancial entre lo que se analiza con el instrumento Horizontal y con los instrumentos Vertical, Turno origen y Conectividad. De acuerdo con el planteamiento metodológico, el instrumento Horizontal sirve para estudiar el discurso de sesiones de manera local, es decir, para estudiar expresiones y turnos de manera aislada. El instrumento Vertical va más allá al estudiar relaciones entre turnos, por tanto pasa a un nivel de mayor complejidad: el episodio. Finalmente, los instrumentos Turno origen y Conectividad tienden al análisis global estudiando el discurso de sesiones desde un punto de vista más general.

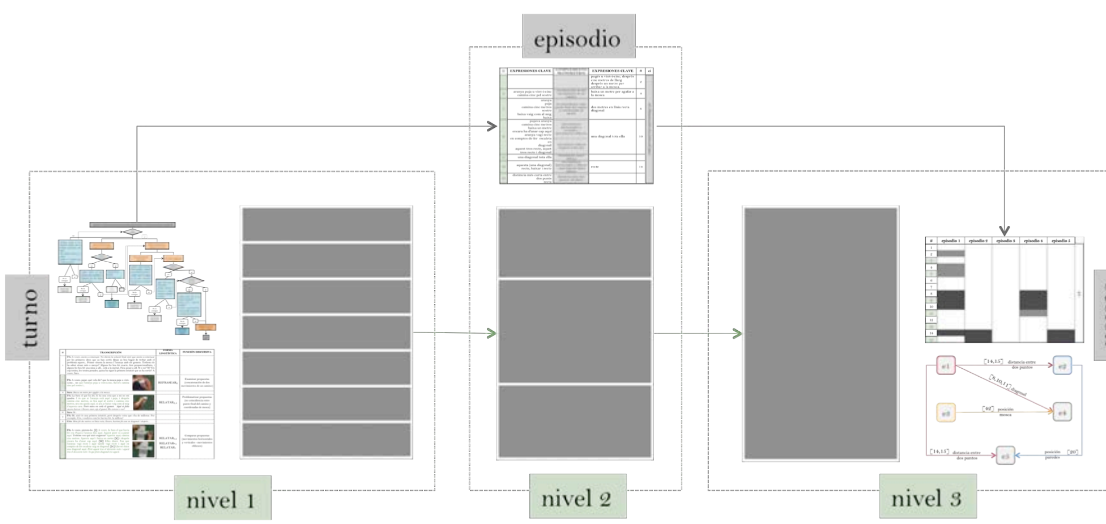


Figura 2.11: Tres niveles: turno, episodio y sesión

Hay dependencia entre instrumentos debido a los procesos de construcción (Figura 2.11). El resultado de aplicar un instrumento es el punto de partida para construir uno nuevo que cambie el enfoque de análisis hasta estudiar la noción de revoicing a tres niveles: turno (nivel 1), episodio (nivel 2) y sesión (nivel 3).

Análisis y resultados 3

En este capítulo explicamos el análisis y los resultados de la investigación. Para el Objetivo 1 (3.1), mediante los instrumentos Esquema de la tarea y Horizontal, presentamos primero la identificación de turnos con revoicing y actividad matemática rastreando expresiones clave y luego mostramos formas y funciones de dichos turnos. Para el Objetivo 2 (3.2), mediante el instrumento Vertical, mostramos la generación y estudio de episodios en relación con funciones discursivas. Finalmente, para el Objetivo 3 (3.3), mediante los instrumentos Turno origen y Conectividad, presentamos el estudio de discursos de sesiones según conexiones entre episodios. Para ilustrar el análisis tomamos la discusión de La araña y la mosca (T1) de la profesora A (PA), la de menos turnos. La aplicación de instrumentos del resto de tareas se puede consultar en Anexo (p. 135).

3.1. Objetivo 1: Nivel turnos

Con el logro del Objetivo 1, se interpreta la noción de revoicing a nivel de turnos de habla, primero identificando turnos con revoicing y actividad matemática y luego formas lingüísticas y funciones discursivas de dichos turnos.

3.1.1. Análisis: Expresiones clave, forma y función

Expresiones clave

Los discursos de las discusiones conjuntas comunican ideas matemáticas mediante el uso de palabras o expresiones que de antemano pueden no ser consideradas propias de la lengua matemática formal. Además, al identificar turnos con revoicing las ideas re-expresadas pueden ser ajenas a la matemática. Aquí, consideramos que un turno presenta actividad matemática explícita si contiene al menos una expresión clave (2.1). A esta expresión se le deben poder asociar significados matemáticos particularmente involucrados en la tarea. Por ello anticipamos y anotamos expresiones clave para cada tarea con el fin de rastrear turnos con revoicing y actividad matemática. Usamos el enunciado escrito y el Esquema de la tarea como guión para identificar expresiones clave.

Tarea 1

Retomamos el enunciado escrito de T1 (Figura 3.1). Identificamos (gris) expresiones clave que hablan de sujetos, datos e incógnita(s).

> Una araña está situada en medio de una de las paredes más pequeñas de mi salón y una mosca está en la ventana de la pared opuesta, 1.5 m por encima del suelo y 0.5 m de la pared adyacente (pared con cuadros).
> La sala mide 5 m de largo, 4 m de ancho y 2.5 m de alto.
> ¿Cuál es el camino más corto que la araña deberá recorrer para cazar a la mosca? Suponed que la araña no utiliza telarañas para desplazarse, lo hace caminado por las paredes.

Figura 3.1: Enunciado de T1

Luego anotamos expresiones clave que derivan del Esquema de T1 (Figura 3.3, p. 62), que además de hablar de sujetos, datos e incógnita(s), incluyen estrategias y soluciones que pueden surgir, por ejemplo, al responder preguntas de apoyo.

En la Tabla 3.1 se detallan expresiones clave de T1.

Expresiones clave	
Enunciado escrito	
Sujetos	araña, paredes, salón, mosca, ventana, pared opuesta, suelo, pared adyacente, pared con cuadros y camino
Datos	5 metros de largo, 4 metros de ancho, 2,5 metros de altura en medio de una de las paredes más pequeñas 1,5 metros por encima del suelo, 0,5 metros de la pared adyacente (pared con cuadros). no utiliza telarañas caminando por paredes
Incógnita	el camino más corto
Propuestas de solución	
Caminos curvilíneos	curvilíneo, curva, concatenadas...
Caminos rectos	recto, concatenados, diagonales, horizontales, verticales, oblicuos, segmento, un único segmento, una línea recta...
Preguntas de apoyo	
¿Dónde sitúas a los animales? Puedes usar el modelo (ortoedro) del salón.	pared pequeña, pared de la ventana, en medio, por encima del suelo, más cerca de...
¿Por dónde puede ir la araña?	techo, suelo, pared con cuadros, pared opuesta, pared de la ventana...
¿Cómo es el camino que recorre la araña?	sube, baja, camina recto, inclinado, curvilíneo
¿Cómo deben ser los caminos para calcular su longitud con los datos que nos dan?	un segmento, una recta, una diagonal, recto...

¿Cómo lo has hecho?	distancia entre dos puntos, con un regla, concatenando caminos...
¿Qué datos has usado?	posición de la araña, posición de la mosca, dimensiones del salón, la araña no usa telarañas...
¿Cómo representarías estos posibles caminos en el modelo del salón?	desarrollo, ortoedro, caras, caras opuestas, desarrollos diferentes, modelo...
¿Cómo sería tu camino si los dos animales estuvieran en la misma pared?	recto, un segmento...
¿Qué datos da el enunciado?	dimensiones salón, posición mosca, posición araña, araña no usa telarañas...
¿Puedes asociar el camino a algún concepto trabajado en clase?	hipotenusa, Pitágoras, triángulo rectángulo, catetos, distancia entre dos puntos...
¿Cómo sabes que es la mínima longitud?	hipotenusa, Teorema de Pitágoras, posición mosca, longitud caminos...
¿Hay otros caminos posibles?	suelo, techo, pared con cuadros, pared opuesta, pared araña, pared ventana, pared mosca, combinación de más de una cara...

Tabla 3.1: Expresiones clave de T1

Tarea 2

Procedemos de forma análoga para T2. Identificamos (gris) expresiones clave del enunciado escrito (Figura 3.2) y del Esquema de T2 (Figura 3.4, p. 63).

> Disponemos de 12 vasos. Cada vaso mide 92 mm de altura y 74 mm de diámetro del borde por donde se bebe. Queremos construir una caja lo más económica posible que contenga los 12 vasos.
> Además, queremos que:
> - La base de la caja sea rectangular.
> - Los vasos estén mirando hacia arriba en la caja.
> - Los vasos no estén situados uno dentro de otro.
>
> Con las restricciones anteriores, ¿qué hace falta minimizar para construir la caja más económica posible? Razona tu respuesta.

Figura 3.2: Enunciado de T2

En la Tabla 3.2 se detallan expresiones clave de T2.

Expresiones clave	
Enunciado escrito	
Sujetos	12 vasos y caja
Datos	92 mm de altura y 74 mm de diámetro borde por donde se bebe caja con 12 vasos base rectangular vasos mirando hacia arriba vasos no encajados
Incógnita	qué minimizar para caja más económica dimensiones de la caja más económica
Propuestas de solución	
Área de la caja (total o lateral)	área rectángulo, área lateral, área total...
Perímetro de las caras laterales (centrándose o no en la base)	perímetro bases, perímetro total, contorno, alrededor...
Preguntas de apoyo	
¿Cómo se pueden colocar los vasos?	bocarriba, formando rectángulo, fila de doce, dos filas de seis, tres filas de cuatro, uno por 12, dos por seis, tres por cuatro...
¿Qué datos necesitas para determinar el material necesario?	altura vaso, diámetro vaso, posición vasos, distribución vasos...
¿Por qué aseguras que es la mejor caja?	mínima área paredes laterales, mínima área total, mínimo perímetro base, mínimo perímetro global (caras), menos cartulina, menos material...
¿Qué cajas verifican las condiciones?	prismas base rectangular, ortoedro, cajas bases rectangulares, caja uno por doce, dos por seis, tres por cuatro...
¿Hay aspectos comunes entre cajas?	tienen 12 vasos, igual área de la base, igual volumen...
¿Qué información necesitamos para determinar las dimensiones de una caja?	dimensiones vasos, altura caja, ancho caja, profundidad caja...

Tabla 3.2: Expresiones clave de T2

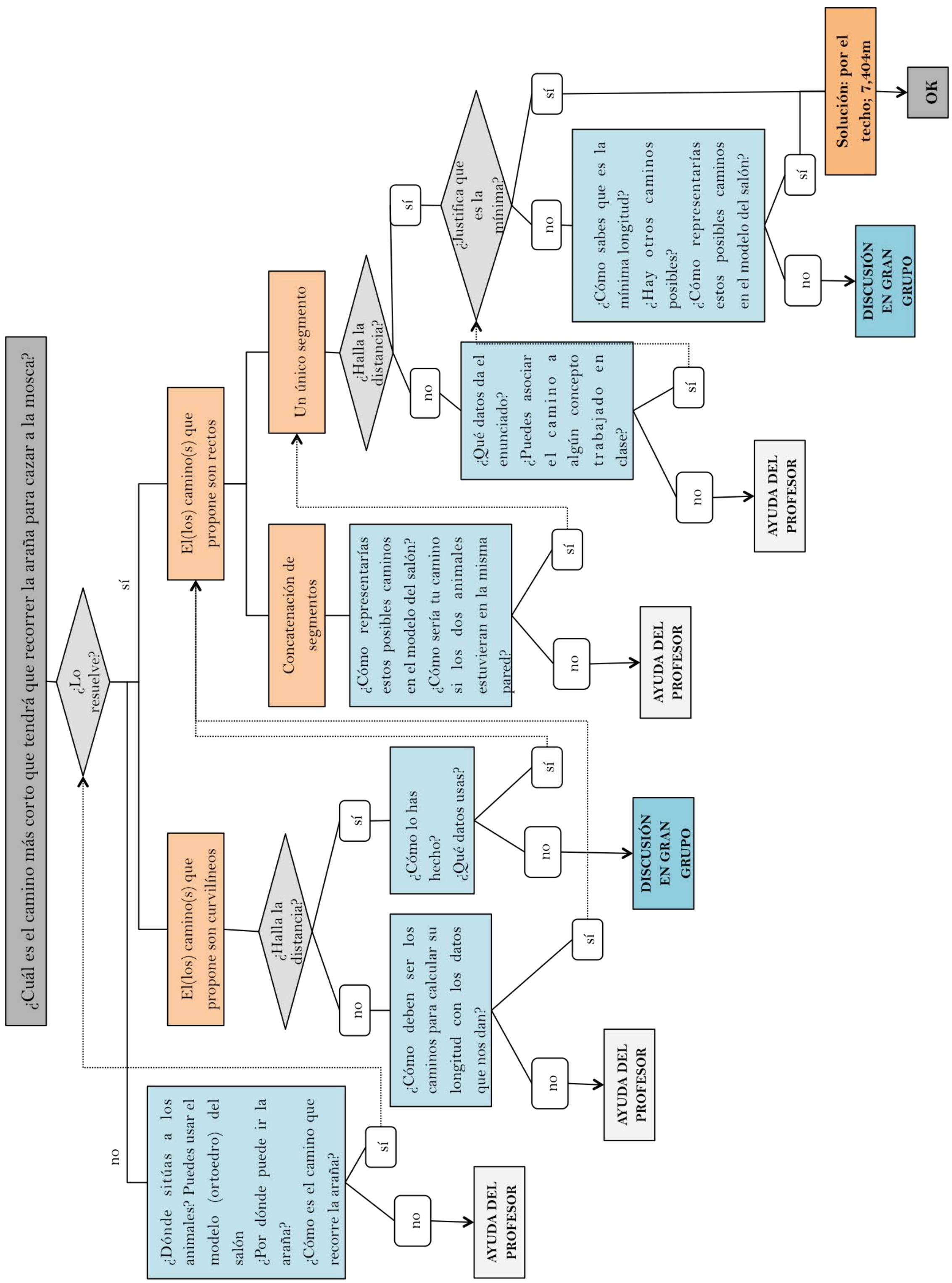


Figura 3.3: Esquema de T1

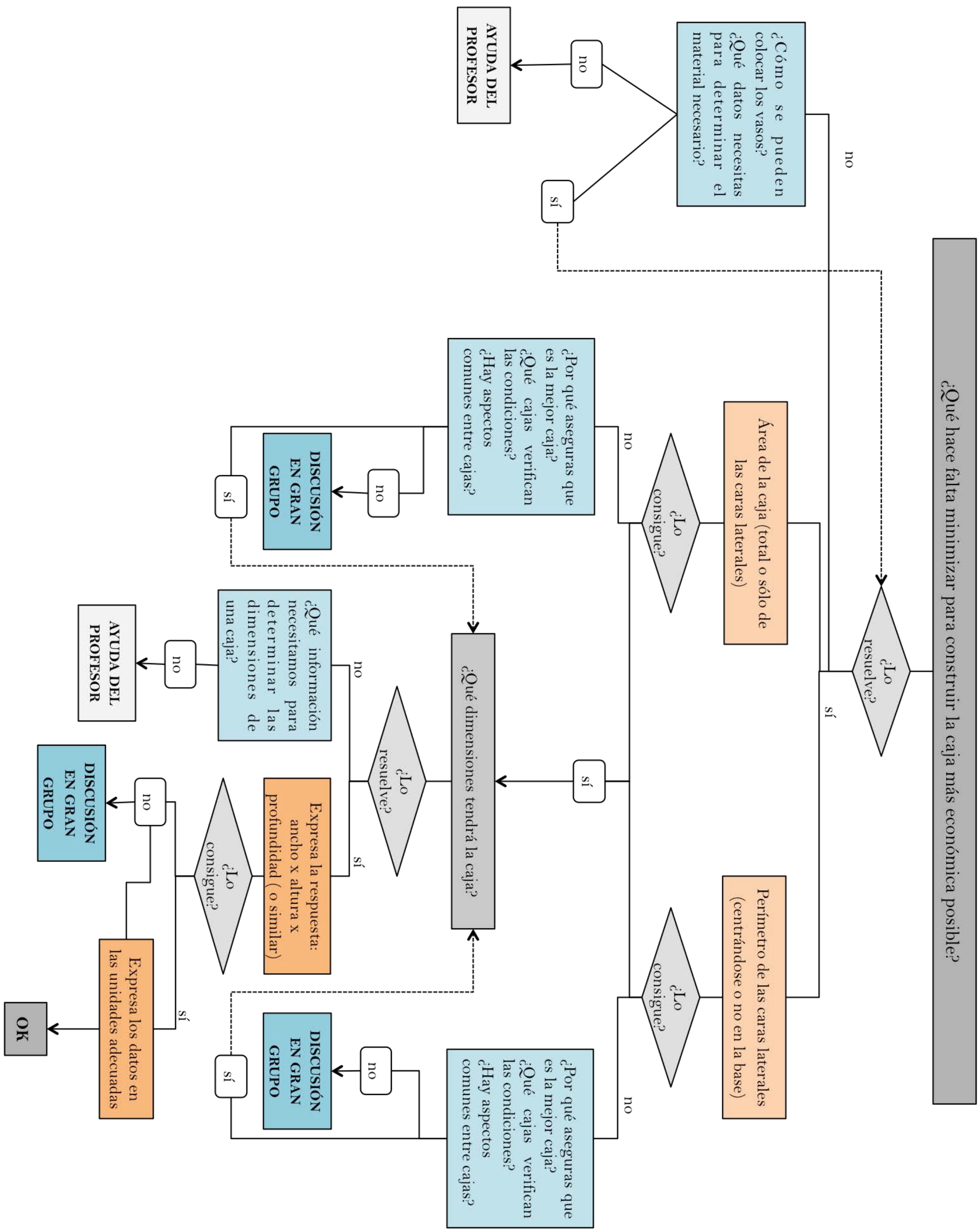


Figura 3.4: Esquema de T2

Las expresiones clave identificadas se refieren a la práctica matemática de cada tarea. Podemos agrupar las expresiones según su formalidad matemática en: Expresiones formales, como Teorema de Pitágoras, propias de la matemática escolar e independientes de tareas; expresiones mixtas, como diagonal, propias de la matemática pero significados según normas de clase (diagonal, como sinónimo de segmento o recta oblicua) y que pueden ser independientes de tareas; y expresiones coloquiales, como araña sube, propias de la lengua coloquial y dependientes de tareas (araña sube, implica que desde la coordenada donde está la araña se debe trazar un segmento perpendicular a las aristas de ortoedro).

Dado el carácter improvisado del discurso de clase, donde no se disponen de un guión de expresiones aceptadas, hallamos expresiones clave que pasan de ser consideradas coloquiales a formales o mixtas (Tabla 3.3) y viceversa (Tabla 3.4).

[92-T2]	**Alma**: Una rodona.
[93-T2]	**PA** : Com?
[94-T2]	**Alma**: Una rodona.
[95-T2]	**PA** : [i] Una <u>rodona</u>...? [ii] <u>Circumferència</u>.
[96-T2]	**Alma**: Ai.
[97-T2]	**PA** : Amb [i] una <u>circumferència</u>. Si els poguessis posar tots així, l'únic que ens n'han donat dotze potser en aquest cas no quedaria bé. Però sí que és veritat, que si per exemple, te'n donessin uns, que quan els poses t'encaixen bé, l'únic que ara te'n sobrarien dos que et farien anar malament. Però si et donessin un nombre de gots que et poguessin quedar en [ii] <u>rodona</u>, t'aniria millor encara, perquè el perímetre...

Tabla 3.3: Ejemplo de expresión clave de lo formal a lo coloquial en T2 de PA

En este primer ejemplo vemos como PA cuestiona a Alma el uso de 'redonda' [93-T2], de uso coloquial, para referirse tanto a círculo como circunferencia, y la sustituye por la palabra formal 'circunferencia' [95-T2]. En el siguiente turno PA usa 'redonda' considerándola aceptable para referirse a circunferencia. PA pasa de la palabra formal a la coloquial otorgándoles el mismo significado [97-T2].

[187-T2]	**Mohamed**: *Nos resulta familiar*.
[188-T2]	**PB**: Nos resulta familiar... Familiar no seria la palabra de mates. Aquí tenim les capses. Val? Val? Alguns he vist que multiplicàveu per dos, cada costat. Això és veritat. Ningú ha parlat que les capses haguessin de tapar o no.
[189-T2]	**Mohamed**: ¿Hay cajas así en serio?
[190-T2]	**PB**: Sí. Aquesta capsa? Què passa con aquesta capsa? Nosaltres... què passa amb les meves mans? No és còmode. No és còmode. Aquesta és la que ens ha costat més de posar, eh? Aquesta us he hagut d'obligar a posar-la. I té la mateixa, la mateixa base. Però no ens resultava còmode. Val. Però en canvi, a quina hem anat? A aquesta. A la capsa més, *més familiar*. Hem dit més familiar. Però en canvi no és veritat, eh? El Mohamed i el Manuel no han anat a aquesta. Han anat a aquesta. S'han empenyat en pensar en aquesta.
[286-T2]	**PB**: Muy bien. Esa idea. [i] Estos dos vasos no tocan la caja. Entonces es como si en el fondo los hubiéramos restado del perímetro total. Porque no están tocados por fuera. Ya, en este caso es casi como si estuviéramos envolviendo los vasitos. ¿Qué pasa? Gastamos más. A éste, no tanto. Pero es que en éste hay vasos que incluso ni tocamos. Entonces claro nos hemos ideo a esta. [ii] La palabra que ha dicho Mohamed, es más familiar. En el fondo se construye esta, porqué: se gasta menos, pero también existe una segunda razón: ¿cuántos golpes pueden recibir estos vasos? En cambio aquí, estos ninguno. Esto la convierte en incluso más segura, tiene menos perímetro pero es de aquellas situaciones en la que es mucho más favorable para un constructor, para un señor, para... tener ésta, que ésta.
[287-T2]	**Qiu**: Porque es largo y también es *más fácil de doblar*.

[288-T2]	**PB**: Más fácil de doblar, para embolicar, para poner un lazo. Tenemos los vasos más protegidos. ¿Lo vemos? Tiene muchísimas ventajas la naranja. Quizás por eso se nos hace más familiar. Porque a lo mejor alguien ha pensado esto antes que nosotros y ha decidido hacer esta. ¿Vale? Por eso vemos ésta más veces que ésta. Porque es más económica en muchos aspectos.

Tabla 3.4: Expresiones clave de lo coloquial a lo formal en T2 de PA

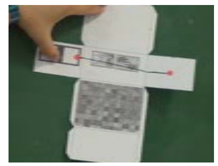
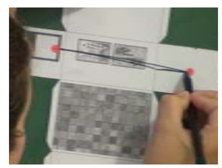
En este segundo ejemplo vemos un cambio en la consideración de ‘familiar': de no ser considerada 'palabra de mates' por PB [188-T2] a re-expresarse varios turnos más tarde como argumento para la elección de la caja solución [286-T2].

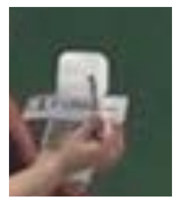
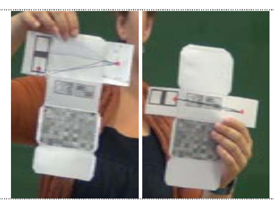
El Esquema de la tarea es un instrumento diseñado antes del análisis. Hay propuestas de solución, estrategias y contenidos considerados con posterioridad e incluidas en el conjunto de expresiones clave de cada tarea. Las nuevas expresiones clave se identifican en el instrumento Horizontal. En la segunda columna donde figura la transcripción de turnos de intervención y se señalan turno origen (cursiva) y turno con revoicing identificado (verde). Además, se consideran las expresiones que son equivalentes a las presentadas en las Tablas 3.1 y 3.2. Por ejemplo, para T1 ‘pared con cuadros’, se considera equivalente a: pared de cuadros, pared cuadros, pared de los cuadros o pared donde hay cuadros.

Forma y función

De acuerdo con la forma lingüística y la función discursiva del capítulo anterior (2.5), mostramos y explicamos su análisis mediante la aplicación del instrumento Horizontal (Figura 2.7) de la discusión conjunta de T1 por PA (Tabla 3.5). Consúltese en Anexo B el instrumento Horizontal del resto de discusiones.

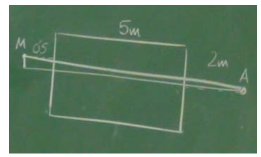
#	TRANSCRIPCIÓN	FORMA LINGÜÍSTICA	FUNCIÓN DISCURSIVA
1	**PA:** A veure, anem a començar. No direm la solució final sinó que anem a començar per les primeres idees que us han sortit. Quan us heu hagut de trobar amb el problema aquest... Primer situem la mosca i l'aranya amb els gomets. Tothom els ha sabut situar més o menys? Alguns ho heu fet exacte, fent proporcionalitats, i alguns ho heu fet una mica a ull... està a la meitat, l'heu posat a ull. Sí o no? Sí? Un cop teníeu, les teníeu posades, quina ha sigut la primera intuïció que us ha sortit? A veure, Sara.		
2	**Sara:** Nosaltres volíem *que pugés u vint-i-cinc, després cinc metres de llarg i després un metre per arribar a la mosca.*		
3	**PA:** A veure, pujar, què vols dir? que la mosca puja u vint-i-cinc... no que l'aranya puja u vint-i-cinc, llavors camina cinc pel sostre i... 	REFRASEAR$_2$	Examinar propuestas (concatenación de dos movimientos de un camino)
4	**Sara:** *Baixa un metre per agafar a la mosca.*		
5	**PA:** La Sara el què ha dit, hi ha una cosa que a mi no em quadra. I és que si l'aranya està aquí i puja, i després camina cinc metres, es fica aquí al sostre i camina cinc metres, ara em queda aquí, si ara jo baixo vaig com al mig d'aquesta cara. Però mira on està el gomet. *Aquí et falta encara baixar i llavors anar cap al gomet.* Ho entens o no? 	RELATAR$_{2,4}$	Problematizar propuestas (no coincidencia entre punto final del camino y coordenadas de mosca)
6	**Sara:** Sí...		
7	**PA:** Bé, això és una primera intuïció, però després veieu que s'ha de millorar. Per exemple, Cris, vosaltres com ho havíeu fet, la millora?		
8	**Cris:** *Hem fet dos metres en línia recta, llavors, havíem fet com en*		

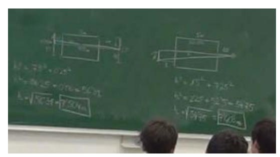
	diagonal i després...		
9	**PA:** A veure, pintem-ho. **[i]** A veure, la Sara el que havia fet era: Pujava l'aranya fins aquí. Aquest punt va a parar aquí. Tothom veu que això enganxa? Apareix aquí, camina cinc metres. Apareix aquí i baixa un metre **[ii]** i després encara ha d'anar cap aquí. **[iii]** Elles diuen: Fan que l'aranya vagi recte i aquí també vagi recte i aquí en comptes de fer escaleta vaig en diagonal. **[iv]** Llavors feien una diagonal aquí. *Però aquest tros el deixaven recte i aquest tros el deixaven recte i lo que feien diagonal era aquest.*  	RELATAR$_{2,4}$ RELATAR$_{*5}$ RELATAR$_{8}$ REFRASEAR$_{8}$	Comparar propuestas (movimientos horizontales y verticales - movimientos oblicuos) Enfatizar ideas (movimiento oblicuo respecto a los ejes)
10	**Maria:** Però el millor és *fer una diagonal des de l'aranya fins la mosca.*		
11	**PA:** **[i]** Fer una diagonal **[ii]** tota ella. Per tant, des d'aquest punt fins aquest punt anar en diagonal directe. Sense fer aquí recte ni recte. Anar directament en diagonal. Això ens sortirà més curt? 	REPETIR$_{10}$ REFRASEAR$_{10}$	Examinar propuestas (movimiento único oblicuo)
12	**Alumnes:** Sí.		
13	**PA:** Val, de moment de les opcions que estem donant aquesta és la millor. Com ho sabem això de què aquesta serà més curt que fer recte, baixar i recte?	REFRASEAR$_{10}$ REFRASEAR$_{8,*9}$	Comparar propuestas (movimientos horizontales y oblicuo – movimiento único oblicuo)
14	**Albert:** *Perquè hi vas recte.*		
15	**PA:** Sempre la distància *més curta entre dos punts és la que és recta.* A veure, Albert, què proposes.	AMPLIAR$_{14}$	Formalizar conceptos (distancia entre dos puntos del plano)

16	**Albert:** Nosaltres també ho hem fet anant per dalt. *Pel sostre.*		
17	**PA:** Què vol dir anant pel sostre?	REPETIR$_{16}$	Identificar propuestas (movimientos por otras caras de un ortoedro orientado: techo)
18	**Albert:** Anar en diagonal passant *pel sostre.* Passant *pel sostre* anar en diagonal fins la mosca.		
19	**PA:** A veure, enteneu el que està dient l'Albert? A veure, si jo he desplegat això, m'ha quedat d'aquesta manera. Tots els que heu desplegat la capsa, penso que us ha anat millor per poder imaginar com l'aranya va en diagonal per arribar a la mosca. Perquè si la veus plegada és quan intentes anar recte cap a l'aresta i recte i recte. **[i]** Però un cop la teniu desplegada o sigui passar pel sostre és **[ii]** fer algo tipus així. **[iii]** No hem quedat que lo més curt entre dos punts és anar en línia recta? 	RELATAR$_{16}$ AMPLIAR$_{16}$ REFRASEAR$_{14,*15}$	Examinar propuestas (movimientos curvilíneos) Enfatizar ideas (camino óptimo: línea recta)
20	**Albert:** *Si tu retalles els costats i les poses per dalt, com s'enganxarien...*		
21	**PA:** A veure... ho teniu fet?		
22	**Cris y Alma:** Sí.		
23	**PA:** Mireu això, quina diferència hi ha entre aquesta habitació i aquesta? Clara? 		
24	**Clara:** És la mateixa només que les parets s'han ajuntat de maneres diferents.		

25	**PA:** Però llavors si tornem a plegar-les, aquesta habitació serà la mateixa que aquesta?		
26	**Alumnes:** Sí.		
27	**PA:** I què són llavors això?		
28	**Josep:** Semblants.		
29	**Albert:** *Iguals.*		
30	**PA:** Bueno, sí, són habitacions iguals, però llavors són dos què, diferents... ho vam fer l'altre dia.	REPETIR_{29}	Solicitar expresiones (desarrollos del ortoedro)
31	**Pol:** *Dos hexaminós diferents.*		
32	**PA:** **[i]** Dos hexaminós diferents, és a dir, **[ii]** dos desplegaments del cub diferents. **[iii]** Hem desplegat de dues maneres diferents. **[iv]** Aquí hem desplegat així, veieu on hem posat les pestanyes? I aquí és com si haguéssim desplegat d'una altra manera. Val. Llavors, clar què passa? Que anar d'aquí a aquí recte vol dir que vas per la paret dels quadres i us ha sortit, ara mirem com ho calculem, uns metres que cal recórrer. **[v]** Ara podríem fer l'opció d'anar pel sostre, per tant, m'interessa enganxar-me les parets al costat del sostre per poder anar-hi en línia recta. Val?	REPETIR_{31} REFRASEAR_{31} REFRASEAR_{31} AMPLIAR_{31}	Conectar conceptos (hexaminós y ortoedro)
		RELATAR_{20}	Examinar propuestas (correspondencia entre movimientos y desarrollo óptimo)
33	**Algunos alumnos:** Sí.		
34	**PA:** *Quines opcions més tindria?* I aquí em donaria una altra mida. Ara la calcularem. Quines opcions més tindria?	REPETIR_{*34}	Solicitar propuestas (ampliación de caminos solución)
35	**Albert:** També podríem *anar pel terra*, però com que la mosca està més amunt, ja veus que anant pel sostre serà més curt que anant pel terra...		
36	**PA:** Per anar pel terra, aquestes dues parets on les hauria de cosir?	REPETIR_{35}	Identificar propuestas (movimientos por otras caras de un ortoedro orientado: suelo)
37	**Albert:** *A baix.*		

38	**PA:** És a dir, les hauria de posar aquí i fer-ho, però... 	$AMPLIAR_{37}$	Puntualizar datos (orientación de caras de mosca y araña)
39	**Albert:** *Com què està més amunt no cal.*		
40	**PA:** Val. I llavors hi havia una altra opció?	$REFRASEAR_{*34}$	Solicitar propuestas (ampliación de caminos solución)
41	**Clara:** I l'altre costat?		
42	**Albert:** Bueno, l'altre costat que no té els quadres, però és el mateix, perquè com que *està més a prop dels quadres no cal fer-ho.*		
43	**PA:** Esta més a prop d'ell i ja. *Per tant, el dubte ara el tenim entre anar per la paret dels quadres o entre anar pel sostre.*	$REFRASEAR_{42}$	Proporcionar argumentos (posición de la mosca)
44	**Albert:** Sí.		
45	**PA:** Anem a calcular-ho bé, perquè hi ha molta gent que no ho ha escrit. Acostumeu-vos a escriure bé els càlculs perquè si no després... *Fem primer anant per la paret dels quadres. D'acord?* A veure, si tenim. Tenim això, la paret dels quadres. Que quant mesurava d'ample? cinc, no? 	$AMPLIAR_{*45}$	Ejecutar propuestas (cálculo de la distancia por una cara de un ortoedro orientado: pared con cuadros)
46	**Albert:** *Cinc.*		
47	**PA:** Cinc metres. I ara aquí tenim una aranya.	$REPETIR_{45}$	Enfatizar datos (identificación de las longitudes de la tarea)
48	**Albert:** Estava a la meitat.		
49	**PA:** Que estava a quant?		
50	**Albert y Carles:** A *dos* de la paret dels quadres.		

51	**PA:** A dos mestres. I aquí teníem una mosca que estava?	REPETIR_{50}	Enfatizar datos (interpretación de las longitudes de la tarea)
52	**Albert y altres:** *A zero coma cinc.*		
53	**PA:** A zero coma cinc. Val, si jo faig la diagonal aquesta, recordeu com calcular-la? Val, em queda aquí que això és la diagonal de què?	REPETIR_{52}	Enfatizar datos (interpretación de las longitudes de la tarea)
54	**Jana:** *D'un triangle rectangle.*		
55	**PA:** [i] D'un triangle rectangle. [ii] D'un triangle rectangle així. On aquesta altura exactament quant mesura? 	REPETIR_{54} AMPLIAR_{54}	Enfatizar ideas (triángulo rectángulo cuya hipotenusa da la longitud del camino)
56	**Alumnes:** *Zero vint-i-cinc.*		
57	**PA:** Zero vint-i-cinc. Tothom?	REPETIR_{56}	Enfatizar datos (interpretación de longitud de una altura del triángulo rectángulo)
58	**Algunos alumnos:** Sí.		
59	**PA:** I la base?		
60	**Albert:** *Set coma cinc.*		
61	**PA:** Set coma cinc. D'on surt aquest Set coma cinc?	REPETIR_{60}	Enfatizar datos (interpretación de la longitud de una base del triángulo rectángulo)
62	**Alumnes:** *Cinc més dos...*		
63	**PA:** El [i] cinc més dos [ii] més zero coma cinc. Si ara fem això, vosaltres la diagonal aquesta és la hipotenusa que diem sempre, no?	REPETIR_{62} AMPLIAR_{62}	Obtener resultados (longitud de una base del triángulo rectángulo)

	Per tant, vosaltres voleu buscar amb Pitàgores. [...] Val, si la mosca anés per la paret de quadres, **[iii]** caminant com hem dit en diagonal, hauria de fer set com a cinquanta metres. Val? Que és molt menys que el que havíeu dit ja **[iv]** d'anar recte, anar en diagonal i després recte, eh? Però ara ho hem de comparar amb anar pel sostre. Digues, Alma. 	RELATAR$_{10,*11}$ RELATAR$_{8,*9}$	Obtener resultados (longitud de un camino candidato a solución con el Teorema de Pitágoras)
64	**Alma:** Bueno, que anant pel sostre ens ha donat que és *menys.*		
65	**PA:** **[i]** Menys. Ara ho veurem. Jo crec que sí, perquè a vosaltres també **[ii]** us ha donat menys... A veure, Mireia, digues.	REPETIR$_{64}$ REFRASEAR$_{64}$	Ejecutar propuestas (cálculo de la longitud del camino por una cara de un ortoedro orientado: techo)
66	**Mireia:** Per què és zero coma vint-i-cinc?		
67	**PA:** A veure qui li explica? A veure Albert [...]. Val, ara anem a l'altra. Imaginem que aquí tenim el sostre. Quant mesura el sostre d'ample? [...] Per tant, de les dues opcions que tenim com a candidates. *Ens ha sortit que farà set coma cinc, set coma cinc zero quatre si anem per la paret dels quadres o set coma quatre zero tres si anem pel sostre.* Per tant, amb quina ens quedem? 	RELATAR$_{*43}$	Comparar propuestas (comparación de longitudes: por pared con cuadros - techo)
68	**Josep y otros:** *Pel sostre.*		
69	**PA:** Anant **[i]** pel sostre. **[ii]** I les altres dues, serien altres opcions a tenir en compte però ja heu raonat geomètricament que seran pitjors, per tant, ja no fa falta calcular-les. Val. **[iii]** Però dintre de les dues millors heu triat fent tots els càlculs. Sí,	REPETIR$_{68}$	Validar propuestas (menor longitud)
		RELATAR$_{39,42,*43}$	Proporcionar argumentos (posición de mosca)

	tothom?	RELATAR$_{*67}$	Proporcionar argumentos (medida de caminos)
70	**Alumnos:** Sí.		
71	**PA:** Tothom ha vist la importància de què no només veure que en [i] línia recta és el millor si no que després donar-te compte de què [ii] tens diferents desplegaments del cub que et poden anar a través del sostre, de les parets... M'interessaria fer-me un desplegament així? Perquè aquest vam dir que era un possible desplegament...	RELATAR$_{14,*15}$ RELATAR$_{20,*32}$	Enfatizar ideas (diferentes desarrollos de un ortoedro)
72	**Alumnos:** No.		
73	**PA:** M'interessaria fer-me un desplegament així? Jo d'aquí a aquí també podria anar en línia recta...		
74	**Alumnos:** Sí.		
75	**PA:** Però sempre em quedaria més llarga. Amb aquesta què combinaria?		
76	**Albert:** *Passaries per la paret i pel sostre...*		
77	**PA:** Estaria fent, una mica de la paret de la finestra, com sempre, una mica de la paret dels quadres, una mica de sostre i després una mica de l'altre. Aquesta opció encara m'aniria pitjor. I aquest desplegament? 	AMPLIAR$_{76}$	Identificar propuestas (movimientos por más de tres caras de ortoedro orientado)
78	**Alumnos:** *Pitjor.*		
79	**PA:** Encara [i] pitjor. [ii] O sigui, de tots els desplegaments primer el que havies de veure és que el que et va millor és posar-se les dues oposades sempre, o aquí dalt, o aquí, o aquí. I llavors ja triem. Però així escalonada segur que no. Val. Sí, tothom?	REPETIR$_{78}$	Enfatizar ideas (camino por menor número de caras)
		AMPLIAR$_{76,78}$	Enfatizar ideas (adecuación de desarrollos en relación a la tarea)

Tabla 3.5: Instrumento Horizontal aplicado en T1 de PA

La discusión se inicia con la petición de PA de compartir las propuestas de camino óptimo que debe recorrer la araña para cazar la mosca. Sara sugiere usar segmentos, horizontales y verticales respecto a las aristas del salón, combinados a modo de línea quebrada como respuesta a la tarea [2] [4]. Cris añade la posibilidad de que los segmentos sean oblicuos respecto a las aristas del salón [8]. PA re-expresa las ideas de Sara sustituyendo expresiones [3] y resumiendo su propuesta [5] para examinarla y constatar que con el camino propuesto la araña no llegaría hasta la mosca. Además, compara las propuestas de Sara y Cris [9], indicando la diferencia entre ambas: uso de movimientos oblicuos. En el mismo turno, la profesora insiste enfatizando la idea de usar movimientos oblicuos respecto a las aristas del salón. Esto tiene un efecto en el siguiente turno, en el que Maria [10] propone que el camino sea un único segmento en vez de tres concatenados y oblicuos a las aristas del salón. PA examina la idea de que el camino esté formado por un único movimiento [11] y repite literalmente la idea de 'hacer una diagonal', pero reemplaza la expresión 'desde la araña hasta la mosca' por 'toda ella'. PA [13] solicita comparar las propuestas de Cris y Maria y posicionarse. Albert [14] afirma que la mejor opción es la de Maria porque es una línea recta. PA amplia la intervención de Albert [15] añadiendo que la 'menor distancia entre dos puntos es recta'. PA usa el término distancia para referirse al camino que debe recorrer la araña y formaliza así el concepto distancia entre dos puntos del plano. Nótese que PA opta por que los alumnos sigan justificando el camino óptimo, ya que después de Maria [10] responde con nuevas preguntas para todos. Hasta aquí, los caminos propuestos pasan por la pared con cuadros.

Albert propone ir por el techo [16]. PA identifica la propuesta y la re-expresa literalmente, 'por el techo' [17]. Representar caminos por el techo con el modelo del salón en papel requirió cortar paredes y reorientarlas, obteniendo un nuevo desarrollo del salón, es decir, de un ortoedro. La orientación correcta de las paredes evita considerar que los caminos deban ser curvilíneos [19]. PA enfatiza la idea de que el camino óptimo es ir en línea recta refraseando la idea formalizada: distancia entre dos puntos del plano [14] [15]. Los dos desarrollos de los alumnos, ir por la pared con cuadros e ir por el techo, son del mismo salón. Estos consideran que los desarrollos son semejantes [28] o iguales [29]. PA pide concreción solicitando otras expresiones para describir ambos desarrollos [30]. Pol opta por la expresión 'hexaminós diferentes' [31] que PA conecta con el concepto desarrollos del cubo [32]. Además empareja cada desarrollo según el camino candidato a solución: ir por la pared con cuadros o por el techo.

PA hace autorevoicing para solicitar otras propuestas de camino solución [34] [40]. Albert sugiere ir por el suelo [35] pero descarta la opción fijándose en la posición de la mosca [39]. PA identifica la propuesta mediante repetición literal [36] y puntualiza dónde y con qué orientación deben situarse las paredes de mosca y araña [38]. Clara propone ir por la otra pared [41] pero Albert de nuevo descarta esta opción con el mismo argumento, la posición de la mosca [42]. PA retoma los argumentos de Albert [43] y reduce a dos los caminos candidatos a solución: ir por la pared con cuadros o por el techo. Mediante autorevoicing, PA realiza cálculos empezando por el camino de la pared con cuadros [45]. Mediante repetición literal [47] [49] [53], PA enfatiza los datos necesarios para construir el triángulo rectángulo [55] dadas las longitudes de sus catetos [61] [63] y cuya longitud de la hipotenusa es la longitud el camino por la pared con cuadros [63].

Alma afirma que el camino por el techo tiene menor longitud [64]. PA ejecuta la propuesta de ir por el techo [65]. Cuando dispone de la longitud de ambos caminos compara las propuestas [67] y los alumnos eligen el camino por el techo. PA valida la propuesta por ser el camino con menor longitud y retoma el argumento de la posición de la mosca para descartar otras opciones [69].

La discusión finaliza con la síntesis de PA [71] de las dos ideas principales tratadas: los caminos son únicos y rectos; y a cada camino le corresponde un desarrollo del salón favorable, es decir, el que pasa por menor número de paredes [77]; esto se da cuando los animales están situados en paredes opuestas [79].

Para hallar turnos con revoicing necesariamente debe haber turnos de origen. En la Tabla 3.6 mostramos ejemplos de parejas de turnos asociados a cada forma lingüística en la investigación: repetir, refrasear, relatar y ampliar (2.5.1). Para el resto de tareas consúltese Anexo B. Cabe destacar un ejemplo de T1 de PB, quien apoya su intervención en una expresión popular que relata como: 'la línea recta es el camino más corto'. Aquí no se puede asociar turno origen, por lo que se considera revoicing externo. Hablamos de revoicing externo cuando el origen de las ideas re-expresadas no es del conjunto de turnos de la discusión.

Aunque se trate de un rasgo lingüístico, la forma se asocia a una misma idea matemática y a efectos discursivos en intervenciones de participantes. Vemos ejemplos de cada forma en T1 de PA (Tabla 3.6):

Forma/Ejemplo	**Idea matemática**	**Efecto**
REPETIR [78] y [79]	Aspectos a considerar de desarrollos de un ortoedro: orientación y posición de caras	Enfatizar la idea de pasar por el menor número de caras de un ortoedro para minimizar la longitud del camino
REFRASEAR [31] y [32]	Hay más de un desarrollo para un ortoedro a relacionar con los desarrollos de un cubo	Conectar los conceptos hexaminós con ortoedro. De los treinta y cinco hexaminós once forman un cubo. Cubo, caso de ortoedro
RELATAR [2] [4] y [5]	Forma de un camino candidato a solución. Concatenación de segmentos horizontales y verticales respecto a aristas de ortoedro	Problematizar la propuesta dado que el punto final del camino no da la posición de la mosca
AMPLIAR [14] y [15]	Distancia entre dos puntos del plano. Único segmento recto	Formalizar el concepto de que la distancia entre dos puntos del plano siempre da el camino de menor longitud

Tabla 3.6: Ejemplos de forma lingüística en T1 de PA

El efecto en el discurso corresponde a funciones discursivas. Los tipos de funciones discursivas elegidas indican el contenido matemático que comunica el turno en relación con: argumentos, conceptos, datos, expresiones, ideas, propuestas y resultados. Asociamos funciones a las formas interpretadas. La Tabla 3.7 muestra ejemplos de relación de turnos considerados, es decir, asociados al turno con revoicing (2.5) para determinar la función interpretada en T1 de PA de los turnos con revoicing de la Tabla 3.6.

#	Turnos asociados	Función discursiva (complemento)
79	73, 74, 75, 76, 77 y 78	Enfatizar ideas (camino por menor número de caras posibles)
32	23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30 y 31	Conectar conceptos (hexaminós y ortoedro)
5	2, 3, 4, 6 y 7	Problematizar propuestas (no coincidencia entre punto final del camino y coordenadas de la mosca)
15	10, 11, 12, 13 y 14	Formalizar conceptos (distancia entre dos puntos del plano)

Tabla 3.7: Ejemplos de funciones discursivas en T1 de PA

En el Capítulo 2 se listan las funciones interpretadas en las discusiones conjuntas (2.5.1). En las de PB aparecen nuevas funciones sobre problematizar (argumentos, expresiones y resultados) y solicitar (argumentos, datos y resultados).

A las funciones discursivas no se les puede asociar una única forma lingüística. Por ejemplo, las funciones examinar, identificar o comparar propuestas admiten todas las formas para ambas profesoras y tareas. Entre las funciones que emergen del análisis, en las que tienen que ver con problematizar (argumentos, expresiones, propuestas o resultados) basadas en discutir contribuciones, no aparece la forma ampliar. Encontramos otros ejemplos de formas no usadas para algunas funciones como: repetir para formalizar conceptos, dado que formalizar implica un cambio de forma en la intervención re-expresada; relatar para solicitar (argumentos, datos, expresiones, propuestas o resultados); refrasear o relatar para enfatizar datos.

3.1.2. Resultados: Sobre expresiones clave, forma y función

Los resultados de este primer nivel de análisis informan sobre la noción de revoicing en turnos de habla. Hemos analizado las expresiones de cada turno e identificado turnos con: actividad matemática, mediante identificación de expresiones clave; y revoicing, mediante identificación lingüística de ideas re-expresadas y efecto discursivo en turnos sucesivos. Obtenemos resultados sobre identificación de expresiones clave e interpretación de formas y funciones.

Resultados sobre expresiones clave

Basándonos en la definición e identificación de expresiones clave en el enunciado escrito de tareas, el Esquema de tarea y las expresiones en las transcripciones de las discusiones conjuntas de cada sesión, determinamos tres tipos de expresión clave: formales, mixtas y coloquiales.

Formales. Expresiones del registro matemático formal (Sfard, 2008), consensuadas por académicos para designar objetos matemáticos, es decir, abstracciones estudiadas en matemáticas como números, conjuntos o figuras, y propiedades de estos objetos, teoremas, proposiciones y demostraciones.

Mixtas. Expresiones del registro matemático formal con significado distinto al atribuido en la disciplina matemática. Se asocia una expresión lingüísticamente formal a un significado coloquial socialmente pactado. Hay expresiones mixtas que profesores de matemáticas, usuarios del registro matemático formal, aceptan sin cuestionar la dualidad entre significados formales y coloquiales.

Coloquiales. Expresiones del registro coloquial (Sfard, 2008), independientes de los significados de la disciplina matemática pero con uso particular en la situación matemática planteada.

Estos tres tipos de expresión clave permiten identificar turnos con actividad matemática y reinterpretar la caracterización del discurso matemático de Sfard

(2007). Esta autora considera cuatro aspectos que caracterizan el discurso matemático: palabras, mediadores visuales, narrativas y rutinas (1.2). En referencia a las palabras, que consideramos expresiones, añadimos que:

Las expresiones que caracterizan un discurso matemático pueden ser formales, mixtas o coloquiales en función de la morfología y la semántica que se les atribuye en el uso situado de la cultura de la clase.

El discurso matemático escolar se desarrolla mediante múltiples discursos, con multitud de significados. Esto es parcialmente reconocible por los participantes. En esta investigación hay numerosas evidencias de ello. Por ejemplo, en T1 de PB después de que se discutan los caminos candidatos a solución y se concluya que la posición de la mosca permite descartar dos de los caminos (por el suelo y por la otra pared), hay alumnos que realizan los cálculos para los cuatro caminos iniciales. Según estos alumnos, realizan los cálculos para comprobar que pueden descartar dos de los caminos, lo cual indica una aceptación parcial del discurso.

Resultados sobre forma y función

De acuerdo con nuestros datos y en base a los trabajos de Forman y Ansell (2001, 2002), consideramos cuatro tipos de forma lingüística. La distinción en formas son el uso de palabras y mantener o añadir ideas matemáticas al re-expresar una intervención. Las funciones discursivas se han tipificado según el contenido matemático que comunicaban los turnos con revoicing. Es decir, se han considerado funciones descriptivas en el sentido de Brown y Yule (1993). Por ello la investigación ha contribuido a identificar, interpretar y dar nombre a funciones discursivas referentes a contenido matemático (Tabla 2.6) que de antemano no han sido consideradas

(Herbel-Eisenmann et al., 2009).

Hemos constatado mediante el análisis que forma y función son dos aspectos que se complementan. No se puede estudiar la noción de revoicing sin considerar ambos aspectos. Aunque no hay correspondencia única entre un tipo de función y un tipo de forma, hay ejemplos que asocian la manera en que se re-expresa una intervención con su efecto en turnos sucesivos y viceversa.

Esto replantea la definición de revoicing (1.2.2): consideramos que hay revoicing cuando se re-expresa oralmente una contribución de otro o de uno mismo, manteniendo al menos una idea en común entre la contribución origen y la re-expresada. Por ello, la definición que adoptamos en este punto es la siguiente:

Revoicing consiste en repetir, refrasear, relatar o ampliar el contenido matemático expresado en la intervención de otro participante o de uno mismo y con efectos discursivos en el desarrollo de ideas matemáticas.

La nueva definición caracteriza revoicing en clase de matemáticas. Los aspectos que considera son: forma (*repetir, refrasear, relatar o ampliar*); mensaje (*contenido matemático*); autor de ideas origen (*otro participante o uno mismo*); y función (efectos discursivos en el desarrollo de ideas matemáticas). Así alude a definiciones centradas en forma (Forman y Ansell, 2001, 2002) y en función (O'Connor y Michaels, 1996).

Consideramos forma y función mutuamente dependientes en el estudio de revoicing. Por ejemplo, si nos fijamos en la forma repetir con independencia de la función se puede pensar que las profesoras repiten literalmente la intervención de un alumno porque están de acuerdo. Analizando la función encontramos ejemplos que apuntan a lo contrario. Al inicio de la discusión de T2 de PB hay turnos donde la profesora repite literalmente intervenciones de los alumnos, pero las funciones son desde identificar propuestas a problematizar argumentos. En consecuencia una forma tiene diversidad de efectos en el discurso. Análogamente, si solo nos fijamos en la función, para interpretar el tipo es necesario identificar la forma. También en T2 de PB, cuando la profesora problematiza respuestas no dice que no sean correctas pero repite literalmente solo la parte correcta de la intervención. Por tanto, la forma permite entender e interpretar función y viceversa.

La interpretación de funciones discursivas implica el estudio de turnos anteriores y posteriores al turno con revoicing. En general, el límite de turnos a considerar es un nuevo turno con revoicing y, de ahí, una nueva función. Dados dos turnos con revoicing consecutivos, los turnos posteriores que permiten interpretar la función del primer turno coinciden con los anteriores del segundo turno con revoicing. El siguiente paso consiste en analizar las relaciones entre funciones que a su vez permite generar episodios, lo cual lleva a un segundo nivel de análisis.

3.2. Objetivo 2: Nivel episodios

Con el logro del Objetivo 2, se interpreta la noción de revoicing a nivel de episodios examinando relaciones entre funciones discursivas respecto a la actividad matemática.

3.2.1. Análisis: Relación entre funciones discursivas

El análisis de funciones discursivas requiere una mirada más amplia que el turno. Un conjunto de turnos comunica la misma idea matemática y esto permite atribuir un tipo de función. A su vez las funciones discursivas consecutivas comunican ideas similares en cuanto a contenido matemático. La relación matemática entre funciones sirve para generar episodios y así interpretar la noción de revoicing en el nuevo nivel. Para identificar dichas relaciones nos fijamos en expresiones clave de turnos con revoicing de profesoras, complementos matemáticos de funciones y expresiones clave de turnos de habla de alumnos. Mostramos y explicamos el análisis para la generación de episodios mediante la aplicación del instrumento Vertical (Figura 2.8) de la discusión conjunta de T1 por PA (Tabla 3.8).

<table>
<tr><th>#</th><th>EXPRESIONES CLAVE</th><th>COMPLEMENTO MATEMÁTICO</th><th>EXPRESIONES CLAVE</th><th>#</th><th>ei</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>pugés u vint-i-cinc, després cinc metres de llarg després un metre per arribar a la mosca.</td><td>2</td><td rowspan="5">e1 | Distancia entre dos puntos del plano</td></tr>
<tr><td>3</td><td>aranya puja u vint-i-cinc
camina cinc pel sostre</td><td>concatenación de dos movimientos de un camino</td><td>baixa un metre per agafar a la mosca</td><td>4</td></tr>
<tr><td>5</td><td>aranya
puja
camina cinc metres
sostre
baixa vaig com al mig baixa</td><td>no coincidencia entre punto final del camino y coordenadas de mosca</td><td>dos metres en línia recta diagonal</td><td>8</td></tr>
<tr><td rowspan="2">9</td><td>pujava aranya
camina cinc metres
baixa un metre
encara ha d'anar cap aquí</td><td>movimientos horizontales y verticales - movimientos oblicuos</td><td rowspan="2">una diagonal tota ella</td><td rowspan="2">10</td></tr>
<tr><td>aranya vagi recte en comptes de fer escaleta en diagonal
aquest tros recte, aquet tros recte i diagonal</td><td>movimiento oblicuo respecto a los ejes</td></tr>
</table>

11	una diagonal tota ella	movimiento único oblicuo			
13	aquesta (una diagonal) recte, baixar i recte	movimientos horizontales y oblicuo – movimiento único oblicuo	recte	14	
15	distància més curta entre dos punts recta	distancia entre dos puntos del plano			
			sostre	16	**e2**| Desarrollos ortoedro. Correspondencia desarrollo- camino
17	pel sostre	movimientos por otras caras de un ortoedro orientado: techo	anar en diagonal passant pel sostre fins a la mosca	18	
19	desplegada passar pel sostre el més curt entre dos punts línia recta	movimientos curvilíneos	Els costats per dalt	20	
		camino óptimo: línea recta	la mateixa (habitació) parets de maneres diferents	24	
			semblants	28	
			iguals	29	
30	habitacions iguals	desarrollos del ortoedro	hexaminós diferents	31	
32	dos hexaminós diferents desplegaments del cub diferents desplegat desplegat així les pestanyes aquí desplegat d'una altra manera paret dels quadres sostre enganxarem les parets al costat del sostre línia recta.	hexaminós y ortoedro			
		correspondencia entre movimientos y desarrollo óptimo			

34	més opcions	ampliación de caminos solución	terra mosca està més a prop sostre serà més curt terra	35	e3| Caminos favorables
36	anar pel terra dues parets	movimientos por otras caras de un ortoedro orientado: suelo	a baix (coser paredes)	37	
38	aquí	orientación de caras de mosca y araña	està més amunt (mosca) no cal	39	
40	una altre opció	ampliación de caminos solución	altre costat	41	
			altre costat que no té quadres està (mosca) més a prop dels quadres no cal fer-ho	42	
43	més a prop d'ell paret de quadres o sostre	posición de mosca			
45	paret de quadres mesurava d'ample cinc	cálculo de la distancia por una cara de un ortoedro orientado: pared con cuadros	cinc	46	e4| Teorema de Pitágoras
47	cinc metres	identificación de las longitudes de la tarea	a la meitat	48	
			dos de la paret de quadres	50	
51	dos metres	interpretación de las longitudes de la tarea	zero coma cinc	52	
53	zero coma cinc		triangle rectangle	54	
55	triangle rectangle així	triángulo rectángulo cuya hipotenusa da la longitud del camino	zero vint-i-cinc	56	
57	zero vint-i-cinc	interpretación de la longitud de una altura del triángulo rectángulo	set coma cinc	60	
61	set coma cinc	interpretación de la longitud de una base del triángulo rectángulo	cinc més dos	62	

63	cinc més dos més zero coma cinc caminant en diagonal mosca per la paret de recte, en diagonal i recte	longitud de una base del triángulo rectángulo longitud de un camino candidato a solución con Teorema de Pitágoras	pel sostre és menys	64	
65	menys	cálculo de la longitud del camino por una cara de un ortoedro orientado: techo	pel sostre	68	
67	dues opcions set coma cinc zero quatre per la paret de quadres set coma quatre zero tres pel sostre	comparación de longitudes: por pared con cuadros - techo			
69	sostre altres opcions pitjors no cal calcular-les dues millors fent tots els càlculs	menor longitud posición de mosca medida de caminos			
71	línia recta es la millor diferents desplegaments pel sostre, paret	diferentes desarrollos de un ortoedro	paret i sostre	76	e5| Desarrollos favorables
77	un mica paret finestra un mica paret de quadres un mica sostre un mica de l'altra	movimientos por más de tres cares de un ortoedro orientado	pitjor	78	
79	encara pitjor desplegaments dues oposades sempre dalt aquí escalonada segur que no	camino por menor número de caras adecuación de desarrollos en relación a la tarea			

Tabla 3.8: Instrumento Vertical aplicado en T1 de PA

Las expresiones clave y los complementos matemáticos de [1] a [15] comunican la forma de un camino candidato a solución: tipo de movimientos (horizontales, verticales, oblicuos), número de movimientos (concatenar más de un movimiento, movimiento único), coordenadas inicial (posición araña) y final (posición mosca) y distancia entre dos puntos del plano. En [16] se pasa a considerar caminos por otras paredes del salón. El cambio de idea matemática señala el final de un primer episodio, e1: *Distancia entre dos puntos del plano*, y el inicio de otro.

Los turnos [16] a [32] comunican los desarrollos asociados a cada camino según las paredes por donde se pase: desarrollos del ortoedro (hexaminós, desarrollos del cubo) y desarrollos para los caminos candidatos a solución (por pared con cuadros, por techo). En [33] se comunica la elección de caminos candidatos a solución. El cambio de idea matemática señala el final de un segundo episodio, e2: *Desarrollos ortoedro. Correspondencia desarrollo-camino.*

Los turnos [33] a [44] comunican la necesidad de elegir caminos que geométricamente puedan resolver la tarea: caminos candidatos (pared con cuadros, otra pared, suelo, techo), orientación de paredes (pared mosca, pared araña) y posición de la mosca. El cambio de idea matemática señala el final de un tercer episodio, e3: *Caminos favorables.*

De [45] a [70] se comunica la elección del camino con menor longitud mediante cálculo de la distancia entre araña y mosca: triángulo rectángulo (catetos, hipotenusa) y Teorema de Pitágoras (por pared con cuadros, por techo). El cambio de idea señala el final de un cuarto episodio, e4: *Teorema de Pitágoras.*

Finalmente, los turnos [71] a [79] comunican desarrollos adecuados para caminos óptimos: camino (segmento único), desarrollos del ortoedro y paredes (minimizar número de paredes). La discusión finaliza con el turno [79] señalando el quinto y último episodio, e5: *Desarrollos favorables*.

La Tabla 3.9 muestra los episodios para todas las discusiones conjuntas e indica los turnos y el título que describe la idea matemática. Consúltese en Anexo C el instrumento Vertical del resto de discusiones conjuntas.

Tarea	**Profesora**	**Turnos**	**Episodios**	
1	PA	[1, 15]	e1	Distancia entre dos puntos del plano
		[16, 32]	e2	Desarrollos ortoedro. Correspondencia desarrollo-camino
		[33, 44]	e3	Caminos favorables
		[45, 70]	e4	Teorema de Pitágoras
		[71, 79]	e5	Desarrollos favorables
	PB	[1, 11]	e1	Desarrollos ortoedro
		[12, 46]	e2	Distancia entre dos puntos del plano
		[47, 79]	e3	Caminos favorables
		[80, 85]	e4	Dirección camino
		[86, 123]	e5	Teorema de Pitágoras
2	PA	[1, 23]	e1	Área ortoedro
		[24, 33]	e2	Optimización caras por vaso
		[34, 45]	e3	Invariancia entre ortoedros: área base
		[46, 78]	e4	Perímetro base ortoedro
		[79, 85]	e5	Optimización de vasos contorno
		[86, 115]	e6	Otras cajas solución. Modificación condiciones iniciales
	PB	[1, 38]	e1	Espacios vacíos entre vasos
		[39, 59]	e2	Invariancia entre ortoedros: área base y volumen
		[60, 184]	e3	Área base ortoedro
		[185, 191]	e4	Caja favorable
		[192, 216]	e5	Volumen ortoedro
		[217, 234]	e6	Diámetro vaso
		[235, 267]	e7	Perímetro ortoedro
		[268, 296]	e8	Optimización de vasos contorno

Tabla 3.9: Episodios de las discusiones conjuntas

Estudio de episodios

La generación de episodios permite estudiar la noción de revoicing a otro nivel. Las funciones discursivas referentes al contenido sirven para agrupar los turnos por ideas clave, que son las ideas matemáticas anticipadas en el diseño de tareas (2.3). Al estudiar los turnos con revoicing para cada episodio, vemos que hay funciones independientes del contenido matemático. Por ejemplo, hay turnos donde las profesoras re-expresan ideas omitiendo ideas de los alumnos.

Episodios en T1 de PA

En T1 de PA (Figura 3.5) tomamos de cada episodio los turnos con revoicing y diferenciamos aquellos complementos matemáticos elegidos como comunicados (gris oscuro) de los no elegidos (blanco), además de aquellos que son sometidos a selección para los alumnos (gris claro).

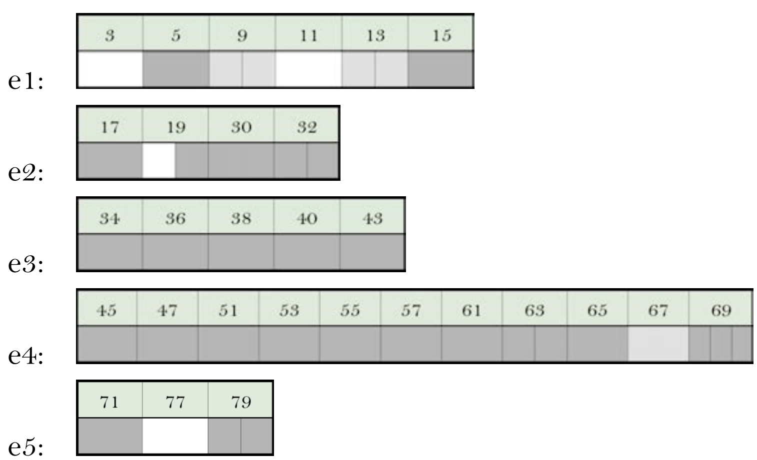


Figura 3.5: Estudio de episodios en T1 de PA

Centrando la mirada en los turnos con revoicing anteriores, vemos que en la discusión de T1, PA comunica cinco ideas matemáticas de acuerdo con los cinco episodios identificados. En e1, se dice que el camino debe ser un único segmento [13] [15] que tenga por extremos las posiciones iniciales de araña y mosca [5]. En e2, se dice que la selección de los desarrollos [30] [32] depende del camino candidato a solución [17] [19] que se quiera representar y estudiar. En e3, se dice que la posición de la mosca [43] permite descartar caminos candidatos a solución [34], como ir por el suelo [36] o por la otra pared [40]. La orientación de las caras donde están situados los animales es particular para cada camino [38]. En e4, se dice que la aplicación del Teorema de Pitágoras [63] permite calcular el camino con menor longitud, es decir, el camino por el techo [69]. Para ello es necesario construir los dos triángulos rectángulos: por la pared de cuadros [44] [47] [51] [57] [61] [63] y por el techo [65] y escoger el de menor longitud [67]. Finalmente, en e5, se dice que los desarrollos favorables [71] para determinar caminos candidatos a solución deben tener las paredes de los animales opuestas [79] y evitar que la araña pase por más de tres paredes.

Al finalizar cada episodio hay ideas que han sido integradas, con independencia de ser correctas, y otras descartadas. Por ejemplo, al finalizar e1, la concatenación de dos movimientos de un camino [3] no se considera para caracterizar el camino solución. PA no valora la corrección de esta opción y omite la idea re-expresando que la mejor opción es un único movimiento [15]. En e3, se consideran todas las ideas mediante uso de revoicing. Esto también se da en el resto de discusiones.

Episodios en T1 de PB

En T1 de PB (Figura 3.6) se han identificado cinco episodios que corresponden a cinco ideas matemáticas. En e1, se dice que el desarrollo con las caras de los animales adyacentes al techo [11] es adecuado para representar caminos por el techo

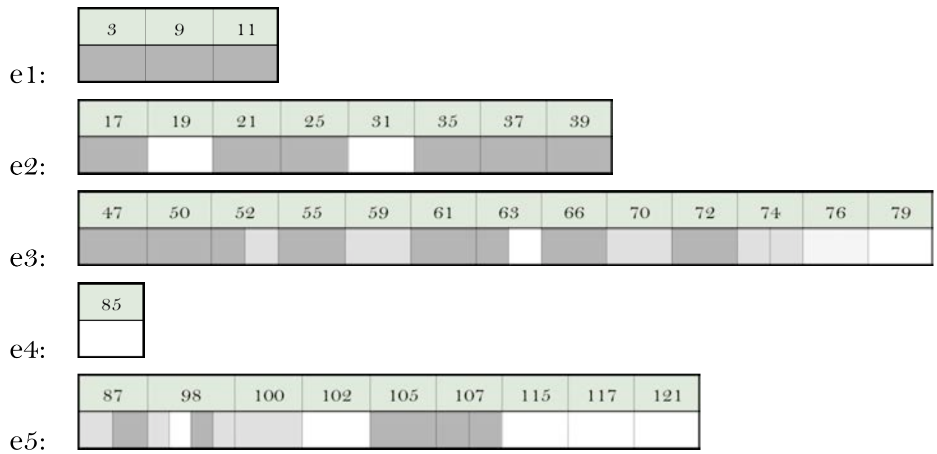


Figura 3.6: Estudio de episodios en T1 de PB

[9], es decir, se propone una correspondencia entre desarrollos y caminos. En e2, se dice que el camino debe ser un único segmento recto [17] y se estudia la concatenación de movimientos horizontales y oblicuos [21] [25] [35] [37] [39]. En e3, de los caminos candidatos a solución [52] [59], pared con cuadros [47], techo [47] [50], suelo [61] y la otra pared [63], se dice que los caminos favorables son ir por la pared de cuadros [74] e ir por el techo [72] [74] dada la posición de la mosca [55] [66] [70]. En e4, se retoma la idea matemática e2, reafirmando que el camino debe ser único segmento recto y que en este caso es oblicuo a las aristas del salón. Finalmente, en e5, se dice que la aplicación del Teorema de Pitágoras de los dos caminos favorables a ser solución [87] [98] [100] determina el camino óptimo [87] [98] dado que la longitud del camino [105] [107] coincide con la hipotenusa de un triángulo rectángulo [98] cuya base y altura es conocida y permite determinar ir por el techo como camino óptimo [105].

Episodios en T2 de PA

En T2 de PA (Figura 3.7) se han identificado seis episodios y, por tanto, seis ideas matemáticas principales. En e1, se dice que el área de las tres cajas candidatas a

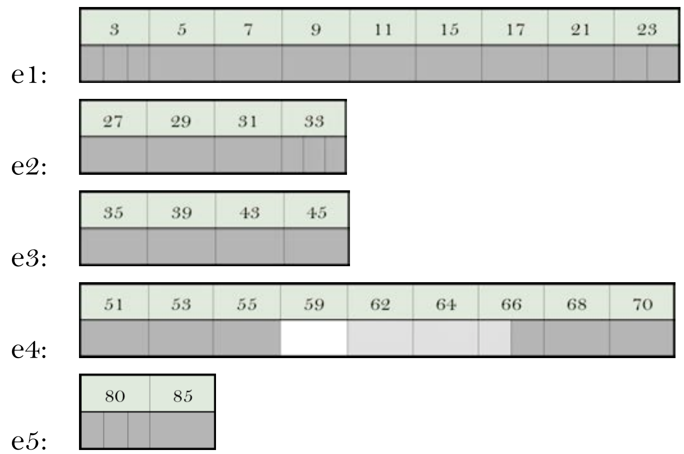


Figura 3.7: Estudio de episodios en T2 de PA

solución [23], caja 3x4 [3] [5] [7] [9] [11] [15] [17], caja 2x6 [21] y caja 1x12 [23], determina cuál necesita menos material para su construcción [23]. En e2, se dice que la posición de los vasos [27] contribuye a gastar más material [33], esto se da cuando los vasos están en contacto con las paredes laterales [29] [31] [33] por lo que hay que minimizar los vasos situados en el contorno de las cajas [33]. En e3, se dice que el área de las bases de las tres cajas candidatas a solución coinciden [39] [45] dado que hay la misma cantidad de vasos, de igual diámetro [43] y altura, es decir, al calcular el área de cada caja [35] se puede obviar el área de las bases. En e4, se dice que el perímetro de las bases de las cajas [51] [53] [55] permite determinar de entre las tres opciones [62] [64] [66] que la caja 3x4 es la óptima [66] [68] [70]. En e5, se retoma la idea de e2, pero se estudia la optimización de vasos en el contorno de las cajas [80] y la relación con el perímetro [85]. Finalmente, en e6, se dice que la modificación de condiciones iniciales de T2 optimiza el material, por ejemplo, distribuyendo los vasos en circunferencia [95] [97] [99] o intercalando los vasos bocarriba-bocabajo [101] garantizando el menor contacto entre vasos y paredes laterales de la caja [115].

Episodios en T2 de PB

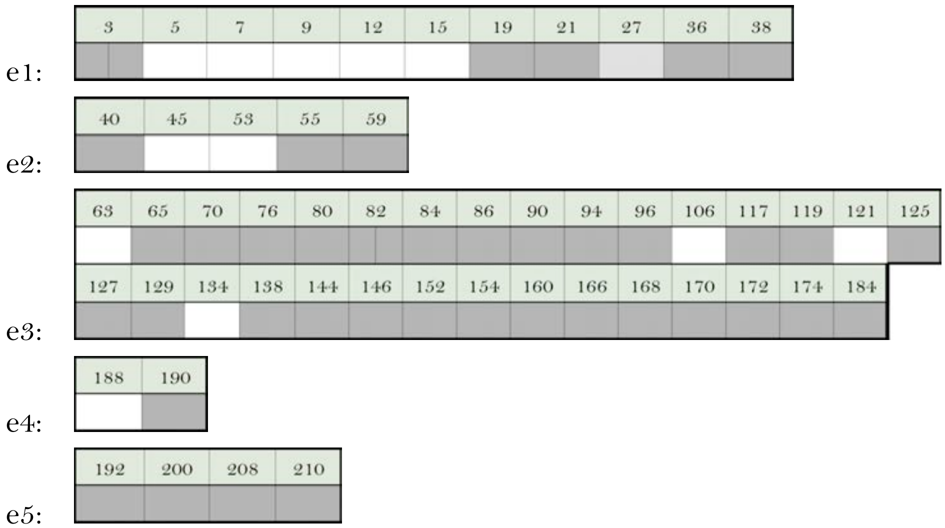


Figura 3.8: Estudio de episodios en T2 de PB

En T2 de PB (Figura 3.8) se han identificado ocho episodios y, por tanto, ocho ideas matemáticas principales. En e1, se dice que la distribución de los vasos condiciona los espacios vacíos entre vasos [27], considerando los vacíos de las cajas 3x4 [3] y 1x12 [19] [36] [38]. En e2, se dice que hay similitudes entres las tres cajas candidatas a solución [40] como son volumen [55] y área de las bases [59]. En e3, se dice que el área de las bases de las cajas candidatas a solución son iguales [184], cajas 1x12 [70] [76] [82] [84] [90] [117], 2x6 [129] [146] [152] y 3x4 [160] [166] [170] [172]; se necesita diámetro de un vaso [65] [82] [138] [144], número de vasos [80] [138] [144], fórmula del área de un paralelogramo [94] [96] y unidad de medida por magnitud [86] [119] [125] [127] [154] [168] [174]. En e4, se dice que la distribución de vasos de la caja favorable, 3x4, es reconocible en contextos cotidianos [190]. En e5, se dice que el volumen determina la caja óptima [192]; se necesita fórmula del volumen de un ortoedro [200], altura [208] y diámetro [210] de un vaso. En e6, se dice que de los dos diámetros de un vaso [218] el dado en el enunciado de T2 corresponde al superior [220], en caso contrario la caja no podría contener doce vasos [223]. En e7, se dice que una diferencia entre las cajas es el perímetro [243] [247] ya que las tres cajas coinciden en volumen y área de las bases [240], por lo que a menor perímetro menor cantidad de material [252] [266] [250] [262]. Finalmente, en e8, se dice que para minimizar el perímetro [286] se debe evitar el contacto de vasos con paredes laterales [277] [282]; se ejemplifica con situaciones cotidianas como la distribución de una docena de huevos [288] [290].

3.2.2. Resultados: Sobre relación entre funciones discursivas

Los resultados de este segundo nivel de análisis informan sobre la noción de revoicing en episodios. Analizamos las funciones discursivas mediante su complemento matemático y las expresiones clave de los turnos con revoicing de profesoras y los turnos de alumnos. Las relaciones entre funciones permiten agrupar turnos que constituyen episodios que comunican una idea matemática.

Basándonos en el estudio de episodios determinamos que las ideas matemáticas se construyen por elección, descarte o selección de turnos de alumnos. Interpretamos estas tres acciones como funciones discursivas de *enseñanza* a las que llamamos respectivamente: reunir, filtrar y escoger (Figura 3.9).

Reunir. Uso de revoicing que incluye todas las ideas matemáticas expresadas por alumnos; se acumulan ideas matemáticas re-expresándolas.

Filtrar. Uso de revoicing que descarta ideas matemáticas expresadas por alumnos; se omiten ideas matemáticas no re-expresándolas o re-expresando ideas mediante expresiones que sugieren descarte.

Escoger. Uso de revoicing que somete ideas matemáticas de alumnos a elección.

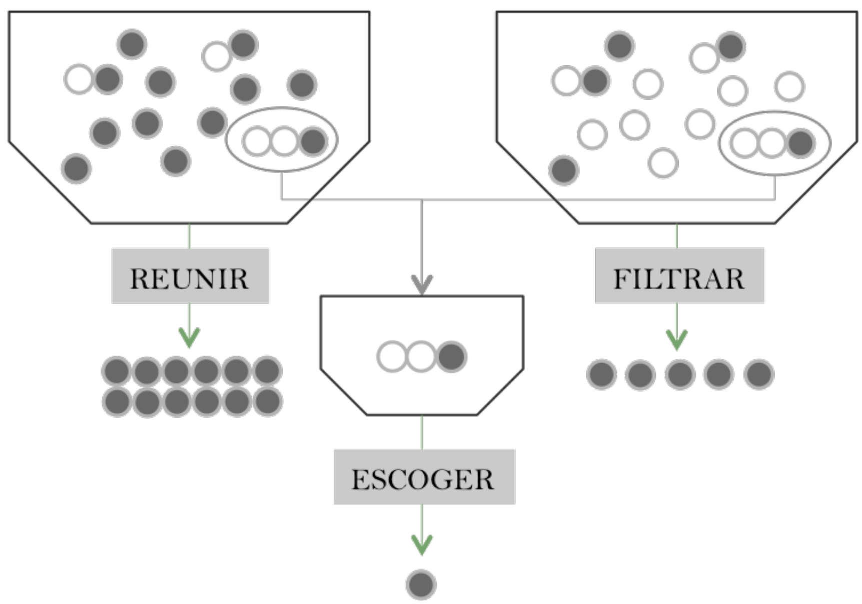


Figura 3.9: Funciones de enseñanza

Reunir, filtrar o escoger no tiene que ver con la corrección matemática de ideas sino con su interés según el discurso del profesor. Cuando interpretamos dichas funciones en los episodios, podemos tratar la función escoger como caso de reunir o filtrar. Si escogemos 'descartando' ideas matemáticas tenemos un caso de filtrar; si escogemos 'eligiendo' ideas matemáticas tenemos un caso de reunir. Estas funciones de enseñanza aparecen al estudiar el episodio como unidad.

En las discusiones hay episodios donde las profesoras aceptan todas las ideas (p. ej. e1, e2 y e3 de T2 de PA) o bien descartan la mayoría (p. ej. e5 de T1 de PB). Hay que estudiar dichas funciones de enseñanza fijándonos en el final del episodio, a fin de notar el papel de las ideas matemáticas en el discurso de las profesoras.

La generación de episodios indica que además de relaciones entre funciones hay relaciones entre ideas matemáticas de episodios. Así, el siguiente paso consiste en analizar las conexiones entre episodios. Esto permite un análisis global de sesiones, que equivale a un tercer nivel de análisis.

3.3. Objetivo 3: Nivel sesión

Con el logro del Objetivo 3 se interpreta la noción de revoicing a nivel de sesiones de clase estudiando conexiones entre episodios respecto a la actividad matemática.

3.3.1. Análisis: Conexión entre episodios

Analizar sesiones requiere una mirada que integre los turnos. Tomamos como punto de partida el análisis de episodios donde hay una primera conexión entre turnos consecutivos. La relación matemática entre episodios sirve para situar la noción de revoicing en otro nivel y estudiar otras conexiones. El análisis de conectividad consta de dos fases. La primera fase identifica turnos origen compartidos entre episodios (Figura 3.9). La segunda examina ideas compartidas que comunican los turnos origen (Figura 3.10). Explicamos la primera fase con la aplicación del instrumento Turnos origen en T1 de PA (Tabla 3.10).

Los episodios están delimitados por turnos de habla (Tabla 3.9), de tal modo que existe una relación entre episodios si los turnos origen de un episodio son propios de otro. En T1 de PA, los turnos de e1 son turnos origen de e2 [14] [15], de e4 [8] [9] [10] [11] y de e5 [14] [15]. Los turnos de e2 son turnos origen de e5 [20] [32]. Los turnos de e3 son turnos origen de e4 [39] [42] [43]. Los turnos de e4 no son turnos origen de e5 y, además, e5 no comparte sus turnos

#	episodio 1	episodio 2	episodio 3	episodio 4	episodio 5	
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						e1
9						
10						
11						
12						
13						
14						
15						
16						
17						
18						
19						
20						
21						
22						
23						
24						e2
25						
26						
27						
28						
29						
30						
31						
32						
33						
34						
35						
36						
37						
38						
39						e3
40						
41						
42						
43						
44						
45						
46						
47						
48						
49						
50						
51						
52						
53						
54						
55						
56						
57						
58						e4
59						
60						
61						
62						
63						
64						
65						
66						
67						
68						
69						
70						
71						
72						
73						
74						
75						e5
76						
77						
78						
79						

Tabla 3.10: Instrumento Turno origen aplicado en T1 de PA

por ser el último episodio. Se han identificado los turnos origen que son a su vez turnos con revoicing (verde) ya que pueden tener asociados otros turnos origen de otros episodios y otras relaciones entre episodios. Para las discusiones no ha supuesto ninguna variación en los turnos compartidos por episodios. La Tabla 3.11 muestra la relación de turnos origen compartidos entre episodios para todas las discusiones. Consúltese en Anexo D este análisis para el resto de discusiones.

Tarea	Prof.	Episodio	Turnos origen	Relación
1	PA	e1: [1, 15]	2, 4, 5, 8, 9, 10, 14	
		e2: [16, 32]	14, 15 | 16, 20, 29, 31	e1
		e3: [33, 44]	34, 35, 37, 42	
		e4: [45, 70]	8, 9, 10, 11 | 39, 42, 43 | 45, 50, 52, 54, 56, 60, 62, 64, 67, 68	e1 y e3
		e5: [71, 79]	14, 15 | 20, 32 | 76, 78	e1 y e2
	PB	e1: [1, 11]	2, 8, 9	
		e2: [12, 46]	8 | 16, 18, 25, 30, 31, 34, 36, 37	e1
		e3: [47, 79]	8 | 12, 16, 30 | 47, 48, 52, 54, 60, 62, 64, 68, 71, 73, 74, 76, 78	e1 y e2
		e4: [80, 85]	36 | 81, 85	e2
		e5: [86, 123]	74 | 87, 90, 91, 93, 95, 97, 98, 100, 101, 102, 104, 106, 107, 114, 116, 120	e3
2	PA	e1: [1, 23]	2, 3, 4, 6, 8, 9, 14, 16, 20, 22	
		e2: [24, 33]	24, 26, 28, 30, 32	
		e3: [34, 45]	2, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 | 34, 36, 38, 40, 42	e1
		e4: [46, 78]	34, 37, 38, 39 | 46, 50, 52, 54, 60, 61, 63, 65, 67	e3
		e5: [79, 85]	32 | 79, 81	e2
		e6: [86, 115]	24, 33 | 80, 81, 85 | 88, 92, 94, 95, 98, 100, 101, 102, 104, 106, 108, 114	e2 y e5

<table>
<tr><td rowspan="8">2</td><td rowspan="8">PB</td><td>e1: [1, 38]</td><td>2, 4, 8, 10, 14, 18, 20, 24, 36</td><td></td></tr>
<tr><td>e2: [39, 59]</td><td>39, 44, 49, 52, 54, 56</td><td></td></tr>
<tr><td>e3: [60, 184]</td><td>2 | 54, 59 | 62, 64, 75, 79, 81, 83, 85, 88, 94, 95, 105, 109, 110, 119, 120, 126, 127, 128, 133, 137, 143, 145, 151, 153, 165, 167, 169, 171, 173, 182</td><td></td></tr>
<tr><td>e4: [185, 191]</td><td>187, 190</td><td></td></tr>
<tr><td>e5: [192, 216]</td><td>59 | 199, 206</td><td>e2</td></tr>
<tr><td>e6: [217, 234]</td><td>218, 219, 220, 228</td><td></td></tr>
<tr><td>e7: [235, 267]</td><td>52, 54 | 183, 184 | 239, 240, 243, 246, 247, 248, 249, 250, 259, 261, 266</td><td>e2 y e3</td></tr>
<tr><td>e8: [268, 296]</td><td>187 | 276, 281, 283, 285, 287, 289, 291</td><td>e4</td></tr>
</table>

Tabla 3.11: Turnos origen de las discusiones conjuntas

Los primeros episodios de cada discusión presentan contribuciones clave para la resolución de las tareas. En todos los casos los turnos de e1 y e2 son reexpresados y, por tanto, tomados como turnos origen de los turnos con revoicing del resto de episodios, incluso para los últimos episodios, como en T1 de PA y PB.

Los turnos origen compartidos (gris oscuro en Turno origen) comunican ideas matemáticas clave, aristas del *grafo* que resulta del análisis. Explicamos esta fase del análisis con el instrumento Conectividad en T1 de PA (Figura 3.10).

El grafo de T1 y PA consta de cinco vértices, uno por episodio generado (Tabla 3.8) y cinco aristas que unen dichos vértices. El primer vértice, e1, presenta tres conexiones: e1-e2 mediante la arista [14,15] que comunica que el camino es un único segmento recto y para determinar su longitud se determina la distancia entre dos puntos del plano; e1-e4 mediante la arista [8,10,11] que comunica la dirección del segmento, un segmento en diagonal respecto a las aristas del salón; y e1-e5 de nuevo mediante la arista [14,15]. El segundo vértice, e2, presenta una conexión e2-e5 mediante la arista [20] sobre la posición de las caras donde es-

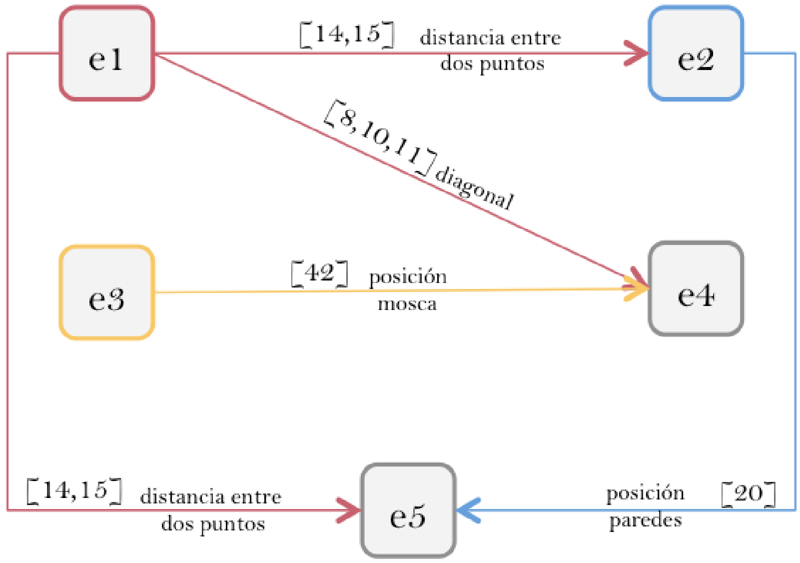


Figura 3.10: Instrumento Conectividad aplicado en T1 de PA

tán situados los animales según el desarrollo y camino a estudiar. Finalmente, el tercer vértice, e3, presenta una conexión e3-e4 mediante la arista [42] sobre la posibilidad de descartar caminos por la posición de la mosca.

No se considera la conmutatividad de conexiones, véase por ejemplo e2-e1, dado que los turnos de un episodio no son turnos origen de episodios anteriores. Por ello llamamos a los productos de la aplicación del instrumento Conectividad grafos *dirigidos* aprovechando la nomenclatura de la Teoría de Grafos.

El grafo dirigido de T1 y PA trata dos ideas matemáticas: características del camino y desarrollos del ortoedro. Ambas ideas son retomadas al final de la discusión, en e5. Así e5 es síntesis de los contenidos de T1. Se trata de un grafo dirigido y *conexo*, es decir, para cualquier par de vértices de T1 de PA existe al menos una trayectoria que conecta ambos vértices.

La Tabla 3.12 muestra las conexiones, aristas y grafos para todas las discusiones conjuntas. Consúltese en Anexo E la conectividad del resto de discusiones.

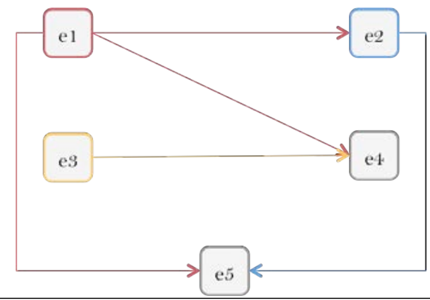
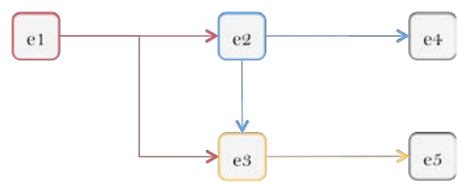
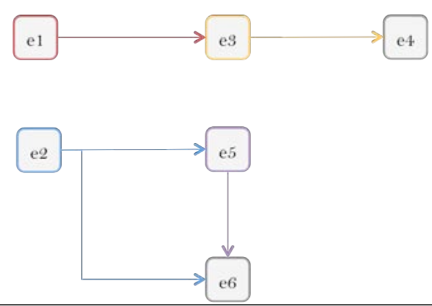
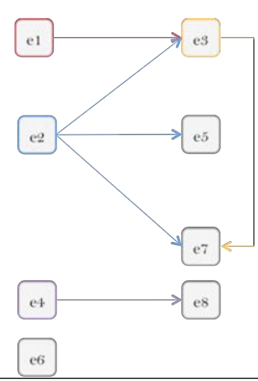
Tarea	Profesora	Conexión	Arista	Grafo
1	PA	e1-e2	[14,15]	
		e1-e4	[8,10,11]	
		e1-e5	[42]	
		e2-e5	[20]	
		e3-e4	[14,15]	
	PB	e1-e2	[8]	
		e1-e3	[8]	
		e2-e3	[16,30]	
		e2-e4	[36]	
		e3-e5	[74]	
2	PA	e1-e3	[2,4,6,8]	
		e2-e5	[32]	
		e2-e6	[24]	
		e3-e4	[34,38]	
		e5-e6	[81]	
	PB	e1-e3	[2]	
		e2-e3	[54]	
		e2-e5	[59]	
		e2-e7	[52,54]	
		e3-e7	[183]	
		e4-e8	[187]	

Tabla 3.12: Conexiones, aristas y grafos de las discusiones conjuntas

De las cuatro discusiones obtenemos cuatro grafos dirigidos de dos tipos: los que presentan una componente conexa, T1 de PA y T1 de PB, y los que presentan más de una componente conexa, T2 de PA (dos componentes conexas o bi-conexo) y T2 de PB (tres componentes conexas o tri-conexo).

Cada componente conexa de T2 de PA y T2 de PB trata el mismo contenido matemático. Por ejemplo, la primera componente conexa de T2 de PA (e1-e3-e4) trata de identificar magnitudes diferentes entre cajas, como el perímetro, y la segunda componente conexa (e2-e5-e6) trata la optimización de vasos en el contorno. Las componentes responden a dos estrategias para resolver T2. De manera similar, diferenciamos las mismas estrategias en la primera componente (e1-e2-e3-e5-e7) de T2 de PB, estudio de magnitudes, y la segunda (e4-e8), vasos en el contorno. En T2 de PB hay una tercera componente (e6) que replantea T2 al considerar el diámetro inferior de un vaso, lo cual se sugiere trabajar en otra sesión. Las componentes de T1 de PA (e1-e2-e3-e4-e5) y de T1 de PB (e1-e2-e3-e4-e5) tratan de hallar el camino óptimo aplicando el Teorema de Pitágoras.

3.3.2. Resultados: Sobre conexiones entre episodios

Los resultados de este nivel de análisis informan sobre la noción de revoicing en una sesión. Hemos analizado conexiones entre episodios mediante identificación de turnos origen y con atención a turnos origen compartidos entre episodios. La conectividad entre episodios es en sí misma un efecto del discurso, por tanto, una función discursiva que consideramos de enseñanza y que llamamos conectar.

Conectar. Uso de revoicing que mediante la re-expresión de turnos origen compartidos entre episodios relaciona ideas matemáticas no consecutivas.

Basándonos en el estudio y establecimiento de conexiones entre episodios obtenemos dos tipos de discurso: con una componente conexa o con varias.

Con una componente conexa. Todos los episodios de un discurso están conectados entre sí. Aunque se comuniquen ideas matemáticas diferentes el uso de revoicing evidencia que las ideas se complementan al compartir propiedades o conceptos..

Con varias componentes conexas. Hay grupos de episodios que actúan como únicas componentes conexas. El uso de revoicing no contempla la conexión entre ideas matemáticas. Esto no implica que no haya nada en común entre componentes conexas, pero con la mirada en la noción de revoicing no hay turnos compartidos donde profesores re-expresan todos los turnos de alumnos o bien no existen turnos de alumnos que comuniquen ideas matemáticas comunes entre episodios.

A nivel de sesiones, según el uso de revoicing se pueden conectar todos los episodios, es decir, todas las ideas matemáticas que se han comunicado en. Como ejemplo tenemos a las discusiones conjuntas de T1 de PA y PB.

El análisis de cuatro sesiones de clase ha permitido ser exhaustivo en los tipos de forma, atendiendo a expresiones clave que combinadas comunican ideas matemáticas y funciones, ya sea de contenido o de enseñanza. En el tercer nivel de análisis, mediante la identificación de la función conectar de revoicing se han caracterizado los discursos de clases de matemáticas según la conectividad de ideas. Esto replantea de nuevo la definición de revoicing (3.1.2, pág. 3.1.2) y considerar una que se ajuste mejor al contexto teórico, al análisis y resultados del estudio:

Revoicing del profesor consiste en repetir, refrasear, relatar o ampliar expresiones de ideas matemáticas expresadas en intervenciones de participantes y con efectos discursivos *en el desarrollo de ideas matemáticas en lo que a contenido y enseñanza se refiere.*

Esta nueva definición caracteriza revoicing del profesor considerando aspectos que emergen del análisis y resultados como expresiones y funciones de enseñanza. Ambos aspectos son imprescindibles para entender el desarrollo de ideas en clase de matemáticas mediante el uso de revoicing del profesor. Aunque nuestra mirada recae en los turnos de habla, para su análisis nos fijamos en las expresiones clave usadas. La identificación de expresiones clave en las ideas re-expresadas ha llevado a interpretar la forma lingüística y la función discursiva de contenido. Las funciones discursivas de enseñanza han llevado a estudiar la construcción (nivel episodios) y conectividad (nivel sesión) de ideas matemáticas.

Finalmente, consideramos un último resultado que involucra *los instrumentos creados y aplicados para el logro de cada objetivo*: Esquema de la tarea, Horizontal, Vertical, Turno origen y Conectividad. Todos ellos han sido diseñados, aplicados y validados a lo largo de esta investigación. Los resultados siguen un orden cronológico puesto que el análisis, y por tanto, la construcción de instrumentos para lograr un objetivo ha permitido iniciar el siguiente.

Conclusiones 4

En este último capítulo presentamos las conclusiones de la investigación. En primer lugar, respondemos a la pregunta investigación (4.1) retomando la definición de revoicing del profesor propuesta en el capítulo anterior y en la literatura. En segundo lugar, exponemos prospectivas de investigación (4.2) que dan continuidad al estudio mediante nuevas preguntas.

4.1. Revoicing del profesor

Para responder a la pregunta de investigación ¿Qué se entiende por revoicing del profesor en discusiones conjuntas de tareas matemáticas? ordenamos los resultados de este estudio y los interpretamos en un marco general de lengua y educación matemática (Planas et al., s.f.).

Para analizar el revoicing del profesor hemos pasado por tres niveles: turnos-episodios-sesión. En el primer nivel de análisis, se cuantifican los turnos con revoicing identificados y se les asocian formas y funciones. En el segundo nivel, hay una primera agrupación de turnos y por tanto de formas y funciones. Finalmente, en el tercer nivel se estudia el revoicing de manera global pasando a ser incontable. Esto no ha sido casual dado el posicionamiento teórico adoptado. Si se hubiera adoptado un enfoque comunicativo (e.g. Krummheuer, 2007), hubiera sido más probable centrarse en lo que comunica cada manifestación de revoicing por separado. El enfoque discursivo (e.g. Sfard, 2012, 2015) lleva a situar revoicing como constituyente del discurso, que es unitario, sin considerar un número de turnos discretos sino el discurso como continuo.

Los cambios en las formas de comunicación de discursos son inevitables por su constante producción y reproducción (Sfard, 2012). Además, tal y como apunta Pimm (1990), el habla matemática de alumnos se caracteriza por la cantidad de oraciones modificadas de inmediato. Si hubiéramos analizado los turnos con revoicing individualmente, además de perder información sobre desarrollo de ideas matemáticas, no se hubiera podido interpretar la noción de revoicing a nivel turno y episodio. Para el primer nivel la interpretación y asignación de formas y funciones de cada turno ha requerido estudiar los turnos que le seguían. Del mismo modo, la determinación de grupos de funciones ha requerido hacer un estudio global.

Así, la respuesta a la pregunta de investigación que proponemos es la *conceptualización de revoicing del profesor*. Primero retomamos la definición que resulta del último nivel de análisis, para sesiones de clase:

Revoicing del profesor consiste en repetir, refrasear, relatar o ampliar expresiones de ideas matemáticas expresadas en intervenciones de participantes y con efectos discursivos en el desarrollo de ideas matemáticas en lo que a contenido y enseñanza se refiere.

La definición de revoicing del profesor que proponemos está integrada en el domino contemporáneo de las teorías sociales sobre la lengua; esto es, el discurso o la lengua en uso es un sistema semiótico producto de la estructura social (Morgan, 2006, citado en Planas, 2017, p. 5). Con ello, tenemos aspectos de revoicing del profesor que podemos ubicar en: sistema, cultura y/o discurso. Las tres conceptualizaciones principales de lengua (Planas, 2017).

La Figura 4.1 recoge aspectos clave para la conceptualización de revoicing del profesor. Las formas lingüísticas que responden a la lengua como sistema, tratan cómo se expresan ideas matemáticas que se formulan con expresiones matemáticas. Las formas, junto a los participantes que interactúan según normas sociomatemáticas (Yackel y Cobb, 1996), responden a la conceptualización de la lengua como cultura. Finalmente, la lengua como discurso incluye las conceptualizaciones de lengua anteriores, además de las funciones y su efecto en el contenido y en la enseñanza de matemáticas.

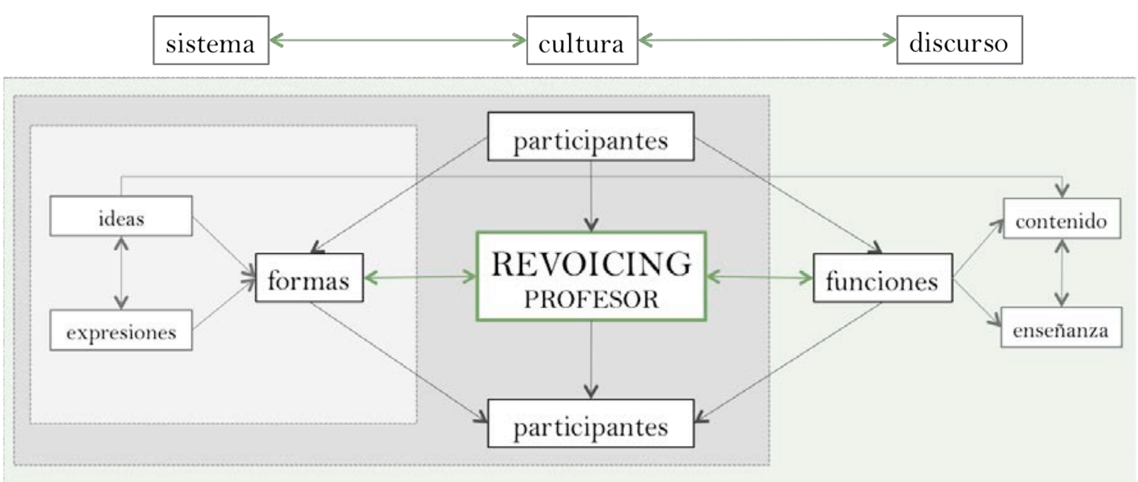


Figura 4.1: Conceptualización de revoicing del profesor

El concepto de revoicing del profesor propuesto alude a cuatro ideas principales.

Expresiones e ideas matemáticas

Coincidimos con Moschkovich (1999) en que si el propósito es apoyar la participación de alumnos en discusiones en clase de matemáticas, determinar el origen de un error lingüístico no es tan importante como escuchar las intervenciones y descubrir el contenido matemático que comunican. Aún así, la estructura lingüística ofrece al profesor herramientas para coordinar tareas y participación social (O'Connor y Michaels, 1993).

Al re-expresar las ideas matemáticas de intervenciones de alumnos, el profesor usa formas lingüísticas. La intervención re-expresada cambia su aspecto según las expresiones usadas pero mantiene la idea matemática comunicada en la intervención origen. Por tanto, una idea matemática puede comunicarse con diferentes expresiones, pero a su vez, las expresiones permiten reconocer la idea matemática comunicada.

Los participantes: alumnos y profesor

El revoicing del profesor ni se origina ni finaliza únicamente en el profesor. El profesor reconoce y legitima las intervenciones de cada alumno en discusiones conjuntas (Forman y Ansell, 2001). Aunque en el marco teórico hablábamos de autoría compartida (Goffman, 1981), el término que mejor describe el rol que asume el profesor al usar revoicing es el de *animador con criterio*, "presta su voz" a los alumnos pero toma decisiones sobre qué y cómo se re-expresa la voz de estos.

Hasta ahora la mayoría de clases y contextos en los que se ha estudiado el uso de revoicing son aquellos con alumnos con lenguas dominantes distintas a la de instrucción (e.g. Moschkovich, 1999, 2015); con bajo rendimiento académico (e.g. Empson, 2003); o en situación marginal en el país que residen (e.g. Enyedy et al., 2008). Según los autores el uso de revoicing permite a estos alumnos integrarse y participar de la clase de matemáticas. Aquí hemos constatado que el efecto de revoicing va más allá de la situación cultural del alumno. Atendiendo al carácter multilingüe (Adler, 2001) de la lengua de las matemáticas, el uso de revoicing tiene efecto en todos los alumnos. La negociación de significados (Pimm, 1990) y el reconocimiento de todos los participantes permite que el uso de revoicing del profesor tenga efectos en la construcción de ideas matemáticas.

Enseñanza y contenidos matemáticos

Las funciones identificadas e interpretadas a nivel turnos (Tabla 3.5) son de contenido matemático. Centrar la mirada en el revoicing del profesor evidencia que el contenido matemático puede ser comunicado según la enseñanza de cada profesor. Herbel-Eisenmann et al. (2009) consideran otras funciones discursivas como las de participación de alumnos. Aquí consideramos funciones discursivas de enseñanza que están ligadas a la construcción y conexión de contenido matemático.

Las funciones de enseñanza son las que permiten una mejor caracterización del revoicing del profesor. Pasamos de estudiar las matemáticas de discursos de discusiones conjuntas a atender a la toma de decisiones de profesores de ideas adecuadas para un contenido matemático.

Forma y función y viceversa

En la investigación, nos hemos centrado en formas lingüísticas que atañen a expresiones que comunican ideas matemáticas sin estudiar gramáticas u ortografías. En cuanto a funciones discursivas hemos estudiado las que tratan contenidos y enseñanza. Así, la definición de revoicing que proponemos integra tanto aspectos lingüísticos como efectos discursivos de intervenciones re-expresadas, que son mutuamente dependientes. Esta opción permite entender revoicing dentro de el domino contemporáneo de la lengua (Planas, 2017) y movernos entre sistema, cultura y discurso. Los participantes de clase de matemáticas (cultura) interactúan de acuerdo con normas lingüísticas (sistema) propias de las matemáticas y con efectos en el uso de la lengua o discurso que comunican (discurso). Una idea matemática re-expresada (sistema) por el profesor (cultura) se vincula a un contenido matemático determinado (discurso).

Finalmente, como afirman Chapin et al. (2003), el uso de revoicing puede ayudar a alumnos a seguir lo que está sucediendo matemáticamente en discusiones de clase. El uso de revoicing del profesor permite modelar ideas originales de participantes generando oportunidades de aprendizaje matemático (Ferrer, 2016; Morera, 2013) y, a su vez, es una herramienta discursiva de enseñanza de las matemáticas.

4.2. Prospectiva

El estudio de revoicing del profesor requiere analizar discursos de profesores y discursos de alumnos. Dada la pregunta y objetivos, hemos centrado la atención en profesores aunque podemos considerar como continuidad de la investigación el estudio de revoicing de alumnos. En ese caso, la pregunta que podríamos hacer es: ¿Qué se entiende por revoicing de alumnos en discusiones de grupos reducidos de tareas matemáticas? Las discusiones conjuntas analizadas no son una fuente suficiente para entender y conceptualizar revoicing de alumnos dado que los diálogos principalmente son entre profesor-alumno(s). Los turnos con revoicing de alumnos identificados en las discusiones conjuntas son solicitados por profesores al pedir al alumno que repita su intervención o la de un compañero (Chapin et al., 2003; Cirillo, 2013; Smith y Stein, 2011).

Las funciones discursivas interpretadas en la investigación son de contenido y enseñanza. El profesor las pone en práctica para el aprendizaje de sus alumnos. Esto lleva a preguntar: ¿Podemos definir e interpretar funciones de aprendizaje matemático en el uso de revoicing de alumnos? Tal y como apunta Goizueta (2015), transcribir una situación de interacción conlleva pérdida de información. Aunque hemos optado por una transcripción multimodal, no hemos recogido: tono de voz, pausas, todos los gestos, miradas y onomatopeyas. Los elementos paralingüísticos tienen que ver con la forma que a su vez permite entender las interpretaciones de funciones. Con las funciones de aprendizaje y los elementos paralingüísticos (Figura 4.2): ¿Podemos considerar una conceptualización de revoicing para profesor y alumno?

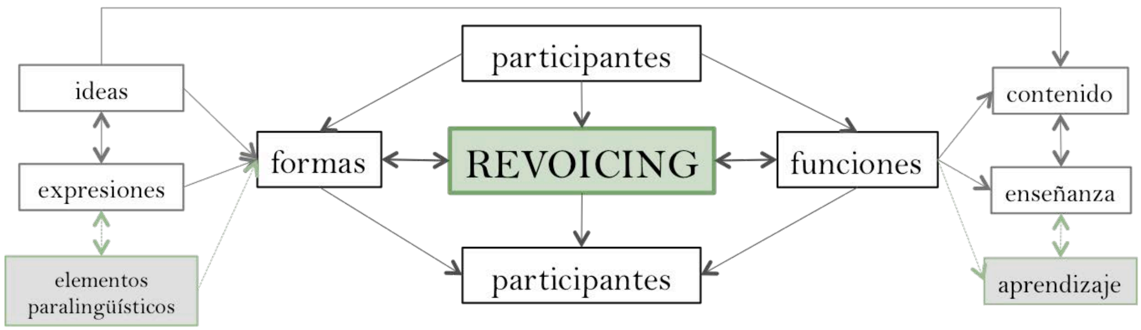


Figura 4.2: Propuesta de conceptualización de revoicing

Finalmente, con inspiración en el estudio del aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje de Ferrer (2016), donde se analizan protocolos escritos de alumnos comparando anotaciones previas y posteriores a discusiones conjuntas, nos preguntamos: ¿Las ideas matemáticas que los alumnos incorporan en el dosier de trabajo individual son re-expresiones de las ideas de los participantes de las discusiones conjuntas?¿Podemos considerar que se trata de un revoicing del alumno que re-expresa por escrito las intervenciones orales? Si bien la literatura nos dice que el uso de revoicing admite la re-expresión oral y escrita (e.g. Empson, 2003; O'Connor y Michaels, 1996) de las intervenciones de alumnos, el análisis de dosieres de alumnos abre la posibilidad de considerar un cambio de modo en el uso de revoicing por parte de alumnos.

Conclusions 5

In this final chapter, we present the conclusions of the study by first responding to the research question (5.1). This implies reconsidering the former preparatory conceptualisations of teachers' revoicing developed in chapter 3 in line with the literature. Second, we elaborate on future research perspectives (5.2) that may provide continuity to the current study through new questions.

5.1. Teachers' revoicing

To answer the research question, *What is signified by teachers' revoicing in joint discussions of mathematical tasks?*, we basically order the empirical results and interpret them within a general framework of mathematics education and language as provided by Planas et al. (s.f.),

For the analysis of teachers' revoicing, we applied three levels: spoken turns-episodes-lesson. The first level identifies and quantifies turns with revoicing and associates forms and functions with them. On the second level, there is an initial grouping of turns and thus of forms and functions. The third level globally studies revoicing as a whole. Given the theoretical position adopted, this is not casual. If a communicative approach had been adopted (e.g. Krummheuer, 2007), it would have been more likely to focus on what each manifestation of revoicing communicates separately. The discursive approach (e.g. Sfard, 2012, 2015) situates revoicing as integral constituent of discourse, which is unitary and continuous rather than a set of discrete turns.

Continuous changes in the forms of discourses are inevitable because of their constant (re)production (Sfard, 2012). In addition, as Pimm (1990) points out, the large number of statements modified on the fly characterises students' mathematical speech. If we had individually analysed the turns featuring revoicing, apart from losing information about the development of mathematical ideas, we could not have interpreted revoicing at the turn and episode levels. As regards the first level, the interpretation of the forms and functions of each turn and their assignment required the study of the turns that followed. Similarly, the identification of sets of functions asked for a global study.

Thus, our response to the research question is the *conceptualization of teachers' revoicing*. First, we reconsider the definition that results from the last level of analysis, the lesson level:

> **Teacher's revoicing** consists of repeating, rephrasing, explaining and expanding expressions of mathematical ideas articulated in interventions by participants and with discursive effects on the development of mathematical ideas in teaching and content focus.

The definition above is integrated into the contemporary language domain – where the discourse or language in use is a semiotic system produced by the social structure (Morgan, 2006, quoted in Planas, 2017, p. 5). Hence, we have aspects of teachers' revoicing that can be located in a system, culture and/or discourse, which are the main conceptualizations of language (Planas, 2017).

Figure 5.1 shows key aspects of the conceptualisation of teachers' revoicing. The linguistic forms that respond to language as system concern the expression of mathematical ideas. These forms, along with the participants who interact according to socio-mathematical norms (Yackel y Cobb, 1996), respond to the conceptualization of language as culture. Finally, language as discourse includes the other two conceptualisations of language, as well as the functions and their impact on mathematics teaching and content focus.

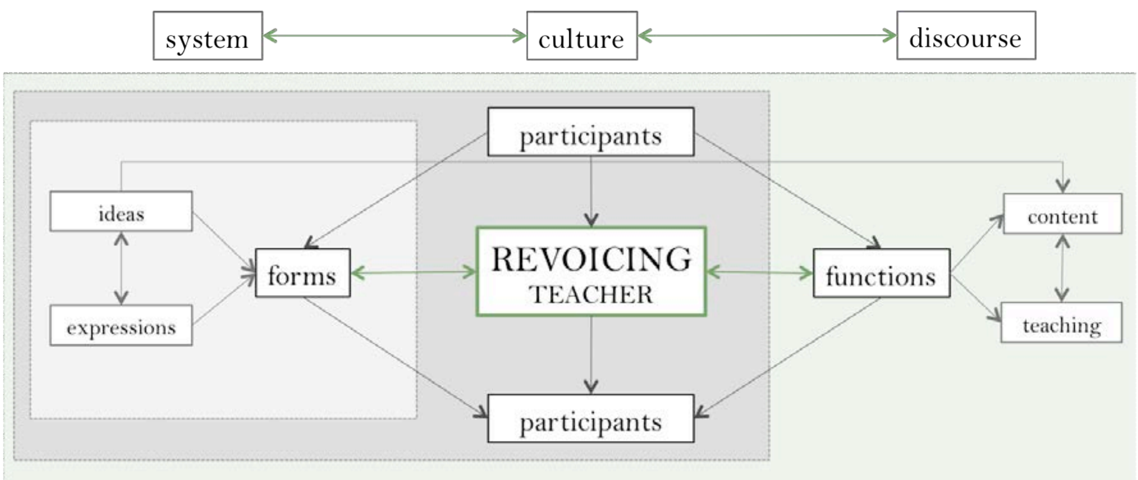


Figura 5.1: Conceptualisation of teachers' revoicing

The conceptualisation of teachers' revoicing brings four main ideas into play.

Mathematical expressions and ideas

We agree with Moschkovich (1999) that if the goal is to support student participation in mathematical discussions, identifying linguistic errors is not as important as listening to interventions and identifying the communication of mathematical content. Moreover, the linguistic structure provides teachers with tools to coordinate tasks and social participation (O'Connor y Michaels, 1993).

On re-expressing the mathematical ideas contained in student interventions, the teacher uses linguistic forms. The re-expressed intervention introduces changes according to the expressions used but retains the mathematical idea from the original intervention. Therefore, different expressions can communicate a mathematical idea and, at the same time, these expressions allow the mathematical idea to be recognised.

The participants: students and teacher

Teacher's revoicing neither originates nor ends only with the teacher. The teacher acknowledges and legitimises each student's intervention in joint discussions (Forman y Ansell, 2001). Although we referred to shared authorship (Goffman, 1981) in the theoretical framework, the term that best describes the role assumed by the teacher when using revoicing is that of a skilled facilitator, who "lends his or her voice" to the students and makes decisions about what is re-expressed and how.

So far, most classes and contexts in which revoicing has been studied have been ones with students whose dominant language differs from the teaching language (e.g. Moschkovich, 1999, 2015); displaying poor academic performance (e.g. Empson, 2003); or marginalised in the country they live in (e.g. Enyedy et al., 2008). Herein, revoicing helps students to participate in the mathematics class. In the current study, the effect of revoicing goes beyond social and cultural identities. Given the multilingual character (Adler, 2001) of the language of mathematics, revoicing has an impact on all students. The negotiation of meanings (Pimm, 1990) and the acknowledgement given to students allows teachers' revoicing to impact on the construction of mathematical ideas.

Mathematics teaching and content

The functions identified and interpreted at the level of turns (Table 3.5) relate to mathematical content. Teacher's revoicing puts the communication of mathematical content in relation to the teacher's teaching strategies. Herbel-Eisenmann et al. (2009) consider other discursive functions such as student participation. Here, we consider discursive functions of teaching linked to the construction and connection of mathematical content.

Teaching functions permit a more profound characterisation of teachers' revoicing. In this process, we move from studying the mathematics of discourses that emerges in joint discussions to examining the teachers' decisions made with regard to ideas suitable for developing mathematical content.

Form and function, and vice versa

In this research, the focus on linguistic forms that refer to expressions communicating mathematical ideas does not incorporate grammar or spelling issues. As regards discursive functions, we study those that deal with content and teaching.

Thus, our conceptualisation of revoicing integrates both linguistic aspects and the discursive effects of re-expressed interventions, which are interdependent. Taking this approach, we understand revoicing within the contemporary domain of the language (Planas, 2017) that integrates the attention to systems, cultures and discourses. Participants of the mathematics class (culture) interact in accordance with the linguistic norms (system) of mathematics and with effects on what and how they communicate (discourse). Briefly put, a mathematical idea re-expressed (system) by the teacher (culture) is linked to specific mathematical content (discourse).

As stated by Chapin et al. (2003), revoicing can help students to follow what is happening mathematically during class discussions. Teachers' revoicing allows the modelling of participants' original ideas to generate mathematical learning opportunities for students (Ferrer, 2016; Morera, 2013) and, at the same time, it provides a discursive tool for teaching mathematics.

5.2. Future perspectives

The study of teachers' revoicing demands the analysis of teachers' and students' discourses in the classroom. While we focus attention on teachers – given the question and the objectives –, we can consider students' revoicing as the basis of further research. In this case, we might ask What is signified by students' revoicing in discussions of mathematical tasks in small groups? The joint discussions analysed do not provide sufficient insight to understand and conceptualise students' revoicing because dialogues are mainly between a teacher and student(s). The turns with students' revoicing in the joint discussions are prompted by teachers asking students to repeat their intervention or that of a classmate (Chapin et al., 2003; Cirillo, 2013; Smith y Stein, 2011).

The discursive functions interpreted in the research are content and teaching focused. Teachers put them into practice to help their students learn. This leads us to ask whether we can interpret mathematical learning functions in the use of students' revoicing. As pointed out by Goizueta (2015), transcribing a situation of interaction leads to information loss. Although we opt for a multimodal transcription, we do not reflect tone of voice, pauses, gestures, facial expressions and onomatopoeia. Paralinguistic features relate to the form that makes the interpretations of functions understandable. If we included learning functions and paralinguistic features (Figure 5.2), could we propose a common conceptualisation of revoicing for teachers and students?

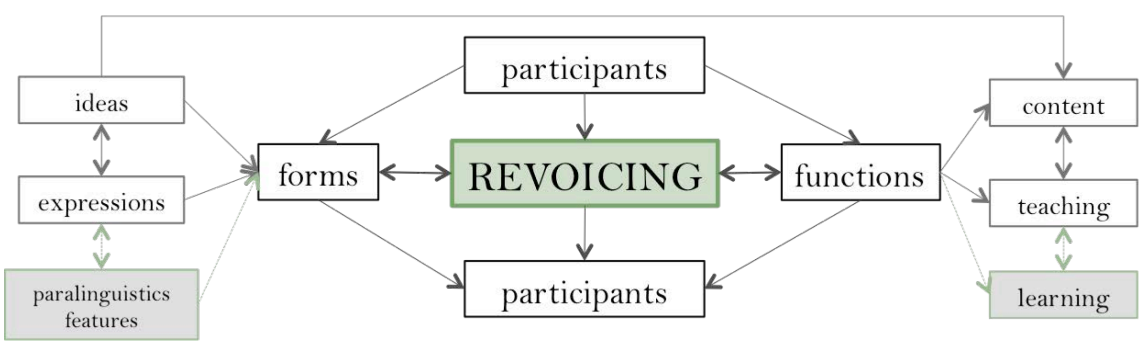


Figura 5.2: Proposal for the conceptualisation of revoicing

Finally, the study of learning opportunities by Ferrer (2016), where the analysis of students' written protocols compares annotations before and after joint discussions, has inspired more questions: Are the mathematical ideas that students incorporate into their individual work re-expressions of ideas of participants of joint discussions? Are oral interventions re-expressed in writing students' revoicing? Although literature tells us that revoicing does encompass oral and written re-expressions of student interventions (e.g. Empson, 2003; O'Connor y Michaels, 1996), the analysis of student work opens up the possibility of considering a change of mode in students' revoicing.

Referencias

Adler, J. (2001). *Teaching mathematics in multicultural classrooms.* Londres: Kluwer.

Adler, J. y Ronda, E. (2015). A framework for describing mathematics discourse in instruction and interpreting differences in teaching. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, *19*(3), 237-254.

Arnal-Bailera, A., Fortuny, J. M., García-Honrado, L. y Planas, N. (2016). El discurso matemático del profesor: ejemplos, explicaciones y coherencia local. En A. Berciano, C. Fernández, T. Fernández, J. L. González, P. Herández y otros (Eds.), (p. 437-446). Málaga: SEIEM.

Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O. y Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(2), 97-109.

Austin, J. L. y Howson, A. G. (1979). Language and mathematical education. *Educational Studies in Mathematics*, *10*(2), 161-197.

Barwell, R. (2016). Formal and informal mathematical discourses: Bakhtin and Vygotsky, dialogue and dialectic. *Educational Studies in Mathematics*, *92*(3), 331-345.

Boeije, H. (2002). A purposeful approach to the constant comparative method in the analysis of qualitative interviews. *Quality and Quantity*, *36*(4), 391-409.

Boukafri, K. (2015a). *Actions of argumentation in whole class discussion: a study in a mathematical classroom.* Poster presentado en Reason School - Scientific Reasoning and Argumentation. Marzo de 2015. Munich, Alemania.

Boukafri, K. (2015b). Materiales manipulativos como recurso en la resolución de problemas de geometría. *UNO. Didáctica de las Matemáticas*, *70*, 68-74.

Boukafri, K., Civil, M. y Planas, N. (s.f.). A teacher's use of revoicing in mathematical discussions. Hamburg, Germany.

Boukafri, K. y Ferrer, M. (2015). Resolución de problemas de geometría con material manipulativo o soporte tecnológico. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"*, *89*, 49-65.

Boukafri, K., Ferrer, M. y Morera, L. (2015). Problemas competenciales de geometría para secundaria con material manipulativo o soporte tecnológico. En P. A. Sánchez Martínez (Ed.), *Actas de las 17 JAEM*.

Boukafri, K., Ferrer, M. y Planas, N. (2015). Mathematics learning in whole class discussion: a design experiment. En K. Krainer y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (p. 1340-1346). Praga: ERME.

Boukafri, K. y Planas, N. (2015). Analysing discourse in a whole class interaction: some insights on the learning of mathematics. En K. Beswick, T. Muir y J. Wells (Eds.), *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 151). Hobart: PME.

Brown, G. y Yule, G. (1993). *An:álisis del discurso.* Madrid: Visor.

Chapin, S., O'Connor, C. y Anderson, N. (2003). Classroom discussions using math talk in elementary classrooms. *Math Solutions Newsletter*(11).

Charmaz, K. (2006). *Constructing grounded theory: a practical guide through qualitative analysis.* Londres: Sage.

Chico, J. (2014). *Impacto de la interacción en grupo en la construcción de argumentación colectiva en clase de matemáticas.* Trabajo de Tesis Doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Cirillo, M. (2013). What does the research say the benefits of discussion in mathematics class are. *NCTM Research Brief* (19).

Civil, M. (2014). Musings around participation in the mathematics classroom. *The Mathematics Educator*, *23*(2), 3-22.

Civil, M. y Planas, N. (2004). Participation in the mathematics classroom: does every student have a voice? *For the Learning of Mathematics*, *24*(1), 7-12.

Cobo, P. (1998). *Análisis de los procesos cognitivos y de las interacciones sociales entre alumnos (16-17) en la resolución de problemas que comparan áreas de superfícies planas. un estudio de casos.* Trabajo de Tesis Doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Corbin, J. M. y Strauss, A. (1990). Grounded theory research: procedures, canons, and evaluative criteria. *Qualitative Sociology*, *13*(1), 3-21.

Dey, I. (1993). *Qualitative data analysis: a user-friendly guide for social scientists.* Nueva York: Routledge.

Duranti, A. (1997). *Linguistic anthropology.* Cambridge: Cambridge University Press.

Empson, S. B. (2003). Low-performing students and teaching fractions for understanding: an interactional analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, *34*(4), 305-343.

Enyedy, N., Rubel, L., Castellón, V., Mukhopadhyay, S., Esmonde, I. y Secada, W. (2008). Revoicing in a multilingual classroom. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(2), 134-162.

Escudero, I. M., Gavilán, J. M. y Sánchez-Matamoros, G. (2014). Una aproximación a los cambios en el discurso matemático generados en el proceso de definir. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(1), 7-32.

Ferrer, M. (2016). *Estudio sobre la actuación docente y la interacción en la creación y aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje en el aula de matemáticas.* . Trabajo de Tesis Doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Forman, E. A. y Ansell, E. (2001). The multiple voices of a mathematics classroom community. *Educational Studies in Mathematics*, *46*(1), 115-142.

Forman, E. A. y Ansell, E. (2002). Orchestrating the multiple voices and inscriptions of a mathematics classroom. *Journal of the Learning Sciences*, *11*(2-3), 251-274.

Forman, E. A., Larreamendy-Joerns, J., Stein, M. K. y Brown, C. A. (1998). "you're going to want to find out which and prove it": collective argumentation in a mathematics classroom. *Learning and Instruction*, *8*(6), 527-548.

Forman, E. A., McCormick, D. E. y Donato, R. (1997). Learning what counts as a mathematical explanation. *Linguistics and Education*, *9*(4), 313-339.

Gee, J. P. (2005). *La ideología en los discursos.* Madrid: Morata.

Godino, J. D. y Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Educación matemática*, *12*(1), 70-92.

Goffman, E. (1981). *Forms of talk.* Filadelfia: University of Pennsylvania Press.

Goizueta, M. (2015). *Aspectos epistemológicos de la argumentación en el aula de matemáticas.* Trabajo de Tesis Doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Herbel-Eisenmann, B., Drake, C. y Cirillo, M. (2009). "Muddying the clear waters": teachers' take-up of the linguistic idea of revoicing. *Teaching and Teacher Education*, *25*(2), 268-277.

Ingram, J. (2012). *Whole class interaction in the mathematics classroom: a conversation analytic approach.* . Trabajo de Tesis Doctoral. University of Warwick.

Kieran, C. (2001). The mathematical discourse of 13-year-old partnered problem solving and its relation to the mathematics that emerges. *Educational Studies in Mathematics*, *46*, 187-228.

Kieran, C., Forman, E. y Sfard, A. (2001). Learning discourse: sociocultural approaches to research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *46*(1), 1-12.

Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom: two episodes and related theoretical abductions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *26*(1), 60-82.

Mehan, H. (1979). *Learning lessons: social organization in the classroom.* Cambridge: Harvard University Press.

Morera, L. (2013). *Contribución al estudio de la enseñanza y del aprendizaje de las isometrías mediante discusiones en gran grupo con el uso de tecnología.* Trabajo de Tesis Doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Morgan, C. (2006). What does social semiotics have to offer mathematics education research? *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1), 219-245.

Moschkovich, J. (1999). Supporting the participation of english language learners in mathematical discussions. *For the Learning of Mathematics*, *19*(1), 11-19.

Moschkovich, J. (2003). What counts as mathematical discourse? En N. A. Pateman, B. J. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), (Vol. 3, p. 325-331). Honolulu: PME.

Moschkovich, J. (2007). Examining mathematical discourse practices. *For the Learning of Mathematics*, *27*(1), 24-30.

Moschkovich, J. (2015). Scaffolding student participation in mathematical practices. *ZDM - Mathematics Education*, *47*(7), 1067-1078.

O'Connor, M. C. (2001). "Can any fraction be turned into a decimal?" a case study of a mathematical group discussion. *Educational Studies in Mathematics*, *46*(1-3), 143-185.

O'Connor, M. C. y Michaels, S. (1993). Aligning academic task and participation status through revoicing: analysis of a classroom discourse strategy. *Anthropology and Education Quarterly*, *24*, 318-318.

O'Connor, M. C. y Michaels, S. (1996). Shifting participant frameworks: orchestrating thinking practices in group discussion. *Discourse, Learning, and Schooling*, 63-103.

Pimm, D. (1990). *El lenguaje matemático en el aula.* Madrid: Ediciones Morata.

Planas, N. (2017). Aprendizaje matemático multilingüe: qué se sabe y desde qué teorías. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), (p. 89-103). Zaragoza: SEIEM.

Planas, N., Font, V. y Edo, M. (2009). La confrontación de normas en la construcción de discursos de la matemática escolar. *Paradigma*, *30*(2), 125-142.

Planas, N., García-Honrado, I. y Arnal-Bailera, A. (2017). Análisis de la coherencia local del discurso matemático del profesor. *Enseñanza de las Ciencias*, *3*(35), 7-27.

Planas, N., Morgan, C. y Schütte, M. (s.f.). Mathematics education and language: lessons and directions from two decades of research. En T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger y K. Ruthven (Eds.), *Developments in european research in mathematics education. twenty years of communication, cooperation and collaboration*. Londres: Routledge.

Radford, L. (2008). The ethics of being and knowing: towards a cultural theory of learning. En L. Radford, G. Schubring y F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education: Epistemology, history, classroom, and culture* (p. 215-234). Rotterdam: Sense.

Rosemberg, C. R., Borzone, A. M. y Diuk, B. (2003). El diálogo intercultural en el aula: un análisis de la interacción en situaciones de enseñanza con niños de poblaciones suburbanas pobres. *Cultura y Educación*, *15*(4), 399-423.

Ruthven, K. y Hofmann, R. (2016). A case study of epistemic order in mathematics classroom dialogue. *PNA*, *11*(1), 5-33.

Sacks, H., Schegloff, E. A. y Jefferson, G. (1974). A simplest systematics for the organization of turn-taking for conversation. *Language*, *50*(4), 696-735.

Saxe, G. B., Gearhart, M., Shaughnessy, M., Earnest, D., Cremer, S., Sitabkhan, Y., … Young, A. (2009). A methodological framework and empirical techniques for studying the travel of ideas in classroom communities. En B. Schwarz, T. Dreyfus y R. Herschkowitz (Eds.), *Transformation of knowledge through classroom interaction* (p. 203-222). Nueva York: Routledge.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando: Academic Press.

Sfard, A. (1998). On two metaphors for learning and the dangers of choosing just one. *Educational researcher*, *27*(2), 4-13.

Sfard, A. (2000). On reform movement and the limits of mathematical discourse. *Mathematical Thinking and Learning*, *2*(3), 157-189.

Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *The Journal of the Learning Sciences*, *16*(4), 565-613.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing.* Nueva York: Cambridge University Press.

Sfard, A. (2012). Introduction: developing mathematical discourse — some insights from communicational research. *International Journal of Educational Research*, *51-52*, 1-9.

Sfard, A. (2015). Learning, commognition and mathematics. En D. Scott y E. Hargreaves (Eds.), *The sage handbook of learning* (p. 129-138). Londres: Sage.

Sfard, A. y Kieran, C. (2001). Cognition as communication: rethinking learning-by-talking through multi-faceted analysis of students' mathematical interactions. *Mind, Culture, and Activity*, *8*(1), 42-76.

Sinclair, J. y Coulthard, M. (1975). *Towards an analysis of discourse.* Londres: Oxford University Press.

Smith, M. S. y Stein, M. K. (2011). *Five practices for orchestrating productive mathematics and discussions.* Reston: NCTM.

Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(4), 458-477.

Yackel, E., Cobb, P. y Wood, T. (1991). Small-group interactions as a source of learning opportunities in second-grade mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(5), 390-408.

Resumen

El trabajo de tesis doctoral *Revoicing. Estudio de discursos de profesores en clase de matemáticas* constituye una aportación a la investigación en Educación Matemática y discurso en clases de matemáticas. Se consideran aspectos de tres perspectivas que se complementan: la perspectiva sociocultural tomada como marco general; el interaccionismo simbólico; y la perspectiva discursiva. Se plantea la pregunta de investigación: ¿Qué se entiende por revoicing del profesor en discusiones conjuntas de tareas matemáticas? Para dar respuesta se definen tres objetivos sucesivos: Interpretar la noción de revoicing a nivel de 1) turnos de habla; 2) episodios; e 3) sesiones de clase. Para su consecución, se estudian discusiones conjuntas de tareas matemáticas de geometría en dos clases de secundaria de dos centros de Barcelona. Los discursos, que son el principal objeto de estudio, se registraron en vídeo y audio para su posterior transcripción. Mediante métodos de comparación constante se establece la codificación de datos. Además, se diseñan e implementan cinco instrumentos: i) *Esquema de la tarea*, para identificar expresiones clave de turnos; ii) *Horizontal*, para interpretar la forma lingüística y función discursiva de turnos; iii) *Vertical*, para estudiar relaciones entre turnos y generar episodios; vi) *Turnos origen*, para estudiar relaciones entre episodios identificando turnos compartidos; y v) *Conectividad*, para estudiar conexiones entre episodios. El logro del primer objetivo informa sobre la caracterización de expresiones de discursos matemáticos y propone una primera aproximación de definición de revoicing. Esta primera

definición se basa en la identificación e interpretación de expresiones, formas lingüísticas y funciones discursivas de contenido matemático en turnos de habla. El logro del segundo objetivo informa de las relaciones entre turnos mediante nuevas funciones vinculadas a la enseñanza de las matemáticas. Finalmente, el logro del tercer objetivo informa de las conexiones entre episodios y propone una nueva definición de revoicing integrando los resultados del análisis en los tres niveles: turnos, episodios y sesión. Para acabar, se da respuesta a la pregunta de investigación mediante la conceptualización de revoicing del profesor interpretando los resultados y situando la nueva definición en relación a la conceptualización de lengua. La tesis se cierra con propuestas de continuidad de la investigación sobre revoicing con nuevas preguntas.

Abstract

The doctoral thesis *Revoicing. A Study of Teachers' Discourses in Mathematics Classrooms* contributes to research in the field of mathematics education and classroom-based discourse. The three complementary perspectives considered are sociocultural theories of learning taken as a general framework, symbolic interactionism and discourse theories. The research question is the following: What is signified by teachers' revoicing in joint discussions of mathematical tasks? To answer this question, there are three successive objectives regarding the interpretation of the concept of revoicing at the level of: 1) spoken turns, 2) episodes, and 3) lessons. To this aim, the emerging discourses in joint discussions of geometrical tasks are studied in two classes of two secondary schools in Barcelona. Such discussions are video and audio recorded for transcription and constant comparison methods lead to data encoding. Five analytical tools are designed and implemented: i) Task scheme, for the identification of key expressions in turns; ii) Horizontal structure, for the reading of linguistic forms and discursive function of turns; iii) Vertical structure, for the study of relationships between turns and episodes; iv) Origin match, for the study of relationships between episodes and shared turns; and v) Connectivity scheme, for the study of connections among episodes. The achievement of the first objective informs about the characterization of expressions of mathematical discourses and serves to propose a preliminary conceptualisation of revoicing to work with. This is based on the identification and interpretation of

expressions, linguistic forms and discursive functions of mathematical content in spoken turns. The achievement of the second objective informs about relationships between spoken contributions through new functions linked to mathematics teaching activity. Finally, the achievement of the third objective informs about connections between episodes and proposes a more sophisticate conceptualisation of revoicing, integrating the results of the three-fold analysis -turns, episodes and session-. For an answer to the research question, the conceptualization of teachers' revoicing is put together with results from the empirical study and the theoretical understanding of language. The manuscript concludes with proposals for further research and questions into revoicing.

Índice de figuras

Índice de tablas

Anexos

Contenido del CD-ROM

A Resolución de las tareas

A.1 Tarea 1: La araña y la mosca

A.2 Tarea 2: Empaquetando vasos

B Instrumento Horizontal

B.1 Instrumento Horizontal aplicado en T1 de PA

B.2 Instrumento Horizontal aplicado en T1 de PB

B.3 Instrumento Horizontal aplicado en T2 de PA

B.4 Instrumento Horizontal aplicado en T2 de PB

C Instrumento Vertical

C.1 Instrumento Vertical aplicado en T1 de PA

C.2 Instrumento Vertical aplicado en T1 de PB

C.3 Instrumento Vertical aplicado en T2 de PA

C.4 Instrumento Vertical aplicado en T2 de PB

D Instrumento Turnos origen

D.1 Instrumento Turnos origen aplicado en T1 de PA

D.2 Instrumento Turnos origen aplicado en T1 de PB

D.3 Instrumento Turnos origen aplicado en T2 de PA

D.4 Instrumento Turnos origen aplicado en T2 de PB

E Instrumento conectividad

E.1 Instrumento Conectividad aplicado en T1 de PA

E.2 Instrumento Conectividad aplicado en T1 de PB

E.3 Instrumento Conectividad aplicado en T2 de PA

E.4 Instrumento Conectividad aplicado en T2 de PB