Universitat Autònoma de Barcelona

Caracterización del conocimiento especializado sobre el área de figuras planas en estudiantes para maestro

Sofía Caviedes Barrera

ADVERTIMENT. L'accés als continguts d'aquesta tesi doctoral i la seva utilització ha de respectar els drets de la persona autora. Pot ser utilitzada per a consulta o estudi personal, així com en activitats o materials d'investigació i docència en els termes establerts a l'art. 32 del Text Refós de la Llei de Propietat Intel·lectual (RDL 1/1996). Per altres utilitzacions es requereix l'autorització prèvia i expressa de la persona autora. En qualsevol cas, en la utilització dels seus continguts caldrà indicar de forma clara el nom i cognoms de la persona autora i el títol de la tesi doctoral. No s'autoritza la seva reproducció o altres formes d'explotació efectuades amb finalitats de lucre ni la seva comunicació pública des d'un lloc aliè al servei TDX. Tampoc s'autoritza la presentació del seu contingut en una finestra o marc aliè a TDX (framing). Aquesta reserva de drets afecta tant als continguts de la tesi com als seus resums i índexs.

ADVERTENCIA. El acceso a los contenidos de esta tesis doctoral y su utilización debe respetar los derechos de la persona autora. Puede ser utilizada para consulta o estudio personal, así como en actividades o materiales de investigación y docencia en los términos establecidos en el art. 32 del Texto Refundido de la Ley de Propiedad Intelectual (RDL 1/1996). Para otros usos se requiere la autorización previa y expresa de la persona autora. En cualquier caso, en la utilización de sus contenidos se deberá indicar de forma clara el nombre y apellidos de la persona autora y el título de la tesis doctoral. No se autoriza su reproducción u otras formas de explotación efectuadas con fines lucrativos ni su comunicación pública desde un sitio ajeno al servicio TDR. Tampoco se autoriza la presentación de su contenido en una ventana o marco ajeno a TDR (framing). Esta reserva de derechos afecta tanto al contenido de la tesis como a sus resúmenes e índices.

WARNING. The access to the contents of this doctoral thesis and its use must respect the rights of the author. It can be used for reference or private study, as well as research and learning activities or materials in the terms established by the 32nd article of the Spanish Consolidated Copyright Act (RDL 1/1996). Express and previous authorization of the author is required for any other uses. In any case, when using its content, full name of the author and title of the thesis must be clearly indicated. Reproduction or other forms of for profit use or public communication from outside TDX service is not allowed. Presentation of its content in a window or frame external to TDX (framing) is not authorized either. These rights affect both the content of the thesis and its abstracts and indexes.

Universitat Autònoma de Barcelona

Caracterización del conocimiento especializado sobre el área de figuras planas en estudiantes para maestro

TESIS DOCTORAL

por

Sofía Caviedes Barrera

Programa de Doctorado en Educación – Didáctica de la Matemática

bajo la dirección de

Edelmira Badillo Jiménez y Genaro de Gamboa Rojas

Departament de Didàctica de la Matemàtica i les Ciències Experimentals

7 de noviembre de 2022

Universitat Autònoma de Barcelona

Caracterización del conocimiento especializado sobre el área de figuras planas en estudiantes para maestro

TESIS DOCTORAL

Doctoranda: Sofía Caviedes Barrera

Directora y Tutora: Edelmira Badillo Jiménez

Director: Genaro de Gamboa Rojas

Edelmira Badillo Jiménez, Doctora en Didáctica de la Matemática por la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB), Profesora titular en el Departamento de Didàctica de la Matemàtica i les Ciències Experimentals de la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB).

Genaro de Gamboa Rojas, Doctor en Didáctica de la Matemática por la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB), Profesor asociado en el Departamento de Didàctica de la Matemàtica i les Ciències Experimentals de la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB).

HAGO CONSTAR QUE:

La investigación realizada bajo mi dirección por Sofía Caviedes Barrera, con el título **"Caracterización del conocimiento especializado sobre el área de figuras planas en estudiantes para maestro"**, reúne todos los requerimientos científicos, metodológicos y formales exigidos por la legislación vigente para su Lectura y Defensa pública ante la correspondiente Comisión para la obtención del Grado de Doctor en Educación por la Universitat Autònoma de Barcelona.

POR TANTO, considero procedente autorizar su presentación.

Edelmira Badillo Jiménez

Bellaterra a 7 de noviembre de 2022

EDELMIRA ROSA BADILLO JIMENEZ - DNI 48131858B

Firmado digitalmente por EDELMIRA ROSA BADILLO JIMENEZ - DNI 48131858B
Fecha: 2022.11.07 16:29:07 +01'00'

Genaro de Gamboa Rojas

Bellaterra a 7 de noviembre de 2022

GENARO DE GAMBOA ROJAS - DNI 70899467N

Firmado digitalmente por GENARO DE GAMBOA ROJAS - DNI 70899467N
Fecha: 2022.11.07 19:19:15 +01'00'

A mi hijo, Amaru

"As we have come to view teaching, it begins with an act of reason, continues with a process of reasoning, culminates in performances of imparting, eliciting, involving, or enticing, and is then thought about some more until the process can begin again"

~ Lee S Shulman

Agradecimientos

Mi primer agradecimiento es para Amaru, mi hijo, por su amor incondicional, paciencia, apoyo y ánimo en cada minuto de este camino. Por esperar que su mamá terminara este desafío en la distancia, por decirme “mamá tú puedes”. Porque sólo nosotros sabemos lo que significó la distancia en este tiempo. Agradezco también a mi familia, a mi mamá, Miriam, por todo el apoyo brindado y por cuidar de Amaru durante todo este proceso. Por creer en mí y por apoyarme en el desafío de cumplir este sueño. A mi hermana, Cote, por enviarme su apoyo en la distancia, por estar ahí con Amaru y por decirme “hermana tú puedes, eres seca”. ¡Gracias por la barra y por revisarme el inglés! Sin duda el término de este trabajo no habría sido posible sin mi mamá y la Cote. Muchas gracias por todo el apoyo.

Agradezco a mis directores de tesis por creer en mi trabajo, por guiarme, acompañarme y ayudar a que esta tesis tomara forma poco a poco. A Genaro, por todas las sugerencias que me ayudaron mejorar, por su paciencia, sus palabras de motivación y por guiar mi formación como investigadora. A Edelmira, por sus sugerencias y ánimos, por los momentos de “re pánico” que me ayudaron a mejorar, por organizar las recogidas de datos que pudieron dar curso a este estudio, y por ayudar a formar mi carácter como investigadora. ¡Muchas gracias Genaro y Edelmira!

A las Dras. Judit Chico y Laura Morera, por facilitar el proceso de recogida de datos. Agradezco, también, a los estudiantes que participaron de esta investigación.

Al Dr. Miguel Ángel Montes, por su disposición a colaborar en la revisión del diseño de tareas y por sus observaciones de mejora.

A los profesores del Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales de la UAB, por las aportaciones y sugerencias realizadas en cada uno de los seguimientos que ayudaron a delimitar y mejorar este estudio.

A mi amigo José Zawadsky, que juntos compartimos los claroscuros del doctorado desde diferentes áreas. Por brindarme su amistad y hacer que mi estadía en Barcelona fuera mejor, por los momentos de diversión que me ayudaron a salir de mi zona de confort, por su motivación y, sobre todo, por su calidad humana.

A mi amiga Alicia Rain, por compartir su experiencia como mujer migrante desde su doctorado. Por darme ánimos en momentos de confusión y por inspirarme a ser mejor cada día.

Finalmente, a Matthew. Thank you for your unconditional support, for believing and for encouraging me every time I needed it. For being there for me at all times. Thank you for crossing my path during this process.

"Take, if you must, this little bag of dreams. Unloose the cord and they will wrap you round"

William Butler Yeats

ÍNDICE

Presentación 14
Resumen 20
Abstract 21
1. Introducción a la problemática de estudio 23
1.1 Dificultades de los alumnos al resolver tareas de área 24
1.2 Dificultades de los EPM al resolver tareas de área 26
1.3 Planteamiento del problema 30
2. Referentes teóricos 36
2.1 Características del área y sus procesos de medición 37
2.1.1 Representaciones semióticas en los procesos de medición de áreas 45
2.1.2 Organización de los elementos matemáticos que intervienen en los procesos de medición de áreas 48
2.2 Conocimiento del profesor 51
2.2.1 Origen del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas - MTSK 54
2.2.2 Dominios y subdominios de conocimiento del modelo MTSK 55
2.2.3 Estudios que utilizan el modelo MTSK 58
2.2.4 Elección del modelo MTSK 60
3. Métodos 62
3.1 Diseño de la investigación 63
3.2 Primera etapa: caracterización de los elementos matemáticos involucrados en los procesos de medición de áreas 64
3.2.1 Participantes de la primera etapa del estudio 65
3.2.2 Instrumento de recogida de datos 65
3.2.3 Cuestionario aplicado a alumnos de sexto de la Educación primaria 66
3.2.4 Cuestionario aplicado a alumnos de segundo curso de la Educación secundaria 68
3.2.5 Análisis para la caracterización de los elementos matemáticos 71
3.3 Segunda etapa: caracterización del conocimiento especializado sobre el área de figuras planas de los EPM 76
3.3.1 Participantes de la segunda etapa del estudio 76
3.3.2 Instrumento de recogida de datos 77
3.3.3 Análisis del proceso de resolución seguido por los EPM 79
3.4 Cuestiones éticas de la investigación 84

4. Publicaciones 86
4.1 Artículos del compendio 89
4.1.1 Resolución de tareas que involucran el área de figuras planas por estudiantes de 6º de primaria. 89
4.1.2 Mathematical objects that configure the partial meanings of area mobilized in task solving 90
4.1.3 Conocimiento movilizado por estudiantes para maestro al comparar áreas de figuras 2D 91
4.1.4 Conocimiento especializado sobre el área de figuras planas en estudiantes para maestro. 92
4.2 Publicaciones en actas de congresos con proceso de revisión por pares 94
4.2.1 Procedimientos utilizados por estudiantes que resuelven de manera exitosa tareas que involucran el área de figuras planas. 94
4.2.2 Aproximación al conocimiento especializado sobre área en estudiantes para maestro – comunicación oral 95
4.2.3 Preservice teachers' knowledge on area measurement – oral communication 96
5. Resumen y discusión de resultados 98
5.1 Elementos matemáticos involucrados en los procesos de medición de áreas .. 99
5.2 Conocimiento matemático movilizado por los EPM en tareas que requieren procedimientos de naturaleza geométrica 105
5.3 Conocimiento matemático y didáctico matemático movilizado por los EPM en tareas que requieren el uso de procedimientos de distinta naturaleza y en la interpretación de respuestas de alumnos 110
6. Conclusiones 116
6.1 Aportaciones al campo de la Educación Matemática 117
6.2 Implicaciones Didácticas 125
6.3 Recomendaciones sobre futuras investigaciones 129
6.4 Limitaciones del estudio 130
7. Referencias bibliográficas 132
8. Anexos 144

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Fenómenos que permiten la adquisición del área como objeto mental en concordancia con Freudenthal (1983). [Elaboración propia] 41

Tabla 2. Tareas propuestas a alumnos de 6.º de primaria. 66

Tabla 3. Tareas propuestas a alumnos de 2.º de la ESO. 69

Tabla 4. Asignaturas cursadas por los EPM en los tres primeros años de formación en la UAB. [Elaboración propia] 77

Tabla 5. Tareas propuestas a los EPM de tercer curso del grado de Educación primaria. (Tareas 6 y 7 en anexos) 78

Tabla 6. Relación entre los artículos y objetivos del estudio. 87

Tabla 7. Caracterización ampliada SP1. Área como espacio delimitado por una línea cerrada. 99

Tabla 8. Caracterización ampliada SP2. Área como número de unidades bidimensionales que recubren una superficie. 101

Tabla 9. Caracterización ampliada SP3. Área como producto de dos dimensiones lineales. 102

Tabla 10. Categorías e indicadores de conocimiento especializado. 106

Tabla 11. Categorías e indicadores de conocimiento especializado. 110

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Tarea presentada a los EPM en el estudio TEDS-M. 28
Figura 2. Relación entre los objetivos de la investigación. [Elaboración propia] 34
Figura 3. Relaciones entre los fenómenos que rodean la enseñanza del área. [Elaboración propia] 42
Figura 4. Transformación mereológica de una configuración de unidades figurales 2D en otra. (Duval, 2017, p 62) 47
Figura 5. Organización de los elementos matemáticos con énfasis en las representaciones. [Elaboración propia] 50
Figura 6. Subdominios del modelo MTSK. (Carrillo-Yañez et al., 2018, p.6) 55
Figura 7. Proceso seguido para la diferenciación y reinterpretación de los SP. (Caviedes et al., 2021, p.7) 72
Figura 8. Proceso seguido para la etapa 1 de la investigación. [Elaboración propia] ... 75
Figura 9. Ejemplo de análisis de la Tarea 3 (cuestionario EPM) con el uso de software MAXQDA plus. 81
Figura 10. Adaptación de códigos previamente elaborados a las categorías de conocimiento del modelo MTSK. [Elaboración propia] 81
Figura 11. Ejemplo de frecuencias de códigos movilizados en las respuestas de los EPM. 83
Figura 12. Proceso seguido para la etapa 2 de la investigación. 84
Figura 13. Artículo 1 del compendio, resumen y palabras clave. 89
Figura 14. Artículo 2 del compendio, resumen y palabras clave. 90
Figura 15. Artículo 3 del compendio, resumen y palabras clave. 91
Figura 16. Aceptación artículo 4 del compendio. 92
Figura 17. Artículo 4 del compendio, resumen y palabras clave. 93
Figura 18. Comunicación oral SEIEM, resumen y palabras clave. 94
Figura 19. Comunicación oral SEIEM, resumen y palabras clave. 95
Figura 20. Comunicación oral CERME, resumen y palabras clave. 96
Figura 21. Procedimientos involucrados en los procesos de medición de áreas. (Caviedes et al., 2021a, p.17) 105
Figura 22. Relación entre representaciones y otras categorías de conocimiento matemático especializado (Caviedes et al., 2022b, p.15). 108

Figura 23. Categorías del KoT considerando el valor instrumental y organizador de las representaciones..... 112
Figura 24. Implicaciones didácticas para abordar el área en su enfoque geométrico. Adaptación de los indicadores presentados en Caviedes et al. (2022b, en prensa)..... 127
Figura 25. Implicaciones didácticas para abordar el área en su enfoque geométrico/numérico. Adaptación de los indicadores presentados en Caviedes et al. (2022b, en prensa). 128
Figura 26. Relaciones implicativas entre representaciones y otras categorías del KoT. (Caviedes et al., 2022c) 129

Presentación

Se presenta esta tesis doctoral para acceder al grado de Doctor en Educación en el ámbito de Didáctica de la Matemática por la Universitat Autònoma de Barcelona. Esta tesis doctoral se presenta en la modalidad de compendio de publicaciones. Para esto, se sigue la estructura básica de contenidos planteada por el Programa de Doctorado en Educación de la Universitat Autònoma de Barcelona:

- Sección 1. Introducción a la problemática de estudio.
- Sección 2. Referentes teóricos.
- Sección 3. Método.
- Sección 4. Artículos publicados y por publicar que conforman el compendio.
- Sección 5. Discusión de los resultados
- Sección 6. Conclusiones.

Los artículos que integran el compendio de publicaciones corresponden a estudios realizados con alumnos y estudiantes para maestro. En el primer caso se exploran los elementos matemáticos que subyacen a los procesos de medición de áreas. En el segundo caso se caracteriza el conocimiento puesto en juego por los estudiantes para maestro en la resolución de tareas profesionales sobre área. Constituyen este compendio tres artículos de investigación en revistas de prestigiosa valía y un artículo de investigación e innovación. A continuación, se detallan las publicaciones que conforman el compendio.

Autor/res: Caviedes, S.
Título: Resolución de tareas "que involucran el área de figuras planas" por estudiantes de sexto de primaria
Año: 2022
Revista (título, volumen, página inicial-final): Números: Revista de didáctica de las matemáticas, 110, 25-29.
DOI o URL: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8384467

Indexado en Scopus	NO
Número de citaciones del artículo	-
Índex SJR	NO
Quartil / categoria SJR	NO

Otros indices de calidad: DIALNET, LATINDEX. Catálogo v1.0 (2002 - 2017)

Autor/res: [1] Caviedes, S; De Gamboa, G; Badillo, E.
Título: Mathematical objects that configure the partial area meanings mobilized in task-solving
Año: 2021
Revista (título, volumen, página inicial-final): International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 1-20.
DOI o URL: https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1991019

Indexado en Scopus	SI
Número de citaciones del artículo	2
Índex SJR	0.48
Quartil i categoria SJR	Q2

Otros indices de calidad: Emerging Sources Citation Index, CARHUS Plus+ 2018, ERIHPlus, Academic Search Premier, IBZ Online, DIALNET, Applied Science & Technology Source, Computer & Applied Sciences, Education Abstracts, EBSCO Education Source, Educational research abstracts (ERA), ERIC (Education Resources Information Center), zbMATH

Autor/res: [1] Caviedes, S; De Gamboa, G; Badillo, E.
Título: Conocimiento movilizado por estudiantes para maestro al comparar áreas de figuras 2D
Año: 2022
Revista (título, volumen, página inicial-final): Uniciencia, 36, 1-20
DOI o URL: https://doi.org/10.15359/ru.36-1.41

Indexado en Scopus	SI
Número de citaciones del artículo	-
Índex SJR	0.17
Quartil / categoria SJR	Q3

Otros indices de calidad: Emerging Sources Citation Index, DOAJ, DIALNET, ERIHPlus, LATINDEX. Catálogo v1.0 (2002 - 2017), REDIB. Red Iberoamericana de Innovación y conocimiento científico

Autor/res: [1] Caviedes, S; De Gamboa, G; Badillo, E.
Título: Conocimiento especializado sobre el área de figuras planas en estudiantes para maestro
Año: *en prensa*
Revista (título, volumen, página inicial-final): Avances de Investigación en Educación Matemática - AIEM
DOI o URLS: 10.35763/aiem20.4076 – funcional al momento de publicación

Indexado en Scopus	SI
Número de citaciones del artículo	-
Índex SJR	0.41
Quartil / categoria SJR	Q2

Otros indices de calidad: Emerging Sources Citation Index, DIALNET, CARHUS Plus+ 2018, ERIHPlus, LATINDEX. Catálogo v1.0 (2002 - 2017), REDIB. Red Iberoamericana de Innovación y conocimiento científico

Otros artículos que han sido publicados en el curso de esta tesis doctoral:

Caviedes, S., de Gamboa, G. y Badillo, E. (2020). Procedimientos utilizados por estudiantes de 13-14 años en la resolución de tareas que involucran el área de figuras planas. *Bolema- boletim de educação matemática, 34(68)*, 1015-1035. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n68a09

Caviedes, S., De Gamboa, G., Badillo, E., Castillo, A. y Ferrer-Nadal, S (2020). Tareas para promover la comprensión del área de figuras planas. *Uno-revista de didáctica de las matemáticas. (90),* 72-77.

Congresos y simposios:

Durante el desarrollo de esta tesis doctoral se han ido divulgado y validando los resultados obtenidos en distintos contextos (congresos, seminarios, simposios) nacionales e internacionales, los que se presentan a continuación:

Caviedes, S., De Gamboa, G., y Badillo, E (2022, julio). Pre-service teacher`s specialised knowledge on area of flat figures. En C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez, y N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 123-130). Alicante: PME

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2022). Conocimiento movilizado por estudiantes para maestro en tareas que involucran la conservación del área *Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. Santo Domingo: RELME 35.

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2022). Resolución de tareas de área por estudiantes para maestro. *Primer Congreso Internacional de Didáctica de la Matemática.* Osorno: CIDIDMAT.

Caviedes, S., De Gamboa, G., y Badillo, E (2022, febrero). Preservice teachers' knowledge on area measurement. *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Bozen: ERME. ffhal-03748717

Caviedes, S., De Gamboa, G., y Badillo, E. (2021, septiembre). Procedimientos utilizados por estudiantes que resuelven de manera exitosa tareas que involucran el área de figuras planas. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 205 – 212). Valencia: SEIEM.

Caviedes, S., De Gamboa, G., y Badillo, E. (2021, septiembre). Aproximación al conocimiento especializado sobre área en estudiantes para maestro. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 213 - 220). SEIEM.

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2021). Tareas que Involucran el área de figuras planas para el análisis del conocimiento del profesor. *Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. Guatemala: RELME 34.

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2019). Aproximación a las conexiones matemáticas que establecen futuros maestros de primaria en tareas de medida y comparación de áreas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 233-242). Valladolid: SEIEM.

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2019). Aportaciones para una comprensión conectada del área. En Amado, N., Canavarro, A. P., Carreira, S., Ferreira, R. T. y Vale, I. (Eds.). Livro de Atas do EIEM 2019, *Encontro de Investigação em Educação Matemática.* Alte. Portugal.

Seminarios y talleres impartidos por la autora derivados de los resultados de la tesis:

2021- Seminario de Educación Matemática: *¡Prohibido utilizar fórmulas para resolver tareas de área!* Programa sábado del Docente. Universidad del Norte. Colombia

2021- Seminario de Educación Matemática: *Elementos matemáticos involucrados en la comprensión de los procesos de medición de áreas*. Maestría en Enseñanza de las Matemáticas. Universidad del Magdalena. Colombia.

2021- Seminario de Educación Matemática: *Elementos matemáticos involucrados en comprensión de la medición y comparación de áreas de figuras planas*. Maestría en Enseñanza de las Matemáticas. Universidad del Magdalena. Colombia.

2020- Seminario del Grupo de Investigación GIPEAM: *Conocimiento especializado sobre área en Estudiantes para Maestro*. Universidad Autónoma de Barcelona. España.

2020- Seminario de Grupo de Investigación de Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesor, SEIEM: *Identificación de diferentes significados del área en el análisis de tres tareas matemáticas*. Universidad de Sevilla. España.

2019- Seminario del Grupo de Investigación GIPEAM: *Conexiones matemáticas en la resolución de tareas de área por estudiantes de secundaria*. Universidad Autónoma de Barcelona. España.

La formación de la autora de la presente tesis doctoral ha contado con el financiamiento de la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo -ANID-, con referencia PFCHA/DOCTORADO BECAS CHILE/2018-72190032.

El estudio se ha llevado a cabo dentro del Grupo de Investigación en Práctica Educativa y Actividad Matemática (GIPEAM) SGR-2017-101 y en el marco del proyecto PID2019-104964GBI00 (MICINN).

Resumen

El objetivo de la presente tesis doctoral es caracterizar el conocimiento especializado que ponen en juego los estudiantes para maestro cuando se enfrentan a un conjunto de tareas profesionales sobre el área de figuras planas. Para esto, se utiliza el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas. Para dar respuesta al objetivo, el estudio se posiciona en un paradigma interpretativo y adopta una metodología de tipo cualitativa. Se diseña un cuestionario semiestructurado de respuesta abierta, para ser respondido por 147 estudiantes para maestro del tercer año del Grado de Educación Primaria en la Universidad Autónoma de Barcelona, durante el periodo escolar 2020/21. Se realiza un análisis de contenido para identificar las categorías de conocimiento especializado que los estudiantes para maestro movilizan en sus resoluciones y, para elaborar indicadores de conocimiento especializado.

Los resultados de esta investigación muestran que cuando los estudiantes para maestro utilizan representaciones de tipo geométrico y procedimientos relacionados con la descomposición y reorganización de figuras, sus resoluciones y justificaciones son más robustas. Esto, porque dichas representaciones y procedimientos les permiten explicar cómo y por qué resuelven las tareas de determinada manera. Así mismo, se observa que el uso de representaciones de tipo geométrico y los procedimientos asociados, promueven la movilización conjunta de distintas propiedades. Así, es posible que estas propiedades permitan a los estudiantes para maestro ampliar su repertorio de estrategias al momento de resolver tareas de área, dando soporte a procedimientos alternativos al uso de fórmulas. Los resultados también muestran que la coordinación entre distintos registros de representación, geométrico-simbólico, permite a los estudiantes para maestro mejorar su desempeño en la resolución de tareas de área. Esto, porque el uso de dichos registros de representación permite la coordinación de procedimientos basados en cálculos, descomposiciones y reconfiguraciones de las figuras geométricas; además de la movilización conjunta de propiedades. Se evidencia, también, que el uso conjunto de distintos procedimientos fue un aspecto clave para que los estudiantes para maestro pudieran interpretar respuestas de alumnos y promover estrategias de enseñanza para subsanar errores de los alumnos. Finalmente, los resultados muestran que los indicadores de conocimiento especializado construidos fueron útiles para caracterizar el conocimiento matemático, y didáctico matemático, sobre el área de figuras planas en los estudiantes para maestro.

Abstract

The aim of the present doctoral thesis is to characterize the specialized knowledge put into play by preservice teachers when faced with a set of professional tasks involving the area of flat figures. For this purpose, the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge model is used. In order to respond to the objective, the study is positioned in an interpretative paradigm and adopts a qualitative methodology. A semi-structured open-ended questionnaire is designed to be answered by 147 preservice teachers of the third year of the Primary Education Degree at the Autonomous University of Barcelona, during the school period 2020/21. A content analysis is carried out to identify the categories of specialized knowledge that preservice teachers mobilize in their resolutions and to elaborate indicators of specialized knowledge on the area of flat figures.

The results of this research show that when preservice teachers use geometric representations and procedures related to the decomposition and reorganization of figures, their resolutions and justifications are more robust. This is because these representations and procedures allow them to explain how and why they solve the tasks in a certain way. Likewise, it is observed that the use of geometric representations and the associated procedures promote the joint mobilization of different properties. Thus, it is possible that these properties allow preservice teachers to expand their repertoire of strategies when solving area tasks, giving support to alternative procedures to the use of formulas. The results also show that the coordination between different registers of representation, geometric-symbolic, allows preservice teachers to improve their performance in solving area tasks. This, because the use of such registers of representation allows the coordination of procedures based on calculations, decompositions and reconfigurations of geometric figures, in addition to the joint mobilization of properties. It is also evident that the joint use of different procedures was a key aspect for preservice teachers to be able to interpret students' answers and promote teaching strategies to correct students' errors. Finally, the results show that the constructed indicators of specialized knowledge were useful to characterize the mathematical and pedagogical knowledge of preservice teachers in relation to the area of flat figures.

SECCIÓN 1.
INTRODUCCIÓN

1. Introducción a la problemática de estudio

En los últimos años las dificultades asociadas a la comprensión del concepto de área y sus procesos de medición han tomado un rol protagónico en diversas investigaciones que han buscado establecer directrices, y principios orientadores, para los procesos de enseñanza-aprendizaje que abordan este tema (p.e., Douady y Perrín-Glorian, 1989; Sarama y Clements, 2009; Zacharos, 2006). Esto, con el fin de mejorar la comprensión que los alumnos de primaria tienen sobre el concepto y medición del área de figuras planas. En este contexto, los estudios que se presentan en el primer apartado de esta sección muestran que una gran cantidad de alumnos de Educación primaria, y primer ciclo de Educación secundaria, tienen dificultades al momento de ejecutar con precisión los procesos de medición de áreas. Si bien las causas pueden ser múltiples, en este estudio se entiende que tales dificultades se relacionan, por un lado, con la comprensión del concepto de área, y por otro, con la práctica profesional de los maestros y su capacidad para construir un conocimiento sólido en los alumnos.

Por lo anterior, en el segundo apartado se hace referencia a las dificultades de los estudiantes para maestro -en adelante EPM- al resolver tareas de área y se infiere una necesidad de seguir realizando estudios que aborden este tema, pues los estudios actuales no proponen un cuerpo de conocimiento que permita superar las distintas dificultades de los EPM. Para finalizar, en el tercer apartado se contextualiza la presente investigación y se enuncian los objetivos que la guían.

1.1 Dificultades de los alumnos al resolver tareas de área

Ya desde los años ochenta se advertía el alto grado de incomprensión que manifestaban los alumnos de primaria sobre el estudio del concepto de área y sus procesos de medición. Al respecto, Freudenthal (1983) hace mención de que una de las características más sorprendentes del área es la riqueza contextual que se le relaciona y que puede utilizarse en su enseñanza. Al mismo tiempo, el autor se refiere a la extrema pobreza de la instrucción que se le relaciona y recalca que la medición de áreas es de los procesos más complejos que hay, pues a diferencia de la longitud que puede obtenerse de manera directa por medición, el área se calcula de manera indirecta multiplicando dos atributos lineales dentro de una fórmula (Zacharos y Chassapis, 2012). Esta forma indirecta de calcular el área ocasiona problemas para su comprensión en alumnos de primaria, pues intervienen distintos conceptos, propiedades y procedimientos, que no siempre son adquiridos por los alumnos.

Diversas investigaciones muestran que los alumnos de primaria y primer ciclo de secundaria presentan dificultades y errores al momento de resolver tareas de área (D'Amore y Fandiño, 2007; Duoady y Perrin-Glorian, 1989; Kamii y Kysh, 2006; Kospentaris et al., 2011; Sisman y Aksu, 2009). Por ejemplo, Sisman y Aksu (2009) evidencian que alumnos de 13-15 años utilizan las fórmulas del área de manera inadecuada y tienen dificultades para comprender que el área permanece inmutable cuando una figura es dividida en partes, y posteriormente reorganizada en una figura diferente. En otro estudio de los mismos autores, al pedir a alumnos de 6.º de primaria calcular las áreas de un prisma rectangular, Sisman y Aksu (2016) señalan que sólo un 6.3% de los alumnos puede responder correctamente. El resto de los alumnos realiza cálculos equivocados, como sumar largo, ancho y alto, o bien, sumar todas las dimensiones y multiplicar por seis, lo que pone en evidencia la dificultad de los alumnos de primaria para utilizar las fórmulas de manera correcta y para comprender la bidimensionalidad del área.

Más allá de las dificultades que se han reportado sobre el uso incorrecto de fórmulas, otras investigaciones hacen referencia a la importancia de las propiedades, como la conservación del área, para resolver tareas que involucran el corte, movimiento y pegado de figuras. Al respecto, Mamona-Downs y Papadopoulos (2006) señalan que alumnos de

12 años no toman en consideración las propiedades geométricas de las figuras para justificar sus procedimientos, sino que recurren a sus percepciones visuales y al uso de la medición. En la misma línea, D'Amore y Fandiño (2007) evidencian que los alumnos de primaria tienen dificultades para aceptar la propiedad de conservación del área, pues no comprenden que el área es independiente de la forma de la superficie. Los autores indican que la tendencia marcada hacia el uso de fórmulas no permite a los alumnos de primaria justificar sus respuestas con base en las propiedades y conceptos involucrados en los procesos de medición de áreas, si no que, por el contrario, lo hacen en función de sus estimaciones visuales. Esto último es más evidente cuando se presentan figuras no prototípicas a los alumnos (Kospentaris et al., 2011).

A fin de superar la tendencia hacia el uso de fórmulas, y dificultades asociadas, Zacharos (2006) enfatiza la necesidad de utilizar procedimientos basados en la geometría euclidiana, pues dichos procedimientos contribuyen al desarrollo de la comprensión del significado de las fórmulas de áreas. De esta manera, sería deseable familiarizar a los alumnos de primaria con procedimientos de tipo geométrico (comparación, descomposición y reorganización de las figuras) antes de incluir el trabajo con fórmulas para el cálculo de áreas (Douady y Perrín-Glorian, 1989). Esto con el fin de preparar a los alumnos para cursos posteriores. En este sentido, Cobo y Fortuny (2000) señalan la importancia de descomponer figuras para aceptar la equivalencia de áreas. Al respecto, los autores presentan un problema a alumnos de 16-17 años que consistía en comparar el área de dos triángulos con la de un paralelogramo. Los alumnos, en parejas, descomponen y mueven las piezas de las figuras para lograr identificar la equivalencia de áreas, dejando en evidencia la importancia de dichos procedimientos.

Sumado a lo anterior, la comprensión del área como atributo, su naturaleza geométrica, y las cualidades de las unidades de medida utilizadas para medir áreas, son elementos cruciales para lograr que los alumnos de primaria desarrollen una comprensión adecuada del funcionamiento de las fórmulas (Kamii y Kysh, 2006). En esta línea Outhred y Mitchelmore (2000) remarcan la importancia de comprender la relación entre el tamaño de la unidad de medida y las dimensiones del rectángulo, para clarificar el rol de la multiplicación y la relación con las medidas de longitud en la fórmula del área de rectángulos y cuadrados.

Lo anterior permite inferir que, aunque las dificultades relacionadas con el área y sus procesos de medición han sido ampliamente reportadas, los factores responsables de las dificultades o incomprensiones de los alumnos permanecen aún difusos, haciendo difícil saber con certeza donde focalizar los esfuerzos para promover una comprensión adecuada en ellos. En este contexto, este estudio plantea que tales dificultades se relacionan, por un lado, con la falta de comprensión de los elementos matemáticos involucrados en los procesos de medición de áreas, y por otro, con la práctica profesional de los maestros y su capacidad para construir un conocimiento sólido en los alumnos, es decir, un conocimiento que considere los distintos elementos matemáticos que se ven involucrados en los procesos de medición de área. Por lo tanto, resulta necesario hacer mención a aquellos estudios que abordan tanto el conocimiento, como las dificultades de los EPM en relación al área y su medición.

1.2 Dificultades de los EPM al resolver tareas de área

Existe cierto consenso en que las matemáticas deben enseñarse con comprensión (p.e., Hiebert y Lefevre 1986; Shulman, 1986), a fin de que los alumnos avancen desde el conocimiento sobre procedimientos, a una comprensión que les permita convertirse en aprendices activos, capaces de controlar su propio uso de los procedimientos matemáticos (Murphy, 2012). Para enseñar con comprensión, es necesario que los profesores sean capaces de transformar el contenido que enseñan en algo comprensible para sus estudiantes (Shulman, 1986), sin embargo, esto no es un proceso sencillo, pues requiere de un conocimiento profundo del contenido a enseñar (Ma, 1999). En el caso particular del área, tal y como se mencionó en el apartado anterior, los alumnos suelen apoyarse en fórmulas y cálculos, con una escasa comprensión de los elementos matemáticos implicados. La literatura señala que este hecho se repite en los EPM.

Por ejemplo, Simon y Blume (1994) realizan un estudio con 26 EPM que se encuentran en su primer año de formación. Al respecto, los autores señalan que los EPM presentan dificultades relacionadas con la estructuración espacial y el pensamiento multiplicativo en tareas donde se utilizan unidades no estándar para medir áreas. Los autores presentan a los EPM una situación en la que deben obtener el área de una superficie rectangular, mediante la iteración de unidades. En su mayoría, los EPM multiplican la cantidad de

elementos dispuestos de manera horizontal y vertical, sin ser capaces de ofrecer explicaciones consistentes sobre la elección de tal procedimiento, si no que hacen referencia, por ejemplo, a *<así es la fórmula>* o *<así aprendí o me enseñaron>*. Así mismo, los autores señalan que los EPM utilizan unidades lineales en lugar de unidades cuadradas para medir áreas y, piensan que, al duplicarse la longitud de los lados de un cuadrado, también se duplica su área. Los mismos autores (Simon y Blume,1994) ponen en evidencia que los EPM no logran disociar el área del número que la mide y al medir dos superficies iguales, con distintas unidades de medida, afirman que una es mayor que otra, basándose en los datos numéricos.

Baturo y Nason (1996) se refieren al tipo de conocimiento que es utilizado por los EPM cuando resuelven un conjunto de tareas de área, diseñadas con la finalidad de evaluar el conocimiento que se espera de alumnos de 7.º curso de primaria (12-13 años). Al respecto, los autores señalan que el conocimiento de los conceptos matemáticos, y la relación entre ellos, es escasa, pues los EPM priorizan el conocimiento procedimental asociado a la memorización de fórmulas, lo que ocasiona grandes problemas para conectar representaciones concretas (procedimientos geométricos y uso de unidades de medida no estándar) y representaciones abstractas (fórmulas). Del mismo modo, los autores señalan que los EPM no evidencian un uso comprensivo de las fórmulas (p.e., no comprenden la relación entre la fórmula de triángulos y rectángulos), debido a que la relación entre los procedimientos numéricos y las experiencias concretas no se ha establecido con antelación. Además, los autores señalan que los EPM tienen un escaso conocimiento de la base conceptual que subyace a la fórmula del área, aspecto que les impide calcular con éxito el área de figuras no prototípicas y aceptar la conservación del área en figuras con formas diferente. Resultados similares a los anteriores han sido reportados por Tierney et al. (1990), quienes señalan que los EPM generalizan la fórmula del área del rectángulo para encontrar áreas de otras figuras que no son rectángulos (otros paralelogramos), asocian los cambios de longitudes a cambios de áreas y de no tener valores numéricos asociados a una región 2D, toman como referencia el perímetro de la figura para calcular el área.

Respecto a la propiedad de conservación del área, Hong y Runnalls (2020) evidencian que los EPM presentan dificultades para aceptar dicha propiedad en figuras no prototípicas, ya que, al no tener valores numéricos para comparar áreas de triángulos equivalentes en área, pero distintos en forma, justifican sus respuestas con base en la

estimación visual. En este contexto, la comprensión de las ideas que subyacen a la conservación del área permitiría a los EPM entender de mejor manera las fórmulas, y desarrollar una fluidez procedimental con base en la adquisición de los conceptos iniciales (Hong y Runnalls, 2020). Los mismos autores, en otro estudio en que los EPM debían analizar respuestas erróneas e hipotéticas de alumnos (Runnalls y Hong, 2020), muestran que aquellos EPM con un mayor conocimiento conceptual, son capaces de aprovechar su propia comprensión para dar respuestas pedagógicas conceptuales y centradas en el alumno. Dichas respuestas de los EPM situaban al alumno en el centro de la interacción didáctica, otorgando una guía mediante la exploración y el descubrimiento matemático. Esto significa que los EPM fueron capaces de hacer que los alumnos volvieran al error, reconstruyendo desde allí nuevas formas de obtener el área (uso de representaciones geométricas para realizar trazados y descomposiciones). Por el contrario, aquellos EPM con un conocimiento conceptual escaso fomentaban, casi exclusivamente, los enfoques procedimentales.

Otra investigación importante de mencionar es el estudio internacional TEDS-M, que evalúa la formación inicial docente en matemáticas para la Educación primaria y secundaria. El estudio muestra que, de manera general, los EPM tienen dificultades para encontrar el área de un triángulo dibujado en una cuadrícula (sólo un 60% de los participantes puede dar una respuesta correcta para el área del triángulo) -Figura 1- (Tatto et al., 2012), lo que pone en evidencia su escaso conocimiento sobre las unidades de medida y sobre las relaciones entre figuras geométricas.

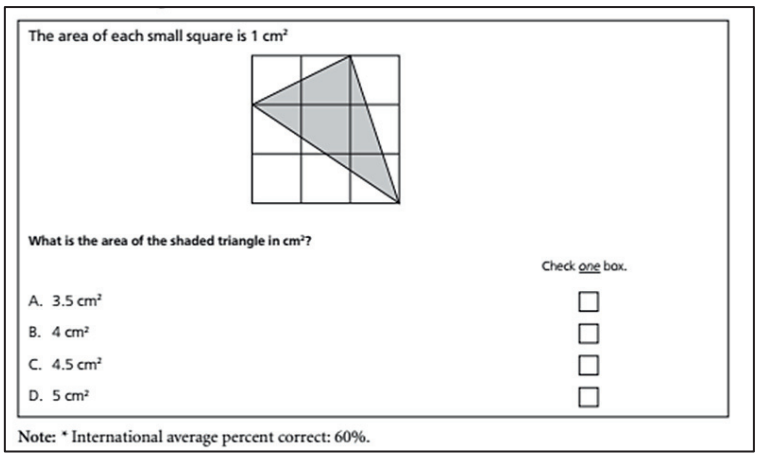


Figura 1. Tarea presentada a los EPM en el estudio TEDS-M.

Las investigaciones anteriores ponen en evidencia que los EPM muestran una tendencia similar a la de los alumnos, es decir, hacia el uso de fórmulas al momento de resolver tareas de área. Igualmente, se evidencia que los EPM, a menudo, desarrollan una fluidez procedimental sin un respaldo conceptual firme, tienen dificultades en la adquisición de ciertas propiedades, como la conservación del área y una escasa comprensión de las unidades de medida.

Lo anterior resulta preocupante, pues para desarrollar una comprensión del área y sus procesos de medición en los alumnos de primaria, los profesores deben proporcionar experiencias de enseñanza-aprendizaje significativas y sostenidas en el tiempo (Sarama y Clements, 2009). Esto requiere que los profesores y EPM, en su rol como futuros profesores, cuenten con un conocimiento robusto sobre el área y su medición, es decir, "*los profesores no sólo deben ser capaces de "hacer" matemáticas para generar respuestas "correctas", sino que también deben tener un sentido de los significados matemáticos subyacentes a los conceptos y procesos. Además, su conocimiento de la materia no debe ser una mera colección de hechos y reglas"* (Baturo y Nason, 1996, p.236). Así, resulta necesario que tanto profesores y EPM puedan comprender los diferentes elementos matemáticos que se ven involucrados en los procesos de medición de áreas, esto, con el fin de hacerlos comprensibles a sus alumnos.

Este estudio considera que los elementos matemáticos corresponden a las distintas representaciones y procedimientos que pueden ser utilizados para la resolución de una determinada tarea; las unidades de medida, tanto estándar como no estándar; las propiedades y argumentos que permiten dar sustento a un proceso de resolución; las definiciones y conceptos; y los contextos de uso en los que puede aparecer el área. Es posible señalar que la primera dificultad para coordinar todos estos elementos matemáticos nace al abordarlos de manera aislada, es decir, sin considerar los fenómenos y situaciones en los que se presentan (Freudenthal, 1983; Douady y Perrin-Glorian, 1989; Smith et al., 2016). Por lo tanto, surge la necesidad de caracterizar y organizar todos aquellos elementos que intervienen en la enseñanza y aprendizaje del área a lo largo de la Educación primaria, pues dichos elementos dan cuenta de la complejidad asociada al área y sus procesos de medición. Así mismo, se infiere la necesidad de caracterizar este tipo de conocimiento en los EPM, a fin de ofrecer un cuerpo de conocimiento que permita organizar la enseñanza de este tópico en la Educación primaria.

1.3 Planteamiento del problema

Las investigaciones presentadas en el primer aparatado permiten inferir que la comprensión del concepto de área y de sus procesos de medición presenta desafíos particulares, que se hacen evidentes al constatar una tendencia generalizada hacia el uso de fórmulas y una escasa variedad de estrategias de resolución por parte de los alumnos de Educación primaria. Aunque las causas de dichas dificultades e incomprensiones pueden ser variadas, parece coherente pensar que se relacionan con la práctica profesional de los maestros. En particular, con la capacidad de los maestros para proponer actividades que permitan construir una comprensión robusta del concepto de área en los alumnos. En este sentido, la literatura revisada y presentada en el segundo apartado de esta sección ha permitido identificar que los EPM no cuentan con el conocimiento matemático y didáctico matemático sobre el área, y que es necesario para su labor como futuros profesores. Los estudios sobre el conocimiento del área, por parte de los EPM, enfatizan la falta de conocimiento de los mismos y la tendencia hacia el uso de fórmulas. Bajo la perspectiva del presente estudio, la tendencia hacia el uso de fórmulas y dificultades asociadas se deben a la complejidad que subyace al área, pues los procesos de medición de áreas requieren de una base conceptual previa para ser ejecutados con precisión. Esta base conceptual implicaría un conocimiento sobre los distintos elementos matemáticos involucrados en los procesos de medición de áreas y que, en su conjunto, dan cuenta de la complejidad del concepto de área.

En este contexto, la problemática que se aborda en esta tesis doctoral es la caracterización del conocimiento sobre el área de figuras planas en estudiantes para maestro. El estudio va un paso más allá de la identificación de las dificultades de los EPM, y las posibles causas asociadas, pues apunta a caracterizar aquel tipo de conocimiento que permite a los EPM resolver tareas profesionales que involucran el área de figuras planas. De esta manera, se busca dar respuesta a la pregunta: *¿Cuál es el conocimiento que movilizan los EPM cuando se enfrentan a un conjunto de tareas profesionales que involucran el área de figuras planas*? A partir de este posicionamiento, surge de manera natural la pregunta ¿cuáles son los referentes para caracterizar el conocimiento sobre el área de figuras planas de los EPM?

Se aborda esta caracterización desde un enfoque cualitativo y desde una doble perspectiva. En primer lugar, y considerando que los elementos matemáticos que

intervienen en los procesos de medición de áreas pueden dar cuenta de un conocimiento matemático robusto en los EPM, se observa la necesidad de identificar y caracterizar aquellos elementos matemáticos que están presentes a lo largo de toda la Educación primaria. Al respecto, Sarama y Clements (2009) señalan que la comprensión del área hasta un nivel de cuarto de primaria requiere de la coordinación de distintos conceptos, tales como el área como atributo; las unidades de medida y la iteración de unidades; la estructuración espacial; la partición equitativa; y las propiedades de conservación, acumulación y aditividad, y transitividad. Así, Sarama y Clements (2009) y Clements y Sarama (2014) realizan una caracterización detallada de estos elementos a fin de dar orientaciones para abordar la enseñanza del concepto de área, y sus procesos de medición, en el primer ciclo de Educación primaria. Sin embargo, los autores antes mencionados no proponen una caracterización de estos elementos para un segundo ciclo de la Educación primaria (10-11 años). Tampoco se evidencian otras investigaciones que aborden este tema, pues en niveles posteriores a cuarto de primaria se abordan, mayoritariamente, procedimientos utilizados y dificultades por parte de los alumnos.

Las aportaciones de Sarama y Clements (2009) y Clements y Sarama (2014) constituyen la base para caracterizar los elementos matemáticos que se ven involucrados en la comprensión del concepto de área y su medición. No obstante, se hace necesario, también, caracterizar aquellos elementos que están presenten en niveles posteriores a cuarto de Educación primaria, pues es también en dichos niveles donde los EPM enseñarán matemáticas en su rol como futuros profesores. En este contexto, surge el primer objetivo específico de este estudio: (1) caracterizar los elementos matemáticos que subyacen a los procesos de medición de áreas de figuras planas en el contexto de la Educación primaria.

Se parte de la necesidad de organizar los elementos matemáticos considerando los fenómenos involucrados (Freudenthal, 1983) y los contextos geométricos o numéricos en los que dichos elementos intervienen (Douady y Perrín-Glorian, 1989). De esta manera, el primer desafío que revela la literatura especializada, y que se aborda en este estudio, es identificar, organizar y caracterizar los elementos matemáticos que dan cuenta de la complejidad asociada al área en la Educación primaria. A fin de dar respuesta a esto, se organiza la recogida de datos mediante dos cuestionarios semiestructurados, uno para ser resuelto por alumnos de sexto de la Educación primaria; y otro para ser resuelto por alumnos de segundo de la Educación secundaria obligatoria, pues el currículo de Catalunya muestra que es en el segundo curso de la Educación secundaria donde se

consolidan los conocimientos relacionados con las magnitudes y su medida aprendidos en etapas previas (Currículum Educació Secundària Obligatòria, 2019). Todo esto permite caracterizar, posteriormente, el conocimiento matemático de los EPM.

En segundo lugar, al plantear caracterizar el conocimiento sobre el área de figuras planas de los EPM, resulta crucial posicionarse en un modelo de conocimiento del profesor de matemáticas. Esto, con el fin de identificar categorías de conocimiento específicas y necesarias para la enseñanza de las matemáticas en este tópico. Así, se toma como referencia el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas -MTSK- (Carrillo-Yañez et al., 2018), pues dicho modelo considera la noción de especialización como el núcleo del conocimiento del profesor y es, a su vez, una herramienta metodológica que permite analizar diferentes prácticas del profesor de matemáticas a través de sus categorías (Carrillo-Yañez et al., 2018). Particularmente, se aborda el conocimiento especializado que movilizan los EPM cuando resuelven un conjunto de tareas profesionales sobre área. De esta manera, se organiza la recogida de datos mediante un cuestionario semiestructurado que permite la emergencia de los elementos matemáticos identificados previamente. Para elaborar dicho cuestionario, se toman en consideración las categorías de conocimiento del modelo MTSK, es decir, se seleccionan aquellas categorías que interesa hacer emerger del conocimiento en uso de los EPM. Como se indicó anteriormente, la base para hacer emerger y, posteriormente, caracterizar el conocimiento matemático de los EPM, son los elementos matemáticos que intervienen en la resolución de tareas de área a lo largo de toda la Educación primaria.

Para caracterizar el conocimiento de los EPM es necesario tener presente el objetivo de su formación inicial en este tópico. Desde este punto de vista, se diseñan tareas profesionales que permiten caracterizar las representaciones y procedimientos utilizados por los EPM. Así mismo, se diseñan tareas que permiten caracterizar las propiedades que dan sustento a los procedimientos utilizados por los EPM; las justificaciones que permiten a los EPM indicar porqué resuelven tareas de una determinada manera; y las relaciones entre los elementos antes mencionados.

Con base en lo anterior, surge el objetivo específico 2 y 3 de este estudio: (2) caracterizar el conocimiento matemático especializado que movilizan los EPM en la resolución de tareas de área; y, (3) identificar las relaciones entre los distintos componentes del

conocimiento matemático especializado que movilizan los EPM en la resolución de tareas de área.

Debido a que también se aborda el conocimiento didáctico matemático de los EPM, resulta necesario caracterizar el conocimiento que los EPM ponen en juego al interpretar respuestas de alumnos. Para esto, se utilizan respuestas de alumnos de segundo de la Educación secundaria a una tarea de área que presenta un alto grado de complejidad para los propios EPM (Caviedes et al., 2019). Así surge el último objetivo específico de este estudio: (4) caracterizar el conocimiento especializado que movilizan los EPM al interpretar respuestas de alumnos de primer ciclo de Educación secundaria.

Por todo lo anterior, se plantean los siguientes objetivos de investigación:

OBJETIVO GENERAL:

Caracterizar el conocimiento especializado que ponen en juego los EPM cuando se enfrentan a un conjunto de tareas profesionales que involucran el área de figuras planas

Para dar respuesta a lo anterior, se plantean los siguientes objetivos específicos:

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

1- Caracterizar los elementos matemáticos que subyacen a los procesos de medición de áreas de figuras planas en el contexto de la Educación primaria.
2- Caracterizar el conocimiento matemático especializado que movilizan los EPM en la resolución de tareas profesionales de área.
3- Identificar las relaciones entre los distintos componentes del conocimiento matemático especializado que movilizan los EPM en la resolución de tareas profesionales de área.
4- Caracterizar el conocimiento especializado que movilizan los EPM al interpretar respuestas de alumnos de primer ciclo de Educación secundaria.

La consideración de los elementos matemáticos involucrados en los procesos de medición de áreas, a lo largo de la Educación primaria, permite caracterizar el conocimiento especializado sobre el área de figuras planas de los EPM, tal y como se muestra en la Figura 2. De esta manera, el objetivo específico 1 se presenta como la base para realizar la caracterización de conocimiento especializado de los EPM.

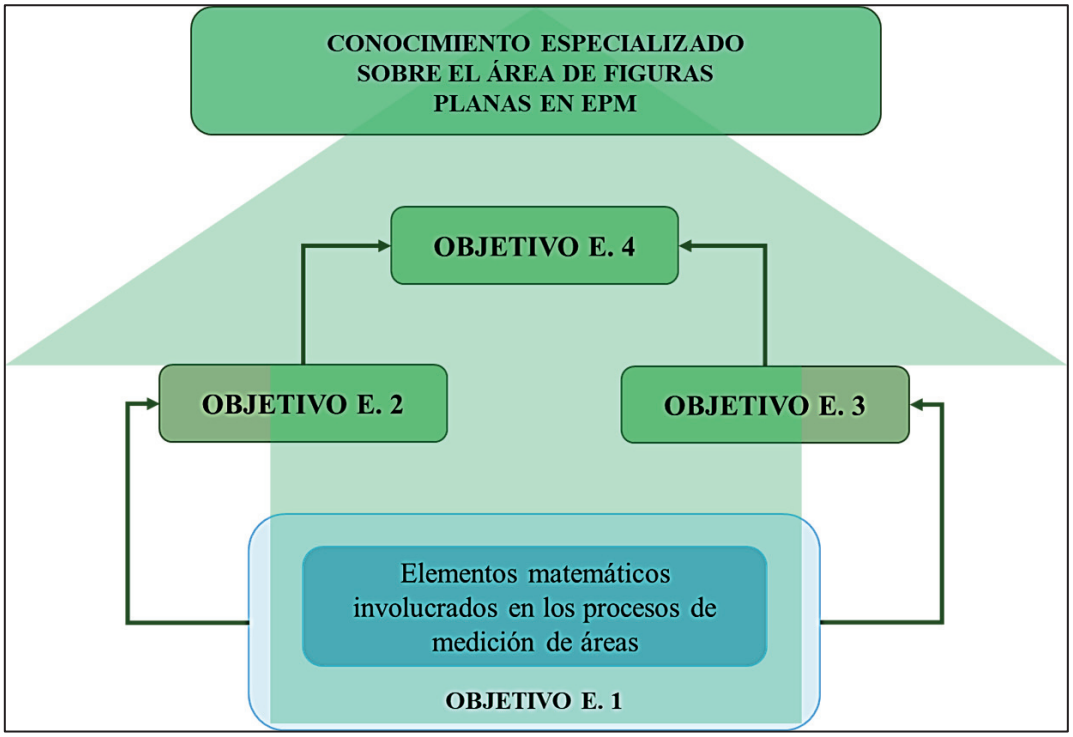


Figura 2. Relación entre los objetivos de la investigación. [Elaboración propia]

SECCIÓN 2.
REFERENTES TEÓRICOS

2. Referentes teóricos

En la sección anterior se señala que el objetivo general del presente estudio es caracterizar el conocimiento especializado que ponen en juego los EPM cuando se enfrentan a un conjunto de tareas profesionales que involucran el área de figuras planas. Para esto, se consideran diferentes referentes teóricos que permiten articular el estudio y que se presentan en dos apartados. En el primer apartado se presentan las características del área y sus procesos de medición. Además, se aborda la complejidad asociada al área y se detallan los diferentes elementos matemáticos que intervienen tanto en los procesos de medición, como en la comprensión del concepto. En particular, se destaca -y posteriormente se profundiza- la importancia de uno de estos elementos, las representaciones. Igualmente, se señala la necesidad de organizar los elementos matemáticos involucrados en los procesos de medición de áreas, teniendo en cuenta el rol de las representaciones. Para esto, toma como referencia la herramienta de la configuración epistémica y se explica su utilidad.

En el segundo apartado se hace mención, de manera general, a algunos de los modelos que abordan el conocimiento del profesor de matemáticas. En particular, se profundiza en el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas. Se detalla su origen, caracterización y estudios que lo han utilizado. Finalmente, se hacen explícitos los motivos por los que se elige el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas como principal referente.

2.1 Características del área y sus procesos de medición

El concepto de área forma parte de la cultura de todas las sociedades, de la vida diaria de las personas, y también una parte importante de la ciencia y la tecnología, (Kordaki y Potari, 1998), por tal razón se considera un contenido obligatorio en la mayoría de los currículos de primaria a nivel mundial (Tatto et al., 2012). Esto último se debe, también, a que el área se presenta como un concepto clave para el estudio de otros contenidos matemáticos tanto en la Educación primaria, como en cursos posteriores. Por ejemplo, el área puede servir como un modelo de base para introducir la multiplicación de números naturales (Hirstein et al., 1978), las fracciones (Freudenthal, 1983) y la composición de las figuras geométricas (Clements et al., 2018). Además, el área puede jugar un papel fundamental en la justificación geométrica de fórmulas algebraicas, como la multiplicación de binomios (Pratt, 2018) o el teorema de Pitágoras. A pesar de ser un concepto con múltiple presencia y con diversas aplicaciones, los estudios presentados en la sección anterior ponen de manifiesto que no es un concepto que sea adquirido con facilidad por los alumnos de primaria, secundaria e incluso por los futuros profesores de Educación primaria. Esto se debe a que los procesos de medición asociados al área no son sencillos de comprender y ejecutar, pues la medición involucra la cuantificación de atributos particulares de un objeto o fenómeno, lo cual no es un proceso fácil, pues los alumnos deben estructurar y revisar mentalmente su construcción del espacio (Kilpatrick et al., 2001; Lehrer et al., 1998).

Las diversas situaciones en las que puede aparecer el concepto de área y las diferentes representaciones utilizadas -geométricas, simbólicas- permiten inferir una complejidad subyacente a dicho concepto. Al respecto, Clements y Stephan (2004) señalan que a la fórmula del área del rectángulo (*base x altura*) subyace la complejidad de la estructuración espacial y el razonamiento multiplicativo, aspectos que deben ser coordinados con los procesos de medición, en conjunto con diferentes conceptos. Así, el acto de medir se presenta como algo conceptualmente más complejo que asignar un número a una cantidad de superficie, ya que requiere del entendimiento y reorganización del objeto a medir y del entendimiento de las diferentes propiedades, conceptos y procedimientos involucrados en tal acto. A fin de dar cuenta de la complejidad del área, el presente estudio tiene como una de sus finalidades identificar, organizar y caracterizar los elementos matemáticos que intervienen en los procesos de medición de áreas en la

Educación primaria. Para esto, se consideran las aportaciones de Sarama y Clements (2009), quienes a partir de estudios previos (p.e., Sarama y Clements, 2004) diseñan trayectorias de aprendizaje con la finalidad de desarrollar e integrar el conocimiento conceptual y procedimental subyacente a los procesos de medición de áreas. Esto, con alumnos hasta cuarto de Educación primaria.

Sarama y Clements (2009) definen área como una cantidad de superficie bidimensional dentro de límites específicos. En este sentido, y a fin de comprender la bidimensionalidad del área, es necesario identificar y comprender que el área corresponde a una superficie dentro de una región 2D, lo que requiere de un conocimiento sobre la longitud y su medición, pues el área se produce al establecer una relación multiplicativa entre dos magnitudes lineales (Barrett et al., 2017; Sarama y Clements, 2009). Igualmente, se hace necesario comprender la composición y la estructura de las formas 2D (Barrett et al., 2017), a fin de analizar las formas geométricas que se quieren medir.

Complementando lo anterior, Clements y Sarama (2014, p.187) explican que en el acto de medir la asociación entre cantidad y número consiste en dos aspectos: "*identificar una unidad de medida y subdividir (mental y físicamente) el objeto por la unidad, localizando la unidad de principio a fin (iterándola) a lo largo del objeto"*. Ambos aspectos están vinculados con la comprensión de los conceptos asociados a las unidades de medida, por ejemplo, la composición de unidades para crear unidades de unidades, la iteración de unidades de manera individual o grupal, además de la coordinación de unidades (Stephan y Clements, 2003). Por lo tanto, el trabajo con unidades de medida es un requisito indispensable para poder ejecutar con precisión los procesos de medición del área (Cullen et al., 2018). Sumado a esto, Sarama y Clements (2009) señalan que aprender a comprender y ejecutar con precisión los procesos de medición de áreas requiere de la comprensión previa de ciertos conceptos que son fundamentales, a saber:

- Área como atributo: la comprensión del atributo implica asignar un significado cuantitativo a la cantidad de un espacio o superficie 2D.
- Unidades de medida: la unidad de medida debe ser fácilmente reproducible, fácilmente divisible y no debe dejar huecos en el momento de recubrir la superficie con unidades o sus fracciones (carácter de recubrimiento).
- Iteración de unidades: cubrir superficies sin espacios ni solapamientos entre las piezas, seleccionar unidades de igual forma y área. La comprensión de estos

conceptos ayuda a medir el área de forma comprensiva. Los alumnos necesitan estructurar el espacio bidimensional, en un arreglo de unidades organizado, para determinar el área utilizando el pensamiento multiplicativo.

- Partición equitativa: acto mental de cortar el espacio bidimensional en partes de igual área y usualmente congruentes.
- Conservación: al cortar una región dada y reorganizar sus partes se puede formar otra figura, sin embargo, el área se mantiene igual.
- Acumulación y aditividad: las figuras pueden ser compuestas y recompuestas en regiones de igual área. Ambos funcionan de manera similar, tanto para el área como para la longitud.
- Transitividad: comprender que si el área de una "superficie A" es igual (menor o mayor) que el área de una "superficie B" y el área de la "superficie B" es igual (menor o mayor) que una superficie C, entonces la "superficie A" es igual (menor o mayor) que la "superficie C".
- Estructuración del espacio: cubrir una superficie con cuadrados alineados en filas y columnas. Comprender el área como verdaderamente bidimensional.

El desarrollo de los conceptos antes mencionados es de carácter interactivo, es decir, se refuerza mutuamente (Clements et al., 2018; Sarama y Clements, 2009). En este sentido, y a diferencia de los debates sobre lo que debe aprenderse primero, o en lo que hay que centrarse más, Clements et al. (2018) plantean que los procedimientos pueden aprenderse de forma significativa si están vinculados a un conocimiento conceptual; o de memoria si son de carácter mecánico (Hiebert y Wearne, 1993). Al respecto, Clements et al. (2018) señalan que en aquellas tareas donde se presentan regiones ya divididas, se reduce la experiencia de los alumnos con la medición del área a un simple recuento de unidades preformadas y, posteriormente, a la utilización de fórmulas. Esto da lugar a una comprensión incompleta de los elementos subyacentes a los procesos de medición de áreas (Lehrer, 2003; Sarama y Clements, 2009), principalmente, por el carácter mecánico de la tarea.

Los estudios señalados constituyen el principal referente para caracterizar los elementos matemáticos implicados en la comprensión del área en la Educación primaria. Sin

embargo, dada la necesidad de ampliar dichos elementos hasta el segundo ciclo de la Educación primaria, se considera relevante incorporar otros estudios que aborden el área y sus procesos de medición. En este sentido, las aportaciones de Freudenthal (1983) se presentan como un complemento a los estudios realizados por Clements et al. (2018) y Sarama y Clements (2009), principalmente, porque proporcionan información sobre los fenómenos que rodean la enseñanza del área en la Educación primaria, aspecto que permite realizar una organización de los elementos matemáticos y que no es considerado por los estudios mencionados anteriormente.

De acuerdo con Freudenthal (1983), el área corresponde a una magnitud que sirve para medir una gran variedad de objetos. Un objeto al que se le puede asignar una determinada área debe tener longitud y anchura, esto es, en un sentido fenomenológico, un objeto de dos dimensiones. En su análisis didáctico fenomenológico del área, Freudenthal (1983) hace énfasis en la adquisición del área como "objeto mental" en lugar de "concepto", pues señala que en los asuntos cotidianos los conceptos no son considerados como temas de enseñanza. Por ejemplo, el autor señala que los niños aprenden qué es una silla, pero no se les enseña el concepto de silla. Igualmente, aprenden qué es un círculo, un número o qué es sumar, pero no los adquieren como conceptos, si no como objetos mentales, completándolos como actividades mentales (Freudenthal, 1983). En este sentido, el autor señala que las matemáticas no son diferentes de los asuntos cotidianos y el objeto mental precede a la adquisición del concepto, aun cuando no es seguido por la adquisición del propio concepto, pues es posible que éste último no sea adquirido por los estudiantes aún en cursos avanzados.

Freudenthal (1983) señala que entre los objetos mentales y los conceptos la relación es variada. Ambos se constituyen como medios de organización de fenómenos, los objetos mentales preceden a los conceptos y éstos no substituyen a los primeros, sino que contribuyen a la formación de nuevos objetos mentales que los contienen o con los que son compatibles (Freudenthal, 1983). Así, el autor indica que los objetos geométricos, como conceptos, se elaboran a partir de los objetos mentales constituidos como medios de organización de las figuras "geométricas". En este sentido, Freudenthal (1983) señala que las definiciones de tales figuras geométricas, se obtienen mediante las propiedades sensibles que pueden desprenderse de las mismas figuras. Por ejemplo, Euclides, en las primeras páginas de su obra Los Elementos I, define: <una línea es una longitud sin anchura>, <una superficie es lo que solo tiene longitud y anchura>. Dichas definiciones

se construyen con propiedades que indican carencias, y creando un concepto que se separa del objeto mental que organiza los fenómenos correspondientes (Freudenthal, 1983).

Para la correcta adquisición del área como objeto mental, Freudenthal (1983) distingue tres fenómenos específicos de la enseñanza del área. A su vez, diferencia manipulaciones propias de cada uno de estos fenómenos y las propiedades implicadas (Tabla 1). El primer fenómeno corresponde al reparto justo (aprovechando las regularidades, estimando y midiendo); el segundo, a las comparaciones y reproducciones en formas diferentes (estableciendo relaciones de inclusión, por transformaciones de descomponer y recomponer, por estimación, por medición, por congruencias, afinidades); el tercer fenómeno corresponde a la medición (con agotamiento con una unidad, con subunidades más pequeñas, por aproximación del interior y el exterior, entre otros). Estos fenómenos se presentan en la Tabla 1.

Tabla 1. Fenómenos que permiten la adquisición del área como objeto mental en concordancia con Freudenthal (1983). [Elaboración propia]

Fenómenos que rodean la enseñanza del área	**Manipulaciones**	**Propiedades**
Reparto equitativo: situaciones en las que dado un objeto hay que repartirlo. El área no cambia por reparto.	Aprovechamiento de regularidades; estimación; medición.	Invariancia del área por reparto.
Comparación y reproducción: situaciones en las que hay que comparar dos superficies; situaciones en las que hay que obtener una reproducción de una superficie, con una forma diferente a la que tiene (por ejemplo, dibujar un cuadrado con la misma área que un triángulo dado). El área no cambia por transformaciones de romper y/o rehacer.	Comparaciones: Directas: relaciones de inclusión; medición. Indirectas: transformaciones de romper y rehacer; mapeos de congruencia, afinidad y recorte; estimación.	Invariancia del área por transformaciones de romper y rehacer. Aditividad.
Medición: situaciones en las que una superficie aparece ligada a un proceso de medida, ya sea para comparar, repartir o valorar.	Exhausión de unidades y subunidades; aproximaciones desde el interior al exterior; uso de fórmulas; transformaciones de romper y rehacer; principios geométricos generales; principio de Cavallieri; congruencia, afinidad y recorte.	Aditividad.

Freudenthal (1983) señala que, si se enseñan las matemáticas del área, el enfoque, el método y el tema se apartan de los correspondientes objetos mentales que ayudan a explicar y a comprender el fenómeno del área en la vida diaria, y en las aplicaciones matemáticas. Por lo tanto, el autor indica que es necesario tener en consideración que el área de las figuras planas surge mediante la relación de equivalencia e igualdad de áreas. Las congruencias y las transformaciones de romper y rehacer contribuyen a la extensión de esta clase de equivalencia (Freudenthal, 1983). Por ejemplo, un cuadrado dividido en dos partes congruentes produce una figura parcial, que es directamente (no por agotamiento con pequeños cuadrados) reconocible como la mitad de la figura original. Las figuras planas pueden ser comparadas directamente con respecto a sus áreas; indirectamente, si una es parte de otra, después de transformaciones de ruptura y por congruencias. Además, las figuras planas pueden ser medidas por exhausión de una unidad de medida, por aproximación desde el interior al exterior; en ambos casos se utiliza la aditividad de área. Estas relaciones se pueden observar en la Figura 3.

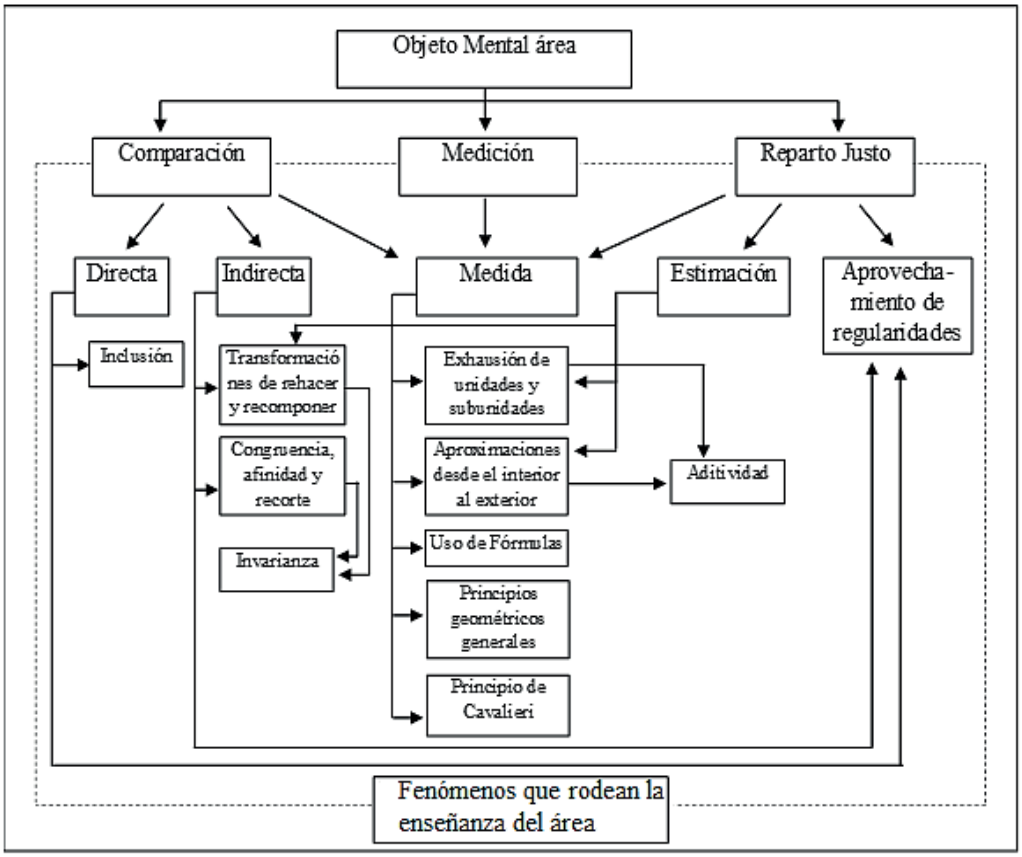


Figura 3. Relaciones entre los fenómenos que rodean la enseñanza del área. [Elaboración propia]

De acuerdo con Freudenthal (1983) todas estas aproximaciones son didácticamente aceptables, pero con distinto peso y resultados, por lo que es posible elegir una en función del propósito de la actividad.

Uno de los aspectos que resulta relevante para este estudio es la existencia de varios enfoques, bajo la consideración que no todos ellos conducen al mismo resultado, o bien, tienen distinto peso en función de lo que se quiera lograr. Esto permite concluir que es necesario tener una claridad de lo que se espera acerca de la enseñanza-aprendizaje de los procesos de medición de áreas. Debido a que el trabajo de Freudenthal (1983) no es resultado de aplicaciones empíricas, se hace necesario considerar otros estudios, a fin de identificar con mayor exactitud los fenómenos y manipulaciones que rodean la enseñanza y aprendizaje de los procesos de medición de áreas. Así, resulta relevante el estudio de Douady y Perrín-Glorian (1989) y Perrín-Glorian (1990), quienes elaboran una ingeniería didáctica para abordar el área con alumnos de 9-11 años. Los autores establecen una diferenciación de los elementos matemáticos que caracterizan al área y sus procesos de medición. De esta manera, identifican dos grandes marcos en los que se desarrollan dichos procesos: el geométrico y el numérico, los que se encuentran en estrecha vinculación con los fenómenos descritos por Freudenthal (1983).

El marco geométrico involucra aquellos procedimientos de comparación (directa e indirecta) y reparto justo. El marco numérico involucra todos aquellos procedimientos vinculados a la medición mediante el uso de cálculos y fórmulas. La distinción entre un marco geométrico y numérico permite a Douady y Perrín-Glorian (1989) realizar una distinción entre superficie, cantidad de área, y medida, donde adquiere relevancia la noción de *área como magnitud autónoma*, que permite desligar al área de la forma de la superficie (dos superficies diferentes pueden tener igual área) y del número que la mide (a una misma superficie pueden corresponderle números diferentes, según la unidad de medida elegida, pero el área permanece constante). Esta noción puede trabajarse bajo la consideración de los dos marcos antes señalados de la siguiente manera:

- Etapa geométrica: consiste en realizar una aproximación al concepto de área independiente de su medida. Para esto, se utilizan procedimientos que permitan extender a superficies dibujadas en papel blanco, expresiones como <tener igual área>, diferenciar la magnitud área y longitud sin uso de la medición.

- Etapa geométrica-numérica: se aborda mediante procedimientos de pavimentación y se introduce la unidad de área (unidad de medida bidimensional). Incluye actividades de pavimentación con distintas unidades de medida; transformaciones geométricas que permitan aceptar la conservación del área; relación inversamente proporcional entre la unidad de medida y la superficie a medir.
- Etapa numérica: se aborda la medición de superficies con una unidad de medida dada. Incluye actividades que implican la medición de figuras geométricas utilizando el cm^2; las transformaciones geométricas y sus consecuencias sobre una figura plana como el rectángulo.

El estudio de Douady y Perrin-Glorian (1989) y Perrín-Glorian (1989) otorga lineamientos para abordar los procesos de medición de áreas de una manera gradual y sistemática. La separación de un marco geométrico y numérico permite una organización de los procedimientos, y otros elementos matemáticos (p.e., propiedades), que se deben interiorizar antes de poder ejecutar con precisión las fórmulas del área y a fin de desarrollar una comprensión robusta sobre el concepto mismo.

Con base en los estudios anteriores, se infiere que la correcta ejecución de los procesos de medición de áreas involucra un red interconectada y coherente de diferentes elementos matemáticos, que no pueden quedar reducidos al uso de cálculos y fórmulas. En este contexto, las investigaciones mencionadas anteriormente otorgan información sobre aquellos elementos matemáticos involucrados tanto en la comprensión del concepto de área, como en sus procesos de medición. Mientras Sarama y Clements (2009) dan cuenta sobre los diferentes conceptos, propiedades y procedimientos que intervienen en la comprensión y complejidad del concepto de área, las aportaciones de Freudenthal (1983) permiten organizar los fenómenos que rodean la enseñanza-aprendizaje del área, pues el autor considera los aspectos cualitativos y cuantitativos de las figuras y hace explícitas las partes de la estructura conceptual del área, que surgen de la acción de medir, de repartir o de transformar una figura. Esto se ve complementado por el marco geométrico y numérico de Douady y Perrin-Glorian (1989), que permite organizar de manera más detallada los fenómenos y elementos matemáticos involucrados en los procesos de medición de áreas.

Aunque los estudios mencionados tienen numerosas aplicaciones y constituyen el principal referente para caracterizar los elementos matemáticos subyacentes al área, es posible evidenciar algunas limitaciones. Por ejemplo, no especifican las diferentes representaciones (p.e., geométrica, simbólica) que intervienen en la acción de medir, de repartir o de transformar. Igualmente, no especifican los argumentos que intervienen en tales acciones. Debido a que los conceptos, propiedades y procedimientos se manifiestan explícitamente mediante el uso de diferentes representaciones semióticas, se hace necesario ampliar y profundizar la comprensión sobre dichas representaciones y sus relaciones. Para esto, se consideran las aportaciones de Duval (1999, 2004, 2006, 2017).

2.1.1 Representaciones semióticas en los procesos de medición de áreas

Las representaciones de los objetos matemáticos, de acuerdo con Duval (2004), se producen al hacer uso de sistemas de representación que tienen una naturaleza diferente. Estos pueden ser de naturaleza semiótica, es decir, por medio de signos; o de naturaleza no semiótica, relacionada con redes neuronales o instrumentos físicos. En tanto que en matemáticas los objetos de conocimiento no son accesibles de forma perceptual o instrumental, el uso de registros semióticos es obligado e indispensable (Duval, 2006).

En matemáticas, al realizar un estudio de las distintas representaciones semióticas, se hace referencia a *objetos* matemáticos y no a *conceptos*, pues no se trabaja sobre conceptos, sino sobre objetos (problemas, notaciones, procedimientos, proposiciones, argumentaciones, sistemas o estructuras matemáticas, teorías) que tienen propiedades (Duval, 2006). De esta manera, los que interesa caracterizar en este estudio son aquellos objetos matemáticos que dan cuenta de la complejidad del área como objeto de referencia, y que intervienen en su medición y comprensión en la Educación primaria.

Duval (2006) señala que el objeto matemático corresponde al "*invariante de un conjunto de fenómenos o el invariante de alguna multiplicidad de posibles representaciones"* (p. 129), y enfatiza que no se debe confundir el objeto matemático con sus diversas representaciones. De acuerdo con Duval (2006) el acceso a un objeto representado ocurre en la medida que se cumplan dos condiciones: (1) que se disponga de al menos dos registros diferentes para representar el objeto; y (2) que se pueda pasar de manera natural de un registro a otros, aun sin ser consciente de las representaciones que se están articulando. Si esto no ocurre, la representación y el objeto representado (notación y

contenido) se confunden. Tener en cuenta la naturaleza semiótica de la actividad matemática, implica la consideración tanto de las formas que se utilizan, como de los requisitos cognitivos que se ven involucrados en la actividad (Duval, 1999). Así, es importante la propiedad de transformación de las representaciones semióticas y la elección de un registro (sistema semiótico de representación) apropiado (Duval, 1999). Debido a que gran parte del conocimiento matemático se sirve de representaciones y moviliza una variedad de sistemas semióticos de representación de objetos, se hace necesario que los alumnos puedan apropiarse de una variedad de sistemas de representación semiótica, pudiendo transformar una representación semiótica en otra.

De acuerdo con Duval (2006), el proceso matemático, casi siempre, implica alguna transformación de representación semiótica, y aunque puedan emplearse diversos sistemas de representación, o distintos registros semióticos, es posible elegir uno en función del propósito de la actividad. En este sentido, la actividad matemática precisa de una coordinación interna que debe ser construida entre los diferentes registros que se pueden elegir y utilizar (Duval, 2006). Duval (1995) distingue dos clases de transformaciones de representaciones semióticas que a menudo pueden estar entrelazadas en el mismo proceso matemático de resolución: *la conversión y el tratamiento*. Mientras que las conversiones se dan entre registros diferentes, los tratamientos se producen dentro de un mismo registro.

En el caso particular del área, el registro de representación más extendido es la fórmula de *base x altura* y las demás fórmulas que de ésta se derivan, en donde de manera general, se tienden a olvidar dos aspectos importantes. Por un lado, el papel que juegan las diferentes transformaciones de tratamiento entre registros simbólicos, por ejemplo, la adición de unidades o subunidades que conforman una superficie y la manera en que dichas unidades producen el proceso multiplicativo que origina la fórmula. Por otro lado, las transformaciones de tratamiento entre representaciones de tipo geométrico, relacionadas con procedimientos de corte, movimiento y pegado, o con la descomposición de superficies que permiten simplificar el uso de fórmulas. Esto da lugar a que se confunda el área con su representación basada en la fórmula, lo que dificulta las transformaciones de conversión entre registros de representación de tipo simbólico y geométrico, aspectos claves para promover un uso comprensivo de las fórmulas y dar cuenta de la complejidad del de área y sus procesos de medición.

Las transformaciones de tratamiento y conversión pueden manifestarse mediante las operaciones figurales que pueden realizarse sobre una figura geométrica. Así, Duval (2017) señala que la comprensión de las figuras geométricas se relaciona con la coordinación de dos registros de representación semiótica: el registro discursivo (oral o escrito, en lenguaje natural o simbólico) y el registro no discursivo (dibujos, bocetos, gráficos, figuras y configuraciones geométricas). Este último adquiere especial relevancia, pues es necesario realizar una deconstrucción visual de las unidades figurales que se imponen a primera vista, a fin de obtener una reconfiguración (Duval, 2017). En este sentido, el trazado suplementario se presenta como uno de los principales problemas, pues el cómo dividir la figura no es algo obvio para los alumnos de primaria (p.e., Zacharos, 2006), ni para los EPM (p.e., Baturo y Nason, 1996; Caviedes et al., 2019).

Duval (2017) señala que existen dos maneras de descomponer una figura en unidades figurales: la división mereológica y la deconstrucción dimensional. Este estudio se centra en la división mereológica, que constituye una de las heurísticas principales de las transformaciones de las figuras geométricas (Duval, 2017), y es comúnmente usada como prueba convincente de las propiedades matemáticas (ver Figura 4). Esta división admite tres tipos de descomposiciones: (1) estrictamente homogénea, descomposiciones en unidades figurales de la misma forma que la figura de partida; (2) homogénea, descomposiciones en unidades figurales diferentes de la figura de partida, pero todas de la misma forma; y (3) heterogénea: descomposiciones en unidades figurales de formas diferentes entre ellas. Todas estas descomposiciones permiten la exploración puramente visual de una figura de partida, a fin de detectar las propiedades geométricas que se van a utilizar para resolver una tarea, y para obtener una reconfiguración que haga aparecer nuevas formas no reconocibles en la figura de partida (Duval, 2017).

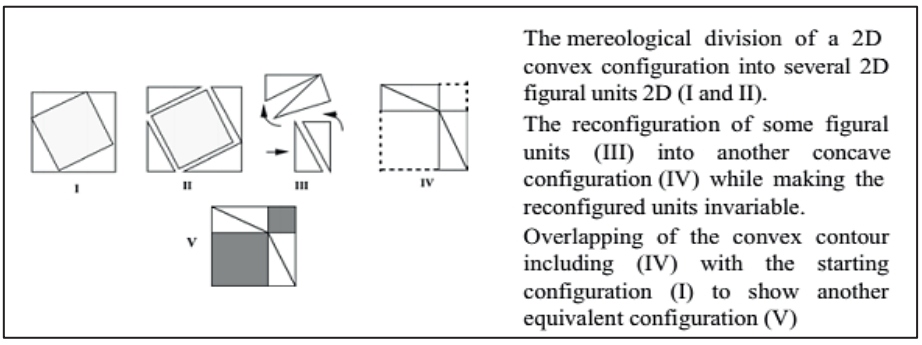


Figura 4. Transformación mereológica de una configuración de unidades figurales 2D en otra. (Duval, 2017, p 62)

Proponer tareas de las que se excluyan todas las actividades de medición y cálculo es sólo un primer paso (por sí solo insuficiente) para el desarrollo de la comprensión de las figuras geométricas, pero es útil para interiorizar las operaciones figurales, condición necesaria para poder realizar tareas de numeración o aplicar las fórmulas de cálculo de áreas (Duval, 2017). En este contexto, la división mereológica permite realizar una caracterización más detallada de los procedimientos que se ven involucrados en los procesos de medición de áreas y, a la vez, permite hacer explícitas las transformaciones de tratamiento al interior de un registro de representación de tipo geométrico.

Lo anterior indica que las representaciones se presentan como un objeto matemático clave en la resolución de tareas de área, pues a partir de ellas, es posible hacer explícitos otros objetos matemáticos que intervienen en los procesos de medición de áreas, como los procedimientos asociados a la división mereológica y las propiedades que los sustentan. Por lo tanto, resulta necesario organizar los objetos matemáticos que se necesitan caracterizar, destacando el rol de las representaciones.

2.1.2 Organización de los elementos matemáticos que intervienen en los procesos de medición de áreas

Godino et al. (2016) señalan que en la resolución de una tarea matemática pueden intervenir diversos registros de representación semiótica, por ejemplo, la lengua natural oral y escrita; representaciones numéricas, ya sea entera, fraccionaria o decimal; representaciones gráficas, sean lineales planas o espaciales; y representaciones alfanuméricas, tales como representaciones algebraicas. Todos estos registros pueden sufrir distintos tratamientos y conversiones según las reglas propias de cada registro de representación semiótica. En este sentido, y según la naturaleza de procedimientos que se utilicen en una tarea de área, las representaciones pueden ser de tipo geométrica -relacionadas con descomposiciones de superficies o acciones de corte, movimiento y pegado-; numérica -relacionadas con operaciones en el conjunto de los naturales-; algebraica -relacionadas con teoremas- o en lengua escrita -justificaciones de porqué se usa determinado procedimiento-. De esta manera, con la finalidad de dar cuenta de la complejidad asociada al concepto de área y a sus procesos de medición, resulta necesario caracterizar aquellos objetos matemáticos que intervienen en la resolución de tareas de área, haciendo especial énfasis en las representaciones.

Para identificar los diferentes objetos matemáticos que intervienen en la resolución de tareas de área se toma como referencia el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemáticos (EOS) como marco organizador de dichos objetos. El EOS distingue diversos tipos de objetos matemáticos con base en su naturaleza y permite, además, analizar la manera en que dichos objetos emergen de las prácticas matemáticas (Godino et al., 2007).

El EOS adopta una visión pragmática de la comprensión de los objetos matemáticos, es decir, la comprensión que se tiene de un objeto matemático queda definida por una capacidad para reconocer las propiedades y características de dicho objeto, relacionarlo con otros objetos matemáticos, y utilizarlo en una variedad de situaciones problemas (Font et al., 2007). Así, la comprensión del área -como objeto de referencia- quedaría definida por la capacidad que se tiene para resolver de manera competente una determinada tarea matemática, reconociendo los distintos objetos -o elementos matemáticos- que intervienen en dicha resolución, además de las relaciones entre ellos.

El significado de un objeto matemático queda definido por el sistema de prácticas realizadas por una persona, o compartidas en el seno de una institución, ante determinadas situaciones problemas (Godino et al., 2007, 2019). Cuando se considera el significado de un objeto matemático en términos de prácticas, es posible distinguir entre *sentido y significado* de los objetos matemáticos. El *sentido* corresponde al *significado parcial* del objeto. Esto significa que el significado de un objeto se puede parcelar en distintos tipos de prácticas más específicas, o subsistema de prácticas (Godino et al., 2007) que pueden ser utilizadas en un determinado contexto. Por su parte, el significado global del objeto se reconstruye mediante la exploración sistemática de los contextos de uso del objeto y los sistemas de prácticas que intervienen (Godino et al., 2019). Así, podría decirse que el significado global del área queda definido por prácticas específicas que se realizan en diferentes contextos. Por lo tanto, si se quiere conseguir que un alumno sea competente en la resolución de una variedad de tareas, donde el área de figuras planas tiene un rol determinante, es necesario que el alumno disponga de una red de significados parciales bien conectados entre sí.

Godino et al. (2007) proponen una tipología explícita tanto de los objetos, como de sus respectivos procesos, lo que condiciona la descripción y el análisis de la actividad

matemática. Se distinguen seis tipos de objetos primarios: (1) lenguaje (términos, expresiones, notaciones, gráficos) en sus diversos registros; (2) situaciones problemas (aplicaciones intra o extra-matemáticas, ejercicios); (3) conceptos y definiciones (introducidos mediante definiciones o descripciones: superficie, espacio ocupado, ancho); (4) proposiciones (enunciados sobre conceptos); (5) procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo); y (6) argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos deductivos o de otro tipo). La emergencia de los objetos matemáticos por medio de sistemas de prácticas, subraya la complejidad de tales objetos matemáticos y la necesidad de la articulación de los componentes en los que dicha complejidad se enmarca. Dicha articulación corresponde a una configuración epistémica de los objetos primarios (Borja et al., 2019). La configuración epistémica representa el contexto intra matemático de un objeto y permite construir el sentido de dicho objeto (Breda et al., 2018).

En concordancia con lo anterior, la configuración epistémica se presenta como una herramienta que puede ser útil para describir la complejidad de los objetos matemáticos y, así mismo, de las prácticas de las cuales emergen. En este sentido, una de las ventajas de la configuración epistémica es que permite realizar un análisis microscópico de los objetos matemáticos, caracterizar su complejidad y aportar explicaciones de los aprendizajes en términos de dicha complejidad (Godino et al., 2007). Igualmente, la configuración epistémica reconoce el valor instrumental de las representaciones, entendiéndolas de una manera sistémica, es decir, como el detonante de un sistema complejo de prácticas que determinadas representaciones permite realizar (Font et al., 2020).

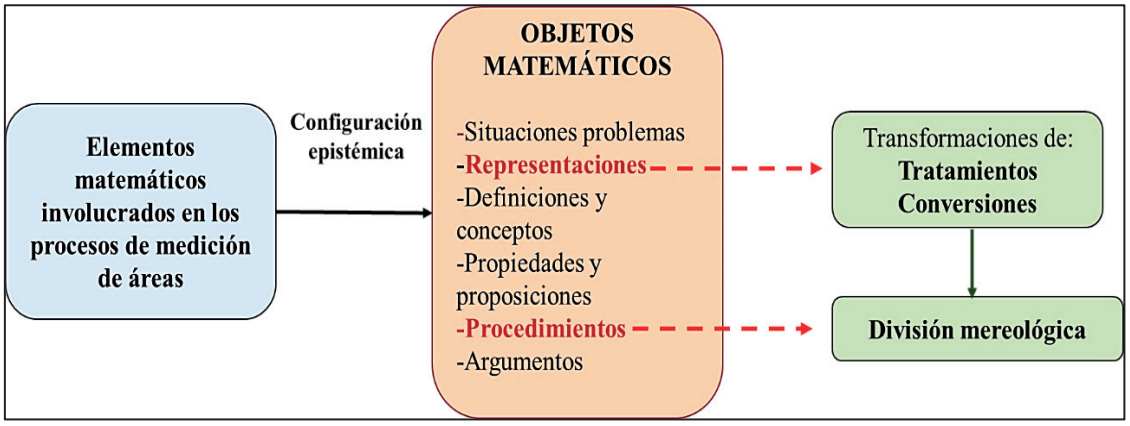


Figura 5. Organización de los elementos matemáticos con énfasis en las representaciones. [Elaboración propia]

Por lo tanto, y a fin de destacar el papel clave de las representaciones en la resolución de tareas de área, se utiliza la configuración epistémica como herramienta organizadora de los objetos matemáticos que se necesitan caracterizar, y que permiten dar cuenta de la complejidad asociada al concepto de área. Esto se muestra en la Figura 5.

2.2 Conocimiento del profesor

Tomando como referencia el trabajo propuesto por Shulman (1986) podría decirse que el conocimiento del profesorado ha venido siendo tema de investigación desde la década de los años 80. Shulman (1986) advierte sobre la necesidad de crear un cuerpo de conocimiento que determine lo que debe saber o conocer un profesor para el ejercicio efectivo de su profesión. Esto, con dos finalidades. Por un lado, comprender cuáles son las fuentes de las analogías, metáforas, ejemplos, demostraciones y reformulaciones que los docentes utilizan en el aula; y por otro, comprender la manera en que los profesores toman una parte su conocimiento y lo transforman para que sus alumnos puedan comprenderlo.

Una organización del conocimiento base del profesor, en concordancia con Shulman (1987), incluiría como mínimo los siguientes tipos de conocimiento: (1) conocimiento del contenido; (2) conocimiento pedagógico del contenido; (3) conocimiento del currículo; (4) conocimiento didáctico general; (5) conocimiento de los alumnos y sus características; (6) conocimiento de los contextos educativos; (7) conocimiento de los objetivos, las finalidades y los valores educativos, y de sus fundamentos filosóficos e históricos. Las primeras tres categorías de conocimiento definen dimensiones específicas de conocimiento y juntas integran lo que Shulman (1986) denomina *The missing paradigm*. Entre estas categorías, el conocimiento pedagógico del contenido adquiere particular interés porque identifica los cuerpos de conocimientos distintivos para la enseñanza. Las restantes cuatro categorías vienen a direccionar el trabajo de profesores, complementando las primeras tres categorías de conocimiento, y forman parte del conocimiento general de todo profesor. A continuación, se detallan los primeros tres tipos de conocimiento que conforman el conocimiento base de un profesor:

1- Conocimiento del contenido (SMK): hace referencia a "*la cantidad y organización del conocimiento del tema per se en la mente del profesor"* (Shulman, 1986, p. 9). En este sentido, para pensarlo adecuadamente se requiere ir más allá del conocimiento de los hechos y conceptos de un dominio, puesto que se requiere entender la estructura del contenido.

2- Conocimiento pedagógico del contenido (PCK): corresponde a las formas de representar y formular un tema, a fin de hacerlo comprensible a otros. Incluye un entendimiento de lo que hace fácil o difícil el aprendizaje de un tópico específico, destacando no sólo el conocimiento del profesor, sino también el de los alumnos, ya que "*las concepciones y concepciones erróneas de los estudiantes sobre un tema en particular, son lo que hace fácil o difícil el aprendizaje"* (Shulman, 1986, p. 14).

3- Conocimiento del currículo (CCK): está relacionado con el conocimiento de los documentos que rigen la enseñanza de un tema en particular, en un nivel determinado y con el conjunto de materias relacionadas con los temas que se enseñan.

Los resultados de la investigación sobre enseñanza efectiva, aunque valiosos, no constituyen una única fuente de evidencias en que es posible fundamentar una definición del conocimiento base para la enseñanza (Shulman, 1987). Ante esto, Shulman (1987) afirma que las fuentes principales del conocimiento base serían, por lo menos, cuatro:

a) Formación académica en la disciplina a enseñar: referida al conocimiento de los contenidos. El saber, la comprensión, las habilidades y las disposiciones que deben adquirir los alumnos. Estudios de la disciplina y sobre la naturaleza del conocimiento.

b) Materiales y el contexto del proceso educativo institucionalizado**:** currículos con sus ámbitos y sus secuencias; test y materiales para su aplicación; instituciones con sus jerarquías, sus sistemas explícitos e implícitos de reglas y funciones; organizaciones gremiales de profesores con sus funciones de negociación, cambio social y protección mutua; entidades gubernamentales; y mecanismos generales de gestión y financiación.

c) Literatura educativa especializada: investigación sobre la escolarización; las organizaciones sociales; el aprendizaje humano, la enseñanza y el desarrollo, y los demás fenómenos socioculturales que influyen en el quehacer de los profesores.

d) La sabiduría que otorga la práctica misma: referida a las máximas que guían la práctica de los profesores competentes o proporcionan la racionalización reflexiva para ella.

Shulman (1987) señala que existe un escaso balance en los programas de formación inicial de profesores, pues dichos programas tienden a enfocarse en el conocimiento del contenido o bien, en el conocimiento pedagógico, pero no en ambos al mismo tiempo Por esta razón y, analizando las demandas del trabajo de enseñar matemáticas, se evidencia la necesidad de caracterizar ambos tipos de conocimiento en los EPM. Esto, con el fin de poder mejorarlos y tener efectos posteriores en su desempeño profesional. En este sentido, un conocimiento profundo de los contenidos matemáticos se debe complementar con un conocimiento del aprendizaje y de la enseñanza de las matemáticas, pues un conocimiento puramente matemático o puramente didáctico no es suficiente para el desarrollo de las capacidades para enseñar matemáticas (Shulman, 1986).

Para hacer comprensible las matemáticas a los alumnos, Shulman (1986, 1987) advierte que es necesario que los profesores tengan una tendencia hacia la resolución de problemas y cuenten con razones necesarias para comprender el por qué resuelven tareas matemáticas de una manera determinada. De este modo, los profesores necesitan también conocer diferentes formas de resolución y conocer diferentes formas de enseñar el contenido a sus estudiantes.

Inspirados en el trabajo de Shulman (1986, 1987) diversos estudios han intentado aportar un refinamiento de los dominios de conocimiento, a fin de identificar los componentes específicos del conocimiento de los profesores (p.e., Ball, et al., 2008; Carrillo-Yañez et al., 2013; Hill et al., 2008; Rowland et al., 2005). Recientemente, e inspirados en el trabajo de Shulman (1986) y Ball et al. (2008), un grupo de investigación de la Universidad de Huelva (Carrillo-Yañez et al., 2013; Carrillo-Yañez et al., 2018) ha propuesto un modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK). A continuación, se profundiza en dicho modelo.

2.2.1 Origen del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas - MTSK

El trabajo seminal de Shulman (1986) sentó las bases para ampliar la agenda de investigación referente al conocimiento que deben poseer los profesores de matemáticas, para enseñar su disciplina. Con base en el trabajo de Shulman (1986, 1987) y tratando de dar respuesta a las demandas del trabajo de enseñar matemáticas, otros autores han desarrollado modelos de conocimiento para el profesor. Por ejemplo, Ball et al. (2008), en su modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT), conceptualizan diferentes dominios de conocimiento, específicos y necesarios para la enseñanza de las matemáticas. De esta manera, Ball et al. (2008) realizan una división de los dominios de Conocimiento del Contenido (SMK) y Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK). Así, en el SMK se encuentran los subdominios de Conocimiento Común del Contenido (CCK); Conocimiento Especializado del Contenido (SCK); y, Horizonte Matemático (HCK). En el PCK se encuentran los subdominios de Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS); Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT); y, Conocimiento del Contenido y el currículo (CKC). El modelo MKT aborda la forma en que los profesores utilizan las matemáticas para la enseñanza, a la vez que hace hincapié en la importancia del conocimiento de las matemáticas en los entornos de enseñanza (Ball, 2000), por tal razón, ha sido ampliamente utilizado en investigaciones que se focalizan en el conocimiento de profesores de matemáticas, en nivel primario y secundario.

Carrillo-Yañez et al. (2018) señalan que el subdominio del SCK es una de las grandes aportaciones del modelo MKT, ya que permite reconceptualizar la noción de especialización que es propia del profesor de matemáticas. Apoyándose en esta noción de especialización incorporada por el modelo MKT, Carrillo-Yañez et al. (2018) proponen el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) que, a diferencia del MKT que centra su atención en la práctica que los profesores llevan a cabo en clase (ignorando los conocimientos que los profesores pueden poner en juego al realizar otro tipo de actividad docente), contempla el conocimiento que los profesores ponen en juego en sus distintas labores, por ejemplo, planificar, enseñar o reflexionar sobre la práctica. Este modelo se sustenta en la idea de que la especialización del conocimiento del profesor de matemáticas deriva de su profesión. En este sentido, el conocimiento del profesor de matemáticas es especializado en la medida que sea necesario para desarrollar la labor como profesor de matemáticas, es decir, se

diferenciaría del conocimiento pedagógico general, del conocimiento especializado de profesores de otras disciplinas y del conocimiento especializado de otros profesionales que utilizan las matemáticas (Carrillo-Yañez et al., 2013; Carrillo-Yañez et al., 2018).

Carrillo-Yañez et al. (2013) reconocen que es posible encontrar similitudes con el modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) propuesto por Ball y colaboradores, lo cual se debe a que ambos modelos consideran el mismo objeto de estudio, el conocimiento que necesita el profesor de matemáticas y que es propio de su profesión.

2.2.2 Dominios y subdominios de conocimiento del modelo MTSK

El MTSK se caracteriza por una reconfiguración del conocimiento matemático, una reinterpretación del conocimiento didáctico del contenido y una nueva forma de conceptualizar la noción de especialización (Scheiner et al., 2017). Siendo esta noción de especialización la que está presente dentro de todo el modelo (Carrillo-Yañez et al., 2013). Desde esta consideración, el MTSK conserva la separación entre PCK y SMK (Shulman 1986; Ball et al., 2008) aunque este último es renombrado como MK (conocimiento matemático). Este modelo consta de seis subdominios (ver Figura 6).

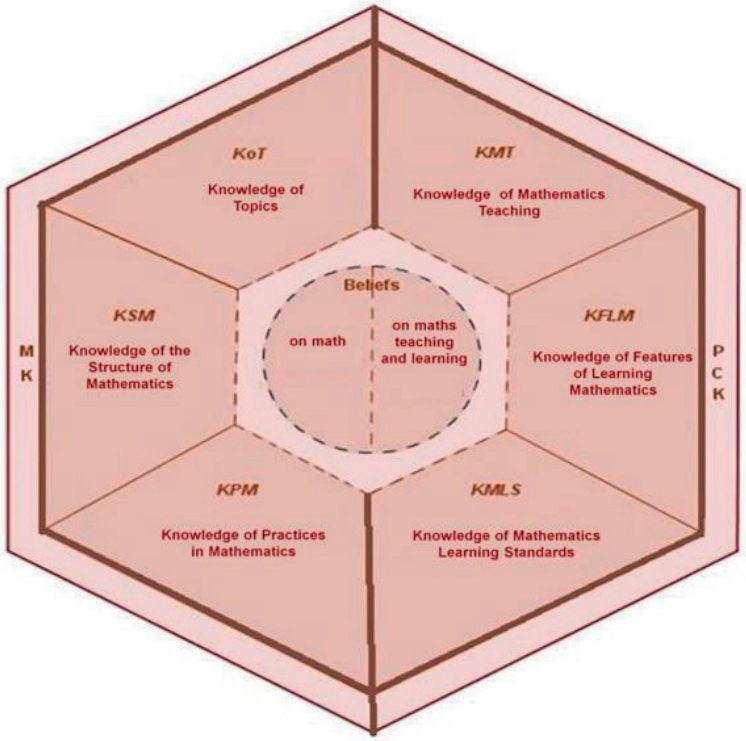


Figura 6. Subdominios del modelo MTSK. (Carrillo-Yañez et al., 2018, p.6)

Tal y como se observa en la Figura 6, el MTSK consta de tres subdominios referentes al MK: Conocimiento de los Temas (KoT), Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas (KSM) y Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM); y otros tres subdominios referentes al PCK: Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM), Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT) y Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de Matemáticas (KMLS).

Análogamente, y a efectos de facilitar su utilización, el modelo incluye categorías de conocimiento asociados a cada uno de los subdominios, permitiendo un análisis detallado de los conocimientos de los profesores (Flores et al., 2013). Así, el modelo MTSK permite caracterizar, de manera detallada, el conocimiento matemático y didáctico matemático de los EPM, pues permite ver en profundidad el conocimiento que éstos usan al momento de resolver tareas profesionales que involucran el área de figuras planas. A continuación, se describen los subdominios de conocimiento y sus respectivas categorías.

a) Categorías de conocimiento para los subdominios del MK

- **Conocimiento de los temas (KoT):** describe el qué y el cómo el profesor de matemáticas conoce los temas que enseña. Implica un conocimiento profundo del contenido matemático y sus significados, incluyendo aspectos fenomenológicos, definiciones, significados de conceptos, o ejemplos específicos que caractericen aspectos concretos del tópico abordado. Además, se refiere al contenido disciplinar de las matemáticas que se encuentran en manuales y textos matemáticos. De esta manera, este tipo de conocimiento combina el conocimiento que se espera que los estudiantes aprendan, con un conocimiento más profundo (y tal vez más formal) y una comprensión más rigurosa (Carrillo-Yañez et al., 2018). En este subdominio de conocimiento se incluyen: el tipo de problemas a los que se puede aplicar el contenido, con sus contextos y significados asociados; propiedades y sus fundamentos, procedimientos y justificaciones subyacentes. Se incluyen también las conexiones intraconceptuales.

- **Conocimiento de la estructura matemática (KSM):** el conocimiento matemático del profesor debe incluir conceptos, tanto de forma aislada, como integrados en un sistema de conexiones inter conceptuales. El KSM describe el conocimiento de los profesores sobre conexiones entre diferentes temas matemáticos (Montes et al., 2013). Se consideran cuatro categorías de conexiones: conexiones de complejización, conexiones de simplificación, conexiones auxiliares y conexiones transversales. Las conexiones de complejidad creciente y de simplificación se relacionan con conocimientos avanzados y

elementales, es decir, los conocimientos avanzados permiten a los profesores un tratamiento de la matemática elemental desde una perspectiva avanzada; los conocimientos elementales, un tratamiento de la matemática avanzada desde una perspectiva elemental (Montes et al, 2015). Las conexiones auxiliares están relacionadas con la participación de un tema en un proceso más largo (Carrillo-Yañez et al., 2018), es decir, "*con la necesidad de considerar una noción -procedimiento o constructo- como apoyo para que los alumnos comprendan un determinado concepto -procedimiento o noción"*- (Policastro et al., 2019, p.3). Finalmente, las conexiones transversales se refieren a los conocimientos que fundamentan el establecimiento de relaciones entre varios temas con rasgos comunes (Montes et al., 2015).

- **Conocimiento de la práctica de la matemática (KPM):** este dominio incluye aspectos sobre el cómo se piensa en matemática. Por ejemplo, conocimiento relativo a diferentes formas de definir, argumentar o demostrar en matemáticas, incluyendo también, el conocimiento de la sintaxis matemática. De esta manera, comprende el conocimiento de estrategias, técnicas, tareas y ejemplos para enseñar un contenido, así como también, el conocimiento del potencial y limitaciones de distintos recursos, y el conocimiento sobre teorías (personales o institucionales) de enseñanza. Este subdominio se centra específicamente en los medios de producción y el funcionamiento matemático, dejando de lado la estructura y la organización, pues son parte del conocimiento de la estructura de las matemáticas.

b) Categorías de conocimiento para los subdominios del PCK

- **Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM):** Este subdominio "*engloba los conocimientos asociados a las características inherentes al aprendizaje matemáticas, poniendo el foco en el contenido matemático (como objeto de aprendizaje) y no en el alumno"* (Carrillo-Yáñez et al., 2018, p.11). El subdominio incluye las fortalezas y debilidades en el aprendizaje de las matemáticas; la manera en que los alumnos interactúan con el contenido matemático; y el conocimiento de las motivaciones y expectativas que poseen los alumnos cuando se enfrentan a un contenido particular.

- **Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT):** se refiere a los conocimientos sobre la enseñanza intrínsecamente ligados al contenido y considera tres categorías: conocimiento sobre teorías de enseñanza; conocimiento sobre recursos de

enseñanza, su potencial y limitaciones; y, conocimiento sobre estrategias, técnicas, tareas y ejemplos.

- **Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de Matemáticas (KMLS):** este subdominio incluye el conocimiento del profesor *"sobre todo lo que el alumno debería, o es capaz, de lograr en un nivel determinado, en combinación con lo que el alumno ha estudiado previamente y las especificaciones de los niveles posteriores"* (Carrillo-Yañez et al., 2018, p. 13). Incluye cuatro categorías: conocimiento sobre los resultados esperados del aprendizaje; nivel esperado de desarrollo conceptual y procedimental de los alumnos; y secuencia de un determinado tema.

2.2.3 Estudios que utilizan el modelo MTSK

Algunos de los estudios que han utilizado MTSK han mostrado las ventajas del modelo para la caracterización del conocimiento del profesor en distintos aspectos. Por ejemplo, Ribeiro y Amaral (2015) utilizan el MTSK con el fin de analizar el conocimiento que ponen en juego un grupo de EPM (de último año) al plantear problemas sobre división. Al respecto, los autores indican que el modelo permite identificar que los EPM tienen un escaso conocimiento sobre los aspectos conceptuales (KoT) que son necesarios para dividir y para plantear problemas de división. Igualmente, plantean la necesidad de futuras investigaciones que permitan tener una mayor comprensión del modelo MTSK (y de sus subdominios) como herramienta analítica, tanto para enriquecer la conceptualización teórica del modelo, como para conceptualizar tareas que permitan acceder y desarrollar conocimiento en los EPM.

En otro estudio, relativo también al tópico de la división, Policastro et al. (2019) utilizan el MTSK para explorar el conocimiento que ponen en juego profesores, cuando discuten y resuelven tareas que fueron conceptualizadas para desarrollar conocimiento especializado. Los resultados muestran que el modelo permite caracterizar el conocimiento de los profesores en dos de los subdominios, KoT y KSM, y señalan que la construcción de indicadores de conocimiento puede permitir la emergencia de nuevas categorías de conocimiento, en el dominio de conocimiento matemático. Además, los autores apuntan a la utilidad del modelo para refinar o rediseñar los cursos y programas de desarrollo profesional. Esto, porque la caracterización de conocimiento mediante el uso de distintos indicadores permite poner el foco en el desarrollo de las especificidades de los conocimientos de los profesores. Por último, señalan que es necesario profundizar

en el conocimiento de los profesores teniendo en cuenta los distintos subdominios del MTSK, y otros tópicos distintos de la división.

Otros estudios han utilizado el MTSK para el diseño y orientación de tareas formativas (p.e., Montes et al., 2019; Policastro et al., 2019), concluyendo que el MTSK puede servir como guía para la elección de los elementos que se quieren construir en los profesores, y como una herramienta que permite abordar la complejidad del conocimiento de los profesores (Policastro et al., 2019). Por ejemplo, Montes et al. (2019) señalan que el MTSK puede funcionar como un marco estructurador en un contexto de construcción de conocimiento en el tópico de los polígonos. Igualmente, los autores muestran evidencias de que el modelo facilita la construcción de propiedades y la coordinación de las diferentes definiciones asociadas a los polígonos.

En Cayo y Contreras (2020) se presentan algunos elementos de conocimiento especializado para favorecer la gestión de los formadores de maestros, durante el proceso de enseñanza de las relaciones área-perímetro en cursos de Educación primaria. Los autores realizan un estudio de casos con dos maestras noveles. Al respecto, señalan que el MTSK permite realizar una caracterización del conocimiento que es necesario para superar las dificultades área-perímetro en los alumnos. Así, mencionan la necesidad de que los maestros cuenten con una variedad de definiciones (KoT) para los conceptos de área y perímetro; que tengan conocimiento sobre las nociones intuitivas que tienen arraigadas los alumnos -más perímetro implica más área- (KFLM)-; de los recursos materiales para trabajar con las unidades de medida unidimensionales y bidimensionales -KMT- (trozos de hilos, cuadrículas, cuadrados de cartulina); que puedan realizar una clasificación excluyente v/s incluyente de los cuadriláteros, a fin de proporcionar ejemplos variados a los alumnos (KoT). Los autores concluyen que el MTSK se presenta como una herramienta analítica que permite organizar el conocimiento puesto en juego por las maestras y, así mismo, discutir conocimientos que permitan una gestión de clases alternativas a la observada.

Otros estudios han estudiado el conocimiento de profesores en activo mediante estudios de casos instrumentales y múltiples, y en diferentes tópicos (p.e., Acevedo-Rincón, 2020; Aguilar-González, 2016; Liñan et al., 2014; Rojas et al., 2015). Dichos estudios han servido para ir refinando y consolidando el modelo que actualmente se conoce.

Aunque, de modo general, el MTSK se ha utilizado para estudiar la práctica de los profesores, este estudio considera que es posible asumir el modelo como un referente de los componentes de conocimiento que son deseables en los EPM. Por ello, como una aproximación hacia lo que los EPM deben saber para su futura práctica (Liñan et al., 2014). Además, la dualidad teórica-analítica del MTSK favorece la interpretación del conocimiento de los EPM, en relación al área de figuras planas, de una manera integral. Esto, porque el modelo toma en consideración la naturaleza del conocimiento (matemático y didáctico matemático) que se pone juego en la resolución de tareas profesionales. En este contexto, la aportación del presente estudio va en la línea de caracterizar el conocimiento especializado que los EPM ponen en juego al resolver un conjunto tareas profesionales que involucran el área de figuras planas. Esto, mediante el uso de cuestionarios.

2.2.4 Elección del modelo MTSK

La elección del modelo de MTSK (Carrillo-Yañez et al., 2018) se debe, principalmente, a dos razones. Primero, el modelo considera la especialización como el núcleo del conocimiento del profesor de matemáticas, en todos sus dominios, subdominios y categorías. Esto significa que el modelo no hace referencia a ninguna otra ciencia o profesión (Carrillo-Yañez et al., 2018), aspecto que no se evidencia en otros modelos (p.e., Shulman, 1986; Ball et al., 2008). Segundo, el modelo es una propuesta teórica que modela el núcleo del conocimiento profesional del profesor y es, a su vez, una herramienta metodológica que permite analizar diferentes prácticas del profesor de matemáticas a través de sus categorías (Carrillo-Yañez et al., 2018). De esta manera, el MTSK se posiciona como un avance de los estudios propuestos por Shulman (1986) y Ball et al. (2008), pues tiene en consideración el carácter especializado del conocimiento del profesor de forma integral en todos sus componentes (Aguilar-González et al., 2018). Esto último significa que el modelo MTSK está arraigado en las propias matemáticas, dejando fuera aspectos de la pedagogía general y la psicología (Carrillo-Yañez et al., 2018). Aunque se entiende que estos aspectos son importantes, no son específicos de las matemáticas.

SECCIÓN 3.
MÉTODOS

3. Métodos

En este capítulo se describe la metodología seguida en este estudio y que permite caracterizar el conocimiento especializado sobre el área de figuras planas en estudiantes para maestro. En la sección 1 de esta tesis se señala que la caracterización del conocimiento de los EPM se aborda desde una doble perspectiva. Al respecto, en el apartado 3.1 de la presente sección se hace referencia al diseño de la investigación y se enuncia que el estudio se lleva a cabo en dos etapas. La primera etapa involucra alumnos de Educación primaria y primer ciclo de Educación secundaria y permite dar respuesta al objetivo específico 1: caracterizar los elementos matemáticos que subyacen a los procesos de medición de áreas de figuras planas en el contexto de la Educación primaria. La segunda etapa involucra EPM de tercer curso del grado de Educación primaria y permite dar respuesta a los objetivos específicos 2, 3 y 4, a saber: caracterizar el conocimiento matemático especializado que movilizan los EPM en la resolución de tareas profesionales de área; identificar las relaciones entre los distintos componentes del conocimiento matemático especializado que movilizan los EPM en la resolución de tareas profesionales de área; y caracterizar el conocimiento especializado que movilizan los EPM al interpretar respuestas de alumnos de primer ciclo de Educación secundaria.

Para cada una de las etapas se presenta el instrumento de recogida de datos y las características de los participantes. Además, para cada una de las etapas se explican los métodos utilizados para el análisis de los datos. Finalmente, se señalan los aspectos éticos seguidos en este estudio.

3.1 Diseño de la investigación

La investigación en educación puede ser abordada desde diferentes paradigmas, la elección de uno u otro depende del propósito específico de la investigación (Cohen et al., 2007). El presente estudio tiene un propósito exploratorio y comprensivo sobre el conocimiento de EPM, por ello, se sitúa en un paradigma interpretativo y sigue un enfoque de tipo cualitativo (Cohen et al., 2007). La investigación cualitativa se ocupa de la interpretación y la exploración que guía a los investigadores hacia la comprensión y explicación de distintos fenómenos y sucesos (Creswell, 2008). En este caso, el objetivo es caracterizar el conocimiento especializado sobre área de figuras planas de los EPM. El interés de este estudio no tiene un propósito evaluativo, sino que interesa comprender la estructura del conocimiento de los EPM, los elementos que lo conforman y las relaciones entre ellos.

Se lleva a cabo el presente estudio considerando dos grandes etapas. La primera etapa se corresponde con el primer objetivo específico de esta tesis. La segunda etapa se corresponde con los objetivos específicos 2, 3 y 4.

- Etapa 1: estudio de los elementos matemáticos que se ven involucrados en la resolución de tareas de área en la Educación primaria, identificación y organización de dichos elementos y sus relaciones. Esta etapa involucra alumnos de primaria y primer ciclo de la educación secundaria.
    - Etapa 1.1: identificar y caracterizar los elementos matemáticos involucrados en los procesos de medición de áreas y que se reportan en la literatura especializada.
    - Etapa 1.2: diseñar, validar e implementar dos cuestionarios sobre tareas de área que involucren el uso de procedimientos diversos y en diferentes contextos.
    - Etapa 1.3: caracterizar los elementos matemáticos que los alumnos movilizan en sus resoluciones y contrastar con la literatura especializada.
    - Etapa 1.4: identificar relaciones entre los elementos matemáticos movilizados en las resoluciones de los alumnos.
- Etapa 2: estudio del conocimiento especializado sobre el área de figuras planas de estudiantes para maestro.

- Etapa 2.1: diseñar, validar e implementar un cuestionario sobre tareas de área que involucre: (1) el uso de procedimientos diversos, en diferentes contextos, y (2) la interpretación de respuestas de alumnos de 2.º de la Educación secundaria obligatoria a una tarea de área.
- Etapa 2.2: identificar el tipo de conocimiento especializado que movilizan los EPM al resolver tareas profesionales sobre el área de figuras planas.
- Etapa 2.3: identificar relaciones en el conocimiento especializado que los EPM ponen en juego al resolver las distintas tareas profesionales.
- Etapa 2.4: identificar las dificultades de los EPM en la movilización de conocimiento especializado

3.2 Primera etapa: caracterización de los elementos matemáticos involucrados en los procesos de medición de áreas

En esta primera etapa se pretende dar respuesta al objetivo específico 1. Para esto, se consideran aquellos elementos matemáticos que se ven involucrados en los procesos de medición de áreas en un contexto de Educación primaria y hasta el primer ciclo de la Educación secundaria (13-14 años). Esto, porque el currículum de Catalunya muestra que es en el segundo curso de la Educación secundaria donde se consolidan los conocimientos relacionados con las magnitudes y su medida, las relaciones métricas y el cálculo de la medida de figuras geométricas, las transformaciones geométricas y las características y propiedades de las figuras geométricas (Currículum Educació Secundària Obligatòria, 2019). Por lo tanto, los elementos matemáticos asociados el área y sus procesos de medición se ven reforzados y ampliados en su continuación hacía el primer ciclo de Educación secundaria.

Debido que los elementos matemáticos involucrados en el segundo ciclo de la Educación primaria (11-12 años) no están descritos en la literatura especializada sobre el área de figuras planas, se realiza una primera identificación y caracterización de ellos, a fin de tener claro lo que se requiere para ejecutar con precisión los procesos de medición de áreas en esta etapa educativa. Esto se posiciona como el punto de partida del presente estudio y permite, posteriormente, dos aspectos. Primero, realizar una aproximación hacia el conocimiento esperado sobre los procesos de medición de áreas de los EPM, considerando el conocimiento involucrado en la transición primaria-secundaria

(Fernández y Figueiras, 2014). Segundo, caracterizar el conocimiento matemático especializado sobre el área de figuras planas de los EPM.

3.2.1 Participantes de la primera etapa del estudio

La muestra estuvo conformada por alumnos que cursaban 6.º de Educación primaria y 2.º de la Educación secundaria obligatoria (ESO) en el periodo escolar 2018-19. Los participantes de 6.º de Educación primaria fueron 71 alumnos con edades comprendidas entre los 11-12 años de un centro concertado de la provincia de Barcelona (España). Los participantes de 2.º de la ESO fueron 83 alumnos con edades comprendidas entre los 13-14 años de un centro concertado de la provincia de Barcelona (España). Los alumnos y sus respectivos profesores, en ambos casos, fueron informados sobre el proceso de investigación.

3.2.2 Instrumento de recogida de datos

Este estudio considera un tipo de dato, protocolos escritos de resolución de cuestionarios. Para esta primera etapa, los instrumentos de recogida de datos corresponden a 2 cuestionarios semiestructurados de respuesta abierta, que se adjuntan en la sección de Anexos. Los cuestionarios semiestructurados con respuestas abiertas resultan útiles en un estudio exploratorio (Bailey, 1994), pues permiten a los participantes responder tanto como deseen y son especialmente adecuados para investigar cuestiones complejas (Cohen et al., 2007). Los cuestionarios semiestructurados tienen una estructura, una secuencia y un enfoque claros, pero el formato es abierto, lo que permite a los participantes responder en sus propios términos (Cohen et al., 2007). En este caso, el uso de cuestionarios semiestructurados permite a los participantes dar respuesta a la demanda de las tareas en términos de la propia competencia matemática que tienen sobre los procesos de medición de áreas.

Los cuestionarios fueron respondidos por los alumnos de 6.º de primaria y 2.º de la ESO de manera individual y voluntaria, en una única sesión de 90 minutos y se les permitió el uso de instrumentos de medición y de material manipulativo (recortables como anexo a cada cuestionario). En ambos cuestionarios las tareas se organizaron en dos ítems. El primer ítem incluyó tareas de reparto equitativo, y comparación y reproducción de formas. El segundo ítem incluyó tareas de medición mediante el uso de unidades de medida estándar y no estándar. El diseño y orden de las tareas contempló las aportaciones

de Douady y Perrín-Glorian (1989), Freudenthal (1983), y Sarama y Clements (2009). Cabe señalar que los alumnos, dentro de su programa de estudios, habían recibido instrucción previa sobre la medición de áreas de figuras planas. Los cuestionarios fueron aplicados por la autora y la tutora de esta tesis, con la presencia de los profesores de matemáticas de los participantes, y con la autorización de los establecimientos educativos.

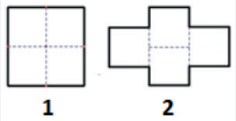
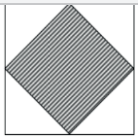
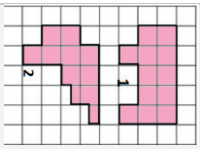
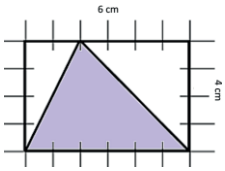
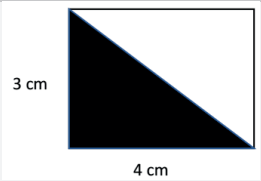
Para validar los cuestionarios aplicados a los alumnos se llevaron a cabo pruebas piloto, tanto con alumnos de 6.º de primaria, como de 2.º de la ESO. En este caso, el piloto tuvo como objetivo aumentar la fiabilidad, la validez y la viabilidad del cuestionario (Oppenheim 1992). De esta manera, se corrigieron algunos errores de formato asociado a las longitudes de las representaciones gráficas de las tareas y de los enunciados.

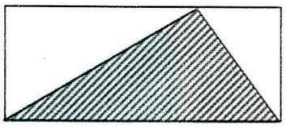
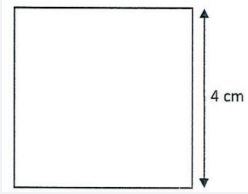
3.2.3 Cuestionario aplicado a alumnos de sexto de la Educación primaria

El cuestionario para este grupo de alumnos se diseñó tomando en consideración los contextos geométricos y numéricos de Douady y Perrín-Glorian (1989), la fenomenología de Freudenthal (1983) y los conceptos de Sarama y Clements (2009). Así, las tareas se ordenan desde aquellas que admiten un uso de procedimientos de naturaleza geométrica, que permiten establecer relaciones de inclusión y/o equivalencia entre las figuras geométricas, hacia aquellas que admiten un uso de procedimientos de naturaleza numérica, además de geométrica, y que permiten establecer relaciones entre las fórmulas del área de cuadrados y triángulos. En este sentido, las tareas 1 y 2 involucran el uso de procedimientos de comparación directa e indirecta de las figuras geométricas, y las propiedades que dan sustento a dichos procedimientos. Las tareas 3 y 4 involucran el uso de procedimientos de naturaleza geométrica y numérica, asociados al uso de unidades de medida bidimensionales para medir áreas. Por su parte, la tarea 5 involucra el uso de las fórmulas del área de triángulos y rectángulos, además de procedimientos de tipo geométrico. Por último, las tareas 6 y 7 involucran el uso de procedimientos de descomposición y reconfiguración de las figuras geométricas, en conjunto con el uso de cálculos y las propiedades que dan sustento a los procedimientos antes mencionados. En la Tabla 2 se detallan las tareas del cuestionario. Se presenta la representación gráfica que acompaña a cada una de las tareas, así como el objetivo de cada tarea.

Tabla 2. Tareas propuestas a alumnos de 6.º de primaria.

Enunciado Tarea	Representación gráfica	Objetivo

TAREA 1: El cuadrado de la izquierda se ha cortado por la línea punteada y con las piezas obtenidas se ha formado la Figura 2 de la derecha ¿Cuál de las dos figuras ocupa mayor superficie, la 1 o la 2? ¿Por qué?	 (Adaptada de Popoca y Acuña, 2011)	Evidenciar si los alumnos: -Reconocen que una superficie puede componerse y descomponerse en regiones de distinta forma y de igual área (acumulación y aditividad). -Reconocen que el área no cambia por desplazamiento y reorganización de sus partes (conservación). -Ejecutan procedimientos de comparación directa e indirecta de superficies. -Ejecutan procedimientos de rotación y traslación de las partes que componen la superficie.
TAREA 2: ¿Cómo puedes descomponer la superficie del cuadrado sombreado para comprobar que su área equivale a la mitad del área del cuadrado grande? Explícalo.	 (Adaptada de Corberán, 1996)	
TAREA 3: a) ¿Cuántas unidades cuadradas componen las superficies de la Figura 1 y de la Figura 2? b) ¿Cuál dirías que tiene una mayor área? ¿Por qué?	 (Adaptada de Corberán, 1996)	Evidenciar si los alumnos: -Reconocen el área como número de unidades cuadradas que recubren una superficie, utilizando el cuadrado como unidad de medida bidimensional. -Estructuran arreglos bidimensionales y reconocen la relación entre el área de rectángulos y triángulos. -Reconocen la relación entre la longitud de los lados de un rectángulo y la estructura de filas y columnas. -Reconocen la relación entre el área de rectángulos y triángulos y encuentran una fórmula para calcular sus áreas. -Ejecutan procedimientos de medición utilizando unidades de medida estándar y no estándar.
TAREA 4: a) ¿Cuántas unidades cuadradas cubren el rectángulo? ¿Cuántas filas y columnas hay dentro del rectángulo? b) ¿Encuentras alguna relación entre el número de filas y columnas que hay dentro del rectángulo y las medidas de sus lados? Explícalo. c) ¿Cuántas unidades cuadradas cubren el triángulo? Explícalo.	 (Elaborada por la investigadora)	
TAREA 5: El siguiente rectángulo tiene un área de 12cm2, ¿Cuál dirías que es el área del triángulo negro? ¿Por qué?	 (Adaptada de Corberán, 1996)	Evidenciar si los alumnos: -Reconocen el área como el producto de las longitudes de largo y ancho. -Reconocen la relación entre el área de rectángulos y triángulos y encuentran una fórmula para calcular sus áreas. -Ejecutan procedimientos de medición utilizando unidades de medida estándar.

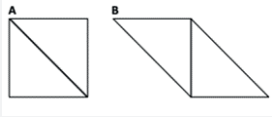
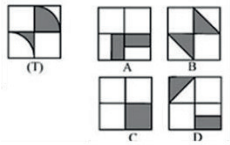
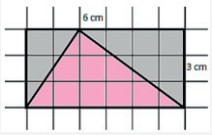
TAREA 6: Si el siguiente rectángulo tiene un área de 24 cm^2 a) ¿Cuáles podrían ser las longitudes de sus lados? ¿Cómo lo sabes? b) ¿Cuál sería el área del triángulo? ¿Por qué?	 (Adaptada de Castelnuovo, 1981)	Evidenciar si los alumnos: -Reconocen que una superficie puede componerse y descomponerse en regiones de distinta forma y de igual área (acumulación y aditividad). -Reconocen que el área no cambia por desplazamiento y reorganización de sus partes (conservación). -Reconocen el área como el producto de las longitudes de largo y ancho. -Reconocen la relación entre el área de rectángulos y triángulos y encuentran una fórmula para calcular sus áreas. -Reconocen que el triángulo es la mitad del cuadrado de igual base y altura que lo contiene, y son capaces de otorgar sentido a la fórmula. -Ejecutan procedimientos de comparación directa e indirecta de superficies . -Ejecutan procedimientos de rotación y traslación de las partes que componen la superficie.
TAREA 7: a) ¿Cuál es el área del cuadrado? Explica cómo la calculaste. b) ¿Podría un triángulo cubrir la misma superficie que el cuadrado? ¿Cómo lo sabes? c) Si tu respuesta anterior es SI, dibuja el triángulo y explica tu método.	 (Elaborada por la investigadora)	

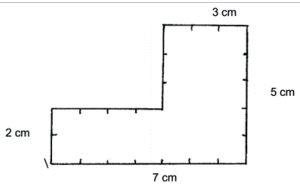
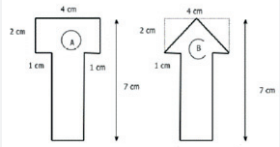
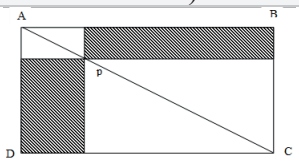
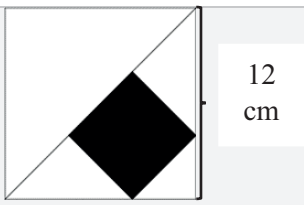
3.2.4 Cuestionario aplicado a alumnos de segundo curso de la Educación secundaria

El cuestionario para este grupo de alumnos se diseñó, al igual que en el caso anterior, tomando en consideración las aportaciones de Douady y Perrín-Glorian (1989), Freudenthal (1983) y Sarama y Clements (2009). En este sentido, las tareas se ordenan desde aquellas que admiten el uso de procedimientos geométricos, hacía aquellas que involucran el uso de cálculos, en conjunto con descomposiciones y reconfiguración de las figuras. Así, la fórmula del área se incorpora como un último paso. Las Tareas 1 y 2 involucran el uso de procedimientos de naturaleza geométrica, a fin de establecer relaciones de equivalencia y/o inclusión entre las figuras geométricas. Así mismo, involucran el uso de propiedades que dan sustento a dichos procedimientos. Las tareas 3 y 4 involucran la medición de áreas mediante el uso de unidades de medida bidimensionales, así como las características de las unidades de medida. La tarea 5 involucra el uso de fórmulas para el cálculo del área de cuadrados, triángulos y

rectángulos, a fin de establecer relaciones entre ellas. Finalmente, las tareas 6 y 7 involucran el uso conjunto de procedimientos de descomposición y reconfiguración de las figuras, las propiedades que sustentan dichos procedimientos y las fórmulas para el cálculo del área. La Tabla 3 muestra las tareas que forman parte del cuestionario. Se presenta la representación gráfica que acompaña a cada tarea y los objetivos de cada tarea.

Tabla 3. Tareas propuestas a alumnos de 2.º de la ESO.

Enunciado Tarea	Representación gráfica	Objetivo
TAREA 1: Imagina que tienes que pintar dos superficies como A y B ¿para qué superficie necesitarías más pintura? ¿por qué?	 (Adaptada de Popoca y Acuña, 2011)	Evidenciar si los alumnos: -Reconocen que una superficie puede componerse y descomponerse en regiones de distinta forma y de igual área (acumulación y aditividad). -Reconocen que el área no cambia por desplazamiento y reorganización de sus partes (conservación). -Ejecutan procedimientos de comparación directa e indirecta de superficies. - Ejecutan procedimientos de rotación y traslación de las partes que componen la superficie.
TAREA 2: Tomando como referencia la figura (T) ¿Cuál de las siguientes posee la misma área? ¿por qué?	 (Adaptada de Kospentaris et al., 2011)	
TAREA 3: a) ¿Cuántas unidades cuadradas cubren el rectángulo? Explícalo b) ¿Cuántas unidades cuadradas cubren el triángulo del centro? Explícalo c) ¿Encuentras alguna relación entre el número de unidades cuadradas que cubren el rectángulo y el triángulo? Explícalo d) ¿Cuántas filas y cuántas columnas hay dentro del rectángulo? ¿Encuentras alguna relación entre el número de filas y columnas y las medidas del rectángulo? e) ¿Podrías encontrar el área sin contar las unidades cuadradas? ¿Cómo lo harías?	 (Elaborada por la investigadora)	Evidenciar si los alumnos: -Reconocen el área como número de unidades cuadradas que recubren una superficie. -Reconocen la relación entre la longitud de los lados de un rectángulo y la estructura de filas y columnas. -Reconocen la relación entre el área de rectángulos y triángulos y encuentran una fórmula para calcular sus áreas. - Ejecutan procedimientos de comparación directa e indirecta de superficies. - Ejecutan procedimientos de rotación y traslación de las partes que componen la superficie.

TAREA 4: a) ¿Cuántas unidades cuadradas recubren la siguiente Figura? b) ¿Cómo calcularías el área sin contar las unidades cuadradas? Explícalo	 (Adaptada de Kamii y Kysh, 2006)	
TAREA 5: Calcula el área de las figuras A y B. Explica cómo lo hiciste.	 (Adaptada de Corberán, 1996)	Evidenciar si los alumnos: -Reconocen el área como el producto de las longitudes de largo y ancho. -Reconocen la relación entre el área de rectángulos y triángulos y encuentran una fórmula para calcular sus áreas. -Establecen relaciones entre la longitud de la base y altura de triángulos y rectángulos, para encontrar áreas. -Reconocen que una superficie puede componerse y descomponerse en regiones de distinta forma y de igual área (acumulación y aditividad – conservación) -Ejecutan procedimientos de comparación directa e indirecta de superficies. - Ejecutan procedimientos de rotación y traslación de las partes que componen la superficie.
TAREA 7: Por el punto p de la diagonal AC del rectángulo ABCD se trazan las paralelas a los costados de esta figura. Así, se obtienen dos rectángulos sombreados. ¿cuál de los dos rectángulos sombreados tiene mayor área? ¿cómo los sabes?	 (Adaptada de Castelnuovo, 1981)	
TAREA 8: a) ¿Cuál es el área del cuadrado de lado 12cm^2? b) ¿De qué manera puedes calcular el área del cuadrado negro? Explica cómo lo hiciste	 (Elaborada por los directores de esta tesis)	Evidenciar si los alumnos: -Reconocen el área como el producto de las longitudes de largo y ancho. -Reconocen la relación entre el área de cuadrados y triángulos rectángulos, y encuentran una fórmula para calcular sus áreas. -Reconocen que una superficie puede componerse y descomponerse en regiones de distinta forma y de igual área (acumulación y aditividad – conservación) -Ejecutan procedimientos de comparación directa e indirecta de superficies. - Ejecutan procedimientos de rotación y traslación de las

		partes que componen la superficie.

3.2.5 Análisis para la caracterización de los elementos matemáticos

Inicialmente se utiliza una aproximación top-down, de la teoría a los datos (Niss, 2006), que permite realizar una caracterización teórica y muy general de los elementos matemáticos involucrados en la comprensión del concepto de área y sus procesos de medición. Se utiliza la herramienta de la configuración epistémica para realizar dicha caracterización y para identificar diferentes significados parciales del área.

Se revisan y sistematizan distintas aproximaciones sobre el concepto de área en la literatura especializada (p.e., D'Amore y Fandiño, 2007; Douady y Perrin-Glorian,1989; Freudenthal, 1983; Kamii y Kysh, 2006; Kospentaris et al., 2011; Outhred y Mitchelmore 2000; Sarama y Clements, 2009; Zacharos, 2006) que incluyen los conceptos, las propiedades, las proposiciones, los procedimientos, y las representaciones que admite el concepto de área y su medición. Así, se identifican cuatro significados parciales del área -en adelante Sp-, que se utilizan para caracterizar el proceso de resolución seguido por los alumnos de primaria y primer ciclo de secundaria en tareas que involucran el área de figuras planas (Caviedes et al., 2020, 2022).

Posteriormente, se utiliza una aproximación bottom-up, de los datos a la teoría (Niss, 2006), donde se complementa y reinterpreta la caracterización de los Sp a la luz del análisis de respuestas de alumnos. En este proceso se complementa la primera caracterización teórica de los Sp (Caviedes et al., 2020).

Para definir los elementos matemáticos del área y sus procesos de medición se utiliza el EOS como marco organizador de tales elementos. Por ello, lo que interesa caracterizar son los objetos matemáticos asociados al área y los sistemas de prácticas de los que emergen. Concretamente, se utiliza la configuración de objetos primarios para analizar los significados parciales del área que movilizan los alumnos en sus resoluciones (Figura 7). Así, los cuatro significados parciales (Sp), producto de la revisión bibliográfica, se reestructuran en tres significados parciales del área (SP) a la luz del análisis de respuestas de alumnos de primaria y primer ciclo de secundaria.

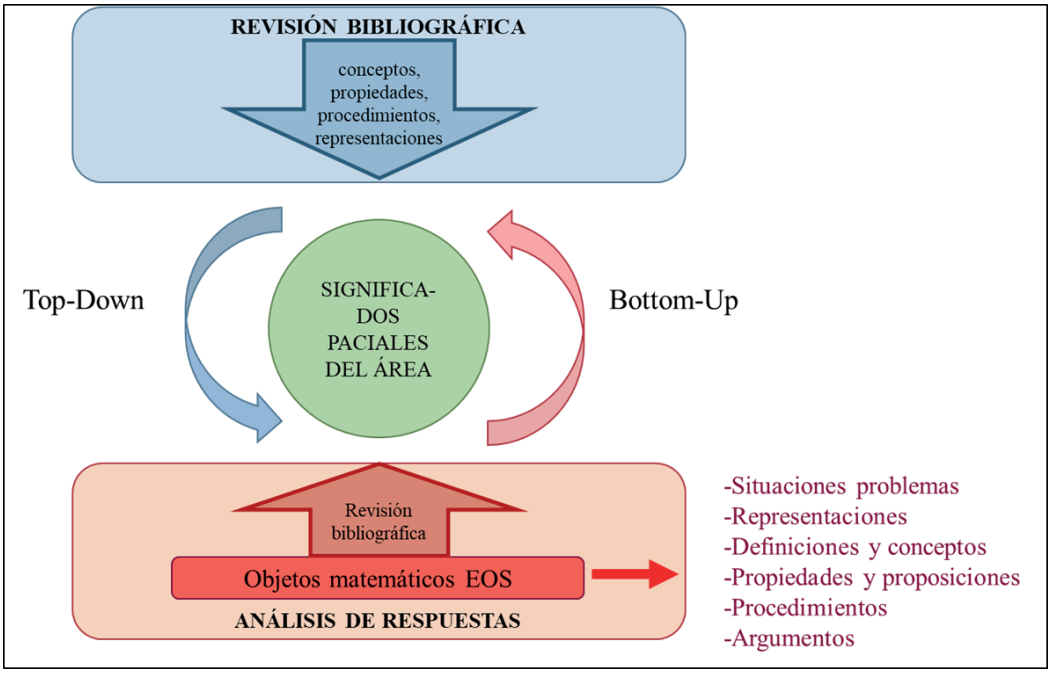


Figura 7. Proceso seguido para la diferenciación y reinterpretación de los SP. (Caviedes et al., 2021, p.7)

a) Primera caracterización de los significados parciales del área (top-down)

Se inicia la caracterización teórica de los Sp identificando los contextos de uso en los que está presente el área. Para esto, se toma en consideración la diferenciación de Freudenthal (1983) que contempla el reparto equitativo, la comparación y reproducción de formas, y la medición. Además, se considera la naturaleza y diversidad de los procedimientos geométricos, numéricos y/o algebraicos que se pueden utilizar en la resolución de una determinada tarea de área y las propiedades que de éstos emergen (Douady y Perrin Glorian,1989; Kospentaris et al., 2011; Sarama y Clements, 2009).

Los procedimientos de naturaleza geométrica son ubicados dentro de los contextos de reparto equitativo y de comparación y reproducción de formas. Así, se identifican dos significados parciales del área relacionados con los procedimientos de naturaleza geométrica, *Sp1: área como porción de espacio cerrado* y *Sp2: área como magnitud/atributo*. Estos dos significados parciales se diferencian a partir de la noción de área como superficie y área como magnitud autónoma (Douady y Perrín-Glorían, 1989). En el primer caso se entiende el área únicamente como porción de espacio ocupado por una superficie, sin lugar a razonamientos de tipo numérico. En el segundo caso, se entiende el área de manera independiente y disociada de la forma de la superficie y del número que la mide.

Los procedimientos de naturaleza numérica y algebraica se ubican dentro de un contexto de medición y, dentro de dicho contexto se identifican procedimientos relacionados con el uso de fórmulas, y procedimientos que contemplan el trabajo con unidades y/o subunidades de medida (p.e., Kamii y Kysh, 2006; Outhred y Mitchelmore 2000, Sarama y Clements, 2009). Esta distinción permite definir otros dos significados parciales, *Sp3: área cono número de unidades bidimensionales que recubren una superficie*, y *Sp4: área como producto de dos dimensiones lineales*. Los Sp mencionados van desde un enfoque geométrico (Sp1-Sp2) a un enfoque numérico (Sp3) y algebraico (Sp4).

Cada uno de los cuatro Sp contempla una clasificación específica de representaciones, que se hacen explícitas mediante los procedimientos utilizados por los alumnos. La diversidad de procedimientos y representaciones que pueden ser utilizados posibilita transformaciones de tratamiento y conversión (Duval, 2006) y, permite identificar la manera en que los Sp se conectan en la resolución de una determinada tarea de área, dando cuenta de la esencia relacional que subyace al significado global del área. Además, cada Sp contempla las propiedades de conservación, transitividad y acumulación y aditividad, las que, en conjunto con los procedimientos y representaciones, permiten identificar conceptos claves presentes en cada Sp, como los definidos por Sarama y Clements (2009). Esta primera caracterización se presenta en Caviedes et al. (2020).

b) Reinterpretación de los significados parciales del área (bottom-up)

La diferenciación de los cuatro Sp mencionados anteriormente permite realizar un análisis pormenorizado de las resoluciones de alumnos, diferenciando tipologías de resolución con base en las relaciones que se establecen entre los Sp y sus respectivos objetos (Caviedes et al., 2020; Caviedes, 2022). Sin embargo, dicho análisis no contempla que las representaciones, además de tener el valor mismo de la representación dentro de la configuración de objetos primarios, poseen un valor instrumental (Font et al., 2007), pues permiten realizar determinadas prácticas que con otras representaciones no serían posible.

A partir de lo anterior, la especificidad de los procedimientos utilizados por los alumnos, para ciertas representaciones, revela la necesidad de identificar los objetos que son exclusivos de cada Sp y los que son comunes a todos o a más de un Sp. Así, se observa que los Sp1 y Sp2 comparten objetos comunes que se solapan en las resoluciones de alumnos, por lo que es posible unificarlos en un solo Sp. La reinterpretación que se realiza de los significados parciales no se limita a agrupar Sp1 y Sp2 en una misma categoría,

sino que también se utiliza el análisis de las resoluciones de los alumnos para caracterizar los sistemas de prácticas que definen los significados parciales, detallando la configuración de objetos primarios para cada significado parcial. Esto permite identificar que los Sp1 y Sp2 se ubican dentro de un contexto geométrico y admiten representaciones y procedimientos de tipo geométrico. Además, ambos Sp incluyen las propiedades que dan sustento a los procedimientos de tipo geométrico (p.e., conservación). La principal diferencia entre Sp1 y Sp2 radica en que el primero excluye el razonamiento numérico y el segundo no lo excluye. De esta manera se redefine un SP1.

Este nuevo SP1 conserva la noción de área como magnitud autónoma que permite disociar el área de la forma de la superficie y del número que la mide, sin excluir el razonamiento numérico (Douady y Perrín-Glorian, 1989), pues este está siempre presente en las resoluciones de los alumnos, ya sea de manera formal o informal. Así, se reinterpreta y diferencian tres SP: (*1) área como espacio delimitado por una línea cerrada – inicio de la percepción del atributo; (2) área como cantidad de unidades bidimensionales que recubren una superficie; y, (3) área como producto de dos dimensiones lineales*.

Con base en lo anterior, cada uno de los SP se constituye como un sistema de prácticas definido por una determinada configuración de objetos primarios. Los conceptos, definiciones, procedimientos, representaciones, proposiciones y argumentos son únicos de cada configuración, sin embargo, las propiedades son un elemento común a todos los SP, pues la conservación del área, la transitividad y la acumulación y aditividad, son independientes de los contextos de uso que pueda tener el área.

La definición de los SP como sistemas de prácticas permite realizar una aproximación al proceso de resolución seguido por los alumnos. Así, se identifican las acciones que forman parte del sistema de prácticas implementado en la resolución de una tarea, las representaciones que se utilizan y la forma en que estas representaciones se relacionan con otros objetos. Se realiza el análisis de las representaciones desde dos niveles. Por un lado, se diferencian tipos de representaciones semióticas utilizadas por los alumnos y, por otro, se identifican las transformaciones dentro y entre dichas representaciones. Posteriormente, se identifican las prácticas operativas y discursivas utilizadas por los alumnos. A partir de dichas prácticas, se identifican los procedimientos que se hacen explícitos por medio de representaciones y las propiedades explícitas o implícitas que validan dichos procedimientos. Las propiedades y procedimientos permiten inferir qué

definiciones, conceptos y argumentos se ven involucrados en las prácticas de los alumnos. En su conjunto, las prácticas utilizadas permiten identificar la manera en que los objetos primarios intervienen en un proceso de resolución.

El proceso de análisis seguido para esta primera etapa permite identificar y caracterizar aquellos elementos matemáticos que se ven involucrados en los procesos de medición de áreas hasta un nivel de 2.º de la ESO, y que no se reportan en la literatura especializada sobre el área de figuras planas. Esto se puede ver en detalle en Caviedes et al. (2021a). La Figura 8 resume el proceso seguido en la etapa 1.

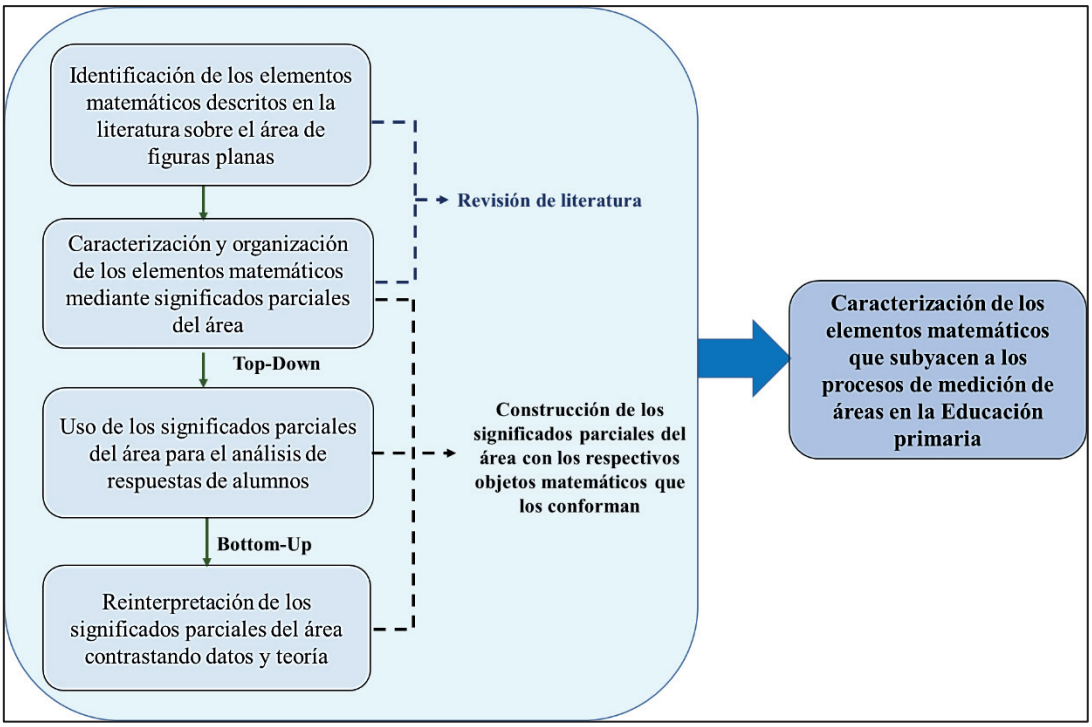


Figura 8. Proceso seguido para la etapa 1 de la investigación. [Elaboración propia]

3.3 Segunda etapa: caracterización del conocimiento especializado sobre el área de figuras planas de los EPM

Esta segunda etapa pretende dar respuesta a los objetivos específicos 2, 3 y 4. Dado que las investigaciones realizadas con EPM, en su mayoría, están centradas en las dificultades de los mismos, este estudio pretende caracterizar aquel tipo de conocimiento que permite a los EPM superar dichas dificultas y movilizar conocimiento especializado en la resolución de tareas profesionales sobre el área de figuras planas.

Para dar respuesta al objetivo específico 2, caracterizar el conocimiento matemático especializado que movilizan los EPM en la resolución de tareas de área, se toma como referencia la caracterización de los elementos matemáticos que se construye para dar respuesta al objetivo específico 1. Dicha caracterización se presenta como la base de conocimiento matemático que los EPM deben tener para enseñar el área y sus procesos de medición en la Educación primaria. Para dar respuesta al objetivo específico 3, identificar las relaciones entre los distintos componentes del conocimiento matemático especializado que movilizan los EPM en la resolución de tareas profesionales de área, se identifica la manera en que los elementos matemáticos se movilizan en un proceso de resolución. Finalmente, para dar respuesta al objetivo específico 4, caracterizar el conocimiento especializado que movilizan los EPM al interpretar respuestas de alumnos de primer ciclo de Educación secundaria, se construyen nuevos indicadores de conocimiento. Esto se aborda en detalle en el apartado de análisis.

3.3.1 Participantes de la segunda etapa del estudio

La muestra corresponde a un grupo de estudiantes para maestro de la Universidad Autónoma de Barcelona (UAB) del curso académico 2020-21. El grupo de EPM estaba conformado por 147 estudiantes, repartidos en dos cursos, que cursaban la asignatura de Gestión e innovación en el aula de matemáticas del tercer curso del grado de Educación primaria en la UAB. Durante su formación, los EPM habían tenido instrucción sobre los procesos de medición de área y los elementos involucrados en tales procesos. Esto se resume en la Tabla 4.

Tabla 4. Asignaturas cursadas por los EPM en los tres primeros años de formación en la UAB. [Elaboración propia]

Año	Contenidos
1	**Geometría para conocer el espacio:** - Construcciones geométricas elementales: representación plana del espacio. - Medida para conocer el entorno: concepto de magnitud
2	**Organización del currículo: espacio y forma** - Conocimiento de formas planas: líneas, polígonos y puzles. Clasificaciones de los elementos básicos de la geometría. - Relación 2D-3D: Orientación en el plano y el espacio. Laberintos, caminos y coordenadas. - Utilización de materiales diversos para la enseñanza de la geometría.
3	**Análisis matemático y didáctico de los contenidos matemáticos curriculares de primaria** - Geometría: transformaciones geométricas. Simetría. Semejanza. - Medida: magnitudes y unidades de medida, procedimientos de medida.

3.3.2 Instrumento de recogida de datos

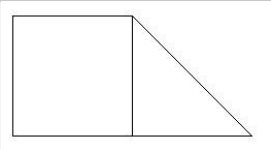
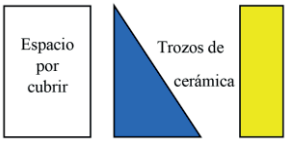
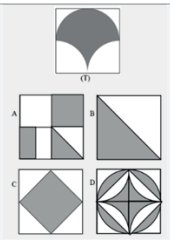
Tal como se indicó en la etapa 1, este estudio considera un tipo de datos, protocolos escritos de resolución a cuestionarios. Se utiliza un cuestionario semiestructurado de respuesta abierta por su utilidad para investigar cuestiones complejas (Cohen et al., 2007). Igualmente, se destaca la utilidad de este tipo de cuestionarios al permitir a los participantes, en este caso EPM, responder en sus propios términos (Cohen et al., 2007), es decir, en función de su propio conocimiento.

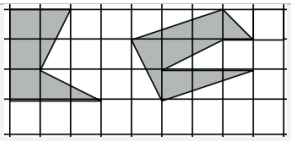
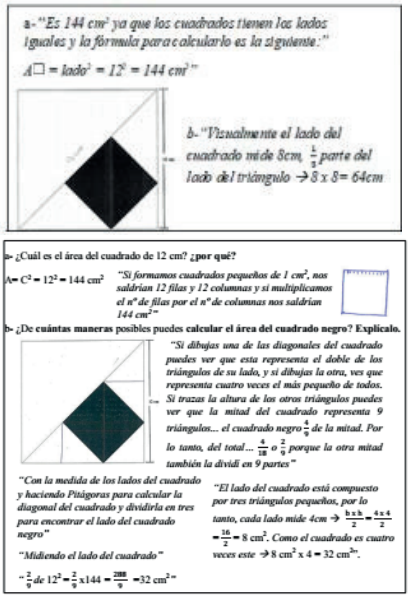
El cuestionario constó de un total de ocho tareas y en su diseñó se consideran los elementos matemáticos caracterizados previamente y las categorías de conocimiento del modelo MTSK. Igualmente, el diseño de tareas contempla las aportaciones de Douady y Perrín-Glorian (1989), Freudenthal (1983) y Sarama y Clements (2009). De esta manera, las tareas se estructuran de la siguiente manera: tres tareas que responden a contextos de reparto equitativo o comparación y reproducción de formas, y donde el uso de fórmulas estaba prohibido (Tareas 1, 2 y 3); 2 tareas de medición que involucran el uso conjunto de procedimientos de naturaleza geométrica y numérica (Tareas 4 y 5); una tarea de clasificación de enunciados y otra de definición del concepto de área (tareas 6 y 7); finalmente, una tarea de interpretación de respuestas de alumnos (Tarea 8). En las primeras tres tareas se prohibió el uso de instrumentos de medición. El cuestionario fue aplicado por las formadoras a cargo de la asignatura, en formato online debido a la COVID-19 y los EPM tuvieron una semana para responderlo y enviarlo en formato word

o pdf. Los EPM, durante su formación, habían tenido instrucción sobre procesos de medición de áreas (Tabla 4).

La validación del cuestionario contempló expertos en el área, es decir, doctores en Didáctica de la Matemática y profesores de matemática en activo. Esto, con el fin de comprobar la claridad del cuestionario, obtener retroalimentación sobre la validez del mismo y los propósitos de la investigación, y eliminar ambigüedades (Cohen et al., 2007). De esta manera, el proceso de validación permitió realizar mejoras en los enunciados de las tareas y en el formato global del cuestionario. En la Tabla 5 se presentan las tareas utilizadas para caracterizar el conocimiento especializado de los EPM. Se presenta la representación gráfica que acompaña a cada tarea y los objetivos de cada tarea.

Tabla 5. Tareas propuestas a los EPM de tercer curso del grado de Educación primaria. (Tareas 6 y 7 en anexos)

Enunciado Tarea	Representación gráfica	Objetivo
TAREA 1: Un padre quiere repartir en partes iguales un terreno, con la forma que muestra la figura, entre sus seis hijos. a) ¿Es posible hacerlo? b) ¿Cómo lo repartirías tú en partes iguales para los seis hijos? *Justifica tus respuestas*	 (Elaborada por la investigadora y directores)	Evidenciar si los EPM movilizan conocimiento asociado a: KoT: procedimientos de comparación directa e indirecta; movimientos de rotación y traslación; medición mediante unidades de medida no estándar; propiedades de conservación, transitividad y acumlación y aditividad; uso de diferentes representaciones. KSM: fracciones como parte-todo, operaciones con fracciones.
TAREA 2: Camila está haciendo un mosaico de cerámica con distintos colores. Para terminar su mosaico le falta cubrir un espacio rectangular, pero no tienen ningún trozo de cerámica con esa forma. Sólo le queda un trozo con forma rectangular, y otro con forma triangular. ¿Qué puede hacer Camila para cubrir el espacio que falta en su mosaico? *Justifica tu respuesta.*	 (Adaptada de Puig y Guillén, 1983)	
TAREA 3: Tomando como referencia la superficie sombreada de la Figura (T): ¿Cuál o cuáles de las siguientes figuras tienen una superficie sombreada equivalente a la Figura (T)?		

¿Por qué? *Justifica tu respuesta.*	(Elaborada por la investigadora y directores)	
TAREA 4: Observa los triángulos construidos en el geoplano. ¿Cuál es el área de cada triángulo? ¿Cuál tiene mayor área? *Justifica tus respuestas utilizando dos o tres procedimientos diferentes.*	(Elaborada por la investigadora y directores)	KoT: procedimientos de comparación directa e indirecta; movimientos de rotación y traslación; medición mediante unidades de medida estándar y no estándar; propiedades de conservación, transitividad y acumlación y aditividad; uso de direfentes representaciones; relación entre las fórmulas del área de cuadrados y triángulos rectángulos. KSM: fracciones como parte-todo; teorema de Ptágoras; Teorema de Pick.
TAREA 5: Observa las dos figuras dibujadas en la cuadrícula. ¿Cuál tiene mayor área? ¿por qué? *Justifica tus respuestas utilizando dos o tres procedimientos diferentes.*	 (Adaptada de Aguilera y Flores, 1998)	
TAREA 8: Tània y Laia cursan 2º de la Educación Secundaria. En clase de matemáticas, la profesora pide calcular el área de dos cuadrados utilizando más de un procedimiento. Tània tiene dificultades para calcular el área de uno de los cuadrados. Laia ha podido resolver toda la tarea usando diferentes procedimientos. ¿Qué conocimientos crees que necesita Tània para poder resolver la tarea? ¿Cómo podría la profesora ayudarla? *Justifica tu respuesta*	 (Elaborada por la investigadora y directores a partir de datos recogidos con alumnos de 2.º de la ESO)	KFLM: conocimientos previos y errores de los alumnos en la resolución de tareas de área. KMT: estrategias de enseñanza para orientar la resolución de tareas de área.

3.3.3 Análisis del proceso de resolución seguido por los EPM

Se sigue un enfoque cualitativo (Cohen et al., 2007) y se realiza un análisis de contenido (Krippendorff, 2004), para identificar las categorías de conocimiento especializado que ponen en juego los EPM cuando se enfrentan a tareas profesionales que involucran el área

de figuras planas. El análisis de contenido puede definirse como una "*técnica de investigación para realizar inferencias válidas y reproducibles a partir de textos (u otros materiales significativos) a los contextos de su uso"* (Krippendorff, 2004, p.18). En el caso del presente estudio, el proceso implica que una cantidad de palabras -de las resoluciones y justificaciones escritas de los EPM- se clasifican en una cantidad inferior de categorías (Weber, 1990). Así, se reduce el material a analizar. Las categorías utilizadas se derivan de construcciones teóricas (Cohen al., 2007), pues corresponden a aquellas definidas por el modelo MTSK.

El análisis de contenido implica una codificación – o categorización- que es donde se crean las categorías significativas en las que se pueden colocar las unidades de análisis (p.e., palabras, frases, oraciones); una comparación, que es donde se generan vínculos entre las categorías generadas en el paso anterior; y una conclusión, es decir, extraer conclusiones teóricas del texto. La codificación esta referida al proceso mediante el cual se asigna una etiqueta (abreviación) a un dato determinado, que se decide de antemano o en respuesta a los datos que se han recogido (Cohen et al., 2007). En este sentido, se realiza la codificación de las respuestas de los EPM con etiquetas elaboradas de antemano y que están basadas en la caracterización previa de los elementos matemáticos (objetivo específico 1). Igualmente, se realiza esta codificación en respuesta a los datos.

La codificación de los datos permite detectar aquellos códigos que se producen con mayor frecuencia y patrones, es decir, detectar qué códigos aparecen juntos. Los códigos tienen diferentes niveles de especificidad (Cohen et al., 2007), pues en las resoluciones de los EPM se distinguen distintos códigos -o indicadores de conocimiento- para cada categoría propuesta por el modelo MTSK.

Para realizar el proceso de codificación de las respuestas de los EPM se utiliza el software MAXQDA plus (ver Figura 9). Los códigos o indicadores de conocimiento que constituyen el subdominio del KoT se identifican a priori y surgen de las *configuraciones epistémicas* elaboradas a partir del análisis de las respuestas de los alumnos en la etapa 1 (Caviedes et al., 2021a). Los objetos matemáticos de dichas configuraciones se adaptan a las categorías del KoT (Figura 10) y permiten realizar una *codificación deductiva* de las respuestas de los EPM.

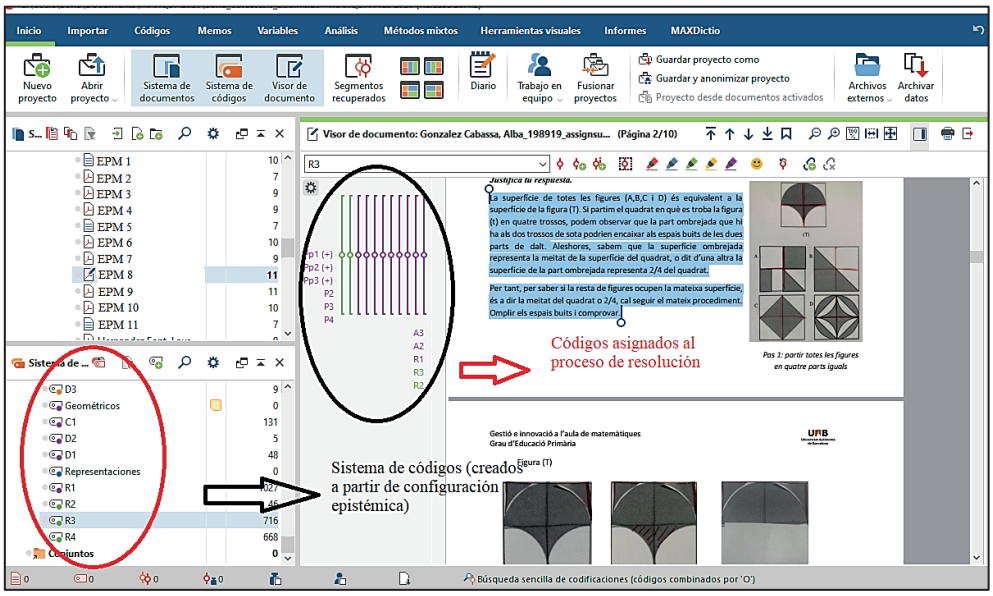


Figura 9. Ejemplo de análisis de la Tarea 3 (cuestionario EPM) con el uso de software MAXQDA plus.

A fin de abordar las especificidades del conocimiento matemático que movilizan los EPM en sus resoluciones, se profundiza en el análisis de las representaciones. Así, se realiza el análisis de las representaciones desde dos niveles. Por un lado, se diferencian tipos de representaciones semióticas utilizadas por los EPM y, por otro, se identifican las transformaciones dentro y entre dichas representaciones. Para esto, se consideran las aportaciones de Duval (1995, 2006). Además, se utiliza la clasificación de descomposición estrictamente homogénea, homogénea y heterogénea (Duval, 2017) para diferenciar los procedimientos de descomposición de superficies utilizados por los EPM.

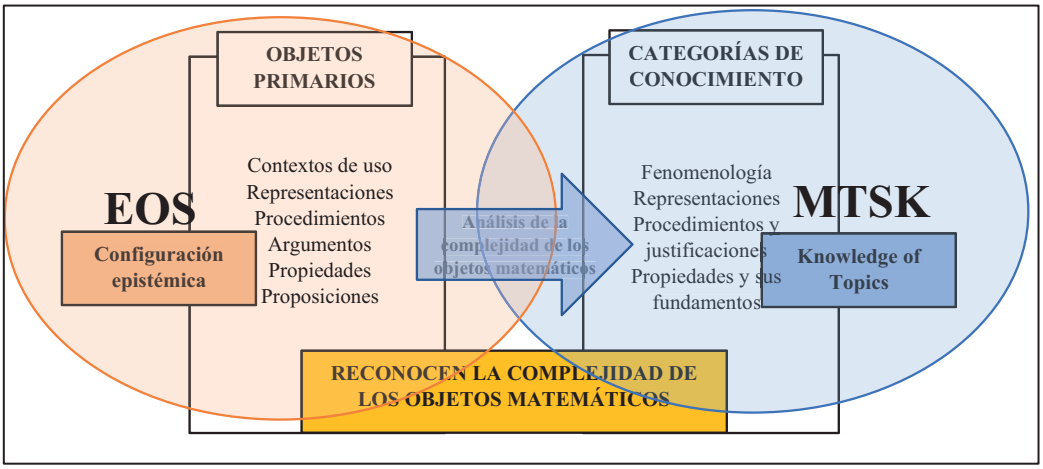


Figura 10. Adaptación de códigos previamente elaborados a las categorías de conocimiento del modelo MTSK. [Elaboración propia]

Los indicadores correspondientes al resto de los subdominios analizados emergen del propio análisis de las respuestas de los EPM mediante una *codificación inductiva*. Esto, porque las configuraciones epistémicas elaboradas no presentaban elementos que pudiesen adaptarse a otros subdominios y categorías de conocimiento. Tanto la configuración epistémica como el KoT, como herramientas analíticas, permiten realizar un análisis de las prácticas matemáticas que se llevan a cabo al resolver una determinada tarea y que dan lugar a la emergencia de determinados objetos matemáticos. Por lo tanto, resulta oportuno adaptar los elementos matemáticos caracterizados en cada configuración epistémica, a las categorías del KoT. Esto, a fin de enriquecer la caracterización del conocimiento matemático movilizado por los EPM. Igualmente, tal y como se indica en apartados previos, los elementos matemáticos caracterizados para el objetivo específico 1, dan cuenta del conocimiento matemático que deben tener los EPM en su futuro rol como profesores de matemática en Educación primaria.

Posteriormente, se realizan índices de frecuencias de los códigos movilizados por los EPM. Esto, con el fin de identificar aquellos componentes de conocimiento especializado que los EPM movilizan para dar respuesta a cada una de las tareas profesionales. La construcción de índices de frecuencias se ve facilitada por el uso del software MAXQDA plus, pues una vez codificadas las respuestas de los EPM el mismo software da la posibilidad de exportar los datos a un documento Excel (Figura 11) con valores binarios. A cada código movilizado por los EPM se le asigna el valor 1 de manera automática. Por el contrario, a cada código que no es movilizado por los EPM se le asigna el valor 0. Igualmente, la construcción de índices de frecuencias es útil para identificar la movilización conjunta de códigos y categorías, es decir, permite identificar relaciones entre las categorías e indicadores de conocimiento movilizados por los EPM. A su vez, la frecuencia de códigos permite identificar aquellas categorías e indicadores de conocimiento que los EPM movilizan con más facilidad o dificultad en sus resoluciones.

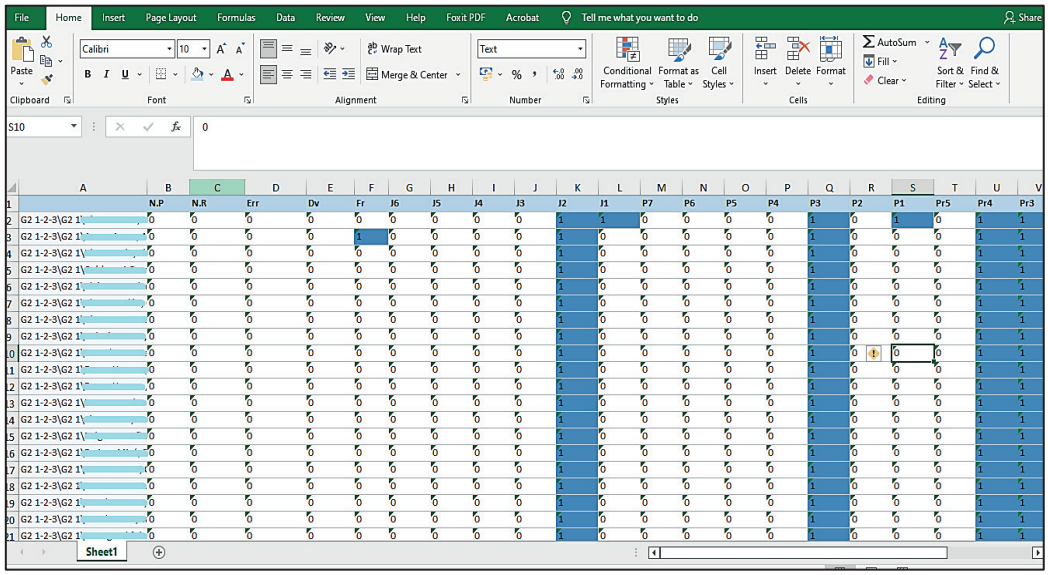


Figura 11. Ejemplo de frecuencias de códigos movilizados en las respuestas de los EPM.

Inicialmente, se construye un índice de frecuencia para cada tarea, es decir, se identifican todas las categorías e indicadores de conocimiento movilizados en la Tarea 1. Luego se realiza el mismo proceso para la tarea 2, 3...y 8. Posteriormente, y a fin de buscar relaciones entre el conocimiento movilizado en más de una tarea, se seleccionan aquellas tareas que admiten el uso de procedimientos geométricos (tareas 1, 2 y 3) y el uso de procedimientos geométricos y numéricos/algebraicos de manera conjunta (tareas 4 y 5). Así, se crean los índices de frecuencia de manera conjunta y se buscan relaciones entre las categorías e indicadores de conocimiento movilizados por los EPM.

Por todo lo anterior, el proceso de codificación, y posterior construcción de frecuencias, permite dar respuesta a los objetivos específicos 2, 3 y 4 de este estudio. La codificación deductiva, con base en los elementos matemáticos construidos a priori, fue un aspecto clave para identificar y caracterizar los indicadores de conocimiento matemático especializado que movilizan los EPM en sus resoluciones. En este sentido, dicho proceso permite dar respuesta al objetivo específico 2 de este estudio, caracterizar el conocimiento matemático especializado que movilizan los EPM en la resolución de tareas profesionales de área. Igualmente, tal y como se menciona más arriba, la identificación de frecuencias conjuntas (en más de una tarea) permite dar respuesta al objetivo específico 3 de este estudio, identificar las relaciones entre los distintos componentes del conocimiento matemático especializado que movilizan los EPM en la resolución de tareas profesionales de área. Por último, la codificación inductiva y las categorías de conocimiento propuestas

por el modelo MTSK, para el subdominio de conocimiento didáctico-matemático, permiten dar respuesta al objetivo específico 4 de este estudio, caracterizar el conocimiento especializado que movilizan los EPM al interpretar respuestas de alumnos de primer ciclo de Educación secundaria. De esta manera, es posible construir indicadores de conocimiento asociados a estrategias de enseñanza de los EPM e, indicadores de conocimiento asociados a errores, dificultades, y fortalezas que los EPM identifican en los alumnos resolutores. La figura 12 resume el proceso seguido para la etapa 2.

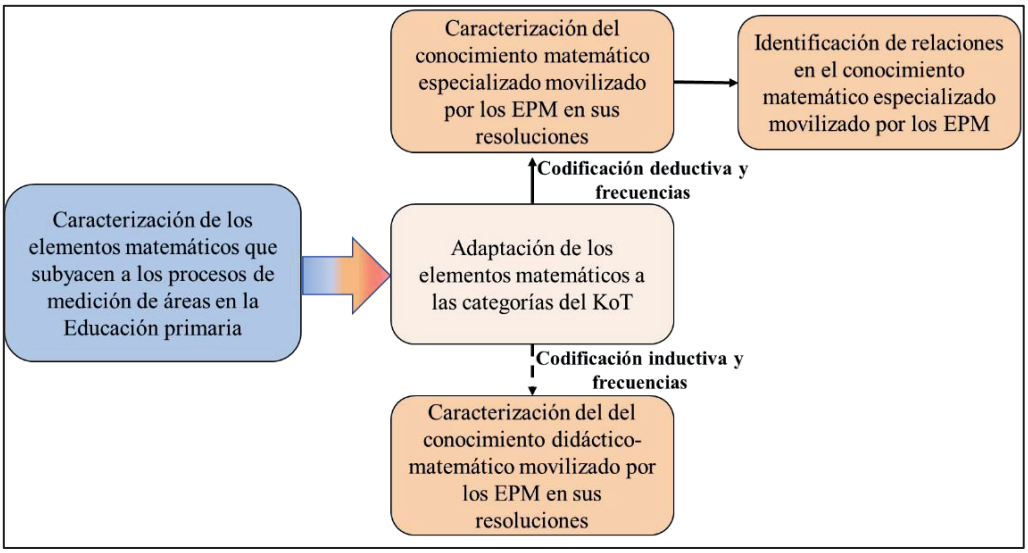


Figura 12. Proceso seguido para la etapa 2 de la investigación.

3.4 Cuestiones éticas de la investigación

Durante el curso del proceso investigativo se mantuvo el anonimato y confidencialidad tanto de los participantes involucrados, como de los datos obtenidos. Igualmente, las recogidas de datos contaron con la autorización de las instituciones involucradas y a los participantes se les dio a conocer el objetivo del estudio que se estaba llevando a cabo.

SECCIÓN 4.
PUBLICACIONES

4. Publicaciones

En la presente sección y apartados se presentan las publicaciones que conforman el compendio de artículos de este estudio. Las publicaciones se presentan organizadas atendiendo al orden establecido por los cuatro objetivos específicos que estructuran el estudio.

1. Caviedes, S. (2022). Resolución de tareas que involucran el área de figuras planas por estudiantes de sexto de primaria. *NÚMEROS*, *Revista de Didáctica de la Matemática*. (110), 25-39.
2. Caviedes, S., De Gamboa, G., y Badillo, E. (2021a). Mathematical objects that configure the partial area meanings in task-solving. International Journal in Mathematics Education, Science and Technology, 1-20. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1991019
3. Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2022b). Conocimiento movilizado por estudiantes para maestro al comparar áreas de figuras 2D. *Uniciencia, 1*(36), 1-20. https://doi.org/10.15359/ru.36-1.41
4. Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (en prensa). Conocimiento especializado sobre el área de figuras planas en estudiantes para maestro. *AIEM.*

Igualmente, se presentan comunicaciones que han sido publicadas en actas de congresos con proceso de revisión por pares.

1. Caviedes, S., De Gamboa, G., y Badillo, E. (2021b, septiembre). Procedimientos utilizados por estudiantes que resuelven de manera exitosa tareas que involucran el área de figuras planas. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 205 – 212). Valencia: SEIEM.
2. Caviedes, S., De Gamboa, G., y Badillo, E. (2021c, septiembre). Aproximación al conocimiento especializado sobre área en estudiantes para maestro. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 213 - 220). SEIEM.
3. Caviedes, S., De Gamboa, G., y Badillo, E (2022a, febrero). Preservice teachers' knowledge on area measurement. *Proceedings of the Twelfth Congress of the*

European Society for Research in Mathematics Education. Bozen: ERME. ffhal-03748717

En la Tabla 6 se presenta la relación entre los artículos, y comunicaciones publicadas en actas, con los objetivos específicos del presente estudio. Los cuatro artículos que conforman el compendio se marcan en color gris. El artículo que ha sido aceptado para publicación cuenta con su respectiva carta de aceptación de la revista.

Tabla 6. Relación entre los artículos y objetivos del estudio.

Objetivos específicos	Publicaciones que dan cuenta del cumplimiento del objetivo	Tipo de publicación	Estado de la publicación	Lugar de la publicación
1	Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2021a). Mathematical objects that configure the partial meanings of area mobilized in task solving.	Artículo	Publicada	International journal of mathematical education in science and technology
	Caviedes, S. (2022). Resolución de tareas que involucran el área de figuras planas por estudiantes de 6.º de primaria.	Artículo	Publicada	Números. Revista de didáctica de las matemáticas
	Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2021b). Procedimientos utilizados por estudiantes que resuelven de manera exitosa tareas que involucran el área de figuras planas.	Comunicación oral	Publicada en actas	Actas XXIV SEIEM
2 - 3	Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2022b). Conocimiento movilizado por estudiantes para maestro al comparar áreas de figuras 2D.	Artículo	Publicada	Uniciencia
	Caviedes, S., De Gamboa, G., y Badillo, E. (2022a). Preservice teachers' knowledge on area measurement.	Comunicación oral	Publicada en actas	Actas CERME 12
	Caviedes, S., De Gamboa, G., Badillo, E. (2021c). Una aproximación al conocimiento especializado sobre área en estudiantes para maestro.	Comunicación oral	Publicada en actas	Actas XXIV SEIEM
4	Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (en prensa). Conocimiento especializado	Artículo	Aceptado para publicación	AIEM - Avances de Investigación

	sobre el área de figuras planas en estudiantes para maestro.			en Educación Matemática

A continuación, se presentan los artículos que conforman el compendio de publicaciones de la presente tesis doctoral. Tres de ellos ya han sido publicados, dos en acceso abierto (revista Números y revista Uniciencia) y otro que no es de acceso abierto (IJMEST). El cuarto artículo será publicado en acceso abierto. A fin de seguir un formato coherente, y respetando las normas y restricciones propias de las revistas, se presenta la primera página con el resumen y las palabras clave para cada publicación. Igualmente, se presenta la referencia correspondiente y el enlace para el acceso virtual a las publicaciones. Se sigue este mismo formato para presentar las comunicaciones orales que han sido publicadas en actas de congresos.

Los miembros del tribunal de esta tesis recibirán de manera adjunta todos los documentos publicados, independientemente de las restricciones que puedan existir para la difusión de los mismos.

4.1 Artículos del compendio

4.1.1 Resolución de tareas que involucran el área de figuras planas por estudiantes de sexto de primaria.

Caviedes, S. (2022). Resolución de tareas "que involucran el área de figuras planas" por estudiantes de sexto de primaria. *Números: Revista de didáctica de las matemáticas*, (110), 25-39.

Acceso en línea: http://sinewton.es/publicacion-numeros/articulo-2-110/

NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 110, marzo de 2022, páginas 25-39

Resolución de tareas "que involucran el área de figuras planas" por estudiantes de sexto de primaria

Sofía Caviedes Barrera
(Universidad Autónoma de Barcelona. España)

Fecha de recepción: 28 de marzo de 2021
Fecha de aceptación: 19 de octubre de 2021

Resumen El siguiente estudio tiene como finalidad caracterizar la competencia geométrica manifestada por estudiantes de 6to de primaria cuando resuelven tareas que involucran el área de figuras planas. Para esto, se analizan los procedimientos utilizados y justificaciones escritas en dos tareas. La competencia geométrica de los estudiantes se caracteriza en función de los significados parciales del área, teniendo en cuenta los diferentes conceptos, procedimientos, propiedades y representaciones que se movilizan en la resolución de las tareas. Los resultados muestran que la competencia geométrica de los alumnos se ve limitada por el uso mecánico de la fórmula de base x altura, lo que dificulta el uso de procedimientos geométricos cuando no es posible utilizar cálculos.

Palabras clave Competencia geométrica, significados parciales del área, procedimientos geométricos.

Figura 13. Artículo 1 del compendio, resumen y palabras clave.

4.1.2 Mathematical objects that configure the partial meanings of area mobilized in task solving.

Caviedes Barrera, S., de Gamboa, G., y Badillo Jiménez, E. R. (2021a). Mathematical objects that configure the partial area meanings mobilized in task-solving. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-20. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1991019

Acceso en línea:

https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/0020739X.2021.1991019

INTERNATIONAL JOURNAL OF MATHEMATICAL EDUCATION IN SCIENCE AND TECHNOLOGY
https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1991019

Taylor & Francis
Taylor & Francis Group

Check for updates

Mathematical objects that configure the partial area meanings mobilized in task-solving

Sofía Caviedes Barrera, Genaro de Gamboa and Edelmira Rosa Badillo Jiménez

Faculty of Education, Department of Didactics of Mathematics, Autonomous University of Barcelona, Bellaterra, Spain

ABSTRACT
The area concept may appear in a wide range of problem situations. The representations used (geometrical, numerical and algebraic) in such situations entail particular practices that condition the partial area meanings. Thus, this study aims to characterize the partial area meanings mobilized in the resolution of area tasks. Each of the area partial meanings is characterized by a configuration of mathematical objects, which compromised the resolution process through semiotic functions. A top-down / bottom-up approach is implemented to identify these mathematical objects and the relationship between them. First, an analysis of the specialized literature on learning area concept is carried out in order to make an initial characterization of the partial area meanings. Subsequently, an analysis of resolutions of students aged 13–14 years old of a set of area tasks allows the first partial area meanings to be refined. The results showed three partial area meanings, which emerge from a detailed analysis of the mathematical practices involved in the students' resolutions. The relationships between the partial area meanings allow a better understanding of the global area meaning in a task-solving context.

ARTICLE HISTORY
Received 20 January 2021

KEYWORDS
Partial area meanings; mathematical objects; global area meaning

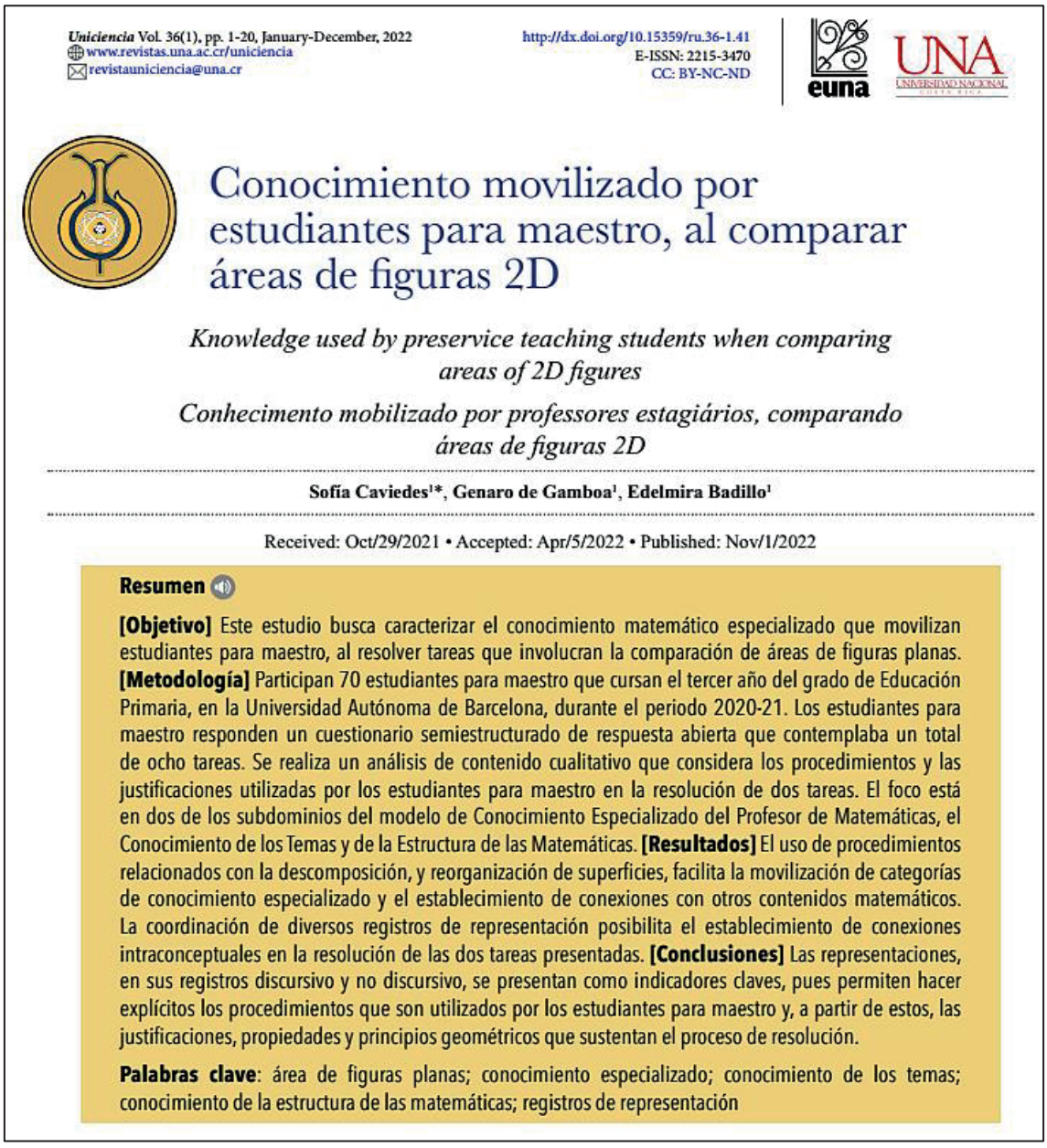
Figura 14. Artículo 2 del compendio, resumen y palabras clave.

4.1.3 Conocimiento movilizado por estudiantes para maestro al comparar áreas de figuras 2D

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2022b). Conocimiento movilizado por estudiantes para maestro al comparar áreas de figuras 2D. *Uniciencia* (36) 1, 1-20. https://doi.org/10.15359/ru.36-1.41

Acceso en línea:

https://www.revistas.una.ac.cr/index.php/uniciencia/article/view/16306/26391



Uniciencia Vol. 36(1), pp. 1-20, January-December, 2022
www.revistas.una.ac.cr/uniciencia
revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.41
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

euna UNA UNIVERSIDAD NACIONAL COSTA RICA

Conocimiento movilizado por estudiantes para maestro, al comparar áreas de figuras 2D

Knowledge used by preservice teaching students when comparing areas of 2D figures

Conhecimento mobilizado por professores estagiários, comparando áreas de figuras 2D

Sofía Caviedes[1]*, Genaro de Gamboa[1], Edelmira Badillo[1]

Received: Oct/29/2021 • Accepted: Apr/5/2022 • Published: Nov/1/2022

Resumen

[Objetivo] Este estudio busca caracterizar el conocimiento matemático especializado que movilizan estudiantes para maestro, al resolver tareas que involucran la comparación de áreas de figuras planas. **[Metodología]** Participan 70 estudiantes para maestro que cursan el tercer año del grado de Educación Primaria, en la Universidad Autónoma de Barcelona, durante el periodo 2020-21. Los estudiantes para maestro responden un cuestionario semiestructurado de respuesta abierta que contemplaba un total de ocho tareas. Se realiza un análisis de contenido cualitativo que considera los procedimientos y las justificaciones utilizadas por los estudiantes para maestro en la resolución de dos tareas. El foco está en dos de los subdominios del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, el Conocimiento de los Temas y de la Estructura de las Matemáticas. **[Resultados]** El uso de procedimientos relacionados con la descomposición, y reorganización de superficies, facilita la movilización de categorías de conocimiento especializado y el establecimiento de conexiones con otros contenidos matemáticos. La coordinación de diversos registros de representación posibilita el establecimiento de conexiones intraconceptuales en la resolución de las dos tareas presentadas. **[Conclusiones]** Las representaciones, en sus registros discursivo y no discursivo, se presentan como indicadores claves, pues permiten hacer explícitos los procedimientos que son utilizados por los estudiantes para maestro y, a partir de estos, las justificaciones, propiedades y principios geométricos que sustentan el proceso de resolución.

Palabras clave: área de figuras planas; conocimiento especializado; conocimiento de los temas; conocimiento de la estructura de las matemáticas; registros de representación

Figura 15. Artículo 3 del compendio, resumen y palabras clave.

4.1.4 Conocimiento especializado sobre el área de figuras planas en estudiantes para maestro.

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (en prensa). Conocimiento especializado sobre el área de figuras planas en estudiantes para maestro. *AIEM.*

Aceptación definitiva:

AIEM

AVANCES DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Revista de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

ISSN 2254-4313 | aiem.es

SEIEM

seiem.es

27 de septiembre de 2022

Ceneida Fernández Verdú, en calidad de editora de la revista Avances de Investigación en Educación Matemática, certifica que el artículo "Conocimiento especializado sobre el área de figuras planas en estudiantes para maestro" ha sido realizado por Sofía Caviedes Barrera, Genaro de Gamboa Rojas y Edelmira Badillo Jiménez, y ha sido aceptado para su publicación en AIEM, con ISSN 2254-4313, editada por la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (índices).

Su DOI asignado que será funcional en el momento de publicación, es https://doi.org/10.35763/aiem20.4076

Atentamente:

Ceneida Fernández Verdú

Figura 16. Aceptación artículo 4 del compendio.

Conocimiento especializado sobre el área de figuras planas en estudiantes para maestro

Sofía Caviedes Barrera[1], Universidad Autónoma de Barcelona, sofia.caviedes@autonoma.cat, Orcid ID: https://orcid.org/0000-0002-5304-212X

Genaro de Gamboa Rojas[2], Universidad Autónoma de Barcelona, genaro.degamboa@uab.cat, Orcid ID: https://orcid.org/0000-0003-0366-3988

Edelmira Badillo Jiménez[3], Universidad Autónoma de Barcelona, edelmira.badillo@uab.cat, Orcid ID: https://orcid.org/0000-0001-6296-4591

Recibido el XX de YYYYY de ZZZZ; aceptado el XX de YYYYY de ZZZZ

Conocimiento especializado sobre el área de figuras planas en estudiantes para maestro

Resumen

Este estudio busca caracterizar el conocimiento especializado en un grupo de estudiantes para maestro (EPM). Se pone énfasis en los subdominios de Conocimiento de los Temas, Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas, Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas y Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas. Se analizan los procedimientos y justificaciones escritas que los EPM utilizan para resolver una tarea de área, y para interpretar respuestas de alumnos a una tarea de área. Los resultados muestran que el uso de procedimientos diversos se relaciona con la movilización de indicadores del Conocimiento de los Temas y promueven el establecimiento de conexiones con otros contenidos matemáticos. Los indicadores definidos para el Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas, y el Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas, se relacionan con una mayor capacidad de los EPM para interpretar respuestas de alumnos.

Palabras clave. Conocimiento especializado; subdominios de conocimiento; estudiantes para maestro; área de figuras planas; interpretación de respuestas de alumnos.

Figura 17. Artículo 4 del compendio, resumen y palabras clave.

4.2 Publicaciones en actas de congresos con proceso de revisión por pares

4.2.1 Procedimientos utilizados por estudiantes que resuelven de manera exitosa tareas que involucran el área de figuras planas.

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2021b). Procedimientos utilizados por estudiantes que resuelven de manera exitosa tareas que involucran el área de figuras planas. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 205 – 212). Valencia: SEIEM.

Acceso en línea: https://www.seiem.es/docs/actas/24/ActasXXIVSEIEM.pdf

PROCEDIMIENTOS UTILIZADOS POR ESTUDIANTES QUE RESUELVEN DE MANERA EXITOSA TAREAS QUE INVOLUCRAN EL ÁREA DE FIGURAS PLANAS[1]

Procedures used by students who successfully solve tasks involving the area of flat figures

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E.

Universidad Autónoma de Barcelona

Resumen

Este estudio pretende caracterizar los procedimientos utilizados por un grupo de estudiantes de secundaria que resuelve de manera exitosa tareas que involucran el área de figuras planas. Se analizan las justificaciones escritas y los procedimientos utilizados en la resolución de dos tareas de área. Los resultados indican que los estudiantes que tienen éxito en la resolución de las tareas utilizan procedimientos que admiten aproximaciones geométricas y numéricas del área. Así, los procedimientos de naturaleza geométrica pueden ayudar a los estudiantes a justificar mejor lo que hacen y porqué lo hacen, además de determinar, en parte, el éxito en la resolución de tareas más complejas.

Palabras clave: *medida del área, procedimientos geométricos, procedimientos numéricos*

Abstract

This study aims to characterize the procedures used by a group of students when successfully solving area measurement tasks. Written justifications and procedures used in the resolution of two area measurement tasks are analyzed. The results indicate that students who are successful in solving the tasks use procedures that admit both geometric and numerical approximations of area. Thus, procedures of a geometric nature may help students to better justify what they do and why they do it, in addition to determining, in part, success in solving more complex tasks.

Keywords: *area measurement, geometric procedures, numeric procedures*

Figura 18. Comunicación oral SEIEM, resumen y palabras clave.

4.2.2 Aproximación al conocimiento especializado sobre área en estudiantes para maestro

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2021c). Aproximación al conocimiento especializado sobre área en estudiantes para maestro. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (213-220). Valencia: SEIEM

Acceso en línea: https://www.seiem.es/docs/actas/24/ActasXXIVSEIEM.pdf

UNA APROXIMACIÓN AL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO SOBRE ÁREA EN ESTUDIANTES PARA MAESTRO[1]

An approach to specialised knowledge about area measurement in student teachers

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E.

Universidad Autónoma de Barcelona

Resumen

Este estudio pretende caracterizar elementos del conocimiento especializado de un grupo de estudiantes para maestro cuando resuelven tareas que involucran el área de figuras planas. Se pone énfasis en dos subdominios del conocimiento especializado, el conocimiento de los temas (KoT) y el conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM). Se analizan las justificaciones escritas y los procedimientos utilizados, por los estudiantes para maestro, en la resolución de una tarea de área. Los resultados indican que la introducción de procedimientos diversos, para resolución de una tarea permite movilizar categorías de conocimiento especializado, y con ello, establecer conexiones con otros contenidos matemáticos.

Palabras clave: *área de figuras planas, conocimiento de los temas, conocimiento de la estructura de las matemáticas*

Abstract

This study aims to characterise elements of the specialised knowledge of a group of student teachers when solving tasks involving the area of flat figures. The focus is placed on two subdomains of specialised knowledge, knowledge of topics (KoT) and knowledge of the structure of mathematics (KSM). The written justifications and procedures used by student teachers in solving an area task are analysed. The results indicate that the introduction of different procedures for solving a task allows the mobilisation of specialised categories of knowledge, and with it, the establishment of connections with other mathematical contents.

Keywords: *area of flat figures, knowledge of the topics, knowledge of the structure of mathematics*

Figura 19. Comunicación oral SEIEM, resumen y palabras clave.

4.2.3 Preservice teachers' knowledge on area measurement

Caviedes, S., De Gamboa, G., y Badillo, E (2022a, febrero). Preservice teachers' knowledge on area measurement. *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Bozen, Italy: CERME12

Acceso en línea: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03748717/

Preservice teachers' knowledge on area measurement

Sofía Caviedes[1], Genaro de Gamboa[1] and Edelmira Badillo[1]

[1]Autonomous University of Barcelona, Faculty of Education, Barcelona, Spain;
sofia.caviedes@autonoma.cat; genaro.degamboa@uab.cat; edelmira.badillo@uab.cat

This study aims to characterise elements of specialised knowledge of a group of pre-service teachers using procedures related to the comparison and rearrangement of surfaces when solving area tasks. For this purpose, emphasis is placed on the subdomains of knowledge of topics and knowledge of the structure of mathematics. The written justifications and procedures that pre-service teachers used to solve two area tasks are analysed. The results indicate that when tasks condition the strict use of procedures related to the comparison and rearrangement of surfaces, written justifications supporting the procedures become more rigorous. These rigorous justifications appear, exclusively, when pre-service teachers mobilise specific geometric properties and principles, either implicitly or explicitly.

Keywords: *Area measurement, knowledge of the topics, knowledge of the structure of mathematics.*

Figura 20. Comunicación oral CERME, resumen y palabras clave.

SECCIÓN 5.

RESUMEN Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

5. Resumen y discusión de resultados

En este capítulo se presentan y discuten los resultados centrales de este estudio. El capítulo incluye los resultados presentados en los tres artículos de investigación y en el artículo de divulgación. Además, se incluyen los resultados presentados en comunicaciones publicadas en actas de diferentes congresos, pues permiten complementar y profundizar la discusión. Se presentan los resultados atendiendo al orden de los objetivos específicos del estudio:

- En el apartado 5.1 se presentan y discuten los resultados referidos a la caracterización de los elementos matemáticos involucrados en los procesos de medición de área en el contexto de Educación Primaria. Esto se presentó en los artículos 1 y 2, y en la comunicación 1.
- En el apartado 5.2 se presentan y discuten los resultados referidos a la caracterización del conocimiento matemático especializado, y sus relaciones, que movilizan los EPM en tareas que involucran procedimientos de naturaleza geométrica. Esto se presentó en el artículo 3 y en la comunicación 3.
- En el apartado 5.3 se presentan y discuten los resultados referidos a la caracterización del conocimiento matemático, y didáctico matemático, que movilizan los EPM en tareas que requieren la interpretación de respuestas de alumnos, y el uso de procedimientos de distinta naturaleza. Esto se presenta en el artículo 4 y en la comunicación 2.

5.1 Elementos matemáticos involucrados en los procesos de medición de áreas

El Objetivo Específico 1 de este estudio fue caracterizar los elementos matemáticos que subyacen a los procesos de medición de áreas de figuras planas en el contexto de la Educación primaria. Las configuraciones epistémicas sobre los significados parciales del área que se presentan en el artículo de divulgación -Caviedes (2022)-, y se refinan y validan en Caviedes et al. (2021a), dan respuesta a este primer objetivo específico, pues permiten realizar una caracterización de los elementos matemáticos que se ven involucrados en la resolución de tareas de área.

Las Tablas 7, 8 y 9 (Caviedes et al., 2021a) muestran el primer resultado de esta tesis, el que fue fundamental para realizar la etapa 2 de este estudio. El primer resultado corresponde a una caracterización de los elementos matemáticos que se ven involucrados en los procesos de medición de áreas a lo largo de toda la Educación primaria. Las tablas 7, 8 y 9 presentan tres significados parciales del área, organizados en tres configuraciones epistémicas, con sus respectivos objetos matemáticos primarios: contextos de uso, representaciones, procedimientos, propiedades, proposiciones y argumentos. Cada uno de estos objetos, exceptuando las propiedades, es único para cada significado parcial del área. En su conjunto, los significados parciales del área permiten caracterizar la comprensión de los alumnos en términos de su capacidad para resolver tareas de área movilizando distintos elementos matemáticos.

Tabla 7. Caracterización ampliada SP1. Área como espacio delimitado por una línea cerrada.

Objetos matemáticos	**Caracterización**
Situaciones problemas (contextos de uso)	(S1) Comparar superficies de forma directa e indirecta. (S2) Establecer relaciones de equivalencia o inclusión entre distintas superficies. (S3) Repartir una superficie equitativamente.
Representaciones	(R1) Oral-escrita: utilizando adjetivos como “igual”, “más delgada” “más ancha”, “el doble”, “la mitad” “la cuarta parte” en relación a las superficies. Se utiliza en los conceptos, términos, proposiciones y propiedades sobre el área. En el enunciado de las tareas, en la justificación de los procesos y en la explicación de los resultados. (R2) Gestual: utilizando partes del cuerpo de manera enactiva para comparar y/o estimar cantidades de superficie. (R3) Manipulativa: utilizando objetos físicos. Se muestra a través de elementos físicos como Tangram, recortables; o bien, por medios tecnológicos como Geogebra, Cabri u otro.

	(R4) Geométrica: utilizando descomposiciones convenientes para comparar y/o estimar cantidades de superficies. Permite visualizar el proceso efectuado para, por ejemplo, la descomposición de superficies, el trazado de líneas y elementos auxiliares y las posibles reconfiguraciones. (R5) Simbólica: conjunto de los R^+ para comparar dos o más superficies. (R6) Transformaciones: tratamientos y conversiones.
Definiciones y conceptos	(D1) Superficie: cualidad que permite a los objetos ser medidos, que tiene longitud y anchura. La comparación entre las cualidades de los objetos es el comienzo de la actividad de medición. Se puede medir el área si tiene sentido decir que los objetos a medir son anchos o angostos. (D2) Magnitud: el área se considera magnitud, ya que es una propiedad que se puede medir. La magnitud permite asignar un significado cuantitativo a una cantidad de superficie. La medida de la cantidad de superficie corresponde a un número que se relaciona con una unidad de medida. Así, la comparación se convierte en medición por medio del establecimiento de una unidad de medida. (C1) Cantidad de superficie: corresponde a la extensión ocupada por un espacio cerrado. De esta manera, al establecer una relación de equivalencia entre un conjunto de superficies (tener la misma extensión), la equivalencia correspondería a la cantidad de superficie.
Propiedades (Pp) y proposiciones (Pr)	(Pp1) Conservación: al cortar/descomponer una región dada y reorganizar sus partes se puede formar otra figura, sin embargo, el área se mantiene igual. (Pp2) Transitividad: comprender que si la cantidad de una "superficie A" es igual (menor o mayor) que la cantidad de una "superficie B" y la cantidad de la "superficie B" es igual (menor o mayor) que la cantidad de una "superficie C", entonces, la "superficie A" es igual (menor o mayor) que la "superficie C". (Pp3) Acumulación y aditividad: las figuras pueden ser compuestas y recompuestas en regiones de igual área. (Pr1) Los paralelogramos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas son congruentes o iguales. (Pr2) Un paralelogramo que tiene la misma base que un triángulo, ambos colocados entre las mismas paralelas, es el doble del triángulo. (Pr3) Los triángulos colocados sobre bases iguales y entre las mismas paralelas son iguales. (Pr4) Dos polígonos son congruentes si tienen sus lados y ángulos respectivamente iguales o congruentes. (Pr5) Todo polígono puede descomponerse en triángulos. (Pr6) Dos polígonos son finitamente equivalentes si cada uno de ellos puede descomponerse en el mismo número finito de triángulos congruentes. (Pr7) Todo triángulo es equidescomponible a un paralelogramo. (Pr8) Dos figuras equivalentes tienen áreas iguales.
Procedimientos	(P1) Comparar dos o más superficies de manera directa por superposición total y/o parcial. (P2) Comparar dos o más superficies de manera indirecta por recorte y pegado. (P3) Descomponer de forma conveniente, gráfica o mentalmente, dos o más superficies. (P4) Realizar movimientos de rotación, traslación y superposición de figuras.

Argumentos	(A1) Comparar dos o más superficies colocando una forma sobre otra, resulta útil para establecer relaciones de equivalencia y/o inclusión. (A2) El acto mental de cortar el espacio bidimensional en partes de igual área sirve como base para comparar áreas, pues permite establecer relaciones en función de las partes que componen la superficie, considerando sus longitudes. (A3) Al cambiar la forma de una superficie no se producen cambios en el área de ésta, ya que, las figuras pueden ser descompuestas y reorganizadas conservando las mismas "partes".

Tabla 8. Caracterización ampliada SP2. Área como número de unidades bidimensionales que recubren una superficie.

Objetos matemáticos	**Caracterización**
Situaciones problemas (contextos de uso)	(S4) Situaciones en las que una superficie aparece ligada a un proceso de medida (con unidades de medida no estándar) ya sea para comparar, repartir o valorar.
Representaciones	(R7) Oral-escrita: utilizando adjetivos como "más pequeña", "más grande", "el doble", "la "mitad", etc. en relación a las unidades de medida bidimensionales y en relación a una cantidad de superficie. Se utiliza en los conceptos, términos, proposiciones y propiedades sobre el área. En el enunciado de las tareas, en la justificación de los procesos y en la explicación de los resultados. (R8) Gestual: utilizando partes del cuerpo de manera enactiva (por ejemplo, manos y pies). Se utiliza para recubrir superficies y comparar y/o estimar sus áreas. (R9) Manipulativa: utilizando objetos físicos para recubrir superficies. Se muestra a través de elementos físicos para, por ejemplo, iterar unidades; o bien, por medios tecnológicos como Geogebra, Cabri u otro. (R10) Geométrica: utilizando cuadrículas y particiones en figuras congruentes (cuadrados y/o triángulos) de las unidades de medida y de las superficies. Permite visualizar el proceso efectuado para, por ejemplo, la descomposición de las unidades de medida, el trazado de líneas y elementos auxiliares y las posibles reconfiguraciones. (R11) Simbólica: conjunto de los R^+ para el conteo de unidades o suma de áreas; utilizando fórmulas para el cálculo indirecto del área. (R12) Transformaciones: tratamientos y conversiones.
Definiciones y conceptos	(D3) Unidad de medida: es una cantidad fija de una magnitud física. La unidad de área está relacionada con la unidad de distancia por conveniencia. Así, si la distancia está en centímetros, el área se medirá en centímetros cuadrados. En general, para cualquier unidad (U) de distancia, el área se medirá en la correspondiente unidad (U) cuadrada. (C2) Estructuración espacial: se requiere estructurar una superficie con cuadrados alineados en filas y columnas para comprender el área como verdaderamente bidimensional (C3) Unidades de medida no estándar: corresponde a una región del plano delimitada por un cuadrado cuyo lado mide (U). Las propiedades que deben cumplir las unidades de medida no estándar son las de ser fácilmente reproducibles y fácilmente divisibles, sin dejar huecos en el momento de recubrir la superficie con unidades o sus fracciones (carácter de recubrimiento).

Propiedades (Pp) y proposiciones (Pr)	(Pp1) Conservación: al cortar/descomponer una región dada y reorganizar sus partes se puede formar otra figura, sin embargo, el área se mantiene igual. (Pp2) Transitividad: comprender que si la cantidad de una "superficie A" es igual (menor o mayor) que la cantidad de una "superficie B" y la cantidad de la "superficie B" es igual (menor o mayor) que la cantidad de una "superficie C", entonces, la "superficie A" es igual (menor o mayor) que la "superficie C". (Pp3) Acumulación y aditividad: comprender que las figuras pueden ser compuestas y recompuestas en regiones de igual área. (Pr9) La unidad de medida puede ser dividida en partes (fraccionarse) para facilitar el proceso de medir áreas.
Procedimientos	(P5) Descomponer superficies en unidades y/o subunidades congruentes para facilitar el proceso de medir áreas. (P6) Iterar unidades de medida bidimensionales para comparar y medir áreas. (P7) Aproximar superficies desde su interior. (P8) Estructurar superficies en filas y columnas considerando medidas de longitud. (P9) Medir áreas como proceso aditivo contando unidades y/o subunidades que recubren la superficie.
Argumentos	(A4) El área de una superficie puede tener asociada diferentes valores numéricos, procedentes de la medida realizada con unidades diferentes. Así, el valor total resulta del recuento de las unidades (o fracción de éstas) que recubren la superficie. (A5) Existe una relación inversa entre el tamaño de la unidad de medida y el número de unidades que recubren la superficie, ya que, mientras mayor es el tamaño de la unidad de medida, menos unidades recubren la superficie, y viceversa. (A6) El cuadrado se presenta como la mejor opción para medir áreas de superficies poligonales, debido a la facilidad para iterarlo y para recubrir rectángulos y cuadrados de forma exacta, sin solapamientos ni huecos. Por ello, el valor final del área de una superficie se expresa en unidades cuadradas. (A7) Las unidades de área que recubren una columna en un cuadrado y/o rectángulo están dadas por una dimensión del cuadrado y/o rectángulo. El número de columnas está dado por la otra dimensión. Multiplicar las medidas de longitud es un atajo para encontrar el número de unidades de área que recubren el cuadrado y/o rectángulo.

Tabla 9. Caracterización ampliada SP3. Área como producto de dos dimensiones lineales.

Objetos matemáticos	**Caracterización**
Situaciones problemas (contextos de uso)	(S5) Situaciones en las que una superficie aparece ligada a un proceso de medida (con unidades de medida estándar) ya sea para comparar, repartir o valorar. *Definiciones y conceptos.*
Representaciones	(R13) Oral-escrita: utilizando adjetivos como "menor", "mayor", "el doble", "la mitad", etc., en relación a los valores numéricos del área. Se utiliza en los conceptos, términos, proposiciones y propiedades sobre el área. En el enunciado de las tareas, en la justificación de los procesos y en la explicación de los resultados.

	(R14) Manipulativa: utilizando elementos físicos como Geogebra, Cabri u otro. (R15) Geométrica: utilizando particiones en figuras conocidas para calcular el área de otras figuras. Permite visualizar el proceso efectuado para, por ejemplo, la descomposición de diferentes superficies, el trazado de líneas y elementos auxiliares, y las posibles reconfiguraciones. (R16) Simbólica: conjunto de los R+ para el cálculo indirecto del área. Utilizando otras expresiones de tipo algebraico como, por ejemplo, la relación entre el área de un cuadrado y su diagonal d2 = l2 + l2; o bien, utilizando teorema de Pitágoras para obtener las medidas de longitud de un triángulo rectángulo h2 = c2 + c2. (R17) Transformaciones: tratamientos y conversiones.
Definiciones y conceptos	(D4) Fórmula del área: el uso de fórmulas permite cuantificar el área de una superficie por medio de unidades de medida estandarizadas y de manera abreviada. La manera estándar de expresar la medición facilita la comunicación de una medida de manera precisa, para que otra persona comprenda el resultado de la medición. En este sentido "calcular el área de una superficie" sería una expresión adecuada. (D5) Unidades cuadradas: en el tratamiento bidimensional del área, esta magnitud puede expresarse como el producto de dos longitudes (L x L), lo cual fundamenta que se mida con unidades derivadas de la longitud (m2, cm2…). (C4) Unidades de medida estándar: unidades de área como regiones cuadradas (cm2, m2, km2, etc.). (C5) Longitud: característica de un objeto encontrada al cuantificar la distancia entre los puntos finales de dicho objeto.
Propiedades (Pp) y proposiciones (Pr)	(Pp1) Conservación: al cortar/descomponer una región dada y reorganizar sus partes se puede formar otra figura, sin embargo, el área se mantiene igual. (Pp2) Transitividad: comprender que si la cantidad de una "superficie A" es igual (menor o mayor) que la cantidad de una "superficie B" y la cantidad de la "superficie B" es igual (menor o mayor) que la cantidad de una "superficie C", entonces, la "superficie A" es igual (menor o mayor) que la "superficie C". (Pp3) Acumulación y aditividad: las figuras pueden ser compuestas y recompuestas en regiones de igual área. (Pr10) Para calcular el área de una figura, se trata de descomponer la figura en un número finito de partes de tal forma que estas partes puedan volver a juntarse para formar una figura más sencilla.
Procedimientos	(P10) Medir dimensiones lineales y utilizar fórmulas. (P11) Calcular áreas de figuras conocidas para obtener áreas de figuras desconocidas. (P12) Calcular áreas de cuadrados, rectángulos y triángulos identificando la relación entre sus fórmulas.
Argumentos	(A8) El área de una superficie cuadrada y/o rectangular está determinada por el producto de las dos dimensiones lineales del rectángulo y/o cuadrado. Así, la fórmula de base por altura permite encontrar el área de superficies cuadras y/o rectangulares. (A9) El área del triángulo es la mitad del rectángulo de igual base y altura que lo contiene. Por lo tanto, la fórmula del área del triángulo es base por altura dividido dos.

	(A10) El área de una superficie puede tener asociada diferentes valores numéricos, procedentes de la medida realizada con unidades de medida estándar distintas. Existe una relación inversa entre la unidad de medida estándar y el área de una superficie, ya que, mientras mayor es la unidad de medida estándar, menor será el número asignado al área de la superficie, y viceversa.

Las configuraciones epistémicas definidas para cada uno de los significados parciales del área permitieron caracterizar, de manera detallada, los elementos matemáticos implicados en la resolución de tareas de área. Así mismo, permitieron buscar evidencias sobre la comprensión de los alumnos en términos de competencia (Font et al., 2007), es decir, en términos de capacidad de los alumnos para resolver una determinada tarea de area. En este sentido, el uso de los significados parciales del área, para el análisis de las resoluciones de alumnos, permite evidenciar la manera en que los procedimientos de naturaleza geométrica y numérica deben ser adquiridos y utilizados de forma coordinada, para resolver tareas de área de manera competente. Esto último, se resume en la Figura 21 y corresponde al segundo resultado de esta tesis doctoral.

La Figura 21 resume los procedimientos de cada uno de los significados parciales del área, separados mediante líneas discontinuas que indican que los procedimientos de cada uno de los significados parciales no son excluyentes, si no que en su conjunto contribuyen a la conformación de un significado global del área. Al respecto, el segundo resultado indica que una buena competencia para resolver tareas de área requiere que los alumnos se muevan desde el centro de la Figura 21 hacia el exterior. De esta manera el uso de procedimientos de naturaleza geométrica (Douady y Perrín-Glorian, 1989) debe ser anterior al uso de procedimientos que involucran cálculos, pues es en el centro geométrico donde las propiedades se hacen explícitas. En la medida que el repertorio de procedimientos adquirido por los alumnos es amplio, es posible vehiculizar la competencia aritmética de manera comprensiva, sustentada en el uso justificado de los diferentes elementos matemáticos que se pueden ver involucrados.

Los dos resultados mencionados otorgan una visión preliminar sobre cuatro aspectos que guiarán, posteriormente, la exploración del conocimiento especializado con los EPM. Estos aspectos son: (1) la manera en que se deben diseñar y estructurar tareas que involucran el área de figuras planas, a fin de poder explorar los elementos matemáticos que se movilizan en sus respectivas resoluciones; (2) los distintos elementos matemáticos que subyacen a los procesos de medición de áreas, así como su complejidad; (3) la manera en que los distintos elementos matemáticos se pueden relacionar en un determinado

proceso de resolución; y (4) la manera en que ciertos elementos matemáticos resultan particularmente relevantes para poder ejecutar con precisión un proceso de resolución.

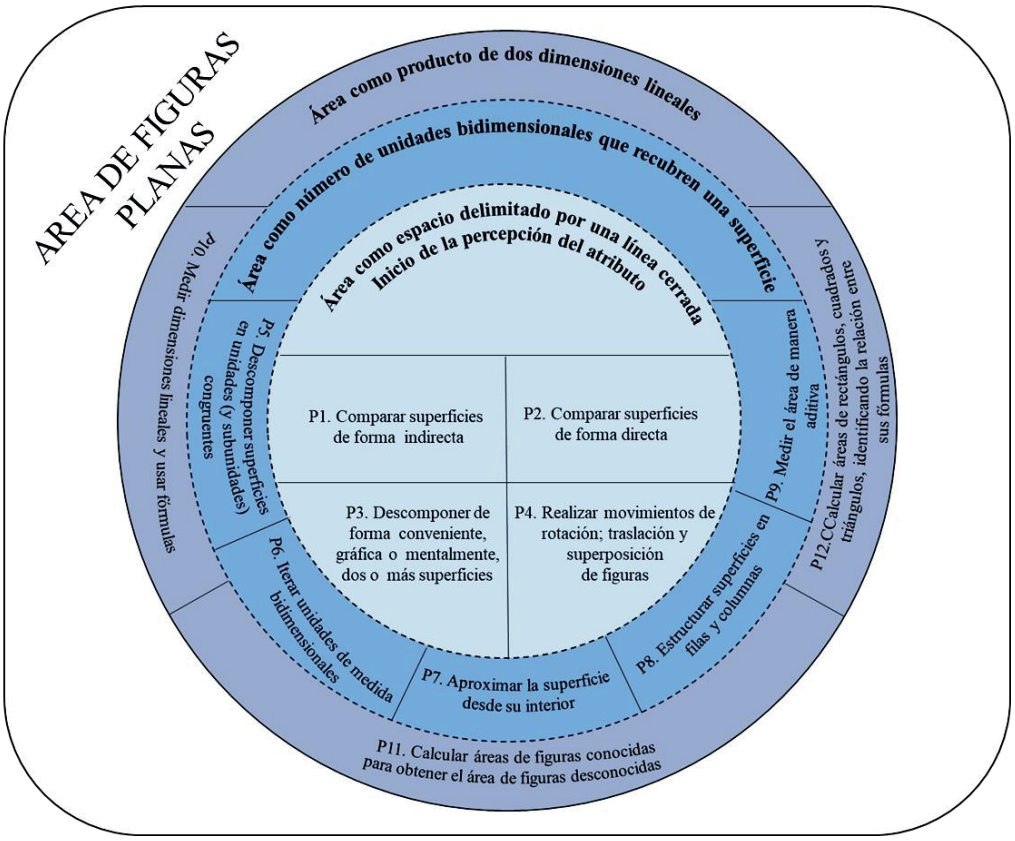


Figura 21. Procedimientos involucrados en los procesos de medición de áreas. (Caviedes et al., 2021a, p.17)

5.2 Conocimiento matemático movilizado por los EPM en tareas que requieren procedimientos de naturaleza geométrica

El Objetivo específico 2 de esta tesis fue caracterizar el conocimiento matemático especializado que movilizan los EPM en la resolución de tareas profesionales de área. El Objetivo específico 3, identificar las relaciones entre los distintos componentes del conocimiento matemático especializado que movilizan los EPM en la resolución de tareas profesionales de área, se presenta como complemento al anterior, pues pone el foco en la identificación de relaciones. Los indicadores de conocimiento especializado que se presentan en Caviedes et al. (2022a), y se refinan y validan en Caviedes et al. (2022b), constituyen el tercer resultado de esta tesis doctoral. Dichos indicadores permiten

caracterizar el conocimiento especializado de los EPM, en algunas de las categorías del subdominio del KoT y KSM, cuando resuelven tareas de área que requieren el uso de procedimientos de naturaleza geométrica.

Los indicadores propuestos para las categorías del subdominio del KoT permiten caracterizar el conocimiento matemático de los EPM contemplando un conocimiento sobre representaciones, procedimientos y sus justificaciones, y propiedades y principios geométricos. Por su parte, el indicador propuesto para la categoría de conexiones auxiliares permite buscar evidencias del conocimiento sobre la estructura de las matemáticas (KSM) que movilizan los EPM. Estos indicadores se detallan en la Tabla 10.

Tabla 10. Categorías e indicadores de conocimiento especializado.

Categorías del KoT y KSM	**Indicadores**
Representaciones (R)	(R1) *Escrita*: utilizando adjetivos como: "igual", "más delgada" "más ancha", "el doble", "la mitad" "la cuarta parte" en relación con las superficies. Se utiliza en los conceptos, términos, proposiciones y propiedades sobre el área. En el enunciado de las tareas, en la justificación de los procesos y en la explicación de los resultados. (R2) *Manipulativa:* utilizando objetos físicos. Se muestra a través de elementos físicos como Tangram, recortables; o bien, por medios tecnológicos como Geogebra, Cabri u otro. (R3) *Geométrica:* utilizando descomposiciones convenientes para comparar o estimar cantidades de superficies; utilizando cuadrículas y particiones en figuras congruentes (cuadrados o triángulos) de las unidades de medida y de las superficies. Permite visualizar el proceso efectuado para, por ejemplo, la descomposición de superficies, el trazado de líneas y elementos auxiliares y las posibles reconfiguraciones. (R4) *Simbólica:* conjunto de los R^+ para comparar dos o más superficies; conjunto de los R^+ para el conteo de unidades o suma de áreas.
Procedimientos (P) y justificaciones (J)	(P1) Comparar dos o más superficies de manera directa por superposición total o parcial. (P2) Comparar dos o más superficies de manera indirecta por recorte y pegado. (P3) Descomponer de forma conveniente, gráfica o mentalmente, dos o más superficies. (P4) Realizar movimientos de rotación, traslación y superposición de figuras. (P5) Medir áreas como proceso aditivo contando unidades y subunidades que recubren la superficie. (J1) Comparar dos o más superficies colocando una forma sobre otra, resulta útil para establecer relaciones de equivalencia o inclusión. (J2) El acto mental de cortar el espacio bidimensional en partes de igual área sirve como base para comparar áreas, pues permite

	establecer relaciones en función de las partes que componen la superficie, considerando sus longitudes. (J3) Al cambiar la forma de una superficie no se producen cambios en el área de esta, ya que, las figuras pueden ser descompuestas y reorganizadas conservando las mismas "partes".
Propiedades (Pp) y principios (Pr)	(Pp1) Conservación (Pp2) Acumulación y aditividad (Pp3) Transitividad (Pr1) Un paralelogramo que tiene la misma base que un triángulo, ambos colocados entre las mismas paralelas, es el doble del triángulo. (Pr2) Los triángulos colocados sobre bases iguales y entre las mismas paralelas son iguales. (Pr3) Dos polígonos son congruentes si tienen sus lados y ángulos respectivamente iguales o congruentes. (Pr4) Todo polígono puede descomponerse en triángulos. (Pr5) Todo triángulo es equidescomponible a un paralelogramo.
Conexiones auxiliares (Cau)	(Cau1) Uso de un procedimiento o concepto para introducir un nuevo procedimiento o concepto.

Respecto al conocimiento sobre el subdominio del KoT, en Caviedes et al. (2022b) se evidencia que el uso de procedimientos relacionados con la división mereológica (Duval, 2017), como la descomposición homogénea y heterogénea, y la reorganización de superficies, facilita la movilización de otras categorías de conocimiento especializado (p.e., propiedades y principios geométricos) y el establecimiento de conexiones auxiliares con otros contenidos matemáticos (p.e., fracción como parte todo). Esto significa que el uso de procedimientos relacionados con la división mereológica, así como las representaciones asociadas, puede ser un indicio de éxito al momento de resolver tareas que involucran la comparación de figuras 2D. Igualmente, en Caviedes et al. (2022a, 2022b) se evidencia la necesidad de que los EPM puedan coordinar el registro de representación discursivo -oral o escrito, en lenguaje natural o simbólico- y no discursivo -dibujos, bocetos, gráficos, figuras y configuraciones geométricas- (Duval, 2017), ya que dicha coordinación permite a los EPM justificar sus resoluciones en términos de lo que hacen y por qué lo hacen. Esto indica que la coordinación de los registros de representación señalados sería una condición necesaria para que los EPM puedan visualizar como descomponer una figura y, así, movilizar conocimiento matemático especializado (KoT). Esto se presenta como el cuarto resultado de este estudio y sugiere, además, que las representaciones tienen un valor instrumental dentro del KoT (ver Figura 22), es decir, las representaciones, en sus diferentes registros, permiten hacer explícitos los procedimientos utilizados por los EPM, así como las propiedades y justificaciones que dan sustento a dichos procedimientos. Igualmente, las representaciones permiten hacer

explícitas las conexiones interconceptuales involucradas en un proceso de resolución, pues en su registro simbólico, las representaciones permiten identificar el uso de procedimientos que pueden estar relacionados con otros conceptos matemáticos (p.e., operaciones con fracciones).

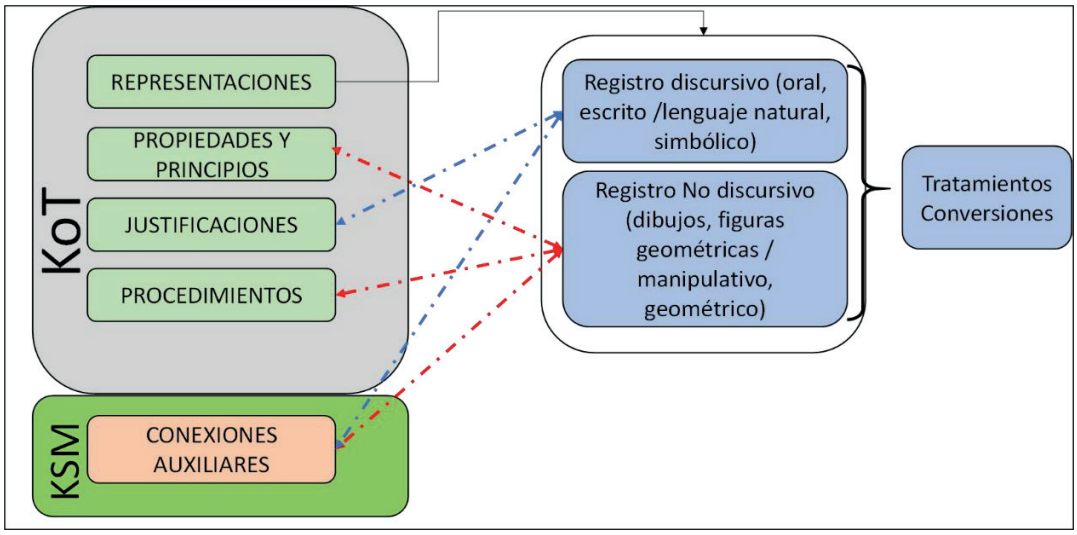


Figura 22. Relación entre representaciones y otras categorías de conocimiento matemático especializado (Caviedes et al., 2022b, p.15).

Un quinto resultado de este estudio hace referencia a las propiedades de conservación, transitividad, y acumulación y aditividad, que muestran cierta dependencia entre ellas, pues los EPM las movilizan de manera conjunta en sus resoluciones. Esto indica que dichas propiedades se presentan como indicadores de conocimiento especializado que deben ser abordados de manera conjunta y, de la misma forma, deben ser considerados en el análisis de tareas que involucran procedimientos de naturaleza geométrica. Aunque diversas investigaciones reportan que los EPM tienen dificultades para aceptar la propiedad de conservación del área (Hong y Runnalls, 2020), no lo hacen vinculando dicha propiedad con otras, lo que se evidencia como un aspecto a considerar para futuras investigaciones. Es posible que la movilización de estas propiedades permita a los EPM ampliar su repertorio de estrategias para resolver las tareas, ya que pueden dar soporte a los procedimientos propios de la división mereológica y al respectivo trazado auxiliar de líneas mediante el uso de representaciones de tipo geométrico. Al respecto, en Caviedes et al. (2022a, 2022b) se evidencia que los EPM utilizan las propiedades y principios geométricos para dar sustento a procedimientos relacionados con la descomposición y reorganización de superficies y que, a su vez, dichos procedimientos se ven sustentados por el uso de justificaciones diversas. Esto último indicaría que el uso de propiedades,

procedimientos y representaciones se refuerza mutuamente (Clements et al., 2018; Sarama y Clements, 2009) cuando los EPM movilizan conocimiento especializado en el subdominio del KoT. A pesar de esto, la movilización de principios geométricos no estuvo presente en la mayor parte de las resoluciones y justificaciones escritas proporcionadas por los EPM, lo que indica que su conocimiento matemático es limitado (Chamberlin y Candelaria, 2018; Livy et al., 2012; Murphy, 2012) y que existe un vacío en el conocimiento especializado de los EPM.

Respecto al indicador construido para la categoría de conexiones auxiliares, aunque fue de utilidad para identificar conexiones interconceptuales (área-fracción como parte todo), se observaron dos dificultades importantes de mencionar en el subdominio del KSM. Estas dificultades no se detallan en los artículos del compendio, sino que se abordan de manera detallada en De Gamboa, Caviedes y Badillo (2022). En este contexto, las dificultades en el uso del subdominio del KSM, como herramienta analítica, constituyen el sexto resultado de esta tesis doctoral. La primera dificultad se relaciona con la clasificación y definición de las conexiones auxiliares. Por ejemplo, Policastro et al. (2019, p.3) mencionan que las conexiones auxiliares están relacionadas "*con la necesidad de considerar una noción -procedimiento o constructo- como apoyo para que los alumnos comprendan un determinado concepto -procedimiento o noción".* En este sentido, las conexiones auxiliares se relacionan con los conocimientos previos que tienen los alumnos en relación a un nuevo concepto (Flores-Medrano, 2022). En esta línea y, en el caso del presente estudio, las conexiones auxiliares están referidas al uso de un concepto matemático (el área) para evocar otro concepto y/o procedimiento matemático (fracción como parte todo y operaciones con fracciones). Sin embargo, esto puede interpretarse, a su vez, como un conocimiento de naturaleza procedimental y, por lo tanto, como un conocimiento más relacionado con el subdominio del KoT que con el KSM. En segundo lugar, desde el punto de vista del conocimiento del profesor, conocer los diferentes procedimientos matemáticos que pueden ser utilizados cuando se trabaja el área, podría comprenderse como "*un conocimiento profundo del contenido matemático (por ejemplo, conceptos, procedimientos, hechos, reglas y teoremas) y sus significados"* (Carrillo-Yañez et al. 2018, p.7), es decir, como un conocimiento del KoT y no necesariamente "*con el conocimiento del profesor sobre las conexiones entre conceptos matemáticos"* (Carrillo-Yañez et al. 2018, p.8). En este sentido, y de acuerdo con lo anterior, el sexto

resultado de esta tesis señala la necesidad de seguir explorando si la caracterización actual del KSM posibilita la identificación y caracterización de conexiones matemáticas, en el conocimiento del profesor, sin ambigüedades.

5.3 Conocimiento matemático y didáctico matemático movilizado por los EPM en tareas que requieren el uso de procedimientos de distinta naturaleza y en la interpretación de respuestas de alumnos

El artículo 4 (Caviedes et al., en prensa) entrega información sobre el conocimiento matemático especializado que moviliza un grupo de EPM al resolver tareas que requieren el uso de procedimientos diversos. Igualmente, entrega información sobre el conocimiento didáctico matemático que movilizan los EPM al interpretar resoluciones de alumnos de 2.º de la Educación secundaria a una tarea de área. En Caviedes et al. (2021c) se presentan indicadores que permiten caracterizar el conocimiento matemático de los EPM cuando resuelven tareas que admiten el uso de procedimientos diversos. Estos indicadores se refinan y validan en Caviedes et al. (en prensa). En síntesis, los indicadores propuestos permiten caracterizar el conocimiento matemático especializado de los EPM en algunas de las categorías del subdominio del KoT y KSM. Además, en Caviedes et al. (en prensa) se añaden indicadores de conocimiento que permiten caracterizar el conocimiento didáctico matemático movilizado por los EPM en algunas de las categorías del KMT y KFLM. Los indicadores propuestos se presentan como un complemento al tercer resultado de esta tesis, pues incluyen indicadores para caracterizar el conocimiento asociado a procedimientos de naturaleza numérica y algebraica, así como sus respectivas justificaciones. Estos indicadores se presentan en la Tabla 11.

Tabla 11. Categorías e indicadores de conocimiento especializado.

Categorías de conocimiento	Indicadores
	KoT
Representaciones (R)	(R1) Geométrica: utilizando particiones en figuras conocidas para calcular el área de otras figuras. Permite visualizar el proceso efectuado para, por ejemplo, la descomposición de diferentes superficies, el trazado de líneas y elementos auxiliares, y las posibles reconfiguraciones. (R2) Simbólica: conjunto de los R+ para el cálculo directo o indirecto del área. Utilizando otras expresiones de tipo algebraico, por ejemplo, la relación entre el área de un cuadrado y su diagonal

	$d^2 = l^2 + l^2$; o bien, utilizando teorema de Pitágoras para obtener las medidas de longitud de un triángulo rectángulo $h^2 = c^2 + c^2$
Procedimientos (P) y justificaciones (J)	(P1) Descomponer superficies en unidades y/o subunidades congruentes para facilitar el proceso de medir áreas. (P2) Medir áreas como proceso aditivo contando unidades y/o subunidades que recubren la superficie. (P3) Medir dimensiones lineales y utilizar fórmulas (P4) Calcular áreas de figuras conocidas para obtener áreas de figuras desconocidas mediante descomposición (J1) Cortar el espacio bidimensional en regiones de igual área sirve como base para comparar áreas, ya que permite establecer relaciones entre las formas que componen una superficie
Propiedades (Pp) y principios (Pr)	(Pp1) Transitividad (Pp2) Acumulación y aditividad (Pr1) Todo triángulo es equidescomponible a un paralelogramo (Pr2) Dos figuras equivalentes en cantidad de espacio ocupado, tienen áreas iguales
KSM	
Conexiones auxiliares	(Cau1) Teorema de Pitágoras
Conexiones de simplificación	(Csm1) Conteo de unidades cuadradas como procedimiento elemental en el cálculo de áreas.
KFLM	
Fortalezas y debilidades	(Fd1) Conocimiento sobre fracciones (Fd2) Conocimiento sobre las propiedades de los polígonos (Fd3) Teorema de Pitágoras (Fd4) Transformaciones isométricas
Errores	(Er1) Confusión entre lado y diagonal de un cuadrado (Er2) Operaciones con fracciones
KMT	
Estrategias de enseñanza	(E1) Uso de heurísticas de resolución de problemas: plantear problemas equivalentes o más sencillos (E2) Uso de procedimientos diversos

Los indicadores propuestos para las categorías del subdominio del KoT permiten caracterizar el conocimiento matemático involucrado en la resolución de tareas de área que requieren el uso de procedimientos de naturaleza geométrica y numérica. Se contempla un conocimiento sobre representaciones, procedimientos y sus justificaciones, y propiedades y principios geométricos. Por su parte, los indicadores propuestos para la categoría de conexiones auxiliares permiten buscar evidencias del conocimiento sobre las conexiones interconceptuales (KSM) que establecen los EPM en sus resoluciones.

En Caviedes et al. (2021c, en prensa) se evidencia que los EPM recurren mayoritariamente al uso de representaciones de tipo simbólico y, por ello, a procedimientos que involucran fórmulas, aspecto que no les permite dar respuesta a la demanda de la tarea. La utilización exclusiva de fórmulas y cálculos limita la movilización de otras categorías del KoT (p.e., representaciones, propiedades y principios

geométricos), y de categorías pertenecientes al KSM, como las conexiones auxiliares (p.e., el teorema de Pitágoras). De esta manera, las dificultades de los EPM son desencadenadas por su falta de conocimiento sobre varias formas de resolución para una determinada tarea. Por el contrario, un séptimo resultado de esta tesis indica que cuando los procedimientos relacionados con la división mereológica (Duval, 2017), como las descomposiciones homogéneas, heterogéneas y la reorganización de superficies, se utilizan en conjunto con procedimientos que involucran fórmulas y cálculos, las categorías de conocimiento especializado movilizado por los EPM, en el subdominio del KoT, aumentan. Los procedimientos mencionados anteriormente se hacen explícitos mediante el uso de registros de representación diversos (Duval, 2017). En este sentido, el uso de distintos registros de representación llevaría asociado una coordinación de procedimientos basados en cálculos, descomposiciones y reconfiguraciones de figuras, además de las justificaciones y propiedades que los sustentan. Así, se evidencia que los diferentes registros de representación tienen un valor instrumental y organizador dentro del subdominio KoT, valor que hasta ahora no es reconocido por el MTSK. Esto expande y refuerza el resultado 4 de esta tesis. El valor instrumental y organizador de las representaciones en el KoT se ilustra en la Figura 23.

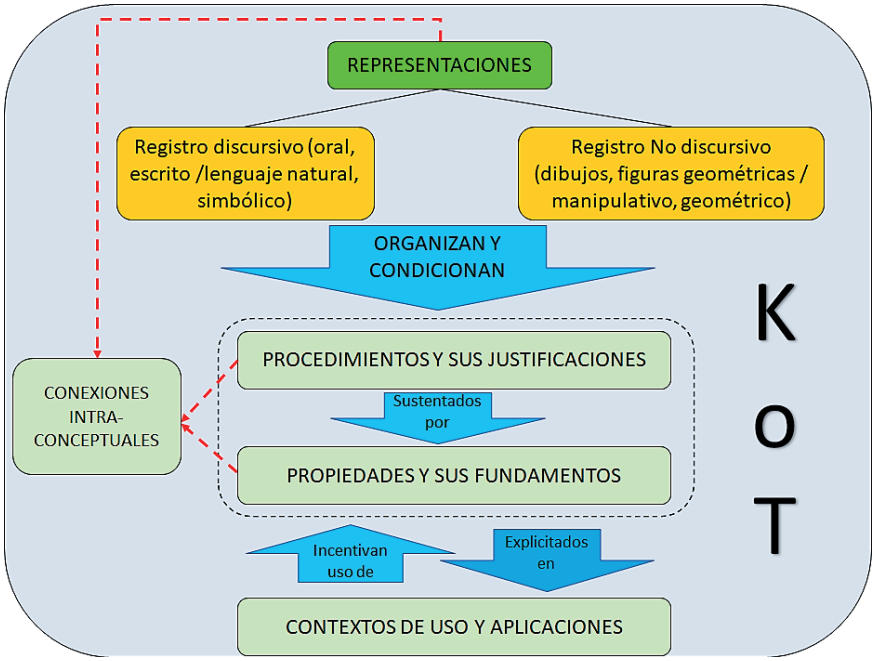


Figura 23. Categorías del KoT considerando el valor instrumental y organizador de las representaciones.

Respecto a las conexiones interconceptuales (KSM) se identifican conexiones auxiliares y conexiones de simplificación. Sin embargo, al igual que en Caviedes et al. (2022b) se observan algunas dificultades para la identificación de dichas conexiones. En primer lugar y al igual que en el sexto resultado, se observan dificultades con la definición de conexiones auxiliares. En segundo lugar, la definición de conexiones de simplificación podría ser algo confusa al momento de buscar evidencias de ellas en las resoluciones de los EPM. Esto expande el resultado seis sobre las dificultades en el uso del KSM como herramienta analítica. Por ejemplo, Carrillo-Yañez et al. (2018) señalan que las conexiones de simplificación reconocen el carácter temporal de los contenidos matemáticos, por lo que las matemáticas más avanzadas podrían contextualizarse de manera retrospectiva en los contenidos más elementales en los que se basa. Con base en esto, Flores-Medrano (2022) señala que una conexión de simplificación ocurre cuando se utiliza la suma de Riemann y el reticulado para el cálculo de áreas, como una relación de conocimiento avanzado-elemental. Sin embargo, el ejemplo mencionado podría involucrar una relación con procedimientos que deben ser aprendidos previamente y, por lo tanto, dicha conexión de simplificación podría bien ser auxiliar o asociada a un conocimiento más profundo del contenido que se enseña (KoT). En el caso del presente estudio, la conexión de simplificación involucra el *conteo de unidades cuadradas como procedimiento elemental en el cálculo de áreas.* Igualmente, es posible que esto pueda ser caracterizado como conexión auxiliar en términos de un conocimiento previo al uso de fórmulas, o bien, como un conocimiento amplio sobre los procedimientos (y las representaciones de las que dichos procedimientos se derivan) que se ven involucrados en la medición de áreas. En este último caso, el *conteo de unidades cuadradas como procedimiento elemental en el cálculo de área* podría ser un conocimiento asociado al subdominio del KoT. En este sentido, se confirma el sexto resultado de esta tesis y se evidencia la necesidad de seguir explorando si la caracterización actual del KSM posibilita la identificación y caracterización de conexiones matemáticas, en el conocimiento del profesor, sin ambigüedades.

En el caso de la interpretación que realizan los EPM a las respuestas de alumnos, en Caviedes et al. (en prensa) se muestra que un mismo tema (p.e., uso de procedimientos diversos) puede ser considerado como indicador de conocimiento en diferentes categorías y subdominios. Esto, de acuerdo a la capacidad de los EPM para usarlo en la

interpretación de las respuestas de alumnos y planificación de estrategias de enseñanza. En el proceso de interpretación que realizan los EPM se identifican conocimientos que se presentan como fortalezas o debilidades -para los alumnos- en la resolución de una determinada tarea de área -KFLM-. Este tipo de conocimiento estaría asociado al uso de procedimientos que involucran la descomposición y reorganización de figuras, las propiedades de los polígonos y las fracciones. Por ejemplo, el conocer las propiedades de los cuadrados y triángulos puede ser una fortaleza al momento de resolver tareas de áreas, o bien, una debilidad si dichas propiedades no se conocen. El conocimiento en términos de fortaleza o debilidad estaría asociado a un conocimiento previo sobre la estructura del área -KSM- en términos de las conexiones interconceptuales que se requieren para resolver las tareas (aunque dada las dificultades en el uso del KSM, esto puede ser discutible). De esta manera, un octavo resultado sugiere que las categorías del KFLM y KSM no serían excluyentes, sino que podrían dar cuenta de diferentes niveles de conocimiento especializado sobre el área en los EPM. Mientras el KSM involucra las conexiones entre conceptos matemáticos, el KFLM implicaría una interpretación de estas relaciones, en términos de fortaleza o debilidades, para la resolución de una determinada tarea matemática por parte de los alumnos.

Por otro lado, los indicadores propuestos para las categorías del KMT serían de utilidad para analizar los errores cometidos por los alumnos, y posteriormente, para tomar decisiones que permitan reorientar dichos errores. Por ejemplo, los EPM fueron capaces de identificar que los alumnos confunden el lado de un cuadrado con su diagonal. A partir de aquí, los EPM propusieron plantear problemas equivalentes para que los alumnos puedan reconocer que la diagonal de un cuadrado no es igual a su lado. Tanto los errores identificados, como las estrategias utilizadas para redirigirlos, estarían vinculados con el conocimiento matemático de los EPM – KoT y KSM- (p.e., propiedades de los cuadrados y triángulos rectángulos, teorema de Pitágoras), por lo que dicho conocimiento permitiría a los EPM interpretar las respuestas de alumnos a tareas de área. En este contexto y, aunque el modelo presenta los subdominios y respectivas categorías de manera separada para efectos analíticos (Carrillo-Yañez et al., 2018), el presente estudio señala que la potencialidad del MTSK estaría en que la relación entre subdominios, y sus categorías, puede informar sobre una complejidad progresiva en el conocimiento matemático y didáctico matemático de los EPM.

SECCIÓN 6.
CONCLUSIONES

6. Conclusiones

La presente investigación tuvo como objetivo general caracterizar el conocimiento especializado que ponen en juego los EPM cuando se enfrentan a un conjunto de tareas profesionales que involucran el área de figuras planas. En este contexto, en el apartado 6.1 se presenta la contribución del presente estudio al campo de la Educación Matemática. Posteriormente, se presentan las implicaciones didácticas del estudio (6.2), y se mencionan algunas recomendaciones para futuras investigaciones (apartado 6.3). Finalmente, se hace referencia a las limitaciones del estudio (apartado 6.4).

6.1 Aportaciones al campo de la Educación Matemática

En la sección 1 de esta tesis, apartado 1.4, se mencionan algunos estudios que abordan el conocimiento sobre el área en los EPM (p.e., Baturo y Nason, 1996; Hong y Runnalls, 2020; Simon y Blume, 1995). Dichos estudios enfatizan la falta de conocimiento matemático y didáctico matemático de los EPM, aspecto que favorece la tendencia de los EPM a: (1) asociar el área con cálculos y fórmulas; y (2) ignorar otros elementos matemáticos que se ven involucrados en los procesos de medición de áreas, como las propiedades, las características de las unidades de medida o la relación multiplicativa que origina la fórmula del área. Desde la perspectiva de este estudio, la tendencia de los EPM hacia el uso de fórmulas y cálculos se relaciona con la falta de un conocimiento matemático robusto, que permita a los EPM ejecutar con precisión los procesos de medición de áreas. En este sentido, este estudio considera que un conocimiento matemático robusto puede ser caracterizado desde el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas – MTSK- (Carillo-Yañez et al., 2018), pues la dualidad teórico-analítica permite hacer explícitas las especificidades del conocimiento sobre el área y sus procesos de medición. Tomando esto en consideración, en el presente estudio se caracteriza el conocimiento matemático especializado de los EPM, tomando en cuenta las diferentes categorías del subdominio del KoT y KSM. Esto es, las representaciones, los procedimientos y las justificaciones que pueden ser utilizados en la resolución de una determinada tarea de área; las propiedades de conservación, transitividad, y acumulación y aditividad, y la relación entre ellas y con otros conceptos matemáticos. Igualmente, y debido a que un conocimiento puramente matemático no es suficiente para abordar la especificidad del conocimiento de los profesores, ni para llevar a cabo la labor de enseñar matemáticas (Shulman, 1986), se considera el conocimiento didáctico matemático que requieren los EPM para interpretar respuestas de alumnos a tareas de área.

A fin de dar respuesta al objetivo general de este estudio, caracterizar el conocimiento especializado que ponen en juego los EPM cuando se enfrentan a un conjunto de tareas profesionales que involucran el área de figuras planas, se aborda una doble perspectiva. Primero, se construye una base referida a los elementos matemáticos que se ven involucrados en los procesos de medición de áreas. Dicha base se construye con datos recogidos con alumnos de primaria y secundaria. A partir de aquí, se consolidan aquellos

elementos que los EPM deben conocer para su futura práctica y se realiza una caracterización de su conocimiento especializado.

En Caviedes et al. (2021a) se presenta la primera aportación teórica de este estudio, la que corresponde a una caracterización de los elementos matemáticos que se ven involucrados en los procesos de medición de áreas a lo largo de la Educación primaria, y que no se reportan en la literatura especializa sobre el área de figuras planas. Esto se realiza mediante tres significados parciales del área que se construyen tomando en consideración distintos contextos de uso, representaciones, procedimientos, propiedades, proposiciones y argumentos. En su conjunto, los significados parciales del área permiten realizar una aproximación hacia un significado global del área, que da cuenta de la complejidad que subyace a los procesos de medición en el contexto de la Educación primaria. Los significados parciales del área se presentan en tres configuraciones epistémicas (Caviedes et al., 2021a) que pretenden ser una herramienta, teórica y analítica, que puede ser utilizada por investigadores interesados en el estudio del área y sus procesos de medición en el contexto escolar.

Con base en las configuraciones epistémicas, y en las categorías de conocimiento proporcionadas por el modelo MTSK como herramienta teórica y analítica, en Caviedes et al. (2022a, 2022b) se presenta el segundo aporte de esta tesis, la caracterización del conocimiento matemático especializado de los EPM, cuando resuelven tareas que requieren el uso de procedimientos geométricos, mediante una serie de indicadores de conocimiento. En particular, se observa que un conocimiento matemático robusto sobre el área de figuras planas involucra la coordinación de distintas representaciones, procedimientos, propiedades y justificaciones por parte de los EPM. La coordinación de tales categorías permite a los EPM justificar sus resoluciones atendiendo a lo que hacen y porqué lo hacen. Como se muestra en Caviedes et al. (2022a, 2022b) los EPM que justifican sus respuestas y procedimientos de manera robusta, se apoyan en algunos principios geométricos (p.e, dos polígonos son congruentes si sus lados y ángulos son respectivamente iguales o congruentes; todo polígono puede descomponerse en triángulos; un paralelogramo que tiene la misma base que un triángulo, ambos colocados entre las mismas paralelas, tiene el doble de área que el triángulo). Sin embargo, tales principios no fueron movilizados en la mayoría de las resoluciones y justificaciones escritas de los EPM, lo que revela un vacío en su KoT y una relación entre la falta de este tipo de conocimientos y las respuestas descriptivas (Hong y Runnalls, 2020).

La caracterización del conocimiento movilizado por los EPM, en tareas que involucran el uso de procedimientos de naturaleza geométrica, también muestra que las representaciones tienen un valor instrumental dentro del subdominio del KoT, ya que permiten hacer explícitos los procedimientos que son utilizados por los EPM y, a partir de estos, las justificaciones, las propiedades y los principios geométricos. De esta manera, las representaciones utilizadas, en sus registros discursivo y no discursivo, condicionan la movilización de distintas categorías e indicadores de conocimiento especializado en los EPM. En este contexto, el tercer aporte de esta tesis pone de relieve el rol de las representaciones en la resolución de tareas que involucran la comparación de áreas y, así mismo, dentro del subdominio del KoT. Esto se ve reflejado y consolidado, también, en Caviedes et al. (2022c). En Caviedes et al. (2022a, 2022b) se evidencia que las representaciones, en su registro discursivo y no discursivo, permiten identificar que las transformaciones de tratamiento y conversión (Duval, 2006) se ven sustentadas por la coordinación estratégica de las diferentes categorías de conocimiento de los subdominios del KoT y KSM. Así, dichas transformaciones llevan asociado un conocimiento especializado sobre el área de figuras planas, y se presentan como una condición necesaria para que los EPM puedan coordinar distintas categorías e indicadores de conocimiento de ambos subdominios (KoT-KSM).

En Caviedes et al. (2022b) se evidencia que los procedimientos propios de la división mereológica permiten a los EPM realizar una exploración visual de las figuras presentadas en las tareas (Duval, 2017), aspecto que facilita la identificación de las propiedades geométricas que se pueden utilizar (como la conservación del área), y la obtención de reconfiguraciones que permiten dar respuesta a la demanda de las tareas. A partir de aquí, el cuarto aporte de esta tesis pone de relieve el rol de las propiedades en tareas que requieren la comparación de áreas. Al respecto, en Caviedes et al. (2022a, 2022b) se señala que la propiedad de conservación del área se moviliza de manera conjunta con otras propiedades (acumulación y aditividad) y que, en su conjunto, dichas propiedades dan soporte a los procedimientos de naturaleza geométrica que se requieren para resolver las tareas. Igualmente, esto puede deberse a la naturaleza de las tareas, ya que, al restringir el uso de cálculos e instrumentos de medición los EPM se ven obligados a utilizar procedimientos alternativos al uso de fórmulas. Aunque el uso de tareas que restringen los elementos antes mencionados por sí solo no es suficiente, sirve de apoyo

para que los EPM puedan utilizar operaciones figurales, condición necesaria para poder aplicar las fórmulas de cálculo de áreas (Duval, 2017). Además, el diseño de tareas presentado puede brindar indicios sobre cómo proponer tareas para promover la construcción y movilización de categorías de conocimiento matemático especializado en los EPM.

Como complemento al segundo aporte de esta tesis, se presenta la caracterización del conocimiento matemático especializado de los EPM, cuando resuelven tareas que involucran el uso de procedimientos de naturaleza diferente. Esto mediante indicadores de conocimiento que complementan el segundo aporte. En Caviedes et al. (2021c, en prensa) se señala que un conocimiento especializado sobre el área de figuras planas involucra, nuevamente, la coordinación de distintas representaciones, procedimientos, propiedades y justificaciones, por parte de los EPM. Además, se observa que el uso de distintos registros de representación (p.e., geométrico, simbólico) lleva asociado la coordinación de procedimientos basados en cálculos, descomposiciones y reconfiguraciones de figuras. Esto significa que el uso complementario y coordinado de procedimientos de naturaleza geométrica, numérica y algebraica (Douady y Perrín-Glorian, 1989) es una condición necesaria para poder resolver tareas de área. El uso de este tipo de procedimientos involucraría un mayor conocimiento especializado por parte de los EPM. Además, a partir del análisis realizado en Caviedes et al. (en prensa) se evidencia la necesidad de revisar la construcción actual del subdominio del KSM. Esto se presenta como el quinto aporte de esta tesis. En este estudio, las categorías definidas para el subdominio del KSM presentaron ciertas ambigüedades al intentar caracterizar el tipo de conexiones matemáticas que establecían los EPM. Dichas ambigüedades se encontraron al momento de revisar la caracterización de conexiones auxiliares, de simplificación y de complejización, pues tal y como se indicó en el apartado de resultados, la definición actual del modelo está realizada con un enfoque procedimental, más que conceptual (De Gamboa, Caviedes y Badillo, 2022). En este sentido, es posible que las conexiones queden definidas en términos procedimentales y no por la relación entre diferentes conceptos matemáticos.

Finalmente, el último aporte de esta tesis está relacionado con las potencialidades del modelo MTSK en la caracterización del conocimiento sobre el área de figuras planas de los EPM. En Caviedes et al. (2022b, en prensa) se evidencia que modelo MTSK (Carrillo-Yañez et al., 2018) fue útil para caracterizar el conocimiento de los EPM, pues sus

subdominios y respectivas categorías permitieron realizar una diferenciación y caracterización detallada del conocimiento matemático, y didáctico matemático, que movilizan los EPM en un proceso de resolución e interpretación de respuestas de alumnos.

Respecto al conocimiento matemático, se considera que las categorías definidas por el modelo MTSK, para el subdominio del KoT, se pueden poner en correspondencia, y de este modo enriquecer, con lo que en la configuración epistémica se presenta como objetos matemáticos primarios (Godino et al., 2007). La adaptación de la configuración epistémica al subdominio del KoT permitió profundizar y dirigir el análisis del conocimiento matemático involucrado en las resoluciones de los EPM. Aunque el subdominio del KoT reconoce la complejidad asociada a los objetos matemáticos (Carrillo-Yañez et al., 2018), no hace explícita la manera en que tal complejidad puede ser explorada. En este sentido, la dualidad teórica-analítica del MTSK, en particular el KoT, puede ser enriquecida por la configuración epistémica, pues dicha herramienta permite visualizar la manera en que los objetos matemáticos (p.e., representaciones, procedimientos, propiedades) se organizan, otorgando información sobre la complejidad del área como objeto matemático de referencia.

El uso del modelo MTSK permitió describir una complejidad progresiva en el conocimiento matemático de los EPM, en términos de las relaciones que se pueden establecer entre distintos subdominios y sus categorías de conocimiento. Por ejemplo, las representaciones, y la coordinación entre sus registros discursivo y no discursivo, permitió a los EPM justificar sus resoluciones de manera más robusta. Esto evidenció, además, que tal coordinación es una condición necesaria para que los EPM puedan resolver tareas de área movilizando distintas categorías e indicadores del subdominio del KoT y, a su vez, del KSM (por la diversidad de procedimientos asociados a ambos registros de representación). En este contexto, las conexiones intraconceptuales e interconceptuales entre las diferentes categorías del KoT y KSM, permiten dar cuenta del conocimiento especializado que es necesario para que los EPM puedan resolver tareas de manera competente y, por lo tanto, evidenciar una progresión de conocimiento en términos de tales conexiones.

Respecto al conocimiento didáctico matemático, los subdominios y categorías definidas por el MTSK permitieron explorar el conocimiento que los EPM ponen en juego en un

proceso interpretativo. Las categorías propuestas para el KFLM hicieron posible identificar la manera en que los EPM eran conscientes del pensamiento de los alumnos (Carrillo-Yañez et al., 2018), al abordar tareas matemáticas sobre el área de figuras planas. De esta manera, dichas categorías permitieron explorar la manera en que los EPM identificaban errores, fortalezas y debilidades en los alumnos, asociadas al área como objeto de aprendizaje. Por su parte, el subdominio del KMT hizo posible explorar la manera en que el propio conocimiento teórico, asociado a la experiencia dada por la formación inicial y escolar de los EPM, les permitía ser conscientes de las estrategias de enseñanza necesarias para abordar el contenido matemático (Carrillo-Yañez et al., 2018), sobre el área de figuras planas. En este sentido, las categorías propuestas por el modelo MTSK, para el subdominio del KMT permitieron caracterizar las estrategias de enseñanza que proponían los EPM, a fin de subsanar dificultades en los alumnos.

Con base en lo anterior, el MTSK se presenta como una herramienta analítica que permite explorar la complejidad asociada al conocimiento de los EPM (Carrillo-Yañez et al., 2013; Carrillo-Yañez et al., 2018), sobre el área de figuras planas. Igualmente, se considera que el modelo puede beneficiarse al tomar en consideración dos aspectos que se vieron reflejados en este estudio. Primero, sería necesario clarificar, en el subdominio del KoT, la manera en que la complejidad de los objetos matemáticos puede ser abordada en el análisis del conocimiento en uso de los profesores o EPM. Actualmente el modelo define categorías para el subdominio del KoT, sin embargo, no informa la manera en que tales categorías se pueden organizar para dar cuenta de la complejidad de los objetos matemáticos. Segundo, es posible que las categorías del subdominio del KSM puedan presentar ciertas ambigüedades al momento de analizar el conocimiento en uso de los profesores o EPM. La caracterización actual podría interpretarse en términos procedimentales, y no de conexiones entre conceptos, pues lo que se pone en juego son distintos procedimientos que pueden, o no, ser parte de distintos conceptos. En este sentido, el modelo se beneficiaría al tomar en consideración lo que dice la literatura actual sobre conexiones matemáticas (p.e., De Gamboa et al., 2020; Hatisaru 2022), poniendo el foco en la estructura interna de las conexiones, más que en los procedimientos que permiten conectar diferentes ideas matemáticas.

Aunque el modelo ha sido utilizado, mayoritariamente, para explorar la práctica de profesores en activo (Liñan et al., 2014), en este estudio el modelo demostró su utilidad para explorar el conocimiento en uso de los EPM en labores distintas a las de enseñar,

como la resolución de tareas e interpretación de respuestas de alumnos mediante cuestionarios.

Por otra parte, el modelo MTSK, en conjunto con la herramienta de la configuración epistémica, permitió orientar el diseño de tareas para el grupo de EPM. De esta manera, el presente estudio considera que el modelo MTSK es útil para diseñar tareas que permitan explorar el conocimiento especializado de los EPM. En particular, el subdominio de conocimiento especializado del KoT, así como sus categorías e indicadores adaptados de la configuración epistémica, hicieron posible diseñar y adaptar tareas a fin de poder hacer emerger el conocimiento especializado de los EPM. La caracterización a priori de los aspectos disciplinares (KoT) que subyacen a los procesos de medición de áreas, fue útil para seleccionar aquellos procedimientos, justificaciones, representaciones y propiedades, que se querían explorar en las resoluciones de los EPM. En este sentido, los indicadores construidos para el KoT y sus categorías, permitieron conceptualizar tareas que hicieron posible acceder al conocimiento sobre el área y sus procesos de medición en los EPM (Ribeiro y Amaral, 2015).

Respecto al resto de los subdominios, el MTSK posibilitó una primera aproximación hacia las conexiones interconceptuales (KSM) que se esperaba que los EPM pusieran en juego en sus resoluciones. Si bien es cierto, esta caracterización de indicadores no fue hecha a priori, la consideración de posibles conexiones permitió adecuar y diseñar tareas que promovieran su emergencia de las resoluciones de los EPM. Igualmente, y tal como se menciona en los apartados anteriores, es necesario seguir explorando la caracterización actual del subdominio del KSM, a fin de identificar si las categorías de dicho subdominio presentan ambigüedades al ser utilizadas en el análisis del conocimiento en uso de los profesores y EPM.

En los subdominios del KFLM y KMT no se realizó una caracterización a priori que permitiera construir indicadores para las respectivas categorías. Sin embargo, las categorías propuestas por el MTSK permitieron considerar la emergencia de conocimiento didáctico matemático en las resoluciones de los EPM, que posteriormente (y luego de análisis realizado) se caracterizaron como indicadores asociados a cada categoría. De este modo, este estudio considera que el MTSK se presenta como un marco que permite organizar y estructurar el diseño y secuenciación de tareas a través de sus distintos subdominios y categorías de conocimiento (Montes et al., 2019).

El análisis y exploración del conocimiento que movilizan los EPM en la resolución de tareas de área, y en la interpretación de respuestas de alumnos, deja en evidencia que uno de los aspectos que permite a los EPM utilizar su conocimiento matemático, y didáctico matemático, es el conocer las diferentes formas de resolución que puede admitir una tarea de área (Shulman, 1986, 1987). Igualmente, esto les permite justificar mejor el por qué resuelven tareas matemáticas de una manera determinada y no de otra (Shulman, 1986, 1987). Además, el conocimiento sobre distintas formas de resolución permite a los EPM tomar en consideración su propia comprensión sobre el uso de distintos procedimientos, para guiar a los alumnos y para proponer estrategias que permitan subsanar errores en ellos. De este modo, se hace necesario familiarizar a los EPM, desde su formación inicial, con el uso de procedimientos de distinta naturaleza (Douady y Perrín-Glorian, 1989), a fin de que puedan comprender la complejidad de tales procedimientos y adelantar posibles dificultades de los alumnos, cuando estos se enfrentan a tareas complejas.

Si bien es cierto el estudio presentado es de carácter exploratorio, es decir, no buscaba desarrollar conocimiento en los EPM, si no buscar evidencias del mismo, los indicadores de conocimiento construidos, tanto a priori como a posteriori, podrían ser utilizados para secuenciar tareas que permitan el desarrollo y construcción de un conocimiento progresivo sobre el área y sus procesos de medición en los EPM. Los indicadores construidos para cada uno de los subdominios, y sus respectivas categorías, podrían ser útiles, también, para refinar y rediseñar los cursos y programas de desarrollo profesional (Policastro et al., 2019). Esto, porque la caracterización de conocimiento sobre el área de figuras planas, mediante el uso de distintos indicadores, permite poner el foco en las especificidades asociadas a los procesos de medición de áreas, y en aquellos aspectos que es necesario que los EPM desarrollen en su rol como futuros profesores. En este contexto, el MTSK puede servir como guía para la elección de los elementos que se quieren explorar o construir en los EPM, y como una herramienta que permite abordar la complejidad del conocimiento de los profesores en relación al área y su medición (Policastro et al., 2019). Esto, en términos de las relaciones que se pueden establecer entre los distintos indicadores, categorías y subdominios de conocimientos.

6.2 Implicaciones didácticas

En este estudio se caracteriza el conocimiento especializado que ponen en juego los EPM al enfrentarse a un conjunto de tareas profesionales que involucran el área de figuras planas. Al respecto, el conocimiento caracterizado en los EPM se presenta como un complemento a otras investigaciones (p.e., Baturo y Nason 1996; Tierney et al., 1990; Hong y Runnalls, 2020; Simon y Blume, 1995). Esto, porque el presente estudio deja de lado el análisis centrado en las dificultades y sus posibles causas, y se centra en aquellos componentes de conocimiento, así como sus relaciones, que son necesarios para ejecutar con precisión los procesos de medición de áreas, y para movilizar conocimiento especializado sobre el área de figuras planas. Igualmente, el estudio se centra en el conocimiento que usan los EPM para interpretar respuestas de alumnos.

Por otra parte, en el presente estudio se corroboran resultados de otras investigaciones que señalan que tanto alumnos como EPM comparten dificultades en relación a los procesos de medición de áreas (p.e., Kospentaris et al., 2011; Hong y Runnalls, 2020; Runnalls y Hong, 2020; Simon y Blume, 1995; Zacharos, 2006). Dichas investigaciones no analizan, de manera complementaria, resoluciones de alumnos y EPM (salvo en D`Amore y Fandiño, 2006), si no que las dificultades reportadas están dadas por estudios con alumnos y otros estudios con EPM. En este estudio se confirman estos resultados analizando resoluciones de alumnos de primaria, primer ciclo de secundaria y EPM. Al respecto, se evidencia que, aunque la investigación centrada en el profesor indica que el conocimiento de los profesores debe ser más robusto, más profundo y más formal que el de los alumnos (Shulman, 1986; Carrillo et al., 2018), este estudio evidencia que dicha premisa no se cumple. Por lo tanto, resulta necesario cuestionarse la manera en que los programas de formación inicial abordan la complejidad que subyace a los procesos de medición de área, pues el conocimiento de los EPM, no difiere, en gran medida, del que pueden tener alumnos de 13-14 años.

Lo expuesto en los apartados anteriores permite presentar algunas implicaciones didácticas como fruto de este estudio. Tales implicaciones pretenden ser útiles para formadores de maestros que abordan enseñanza del área de figuras planas. Así, se destaca que las implicaciones didácticas se presentan como una posibilidad de desarrollar un conocimiento comprensivo en los EPM, aspecto que facilitaría, posteriormente, su

capacidad de transformar el contenido que enseñan en algo comprensible para sus estudiantes (Shulman, 1986).

La Figura 24 aborda la enseñanza del área desde un enfoque geométrico para el desarrollo de conocimiento especializado, es decir, se privilegia el uso de procedimientos relacionados con la división mereológica (Duval, 2017), y la comparación y reproducción de formas. Tal y como se señala en los apartados anteriores, el conocimiento sobre el área de figuras planas y sus procesos de medición debe abordar, en primera instancia, el uso de procedimientos que excluyan cálculos, y las representaciones geométricas asociadas, pues las propiedades de conservación, transitividad y acumulación y aditividad se hacen explícitas mediante el uso de procedimientos de naturaleza geométrica. A su vez, el uso de dichos procedimientos puede permitir la movilización de principios geométricos que dan fundamento a las propiedades y que, en su conjunto, permiten a los EPM explicar de mejor manera lo que hacen y por qué lo hacen.

Un primer abordaje del área mediante este enfoque podría permitir a los EPM superar las dificultades asociadas a la aceptación de la propiedad de conservación del área (Hong y Runnalls, 2020), pues tal y como se evidenció en Caviedes et al. (2022a, 2022b) la conservación del área, en conjunto con otras propiedades y principios geométricos, da sustento, y a la vez se hace explícita, mediante el uso de procedimientos que involucran descomposiciones y reconfiguraciones de las figuras geométricas. Igualmente, conocer y utilizar este tipo de procedimientos, puede ser un indicador de éxito en la resolución de tareas más complejas (Caviedes et al., 2021a, 2021c), a la vez que permite a los EPM desarrollar una comprensión de las fórmulas y una fluidez procedimental.

En la Figura 25 se aborda el desarrollo de conocimiento especializado desde una enseñanza del área que implica un enfoque geométrico y numérico. Es importante señalar que este tipo de enfoque debe comenzar una vez que el anterior ya ha sido trabajado con los EPM. Aquí se introduce el trabajo con unidades de medida bidimensionales y las fórmulas para calcular el área de cuadrados, rectángulos y triángulos. La introducción de este enfoque permitiría a los EPM comprender las propiedades de las unidades de medida -fácilmente reproducibles, fácilmente divisible y sin huecos en el momento de recubrir la superficie con unidades o sus fracciones- (Sarama y Clements, 2009). Además, les permitiría consolidar el reparto equitativo como estrategia de comparación de áreas, pues las unidades de medida pueden ser fraccionadas para facilitar el proceso de medición de

áreas. Finalmente, posibilita el establecimiento de relaciones entre las fórmulas del área de cuadrados y rectángulos, y la coordinación de procedimientos basados en cálculos, descomposiciones y reconfiguraciones de las figuras, aspecto necesario para ejecutar con precisión los procesos de medición de áreas (Caviedes et al., 2021a) y para movilizar conocimiento especializado (Caviedes et al., 2022b, en prensa).

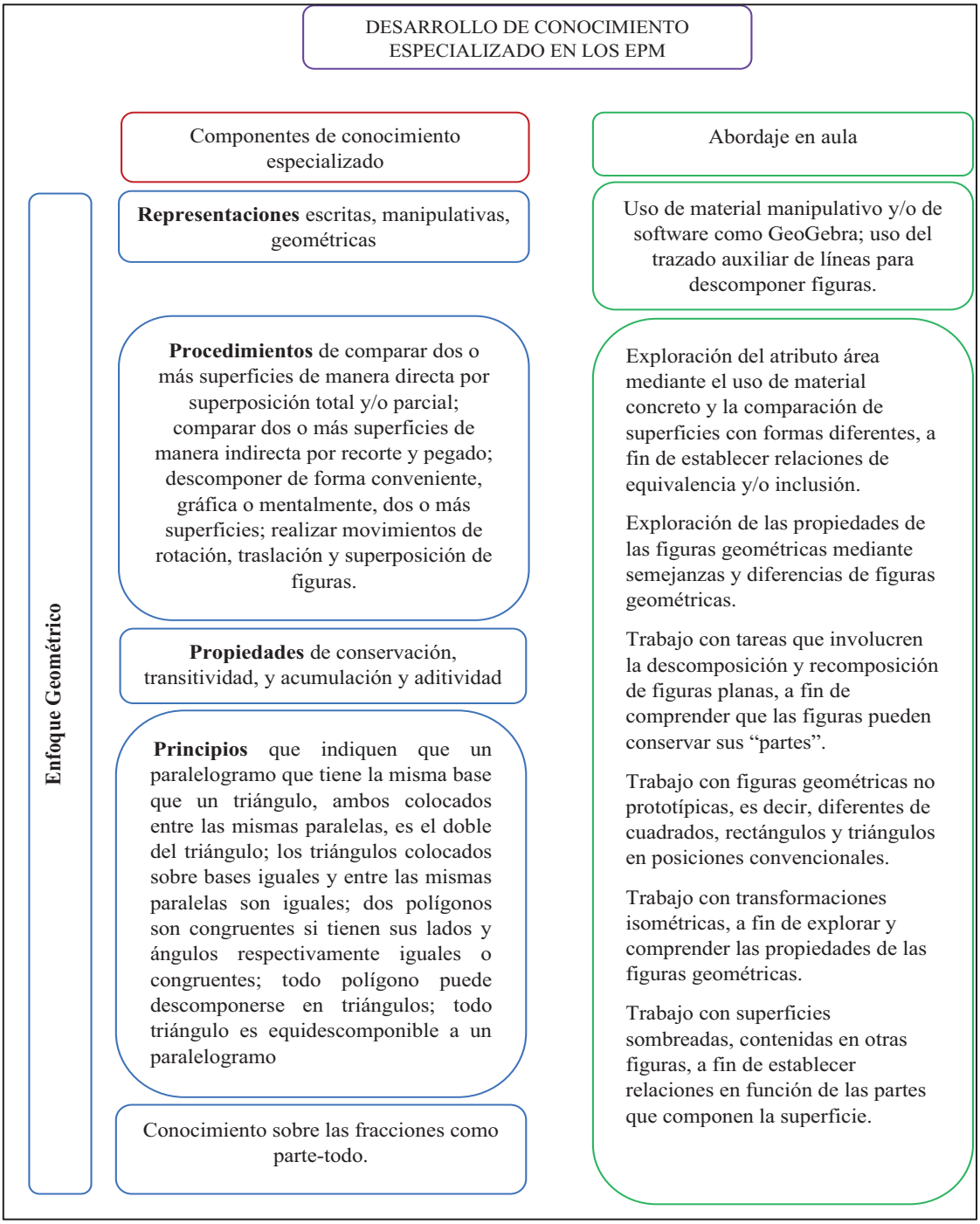


Figura 24. Implicaciones didácticas para abordar el área en su enfoque geométrico. Adaptación de los indicadores presentados en Caviedes et al. (2022b, en prensa).

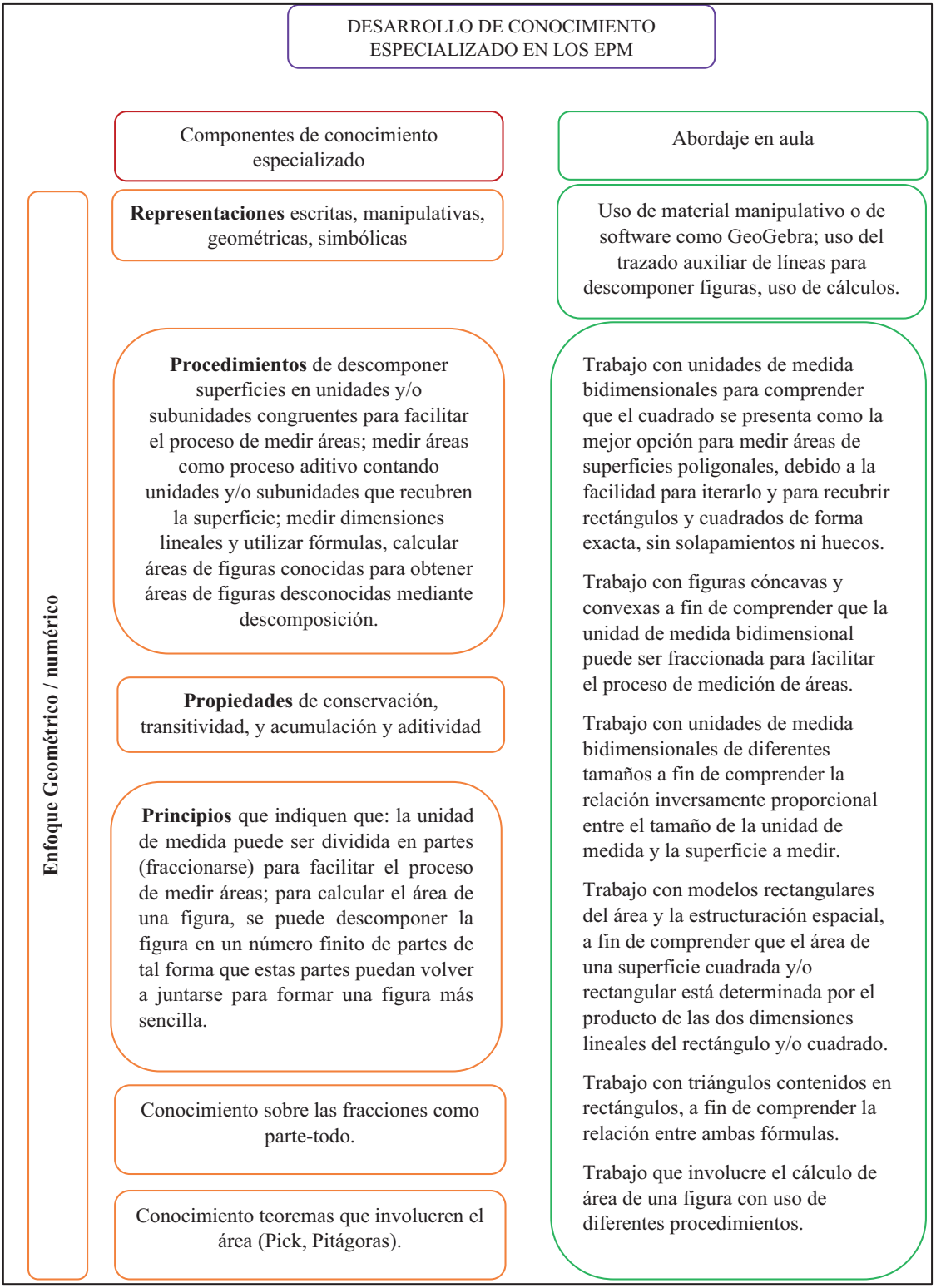


Figura 25. Implicaciones didácticas para abordar el área en su enfoque geométrico/numérico. Adaptación de los indicadores presentados en Caviedes et al. (2022b, en prensa).

6.3 Recomendaciones sobre futuras investigaciones

Los indicadores de conocimiento construidos y presentados en este estudio pueden servir como una base para el rediseño de programas de formación inicial, en el sentido que pueden permitir el desarrollo de un conocimiento específico sobre los procesos de medición de áreas en los EPM. Al respecto, se considera necesario llevar a cabo investigaciones que utilicen los indicadores presentados, con la finalidad de secuenciar tareas y corroborar si es posible la construcción de un conocimiento especializado progresivo en los EPM. Igualmente, se considera interesante la posibilidad de hacer emerger otro tipo de conocimiento especializado y, así, refinar los indicadores de conocimiento especializado propuestos en este estudio. Además, tal y como se menciona en apartados anteriores, es necesario seguir explorando si la caracterización actual de las conexiones interconceptuales del KSM posibilita la identificación y caracterización de conexiones matemáticas, en el conocimiento del profesor, sin ambigüedades. Esto, debido a que en este estudio la caracterización de conexiones presentó algunos solapamientos entre KoT y KSM, ocasionando dificultades al momento de decidir cuál era el tipo de conocimiento matemático que se estaba movilizando en las resoluciones de los EPM.

Sumado a lo anterior, es necesario seguir explorando la manera en que las distintas categorías e indicadores de conocimiento se ponen en juego en un proceso de resolución. Al respecto, se han realizado diferentes análisis de tipo mixto, a fin de encontrar relaciones implicativas en el conocimiento de los EPM sobre el área de figuras planas. Un primer abordaje de esto se puede ver en Caviedes et al. (2022c).

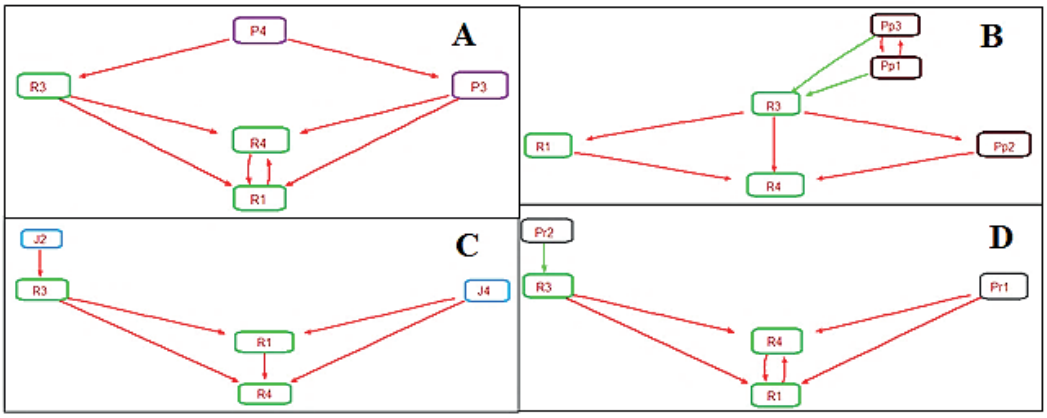


Figura 26. Relaciones implicativas entre representaciones y otras categorías del KoT. (Caviedes et al., 2022c)

En dicho reporte se muestran relaciones implicativas entre las representaciones y otras categorías de conocimiento (ver Figura 26), lo que confirma el valor instrumental y organizador de los registros de representación dentro del subdominio del KoT. Del mismo modo, se sigue explorando la relación entre las propiedades y su implicancia en la resolución de tareas de área.

Por otro lado, es posible que la secuenciación estratégica de tareas, utilizando los indicadores de conocimiento construidos, pueda servir como un primer paso para el diseño y evaluación de experimentos de enseñanza que tengan como objetivo construir conocimiento especializado específico en los EPM. Esto, mediante el diseño y trayectorias de aprendizaje que permitan cumplir tal objetivo y poner a prueba los indicadores que se proponen.

Por último, y debido a que no se ha explorado el conocimiento de los EPM en todos los subdominios del MTSK, es necesario seguir realizando estudios que utilicen el modelo, a fin de explorar y desarrollar conocimiento especializado en los EPM, y a fin de construir indicadores de conocimiento que permitan dar cuenta de distintas categorías y subdominios en un tópico específico (p.e., el área de figuras planas). Esto, con la finalidad de seguir indagando las potencialidades del MTSK y hacer más específicas las relaciones que se dan al interior de cada uno de los subdominios.

6.4 Limitaciones del estudio

El presente estudio se ha llevado a cabo con EPM que comparten características de formación y culturales específicas. En este sentido, los resultados de nuestra investigación se limitan al contexto de Catalunya (España) y no es posible asumir que los mismos resultados serán evidenciados en EPM de contextos diferentes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

7. Referencias bibliográficas

Acevedo-Rincón, J. P. (2020, marzo). Relevance of the mathematics teacher's specialized knowledge model in the planning and interpretation processes at the spatial thinking. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1514, No. 1, p. 012019). IOP Publishing. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1514/1/012019

Badillo, E., y Fernández, C. (2018, septiembre). *Oportunidades que emergen de la relación entre perspectivas: análisis del conocimiento y/o competencia docente.* En L. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F García, A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 66-80). Gijón: SEIEM.

Aguilar González, Á. (2016). El conocimiento especializado de una maestra sobre la clasificación de las figuras planas: un estudio de casos. [Tesis Doctoral, Universidad de Huelva]. http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/12006

Aguilar-González, Á., Muñoz-Catalán, M. C., y Carrillo, J. (2018). An example of connections between the mathematics teacher's conceptions and specialised knowledge. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *15*(2), em1664. https://doi.org/10.29333/ejmste/101598

Bailey, K. D. (1994) Methods of Social Research (4th ed). The Free Press.

Barrett, J. E., Cullen, C. J., Miller, A. L., Eames, C. L., Kara, M., y Klanderman, D. (2017). Area in the middle and later elementary grades. En J. E. Barrett, D. H. Clements, y J. Sarama (Eds.), *Children's measurement: A longitudinal study of children's knowledge and learning of length, area, and volume.* Journal for research in mathematics education monograph series (Vol. 16, pp. 105–127). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Baturo, A., y Nason, R. (1996). Student teachers' subject matter knowledge within the domain of area measurement. *Educational studies in mathematics*, *31*(3), 235-268. https://doi.org/10.1007/BF00376322

Borji, V., Erfani, H., y Font, V. (2020). A combined application of APOS and OSA to explore undergraduate students' understanding of polar coordinates. *International Journal of*

Mathematical Education in Science and Technology, *51*(3), 405–423. https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1578904

Breda, A., Seckel, M. J., y Font, V. (2018). Algunas implicaciones didácticas derivadas de la complejidad de los objetos matemáticos cuando estos se aplican a distintos contextos. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, *11*(2), 498-519.

Caviedes, S. (2022). Resolución de tareas "que involucran el área de figuras planas" por estudiantes de sexto de primaria. *Números: Revista de didáctica de las matemáticas*, (110), 25-39.

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2019, septiembre). Aproximación a las conexiones matemáticas que establecen futuros maestros de primaria en tareas de medida y comparación de áreas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 233-242). Valladolid: SEIEM.

Caviedes, S., De Gamboa, G., y Badillo, E. (2019). Conexiones matemáticas que establecen maestros en formación al resolver tareas de medida y comparación de áreas. *Praxis*, *15*(1), 69-87. https://doi.org/10.21676/23897856.2984

Caviedes, S., De Gamboa, G., y Badillo, E. (2020). Procedimientos Utilizados por Estudiantes de 13-14 Años en la Resolución de Tareas que Involucran el Área de Figuras Planas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *34(68)*, 1015-1035. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n68a09

Caviedes, S., De Gamboa, G., y Badillo, E. (2021a). Mathematical objects that configure the partial area meanings in task-solving. *International Journal in Mathematics Education, Science and Technology*, 1-20. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1991019

Caviedes, S., De Gamboa, G., y Badillo, E. (2021b, septiembre). Procedimientos utilizados por estudiantes que resuelven de manera exitosa tareas que involucran el área de figuras planas. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 205 – 212). Valencia: SEIEM.

Caviedes, S., De Gamboa, G., y Badillo, E. (2021c, septiembre). Aproximación al conocimiento especializado sobre área en estudiantes para maestro. En P. D. Diago, D. F.

Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 213 - 220). SEIEM.

Caviedes, S., De Gamboa, G., y Badillo, E (2022a, febrero). Preservice teachers' knowledge on area measurement. *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Bozen: ERME. ffhal-03748717

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2022b). Conocimiento movilizado por estudiantes para maestro al comparar áreas de figuras 2D. *Uniciencia 1*(36), 1-20. https://doi.org/10.15359/ru.36-1.41

Caviedes, S., De Gamboa, G., y Badillo, E (2022c, julio). Pre-service teacher`s specialised knowledge on area of flat figures. En C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez, y N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 123-130). Alicante: PME

Caviedes, S., De Gamboa, G., y Badillo, E. (en prensa). Conocimiento especializado sobre el área de figuras planas en estudiantes para maestro. *Avances de investigación en educación matemática.* https://doi.org/10.35763/aiem20.4076

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Contreras, L., y Muñoz-Catalán, M. (2013, febrero). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Hasery M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the 8th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2985-2994). Antalya: ERME.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Castelnuovo, E. (1981). *La matemática: la Geometría*. Ketres.

Cayo, H., y Contreras, L. (2020). Algunos elementos claves del conocimiento especializado del profesor de matemáticas para la gestión de las relaciones área-perímetro. *Educación Matemática, 32*(2), 39-68. https://doi.org/10.24844/EM3202.02

Chamberlin, M. y Candelaria, M. (2018). Learning from Teaching Teachers: A Lesson Experiment in Area and Volume with Prospective Teachers. *Mathematics Teacher Education and Development*, *20*(1), 86-111.

Clements, D. H., y Sarama, J. (2014). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203520574

Clements, D. H., Sarama, J., Van Dine, D. W., Barrett, J. E., Cullen, C. J., Hudyma, A., Dolgin, R., Cullen, A. y Eames, C. L. (2018). Evaluation of three interventions teaching area measurement as spatial structuring to young children. *The Journal of Mathematical Behavior*, *50*, 23-41.

Clements, D. H., Sarama, J., Van Dine, D. W., Barrett, J. E., Cullen, C. J., Hudyma, A., Dolgin, R., Cullen, A. L., y Eames, C. L. (2018). Evaluation of three interventions teaching area measurement as spatial structuring to young children. *The Journal of Mathematical Behavior*, *50*(23), 23–41. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.12.004

Clements, D. H. y Stephan, M. (2004). Measurement in pre-K to grade 2 mathematics. *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*, 299-317.

Cobo, P., y Fortuny, J. M. (2000). Social interactions and cognitive effects in contexts of area-comparison problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, *42*(2), 115-140.

Cohen, L., Manion, L., y Morrison, K. (2007). *Research methods in education* (6th ed). Routledge.

Corberán, R. (1996). Análisis del concepto de área de superficies planas. *Estudio de su comprensión por los estudiantes desde primaria a la universidad.* [Tesis Doctoral, Universidad de Valencia]. https://www.uv.es/aprengeom/archivos2/Corberan96.pdf

Creswell, J. W. (2011). *Controversies in mixed methods research*. En N. K. Denzin y Y. S. Lincoln (Eds.), Handbook of qualitative research (4th ed., pp. 269–284). SAGE.

Currículum educació secundària obligatòria (2019). Generalitat de Catalunya Departament d'Educació. https://educacio.gencat.cat/web/.content/home/departament/publicacions/colleccions/curriculum/curriculum-eso.pdf

D'Amore, B. y Fandiño, M. (2007). Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *10*(1), 39-68.

De Gamboa, G., Badillo, E., Ribeiro, M., Montes, M. y Sánchez-Matamoros, G. (2020) The role of teachers' knowledge in the use of learning opportunities triggered by mathematical connections. En S. Zehetmaier, D. Potari y M. Ribeiro (Eds.), *Professional Development and Knowledge of Mathematics Teachers* (pp. 24–43). London: Routledge.

De Gamboa, G., Caviedes, S., y Badillo, E. (2022). Mathematical Connections and the Mathematics Teacher's Specialised Knowledge. *Mathematics*, *10* (21), 1-24. https://doi.org/10.3390/math10214010

Douady, R., y Perrin-Glorian, M. J. (1989). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(4), 387–424. https://doi.org/10.1007/BF00315608

Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. En R. Sutherland y J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142–157). Springer.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. En F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1, pp. 3–26)*. Mexico: PME.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (2nd ed.). Universidad del Valle Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking – The registers of semiotic representations*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9

Euclid (1847). Book I. Definitions. En *The Elements of Euclid. The first six books*. Bibliotheca Universalis.

Fernández, S. y Figueiras, L. (2014). Horizon Content Knowledge: Shaping MKT for a Continuous Mathematical Education. REDIMAT, *3*(1), 7-29. http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2014.38

Flores, E., Escudero, D. I., y Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275-282). Bilbao: SEIEM.

Flores-Medrano, E. (2022). Conocimiento de la estructura de las matemáticas. Conocimiento de la estructura de las matemáticas. En J. Carrillo-Yañez., M.A. Montes., N. Climent, (Eds.), *Investigación sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK): 10 Años de Camino* (pp. 47–55). Dykinson: Madrid. https://doi.org/10.14679/1453

Font, V., Godino, J. D., y D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, *27*(2), 2–7.

Font, V., Pino-Fan, L. R., y Breda, A. (2020). Una evolución de la mirada sobre la complejidad de los objetos matemáticos. *Revista Paradigma*, *41*, 107-129. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2020.p107-129.id846

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Reidel.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM*, *39*(1-2), 127–135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: Implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, *39*(1), 38–43.

Godino, J. D., Wilhelmi, M., Blanco, T., Contreras, Á, y Giacomone, B. (2016). Análisis de la actividad matemática mediante dos herramientas teóricas: Registros de representación semiótica y configuración ontosemiótica. *Avances de investigación en educación matemática*, 10, 91–110.

Hatisaru, V. (2022). Mathematical connections established in the teaching of functions. *Teaching Mathematics and Its Applications: An International Journal of the IMA*, hrac013, 1-21. https://doi.org/10.1093/teamat/hrac013

Hiebert, J., y Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hiebert, J., y Wearne, D. (1993). Instructional tasks, classroom discourse and students' learning in second grade arithmetic. *American Educational Research Journal, 30*(2), 393-425

Hill, H. C., Schilling, S. y Ball, D. L. (2004). Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *The elementary school journal*, *105*(1), 11-30. https://doi.org/10.1086/428763

Hirstein, J. J., Lamb, C. E., y Osborne, A. (1978). Student misconceptions about area measure. *The Arithmetic Teacher*, *25*(6), 10-16.

Hong, D., y Runnalls, C. (2020). Examining preservice teachers' responses to area conservation tasks. *School Science and Mathematics, 120*(5), 262-272. https://doi.org/10.1111/ssm.12409

Kamii, C., y Kysh, J. (2006). The difficulty of "length × width": Is a square the unit of measurement? *The Journal of Mathematical Behavior*, *25*(2), 105–115. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2006.02.001

Kilpatrick, J., Swafford, J. y Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics* (Vol. 2101). National research council (Eds.). National Academy Press.

Kordaki, M., y Potari, D. (1998). A learning environment for the conservation of area and its measurement: A computer microworld. *Computers & Education*, *31*(4), 405–422. https://doi.org/10.1016/S0360-1315(98)00050-5

Kospentaris, G., Spyrou, P., y Lappas, D. (2011). Exploring students' strategies in area conservation geometrical tasks. *Educational Studies in Mathematics*, *77*(1), 105–127. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9303-8

Krippendorff, K. (2004). *Content Analysis: An Introduction to its Methodology*. Sage.

Lehrer, R., Jenkins, M. y Osana, H. (1998). Longitudinal study of children's reasoning about space and geometry. En R. Lehrer y D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 137–167).

Lehrer, R. (2003). Developing understanding of measurement. En J. Kilpatrick, W. G. Martin, y D. Schifter D. (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 179-192). National Council of Teachers of Mathematics.

Liñan, M., Barrera, V. y Infante, J. (2014). Conocimiento especializado de los estudiantes para maestro: la resolución de un problema con división de fracciones. *Escuela Abierta*, *17*(1), 41-63. https://doi.org/10.29257/EA17.2014.04

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. https://doi.org/10.4324/9780203856345

Mamona-Downs, J., y Papadopoulos, I. (2006, July). The problem-solving element in young students' work related to the concept of area. *En Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 121–128). Prague: PME

Montes, M., Aguilar, A., Carrillo, J. y Muñoz-Catalán, M. (2015, febrero). MTSK: From Common and Horizon Knowledge to Knowledge of Topics and Structures. En B. Ubuz, C. Haser, y M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the 8th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3185-3194). Antalya: ERME.

Montes, M., Climent, N., Carrillo, J., y Contreras, L. (2019, febrero). Constructing tasks for primary teacher education from the perspective of Mathematics Teachers' Specialised Knowledge. *Proceedings of the 11th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* Utrecht: ERME. ffhal-02430479

Murphy, C. (2012). The role of subject knowledge in primary prospective teachers' approaches to teaching the topic of area. *Journal of mathematics teacher education*, *15*(3), 187-206.

Niss, M. (2006). The concept and role of theory in mathematics education. En C. Bergsten, B. Grevholm, H. Måsøval and F. Rønning (Eds.), *Relating Practice and Research in Mathematics Education. Proceedings of Norma* (pp. 97–110).

Outhred, L., y Mitchelmore, M. (2000). Young children's intuitive understanding of rectangular area measurement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(2), 144–167. https://doi.org/10.2307/749749

Perrin-Glorian, M. J. (1990). L'aire et la mesure. *Petit x*, *24*, 5-36.

Policastro, M., Mellone, M., Ribeiro, M. y Fiorentini, D. (2019, febrero). Conceptualising tasks for teacher education: from a research methodology to teachers' knowledge development. En *Proceedings of the 11th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Utrecht: ERME. hal-02430487

Popoca, M. y Acuña, C. (2011). Cambio en figuras de área igual, conservación y relaciones figurales. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *24*, 541-550.

Puig, L. y Guillén, G. (1984). *Necesidad y experimentación de un nuevo modelo para el estudio de la geometría en la EGB y Escuelas de Magisterio*. [Memoria de Investigación, Universidad de Valencia]. https://redined.educacion.gob.es/xmlui/handle/11162/83753

Pratt, S. S. (2018). Area models to image integer and binomial multiplication. *Investigations in Mathematics Learning*, *10*(2), 85-105.

Ribeiro, M., y Amaral, R. (2015, enero). Early years prospective teachers' specialised knowledge on problem posing. In Beswick, K.., Muir, T., & Wells, J. (Eds.). *Proceedings of 39th Psychology of Mathematics Education conference*, (Vol. 4, pp. 81-88). Hobart: PME.

Rojas, N., Flores, P., y Carrillo, J. (2015). Conocimiento especializado de un profesor de matemáticas de educación primaria al enseñar los números racionales. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *29*(51), 143-166. https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a08

Rowland, T., Huckstep, P. y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of mathematics teacher education*, *8*(3), 255-281. https://doi.org/10.1007/s10857-005-0853-5

Runnalls, C. y Hong, D. (2020). "Well, they understand the concept of area": Pre-service teachers' responses to student area misconceptions. *Mathematics Education Research Journal*, *32*(4), 629-651. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00274-1

Sarama, J., y Clements, D. H. (2004). Building blocks for early childhood mathematics. *Early Childhood Research Quarterly*, *19*(1), 181-189. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2004.01.014

Sarama, J. y Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203883785

Scheiner, T., Montes, M., Godino, J. D., Carrillo, J. y Pino-Fan, L. R. (2019). What makes mathematics teacher knowledge specialized? Offering alternative views. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *17*(1), 153-172. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9859-6

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, *15*(2), 4-14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Shulman, L.S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. Harvard Educational Review, *57*(1), 1-23. https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411

Simon, M. y Blume, G. (1994). Building and understanding multiplicative relationships: A study of prospective elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(5), 472-494. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.25.5.0472

Sisman, G. T., y Aksu, M. (2009). Seventh grade student's success on the topics of area and perimeter. *Elementary Education Online*, *8*(1), 243–253.

Sisman, G. T., y Aksu, M. (2016). A study on sixth grade students' misconceptions and errors in spatial measurement: Length, area, and volume. *International Journal of Science and Mathematics Education, 14*(7), 1293–1319. https://doi.org/10.1007/s10763-015-9642-5

Smith, J., Males, L. y Gonulates, F. (2016). Conceptual limitations in curricular presentations of 546 area measurement: One nation's challenges. *Mathematical Thinking and Learning*, *18*(4), 239–270. https://doi.org/10.1080/10986065.2016.1219930548

Stephan, M., y Clements, D. H. (2003). Linear and area measurement in prekindergarten to grade 2. *Learning and teaching measurement*, *5*(1), 3-16.

Tatto, M., Peck, R., Schwille, J., Bankov, K., Senk, S. L., Rodriguez, M., Ingvarson, L., Reckase, M. y Rowley, G. (2012). *Policy, Practice, and Readiness to Teach Primary and Secondary Mathematics in 17 Countries: Findings from the IEA Teacher Education and*

Development Study in Mathematics (TEDS-MM). International Association for the Evaluation of Educational Achievement.

Tierney, C., Boyd, C. y Davis, G. (1990). Prospective primary teachers' conceptions of area. In *Proceedings of the 14th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *2,* 307-314.

Zacharos, K. (2006). Prevailing educational practices for area measurement and students' failure in measuring areas. *The Journal of Mathematical Behavior, 25*(3), 224–239. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2006.09.00

Zacharos, K., y Chassapis, D. (2012). Teaching suggestions for the measurement of area in Elementary School. Measurement tools and measurement strategies. *Review of Science, Mathematics and ICT Education, 6*(2), 41–62. https://doi.org/10.26220/rev.1627

ANEXOS

8. Anexos

8.1 Cuestionario aplicado a alumnos de 6.º de la Educación primaria

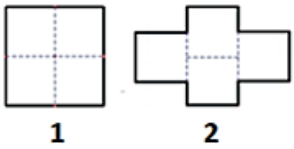
UAB
Universitat Autònoma de Barcelona

Cuestionario para estudiantes de 6º de Educación Primaria

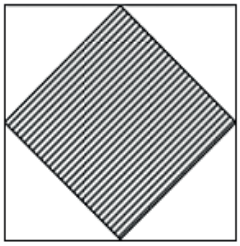
Instrucciones:

- Lee cuidadosamente el enunciado de cada una de las tareas.
- Resuelve TODAS las tareas que se proponen en el cuestionario
- Responde las preguntas correspondientes en el espacio en blanco

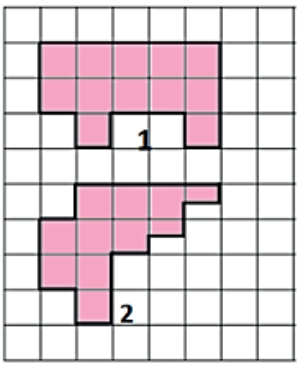
1- El cuadrado de la izquierda se ha cortado por la línea punteada y con las piezas obtenidas se ha formado la Figura 2 de la derecha ¿Cuál de las dos figuras ocupa mayor superficie, la 1 o la 2? ¿Por qué?



2- ¿Cómo puedes **descomponer la superficie del cuadrado sombreado** para comprobar que su área equivale a la mitad del área del cuadrado grande? Explícalo.

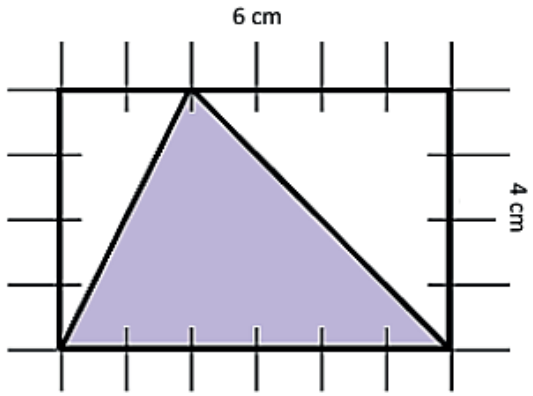


3-

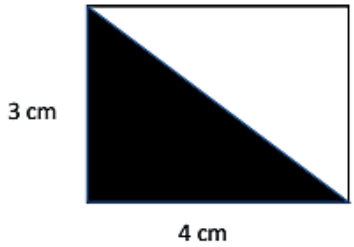


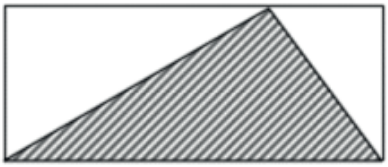
3-a. ¿Cuántas **unidades cuadradas componen las superficies** de la Figura 1 y de la Figura 2?

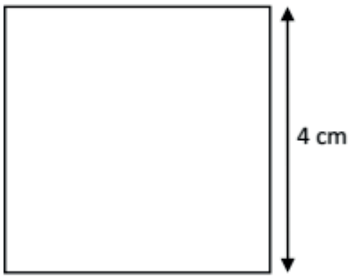
3-b. ¿Cuál dirías que tiene una **mayor área**? **¿Por qué?**

5-  	5-a. ¿Cuántas unidades cuadradas **cubren el rectángulo**? ¿Cuántas **filas y columnas** hay dentro del rectángulo?
5-b. ¿Encuentras alguna **relación entre el número de filas y columnas** que hay dentro del rectángulo y las **medidas de sus lados**? **Explícalo**	5-c. ¿Cuántas unidades cuadradas cubren el triángulo**? Explícalo**

6- El siguiente rectángulo tiene un área de 12 cm^2, ¿Cuál dirías que es el **área del triángulo negro**? **¿Por qué?**

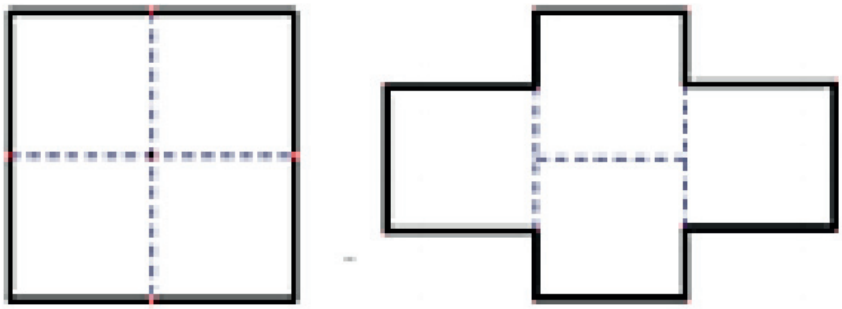


7- 	7-a. - Si el siguiente rectángulo tiene un área de 24 cm^2. ¿Cuáles podrían ser las **longitudes de sus lados**? . **¿Cómo lo sabes?**
¿Cuál sería el área del triángulo? **¿Por qué?**	

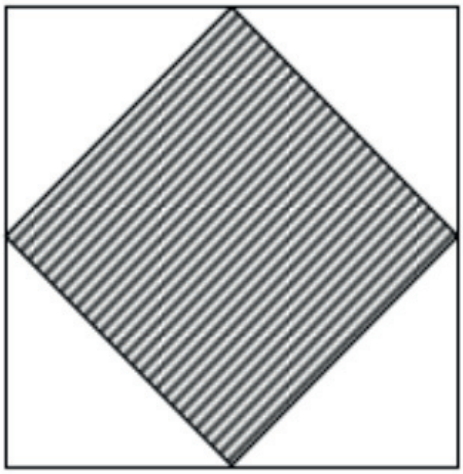
8- 	8-a. ¿Cuál es el área del cuadrado? **Explica cómo la calculaste.**
8-b. ¿Podría un triángulo cubrir la misma superficie que el cuadrado de arriba **¿Cómo lo sabes?**	8-c. Si tu respuesta es "sí" **dibuja el triángulo y explica tu método.**

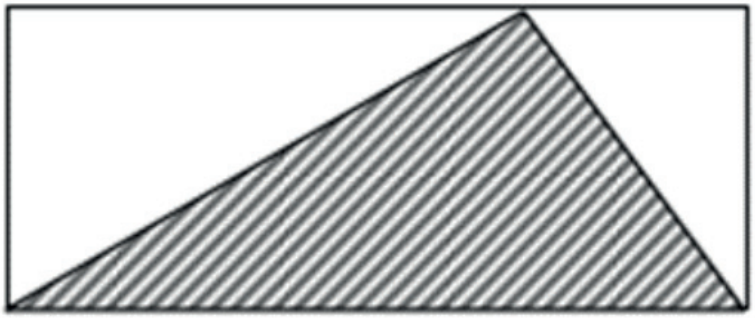
Universitat Autònoma de Barcelona

Material Anexo Cuestionario para estudiantes de 6º de Educación Primaria



1 2



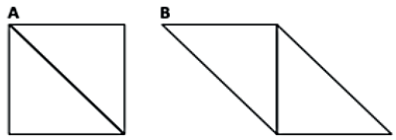


8.2 Cuestionario aplicado a alumnos de 2.º de la Educación secundaria

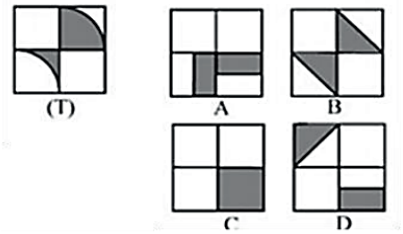
UAB
Universitat Autònoma de Barcelona

Cuestionario para estudiantes de 2º de Educación Secundaria

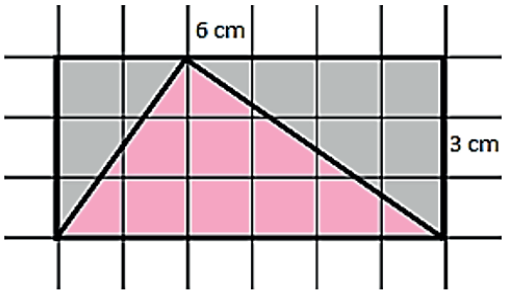
1- Imagina que tienes que pintar dos superficies como las de la Figura A y B. ¿Crees que necesitarías más pintura para pintar alguna de las dos Figuras? ¿Por qué?



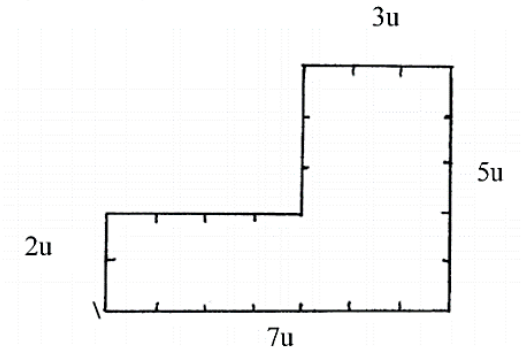
2- Tomando como referencia el área sombreada de la Figura (T) ¿Cuál o cuáles de las siguientes figuras tienen la misma cantidad de área sombreada? ¿Por qué?



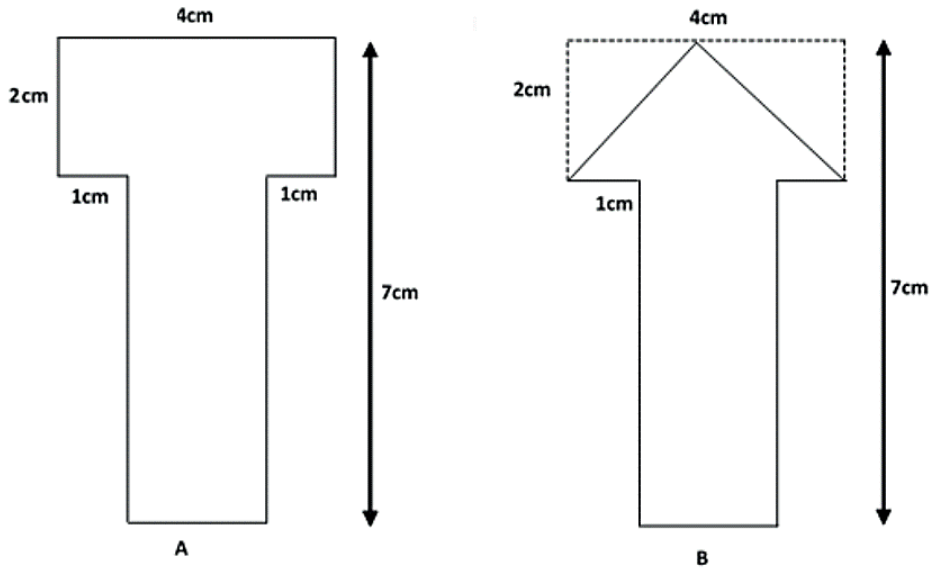
3- A partir del rectángulo dibujado en la cuadrícula responde:

	3-a. ¿Cuántas **unidades cuadradas cubren el rectángulo**?. **Explícalo**
3-b. ¿Cuántas **unidades cuadradas cubren el triángulo del centro**?. **Explícalo**	3-c. ¿Encuentras alguna relación entre el número de **unidades cuadradas que cubren el rectángulo y el triángulo**? . **Explícalo**

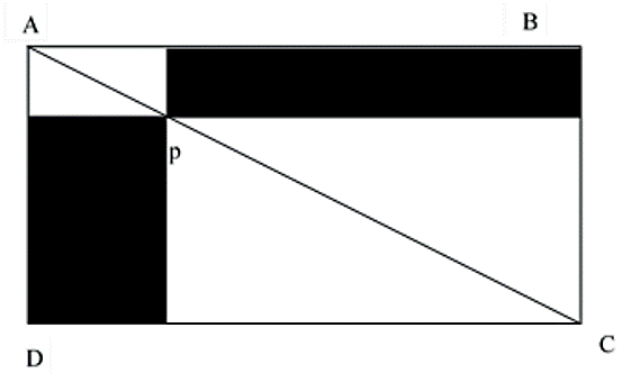
3-d. ¿**Cuántas filas y cuántas columnas** hay dentro del rectángulo? ¿Encuentras alguna **relación** entre el **número de filas y columnas y las medidas del rectángulo**?	3-e. ¿Podrías encontrar el área sin contar las unidades cuadradas**? ¿Cómo lo harías?**

4- ¿Cuántas **unidades cuadradas recubren la siguiente** Figura? 	4-a. ¿Cómo calcularías el área sin contar las unidades cuadradas? **Explícalo.**

5- Calcula el área de las Figuras A y B. **Explica cómo lo has hecho.**

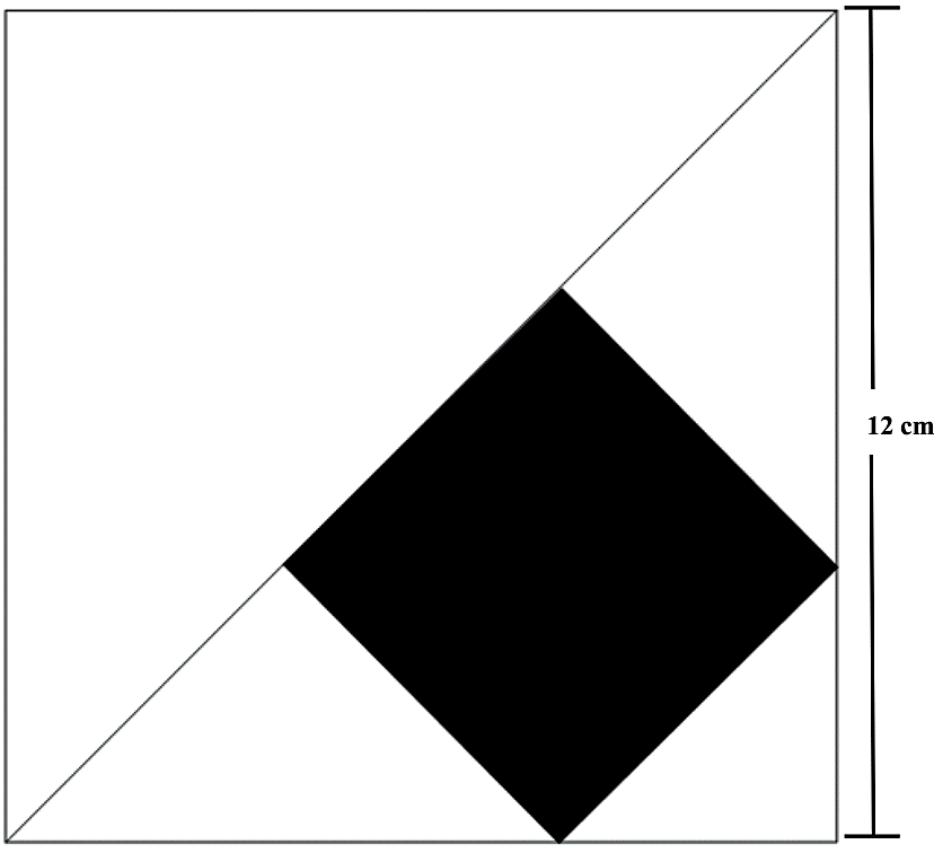


6- Por el punto P de la diagonal AC del rectángulo ABCD se trazan las paralelas a los costados de esta Figura. Así se obtienen los dos rectángulos negros. **Compara el área de los dos rectángulos negros ¿Qué conclusión puedes obtener de sus áreas? Explica tus razonamientos.**



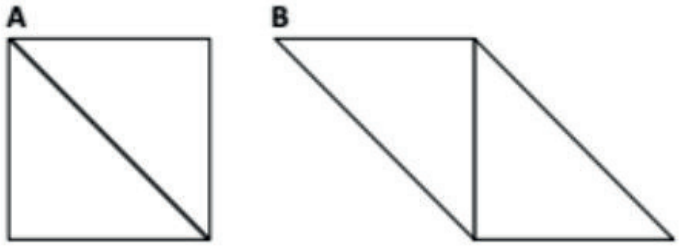
7- ¿Cuál es el área del cuadrado de lado 12cm? **¿Por qué?**

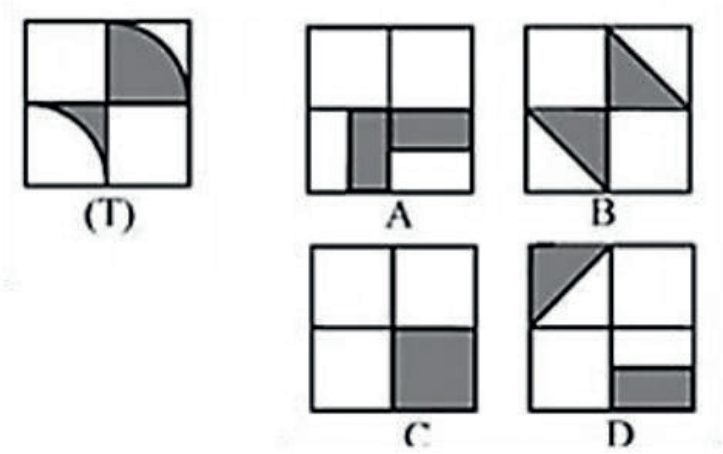
7-a. ¿De cuántas maneras posibles puedes calcular el área del cuadrado negro? **Explícalo**

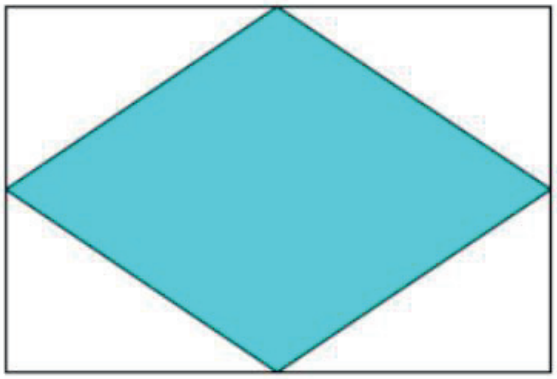


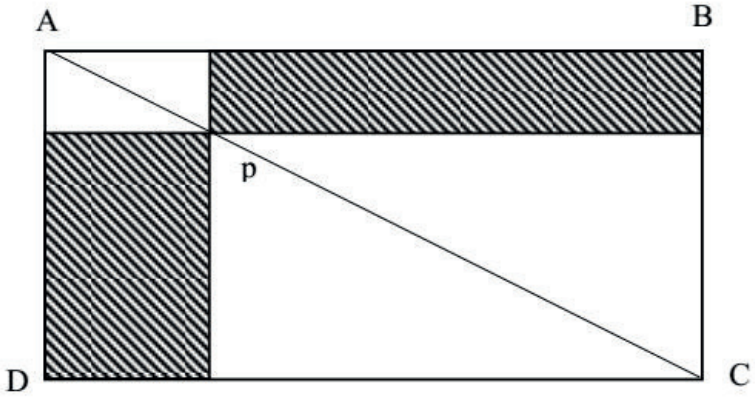
Universitat Autònoma de Barcelona

Material Anexo Cuestionario para estudiantes de 2º de la ESO









8.3 Cuestionario aplicado a EPM del tercer curso del grado de Educación primaria en la UAB

Gestió e innovació a l'aula de matemàtiques
Grau d'Educació Primària

Nombre y apellidos:

Correo electrónico:

Resuelve **todas** las tareas de la práctica individualmente.

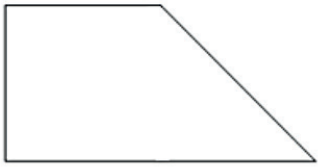
Lee atentamente los enunciados y JUSTIFICA cada uno de los procedimientos utilizados.

Al final de la práctica encontrarás las representaciones gráficas de las tareas 1, 3 y 5 en un formato ampliado, para que puedas manipular de la forma que estimes conveniente. Puedes utilizar tijeras, pegamento y hojas cuadriculadas si lo necesitas.

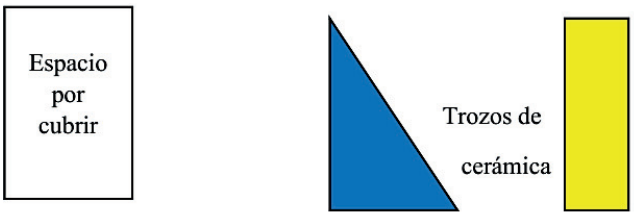
Puedes incorporar imágenes (fotografías o producciones en papel escaneadas) para mostrar los procesos o justificar tus respuestas.

PARTE I. Para resolver las tareas 1, 2 y 3, **NO se puede utilizar regla.**

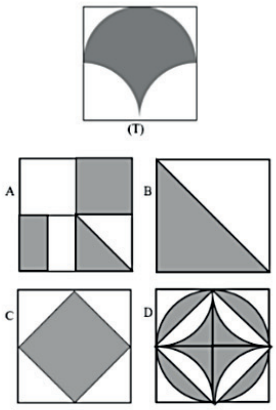
1- Un padre quiere repartir un terreno, con la forma que muestra la figura, entre sus seis hijos. Si cada hijo debe recibir la misma porción de terreno**, ¿cómo podría el padre repartir el terreno de forma equitativa?** ***Justifica tu respuesta.***



2- Camila está haciendo un mosaico con cerámica de distintos colores. Para terminar su mosaico le falta cubrir un espacio rectangular, pero no tiene ningún trozo de cerámica con esa forma. Sólo le queda un trozo de color amarillo con forma rectangular y un trozo de color azul con forma triangular, **¿Qué puede hacer Camila para cubrir el espacio que le falta en su mosaico?** ***Justifica tu respuesta.***

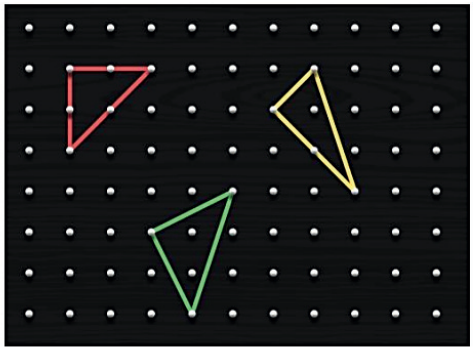


3- Tomando como referencia la superficie sombreada de la Figura (T): **¿Cuál o cuáles de las siguientes figuras tienen una superficie sombreada equivalente a la Figura (T) ¿Por qué? *Justifica tu respuesta.***

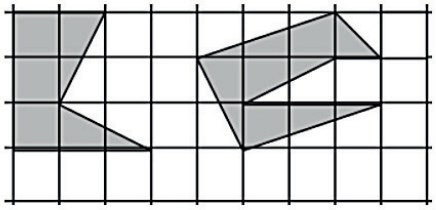


Parte II. Resuelve las tareas 4 y 5 **utilizando dos o tres procedimientos diferentes** y recuerda justificar tus respuestas. El uso de regla está permitido.

4- Observa los triángulos construidos en el geoplano. ¿Cuál es el área de cada triángulo? ¿Cuál tiene mayor área? ***Justifica tus respuestas utilizando dos o tres procedimientos diferentes.***



5- Observa las dos figuras dibujadas en la cuadrícula. ¿Cuál tiene mayor área? ¿por qué? ***Justifica tus respuestas utilizando dos o tres procedimientos diferentes***.



Parte III.

6. Una maestra prepara seis enunciados para su clase de 6º de primaria. Antes de comenzar la clase se le cae la carpeta con todos los enunciados y se mezclan. **Ayuda a la maestra a organizar los enunciados en dos grupos (sin resolverlos).** ***Justifica los criterios de clasificación que utilices.***

   Enunciado 1: María es pastelera y ha preparado un bizcocho, de forma cuadrada, de 50 cm de lado. Con motivo de la navidad, ella quiere hacer un bizcocho con forma triangular, que ocupe el mismo espacio que el bizcocho cuadrado, para representar un árbol navideño. **¿Cómo puede hacer María su bizcocho navideño?**

   Enunciado 2: Alicia tiene huerto en una superficie rectangular que mide 2 metros de ancho y 5 metros de largo. Necesita repartir el espacio equitativamente para plantar acelgas, tomates, zanahorias, papas y cebollas. **¿Cuál será el espacio que tendrá para cada verdura?**

   Enunciado 3: Ana necesita cercar un terreno recién sembrado para protegerlo de los animales. Si el terreno tiene forma rectangular y mide 50 metros de largo y 20 metros de ancho **¿Cuántos metros de alambre necesita Ana para cercar todo el terreno?**

   Enunciado 4: En una escuela han organizado una campaña de invierno para confeccionar mantas de patchwork[1] a partir de cuadrados de lana de 20 cm de lado. Si desean hacer mantas que midan 2 metros de largo y 1 metro 60 cm de ancho. **¿Cuántos cuadrados de lana se necesitan para una manta de patchwork?**

   Enunciado 5: Una clase de alumnos va a construir una cometa utilizando papeles reciclados. Las instrucciones dicen que la diagonal mayor de la cometa debe ser de 24 cm. La diagonal menor, debe ser la mitad de la diagonal mayor. Para decorar la cometa, los alumnos deben pegar hilo de color a elección en todo el contorno de la cometa. **¿Cuántos centímetros de hilo necesitarán los alumnos?**

   Enunciado 6: Una piscina rectangular de 15 metros de largo y 9 metros de ancho está rodeada por un camino de cemento de ancho uniforme. Si la superficie del camino es de 81 m^2. **¿Cuánto mide la longitud de su ancho?**

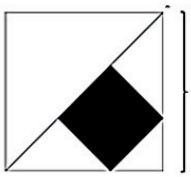
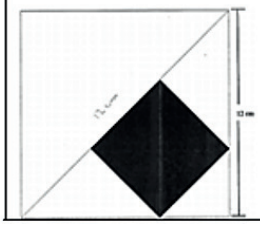
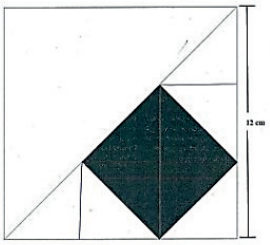
7. Si tuvieses que introducir el contenido geométrico de área en 5º de primaria. **¿Cómo definirías área?**

[1] Técnica para confeccionar mantas por medio de la unión de cuadrados tejidos, o de tela, con diferentes diseños.

Gestió e innovació a l'aula de matemàtiques
Grau d'Educació Primària

UAB Universitat Autònoma de Barcelona

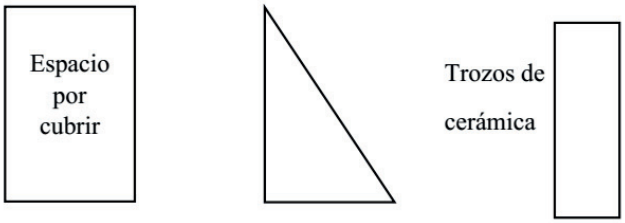
8. Tània y Laia cursan 2º de la Educación Secundaria. En clase de matemáticas, la profesora pide calcular el área de dos cuadrados utilizando más de un procedimiento. Tània tiene dificultades para calcular el área de uno de los cuadrados. Laia ha podido resolver toda la tarea usando diferentes procedimientos. **¿Qué conocimientos crees que necesita Tània para poder resolver la tarea? ¿Cómo podría la profesora ayudarla?** ***Justifica tu respuesta***

Enunciado de la tarea	a- ¿Cuál es el área del cuadrado de 12 cm de lado? ¿por qué? b- ¿De cuántas maneras posibles puedes calcular el área del cuadrado negro? Explícalas.  12 cm
Respuesta de Tània	a- *"Es 144 cm² ya que los cuadrados tienen los lados iguales y la fórmula para calcularlo es la siguiente:"* *A□ = lado² = 12² = 144 cm²"*  *b- "Visualmente el lado del cuadrado mide 8cm, $\frac{1}{9}$ parte del lado del triángulo → 8 x 8= 64cm*
Respuesta de Laia	a- ¿Cuál es el área del cuadrado de 12 cm? **¿por qué?** A= $C^2 = 12^2 = 144$ cm² *"Si formamos cuadrados pequeños de 1 cm², nos saldrían 12 filas y 12 columnas y si multiplicamos el nº de filas por el nº de columnas nos saldrían 144 cm²"* b- ¿De **cuántas maneras** posibles puedes **calcular el área del cuadrado negro**? **Explícalo.**  *"Si dibujas una de las diagonales del cuadrado puedes ver que esta representa el doble de los triángulos de su lado, y si dibujas la otra, ves que representa cuatro veces el más pequeño de todos. Si trazas la altura de los otros triángulos puedes ver que la mitad del cuadrado representa 9 triángulos... el cuadrado negro $\frac{4}{9}$ de la mitad. Por lo tanto, del total... $\frac{4}{18}$ o $\frac{2}{9}$ porque la otra mitad también la dividí en 9 partes"* *"Con la medida de los lados del cuadrado y haciendo Pitágoras para calcular la diagonal del cuadrado y dividirla en tres para encontrar el lado del cuadrado negro"* *"Midiendo el lado del cuadrado"* *"$\frac{2}{9}$ de $12^2 = \frac{2}{9}$x144 = $\frac{288}{9}$ =32 cm²"* *"El lado del cuadrado está compuesto por tres triángulos pequeños, por lo tanto, cada lado mide 4cm → $\frac{b \times h}{2} = \frac{4 \times 4}{2} = \frac{16}{2}$ = 8 cm². Como el cuadrado es cuatro veces este → 8 cm² x 4 = 32 cm²".*

Gestió e innovació a l'aula de matemàtiques
Grau d'Educació Primària

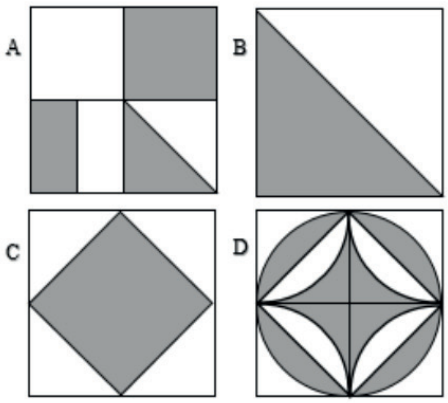
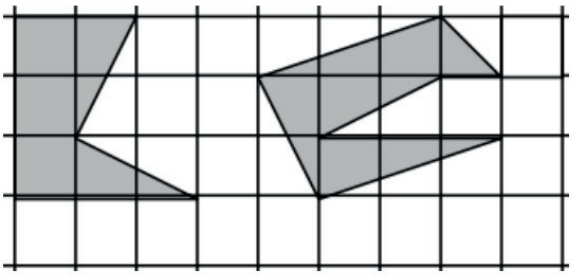
ANEXO

Tarea 1



Tarea 3

(T)



Tarea 5