

ADVERTIMENT. L'accés als continguts d'aquesta tesi queda condicionat a l'acceptació de les condicions d'ús establertes per la següent llicència Creative Commons:  <https://creativecommons.org/licenses/?lang=ca>

ADVERTENCIA. El acceso a los contenidos de esta tesis queda condicionado a la aceptación de las condiciones de uso establecidas por la siguiente licencia Creative Commons:  <https://creativecommons.org/licenses/?lang=es>

WARNING. The access to the contents of this doctoral thesis it is limited to the acceptance of the use conditions set by the following Creative Commons license:  <https://creativecommons.org/licenses/?lang=en>

UAB

**Universitat Autònoma
de Barcelona**

Departamento de didáctica de las matemáticas y
de las ciencias experimentales

Tesis doctoral industrial

Riqueza competencial en una guía didáctica de matemáticas

El caso del proyecto Innovamat para primaria

Bellaterra, febrero de 2025

Autor: **Albert Vilalta Riera**

Dirección: **Jordi Deulofeu Piquet** (UAB) y **Laura Morera Úbeda** (Innovamat)

Tutoría académica UAB: **Mequè Edo Basté** y **Lluís Albarracín Gordo**

La presente tesis doctoral industrial se ha realizado gracias a la financiación del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades del Gobierno de España (DIN2018-010032). Bajo la tutela de la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB), la empresa que acoge al doctorando es Innovamat Education SL.

Resumen

Esta tesis doctoral industrial examina la riqueza competencial en matemáticas desde un enfoque basado en competencias y, desde esta perspectiva, se centra en la caracterización, el análisis y la mejora de guías didácticas de matemáticas para la educación primaria.

A partir de un marco teórico que parte del Enfoque Documental de la Didáctica (DAD), se desarrolla y valida una herramienta modular que permite caracterizar la riqueza matemática de las actividades incluidas en una guía didáctica, con un énfasis en las conexiones matemáticas. La investigación responde a preguntas clave sobre la definición de riqueza competencial, la naturaleza de las guías didácticas como documentos que se diferencian de los libros de texto, y la relevancia de explicitar las conexiones en el diseño curricular. Los resultados no solo aclaran estas cuestiones fundamentales, sino que también muestran la utilidad de la herramienta para enriquecer guías didácticas, especialmente en el caso de Innovamat, la organización que acoge este doctorado industrial.

Además de sus aportaciones académicas, la tesis ha generado un impacto directo en la práctica profesional de la organización. Los principios didácticos de Innovamat, que esta investigación sistematiza y refina, se han consolidado en el llamado «Libro blanco», un recurso que se ha vuelto esencial para la formación del equipo interno y una herramienta estratégica para la comunicación, el desarrollo de materiales y la fundamentación de la visión didáctica de los referentes de la organización.

En conclusión, esta tesis aporta conocimientos al área de didáctica de las matemáticas, mediante su contribución al análisis y mejora de documentos curriculares, como las guías didácticas, desde una perspectiva basada en competencias, con especial interés en las conexiones, y establece una base sólida para futuros desarrollos en el diseño de materiales educativos de matemáticas competencialmente ricos.

Resum

Aquesta tesi doctoral industrial examina la riquesa competencial en matemàtiques des d'un enfocament basat en competències i, des d'aquesta perspectiva, se centra en la caracterització, l'anàlisi i la millora de guies didàctiques de matemàtiques per a l'educació primària.

A partir d'un marc teòric que pren com a base l'Enfocament Documental de la Didàctica (DAD), es desenvolupa i valida una eina modular que permet caracteritzar la riquesa competencial de les activitats incloses en una guia didàctica, amb un èmfasi especial en les connexions matemàtiques. La recerca respon a preguntes clau sobre la definició de riquesa competencial, la naturalesa de les guies didàctiques com a documents que es diferencien dels llibres de text, i la rellevància d'explicitar les connexions en el disseny curricular. Els resultats no només aclareixen aquestes qüestions fonamentals, sinó que també mostren la utilitat de l'eina per enriquir guies didàctiques, especialment en el cas d'Innovamat, l'organització que acull aquest doctorat industrial.

A més de les seves aportacions acadèmiques, la tesi ha generat un impacte directe en la pràctica professional de l'organització. Els principis didàctics d'Innovamat, que aquesta recerca sistematitza i refina, s'han consolidat en el que es coneix com el «Llibre blanc», un recurs que s'ha tornat essencial per a la formació de l'equip intern i una eina estratègica per a la comunicació, el desenvolupament de materials i la fonamentació de la visió didàctica dels referents de l'organització.

En conclusió, aquesta tesi aporta coneixements a l'àmbit de la didàctica de les matemàtiques, mitjançant la seva contribució a l'anàlisi i la millora de documents curriculars, com són les guies didàctiques, des d'una perspectiva basada en competències, amb un interès especial en les connexions, i estableix una base sòlida per a futurs desenvolupaments en el disseny de materials educatius de matemàtiques competencialment rics.

Abstract

This industrial doctoral thesis explores competence richness in mathematics from a competency-based perspective. It focuses on the characterization, analysis, and improvement of teaching guides for elementary mathematics education.

Grounded in a theoretical framework based on the Documentational Approach to Didactics (DAD), the research develops and validates a modular tool to characterize the competency-based richness of the activities included in teaching guides, with a particular emphasis on mathematical connections. The study addresses key questions regarding the definition of competency-based richness, the unique nature of teaching guides as documents distinct from textbooks, and the importance of explicitly highlighting connections in curriculum design. The findings not only clarify these fundamental issues but also demonstrate the tool's usefulness in enhancing teaching guides, specifically in the case of Innovamat, the organization hosting this industrial doctorate.

In addition to its academic contributions, the thesis has had a direct impact on the organization's professional practices. Innovamat's didactic principles, which have been systematized and refined through this research, are now consolidated in the «White Paper». This resource has become essential for internal team training and serves as a strategic tool for communication, the development of materials, and the articulation of the organization's didactic vision.

In conclusion, this thesis contributes to the field of mathematics education by offering insights into the analysis and improvement of curricular documents, such as teaching guides, from a competency-based approach with a special focus on connections. It lays a solid foundation for future advancements in the design of rich educational materials in mathematics.

Agradecimientos

Empiezo por agradecerte a ti, apreciado lector, que te tomes el tiempo de leer las disquisiciones de un candidato a doctor en didáctica de las matemáticas. Espero que la lectura, como mínimo, te sugiera alguna reflexión interesante. Esta tesis, como la mayoría, no hubiera sido posible sin muchas horas de dedicación. Y la dedicación hubiera sido difícil de sostener en el tiempo sin el soporte de las personas que me han acompañado en el camino.

Quiero agradecer a mi familia, a mis padres Carlos y Rosa, a mi abuela Ana y a mi hermana Marta, vuestros ánimos constantes y la paciencia durante mis visitas relámpago los fines de semana. Y también a Júlia, por celebrar conmigo los momentos bonitos y ayudarme a salir de los momentos arduos, codo con codo. *T'estimo.*

También a mis profesoras, mentoras y amigas, Laura y Cecilia, por enseñarme casi todo lo que sé sobre matemáticas escolares y didáctica. Y al resto de mis compañeros en Innovamat, desde los que habéis colaborado directamente en mi investigación con vuestro consejo, hasta los que hacéis posible el proyecto desde otras áreas, os quiero agradecer que un proyecto como este sea una realidad. Es impresionante.

A mis compañeros de la UAB, profesores del departamento y miembros de los tribunales de seguimiento, así como a mis compañeros de estudios de doctorado, gracias por compartir conmigo vuestra experiencia experta.

A mis alumnos de todas las edades y etapas, desde los pequeños en infantil hasta los veinteañeros de magisterio, porque todos y cada uno de vosotros habéis contribuido a fortalecer mi vocación.

Y termino con un gran agradecimiento a Jordi, mi director de tesis, por haber sido mi *guía didáctico* desde que le conocí como profesor del máster de profesorado hasta el punto final de esta tesis y más allá. Tu sosegada sabiduría ha alumbrado cada paso del camino.

A todos, muchas gracias por formar parte de este viaje, que culmina en una pequeña pero significativa aportación a la didáctica de las matemáticas.

Índice

Resumen.....	3
Resum.....	4
Abstract.....	5
Agradecimientos.....	6
Índice.....	7
1. Introducción.....	9
2. Objetivos de la investigación.....	14
3. Contexto.....	17
3.1. Innovamat y sus objetivos.....	17
Implementar trayectorias de construcción del conocimiento matemático.....	17
Desarrollar herramientas para practicar y consolidar los aprendizajes.....	18
Medir el impacto con instrumentos para la evaluación y la intervención.....	18
Formar a los docentes en didáctica de las matemáticas.....	19
Investigar y contribuir al desarrollo de la didáctica de las matemáticas.....	19
3.2. La visión didáctica de Innovamat.....	19
I. Seguir un enfoque socio-constructivista: descubrimiento guiado, manipulación y conversación.....	20
Hacer matemáticas.....	22
El uso de materiales manipulativos adecuados para llegar a la abstracción.....	24
II. Plantear actividades ricas secuenciadas en espiral para desarrollar los procesos e interconectar conceptos.....	27
Riqueza matemática.....	28
Trayectorias de aprendizaje en espiral.....	29
III. Ofrecer contextos relevantes que favorezcan un aprendizaje significativo.....	32
Conexiones con otros ámbitos.....	33
Historia de las matemáticas y narrativa en el aula.....	34
Habilidades socioemocionales.....	38
IV. Consolidar los aprendizajes a través de la práctica hasta desarrollar fluidez.....	39
Automatizar vs. memorizar.....	40
¿Qué es la fluidez?.....	40
Desarrollar la fluidez aritmética en el aula.....	41
V. Velar por la universalidad de los recursos para atender la diversidad del aula.....	43
Las tres P: presencia, participación y progreso.....	44
El Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA).....	44
Individualización del aprendizaje.....	46
Intervención.....	47
VI. Evaluar al servicio del aprendizaje.....	48
¿Qué significa evaluar?.....	48
¿Qué evaluamos en matemáticas?.....	50
¿Cuándo evaluamos?.....	51
VII. Emplear conscientemente la tecnología.....	53
Los beneficios y riesgos de la tecnología en el aula.....	53
VIII. Entender el rol del educador como guía.....	56

Aprendizaje por indagación.....	57
El momento de gloria matemática: emoción y pasión.....	59
El conocimiento del profesor y la formación continua.....	60
IX. Involucrar a toda la comunidad educativa.....	63
La llamada «línea de escuela».....	64
La participación de las familias.....	66
El papel de los deberes.....	68
X. Desarrollar recursos didácticos basados en evidencias.....	72
3.3. El «Libro blanco de Innovamat».....	74
4. Marco teórico.....	76
4.1. Enfoque Documental de la Didáctica.....	76
Definición de «guía didáctica».....	78
4.2. Riqueza competencial en educación matemática.....	80
Resolución de problemas.....	83
Razonamiento y prueba.....	84
Comunicación y representación.....	85
Conexiones y modelización.....	86
Definición de «riqueza competencial de una actividad de matemáticas».....	90
4.3. La importancia de las conexiones.....	92
¿Qué significa «hacer conexiones» en matemáticas?.....	94
Tipos de conexiones matemáticas.....	96
5. Metodología.....	102
5.1. Creación de la herramienta.....	105
5.2. Extensión de la herramienta: conexiones.....	110
6. Aplicación de la herramienta en una guía.....	115
6.1. Análisis de datos y resultados.....	115
6.2. Discusión.....	123
7. Aplicación de la herramienta extendida: conexiones.....	127
7.1. Análisis de datos y resultados.....	127
7.2. Discusión.....	131
8. Limitaciones e investigaciones futuras.....	135
9. Conclusiones.....	138
9.1. Difusión de la investigación.....	142
10. Bibliografía.....	146
11. Anexo.....	173
11.1. Declaración de autoría del «Libro blanco» de Innovamat.....	173

1. Introducción

Quienes amamos las matemáticas, y más aún quienes amamos su didáctica, sufrimos muy a menudo las reacciones negativas que estas provocan:

—¿Eres profesor de matemáticas? —te preguntan—. ¡Buf! Yo no podría. Es que soy de letras...

Existe una percepción generalizada de que las matemáticas son una rama del conocimiento fría, abstracta y difícil, como describe Ernest (1995). El autor explica que las matemáticas tienen la imagen de ser inaccesibles, excepto para unos pocos privilegiados. Para muchos, además, las matemáticas son fuente de ansiedad. Según Young, Wu y Menon (2012) en un estudio sobre la base del neurodesarrollo de la ansiedad, la parte del cerebro afectada por la ansiedad matemática es la misma parte que se activa ante situaciones de peligro. Es difícil rastrear exhaustivamente el origen de esta ansiedad, pero podemos encontrar pistas que nos ayudarán a entender mejor el propósito de esta tesis doctoral en la reflexión que hace el profesor de Berkeley Edward Frenkel en su best-seller *Amor y matemáticas: el corazón de la realidad oculta* (2013):

¿Te imaginas que en el colegio hubieses asistido a una «clase de arte» en la que solo te hubiesen enseñado a pintar una valla? ¿Que nunca te hubiesen mostrado las pinturas de Leonardo da Vinci o de Picasso? ¿Apreciarías el arte? Lo dudo. [...] Obviamente, suena ridículo, pero así es cómo se enseñan las matemáticas y, por lo tanto, a ojos de la mayoría, son el equivalente a mirar cómo se seca la pintura. Mientras que las pinturas de los grandes maestros son accesibles, las matemáticas de los grandes maestros se encuentran cerradas bajo llave.¹ (p. 1)

Pensemos en una lengua. Si, por ejemplo, alguien memoriza todo el diccionario alemán, ¿se puede decir que ya habla alemán? Es evidente que no. Además de las palabras, su significado, su gramática y estructura, es necesario desarrollar también la comprensión lectora, la expresión escrita, la oratoria, la retórica e incluso una literatura que nos haga amar la lengua. En esta metáfora, el léxico, la gramática y la ortografía son los contenidos matemáticos. Necesarios, sí, y

¹ Salvo que se indique lo contrario, todas las traducciones de citas presentes en este trabajo doctoral han sido realizadas por el autor.

se debe procurar diseñar actividades o situaciones de aprendizaje que permitan desarrollar los contenidos del currículo, pero con eso no basta. También se necesitan unas destrezas, una competencia que permita utilizar los contenidos con sentido para resolver problemas, razonar matemáticamente, conversar, argumentar, establecer conexiones, comunicar ideas y representar conceptos. Además, así se fomenta una imagen escolar de las matemáticas más conectada con lo que realmente son: un matemático de profesión no pasa el día haciendo cálculos aritméticos. Como describe Lockhart (2009) «Hacer matemáticas debería significar siempre encontrar patrones y elaborar explicaciones bellas y significativas» (p. 18). La actividad matemática no se basa en la repetición de algoritmos, sino en la observación de patrones, la formulación de conjeturas y la deducción. Es un trabajo mucho más artístico de lo que parece. Y precisamente parece que no lo sea porque eso es lo que transmite el sistema educativo tradicional. El mismo Lockhart (2009) se muestra muy crítico con el sistema que nos ha llevado hasta aquí:

De hecho, si tuviera que diseñar un mecanismo con el propósito expreso de destruir la curiosidad natural de un niño y su amor por encontrar patrones, no podría hacerlo tan bien como se está haciendo actualmente; simplemente no tendría la imaginación para inventar las ideas absurdas y desgarradoras que constituyen la educación matemática contemporánea. (p. 2)

No es de extrañar que, en este contexto, hayan existido y existan personas y organizaciones que luchen contra esta percepción de las matemáticas. Desde Pólya (1962), Freudenthal (1973) o Castelnuevo (1976), por citar tres autores influyentes que, a mediados del siglo pasado, ya defendían una visión de la educación matemática más exploratoria y centrada en el razonamiento, hasta instituciones de referencia mundial como el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM) norteamericano, que promueve un enfoque basado en la comprensión profunda, el razonamiento y la resolución de problemas, son muchos los referentes que apuestan por una enseñanza de las matemáticas significativa y orientada al desarrollo de competencias (OCDE, 2017a). Como dijo Newton, «caminamos a hombros de gigantes». Tanto es así, que en los últimos años, desde la publicación de los *Principios y estándares* por el propio NCTM (2000), diversos currículos internacionales han optado por un marco centrado en los procesos que aglutinen las competencias matemáticas.

Como se profundiza en el capítulo 3, dentro de esta tendencia, en el año 2017 se fundó en Barcelona la organización Innovamat (Vilalta, 2021), quien acoge el doctorado industrial del cual emana la presente tesis doctoral (ref. DIN2018-010032). Innovamat se describe a sí misma como una organización dedicada a la educación matemática que desarrolla recursos didácticos basados en la investigación y la experiencia docente para promover una enseñanza de matemáticas más competencial y significativa (Vilalta, 2021). Su trabajo se centra en cuatro objetivos principales: implementar trayectorias de aprendizaje a lo largo de la escolarización, proporcionando materiales estructurados por sesiones, guías para docentes y recursos manipulativos; ofrecer herramientas para la práctica y consolidación de conocimientos; medir el impacto educativo mediante instrumentos de evaluación y detección temprana de dificultades; y formar a los docentes en didáctica de las matemáticas. Desde su inicio, el presente doctorado industrial se ha percibido como una oportunidad para realizar investigación dentro de la empresa, contribuir a la enseñanza de las matemáticas como ciencia y, en última instancia, detectar oportunidades para mejorar los recursos que se ofrecen a los centros educativos.

Uno de los pilares de Innovamat son sus guías didácticas, un documento escrito que, con la intención de ser formativo para los docentes (como consideran Leikin y Zazkis, 2010), establece la secuencia de tareas para cada sesión y la gestión recomendada en el aula. El presente estudio tiene como objetivo principal desarrollar una herramienta de análisis que permita caracterizar cualquier guía desde el punto de vista de la riqueza competencial. Para ello, se abordan cuestiones previas necesarias como «¿Qué entendemos por guía didáctica?», o «¿Qué es la *riqueza competencial* en educación matemática?». A partir de ahí, nuestra investigación busca proponer un nuevo marco para analizar y enriquecer las guías didácticas desde una perspectiva basada en competencias (combinando, entre otras, ideas de Niss y Højgaard, 2019; el TRU-math de Schoenfeld, 2016; y los trabajos de de Lange sobre niveles de competencia, 1999). Este marco integra dimensiones clave del enriquecimiento, incluyendo el contenido, los procesos matemáticos y la gestión de aula, para ofrecer una perspectiva más holística sobre el análisis y mejora de las guías didácticas. Al hacerlo, esperamos contribuir al discurso sobre el diseño de dichos documentos, y proporcionar a los docentes y diseñadores de recursos una herramienta sólida para mejorar la riqueza competencial de sus guías. Finalmente,

terminamos la tesis mostrando la modularidad de la herramienta, que se ha expandido para profundizar el análisis y el enriquecimiento de uno de los procesos matemáticos clave en particular: las conexiones.

Para ilustrar nuestro enfoque, utilizamos una metáfora que compara las actividades con la realidad y las guías, con las películas. Así como una película capta una fracción de la riqueza y complejidad de la realidad, una guía encapsula una parte de la riqueza inherente en una actividad. Esta metáfora no solamente subraya la complejidad de las actividades y la relativa simplicidad de las guías, sino que también resalta el potencial de nuestro marco para capturar y comunicar la riqueza de las actividades cuando se redactan en formato de guía (es decir, como documento escrito).

Tras el presente capítulo, de introducción, la estructura de la tesis es como sigue. En el capítulo 2, profundizamos en nuestras preguntas de investigación principales y secundarias. A continuación, en el capítulo 3, planteamos el contexto de la investigación a través de una descripción exhaustiva de los principios didácticos de la empresa que acoge el doctorado industrial. En el capítulo 4 desarrollamos el marco teórico, a través del cual definimos «guía didáctica» y «riqueza competencial» como primeras aportaciones a la tesis, y también acotamos la importancia de las conexiones en este contexto de riqueza. El capítulo 5 describe la metodología que nos sirve para plantear la herramienta de análisis de riqueza y su extensión centrada en las conexiones. En los capítulos 6 y 7 aplicamos la herramienta y su extensión, en un estudio de caso, para proporcionar una demostración práctica de su utilidad, modularidad e impacto potencial. Finalmente, terminamos con los capítulos 8 y 9, en los que exploramos las limitaciones, las propuestas de investigaciones futuras y las conclusiones.

Cabe destacar que la parte troncal de esta investigación ha sido publicada en forma de artículo revisado por pares (Vilalta et al., 2024). Con este trabajo, esperamos no solo contribuir a la mejora de los recursos didácticos que Innovamat ofrece a los centros educativos, sino también aportar al campo de la didáctica de las matemáticas una herramienta sólida para evaluar y enriquecer guías didácticas desde el punto de vista competencial, con un énfasis especial en las conexiones. En última instancia, nuestro objetivo es ayudar a construir una enseñanza matemática que, más

allá de los contenidos, cultive el pensamiento crítico, el razonamiento y la comprensión profunda.

2. Objetivos de la investigación

El objetivo general de la presente tesis doctoral es, como en toda investigación de este nivel, el aprendizaje y desarrollo de las competencias necesarias para realizar investigación, en este caso, dentro del área de conocimiento de la didáctica de las matemáticas. En concreto, enfocamos los esfuerzos en torno a cómo analizar y enriquecer guías didácticas en matemáticas, específicamente en educación primaria. Desde esta perspectiva, nuestra pregunta de investigación principal es:

¿Cómo podemos desarrollar, validar y aplicar una herramienta que combine las dimensiones clave del enriquecimiento matemático para analizar y mejorar eficazmente guías didácticas de matemáticas en educación primaria?

Para responder a esta pregunta, surgen algunas cuestiones previas que deben aclararse a lo largo del camino, de forma que se establezca un entendimiento común y coherente para el análisis:

¿Cómo definimos lo que es una guía didáctica y en qué se diferencia de un libro de texto?

¿Qué entendemos por riqueza competencial de una actividad en matemáticas?

Las respuestas a estas dos preguntas constituyen resultados clave de la tesis, ya que nos permiten proponer una definición de «riqueza competencial» (un término ampliamente usado en la educación matemática) y una definición clara de lo que se entiende por «guía didáctica.»

Asimismo, también surgen cuestiones posteriores. Algunas, se dejan indicadas para investigaciones futuras. Otras, en cambio, tienen cabida dentro del estudio que nos ocupa. A saber:

¿Qué tipo de conexiones se pueden evidenciar a partir del análisis de la riqueza competencial de una guía didáctica?

¿Cómo se puede enriquecer una guía desde el punto de vista de las conexiones?

Aunque la primera extensión modular de la herramienta se centra en las conexiones, el marco está concebido para expandirse y adaptarse a otros procesos fundamentales en el enfoque basado en competencias, como por ejemplo la resolución de problemas. De esta forma, buscamos ofrecer a diseñadores curriculares y docentes un recurso versátil y adaptable, que responda a diferentes ramas de la enseñanza de las matemáticas.

Como se puede observar, dado que esta tesis se enmarca en el contexto de un doctorado industrial, más allá de contribuir a la didáctica de las matemáticas como disciplina, se espera obtener resultados de interés para la empresa que acoge la investigación, Innovamat. Por un lado, como se puede leer en el capítulo 3, para detallar el contexto del doctorado industrial, gran parte de los esfuerzos de investigación iniciales se han dedicado a resumir por escrito los principios didácticos sobre los que se basa el proyecto Innovamat. Esta redacción supone en sí misma un primer resultado de interés para la empresa, ya que permite ordenar y justificar las ideas y referentes de los autores intelectuales de la propuesta. De hecho, como se detalla en el mismo capítulo 3, estos principios se han convertido en un resultado temprano y crucial de la tesis, ya que no solo proporcionan un marco conceptual claro y fundamentado, sino que han dado lugar a un documento interno clave conocido como el «Libro blanco» (Innovamat, 2024a), con múltiples aplicaciones dentro de la empresa. Por otro lado, el desarrollo de una herramienta para analizar la riqueza competencial y detectar oportunidades de enriquecimiento deriva en un producto tangible que permite a la empresa mejorar sus guías didácticas desde un enfoque basado en competencias.

En definitiva, consideramos que esta tesis doctoral contribuye tanto a la empresa como a la literatura existente de diversas maneras significativas. Primero, resumimos por escrito las bases didácticas sobre las que se construye el proyecto Innovamat. Segundo, ofrecemos una definición novedosa de guía didáctica, entendida como documento, basada en el marco del Enfoque Documental de la Didáctica (Trouche et al., 2018), y proporcionamos una nueva perspectiva sobre cómo conceptualizar y estudiar las guías. Tercero, identificamos rasgos clave de enriquecimiento matemático, acercándonos a una definición holística de «riqueza competencial en matemáticas», en el contexto de las guías didácticas. Finalmente, el estudio presenta la construcción, la validación y la aplicación de una herramienta

que facilita el análisis y posterior enriquecimiento de las guías, con un énfasis especial en el proceso de conexiones para probar la modularidad de dicha herramienta.

3. Contexto

Dado que esta tesis se enmarca en un doctorado industrial (ref. DIN2018-010032), resulta imprescindible contextualizar la labor de Innovamat, la empresa que acoge esta investigación y que desempeña un papel fundamental en su desarrollo. Innovamat no solo proporciona el entorno práctico en el que se implementa y valida la herramienta de análisis de guías didácticas, sino que también ofrece un enfoque educativo específico que orienta y da sentido a esta investigación. Como organización dedicada al estudio y la mejora de la didáctica de las matemáticas, Innovamat se convierte en un contexto único donde el análisis y el enriquecimiento de las guías didácticas adquiere una dimensión concreta y aplicable. De hecho, al finalizar la redacción de la presente tesis, casi medio millón de alumnos en nueve países diferentes aprenden matemáticas con Innovamat, guiados por más de 20.000 maestros (Innovamat, 2024b). Por lo tanto, comprender la misión, los objetivos y los recursos de Innovamat, así como su visión didáctica y la estructura de sus guías para el maestro, resulta esencial para situar esta investigación y apreciar plenamente las contribuciones que se buscan tanto en el ámbito académico como en la práctica educativa.

3.1. Innovamat y sus objetivos

Innovamat se define como una organización de personas comprometidas con la educación matemática que diseña recursos didácticos basados en la investigación y la experiencia docente, con el objetivo de ayudar a centros educativos de educación primaria y secundaria a trabajar las matemáticas de manera más competencial y significativa (Vilalta, 2021). De este objetivo global, y a partir del diálogo constante con los docentes, se derivan cinco metas concretas:

Implementar trayectorias de construcción del conocimiento matemático

El llamado «mapa del aprendizaje matemático» define las trayectorias didácticas que permiten construir cada contenido a lo largo de toda la escolarización, desde educación infantil hasta el final de secundaria. A partir de estas trayectorias, y teniendo en cuenta las particularidades de cada curso, se diseña una propuesta estructurada por sesiones con diferentes dinámicas que cubren el contenido

curricular de todo el curso. La propuesta cambia en función de la etapa, pero a grandes rasgos incluye: guías didácticas que detallan las actividades de cada sesión, llenas de consejos para los docentes, proyectables, vídeos y simuladores listos para presentar en el aula; cuadernos y otros recursos imprimibles para los alumnos; herramientas para atender la diversidad del aula; y todo el material manipulativo necesario. Los centros educativos que trabajan con Innovamat, además, cuentan con una persona especialista en didáctica de las matemáticas que las asesora. Este asesor acompaña a la escuela a lo largo de toda la implementación de la propuesta, puede hacer intervenciones de aula o modelajes, y resuelve las dudas e inquietudes que conlleva un cambio como este a medida que van apareciendo.

Desarrollar herramientas para practicar y consolidar los aprendizajes

Con el objetivo de que el alumnado practique el conocimiento matemático que ha construido, Innovamat lleva a los centros educativos una aplicación digital ligeramente gamificada, con actividades que, una vez a la semana, ponen a prueba las destrezas individuales de cada alumno. La aplicación propone itinerarios de práctica personalizados y, en caso de dificultad, dentro de cada actividad se ofrecen ayudas concretas que reducen la abstracción y permiten que el alumno progrese. Los docentes reciben semanalmente un informe, detallado por clase y por alumno, que permite valorar este progreso en cada bloque de contenido y destreza, además de acceder a recursos para reforzar o ampliar en función de las necesidades de cada caso. Más allá de la plataforma digital, también se ofrecen otras herramientas que favorecen la práctica específica para cada etapa, como los recursos de «vida de aula» en infantil, los juegos matemáticos o los cuadernos «Enigmath» en primaria, o la llamada «Práctica XYZ» en secundaria.

Medir el impacto con instrumentos para la evaluación y la intervención

Además de los consejos e instrumentos de evaluación formativa que se encuentran integrados en la propuesta curricular, también se ofrecen instrumentos específicos para la evaluación y la intervención: desde tests competenciales estandarizados hasta una herramienta para la detección precoz de dificultades de aprendizaje en matemáticas o un programa de intervención temprana para abordarlas.

Formar a los docentes en didáctica de las matemáticas

Los recursos, por más bien diseñados que estén, nunca son suficientes: la pieza clave para mejorar el aprendizaje de las matemáticas en los centros educativos son los docentes. Por eso, los claustros que trabajan con Innovamat disponen de una amplia oferta formativa en didáctica de las matemáticas, desde pequeños vídeos que explican didácticamente conceptos clave, hasta formaciones presenciales en directo, en la escuela, con un experto en didáctica de las matemáticas. Se busca que cada docente pueda desarrollarse profesionalmente, mejorar sus capacidades en el aula de matemáticas para evaluar de manera competencial, hacer aún mejores preguntas y desarrollar al máximo el potencial matemático de cada alumno.

Investigar y contribuir al desarrollo de la didáctica de las matemáticas

Un pilar esencial del proyecto es su compromiso con la investigación. Dentro de la organización, se ha constituido un grupo de investigación propio que colabora activamente con escuelas, universidades e instituciones de referencia en distintas regiones, con el objetivo de validar y mejorar los recursos didácticos que se desarrollan. Este grupo lleva a cabo investigaciones que abarcan desde estudios cuantitativos, enfocados en medir el impacto de las intervenciones en el aprendizaje, hasta estudios cualitativos, como la presente tesis, que buscan comprender en profundidad el uso y el enriquecimiento de los recursos en el contexto de aula.

Innovamat no solo apuesta por validar sus materiales y enfoques didácticos, sino también por la formación continua de las personas que forman parte de su equipo y por aprender de cada estudio para mejorar la efectividad y relevancia de sus propuestas. En el marco de este compromiso, la tesis doctoral que aquí se presenta se enmarca como un estudio cualitativo, orientado a analizar y enriquecer las guías didácticas a partir de un enfoque basado en competencias.

3.2. La visión didáctica de Innovamat

Los expertos y autores de Innovamat adoptan una visión de la didáctica de las matemáticas fundamentada en investigación consolidada y reforzada por la experiencia en el aula. Su objetivo es que los estudiantes no solo adquieran contenidos, sino que también otorguen sentido a esos conocimientos mientras

desarrollan habilidades competenciales. Esta visión se articula en diez principios fundamentales, que se desarrollan a continuación a partir de lecturas y conversaciones con los autores intelectuales de la propuesta. Aquellos principios relacionados más directamente con los objetivos de esta tesis se exploran con mayor profundidad, mientras que los principios de índole más filosófica se presentan de manera más sintética, aunque todos incluyen una revisión de la bibliografía relevante.

En cada principio, se han seleccionado ideas y autores influyentes en este enfoque, aunque es inevitable que algunas aportaciones queden fuera. La investigación en este campo sigue evolucionando, y futuras versiones de esta lista podrán integrar hallazgos relevantes que surjan de investigaciones rigurosas. Este decálogo se concibe, por tanto, como una instantánea de la visión de Innovamat en un momento específico, sujeta a revisión y mejora continuas en la medida en que se siguen recopilando evidencias, participando en congresos y aprendiendo a partir de la práctica en el aula. La publicación y difusión de este conocimiento en forma de «libro blanco» (Innovamat, 2024a) constituye, además, una parte central del compromiso de Innovamat con la mejora de la enseñanza de las matemáticas.

Cabe señalar que los diez principios y referencias acordados con los responsables didácticos de Innovamat, y descritos a continuación, constituyen el marco pedagógico y didáctico que guía su práctica educativa, sobre el cual se desarrolla la presente investigación. Sin embargo, estos principios no son objeto de debate en el ámbito de esta tesis, ya que el estudio no se centra en evaluar ni justificar los fundamentos didácticos y pedagógicos de Innovamat, sino en analizar y enriquecer sus guías didácticas desde la perspectiva de la riqueza competencial, como se describe en los objetivos (capítulo 2).

I. Seguir un enfoque socio-constructivista: descubrimiento guiado, manipulación y conversación

El constructivismo defiende la idea de que el aprendizaje es un proceso activo donde los estudiantes elaboran su propio conocimiento mediante las experiencias y la interacción con el entorno, especialmente con sus compañeros (Arcavi, 1999). Pero entonces, ¿cuál es el papel de los docentes? ¿Es el individuo el único que puede diseñar sus propios caminos de aprendizaje? Los mismos constructivistas como

Arcavi descartan esta postura «de tonalidades anárquicas», porque creen que la mayoría de los alumnos no pueden tener acceso por sí solos a la visión global de un dominio: «Sin una guía adecuada, difícilmente los alumnos sabrán qué preguntar, ni por qué interesarse» (p. 41). El educador actúa como mentor y presenta los retos necesarios para facilitar el descubrimiento guiado y la estructuración de los contenidos. En términos similares, Vigotski (1978) argumenta que las habilidades cognitivas se desarrollan a través de interacciones sociales con familiares, compañeros de clase y, sobre todo, los docentes. Vigotski amplía esta idea con la «Zona de Desarrollo Próximo (ZDP)», donde define el apoyo necesario para que los estudiantes avancen hacia niveles superiores de comprensión.

Este enfoque, directamente relacionado con el aprendizaje basado en la indagación, conocido en inglés como *inquiry-based learning* (Edelson et al., 1999; Banchi y Bell, 2008), se centra en la investigación guiada para desarrollar el pensamiento crítico y el uso del método científico. Es indispensable, pues, sin olvidar el carácter subjetivo de los procesos de aprendizaje, proponer una cierta estructuración externa de la enseñanza que esté al servicio de las siguientes funciones (Arcavi, 1999):

1. Fomentar que el alumno comience a hacer preguntas y a indagar.
2. Mostrar y propiciar el uso significativo de las herramientas de trabajo propias del dominio (no solo procedimientos algorítmicos, sino sobre todo estrategias de pensamiento).
3. Proponer modelos para transmitir prácticas y formas de hacer consistentes con el espíritu con el que actúan los expertos en la materia (como también describe Schoenfeld; 1992).

Una máxima aceptada por el constructivismo y, por extensión, por la una parte importante de la comunidad educativa actual, es que el objetivo de la educación matemática debe ser que el alumno construya comprensión. ¿Y qué significa comprensión? Bishop (1985), por ejemplo, sostiene que comprender una idea matemática es conectar el significado de esta idea con el significado de otra idea matemática, de otro dominio de conocimiento o de la vida cotidiana. Bettencourt (1991) y el mismo Schoenfeld (1992) añaden que, además, comprender implica también conectar estas ideas y circunscribirlas en una comunidad determinada, con sus prácticas, estrategias de pensamiento, creencias, discurso y formas de hacer. Por

lo tanto, en la clase de matemáticas se debe promover la construcción de este tipo de comprensión y estimular interacciones similares a las que se producirían en una comunidad de matemáticos: mucha conversación y mucha reflexión, tanto individual como colectiva.

Hacer matemáticas

Esta célebre cita de un gran matemático como Hardy (1992) transmite muy bien cómo los matemáticos perciben su trabajo:

Un matemático, como un pintor o un poeta, es un creador de patrones. Si sus patrones son más permanentes que los de los pintores o los poetas, es porque están hechos con ideas. (p. 13)

La cita refleja la visión de Hardy y de muchos otros matemáticos a lo largo de los siglos: las matemáticas no son una colección de fórmulas y técnicas utilitarias, sino más bien un proceso creativo que implica el descubrimiento y la exploración deductiva de nuevas ideas y patrones atemporales, universales, interesantes por sí mismos. Las ideas matemáticas perduran y pueden ser descubiertas y apreciadas por cualquiera, en cualquier lugar y en cualquier momento. No es de extrañar que muchos de los matemáticos más célebres de la antigüedad también fueran considerados filósofos. En general, citas como la de Hardy reflejan el proceso que hay detrás de la actividad matemática, entendida como una forma fundamental y universal de la expresión humana, como una disciplina sorprendentemente humanista (Lockhart, 2009).

Por eso, cada vez que se explica de manera magistral un concepto, aunque parezca la forma más rápida de transmitir conocimientos, se pierde una oportunidad de descubrir un patrón, de deducir para construir conjuntamente una idea. Además, esto da una imagen de las matemáticas alejada de la concepción que tenía Hardy. Da la imagen de que las matemáticas son una ciencia opaca, llena de procedimientos memorísticos, hechos arbitrarios e individualismos que anulan la creatividad colectiva. En cambio, desde el marco socioconstructivista, un diseño de actividades que promuevan la investigación y el descubrimiento guiado (Edelson et al., 1999; Banchi y Bell, 2008), con conversaciones guiadas por buenas preguntas, genera aprendizajes más significativos y duraderos. El aula debe hervir, porque la conversación entre iguales, bien guiada, es un excelente motor de aprendizaje (Sfard

et al., 1998). Si se quieren estimular interacciones similares a las que se producirían en una comunidad de personas que emplean razonamientos matemáticos, es necesario que los alumnos inventen, discutan, argumenten, comparen ideas, formas de hacer y resoluciones. Esta visión del aula coincide con el ambiente de resolución de problemas que describía Pólya (1945): cuando el enfoque de las matemáticas se produce desde un punto de vista de la resolución de problemas, con libertad para expresar ideas y margen para equivocarse y aprender de los errores, es imprescindible discutir, escuchar a los alumnos, cuestionar sus afirmaciones y guiarlos en la búsqueda del criterio necesario para elegir la estrategia más eficiente en cada momento. Estos enfoques, además, tienen otro beneficio: proveen a los alumnos de herramientas que trascienden el aula de matemáticas, como la capacidad de conjeturar, argumentar un punto de vista, refutar una afirmación hecha por un compañero o escuchar activamente, entre otras.

En cualquier caso, quizás por la naturaleza abstracta de los conceptos que aborda, la actividad matemática no es una tarea fácil, por más bella que resulte. En un artículo en la revista *Nature*, el mismo Hardy (1942) escribe:

Las matemáticas son una disciplina seria y a menudo exigente, y cualquiera que quiera dominarlas, aunque sea un poco, debe estar preparado para enfrentarse a una cierta cantidad de horas incómodas. Nadie puede aprender nada que valga la pena en matemáticas sin un cierto grado de madurez intelectual y, sobre todo, la voluntad de pensar por uno mismo. (p. 674)

Esta dificultad, sin embargo, desde una perspectiva didáctica se puede aprovechar para que juegue a favor del aprendizaje. La idea de que el esfuerzo o el desafío (en inglés lo llamamos *struggle*, que no tiene una traducción evidente) es esencial para el crecimiento intelectual no es nueva ni exclusiva de las matemáticas. Dewey (1933, p. 12) ya hablaba hace casi un siglo acerca de implicar a los estudiantes «desde alguna perplejidad, confusión o duda» como clave para construir una comprensión profunda. Piaget (1960) describía este esfuerzo de los aprendices como un proceso de reestructuración de su desequilibrio, necesario para construir nuevos aprendizajes. Más recientemente, y en el ámbito matemático, Hiebert y Wearne (2003) afirman que «todos los estudiantes deben esforzarse y enfrentarse a problemas difíciles si quieren aprender matemáticas profundamente» (pág. 6). Evidentemente, para evitar la frustración, esta dificultad debe ser productiva, debe

situarse dentro de la llamada «zona de desarrollo próximo» de Vigotski (1978), en definitiva, debe llevar a algún lugar: los alumnos deben tener la sensación de que avanzan, a pesar de la dificultad. En trabajos posteriores, Hiebert y Grouws (2007) sugieren que esforzarse por dar sentido a las matemáticas es un componente necesario para aprenderlas desde la comprensión. Así pues, lejos de evitarlos, para enseñar matemáticas se deben plantear a menudo momentos de desafío y esfuerzo, problemas incómodos que fomenten aún más la discusión en busca de una buena estrategia y que transmitan que esta dificultad es una parte inherente de la actividad matemática. De hecho, cualquiera que se haya enfrentado a un problema difícil, sabe que la satisfacción que se siente al resolverlo, una sensación difícil de caracterizar y poco comparable con cualquier otra experiencia humana, es proporcional al esfuerzo necesario para resolverlo.

El uso de materiales manipulativos adecuados para llegar a la abstracción

Según Moyer (2001), los materiales manipulativos son «objetos diseñados para representar de manera explícita y concreta ideas matemáticas que son abstractas, con un atractivo visual y táctil». A lo largo de las últimas décadas, diversos factores han contribuido a popularizar los materiales manipulativos dentro de la enseñanza de las matemáticas. Siguiendo el análisis bibliográfico que hace la misma Moyer, se puede partir de los trabajos de Piaget (1952), quien hace más de 70 años ya sugería que los niños no tienen la madurez mental para comprender conceptos matemáticos abstractos presentados solo en palabras o símbolos, y que necesitan muchas experiencias con materiales concretos y dibujos. Dienes (1969) también explicaba cómo son necesarias las diversas representaciones de un concepto, las llamadas «múltiples encarnaciones», para apoyar la comprensión del alumnado de matemáticas. Las teorías de Skemp (1987) describen que las primeras experiencias e interacciones de los alumnos con ciertos objetos físicos forman la base para el aprendizaje posterior, más abstracto. A partir de las teorías de la cognición y la construcción social del conocimiento de Vigotski (1978), las investigaciones de Cobb (1995) exploran herramientas culturales, como el tablero del 100, y muestran la estrecha relación que existe entre los materiales manipulativos y el aspecto sociocultural de un determinado territorio. Thompson (1992), por su parte, expone que el pensamiento abstracto de los estudiantes depende de sus percepciones del

mundo, por lo que la manipulación activa de los materiales permite desarrollar un repertorio de imágenes que pueden usar después en la manipulación mental de conceptos abstractos. Más allá de los beneficios de la manipulación a la hora de construir conceptos abstractos en etapas tempranas, el uso de materiales en el aula de matemáticas es también un motor de motivación para el alumnado que se debe considerar cuando se plantean actividades.

En cualquier caso, es importante tener en cuenta que la manipulación de materiales es solo un andamiaje que se deberá retirar más adelante, un paso intermedio en el camino hacia la abstracción. Como describe Bruner (1960, 1986), los niños pueden mostrar comprensión mediante tres etapas de representación: la etapa enactiva (objetos físicos), la etapa icónica (imágenes y dibujos) y la etapa simbólica (esquemas, símbolos, fórmulas y palabras). De hecho, es fácil detectar paralelismos entre estas tres etapas y las que conforman el ciclo CPA del conocido método Singapur (Singapore Math Inc., 2023): la etapa concreta, la etapa pictórica y la etapa abstracta. Aunque la transición entre etapas es difusa y puede avanzar a diferentes ritmos según el concepto explorado y el niño, el uso de materiales manipulativos físicos se circunscribe únicamente a la primera etapa (y sus representaciones, a la segunda). Es por eso que es tan importante saber elegir los mejores materiales manipulativos para cada ocasión, y saber retirarlos en el momento adecuado. Precisamente para poder retirarlos, también es fundamental que la representación que sustituye cada material sea cercana al material y fácil de reproducir por parte del alumno.

Diversos autores señalan, desde una perspectiva teórica, algunos indicadores, principios y recomendaciones que pueden servir de marco de referencia para elegir buenos materiales. Laski et al. (2015), por ejemplo, describen cuatro principios para maximizar la efectividad de los materiales manipulativos y los relacionan con la aproximación que hace el método Montessori. Estos cuatro principios se pueden enunciar en los siguientes términos:

1. Utiliza el material de manera consistente, durante el tiempo necesario.
2. Comienza con representaciones concretas, transparentes, y avanza hacia representaciones más abstractas con el tiempo.
3. Evita los materiales que se parezcan a objetos cotidianos o que tengan características distractoras irrelevantes.

4. Explica explícitamente la relación entre los materiales y el concepto que representan.

De estos principios pueden surgir varias reflexiones interesantes. De acuerdo con el primer principio, toma importancia la coherencia entre los materiales y los conceptos que representan; es necesario buscar esta coherencia incluso entre los diversos materiales y a lo largo del tiempo. El segundo principio habla de transparencia, que es la cualidad de una herramienta a la hora de explicarse por sí misma y ser fácil de comprender. El tercer principio nos alerta de los peligros que tiene presentar materiales con demasiada carga de significado para los alumnos, porque se pueden ver distraídos de la actividad matemática. Por último, el cuarto principio recomienda ser explícitos con el alumnado al conectar materiales y conceptos, especialmente con alumnos suficientemente maduros.

McNeil y Jarvin (2007) también habían señalado dos recomendaciones que refuerzan estos principios. La primera es minimizar el uso de materiales que sean (a) altamente concretos y ricos en detalles perceptivos y/o (b) demasiado familiares para los niños en contextos no escolares (por ejemplo, juguetes). Estos materiales tienen el riesgo de hacer que los alumnos se distraigan de los objetivos de aprendizaje. Precisamente, como señalan los mismos autores, muchos de los materiales manipulativos habituales (por ejemplo, los bloques de base 10) son todo lo contrario: no son ricos en detalles perceptivos ni despiertan demasiado interés como objetos en sí mismos. La segunda recomendación es tomarse el tiempo de evidenciar ante el alumnado las conexiones entre los constructos informales que se crean cuando se usan materiales y la formalización simbólica de los conceptos. De esta manera, se reduce el riesgo de que el alumnado se apoye excesivamente en las representaciones no formales inherentes al material manipulativo, y se favorece así el camino hacia la abstracción dentro del ciclo «manipular-representar-abstraer».

Por último, en un momento en que las pantallas y los dispositivos están presentes en muchas aulas y hogares, es necesario considerar también los materiales manipulativos virtuales como un apéndice que merece un trato diferenciado. Un entorno virtual dinámico que simule los materiales físicos puede facilitar una puesta en común o permitir que todos los niños interactúen con un material que la escuela no tiene, entre otros beneficios. En función del contenido, resulta más fácil, o menos, encontrar bibliografía que analice el impacto del uso de materiales manipulativos

virtuales en el aula. En el ámbito de la geometría o el álgebra, por ejemplo, las aplicaciones programadas con GeoGebra gozan de una excelente reputación entre docentes e investigadores (Saha et al., 2010; Barahona AVECILLA et al., 2015). Con una mirada más global, autores como Moyer-Packenham y Westenskow (2013) también exponen que la manipulación virtual puede tener efectos positivos en el rendimiento de los alumnos, en función del uso que se haga en el aula.

Como se ha podido observar, son muchos los autores que han explorado los beneficios prácticos de usar materiales manipulativos en el aula de matemáticas. Del mismo modo, diversos autores (a menudo, los mismos que describen sus beneficios) también advierten de los riesgos de hacer un uso indiscriminado de los materiales manipulativos y confiar ciegamente en ellos. En esta línea, Ball puntualiza que los materiales «no son mágicos» y que «aunque la experiencia cinestésica puede mejorar la percepción y el pensamiento, la comprensión no viaja a través de las puntas de los dedos, brazo arriba» (Ball, 1992, p. 47). A veces, advierten Hiebert y Wearne (1992), los alumnos aprenden a usar los materiales manipulativos de manera mecánica, con poco o ningún aprendizaje de los conceptos matemáticos que se esconden detrás de los procedimientos. Es por eso que no basta con usar materiales: es necesario elegirlos con criterios didácticos, usarlos adecuadamente, y saber cuándo es el momento de dejarlos atrás para transitar hacia la abstracción. En este sentido, es especialmente interesante el metaanálisis que hacen Carbonneau et al. (2012). Su investigación cuantitativa apunta que el uso de materiales manipulativos, en comparación con la instrucción que utiliza directamente símbolos abstractos, produce un efecto positivo entre pequeño y medio en el aprendizaje. Lo más interesante es que, como era de esperar, la fuerza de este efecto depende de variables instructivas como «la riqueza perceptiva del objeto, el nivel de orientación ofrecido durante el proceso de aprendizaje o el estado de desarrollo de los alumnos» (p. 396). De nuevo, se evidencia que la gestión del aula que hace el docente con los materiales es fundamental.

II. Plantear actividades ricas secuenciadas en espiral para desarrollar los procesos e interconectar conceptos

Cuando se habla de «secuencia de actividades», se hace referencia a una lista ordenada de actividades que, debidamente presentadas a los alumnos, sirven para construir el conocimiento. Las diversas actividades de una secuencia deben encajar

como las piezas de un rompecabezas, como engranajes que se activan unos a otros para conseguir dar una perspectiva global al aprendizaje. Si, además, se añade el adjetivo «ricas», se abre la puerta al aprendizaje «competencial» de estos contenidos, como profundizaremos en el marco teórico (capítulo 4).

Riqueza matemática

Son muchos los autores que han explorado su concepción de lo que significa enriquecer la actividad matemática en el aula. Así, la expresión «tarea matemática rica» se utiliza ampliamente, aunque resulta difícil encontrar una definición unívoca. Maestros y expertos en el campo, como Finkel (2022), han adoptado esta terminología: «Cada estudiante merece tener la oportunidad de resolver problemas e involucrarse en un pensamiento matemático genuino. Las tareas ricas están diseñadas para hacer posibles estas experiencias de aprendizaje ricas». De manera similar, desarrolladores de currículum como Gojak (2017) también utilizan el término: «Una tarea rica presenta un alto nivel de demanda cognitiva y requiere que los estudiantes piensen de manera abstracta para hacer conexiones con y entre conceptos matemáticos» (p. 3). Organismos gubernamentales como el Departamento de Educación de Virginia (2023), en EUA, también hablan de ello: «Las tareas matemáticas ricas involucran a los estudiantes en dar sentido a través de un aprendizaje profundo que requiere altos niveles de pensamiento, razonamiento y resolución de problemas». Piggott (2007, 2011), en el ámbito de la iniciativa NRICH de la Universidad de Cambridge, propone un marco para la riqueza que comprende dos factores: el contenido y la enseñanza. Según Piggott, las actividades ricas requieren un contenido presentado en forma de tareas que propicien el desarrollo y el uso de estrategias y el pensamiento matemático. Es lo que otros autores describen como tareas de alto nivel o de alta demanda cognitiva (Stein et al., 1996; Henningsen y Stein, 1997; Smith et al., 2008). Además de las tareas, Piggott (2011) también habla de un enfoque de la enseñanza (es decir, una gestión de aula) que fomente un entorno abierto y flexible en el que se promueva el trabajo cooperativo, la exploración y la comunicación, y donde se aproveche la diferencia como herramienta de aprendizaje. Los dos factores que describe Piggott tienen una clara relación con los elementos de una «actividad matemática rica» que describimos dentro del marco teórico (apartado 4.3).

Trayectorias de aprendizaje en espiral

El contenido matemático que se lleva al aula debe ser relevante para el alumno, debe tener sentido matemático (es decir, ser riguroso y ajustado al nivel del alumno) y debe estar conectado con los conocimientos previos y futuros. Esto implica diseñar e implementar las llamadas trayectorias de aprendizaje (Clements y Sarama, 2004; Siemon et al., 2019), caminos diseñados para guiar el aprendizaje de los alumnos a través de una serie de objetivos que tengan en cuenta las dependencias entre saberes. ¿Qué saberes? ¿Quién los decide? Cada territorio, fruto de su tradición escolar, tiene su listado de saberes y su organización en bloques, que no siempre responden a criterios didácticos. Más allá de divergencias sobre en qué curso es mejor introducir cada concepto, los contenidos cambian poco entre los currículos oficiales de todo el mundo. En términos generales, los podemos organizar en cinco bloques:

- Numeración y cálculo / Números y operaciones (reconocimiento de los diferentes tipos de números, conteo, ordenación, cálculo de operaciones aritméticas, etc.)
- Geometría / Sentido espacial (2D, 3D, ejes de coordenadas, transformaciones, etc.)
- Pensamiento algebraico / Relaciones y cambio (patrones, funciones, ecuaciones, etc.)
- Medida (longitudes, ángulos, áreas, volúmenes, etc.)
- Probabilidad y estadística (representación de datos en tablas o gráficos, medidas de centralización, azar, etc.)

Eso sí: cada bloque tiene sus propias trayectorias de aprendizaje, que son más jerárquicas, o menos, en función del contenido. La numeración y el cálculo, por ejemplo, conforman un bloque muy jerárquico: antes de aprender a multiplicar, es necesario aprender a sumar; y antes de sumar, es necesario saber contar. Otros bloques, como la geometría, permiten trayectorias de aprendizaje menos estrictas: se puede comenzar por la geometría 3D y pasar a la geometría plana a través del estudio de las caras o proyecciones de los cuerpos tridimensionales, o viceversa. En cualquier caso, la planificación es clave para cubrir todos los saberes. De hecho, diversos estudios hablan del éxito de las trayectorias de aprendizaje como herramienta formativa para el profesorado (Wilson et al., 2013; Sarama et al., 2017), como

herramienta para mejorar el aprendizaje matemático del alumnado (Clements et al., 2011) y como piedra angular de un marco teórico para la docencia basada en investigación (Sztajn et al., 2012).

Para entender la artificialidad que conlleva analizar los contenidos matemáticos de esta manera, se puede pensar en una piscina. Desde fuera del agua, como docente, es posible ver los carriles de la piscina y diferenciarlos. Desde dentro de la piscina, en cambio, como alumno o persona que desarrolla la actividad matemática, todo es la misma agua. Cuando se usa la regla para medir una longitud, uno podría pensar que se encuentra dentro del bloque de medida, pero también se usa la numeración. Cuando se usa la trigonometría para encontrar el lado de un triángulo, se puede hablar de geometría, pero también de medida, pensamiento algebraico y numeración. Los contenidos se mezclan, se alimentan unos de otros y se refuerzan mutuamente para ir conformando un entramado conjunto: las matemáticas.

Algunos investigadores se han referido a esto como aprendizaje relacional —en el cual se presentan las matemáticas como una serie de conexiones que se van explicitando y ampliando a medida que aprendemos— en oposición al aprendizaje instrumental más clásico (Skemp, 1976):

El tipo de aprendizaje que conduce a las matemáticas instrumentales consiste en el aprendizaje de un número creciente de estrategias fijas, con las que los alumnos pueden encontrar su camino desde puntos de partida concretos (los datos) hasta las respuestas a las preguntas. La estrategia les dice qué hacer en cada momento. [...] No hay conciencia de la relación global entre las etapas sucesivas y el objetivo final. Y el aprendiz depende siempre de una guía externa para aprender cada nueva estrategia. En contraste, el aprendizaje de las matemáticas relacionales consiste en construir una estructura conceptual (esquema) desde la que se puede (en principio) producir un número ilimitado de estrategias para llegar desde cualquier punto de partida dentro de su esquema hasta cualquier meta. Decimos «en principio» porque, claro, algunos de estos caminos serán mucho más difíciles de construir que otros. (p. 25)

Partiendo de esta idea, parece claro que diseñar secuencias por temas o unidades didácticas estancas, sin tener en cuenta las relaciones entre contenidos,

tiene poco sentido, especialmente en infantil y primaria. Por eso conviene diseñar trayectorias, currículos, en «espiral» o en «helicoides», un término propuesto por Bruner (1960) y explorado por más autores (Harden y Stamper, 1999). Un currículo helicoidal introduce diversos conceptos de manera incremental y los revisita a lo largo del tiempo, construyendo sobre el conocimiento previo y fomentando las conexiones. Este enfoque aprovecha lo que en psicología cognitiva se conoce como «efecto de memoria espaciada» (Vlach et al., 2008; Carpenter, 2017), un fenómeno bien investigado: distribuir el aprendizaje a lo largo del tiempo conduce a una retención a largo plazo más robusta en comparación con el aprendizaje masivo (es decir, aprender y practicar cada concepto a fondo antes de avanzar), que puede parecer efectivo a corto plazo, pero lo es menos a largo plazo (como demuestran experimentos como el de Rawson y Kintsch [2005], en lectura, o el de Rohrer y Taylor [2007], en matemáticas).

Un currículo helicoidal contrasta con el tradicional currículo por unidades, donde se centran los esfuerzos en un contenido específico hasta que (a ojos del docente) los alumnos consiguen el dominio, antes de pasar al siguiente. Esta helicoide es como unas escaleras de caracol que suben y suben a contenidos cada vez más profundos y complejos, pero que pasan una y otra vez por las mismas ideas. La espiral, bien diseñada, facilita un aumento gradual de la complejidad, y asegura que el nuevo aprendizaje se construye y conecta con lo que ya se ha aprendido. En el ámbito de las matemáticas, esto refuerza una comprensión más cohesionada de los contenidos, donde cada idea se ve en relación con las otras, y tiene el potencial de reducir el aburrimiento y fomentar una comprensión más profunda e interconectada de la asignatura. El diseño de secuencias en espiral permite, además, atender mejor las diferencias madurativas del alumnado: en un determinado momento, puede ser que algunos alumnos no estén cognitivamente preparados para entender un concepto concreto, así que si se termina el tema y no se vuelve a hablar hasta el próximo curso, estos alumnos quedan descolgados; si se pasa una y otra vez (en helicoide) a lo largo del curso, en cambio, tendrán más oportunidades de reengancharse. Al mismo tiempo, un diseño en espiral que parta de la riqueza también hace más fácil evidenciar las conexiones entre contenidos y ofrecer una imagen mucho más realista de lo que significa hacer matemáticas de manera integrada. A medida que aumenta la abstracción y, por tanto, el tiempo de exposición

necesario para trabajar determinados contenidos, los ciclos de la helicoides se pueden ampliar, siempre que sigan reforzándose las conexiones entre bloques.

Volvemos a las trayectorias de aprendizaje de los diferentes bloques: hay innumerables fuentes y referencias que pueden ayudar a diseñarlas para las diferentes etapas, con el rigor académico que merecen y con especial atención a las grandes ideas (Charles, 2005) que las vertebran. En Innovamat, algunas de las fuentes que consideramos más influyentes para las matemáticas en educación primaria (la etapa de interés para esta tesis doctoral) son: Van Den Heuvel-Panhuizen (2008), Fosnot y Dolk (2001a, 2001b y 2001c) en numeración y cálculo; Castelnuevo et al. (2017) en geometría; Van Den Heuvel-Panhuizen y Buys (2008) y Szilágyi et al. (2013) en medida; Friel et al. (2001) y *Ontario Ministry of Education* (2007a) en estadística; *Ontario Ministry of Education* (2007b) en pensamiento algebraico; y Albarracín et al. (2018) y Van De Walle et al. (2018) en diversos contenidos. Lo más importante es la coherencia del conjunto, no solo entre las diversas sesiones de un curso, sino también entre diferentes cursos y, incluso, etapas. Una buena secuencia debe tener en cuenta de dónde vienen los alumnos y hacia dónde van dentro de cada trayectoria, para favorecer la construcción conectada de todos los bloques. Es lo que Ball llama «horizonte matemático» (Ball, 1993). Para enseñar matemáticas de manera eficaz, los docentes necesitan no solo conocimientos específicos sobre los temas que enseñan, sino también una visión más amplia de cómo estos temas se ajustan dentro del marco más grande de las matemáticas.

III. Ofrecer contextos relevantes que favorezcan un aprendizaje significativo

El interés y la curiosidad son factores clave a la hora de encontrar motivación para aprender de manera significativa (Hindi y Renniger, 2019). Este interés, como explica Ruiz Martín (2023) citando a Schiefele (2009), puede ser más bien personal de cada alumno (y, por tanto, condicionado por su experiencia, éxitos y fracasos, su entorno, etc.) o más bien situacional (provocado por la situación de aprendizaje que se le plantea). En los últimos años, ha surgido la tendencia de centrar todos los enfoques educativos en torno a los intereses personales de los alumnos. Esto conlleva un riesgo, como explica el mismo Ruiz Martín (2023):

Centrarse en los intereses personales de los estudiantes puede significar que estemos dedicando tiempo precisamente a lo que en realidad ya saben hacer y que dejemos pasar la oportunidad de que aprendan precisamente lo que necesitan aprender, porque aún no lo dominan. [...] Por eso, sugerir que los temas que se van a tratar en clase se limiten a los que coincidan con los intereses personales de los estudiantes es muy delicado, pues se corre el riesgo de desvirtuar el papel de la escuela como instrumento de equidad social que facilita el acceso a hechos, ideas y habilidades que de otro modo no estarían al alcance de una parte del alumnado. En otras palabras, limitarse a los intereses de los estudiantes puede negarles la posibilidad de ampliar sus horizontes, lo cual perjudica en mayor medida a quienes menos oportunidades tienen fuera de la escuela. (p. 145)

La clave para ofrecer contextos relevantes a los alumnos, entonces, no es pensar solo en sus intereses, sino plantear situaciones que fomenten la curiosidad a través del reto (Litman, 2019), con conexiones constantes con otros ámbitos. Por suerte, las puertas de entrada a las matemáticas son muy diversas. Sin perder de vista que las matemáticas son una ciencia relevante en sí misma, y que es necesario fomentar la satisfacción de resolver problemas sin necesidad de excusas, también es importante encontrar contextos que favorezcan la creatividad a través de conexiones de todo tipo (con la pintura, la música, el deporte, la historia, el juego o la vida cotidiana, por ejemplo), para derribar falsas barreras entre las diversas áreas del conocimiento.

Conexiones con otros ámbitos

Las matemáticas son una herramienta imprescindible en la resolución de problemas en ámbitos como la física, la economía, la química, la ingeniería, la biología, la medicina o la informática, entre otros. De hecho, estas conexiones son el origen de las disciplinas denominadas STEM (las siglas en inglés de ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas) (Bybee, 2013). Couso (2017) describe lo que entendemos por estar alfabetizado en STEM como «ser capaz de identificar y aplicar tanto los conocimientos clave como las formas de hacer, pensar, hablar y sentir de la ciencia, la ingeniería y la matemática». Así pues, la elección de los contextos a través de los cuales desarrollar un aprendizaje de las matemáticas conectado con el mundo debe ser sensible a estas relaciones entre ciencias. Es necesario preparar al alumnado

para un mundo donde los matemáticos trabajan en equipo con expertos de otras áreas para resolver problemas complejos que requieren habilidades de diferentes disciplinas. Además, cuando ponemos las matemáticas al servicio de la resolución de problemas tangibles concretos, damos a los alumnos que aún no disfrutaban de las matemáticas por sí mismas, otros argumentos para ver su relevancia.

Ahora bien, las disciplinas STEM no constituyen una metodología de aprendizaje: se puede abordar desde esta perspectiva tanto un proyecto como una simple actividad de una hora de clase. En términos generales, se entiende que una tarea es STEM con todas las letras si, gracias al contexto, genera la necesidad de construir o aplicar conocimiento sobre contenidos de ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas de manera transversal y, sobre todo, si además genera oportunidades para desarrollar las destrezas inherentes a la práctica de estas disciplinas. Sin embargo, a menudo se encuentran ejemplos de actividades autoproclamadas STEM que contemplan contenidos de todas las ramas, pero solo destrezas de ciencias o ingeniería, porque entienden las matemáticas solo como una herramienta al servicio de las otras. Desde una perspectiva matemática, es necesario reivindicar que la M también está en mayúsculas: debe tener entidad propia y dialogar de tú a tú con las otras disciplinas (Morera et al., 2020). De hecho, la gracia de los proyectos STEM es que incluso se difuminen las líneas entre las áreas involucradas porque todo está bien integrado.

Por otro lado, buscar y destacar las conexiones con otros ámbitos, incluso más allá de las ciencias, estimula la creatividad. Y estos estímulos funcionan en ambos sentidos: disciplinas artísticas como la pintura, la escultura, el cine o la literatura, por ejemplo, se ven enriquecidas cuando son observadas con una mirada matemática y, al mismo tiempo, las matemáticas se nutren de nuevas ideas y perspectivas cuando observan otras artes.

Historia de las matemáticas y narrativa en el aula

Recientemente, muchos autores han defendido la importancia de incluir la historia de las matemáticas en el aula y han teorizado sobre cómo hacerlo. En el conocido estudio de la ICMI (*International Commission on Mathematical Instruction*), en el que participan diferentes autores de consolidada trayectoria en el ámbito de la didáctica, se describen cinco áreas en las que la enseñanza de las

matemáticas puede verse «enriquecida y mejorada mediante la integración de la historia de las matemáticas en el proceso educativo»:

El aprendizaje de las matemáticas; el desarrollo de puntos de vista sobre la naturaleza de las matemáticas y la actividad matemática; el bagaje didáctico de los profesores y su repertorio pedagógico; la predisposición afectiva hacia las matemáticas; y la apreciación de las matemáticas como esfuerzo cultural-humano. (Fauvel y Maanen, 2006, p. 203)

Es necesario, entonces, que los docentes hagan un esfuerzo por dominar la historia de las matemáticas y darla a conocer a los alumnos de manera integrada con el currículum. De hecho, son varios los territorios que incluyen en los documentos oficiales la historia de las matemáticas como mecanismo para humanizarlas y como objetivo de aprendizaje. En Fauvel y Maanen (2006), los autores nos hablan desde diferentes perspectivas sobre la importancia que tiene incorporar la historia en el aula:

Una de las formas en que los especialistas en currículo animan a los profesores a dar sentido a su área de contenidos es humanizar la asignatura. ¿Qué mejor manera de humanizar las matemáticas que utilizar la historia de las matemáticas en el aula? Además de ser entretenida, la historia de las matemáticas proporciona al alumno información sobre las raíces globales de las matemáticas. La historia de las matemáticas ayuda a los alumnos a darse cuenta de que las matemáticas no son solo una invención de la cultura escolar dominante. Más bien, ayuda a los alumnos a darse cuenta de que las matemáticas evolucionaron a partir de muchas fuentes y en muchos lugares. (p. 186)

Parece evidente que la historia, bien llevada al aula, puede convertirse en una magnífica puerta de entrada para los alumnos que no disfrutaban de las matemáticas desde aproximaciones más abstractas o desconectadas de las demás actividades humanas. Además, la multiculturalidad en los enfoques y las estrategias con que abordamos los problemas matemáticos en el aula enriquece su resolución:

Este enfoque [...] permite a los alumnos y a los profesores pensar en las matemáticas como una disciplina de reflexión y acción continuas, influidas por la reflexión, el razonamiento, los procedimientos conocidos, la intuición,

la experimentación y la aplicación a situaciones prácticas. (Fauvel y Maanen, 2006, p. 46)

Furinghetti (2000), una de las pioneras en la teorización del uso de la historia en el aula, en un trabajo previo a las reflexiones de la ICMI, explica que «la historia de las matemáticas puede ser un elemento eficaz para dotar a los alumnos de flexibilidad, apertura mental y motivación hacia las matemáticas». Y añade una visión historicista que es importante tener en cuenta:

La historia es una especie de lupa para los nodos conceptuales de una determinada teoría, un medio para identificar sus puntos críticos, para detenerse en los conceptos difíciles y para analizarlos a través de las palabras de los autores del pasado. La idea básica en este uso de la historia de las matemáticas es evitar la presentación de una teoría pulida, y construirla junto con los alumnos siguiendo el camino de los que lucharon con los problemas matemáticos subyacentes a esta teoría. (p. 43)

Esta manera de ver la matemática como una ciencia viva, que evoluciona de la mano de la humanidad, que presenta la dificultad e incluso el error como fuente de conocimiento, transmite una imagen realista de lo que supone hacer matemáticas.

En un trabajo posterior, Jankvist (2009) propone tres maneras de utilizar la historia en la enseñanza de las matemáticas, sea como herramienta o como objetivo de aprendizaje:

- a) Aprendizaje de la historia, mediante la aportación de información histórica directa.
- b) Aprendizaje de temas matemáticos, siguiendo un enfoque de enseñanza y aprendizaje inspirado en la historia.
- c) Desarrollar una conciencia más profunda, tanto de las propias matemáticas como de los contextos sociales y culturales en los que se han desarrollado las matemáticas. (Jankvist, 2009, p. 247)

Este último punto, que ve la historia como un catalizador que abre la puerta al aspecto más humanista y cultural de las matemáticas, dialoga a la perfección con uno

de los temas centrales del congreso de profesores del NCTM (*National Council of Teachers of Mathematics*) de 2022:

Nuestras historias personales nunca habían sido tan importantes para darnos un sentido de identidad y pertenencia a nuestro mundo, frágil y cambiante. Se han convertido en catalizadores y palancas necesarias para reexaminar los propósitos del aprendizaje de las matemáticas para todos nuestros estudiantes. Las sesiones de este tema central no solo abonarán el surgimiento crítico de una educación matemática antirracista, sino que también examinarán los temas universales e históricos de la alegría y la sorpresa que han atravesado todas las culturas, las civilizaciones y las situaciones socioeconómicas. Las matemáticas deben verse a través de un prisma que refuerce todas las posibilidades y los encantos. A través de una narrativa poderosa, podemos asegurar que todos nuestros estudiantes puedan encontrar su voz y propósito únicos en el aprendizaje de las matemáticas. (Flynn et al., 2021, p. 8)

La historia, bien utilizada en el aula, puede actuar como un espejo que refuerce la identidad matemática del alumnado, la sensación de pertenecer a una sociedad que ha tenido dificultades y preocupaciones con las que sentirse identificados. Esto cobra una relevancia especial en el caso de los colectivos históricamente discriminados por razón de género (Henrion, 1997), raza, discapacidad o estatus socioeconómico (Bartell et al., 2017): un tratamiento sensible de la historia puede abrir la puerta a ciertos debates enriquecedores que, de otro modo, difícilmente tienen lugar en el aula de matemáticas, y dar voz a aquellos alumnos que habitualmente se sienten menos invitados a expresar sus ideas.

En la parte final de la cita anterior, el comité científico del NCTM habla de la narrativa como una herramienta poderosa para que los alumnos desarrollen su propósito en el aula de matemáticas. El uso de la narrativa en educación, sin embargo, no es una idea nueva. De hecho, muchos maestros de educación preescolar y primaria son conscientes de ello: es relativamente sencillo, para estas etapas, encontrar recursos matemáticos que giran en torno al cuento. No obstante, esta práctica no resulta habitual en etapas posteriores. Y eso que, ya en los años 90, hay diferentes autores que destacan el poder que tiene la narrativa como herramienta educativa. Witherell y Noddings (1991) afirman que la narrativa y el diálogo son

fundamentales para la educación. Weber (1993) va más allá y destaca el papel que puede tener la narrativa incluso en la formación de profesores:

Cada explicación de una anécdota narrativa provoca más reflexión y plantea preguntas, convirtiéndose en parte del proceso de investigación y en una forma de teorización pedagógica. A través de un relato ilustrativo de anécdotas, se sugiere que el uso perspicaz de la narrativa es una manera de construir y asimilar nuestra base de conocimientos en la formación de profesores. (p. 71)

Zazkis y Liljedahl (2009), en un estudio más reciente, presentan la narración de historias como un medio para crear un aula donde se comprendan y disfruten las matemáticas, y demuestran cómo la actividad matemática de los alumnos puede mejorar a través de la narración de historias. Además, presentan un marco para crear nuevas historias, ideas para utilizar y enriquecer las ya existentes, así como diversas técnicas para contar historias que hacen que la narración sea más interactiva y atractiva para el alumno.

Habilidades socioemocionales

El aspecto socioemocional de los alumnos también influye de manera determinante en los procesos de enseñanza y aprendizaje: si un alumno no está dispuesto a aprender, difícilmente aprovechará las oportunidades que se le brindan (McCombs y Marzano, 1990). Es por eso que son importantes habilidades transversales como la perseverancia, la aceptación y aprovechamiento del error, la capacidad de cooperación, la autonomía o la responsabilidad. Una secuencia de actividades paradigmática debe favorecer el desarrollo de estas destrezas: es necesario ponerlas en juego y hablar de ellas a menudo con el alumnado (Schulz, 2008).

Para definir las habilidades socioemocionales, partimos de las habilidades que cubren las cinco grandes categorías de personalidad en el ámbito de la escuela, unos patrones de pensamiento, sentimiento y comportamiento que reflejan la tendencia de las personas a responder de una determinada manera en circunstancias concretas (Roberts, 2009). Estas categorías generales, descritas por Costa y McCrae (1992), son las categorías con las que también trabaja la OCDE (2017b): apertura de mente, conciencia para el logro de las tareas, regulación emocional, extraversión y capacidad

de colaboración; cada una subdividida en habilidades más específicas. Si se analizan estas categorías desde una perspectiva de la didáctica de las matemáticas, es necesario añadir ciertos matices:

Responsabilidad: trabajar de forma constante, perseverar ante las dificultades, respetar las normas, etc.

Cooperación: escuchar e incorporar lo que dicen los demás, participar en la toma de decisiones consensuadas, facilitar la resolución de conflictos, reconocer las propias responsabilidades y las de los demás, etc.

Autonomía e iniciativa: aportar ideas, preguntar cuando se tienen dudas, tomar decisiones, convencer a los compañeros, defender una posición argumentadamente, etc.

Gestión emocional: transmitir alegría, mostrar tranquilidad bajo presión, adecuar el comportamiento a la situación, aceptar el fracaso y los errores como fuente de aprendizaje, disfrutar de los momentos en que se aprenden matemáticas, etc.

Gracias a la definición de los comportamientos asociados a cada una de las cuatro habilidades socioemocionales (responsabilidad, cooperación, autonomía e iniciativa, gestión emocional), se pueden favorecer aquellos contextos que mejor interpielen al alumnado.

IV. Consolidar los aprendizajes a través de la práctica hasta desarrollar fluidez

Repetir hasta memorizar no es garantía de aprender los contenidos, y aún menos de darles significado. Pero, entonces, dentro del paradigma competencial, ¿nunca es necesario practicar? ¿No es necesario memorizar? Hay que buscar el equilibrio (Schoenfeld, 1992). Después de haber descubierto los conceptos, de haberlos construido con material manipulativo y de haberlos entendido, es necesario encontrar momentos para practicar los procedimientos que se utilizan más a menudo, y desarrollar precisión, eficiencia y flexibilidad, hasta automatizarlos o incluso memorizarlos. Esta práctica contribuye a una comprensión más profunda de los fundamentos, necesaria para entender conceptos más avanzados, a la vez que puede proporcionar autosuficiencia, generar confianza y, sobre todo, ayudar a

desarrollar la capacidad para hacer estimaciones y verificar la razonabilidad de los resultados. De hecho, numerosos estudios explican que el sentido numérico y la fluidez aritmética, más que otros factores cognitivos, son predictores del éxito matemático de los alumnos a corto y largo plazo (Geary, 2011; Jordan et al., 2009; Locuniak y Jordan, 2008; Mazzocco y Thompson, 2005).

Automatizar vs. memorizar

La memoria no es la única manera de evocar un resultado con fluidez: también puede ser automatizado. Van Den Heuvel-Panhuizen (2008) diferencia así ambos conceptos:

La automatización se refiere a la realización prácticamente automática de las operaciones aritméticas, en contraste con la memorización, que consiste en aprender los hechos aritméticos de memoria. Se dice que un alumno ha automatizado un problema como 9×12 si puede dar rápidamente la respuesta calculando, por ejemplo, 9×10 y 9×2 , y sumando estos resultados. (p. 89)

Como observadores externos, la frontera que separa la automatización de la memorización es difusa. En cualquier caso, nuestra tarea como maestros es proveer diferentes estrategias para deducir y evocar ágilmente los resultados más habituales (también llamados «hechos», del inglés *facts*). Y ofrecer espacio y tiempo para practicarlos hasta automatizarlos o memorizarlos, es decir, para desarrollar fluidez.

¿Qué es la fluidez?

La fluidez aritmética se puede definir como la habilidad de trabajar con números, operaciones y procedimientos con precisión, eficiencia y flexibilidad, desarrollando el sentido numérico. Bay-Williams y SanGiovanni (2021, 2022) describen que la fluidez tiene tres niveles de profundidad:

- En un primer nivel describen la fluidez factual (del inglés *fact fluency*), que es la habilidad para evocar hechos conocidos o derivados gracias a la memorización o a la automatización. Evidentemente, los hechos que se espera que los alumnos evoquen con fluidez son diferentes en cada etapa: en 1º de primaria, $7 + 3 = 10$ debería ser un hecho conocido, mientras que la tabla del 5 debería ser un hecho conocido a partir de 3º o 4º de primaria.

Para lograr esta fluidez factual, autores como Baroody (2006) definen tres fases que se deben pasar hasta dominar un hecho de manera automática o incluso de memoria:

- Fase 1. Contar (de uno en uno, de dos en dos, de cinco en cinco, de diez en diez, etc.). Por ejemplo, resolver $6 + 9$ contando 6 a partir del 9.
- Fase 2. Derivar (deducir unos hechos a partir de otros usando estrategias de razonamiento). Por ejemplo, resolver $6 + 9$ a partir de saber que $6 + 10$ son 16.
- Fase 3. Dominar (automatizar o incluso memorizar).
- En el segundo nivel, que incluye el primero, se encuentra la fluidez computacional (*computational fluency*). Esta es la habilidad para realizar operaciones (computar) más allá de los hechos simples conocidos. De nuevo, las operaciones en las que se espera que los alumnos muestren fluidez son diferentes en cada curso.
- En el tercer nivel, que incluye los otros dos, se encuentra la fluidez procedimental (*procedural fluency*). Esta es la habilidad para seguir procedimientos que van más allá de una operación básica y que también dependen de cada etapa.

Según los mismos autores, la fluidez procedimental, la cual incluye las otras, está formada por tres componentes: eficiencia, flexibilidad y precisión (Bay-Williams y SanGiovanni, 2022, que citan a Spangler y Wanko, 2017).

Desarrollar la fluidez aritmética en el aula

Diversos estudios apuntan que la mejor manera de empezar a aprender los hechos básicos es a partir de una enseñanza explícita de las estrategias (Baroody et al., 2016; Purpura et al., 2016; Henry y Brown, 2008). Es decir, hay que dedicar tiempo en el aula a hablar de manera explícita sobre las diferentes estrategias que nos permiten resolver operaciones básicas, para compararlas en términos de eficiencia y conveniencia. A partir de aquí, la clave es practicarlas en contextos diversos.

Aunque la tradición escolar tiende a centrarse solo en un tipo de práctica, la reproductiva, en didáctica se distinguen dos (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2008): la

productiva y la reproductiva. Ambas tienen ventajas que las hacen más adecuadas, o menos, en función de los objetivos docentes.

Por un lado, la práctica productiva es aquella que, a partir de una pregunta abierta, presenta al alumnado un contexto y una finalidad que requiere practicar para «producir» una respuesta. Por ejemplo: usando números naturales entre 1 y 60, sin repetir ninguno, formen una cadena de 10 números, de manera que cada número sea múltiple o divisor de los números adyacentes. En este caso, con el objetivo de «producir» cadenas de números, el alumno practica el cálculo de múltiplos y divisores. La ventaja de plantear sesiones de práctica productiva como esta es que se adaptan por sí mismas: si el alumno domina el procedimiento a practicar, con pocas iteraciones tendrá suficiente para conseguir producir una respuesta y se podrán plantear nuevas preguntas; si tiene dificultades, en cambio, la naturaleza propia de la tarea le obligará a dedicar más tiempo a la búsqueda de múltiplos y divisores, que es precisamente lo que necesita practicar. Una variante a tener en cuenta dentro de la práctica productiva, que casi merecería un capítulo aparte, es el juego. Jugar a juegos de mesa presenta un contexto motivador para aprender (Bayeck, 2020). Las matemáticas y la lógica están en la raíz de la mayoría de juegos donde hay que pensar una estrategia para ganar, así que suponen un ambiente fantástico para desarrollar procesos matemáticos como la resolución de problemas o el razonamiento. Además, bien escogidos, los juegos pueden presentar en sí mismos un contexto muy adecuado para practicar y desarrollar la fluidez aritmética (Bay-Williams y Kling, 2019).

Por otro lado, la práctica reproductiva, la más convencional, consiste en reproducir un procedimiento varias veces, sin ninguna investigación ni producción entre manos. Tradicionalmente, esta clase de práctica se plantea a través de fichas con apartados repetitivos. El principal inconveniente que tiene es que, si el alumno ha entendido el procedimiento, después de unas cuantas repeticiones se cansará y perderá la motivación; y, si no lo ha entendido, es poco probable que lo comprenda a base de simple repetición. En cualquier caso, se transmite al alumnado una imagen de las matemáticas que las convierte en repetitivas. Hoy en día, sin embargo, gracias a las plataformas digitales, existen prácticas reproductivas alternativas a la ficha tradicional que tienen la ventaja de posibilitar una personalización del aprendizaje. Estas plataformas permiten, por ejemplo, controlar la variable temporal, es decir, limitar el tiempo de respuesta, o medir cuánto tiempo pasa un alumno en un

determinado apartado, y actuar en consecuencia para limitar la repetición reproductiva al mínimo indispensable. Al mismo tiempo, permiten ofrecer ayudas visuales difíciles de gestionar con todo el grupo delante de una ficha convencional. En esta línea, también pueden ofrecer la posibilidad de practicar contenidos difíciles de presentar en papel, como por ejemplo la visualización 3D, la estimación de ángulos o la localización de enteros sobre la recta numérica. Además, si la plataforma digital corrige las actividades automáticamente, permite ahorrar tiempo de corrección, que los docentes pueden invertir en hacer una evaluación más formativa, y ofrecer un retorno casi inmediato al alumno.

V. Velar por la universalidad de los recursos para atender la diversidad del aula

El derecho a la educación inclusiva es un derecho fundamental para todos los alumnos, más allá de sus necesidades o capacidades. Esto significa que todos los alumnos deben tener acceso a una educación de calidad, y que se deben tomar las medidas necesarias para garantizar que esta educación sea inclusiva y adaptada a las necesidades individuales.

En una clase magistral, el reto que supone atender esta diversidad puede quedar camuflado por las estrategias docentes: si lo único que hace el profesor es explicar y escribir en la pizarra, es poco relevante que la audiencia sea un solo alumno o sean ciento cincuenta. Por el contrario, en aulas donde el motor es la pregunta y donde los alumnos pasan más tiempo manipulando materiales y conversando entre ellos que escuchando explicaciones magistrales, la diversidad aflora con toda su esplendor y complejidad. Las ratios, además, hacen casi imposible personalizar los aprendizajes para todos, en todo momento. La primera solución, pues, parece simple: reducir las ratios. O bien se hacen clases más pequeñas o bien se pone más de un docente por aula. En la mayoría de los casos, sin embargo, los centros educativos no disponen de los recursos necesarios para afrontar esta reducción. Además, reducir demasiado las ratios tiene una contrapartida: no siempre es bueno estar en una clase pequeña si faltan opiniones discordantes que fomenten la argumentación y el debate. Así pues, ¿qué se puede hacer?

Las tres P: presencia, participación y progreso

El marco de las tres P, de Booth y Ainscow (2002), es una herramienta que se puede utilizar para evaluar si una escuela o sistema educativo está proporcionando una educación inclusiva. Este marco se basa en tres dimensiones:

- **Presencia:** Se refiere a la inclusión física de los alumnos en el aula y en la escuela. Esto significa que se deben tomar las medidas necesarias para garantizar que cualquier alumno pueda acceder al aula y a la escuela, independientemente de sus capacidades o necesidades especiales.
- **Participación:** Se refiere a la inclusión social y emocional de los alumnos en el aula y en la escuela. Esto implica que se deben tomar las medidas necesarias para garantizar que todos los alumnos puedan participar activamente en el aprendizaje y en la vida escolar, independientemente de sus habilidades o capacidades.
- **Progreso:** Se refiere a la inclusión académica de los alumnos. Esto significa que se deben tomar las medidas necesarias para garantizar que todos los alumnos puedan hacer progresos en el aprendizaje y desarrollar sus habilidades y capacidades, independientemente de sus dificultades o limitaciones.

Para garantizar que las tres P se cumplen y que, por lo tanto, todo el alumnado pueden tener acceso a la educación matemática, conviene seguir el marco del diseño universal para el aprendizaje (DUA) (Rose et al., 2005), que se describe a continuación.

El Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA)

El DUA parte de unas pautas que comenzaron como un proyecto del Centro Nacional para el Acceso al Currículo General (National Center on Accessing the General Curriculum, NCAC) del Departamento de Educación de los Estados Unidos (Rose et al., 2005; Rose y Meyer, 2006; Meyer, Gordon y Rose, 2015). Básicamente, estas pautas se centran, más que en los déficits, en las barreras del entorno, que pueden ser cognitivas, físicas, sensoriales, estructurales, emocionales, comunicativas o curriculares.

Son estas barreras, que no afectan a todos por igual, las que impiden que todos los niños aprendan lo mismo. A partir de la caracterización de estas barreras, el DUA plantea tres principios fundamentales:

1. Proporcionar múltiples representaciones del contenido. Esto significa que se debe presentar la información de diferentes maneras para acomodar las diferentes formas de aprendizaje y procesamiento de la información de los alumnos. Esto incluye, entre otros, gráficos, videos, audios y textos.
2. Proporcionar múltiples maneras de actuar y de expresar el conocimiento. Esto implica ofrecer a los alumnos diferentes opciones para mostrar lo que han aprendido, como presentaciones orales, textos escritos, videos, uso de materiales manipulativos, etc.
3. Proporcionar múltiples formas de implicación. Esto significa ofrecer a los alumnos diferentes maneras de interactuar con el contenido, como actividades de colaboración, juegos, simulaciones y otras actividades ricas.

A través del DUA, los docentes pueden diseñar actividades y materiales que sean flexibles y adaptables a las necesidades de los alumnos, ofreciendo múltiples maneras de aprender y demostrar el conocimiento. Este enfoque ha probado ser efectivo para alumnos con diversidad funcional y otras necesidades específicas (Fovet, 2021). En el ámbito de las matemáticas, el DUA puede ayudar a hacer frente a las dificultades de aprendizaje que algunos niños experimentan (Lambert, 2024). Por ejemplo, se ha demostrado que ofrecer múltiples representaciones del contenido ayuda a los alumnos a comprender mejor los conceptos matemáticos (Murawski y Scott, 2019). Esto puede incluir el uso de diagramas, gráficos y otras imágenes visuales que ayuden a representar las ideas matemáticas.

El DUA también puede ser útil para los alumnos que experimentan dificultades específicas en el procesamiento numérico y la resolución de problemas (Fovet, 2021). Proporcionar múltiples maneras de actuar y de expresar el conocimiento permite que los alumnos aborden los conceptos matemáticos desde diferentes ángulos y a través de diferentes métodos, como la manipulación física de materiales, la representación visual y la resolución de problemas en grupo.

En conclusión, el diseño universal de aprendizaje es un enfoque pedagógico que busca crear un entorno de aprendizaje inclusivo y accesible para todos los

alumnos, independientemente de sus diferencias individuales o necesidades específicas. A través de la implementación de los tres principios fundamentales del DUA, los docentes pueden crear actividades adaptadas a las necesidades de cada niño. De manera similar al diseño universal arquitectónico, el DUA prevé que los materiales de aprendizaje sean accesibles para todos.

Cuando se habla de este diseño universal en el ámbito de las matemáticas, es necesario considerar también las ideas que se describen en NRIC (2013, 2017) a partir de las ideas de Papert (1993) y Resnick y Silverman (2005) y que ya se han explicado en el segundo principio: si la actividad es de suelo bajo (permite la entrada a todos los alumnos), techo alto (permite hacer muchas conexiones y extender la actividad para ir más allá con nuevas preguntas) y paredes anchas (admite diversas aproximaciones y estrategias de resolución), significa que no hay barreras de entrada y que cualquier alumno puede comenzar a pensar en el problema. Cuando se plantean actividades de este tipo, la atención a la diversidad se produce en primera instancia de una manera muy orgánica, ya que la gran mayoría de los alumnos pueden comenzar a trabajar y los que sean más rápidos pueden seguir explorando nuevas ideas.

Individualización del aprendizaje

Además del diseño universal, la investigación sugiere que la individualización puede tener un impacto positivo en los resultados de los alumnos (Graham y Perin, 2007; Pane et al., 2014). Es por esto que, especialmente en la práctica reproductiva, es esencial adaptarse al nivel y las necesidades de cada alumno en todo momento.

En términos de tecnología educativa, esta funcionalidad es considerada un sistema de tutoría inteligente (ITS, por sus siglas en inglés). Estos sistemas se basan en la aplicación de modelos de inteligencia artificial para proporcionar retroalimentación personalizada y adaptativa a los alumnos en función de sus respuestas, del análisis de sus fortalezas y debilidades, y de su rendimiento en el aprendizaje. Los ITS están considerados una de las tecnologías más avanzadas en la individualización del aprendizaje, ya que proporcionan una experiencia de aprendizaje altamente personalizada y adaptativa. Según varios estudios (por ej., Kulik y Fletcher, 2016; Ma et al., 2014; Van Lehn, 2011), los ITS han demostrado ser

efectivos para mejorar el rendimiento académico de los alumnos en diversas áreas, incluidas las matemáticas, las ciencias y la lengua.

Para mejorar el rendimiento en matemáticas, sin embargo, no basta con individualizar el aprendizaje y hacerlo accesible para todos, sino que, en algunos casos, también es necesario ampliar el tiempo de instrucción mediante intervenciones educativas que analicen los efectos cognitivos y los conocimientos previos que influyen en el aprendizaje de las matemáticas. En algunos países, como los Estados Unidos o Finlandia, se han implementado Sistemas de Apoyo a Múltiples Niveles (MTSS, por sus siglas en inglés) (Harn et al., 2011; Sugai y Horner, 2009), que ofrecen el nivel y la intensidad de instrucción necesaria para que los alumnos con más dificultades puedan alcanzar niveles adecuados.

Para determinar el nivel de dominio de los conocimientos en que se encuentra cada alumno, se llevan a cabo medidas basadas en el currículo (CBM, por sus siglas en inglés) (Deno, 1985; Espin et al., 2012). Estas medidas constantes permiten a los maestros y equipos de apoyo tener una idea completa de los conocimientos que cada alumno tiene en cada momento. A partir de aquí, se adaptan las intervenciones educativas a las necesidades de cada uno, basándose en sus habilidades cognitivas y sus conocimientos, lo que se llama Intervenciones Basadas en Datos (DBI, por sus siglas en inglés) (Fuchs, 2004). Estudios recientes muestran que las DBI son recomendables, ya que mejoran los resultados de los alumnos con un tamaño de efecto moderado (Jung et al., 2017).

Intervención

Tanto el DUA, como el marco de las tres P o la personalización, sirven para fomentar un ecosistema donde se minimicen las dificultades de aprendizaje, pero es poco probable que estas desaparezcan del todo: siempre encontraremos niños con dificultades que necesiten una «intervención» por parte de docentes y especialistas. Fuchs et al. (2021), a través del Instituto de Ciencias de la Educación del Departamento de Educación de los EE. UU., proponen varias recomendaciones a la hora de llevar a cabo estas intervenciones en matemáticas, especialmente en etapas tempranas, como ser explícitos en la instrucción sistemática de las ideas y estrategias, enseñar un lenguaje matemático claro y conciso o utilizar un conjunto

bien elegido de representaciones que apoyen las ideas abstractas (con especial foco en la línea numérica), entre otras.

Más allá de estas recomendaciones generales, en los cursos de primero y segundo de primaria es vital detectar de manera temprana a los niños que padecen dificultades cognitivas para entender conceptos básicos de numeración, principalmente el concepto de número y el pensamiento aditivo. Para tener en cuenta la posible detección y diagnóstico de la discalculia y otras dificultades relacionadas, en estos cursos se puede implementar una variación del MTSS, llamada modelo de «respuesta a la intervención» (RTI, por sus siglas en inglés) (Fletcher y Vaughn, 2009; Fuchs y Fuchs, 2006). El RTI comienza midiendo el rendimiento (fluidez aritmética, en este caso) a principios de la escolarización y después administra una intervención temprana a todos los alumnos que muestren un rendimiento lo suficientemente bajo como para considerarse en riesgo de no alcanzar el nivel mínimo esperado. Esta intervención tiene típicamente una duración de entre 12 y 18 semanas, y puede tener dos resultados: por un lado, un porcentaje importante de los niños responderá correctamente a la intervención, de manera que mejorarán el rendimiento matemático a niveles considerados normales y, por lo tanto, podrán seguir el currículo habitual con la clase. Por otro lado, habrá niños que no responderán correctamente a la intervención; estos serán los candidatos a un diagnóstico de discalculia u otras dificultades de aprendizaje.

VI. Evaluar al servicio del aprendizaje

Para muchos docentes, y aún más para los alumnos, la evaluación es fuente de preocupaciones. Esta preocupación es fruto, entre otros motivos, de una concepción sesgada que equipara la evaluación con el juicio de «poner notas». Como se expone en este principio, evaluar es mucho más que hacer pruebas y poner notas: debería ser un proceso reflexivo que favoreciera el aprendizaje y proporcionara satisfacción tanto a los alumnos como al maestro.

¿Qué significa evaluar?

Cuando se habla de evaluación, a menudo se confunden dos finalidades principales:

- Evaluación formativa y formadora: la evaluación se convierte en un medio para regular los aprendizajes, identificar aciertos, dificultades, errores y encontrar maneras de progresar. Esta información puede llegar al alumno en forma de retroalimentación por parte del docente o a través de un compañero. En ambos casos, hablamos de evaluación formativa. Al mismo tiempo, también esperamos que el alumno reflexione sobre su propio proceso de aprendizaje y desarrolle la capacidad de autorregularse; en este caso, hablamos de evaluación formadora.
- Evaluación sumativa: la evaluación se convierte en un medio para comprobar qué se ha aprendido a posteriori, y toma forma de número o de comentario cualitativo. Es la acepción de evaluación a la que nos referimos cuando pensamos en poner las notas para el boletín. Las calificaciones permiten clasificar (por ejemplo, para acceder a la universidad) o certificar que se ha adquirido un nivel (por ejemplo, en exámenes oficiales de idiomas).

A pesar de que, para la mayoría de alumnos y docentes, y para la sociedad en general, la principal preocupación es la calificación numérica, un proceso de evaluación verdaderamente paradigmático debe contemplar ambas finalidades y potenciar especialmente la primera (Sanmartí, 2020). Así lo explica la misma Sanmartí (2020):

En el despliegue del currículo por competencias, la evaluación tiene una función reguladora de todo el proceso de aprendizaje, dado que tiene permitir decidir y adaptar las estrategias pedagógicas a las características del alumnado y constatar su progreso a medida que avanza en los aprendizajes. Tiene que permitir al profesorado contrastar el grado de logro por parte del alumnado de las competencias básicas y ajustar, si procede, los procesos didácticos. Para el alumnado, la evaluación también se convierte en un elemento esencial para aprender, puesto que los alumnos que constatan su progreso y saben autorregularse están más preparados para avanzar en los aprendizajes y para seguir aprendiendo. Por lo tanto, es necesario buscar estrategias para compartir con el alumnado el proceso evaluador y hacerlo partícipe y protagonista de su proceso de aprendizaje, y para compartir con el resto del profesorado y las familias la coherencia de los criterios de evaluación

aplicados en los ámbitos, los proyectos y el resto de actividades escolares. (p. 4)

Boaler, en la misma línea, lo describe así (2020):

Un problema que hay es que muchos docentes usan la evaluación sumativa como estrategia formativa; es decir, dan a los estudiantes una calificación final cuando aún están aprendiendo los contenidos. En las semanas y meses que los alumnos están aprendiendo en un curso, es muy importante que pasen por evaluaciones formativas, no sumativas. En la evaluación para el aprendizaje (AFL, por sus siglas en inglés) se debe considerar dónde están ahora los estudiantes, dónde deben llegar y maneras de salvar esta distancia. (p. 224)

Según Boaler, la AFL ayuda a los docentes a hacer que su instrucción sea más efectiva y a los alumnos a aprender tanto como sea posible. Los profesores que usan la AFL pasan menos tiempo diciendo a los alumnos cuáles son sus logros y más tiempo capacitándolos para que tomen las riendas de sus vías de aprendizaje.

Con esta concepción en mente, y con voluntad de simplificar, entendemos que la evaluación consta de tres fases, como describen Fernández y Morales (2022). La dificultad radica en responder a las preguntas que nos plantea cada fase:

1. Recoger evidencias de progreso: ¿Cuándo? ¿Sobre qué? ¿Cómo las recogemos?
2. Analizarlas: ¿A partir de qué referencia? ¿Con qué propósito?
3. Tomar decisiones para ayudar a progresar: ¿Cómo lo registramos? ¿Cómo adaptamos nuestra tarea? ¿Cómo damos retroalimentación al alumno? ¿Cómo trasladamos esta información a las familias y a la administración?

¿Qué evaluamos en matemáticas?

Tradicionalmente, los docentes de matemáticas ponían el foco en el logro de los contenidos: ¿Sabe sumar? ¿Sabe qué es un triángulo isósceles? Hoy en día, como ya hemos explicado, la mayoría de expertos en didáctica de las matemáticas, y cada vez más instituciones, apuestan por un aprendizaje (y, por tanto, una evaluación) que contemple, además de los contenidos (numeración, medida, geometría, etc.), los cuatro procesos de la competencia matemática (resolución de problemas, razonamiento y prueba, conexiones, comunicación y representación; descritos en el

capítulo 2). Lo que podemos evaluar en cuanto a la resolución de problemas, por poner un ejemplo, es si el alumno es capaz de ser exhaustivo y encontrar todas las soluciones en una actividad que involucre el pensamiento aditivo en el rango 1-20. No tiene sentido desligar los procesos del contenido, porque son condición necesaria. Al revés, en cambio, como de hecho ya se hacía en enfoques más tradicionales, sí es posible: podemos evaluar el grado de adquisición de un contenido independientemente de los procesos involucrados.

Por otro lado, como defienden autores como la misma Boaler (2020) o Johnson (2022), además de procesos y contenidos, también se debe considerar la evaluación de las habilidades socioemocionales (responsabilidad, autonomía e iniciativa, cooperación, gestión emocional; descritas en el primer principio del capítulo 3). De hecho, un problema de naturaleza socioemocional puede provocar impedimentos de base que imposibiliten el aprendizaje de los contenidos o de los procesos. Por este motivo, es necesario que los docentes sean muy conscientes de esta tercera capa: a veces, las dificultades de aprendizaje no son de carácter conceptual o competencial, sino emocional.

Lo más importante, en definitiva, es tener claro qué se quiere evaluar, y actuar de manera coherente con esto. Las decisiones evaluativas, por muy fundamentadas que estén, siempre estarán sesgadas por la visión del docente: evaluar es una tarea subjetiva en esencia, que depende tanto del observador como del observado. Ni siquiera unas pruebas estandarizadas son objetivas: la elección de qué preguntas aparecen en la prueba es subjetiva; la puntuación y la ponderación de cada pregunta es subjetiva; incluso la corrección es subjetiva porque, poco o mucho, y con la excepción de las pruebas tipo test, depende de cada corrector y del momento en que lo corrija, etc. Admitir esta subjetividad no implica que se pueda evaluar sin fundamento ni resta valor al hecho de encontrar evidencias que la justifiquen, al contrario: son los docentes, los expertos en la materia, los que pueden elegir cómo recoger evidencias de la mejor manera en cada momento y decidir qué conviene a cada alumno para favorecer su progreso.

¿Cuándo evaluamos?

Siempre. Cada vez que se resuelve una duda, cada vez que se guía a un alumno, cada vez que se plantea una pregunta, etc. se está evaluando. Los docentes

deben aprovechar que se pasan todo el curso con los alumnos para ir recogiendo evidencias de diversos tipos continuamente. Para evaluar de manera ideal, sin embargo, sería necesario escuchar, observar y recoger evidencias del alumnado mientras realiza todas y cada una de las tareas, cada día del curso y a lo largo de todas las sesiones. Evidentemente, esto es difícil en un aula con más de 25 alumnos. Y aún más cuando se pretende evaluar contenidos, procesos y habilidades socioemocionales. Tradicionalmente, los docentes se sienten mucho más cómodos determinando si el alumno sabe sumar, multiplicar o resolver ecuaciones de segundo grado, por ejemplo. En cambio, encuentran muchas más dificultades a la hora de determinar si el alumno es competente en el proceso de razonamiento y prueba. ¿Por qué? Porque la generación de docentes actual ha recibido una educación mucho más centrada en los contenidos que en los procesos: dominan mucho más la suma, la multiplicación o las ecuaciones de segundo grado que el proceso de razonamiento y prueba. Por eso es tan importante la formación docente (Baumert et al., 2010). Solo cuando los docentes seamos capaces de pensar en los procesos de manera integrada y natural, seremos capaces de evaluarlos con soltura y comodidad, en el día a día. De hecho, no es necesario esperar a una sesión de evaluación concreta para recoger evidencias: debe ser una actitud continua (Landa et al., 2021). Algunas veces, las evidencias serán físicas y permanecerán (desde respuestas en el cuaderno o en la libreta hasta pruebas escritas, si es el caso), y otras veces serán efímeras (desde una intervención oral o un gesto hasta una representación construida con material manipulativo).

Trabajar de esta manera reduce la ansiedad del alumnado ante las pruebas, porque no se lo juegan todo a una carta (Boaler, 2020). Y también reduce la presión que sienten los docentes cuando llega el período de evaluaciones. Hay voces que defienden que una manera continua de evaluar no es justa porque no se fija en lo mismo en todos los alumnos ni en el mismo momento. Para responder a esto, en primer lugar, es necesario recordar que queremos una evaluación que acompañe durante el viaje y promueva la autonomía, no un simple examen que haga la fotografía de un momento concreto. Y, en segundo lugar, la recogida de evidencias continua, si está bien planificada, admite formatos diversos y favorece que todos los alumnos tengan muchas oportunidades de mostrar su progreso en cuanto a contenidos, procesos y habilidades socioemocionales. De hecho, una de estas evidencias puede ser, también, una prueba evaluativa escrita tradicional, por

supuesto. Ruiz Martín (2021) explica que las pruebas evaluativas tradicionales pueden ayudar a aprender porque se basan en la evocación: si se plantean adecuadamente, pueden ser una herramienta muy buena. Ahora bien, el autor también advierte que, si estas pruebas tienen un peso demasiado grande en las calificaciones académicas de los alumnos, el nivel de ansiedad que pueden provocar puede eclipsar los beneficios didácticos de la prueba.

VII. Emplear conscientemente la tecnología

Aunque un lápiz o una calculadora, dos objetos habituales en un aula de matemáticas, pueden considerarse «tecnología», es evidente que, cuando hoy hablamos de herramientas educativas tecnológicas, nos referimos sobre todo a las pantallas (ordenadores, tabletas, móviles y similares). El uso de estos dispositivos electrónicos en el aula despierta un debate encendido que enfrenta visiones contrapuestas sobre su incidencia en la educación de los niños. Pero, ¿qué dice la investigación educativa sobre el uso de esta tecnología en las aulas?

El primer aspecto a considerar es que la presencia de las pantallas en entornos cotidianos, hoy en día, es casi inevitable. En este sentido, la escuela emerge como el escenario idóneo donde los niños pueden familiarizarse con los usos educativos de las pantallas y su gestión responsable, lo que diversos autores y textos oficiales llaman «competencia digital» (Pettersson, 2017). En cualquier caso, el factor más determinante no es la incorporación de la tecnología en sí misma, sino cómo la usamos, como explica la UNESCO (2023):

La revolución digital contiene un potencial inconmensurable, pero, de la misma manera que se ha advertido sobre cómo debe regularse en la sociedad, debe prestarse una atención similar a la manera en que se usa en el contexto de la educación. Su uso debe mejorar las experiencias de aprendizaje y aumentar el bienestar de los alumnos y los docentes, no disminuirlo. Mantened las necesidades del aprendiz como prioridad y apoyad a los docentes. Las conexiones en línea no sustituyen la interacción humana. (p. 1)

Los beneficios y riesgos de la tecnología en el aula

Más allá de concienciar a los niños sobre los usos responsables de las pantallas, la presencia de este tipo de tecnologías en el aula de matemáticas puede

comportar una serie de ventajas e inconvenientes que conviene explorar. En un metanálisis que analiza más de 90 estudios diferentes sobre el uso de herramientas digitales en el aula, Hillmayr et al. (2020) explican que la integración de estas tecnologías en la educación aporta beneficios en el aprendizaje de los estudiantes. Según los autores, la adopción de herramientas digitales en la enseñanza de las matemáticas y las ciencias mejora notablemente el rendimiento académico de los alumnos, gracias especialmente a dos de sus usos más extendidos.

Por un lado, destacan los sistemas de tutoría y práctica a través de una plataforma digital, los cuales tienen el potencial de adaptarse al ritmo que necesita cada niño, dentro de unos parámetros, y aportar evidencias sobre su progreso. Muchos docentes reconocen que no siempre es posible gestionar con éxito los diferentes ritmos que existen en un grupo de 25 o 30 alumnos. Estas plataformas tienen el potencial de presentar actividades de práctica individualizadas para cada niño, regulando el factor tiempo, y proporcionarles tanto una retroalimentación inmediata como ayudas en caso de dificultad. La retroalimentación, especialmente cuando contribuye a responder a las preguntas «¿A dónde voy?», «¿Cómo lo estoy haciendo?» y «¿Qué viene después?», es clave para el desarrollo de los alumnos, como describen Hattie y Timperley (2007). Cuando las actividades, además, aparecen mezcladas y no agrupadas por bloques temáticos, el aprendizaje de los estudiantes mejora significativamente a medio y largo plazo (Rohrer y Taylor, 2007). Incluso, muchas de estas herramientas de práctica digital se comunican de alguna manera con el docente para que este tome decisiones más informadas, lo que puede contribuir a una mejor evaluación continua.

Por otro lado, Hillmayr et al. (2020) también destacan los simuladores que permiten visualizar conceptos matemáticos de manera dinámica: la tecnología ofrece la posibilidad de trabajar contenidos difíciles de presentar en papel, como la visualización 3D, la estimación de ángulos o la localización de números racionales sobre la recta numérica, por mencionar tres ejemplos concretos y relevantes en un aula de matemáticas.

En cualquier caso, este efecto positivo se ve reforzado cuando los docentes reciben la formación adecuada para aprovechar al máximo estas herramientas, y aún más cuando se combina su uso con métodos de instrucción no tecnológicos, es decir, cuando la tecnología actúa como complemento y no como sustituto del docente.

Otros autores, aunque reconociendo los potenciales beneficios, advierten que estas tecnologías, por sí solas, nunca son transformadoras (Selwyn et al., 2020), y resaltan la necesidad de reflexionar sobre cómo integrarlas de manera efectiva. De hecho, según estos autores, se debe considerar no solo el potencial de la tecnología para el enriquecimiento del aprendizaje, sino también cómo esta se percibe socialmente y cómo se utilizará en el contexto escolar. De nuevo, como decía Azoulay (2023), los autores ponen en el centro del debate el uso que hacemos de la tecnología, más que su naturaleza intrínseca.

Con todo, cuando se buscan razones contrarias a la incorporación de las pantallas en el aula, a menudo se enfoca en su efecto potencialmente perjudicial para la salud de los niños. Se habla de las consecuencias sobre la capacidad de concentración, miopía, trastornos del sueño, adicciones o trastornos del lenguaje (Ruiz Martín, 2023). Según el mismo Ruiz Martín (2023), quien cita estudios de diversos ámbitos, no hay evidencias concluyentes de que el uso educativo de las pantallas provoque en sí mismo ninguna de estas consecuencias. Por ejemplo, sabemos que fijar la mirada en un punto cercano para leer aumenta el riesgo de desarrollar miopía (más que jugar al aire libre), pero no se han observado diferencias entre leer en papel o en una pantalla (Lança et al., 2022). El uso de pantallas (incluido el televisor) justo antes de dormir puede inhibir la segregación de melatonina (Higuchi et al., 2003) o generar un estado emocional que dificulte conciliar el sueño, pero esto no tiene relación con su uso en la escuela, horas antes de dormir. Las pantallas tampoco generan adicción por sí mismas, como prueba el hecho de que nadie se vuelva adicto al procesador de textos o a la hoja de cálculo por mucho que pase todo el día en ello. Lo que puede generar dependencia son aquellas aplicaciones que «continuamente prometen información nueva que el cerebro estima como relevante, como las redes sociales», como explica Ruiz Martín (2023) citando a Bhanji y Delgado (2014) y Kilford et al. (2016), «en todo caso, deberíamos evitar hablar de adicción, salvo en casos excepcionales, ya que las adicciones son trastornos conductuales muy serios que van más allá del simple uso excesivo o disfuncional, y usar el término de esta manera solo contribuye a su banalización». En cuanto al posible efecto nocivo de las pantallas en la construcción del lenguaje, tampoco encontramos evidencias concluyentes. Madigan et al. (2020) alertan que la ausencia de los estímulos lingüísticos y sociales que necesitan los niños menores de 3 años al desarrollar el lenguaje (como escuchar conversaciones de adultos, leerles cuentos,

hablar con ellos, etc.) puede afectarles negativamente. Así, los autores enfocan el riesgo en la falta de interacción con compañeros y adultos, más que en el uso de las pantallas per se. Y, en cualquier caso, hablan de niños en edad preescolar.

Por lo tanto, parece claro que las tecnologías digitales que entran en el aula no son ni buenas ni malas en sí mismas; todo depende del uso que se les dé. Tienen el potencial de complementar la tarea docente y servir como apoyo al proponer momentos de práctica, recoger evidencias, atender la diversidad, etc. En cualquier caso, su presencia en el aula debe aportar algún valor añadido que justifique la inversión, tanto económica como temporal. Como concluye Ruiz Martín (2023):

No hay duda de que conviene ser críticos con el uso de dispositivos digitales en las aulas. De entrada, cabe preguntarse en qué casos aportará algún valor añadido a la hora de alcanzar los objetivos educativos. Y esto implica ser conscientes de que su utilidad y conveniencia no serán iguales en todos los niveles educativos, dado que los objetivos de aprendizaje y las habilidades de los alumnos serán diferentes. También conlleva apreciar que usar la tecnología para hacer exactamente lo mismo que se hacía sin ella no tiene sentido. Si la tecnología que se emplea no aporta un valor diferencial que contribuya a los procesos de enseñanza y aprendizaje de un modo impensable sin tecnología, entonces integrarla en el aula difícilmente estará justificado. (p. 366)

VIII. Entender el rol del educador como guía

Como hemos visto en el primer principio, en el marco del aprendizaje competencial constructivista, el rol del docente es aún más crucial, ya que va más allá de la función que tradicionalmente desempeñaba como transmisor de información. El docente se convierte en un guía que facilita el aprendizaje y anima a los estudiantes a explorar, compartir y descubrir por sí mismos, mientras desarrollan habilidades como la resolución de problemas y el pensamiento crítico. Por lo tanto, como explican Smith y Stein (2011), el docente debe saber planificar cuidadosamente las interacciones y seleccionar aportaciones clave de los estudiantes para dirigir el aprendizaje hacia metas específicas. Para entender este rol poliédrico, sin embargo, antes conviene definir qué entendemos por «aprendizaje por indagación».

Aprendizaje por indagación

Cuando hablamos sobre el aprendizaje por indagación, es necesario ser muy cuidadosos. Hay quienes han llevado el paradigma al extremo y pretenden que los niños descubran de manera libre y autónoma todos los contenidos curriculares. Seamos claros: es improbable que un niño descubra o construya por sí solo todos estos conocimientos, unos descubrimientos que la humanidad ha tardado miles de años en consolidar (Kirschner et al., 2006). Nadie propondría aprender por indagación o descubrimiento la gestión de una central nuclear, por poner un ejemplo exagerado. Como explica Ruiz Martín (2023) citando a Geary (2012), es necesario diferenciar muy bien aquellas habilidades biológicamente primarias (como caminar o hablar la lengua materna), que sí se aprenden de manera muy deductiva y sin mucha guía, de las habilidades secundarias (donde encontramos el grueso de las destrezas matemáticas, la lectoescritura, etc.), que requieren un contexto adecuado:

Desde bien pequeños sabemos contar hasta 3 (incluso hasta 4) y sabemos realizar operaciones aritméticas básicas con estos números (sumas y sustracciones). También tenemos ciertos conocimientos de geometría. Sin embargo, aprender unas matemáticas más avanzadas es improbable sin el apoyo de la enseñanza. [...] De hecho, ya hemos visto que buena parte de nuestros conocimientos son convenciones humanas (como el sistema de numeración decimal), así que es casi imposible que podamos compartirlos sin que medie la enseñanza. (p. 52 y 53)

La realidad docente, sin embargo, está llena de matices, de grises a medio camino entre un extremo (que el alumno lo descubra todo por sí solo) y el otro (explicarlo todo de manera *transmisiva*). De hecho, son muchos los que apuestan por un aprendizaje por indagación o descubrimiento guiado (Edelson et al., 1999; Banchi y Bell, 2008). En este paradigma, el docente plantea las situaciones de aprendizaje para favorecer el descubrimiento, pero no deja que los alumnos se enfrenten solos, sino que interviene planteando las preguntas o pistas adecuadas, poniendo ejemplos y contraejemplos, validando o refutando las observaciones, consolidando aprendizajes, etc., es decir, actuando como guía. Como explican Hmelo-Silver et al. (2007) en un estudio que responde a las críticas de Kirschner et al. (2006) al aprendizaje por indagación:

Kirschner y sus colegas han agrupado indiscriminadamente varios enfoques pedagógicos diferentes —constructivista, de descubrimiento, basado en problemas, experiencial y basado en la indagación— bajo la categoría de instrucción mínimamente guiada. Aquí argumentamos que al menos algunos de estos enfoques, en particular el aprendizaje basado en problemas y el aprendizaje por indagación, no son enfoques de instrucción mínimamente guiados, sino que proporcionan un amplio apoyo y orientación para facilitar el aprendizaje de los estudiantes. (p. 99)

Con la ayuda del docente, quien debe acompañar y poner los hitos adecuados, el alumno es capaz de descubrir, individualmente o colectivamente, una buena parte de los contenidos, y esto generará un aprendizaje más significativo y profundo. Banchi y Bell (2008), referentes en el aprendizaje por indagación, describen cuatro niveles bien diferenciados:

1. Indagación de confirmación:

Los alumnos confirman un principio (un contenido) conocido a través de una actividad donde los resultados son conocidos de antemano. Este nivel es útil para introducir a los estudiantes en la indagación y ayudarles a entender el método científico.

2. Indagación estructurada:

Los alumnos investigan una pregunta propuesta por el docente a través de un procedimiento preestablecido. Este nivel permite a los estudiantes practicar el diseño y la realización de investigaciones.

3. Indagación guiada:

Los alumnos investigan una pregunta propuesta por el docente a través de un procedimiento diseñado por los mismos alumnos. Este nivel permite a los estudiantes practicar un pensamiento y una toma de decisiones más independientes.

4. Indagación abierta:

Los alumnos investigan preguntas propuestas por ellos mismos a través de procedimientos también diseñados por ellos mismos. Este último nivel se alcanza cuando los alumnos son independientes en la investigación.

Estos cuatro niveles se abordan de manera cíclica: cada vez que se quiere introducir un nuevo concepto fundamental, se diseñan las actividades y las lecciones de manera que el alumno, bajo la guía del docente, avance por las fases de la indagación hasta consolidar los aprendizajes. Y entonces se plantean nuevas preguntas y se vuelve a empezar. Precisamente, estos aprendizajes que buscamos en los alumnos, al abrir las puertas a un ambiente competencial, van más allá de los contenidos que se podrían enseñar de manera *transmisiva*. Hablamos de los procesos matemáticos que hemos visto en el capítulo 3 y más, como describen Hmelo-Silver et al. (2007) citando a Bereiter y Scardamalia (2006):

Es necesario considerar los objetivos de la educación, que incluyen no solo el aprendizaje de contenidos, sino también el aprendizaje de competencias personales (Bereiter y Scardamalia, 2006) como las prácticas epistémicas, el aprendizaje autogestionado y la colaboración, que no se miden en los tests de rendimiento, pero son importantes para ser aprendices perpetuos y ciudadanos en una sociedad del conocimiento. (p. 105)

Según los autores, el aprendizaje por indagación guiada facilita el desarrollo de estas competencias personales (también llamadas soft skills). Y si el docente es capaz de generar unas condiciones favorables para la indagación, despertará en el alumnado la curiosidad. Una curiosidad que actúa como motor de aprendizaje, porque satisfacerla es gratificante, como explican Perlovsky et al. (2010): «La adquisición de conocimiento es emocionalmente gratificante. La satisfacción de la curiosidad mediante la obtención de conocimiento produce placer.» (p. 3).

El momento de gloria matemática: emoción y pasión

Aubanell, profesor de didáctica de las matemáticas en la Universidad de Barcelona y referente en educación matemática en España, habla del «momento de gloria matemática» como un derecho que se debería garantizar a cada uno de los alumnos. Incluso aquellos que participan menos merecen un momento de descubrimiento para celebrar con sus compañeros. Cuando el docente da la palabra, cuando pregunta, cuando decide los agrupamientos, cuando repite para el gran

grupo las aportaciones de un alumno, cuando celebra los aciertos (y los errores), etc., siempre debe tener en mente que, con sus decisiones, condiciona los momentos de alegría de un alumno u otro, y así configura la «identidad matemática» del niño. Como explica Gutiérrez (2013):

Todos los profesores de matemáticas son trabajadores de la identidad, independientemente de si se consideran como tales o no. Contribuyen a las identidades que construyen los estudiantes, transmiten constantemente lo que son las matemáticas y cómo la gente puede relacionarse con ellas (o no). (p. 11)

Es necesario buscar el equilibrio y favorecer este tipo de instantes que, para muchos, se convertirán en un bonito recuerdo matemático de su paso por el aula. Y no hace falta que esto suponga el despertar de una vocación para todos los alumnos. Simplemente, hay que procurar que las matemáticas no supongan un obstáculo insalvable para nadie, independientemente de su género, raza o estatus social, que nadie deje de estudiar lo que le gusta «por culpa de las matemáticas». Cross (2004) cita esta frase del profesor Wheeler, que es un buen resumen:

No espero, ni quiero, que todos los alumnos piensen que las matemáticas son cautivadoras, o una disciplina a la que quieran dedicarse. Solo unos cuantos encontrarán las matemáticas lo suficientemente seductoras para mantener un compromiso a largo plazo. Lo que sí me gustaría es que todos los alumnos pudieran experimentar en algunos momentos el poder y la emoción de las matemáticas, para que, al final de su educación formal, al menos sepan cómo son y si son una actividad con cabida en su futuro. (p. 4)

El conocimiento del profesor y la formación continua

Para ser un buen guía, no basta con dominar la materia; se debe conocer el camino del aprendizaje a fondo, conocer todos sus recovecos, atajos, claros y cuevas, y saber situar a cada alumno teniendo en cuenta su momento evolutivo. Por eso es fundamental que los docentes se formen de manera continuada en la didáctica específica de las materias que quieren enseñar (Siegle y McCoach, 2007; Harris y Sass, 2011). Shulman (1986) fue pionero al teorizar sobre esto; es lo que él llama «conocimiento didáctico del contenido» (del inglés pedagogical content knowledge (PCK)):

Dentro de la categoría del conocimiento del contenido pedagógico, incluyo, para los temas más regularmente enseñados en una asignatura, las formas más útiles de representación de estas ideas, las analogías más poderosas, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones —en una palabra, las maneras de representar y formular la asignatura que la hacen comprensible para los demás. [...] También incluye una comprensión sobre qué hace que el aprendizaje de temas específicos sea fácil o difícil: las concepciones y preconcepciones que los estudiantes de diferentes edades y orígenes traen consigo [...]. (p. 9)

Según Shulman (1986) y muchos de los autores que han continuado desarrollando sus ideas (Brousseau, 1997; Ball et al., 2005; Rowland et al., 2005; Park y Oliver, 2007; Kleickmann et al., 2012; o Depaepe et al., 2013, entre otros), el conocimiento del contenido pedagógico es esencial, porque capacita a los docentes para adaptar sus estrategias de enseñanza a las diversas maneras en que los estudiantes aprenden y procesan la información.

El conocido marco teórico del «knowledge quartet» (Rowland et al., 2005) nos ayuda a analizar cómo el conocimiento matemático de los docentes afecta lo que ocurre en el aula. Este conocimiento está dividido en cuatro ejes principales:

- Fundamentos: Incluye los conocimientos y creencias adquiridas durante la formación académica de los docentes.
- Transformación: Es el conocimiento en acción en el aula; es decir, la capacidad de los docentes de transformar su conocimiento del contenido en acciones pedagógicamente efectivas, a través de actividades, analogías, ejemplos, demostraciones, etc.
- Conexión: Esta dimensión se centra en la coherencia entre las actividades planificadas, para asegurar que los contenidos están secuenciados de manera lógica y adecuada para el desarrollo cognitivo de los alumnos.
- Contingencia: Se refiere a la capacidad para adaptarse a los imprevistos en el aula, en respuesta a las ideas de los alumnos, y la habilidad para ajustar las estrategias y planificaciones según convenga.

Estos cuatro ejes proporcionan una estructura sólida para reflexionar sobre la práctica docente y desarrollar estrategias de formación continua que aborden tanto el conocimiento matemático como las habilidades didácticas y pedagógicas.

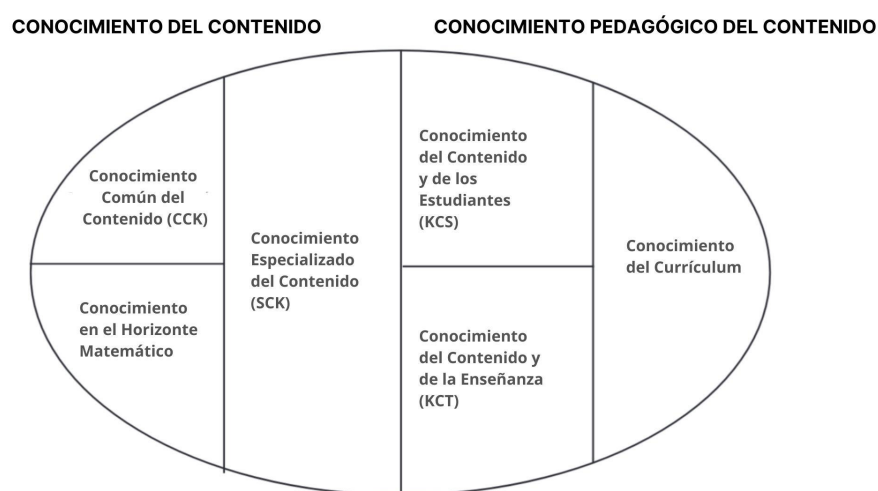
El mismo Rowland formó parte de un estudio de la ICMI (*International Commission on Mathematical Instruction*) que firman Liljedahl et al. (2009). En este estudio se profundiza en los tres tipos de conocimiento que debe tener un profesor de matemáticas que describió Shulman (1987):

- Conocimiento del contenido (SMK, del inglés *subject matter knowledge*): Incluye la comprensión profunda de los conceptos matemáticos, las operaciones y las estructuras matemáticas. Por ejemplo, en un contexto de 5º de primaria, esto implica una comprensión detallada del concepto de fracción, su equivalencia, la suma y resta de fracciones, etc., así como la capacidad de explicar por qué los procedimientos funcionan como lo hacen.
- Conocimiento pedagógico (PK, del inglés *pedagogical knowledge*): Nos referimos a las técnicas generalistas de enseñanza y gestión del aula. Un profesor debería saber cómo estructurar y dirigir las sesiones para mantener a los alumnos comprometidos.
- Conocimiento didáctico del contenido (PCK, del inglés *pedagogical content knowledge*): Hablamos de la capacidad de presentar y representar los conceptos matemáticos de manera que sean comprensibles y asimilables para los alumnos. Volviendo al ejemplo de 5º de primaria, esto podría incluir el uso de materiales manipulativos para enseñar fracciones, utilizar metáforas y analogías apropiadas, e implementar actividades que ayuden a los alumnos a construir una comprensión profunda.

Además, los autores también subrayan la importancia de las creencias o ideas preconcebidas de los profesores sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, que a menudo influyen en sus prácticas en el aula y también se pueden trabajar a través de la formación. Ball et al. (2008), en términos similares, describen las dimensiones del «conocimiento matemático del profesor» (del inglés *Mathematical Knowledge for Teaching, MKT*), y proponen un marco teórico para analizar las destrezas del profesor de matemáticas que hoy en día está bastante extendido entre la comunidad investigadora:

Figura 1

Dominios del MKT (Ball et al., 2008).



En cualquier caso, investigaciones como la de Ball et al. (2005), la de Hill et al. (2008), o la de Jacob et al. (2017) confirman la evidencia: los alumnos que tienen profesores mejor formados consiguen mejores resultados. Esta evidencia resalta la necesidad de una formación continua que no solo se centre en el conocimiento del contenido matemático, sino también en las mejores prácticas pedagógicas y didácticas para facilitar un aprendizaje significativo.

En definitiva, la formación continua en didáctica de las matemáticas no solo implica mejorar el conocimiento del contenido, sino también comprender los procesos de aprendizaje de los niños, identificar las dificultades comunes y saber cómo relacionar los contenidos a través de los diferentes niveles educativos. Dominar estas competencias es esencial para una enseñanza efectiva que fomente tanto el desarrollo de las habilidades matemáticas como las competencias personales de los niños.

IX. Involucrar a toda la comunidad educativa

Una de las claves para el éxito de cualquier proyecto es que todos los actores implicados remen en la misma dirección. En una escuela, el proyecto último es el desarrollo de los alumnos, y los actores que conforman la comunidad educativa son docentes y administradores, los mismos alumnos y sus familias. Cuando, además, se pretende accionar un cambio de perspectiva como el que argumentamos en estos

principios, encontrando probablemente resistencias e inmovilismos que son en buena parte producto de la tradición, esta cohesión entre actores es aún más crucial.

Como veremos a continuación, la cohesión debe comenzar dentro de la escuela, con un claustro y un equipo directivo alineados en cuanto a proyecto educativo, prioridades y metodologías. Después, debe extenderse y compartirse con las familias, que en muchos casos quieren involucrarse, pero también en muchos casos carecen de recursos (tiempo, formación académica, dinero) para hacerlo de la manera que más convendría al alumno.

La llamada «línea de escuela»

Es fundamental que la escuela tenga un proyecto educativo coherente entre cursos y etapas; lo que se conoce popularmente como tener «línea de escuela». Newmann et al. (2001), pioneros al abordar de manera transversal esta cuestión (basándose en ideas preliminares de Hill y Celio, 1998; y Sergiovanni, 1994, entre otros), se refieren a ello como «coherencia del programa instructivo». Es decir, un «conjunto de programas coordinados para estudiantes y personal de la escuela, regidos por un marco unificado que abarca el currículo, la instrucción, la evaluación y el clima de aprendizaje, los cuales se desarrollan de manera continuada durante un período prolongado» (p. 297). Los proyectos escolares que incorporan esta coherencia como elemento a tener en cuenta, explican los autores, «tienen más probabilidades de mejorar el aprendizaje de los alumnos que realizando esfuerzos múltiples y no relacionados», por muy innovadores que sean. Según los autores, una coherencia fuerte es evidente cuando en la escuela se dan tres grandes condiciones:

1. Un marco instructivo común guía el currículo, la enseñanza, la evaluación y el clima de aprendizaje. Este marco combina expectativas específicas para el aprendizaje de los estudiantes, con estrategias concretas y materiales para orientar la enseñanza y la evaluación. Un marco instructivo común implica lo siguiente:
 - a. El currículo, las estrategias docentes y las evaluaciones están coordinados por los docentes dentro del mismo nivel educativo.
 - b. El currículo y las evaluaciones progresan lógicamente de un nivel a otro, ofreciendo una secuencia cada vez más compleja.

- c. Los programas de apoyo, como las intervenciones o la educación de los padres y las oportunidades para su participación, están focalizados de manera consistente en el marco instructivo.
- 2. Las condiciones laborales apoyan la implementación del marco.
 - a. Administradores y docentes esperan unos de otros que implementen el marco.
 - b. Los criterios para contratar docentes enfatizan el compromiso y la competencia en la ejecución del marco.
 - c. Los docentes son evaluados y responsabilizados sobre cómo utilizan efectivamente el marco.
 - d. Las oportunidades de desarrollo profesional se centran en el marco instructivo común, y durante el período de tiempo necesario.
- 3. La escuela asigna recursos como financiación, materiales, tiempo y personal para avanzar en el marco instructivo común de la escuela y evitar esfuerzos difusos y dispersos, con los siguientes resultados:
 - a. El currículo y las evaluaciones permanecen estables a lo largo del tiempo.
 - b. Las asignaciones profesionales son lo suficientemente estables para que los docentes tengan oportunidades sostenidas de aprender a enseñar bien en sus roles específicos. (p. 298-299)

Supongamos que una escuela logra reunir las tres condiciones y, por tanto, la anhelada coherencia del programa instructivo. ¿Por qué debería esto contribuir al aprendizaje de los estudiantes? Por un lado, nuevamente según Newmann et al. (2001), ayudaría a los docentes a trabajar con más eficacia, y, por otro, aumentaría directamente la implicación de los estudiantes.

Lograr una fuerte coherencia, sin embargo, es difícil. Un contexto de inestabilidad con mucha rotación docente, las diferencias entre proveedores de recursos, que rara vez se coordinan entre ellos (más bien compiten), los diversos intereses que entran en juego, etc., son solo algunos de los factores que fomentan la incoherencia. Por eso, dado que las fuentes de incoherencia provienen tanto de dentro como de fuera de la escuela, fortalecer la coherencia del programa instructivo requiere un esfuerzo simultáneo de todos los implicados.

La participación de las familias

La educación es una etapa obligatoria para niños y jóvenes hasta una edad determinada. Esto implica que, de alguna manera, también es una etapa obligatoria para sus familias. Hay familias que quieren y pueden implicarse, otras que no pueden o no tienen interés en ello; algunos niños cuentan en casa lo que hacen en clase, otros rara vez lo comparten; hay centros que son transparentes con las familias y centros que prefieren dejarlas al margen tanto como sea posible; etc. En un contexto con tantas realidades diferentes, es complejo determinar la justa medida que favorezca el progreso del alumno.

De hecho, como explican Boonk et al. (2018), diversos estudios cuestionan la suposición generalizada de que, cuanto mayor es la implicación de las familias, mayor es el logro académico (del inglés *achievement*), porque no todas las formas de implicación influyen positivamente. Además, esta correlación no es la misma para todos los grupos étnicos o raciales. En el citado estudio, la relación más consistente entre logro académico e implicación familiar se observa cuando los padres o familiares tienen altas expectativas sobre el alumno, más que cuando intervienen directamente. Daniel et al. (2016), en otro estudio que se centra en los niños más pequeños, explican que la implicación de los padres en la escuela en etapas tempranas predice el éxito en la capacidad lectora de los niños, pero no parece predecir el éxito en numeración. El metanálisis realizado por Castro et al. (2015) analiza casi 40 estudios en la materia, que incluyen tanto educación infantil como primaria y secundaria. Su conclusión es que, efectivamente, la implicación de las familias puede tener un impacto positivo, aunque de efecto moderado, en el logro académico de los alumnos. De nuevo, los autores exponen que la relación más fuerte entre implicación y logro se observa cuando los familiares tienen altas expectativas académicas para sus hijos, mantienen una comunicación fluida con ellos sobre las actividades escolares, y promueven el desarrollo de los hábitos de lectura. Según los autores, sin embargo, «otros comportamientos familiares como la supervisión de los deberes o la asistencia a ciertas actividades escolares no parecen estar relacionados con el logro académico de los niños». Hill y Tyson (2009) también se muestran escépticos sobre la importancia de ayudar a los niños con los deberes: «la asistencia con los deberes y su supervisión o revisión es el único tipo de implicación que no está

consistentemente relacionado con el logro académico.» Wilder (2013) llega a conclusiones similares:

Los resultados indicaron que la relación entre la implicación de los padres y el rendimiento académico era positiva, independientemente de la definición de implicación parental o de la medida del rendimiento utilizada. Además, los resultados revelaron que esta relación era más fuerte si la implicación de los padres se definía como «expectativas sobre el rendimiento académico de sus hijos». No obstante, el impacto de la implicación de los padres en el rendimiento académico de los estudiantes era más débil si la implicación se definía como «asistencia con los deberes». (p. 377)

En la misma línea, los Principios y Estándares del NCTM (2000) defienden que el rol de las familias es clave a la hora de establecer las expectativas que se ponen tanto en los niños en general como en el aprendizaje de las matemáticas en particular:

Cuando los padres entienden y apoyan en el programa de matemáticas de la escuela, pueden ser inestimables al convencer sus hijas e hijos de la necesidad de aprender matemáticas y de tomarse seriamente la escolarización. Las familias se convierten en defensoras de los estándares educativos cuando entienden la importancia de una educación matemática de alta calidad para sus hijos. (p. 378)

En cualquier caso, una de las claves de esta implicación familiar en la escuela pasa por la comunicación con los docentes. Kraft y Rogers (2015) ponen el foco en esta comunicación y se muestran sorprendidos por cómo las familias perciben, de forma generalizada, que no hay suficiente comunicación. Incluso proponen una intervención que invitaba a los docentes a enviar un mensaje semanal de una sola frase a cada familia. Los mensajes que enfatizaban los aspectos a mejorar tuvieron un mayor impacto. Según los autores, esto redujo el porcentaje de estudiantes que suspendía los cursos de verano del 16% al 9%.

Cuando se analizan las diversas maneras que tienen las familias de implicarse en la realidad académica de sus hijos, surge una distinción entre la implicación en casa (conversaciones del día a día, seguimiento de los deberes, etc.) y la implicación en el centro escolar (reuniones de seguimiento con los docentes, participación en

talleres o jornadas para familias, etc.). Reynolds (1992) defiende que implicarse en la escuela es mejor que hacerlo en casa. En esta línea, existe toda una rama de la investigación que explora cómo se debería integrar esta participación de las familias en la escuela, especialmente en lo que respecta a la educación matemática, aprovechando lo que ocurre de manera natural en casa, derribando la barrera. González et al. (2001), por ejemplo, exploran cómo «comprender el potencial matemático de los hogares y 'matematizar' las prácticas domésticas». Según los autores, «mientras que otros ámbitos de conocimiento (lenguaje, estudios sociales, etc.) pueden integrar de manera bastante directa los conocimientos provenientes de los hogares, el conocimiento matemático tiende a no ser tan fácilmente incorporado». Civil y Bernier (2006), especializadas en la integración de la comunidad latina en escuelas de Estados Unidos, proponen un marco que parte de los llamados fondos de conocimiento (el conjunto de conocimientos prácticos y culturales que tienen las comunidades, resultado de sus experiencias vitales) y se aterriza en forma de talleres con grupos de familiares en la escuela:

Nos basamos en la investigación sobre la implicación de los padres en la educación, especialmente aquella que examina críticamente cuestiones de poder y percepciones de los padres. Ampliamos el concepto de aprendizaje basado en la conversación y la caracterización de los padres como recursos intelectuales, y presentamos un modelo para su implicación en la asignatura de matemáticas como (a) padres, (b) aprendices, (c) facilitadores, y (d) líderes. En particular, nos centramos en el tercer componente: los padres como facilitadores de talleres de matemáticas para la comunidad en general. (p. 115)

De esta manera, en consonancia con lo que apuntan las fuentes de investigación citadas, la escuela puede transmitir su visión sobre la educación matemática a las familias mientras pone en valor estos fondos de conocimiento y así se logra mejorar sus expectativas.

El papel de los deberes

La investigación en torno a los efectos que tienen los deberes en el desarrollo de los alumnos no es concluyente, porque hay muchas variables que influyen: el curso, la asignatura, la dificultad, la ayuda o supervisión de las familias, etc. Fan et al. (2017), en un metaanálisis que aglutina numerosos estudios a lo largo de 30 años,

exponen hasta cinco variables: el tiempo semanal dedicado a los deberes, la frecuencia, el grado de completitud (el porcentaje de deberes hechos), el esfuerzo requerido para hacerlos y, por último, su evaluación. Los autores explican, por ejemplo, cómo Cooper et al. (1998) encontraron que el grado de completitud tiene más importancia para el logro académico que el tiempo que se dedica. En consonancia con muchos de los estudios que citan (Cooper et al., 1998; Flunger et al., 2015; Trautwein, 2007; Xu, 2011, 2012, entre otros), Fan et al. (2017) concluyen que el grado de completitud de los deberes, cómo se evalúan y el esfuerzo que requieren son indicadores más influyentes para su efectividad que la frecuencia o el tiempo que se les dedica. En cualquier caso, explican que hay una relación globalmente positiva, pero pequeña (inferior a lo que seguramente piensan muchos docentes y familias), entre los deberes y el logro académico en matemáticas o ciencias. De todo ello se desprende que parece más efectivo poner pocos deberes, pero que permitan practicar aprendizajes ya descubiertos en clase para consolidarlos, y dedicar tiempo a evaluarlos formativamente, que exigirlos con una frecuencia demasiado alta que demande mucho tiempo.

De hecho, también hay estudios que describen el «trauma matemático» que pueden generar los deberes (Lange y Meaney, 2011):

Si las matemáticas procedimentales se deben hacer como deberes, hay el potencial de que los estudiantes experimenten un trauma emocional, especialmente si tienen dificultades con las matemáticas. Este trauma surge cuando los estudiantes no pueden hacer los cálculos que necesitan practicar y se ve agravado cuando el apoyo que los padres proporcionan entra en conflicto con lo que el niño ha aprendido en la escuela [...]. También hay el potencial de que los niños sufran un trauma matemático cuando las creencias escolares sobre el aprendizaje de las matemáticas se limitan a practicar las tablas de multiplicar o hacer cálculos. [...] Al poner a los padres en el papel de los maestros, sus relaciones con sus hijos pueden verse afectadas. (p. 48-49)

Y otros que explican que los deberes pueden ser un generador de desigualdades (Rønning, 2011):

La brecha en las puntuaciones de los exámenes es más grande en las clases donde todos tienen deberes que en las clases donde nadie tiene. Más

precisamente, los alumnos que pertenecen a la parte superior de la escala socioeconómica rinden mejor cuando se les asignan deberes, mientras que los alumnos de la parte más baja, no. Al mismo tiempo, los niños más desfavorecidos reciben menos ayuda de sus padres con los deberes. Por tanto, los deberes pueden amplificar las desigualdades existentes. (p. 55)

Otros autores, como Maltese et al. (2012) se centran en analizar los deberes como fuente de práctica para enfrentar mejor los exámenes y otras pruebas estandarizadas en secundaria. Según los autores, «no hay una relación significativa consistente entre el tiempo dedicado a los deberes y las calificaciones, pero sí hay una relación significativa positiva consistente entre los deberes y el rendimiento en los exámenes estandarizados».

Šilinskas y Kikas (2017) analizan cómo la participación de las familias en los deberes afecta el rendimiento académico y la motivación de los niños. Sus resultados muestran cómo una baja autoestima en matemáticas predice un aumento del control parental, que a su vez está relacionado con un bajo rendimiento, una peor capacidad de persistencia y aún peor autoestima: «la motivación de los chicos para hacer los deberes (es decir, la persistencia durante el momento de hacerlos y la autoestima) se reduce si perciben que sus padres controlan sus esfuerzos». A partir de sexto de primaria o primero de ESO, donde la cantidad de deberes tradicionalmente aumenta, los autores dan algunos consejos:

Así, basándonos en los resultados del estudio, se debería aconsejar a los padres que presten una atención especial a cómo sus hijos perciben e interpretan su ayuda con los deberes. Esto es crucialmente importante porque no son las intenciones de los padres ni la frecuencia de la implicación real, sino la percepción que tienen los niños, lo que importa para el rendimiento matemático, la persistencia y la autoestima. Otra implicación educativa que sigue de los resultados del estudio sugiere que la calidad de la implicación parental con los deberes importa [...] y puede ser mejorada mediante programas de formación. Finalmente, la cooperación escuela-familias es un factor importante para mejorar la calidad de la implicación parental en los deberes de los niños. De esta manera, cooperando con las familias, los docentes pueden guiar a los padres sobre cómo ayudar a sus hijos con los deberes. (p. 17)

Otros autores son mucho más críticos con los deberes. Por ejemplo, Liljedahl (2020), en su best-seller *Building Thinking Classrooms*, explica que:

Los deberes, en su forma normativa institucionalizada actual como práctica iterativa diaria para hacer en casa, no funcionan. Casi cada profesor con quien he hablado dice lo mismo: los estudiantes que necesitan hacer los deberes no los hacen, y los que hacen los deberes son los que realmente no los necesitan. Es un constructo roto que hace tiempo que perdió la buena intención con la que fue concebido. (p. 119)

Según el autor, el problema de fondo es que el propósito de los deberes no es el mismo para todos:

Si pregunto a un profesor para qué sirven los deberes, casi siempre obtengo la misma respuesta: los deberes son una oportunidad para que los estudiantes prueben su entendimiento, aprendan de sus errores y descubran en qué necesitan más ayuda. [...] Cuando pregunto a los estudiantes para qué sirven los deberes, me dicen que son para las notas. Cuando les pregunto para quién son los deberes, me dicen que son para el profesor. Y cuando les pregunto por qué su profesor les pone deberes, me dicen que es para practicar. Hay una gran desconexión entre lo que los profesores y los estudiantes ven como los objetivos de los deberes. (p. 119)

Como alternativa a los deberes tradicionales, Liljedahl (2020) propone un marco para unificar criterios con los estudiantes y realizar esta consolidación o verificación del aprendizaje a partir de las llamadas «preguntas para comprobar qué has entendido» (del inglés *check-your-understanding questions*), las cuales sirven para autoevaluarse y los mismos alumnos pueden elegir si hacer o no. Con el objetivo de fomentar la autonomía, el autor recomienda a los docentes no revisar ni evaluar estas preguntas, sino proporcionar la respuesta al momento y la resolución escrita paso a paso al día siguiente.

En la misma línea, Vatterott (2010) se centra en analizar las características que debe tener una tarea para ser considerada «buenos deberes». Primero, la tarea debe tener un propósito académico claro, como practicar, verificar la comprensión o aplicar conocimientos o habilidades. Segundo, la tarea debe servir para que el estudiante muestre eficazmente su aprendizaje. Tercero, la tarea debe permitir que el

estudiante se la haga suya, ofreciendo varios caminos y siendo personalmente relevante. Cuarto, la tarea debe infundir un sentido de competencia: el estudiante debe poder completarla con éxito sin ayuda. Finalmente, sobre todo con los niños más pequeños, la tarea debe ser estéticamente agradable, debe parecer divertida e interesante. Según la autora, cuando una tarea cumple estos cinco aspectos, tiene todos los ingredientes para ser efectiva como deberes, si es que se quieren poner.

X. Desarrollar recursos didácticos basados en evidencias

El décimo y último principio es la culminación natural de los esfuerzos reflexivos y rigurosos planteados en los principios anteriores. Ha quedado demostrada la importancia de pensar y diseñar recursos didácticos que partan de las evidencias en investigación, de la teoría, y que también tengan en cuenta la realidad del aula; que reflejen una comprensión profunda de los conceptos y estrategias matemáticas que se han demostrado eficaces en la práctica educativa, de manera coherente, y que sean sensibles, sobre todo, a la realidad de los docentes que deben implementarlos en el aula. Como diría Bruner (1960) cuando hablaba sobre diseño curricular (entendiendo «currículo» como propuesta o programa, y no como ley educativa):

Un currículo es más para los profesores que para los alumnos. Si no puede cambiar, mover, perturbar, informar a los profesores, no tendrá ningún efecto sobre aquellos a quienes enseñan. Debe ser, en primer lugar, y ante todo, un currículo para los profesores. Si tiene algún efecto sobre los alumnos, será en virtud de tener un efecto sobre los profesores. (p. xv)

Foster et al. (2021), en la misma línea sobre diseño curricular, hablan sobre la dificultad que supone lograr esta coherencia:

Un currículo efectivo no puede ser simplemente un currículo de consenso, donde los expertos se reúnen y cada uno aporta sus tareas y enfoques preferidos. Esto casi garantizaría no lograr un conjunto coherente. En cambio, es necesario exponer, considerar y resolver cuestiones y opciones difíciles; hay buenos recursos que no encontrarán lugar en el currículo porque, por muy buenos que sean, no se integran coherentemente en la trayectoria global acordada. Las ideas y enfoques que podrían ser efectivos para una lección

aislada, pero que se integran peor en la progresión general, deberán ser rechazados. Así, hay que tomar decisiones difíciles. (p. 627)

Y proponen hasta cinco directrices que podemos seguir para asegurar la calidad didáctica de los recursos de matemáticas:

1. Aprovechar y desarrollar las habilidades y la experiencia de los profesores.
2. Equilibrar la enseñanza de la fluidez, el razonamiento y la resolución de problemas.
3. Prestar atención explícita a los errores importantes y a las concepciones erróneas más habituales.
4. Comparar y contrastar métodos alternativos.
5. Ingeniar la coherencia a través del uso estratégico de representaciones y contextos consistentes. (p. 628-653)

Los cinco consejos resuenan de manera armónica con los principios que hemos explorado a lo largo del contexto. A la hora de diseñar recursos, que todos los implicados sigan unos mismos principios facilita la coherencia y la cohesión. Al integrar metódicamente las conclusiones que se derivan de cada principio —desde la aplicación de técnicas socio-constructivistas y el desarrollo de competencias hasta el uso consciente de la tecnología— y, después, al probar y validar los recursos en el aula, buscamos promover un aprendizaje matemático significativo y motivador.

En este proceso continuo de innovación, es esencial reconocer que la ciencia educativa está en una evolución constante. Como dicen Swan y Burkhardt (2014), «los recursos curriculares coherentes de alta calidad deben ser desarrollados a través de ciclos de pruebas iterativas y refinamientos, siguiendo retroalimentación detallada del aula». Investigadores y docentes trabajamos para descubrir técnicas cada vez más eficientes, adaptándonos a los cambios y necesidades emergentes de la educación. Esta naturaleza dinámica del conocimiento hace que nuestras estrategias didácticas necesiten ser revisadas y actualizadas continuamente. Por lo tanto, las reflexiones sobre cómo mejorar la enseñanza de las matemáticas no terminan nunca; siempre hay nuevas perspectivas por explorar y nuevos enfoques por experimentar. Es necesario, entonces, mantenerse atentos a las novedades, tanto en la comunidad científica como en la educativa, para asegurar que nuestros enfoques sigan siendo relevantes y efectivos.

3.3. El «Libro blanco de Innovamat»

El proceso de sistematizar y fundamentar las evidencias didácticas que sustentan la propuesta educativa de Innovamat culminó en la consolidación de estos principios en un documento de referencia para la empresa conocido como el «Libro blanco de Innovamat» (Innovamat, 2024a). Este documento sintetiza las ideas clave y los referentes que orientan el diseño curricular de la propuesta, e incluye ejemplos de como estos principios se han implementado en los diferentes recursos que se ofrecen a los centros educativos.

El libro blanco, por lo tanto, representa un esfuerzo por capturar y estructurar el conocimiento acumulado de Innovamat de forma que sea útil, accesible y adaptable a medida que aparecen nuevas evidencias. Si bien su origen es interno, su alcance ha trascendido, convirtiéndose en un recurso estratégico con impacto en múltiples niveles de la organización. En primer lugar, se ha consolidado como una herramienta esencial para la formación del equipo, particularmente para las nuevas incorporaciones al área didáctica, ya que facilita la alineación de los nuevos miembros con los valores y objetivos de Innovamat. Al mismo tiempo, el documento actúa como referencia para resolver dudas frecuentes de maestros y familias, ya que ofrece respuestas fundamentadas que refuerzan la coherencia de la propuesta y su implementación. Además, el impacto del libro blanco se extiende a la comunicación externa: es una herramienta clave para estructurar discursos de ventas y diseñar campañas de marketing y difusión con un mensaje coherente, claro y basado en evidencias. Este uso estratégico fortalece la credibilidad de la propuesta educativa y posiciona a Innovamat como una organización referente en educación matemática.

Desde una perspectiva más amplia, el libro blanco funciona como una herramienta fundacional evolutiva. Reúne las referencias teóricas, evidencias y fundamentos didácticos que han sustentado y sustentan la visión de Innovamat, lo que lo convierte en un punto de partida para profundizar en temas específicos y fomentar un aprendizaje continuo dentro de la organización. Su carácter dinámico garantiza que, su versión digital, pueda iterarse y actualizarse con nuevos avances en la investigación educativa, manteniendo su relevancia en un campo en constante evolución. Finalmente, el libro blanco ha sido diseñado para cumplir con estándares de evidencia de tipo «tier 4», definidos por el Departamento de Educación de los Estados Unidos en el *Every Student Succeeds Act (ESSA)* (U.S. Dept. of Education,

2015). Este estándar, ampliamente reconocido, refuerza el valor del documento como aval de la solidez científica que respalda la propuesta educativa de Innovamat.

En resumen, el «Libro blanco de Innovamat» no solo consolida los principios didácticos que guían su propuesta, sino que también actúa como un recurso transversal de gran impacto para la organización, desde la formación y la comunicación hasta la estrategia, sirviendo como herramienta clave para alinear y fortalecer la visión de Innovamat en el ámbito de la didáctica de las matemáticas.

4. Marco teórico

En este capítulo profundizamos en los fundamentos teóricos que sustentan la investigación y proponemos algunas definiciones. Muchas de estas ideas emanan, naturalmente, de los principios de Innovamat expuestos en detalle a lo largo del capítulo 3. Otras, sin embargo, son específicas para abordar el interés particular de esta tesis doctoral y fundamentar las respuestas a las preguntas de investigación formuladas.

Partimos del Enfoque Documental de la Didáctica (DAD, por sus siglas en inglés), propuesto por Trouche et al. (2018), que explora la compleja relación entre los docentes y los recursos que estos emplean en su práctica educativa. Este enfoque constituye la base de nuestro trabajo. En este contexto, nos centramos específicamente en definir y analizar guías didácticas de matemáticas en educación primaria, que se diferencian de los libros de texto tradicionales. Consideramos la calidad intrínseca de estas guías a partir de su coherencia, las tareas que incluyen y la gestión de aula que proponen.

Asimismo, exploramos y definimos el concepto de actividades matemáticas ricas desde una perspectiva basada en competencias, fundamentándonos en la definición de competencia matemática de Niss y Højgaard (2019), la caracterización de una clase «poderosa» propuesta en el marco TRU-math de Schoenfeld (2016) y los trabajos de De Lange (1999) sobre niveles de competencia, entre otras fuentes.

A partir de ahí, el marco teórico guía el desarrollo de una herramienta analítica diseñada para caracterizar la riqueza de las guías didácticas, la cual se abordará en los capítulos siguientes, con especial atención a las conexiones matemáticas.

4.1. Enfoque Documental de la Didáctica

El término «recurso» en entornos educativos puede referirse a una amplia variedad de herramientas y formatos. El Enfoque Documental de la Didáctica (DAD, por sus siglas en inglés) es un marco teórico que permite analizar la compleja relación entre los docentes y estos recursos. Según los autores del DAD (Trouche et al., 2018), un recurso curricular en matemáticas es «cualquier recurso (por ejemplo,

interactivo digital, texto tradicional, etc.) que sea desarrollado y utilizado por docentes y estudiantes en su interacción con las matemáticas en/para la enseñanza y el aprendizaje, dentro y fuera del aula» (p. 3). Además, los autores elaboran una clasificación que distingue entre recursos curriculares «materiales» (por ejemplo, libros de texto, recursos digitales, materiales manipulativos, calculadoras, etc.), recursos «sociales» (por ejemplo, una conversación en redes sociales o en un foro) y recursos «cognitivos» (por ejemplo, cualquier marco teórico utilizado para trabajar con docentes).

Los docentes interactúan con estos recursos en lo que el DAD llama «esquema de uso», el cual es diferente para cada docente, dependiendo de su experiencia y conocimiento. Un esquema tiene cuatro componentes: a) el objetivo de la actividad de enseñanza; b) las reglas de acción, recopilación de información y control del aula; c) los invariantes operacionales (proposiciones consideradas como verdaderas y otros conceptos relevantes); y d) las posibilidades de inferencia y adaptación a diversas situaciones. Así, la combinación del recurso y su esquema de uso genera el documento, la piedra angular del enfoque documental de la didáctica:

$$\text{Recurso} + \text{Esquema de uso} = \text{Documento}$$

Según los autores (Trouche et al., 2018), la interacción entre un docente y un recurso es bidireccional: el recurso influye en la práctica de enseñanza (proceso de «instrumentación»), mientras que el conocimiento del docente condiciona el uso del recurso (proceso de «instrumentalización»). Como ejemplo, podemos imaginar a un docente utilizando un libro de texto tradicional. Las unidades y las tareas propuestas moldean cómo este docente enseña matemáticas en el aula. Al mismo tiempo, la experiencia, el conocimiento e incluso las condiciones del aula también transforman el uso del libro de texto, ya sea siguiendo literalmente las tareas o no, ya sea modificando los objetivos de aprendizaje o no, etc. Esta interacción resulta en un proceso dinámico y en evolución conocido como «génesis documental». Como describen Gueudet y Trouche (2009):

Un documento desarrollado a partir de un conjunto de recursos proporciona nuevos recursos, que pueden incorporarse en un nuevo conjunto de recursos, lo que llevará a un nuevo documento, etc. Debido a este proceso, hablamos de la relación dialéctica entre recursos y documentos. (p. 206)

Definición de «guía didáctica»

Este estudio tiene como objetivo caracterizar la riqueza desde una perspectiva basada en competencias, para desarrollar una herramienta analítica que permita analizar las guías didácticas desde este enfoque. Tal objetivo nos lleva a la necesidad previa de definir qué rasgos constituyen una guía didáctica en contraposición a otros recursos, especialmente a su alternativa más habitual: los libros de texto. De hecho, conviene recordar la primera pregunta de investigación que tratamos de responder: **«¿Cómo definimos lo que es una guía didáctica y en qué se diferencia de un libro de texto?»**.

Usualmente, el DAD considera los libros de texto como recursos, no como documentos, ya que típicamente carecen de un esquema de uso. En cambio, una guía didáctica no es un recurso, sino un documento. Podemos afirmarlo porque, además de las tareas para cada sesión, una guía también detalla los objetivos de la sesión, las reglas de acción y algunas adaptaciones, rasgos clave de un esquema de uso (Gueudet y Trouche, 2008).

Como ha explorado Remillard (2005, 2012, 2013), existen recursos que «hablan a través del docente» (es decir, hacia los estudiantes) y otros que «hablan al docente». Esta característica es lo que la autora llama la «voz» del recurso. Aquí encontramos una segunda diferencia clave entre un libro de texto y una guía: mientras que un libro de texto habla a través del docente con el objetivo de dirigirse a los estudiantes, una guía habla directamente a los docentes.

Esta diferencia en la voz tiene implicaciones en el enfoque que sigue el recurso. Un libro de texto típicamente explica la teoría del contenido mediante textos, diagramas y dibujos, además de proponer tareas para trabajar dicha teoría. Por el contrario, una guía se enfoca más en describir las diferentes tareas y preguntas a proponer a los estudiantes, a menudo con una justificación didáctica, en lugar de simplemente explicar la teoría y proponer ejercicios para trabajarla. Adicionalmente, incluye consejos para la gestión del aula, desde propuestas de agrupamiento hasta recomendaciones para atender tanto a estudiantes con dificultades como a aquellos que muestran más facilidad.

La siguiente tabla (Tabla 1) resume las tres diferencias exploradas entre un libro de texto y una guía para definir «guía didáctica»:

Tabla 1

Diferencias principales entre un libro de texto y una guía didáctica.

Punto de vista		Libro de texto	Guía didáctica
1	DAD	Recurso	Documento (recurso con esquema de uso)
2	Voz	A través del maestro	Al maestro
3	Foco	Teoría y ejercicios	Tareas, preguntas y gestión

Existen otros aspectos de los materiales curriculares que podrían explorarse, como su aspecto visual (lo que Remillard, 2005, denomina «apariencia»), su estructura u otros aspectos comunicativos. Sin embargo, no los consideramos suficientemente relevantes para el propósito de definir una guía y explorar su riqueza desde una perspectiva basada en competencias. En cualquier caso, conviene señalar que esta definición, que emana directamente del marco teórico, constituye la primera contribución de la tesis más allá del contexto.

Como afirman Jukić Matić y Glasnović Gracin (2021), «en comparación con la investigación sobre libros de texto, la investigación sobre guías didácticas es escasa» (p. 1). Además, la mayoría de los autores (por ejemplo, Brown, 2009; Ahl et al., 2015; Jukić Matić y Glasnović Gracin, 2021) se enfocan en la interacción docente–guía (es decir, cuando el docente *utiliza* la guía), en lugar de analizar las guías en sí mismas. En cualquier caso, aunque las diferencias entre lo que se entiende por libro de texto y lo que se considera una guía son evidentes, también presentan ciertas similitudes que hacen que gran parte de la investigación realizada en torno a los libros de texto sea aplicable al análisis de las guías.

Lo primero a tener en cuenta, como también argumentan Shield y Dole (2012), es que el análisis de un libro de texto (al igual que el análisis de una guía) solo puede informar sobre su *potencial* para generar aprendizaje, ya que su uso depende del docente. Por ello, algunos autores, como Trouche et al. (2013), comienzan sus análisis explicando que la calidad intrínseca de un recurso debe distinguirse de su adecuación y uso posterior. Esta calidad intrínseca abarca aspectos matemáticos, didácticos y de experiencia del usuario.

Gueudet et al. (2013) también discuten la coherencia conceptual del libro de texto, que puede aplicarse igualmente a una guía. Según los autores, esta puede entenderse como una combinación de la corrección del contenido matemático, la alineación con el currículo oficial, la secuenciación adecuada de los conceptos y la correcta relación entre el contenido abordado y las tareas propuestas.

Otros modelos para analizar libros de texto tradicionales (Valverde et al., 2002) se basan en tres aspectos: «contenido» (número, geometría, etc.); «expectativas de desempeño» (uso de procedimientos rutinarios, resolución de problemas, etc.); y «perspectiva» (actitudes, participación, interés, hábitos, etc.). Sin embargo, como explican Gueudet et al. (2013), la mayoría de estos análisis se enfocan en las tareas y los procedimientos de resolución de problemas (Zhu y Fan, 2006; Fan y Zhu, 2007), en la complejidad procedimental (Vincent y Stacey, 2008), en la demanda cognitiva (Jones y Tarr, 2007) o en la profundidad de la comprensión en términos de establecer conexiones, como describe Pepin (2008). Es difícil encontrar análisis que exploren la riqueza desde una perspectiva completa basada en competencias (como se define en el apartado 4.2), principalmente porque los libros de texto tienden a considerar solo el contenido, en lugar de los procesos matemáticos, las competencias y la gestión del aula. De hecho, la resolución de problemas o la demanda cognitiva son, como veremos a continuación, aspectos a considerar al hablar de riqueza basada en competencias, pero faltan otros que consideramos relevantes, como los procesos de «razonamiento y prueba» o «comunicación y representación» (según los describe el NCTM, 2000) y, sobre todo, las consideraciones de gestión del aula (una de las diferencias clave entre un libro de texto y una guía).

En consecuencia, proponemos reunir varias de estas ideas en un marco que permita la caracterización de la riqueza potencial basada en competencias (es decir, la calidad intrínseca) de un documento (un recurso con esquema de uso) como es el caso de una guía formada por actividades.

4.2. Riqueza competencial en educación matemática

La expresión «tarea matemática rica» es comúnmente empleada entre docentes, expertos e investigadores en educación matemática. Un primer ejemplo

puede ser Finkel (2022), quien ha adoptado esta terminología: «Todo estudiante merece tener la oportunidad de resolver problemas y participar en un pensamiento matemático genuino. Las *tareas ricas* están diseñadas para hacer posible estas experiencias de aprendizaje enriquecedoras.» De manera similar, desarrolladores curriculares como Gojak (2017) también utilizan el término: «Una *tarea rica* presenta un alto nivel de demanda cognitiva y requiere que los estudiantes piensen de manera abstracta para establecer conexiones con y entre conceptos matemáticos.» (p. 3). Entidades gubernamentales, como el Departamento de Educación de Virginia en Estados Unidos (2023), también emplean estos términos: «Las *tareas matemáticas ricas* involucran a los estudiantes en la construcción de significado a través de un aprendizaje profundo que requiere altos niveles de pensamiento, razonamiento y resolución de problemas.» Incluso instituciones académicas de renombre como la Universidad de Cambridge (Piggott 2007; 2011) hacen referencia a este término. A pesar de su uso generalizado, el significado preciso de lo que constituye *riqueza* en la educación matemática sigue siendo algo esquivo y a menudo cae en definiciones tautológicas. Aunque el análisis de tareas matemáticas y su calidad es un amplio campo de investigación (Margolinas, 2013), la «riqueza» permanece relativamente inexplorada desde un punto de vista de la investigación formal.

Antes de profundizar en ese aspecto, sin embargo, es necesario acordar qué se entiende por tarea. Según los autores de la monografía sobre el diseño de tareas de la ICMI22, editada por Margolinas (2013), el concepto de tarea ha sido utilizado con diferentes significados a lo largo de los años. Para Leont'ev (1975), uno de los pioneros en el uso del término de manera específica, una tarea es cualquier operación realizada bajo unas condiciones determinadas. No obstante, los mismos autores de la monografía utilizan el término de una manera más amplia:

Utilizamos el término «tarea» para referirnos a una gama más amplia de «cosas por hacer» que esta definición, e incluimos ejercicios repetitivos, construcción de objetos, ejemplificación de definiciones, resolución de problemas de una o varias etapas, toma de decisiones entre dos posibilidades o realización de un experimento o investigación. De hecho, una tarea es cualquier actividad que un docente utiliza para demostrar matemáticas, para trabajar interactivamente con los estudiantes o para pedirles que hagan algo.

Las tareas también pueden ser cualquier actividad que los propios estudiantes decidan realizar en una situación particular. Las tareas, por lo tanto, son las herramientas de mediación para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, y las cuestiones centrales son cómo se relacionan las tareas con el aprendizaje y cómo se utilizan pedagógicamente. (Margolinas, 2013, pp. 9 y 10)

Otros autores, como Christiansen y Walter (1986) o Mason y Johnston-Wilder (2006), abogan por una definición más limitada, similar a la que utilizamos en Vilalta et al. (2021): una tarea es la premisa, el enunciado, la demanda dirigida a los estudiantes. Una tarea, o un conjunto de tareas, combinada con la gestión del docente al interactuar con los estudiantes, es lo que entendemos por «actividad», la cual puede ser más rica, o menos.

Actividad = tareas (demandas para los estudiantes) + gestión (interacciones)

Al considerar esta ecuación, es difícil no establecer paralelismos entre un documento (entendido como la suma de un recurso y un esquema de uso) y una actividad (la suma de una o más tareas y su gestión): podríamos argumentar que cualquier tarea puede entenderse como un tipo específico de recurso, y que su gestión es precisamente el esquema de cómo se utiliza este recurso. Este paralelismo es especialmente relevante para nuestro trabajo, ya que refuerza la concepción de las guías (formadas por actividades) como documentos.

Una vez que hemos acordado que la tarea y su gestión son los dos ingredientes de una actividad (y, por lo tanto, de una guía compuesta de actividades), es apropiado describir los rasgos que caracterizan su riqueza. La autora mencionada anteriormente, Piggott (2007; 2011), en el marco del proyecto NRICH en Cambridge, propone un marco práctico para abordar la riqueza. Este marco incluye dos factores: el contenido y la enseñanza. Según Piggott, las actividades ricas requieren, por un lado, un contenido basado en problemas atractivos que fomenten el desarrollo y el uso de estrategias y el pensamiento matemático; y, por otro, un enfoque de enseñanza (es decir, la gestión del aula) que promueva un ambiente abierto y flexible en el que se fomente el trabajo cooperativo, la exploración y la comunicación, y donde la diversidad se utilice como una herramienta de aprendizaje. Los dos factores descritos por Piggott tienen una clara relación con los dos elementos de una

actividad matemática rica que describimos en Vilalta et al. (2021) basándonos en Deulofeu y Vila (2021): la tarea y su gestión. Precisamente por esta razón, el análisis de la riqueza tiene mucho más sentido al hablar de guías didácticas, ya que, a diferencia de los libros de texto, estas incluyen recomendaciones para la gestión del aula.

Para analizar este «desarrollo y uso de estrategias y pensamiento matemático» al que se refiere Piggott, proponemos comenzar con lo que la literatura dice sobre el «aprendizaje de las matemáticas con comprensión» (Hart et al., 1981). Según Hiebert et al. (1997), los estudiantes construyen la comprensión mediante la «reflexión y la comunicación», por lo que las actividades ricas, en primer lugar, deben promover estos procesos:

Primero, las tareas deben permitir que los estudiantes traten las situaciones como algo problemático, como algo sobre lo que necesitan reflexionar en lugar de una receta que deben seguir. En segundo lugar, lo problemático de la tarea debe estar relacionado con las matemáticas y no con otros aspectos de la situación. Finalmente, para que los estudiantes trabajen seriamente en la tarea, esta debe ofrecerles la oportunidad de utilizar habilidades y conocimientos que ya poseen. Las tareas que cumplen con estos criterios son aquellas que pueden dejar algo de valor matemático para los estudiantes. (p. 8)

Lo que en los años ochenta se llamaba «aprender con comprensión» podría ahora entenderse como «desarrollar la competencia matemática». Así, siguiendo las ideas del marco teórico de PISA (OCDE, 2017a; Niss y Højgaard, 2019) y los «estándares de procesos» definidos por el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000), entendemos que la competencia matemática se compone de cuatro procesos: resolución de problemas, razonamiento y prueba, conexiones, comunicación y representación. A continuación se explora brevemente cada uno de los cuatro procesos, ya que su interpretación es clave para entender la riqueza competencial en matemáticas.

Resolución de problemas

Foster (2023) divide las tareas entre «rutinarias» y «no rutinarias». Las tareas rutinarias, denominadas «ejercicios», son invitaciones para que los alumnos imiten

un método que se les ha enseñado previamente. Así, una tarea «no rutinaria» o «problema» es «una tarea cuyo método de solución no se conoce de antemano» (NCTM, 2000). Cualquier tarea para la cual el alumno no tiene una estrategia inmediata que le permita encontrar la solución (Schoenfeld, 2014); Liljedahl (2020) lo describe en términos aún más simples: «resolver problemas es lo que hacemos cuando no sabemos qué hacer». Por lo tanto, si una tarea es un ejercicio o un problema, depende principalmente de si la persona que se enfrenta a ella ya tiene una estrategia de resolución o no. Esta distinción es independiente del esfuerzo que requiera la tarea. Como también explica Foster (2023), «una tarea puede ser rutinaria, pero difícil. Por ejemplo, multiplicar dos números de 5 dígitos entre ellos sería difícil, pero completamente rutinario para alguien bien familiarizado con el algoritmo de la multiplicación». Esto implica que, la mayoría de tareas que para un alumno hoy son problemas, con el tiempo se convertirán en ejercicios, a medida que desarrollan habilidades de resolución de problemas.

El proceso de resolución de problemas incluye varias fases que se han discutido y analizado profundamente en la literatura (Hiebert y Wearne, 2003; Mason et al., 1988; Schoenfeld, 1992, 2007): comprender y desglosar el enunciado, acotar el problema, planificar una estrategia de resolución, ejecutarla, encontrar las soluciones, comprobar tanto las soluciones como el proceso de resolución y, finalmente, plantear nuevos retos relacionados que nos ayuden a generalizar (o no) las resoluciones. Es, por tanto, un proceso troncal de la actividad matemática y, como ya apuntaba Pólya (1945), el que probablemente nos proporciona un ambiente más adecuado para desarrollar la competencia matemática global.

Razonamiento y prueba

A través de la observación y la búsqueda de patrones y regularidades, desarrollamos la capacidad de preguntarnos el motivo de estos patrones, y la habilidad de formular y probar conjeturas. Desde las primeras experiencias matemáticas, es importante ayudar a los niños a comprender que las afirmaciones requieren razonamientos que las justifiquen: deben aprender a justificar sus respuestas con evidencias y argumentos (Simon y Blume, 1996; Jeannotte y Kieran, 2017). A medida que avanzan en su aprendizaje, los estudiantes deben ser capaces de comprender y producir pruebas o, más formalmente, demostraciones matemáticas (Knuth, 2002).

La investigación y el desarrollo de conjeturas también son destrezas fundamentales. Esto implica hacer suposiciones informadas, y probarlas con una generalización o rechazarlas al llegar a una contradicción (Lakatos, 1976; Pólya, 1954). Los estudiantes deben aprender a hacer conjeturas e investigarlas desde edades tempranas, utilizando materiales concretos, herramientas y representaciones matemáticas (Stylianides, 2008). Con el tiempo, deben ser capaces de explorar conjeturas de manera más sistemática y de justificar argumentos más generales, utilizando conocimientos matemáticos más sofisticados y diversos tipos de razonamientos (aritmético, algebraico, geométrico, proporcional, probabilístico, estadístico, etc.) (Pólya, 1968).

Este proceso, por tanto, se centra en las destrezas necesarias para analizar una situación y, a partir de ahí, formular y comprobar conjeturas, hacer deducciones razonadas, demostraciones, generalizaciones y, sobre todo, argumentar o rebatir cualquier afirmación que se haga en el aula de matemáticas.

Comunicación y representación

La comunicación es una parte esencial de las matemáticas y la educación matemática, como describe el NCTM (2000). Es fundamental que los alumnos, desde pequeños, aprendan a comunicar su pensamiento matemático de manera coherente a compañeros y docentes. El desarrollo de estas destrezas implica animar a los niños a utilizar un lenguaje matemático preciso en sus respuestas (Cooke y Buchholz, 2005).

Por otro lado, la representación puede entenderse como el vehículo con el que se expresan y comunican ideas matemáticas (Coulombe y Berenson, 2001). Preston y Garner (2003) entienden las representaciones como herramientas vitales para registrar, analizar, resolver y comunicar datos, problemas e ideas matemáticas. Estas representaciones a menudo deben ser consideradas estrategias de la actividad cognitiva, mecanismos de resolución, en lugar de simples producciones resultantes de una tarea (Pape y Tchoshanov, 2001). De hecho, un cambio de representación puede ser la clave para afrontar un problema (Brenner et al., 1997). Otras veces el simbolismo requerido para tratar ideas matemáticas abstractas toma el protagonismo (Hiebert, 1988).

Comunicación y representación son, por tanto, dos caras de una misma moneda. Este proceso habla de las destrezas relacionadas con la transmisión de información matemática, ya sea como emisores o como receptores (con indicadores como la claridad, la eficiencia o la precisión en el vocabulario). Y también sobre la importancia de la representación: desde identificar e interpretar representaciones ajenas hasta generar representaciones propias o saber traducir de una a otra.

Conexiones y modelización

La conexión entre ideas y conceptos es fundamental en el proceso de aprendizaje matemático, ya que permite una comprensión más profunda e integrada del conocimiento, como describe Sawyer (2008). Establecer vínculos entre diferentes ideas enriquece la manera de pensar y favorece el aprendizaje significativo e interconectado.

Este proceso, por lo tanto, incluye todas las relaciones que encontramos o establecemos entre conceptos y representaciones, y que nos permiten profundizar en su comprensión. A veces, estas conexiones se producen dentro del ámbito de las matemáticas (entre contenidos de un mismo dominio o entre dominios diferentes), como profundizamos en el apartado 4.3, y otras veces se producen entre las matemáticas y el resto del mundo, donde toma protagonismo lo que conocemos como modelización matemática, como explica Meerschaert (2013):

La modelización matemática es la conexión entre las matemáticas y el resto del mundo. Haces una pregunta. Piensas un poco y luego refinas la pregunta, expresándola en términos matemáticos precisos. Una vez la pregunta se ha convertido en una cuestión matemática, utilizas las matemáticas para encontrar una respuesta. Finalmente (y esta es la parte que demasiada gente olvida), debes revertir el proceso: traducir la solución matemática de nuevo a una respuesta comprensible de acuerdo con la pregunta original. Algunas personas hablan con fluidez el inglés, y otras hablan con fluidez el cálculo. Hay muchas de ambos tipos. Lo que necesitamos es más gente que hable ambas lenguas, sea capaz de traducirlas y esté dispuesta a hacerlo. Estas son las personas que serán influyentes en la resolución de los problemas del futuro.
(p. vii)

Tal como se discutió en el segundo principio del apartado 3.2, el análisis separado de los componentes matemáticos —ya sea en términos de contenidos o procesos— tiene un carácter artificial que no refleja la naturaleza integrada de las matemáticas. Si bien los procesos se suelen describir de manera individual para facilitar su comprensión, es importante reconocer que, desde la perspectiva del individuo que desarrolla la actividad matemática, a menudo se entrelazan y se refuerzan mutuamente, como sucede con los contenidos. Resolver problemas, por ejemplo, no solo implica planificar estrategias y ejecutarlas, sino que requiere establecer conexiones entre conceptos, utilizar representaciones adecuadas y justificar los pasos mediante razonamientos sólidos. Desde esta perspectiva, el aprendizaje matemático competencial puede ser visto como un entramado en el que los procesos no funcionan de manera aislada.

En cualquier caso, estos cuatro procesos, ampliamente discutidos y aceptados por la comunidad de educación matemática, estructuran el trabajo matemático más allá del contenido y le otorgan significado. Aunque cada territorio los interpreta de manera ligeramente diferente en sus currículos oficiales, lo que da lugar a pequeñas variaciones, diferentes países como Estados Unidos (*National Governors Association Center for Best Practices y Council of Chief State School Officers*, 2010), Australia (*Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority [ACARA]*, 2015), Hong Kong (*The Curriculum Development Council of Hong Kong*, 2017) o España (LOMLOE, 2020), entre otros (Thompson et al., 2018), ya han adoptado una concepción de la educación matemática basada en dichos procesos.

No es el objetivo de esta tesis profundizar en las causas de esta concepción ni debatir sobre ella. En cualquier caso, gracias a los procesos de competencia matemática, podemos caracterizar un primer indicador de riqueza: la tarea debe proporcionar oportunidades para desarrollar uno o más de estos procesos matemáticos.

Es difícil no observar paralelismos entre esta concepción basada en procesos de las matemáticas y algunos de los aspectos para analizar la calidad de un libro de texto expuestos en el apartado 4.1: por ejemplo, Valverde et al. (2002) hablan de expectativas de desempeño y distinguen entre el uso de procedimientos rutinarios y la resolución de problemas; Zhu y Fan (2006) y Fan y Zhu (2007) se centran en las tareas y los procedimientos de resolución de problemas; Pepin (2008) concibe la

comprensión en términos de establecer conexiones. En cualquier caso, nos parece más que justificado que el primer indicador de riqueza competencial emane de los propios procesos que conforman la competencia matemática. Pero con ello no basta.

Un segundo indicador de riqueza se encuentra, como lo describen Deulofeu y Vila (2021), en el contenido matemático involucrado en la tarea. Según los autores, este debe estar contextualizado (ser relevante para el estudiante), ser riguroso (correcto, con sentido matemático y en concordancia con el currículo) y ser extensible (conectado con conocimientos previos y futuros). Nuevamente, las tres ideas están directamente relacionadas con la «coherencia conceptual» de Gueudet et al. (2013) al analizar un libro de texto: corrección, alineación con el currículo y secuencia. Valverde et al. (2002) también consideran el contenido como un aspecto clave para analizar un libro de texto.

Otros autores no hablan literalmente de riqueza, pero también describen indicadores para enriquecer la actividad matemática en el aula. Según TRU-Math (*Teaching for Robust Understanding*) de Schoenfeld (2016), las cinco dimensiones de una clase «poderosa» son: el contenido; la demanda cognitiva; el acceso equitativo al contenido; la agencia, propiedad e identidad; y la evaluación formativa. Aunque estas dimensiones se refieren a una clase, muchas de las ideas presentadas por Schoenfeld son muy útiles para complementar el análisis de la riqueza de un documento, como una guía, tanto en términos de la tarea (recurso) como de su gestión (esquema de uso).

Sin ir más lejos, la primera dimensión habla del «contenido», que debe «proporcionar oportunidades para que los estudiantes se conviertan en pensadores disciplinarios, conocedores, flexibles y con recursos» (p. 4). Podemos ver que el autor está incluyendo ideas basadas en los procesos en su definición del contenido. Dado que la conceptualización de este enfoque de riqueza proviene de una perspectiva basada en competencias, para fines analíticos preferimos separar los procesos (resolución de problemas; razonamiento y prueba; conexiones; comunicación y representación) de los bloques específicos de contenido matemático (números y operaciones; espacio y forma; medida; estadística y probabilidad; cambio y relaciones). Esta nomenclatura específica de los bloques proviene del marco de Innovamat, que originalmente sigue la adaptación del *Common Core* de EE. UU. (*National Governors Association Center for Best Practices y Council of Chief State*

School Officers, 2010) realizada por el currículo catalán (Burgués y Sarramona, 2013). Sin embargo, una vez que se entiende que «espacio y forma» incluye geometría y localización y orientación, mientras que «cambio y relaciones» implica el pensamiento algebraico como la identificación de patrones y la descripción de regularidades, estos bloques son muy similares a los de cualquier otro currículo de matemáticas.

La segunda dimensión de Schoenfeld (2016), la «demanda cognitiva», es directamente observable en la tarea. Por demanda cognitiva entendemos el nivel de desafío que se plantea a los estudiantes. Esto se relaciona con la «profundidad de la comprensión» de Gueudet et al. (2013), la «complejidad procedimental» de Vincent y Stacey (2008) y, obviamente, la «demanda cognitiva» de Jones y Tarr (2007). Según Schoenfeld, «los estudiantes aprenden mejor cuando se les desafía de maneras que les brindan espacio y apoyo para crecer, con dificultades que van de *moderadas* a *exigentes*» (p. 5). Para refinar los niveles de demanda cognitiva de una tarea, recurrimos al trabajo de de Lange (1999) en la adaptación de la opción nacional holandesa de TIMSS (Boertien y de Lange, 1994; Kuiper et al., 1997): el nivel 1, el más básico, se refiere a tareas puramente reproductivas, de repetición, como aplicar un algoritmo o fórmula estándar o evocar una definición; el nivel 2 se refiere a tareas que requieren establecer conexiones entre diferentes dominios de las matemáticas e integrar información; el nivel 3, el más alto, se refiere a tareas en las que es necesario matematizar una situación, reflexionar, desarrollar nuevas estrategias, etc. Para facilitar futuras referencias, nos referiremos a los tres niveles con tres verbos que comienzan con «r»: «reproducir», «relacionar» y «reflexionar», respectivamente. Así, para que una tarea se considere rica, debe presentar una demanda cognitiva adecuada, más reflexiva que reproductiva.

Las tres dimensiones restantes de Schoenfeld (2016), por otro lado, están más relacionadas con la gestión que con la tarea en sí.

La tercera dimensión, el acceso equitativo al contenido, destaca la importancia de promover la participación de todos los estudiantes: «Las aulas en las que unos pocos estudiantes ocupan la mayor parte del tiempo de intervención no son equitativas, por muy rico que sea el contenido: todos los estudiantes deben estar involucrados de maneras significativas» (p. 7). Autores como Bartell et al. (2017) son muy contundentes en este aspecto y argumentan que las prácticas de enseñanza sin

atención explícita a la equidad están «inevitablemente condenadas al fracaso». De hecho, ya sabemos por Piggott (2011) que utilizar la diferencia como herramienta de aprendizaje es clave para enriquecer las actividades matemáticas.

La cuarta dimensión, «agencia, propiedad e identidad», se refiere a las oportunidades que ofrecemos a los estudiantes para que se apropien de la tarea, se involucren en ella y desarrollen su identidad como pensadores y aprendices, tanto de forma individual como colectiva. Valverde et al. (2002), al definir aspectos para analizar un libro de texto, también se refieren a lo que llaman «perspectiva», una combinación de actitudes, participación, interés, hábitos, etc., promovidos por el libro. A esto lo llamamos el «ambiente» generado por la gestión.

Finalmente, la quinta dimensión es la «evaluación formativa». Para Schoenfeld (2016), una evaluación formativa es aquella que «se adapta a los estudiantes en el punto en el que están y les ofrece oportunidades para profundizar en su comprensión» (p. 11). Sin embargo, dado que la evaluación es un campo de investigación delicado que merecería un tratamiento exclusivo, para los propósitos de este estudio no consideraremos este aspecto en nuestros indicadores de riqueza.

Aunque, como hemos dicho, algunas dimensiones de Schoenfeld (2016) se refieren a la tarea y otras a la gestión de la actividad, los dos aspectos a menudo se mezclan, lo que dificulta el análisis de las actividades. Por ejemplo, un enfoque de gestión específico puede alterar la demanda cognitiva en juego, que inicialmente depende de la tarea. O una tarea puede tener un enunciado que la haga más accesible, cuando la accesibilidad es un aspecto que habitualmente recae más en la gestión.

Definición de «riqueza competencial de una actividad de matemáticas»

De acuerdo con el marco que acabamos de explorar, consideramos que la riqueza competencial en una actividad de matemáticas se define por cinco componentes principales (Tabla 2):

Tabla 2

Componentes de una actividad matemática rica desde una perspectiva basada en competencias.

Componente		Descripción
1	Procesos	La tarea promueve uno o más de los cuatro procesos: resolución de problemas, razonamiento y prueba, conexiones, comunicación y representación.
2	Contenidos	La tarea fomenta el desarrollo de un contenido contextualizado, riguroso y extensible.
3	Demanda cognitiva	La tarea requiere reflexionar más que relacionar y relacionar más que reproducir.
4	Acceso	La gestión considera el acceso y el desafío para todos los estudiantes.
5	Ambiente	La gestión fomenta la implicación y la autonomía, desarrolla la identidad matemática, promueve el aprendizaje entre pares, etc.

Obviamente, como discutimos en las limitaciones, existen muchos otros aspectos que podrían considerarse como componentes de riqueza competencial. Un primer ejemplo, mencionado anteriormente, sería la evaluación de la actividad. ¿La actividad se centra en evaluar solo contenidos, o también evalúa procesos? ¿Permite a los docentes evaluar desde una perspectiva formativa? Otro ejemplo: recientemente, algunos autores e instituciones (OCDE, 2017b) han discutido las habilidades socioemocionales que entran en juego al hacer matemáticas en el aula, desde habilidades transversales como la cooperación hasta la gestión del error o la resiliencia frente a la frustración. Sin embargo, este es un campo emergente de estudio, que va más allá de los principales objetivos de esta tesis. Creemos que sería muy relevante añadir tales aspectos al análisis y la caracterización de riqueza competencial en futuras iteraciones de nuestro marco teórico.

En cualquier caso, la definición de los componentes de una actividad matemática rica pretende dar respuesta a otra de nuestras preguntas de investigación: «**¿Qué entendemos por riqueza competencial de una actividad en matemáticas?**». Esta definición, por lo tanto, se convierte en la

segunda contribución de las tesis, allende el contexto, junto a nuestra definición de guía didáctica.

4.3. La importancia de las conexiones

Las conexiones desempeñan un papel fundamental a la hora de fomentar una comprensión profunda en matemáticas, como apunta el NCTM (2000):

Ver las matemáticas como un todo ayuda a los estudiantes a comprender que no se trata de un conjunto de habilidades aisladas y reglas arbitrarias. Un énfasis en las conexiones matemáticas ayuda a los estudiantes a reconocer cómo se relacionan las ideas en diferentes áreas. Los estudiantes deberían llegar a esperar y aprovechar esas conexiones, utilizando los conocimientos adquiridos en un contexto para verificar conjeturas en otro. (...) Establecer conexiones se considera sinónimo de (o quizás, un indicador de) una «comprensión más profunda y duradera». (p. 64)

Sin embargo, la investigación existente sobre cómo estas conexiones se presentan y se promueven a través de guías didácticas, es muy limitada, especialmente en educación primaria. Por ello, con el objetivo de mostrar la modularidad de la herramienta que se desarrolla en esta tesis doctoral, hemos centrado nuestra mirada en este proceso en particular.

Este énfasis en las conexiones se respalda aún más con los hallazgos de Askew et al. (1997), quienes descubrieron que los docentes altamente efectivos no consideran la numeración como un dominio de habilidades aisladas, sino como el desarrollo de una red rica de conexiones entre diferentes ideas matemáticas. Según los autores, los docentes altamente efectivos adoptan una orientación «*conexionista*» hacia la enseñanza, integrando de manera constante diferentes áreas de las matemáticas y fomentando que los estudiantes establezcan vínculos entre diversos conceptos. Estos docentes utilizan una variedad de representaciones, incluidas palabras, símbolos y diagramas, para ayudar a los estudiantes a formar estas conexiones. También involucran activamente a los estudiantes en la explicación de sus estrategias y razonamientos, y utilizan dichas discusiones como oportunidades para establecer y destacar conexiones, así como para abordar posibles errores conceptuales. En contraste, los docentes con una orientación de transmisión o

descubrimiento, que se centran más en la entrega pasiva de contenido o en la exploración no estructurada, son menos efectivos a la hora de fomentar un aprendizaje matemático profundo. La importancia de fomentar conexiones también es reconocida por los propios docentes. Como señala Businskas (2008) (p. iii), «la mayoría de los profesores se mostraron entusiastas al considerar las matemáticas como una red interconectada de conceptos». De hecho, incluso cuando analizábamos la riqueza general de una actividad, ya hemos citado autores que describen la profundidad de la comprensión de los alumnos en términos de establecer conexiones (Pepin, 2008).

Por lo tanto, es comprensible que la literatura existente analice extensamente el papel de las conexiones en educación matemática. Algunos autores examinan aplicaciones específicas, como la importancia de conectar diferentes representaciones para construir el lenguaje algebraico (De La Fuente-Pérez y Deulofeu-Piquet, 2022). Otros autores abordan el tema desde una perspectiva centrada en el docente, enfocándose en qué conexiones forman parte del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (*MTSK*, por sus siglas en inglés) (De Gamboa et al., 2022) o en las perspectivas de los docentes sobre las conexiones matemáticas y sus prácticas pedagógicas (Businskas, 2008). Además, algunos autores combinan marcos teóricos, como la Teoría Extendida de las Conexiones (*ETC*, por sus siglas en inglés) y el Enfoque Onto-semiótico (*OSA*, por sus siglas en inglés), para analizar la comprensión matemática de los estudiantes (Rodríguez-Nieto et al., 2021).

Sin embargo, consideramos que existe un notable vacío en la investigación centrada en el análisis de estas conexiones desde la perspectiva del Enfoque Documental de la Didáctica (*DAD*) (Trouche et al., 2018). Específicamente, creemos que la comprensión acerca de cómo estas conexiones se comunican a los docentes a través de recursos curriculares, como las guías didácticas, especialmente en la educación primaria, es muy limitada. A diferencia de los estudios que examinan las prácticas docentes en el aula, y su interacción con el alumnado, nuestro enfoque enfatiza el análisis y la mejora de las guías didácticas como un medio para fomentar mejores estrategias docentes.

¿Qué significa «hacer conexiones» en matemáticas?

Establecer conexiones matemáticas es un proceso cognitivo que implica reconocer y establecer vínculos entre ideas matemáticas (Businskas, 2008). Estas ideas pueden entenderse como conceptos, procedimientos o representaciones de estos conceptos y procedimientos. La autora desarrolla la naturaleza de dichos conceptos matemáticos:

En primer lugar, ¿qué cuenta como un concepto matemático? Un concepto es una idea. Considero que un concepto matemático significa una clase de objetos matemáticos, por ejemplo, cuadrado perfecto, número, variable, ecuación, parábola... En estos ejemplos, está claro que algunos conceptos son más complejos que otros y podrían considerarse composiciones de conceptos más simples. (pp. 17, 18)

Skemp (1987), citado por Businskas, distingue entre conceptos primarios, que «pueden derivarse de nuestras experiencias del mundo», y conceptos secundarios, que «se abstraen de otros conceptos». Aunque reconocemos diferentes niveles de complejidad, en el marco de este estudio utilizamos el término «concepto» en un sentido más amplio, especialmente para distinguirlo de «procedimiento». Por procedimiento, en este contexto, nos referimos a una serie de pasos que utilizan algunos de estos conceptos para lograr un resultado o producto específico.

Dado este enfoque, donde las ideas matemáticas se definen como conceptos o procedimientos (o representaciones de ellos), se puede apreciar la importancia crucial de las conexiones entre estas ideas para el aprendizaje y la comprensión de las matemáticas. Como señalan Rodríguez-Nieto et al. (2021):

El estudio de las conexiones matemáticas ha sido considerado un tema de interés, ya que contribuyen a la comprensión de los conceptos matemáticos. (...) En total, se consideran nueve categorías de conexiones intra-matemáticas: diferentes representaciones, implicación, parte-todo, procedimental, orientada a la instrucción, característica, significado, reversibilidad y metafórica. (pp. 1, 2)

La mayoría de los autores, como es común en la investigación educativa, centran la Teoría Extendida de las Conexiones (ETC) en caracterizar las conexiones

establecidas por estudiantes o docentes en el aula mientras aprenden o enseñan matemáticas. También analizan cómo estas conexiones influyen en la concepción que los estudiantes tienen de las matemáticas o en el conocimiento que los docentes tienen sobre diferentes tipos de conexiones. Como explican De Gamboa et al. (2022):

Varios modelos de conocimiento del docente señalan la importancia de las conexiones matemáticas al describir diferentes tipos de conocimiento. Por ejemplo, el modelo MKT (*Mathematics Knowledge for Teaching*) considera las conexiones como parte de la conciencia del docente, relacionada con cómo las ideas o conceptos matemáticos pueden asociarse a lo largo de los años escolares. En este sentido, el modelo utiliza la noción de conexión para definir el Conocimiento del Horizonte de Contenidos (*Horizon Content Knowledge*), un subdominio del conocimiento vinculado a conocer las relaciones entre contenidos. En el *Knowledge Quartet*, las conexiones definen una de las dimensiones del conocimiento docente y están vinculadas al establecimiento de conexiones entre conceptos, procedimientos y el uso de estas conexiones para secuenciar contenidos o reconocer la adecuación conceptual de una actividad. En el modelo MTSK (*Mathematics Teacher's Specialized Knowledge*), Carrillo et al. reconocen dos tipos de conexiones matemáticas, intraconceptuales e interconceptuales. Mientras que las conexiones intraconceptuales forman parte del Conocimiento de Tópicos (*KoT*, por sus siglas en inglés), las conexiones interconceptuales se reconocen en el subdominio del Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas (*KSM*, por sus siglas en inglés). (p. 1)

De manera similar, De La Fuente-Pérez y Deulofeu-Piquet (2022) destacan la importancia de las conexiones dentro del marco del *Knowledge Quartet*, centrándose en cómo los docentes utilizan las conexiones entre representaciones para ayudar a los estudiantes a construir el lenguaje algebraico. El *Knowledge Quartet* ofrece una perspectiva detallada sobre cómo se pueden utilizar efectivamente las conexiones en matemáticas durante la enseñanza. Dentro de este marco, la dimensión de conexiones implica secuenciar el material utilizado para la instrucción y comprender las diferentes demandas cognitivas de diversos contenidos y tareas. Los indicadores clave de esta dimensión incluyen la anticipación de la complejidad, tomar decisiones informadas sobre la secuenciación de los temas,

establecer conexiones entre procedimientos, vincular diferentes conceptos y reconocer la adecuación conceptual de las actividades. Estos indicadores tienen como objetivo que los docentes diseñen e implementen una instrucción que no solo aborde conceptos matemáticos individuales, sino que también resalte la interrelación de estos conceptos, promoviendo así una comprensión más profunda y coherente de las matemáticas entre los estudiantes.

Si bien estos marcos ofrecen ideas valiosas sobre el uso práctico de las conexiones en la enseñanza, como decíamos, se centran principalmente en la aplicación en el aula y en el conocimiento del docente. El Enfoque Documental de la Didáctica (DAD) proporciona, pues, una perspectiva única al enfatizar el análisis de los documentos que los docentes utilizan para guiar su instrucción. Para avanzar en nuestra investigación sobre la riqueza de las guías didácticas desde la perspectiva del DAD e integrar los hallazgos de la Teoría Extendida de las Conexiones (ETC), nuestro objetivo es explorar y analizar las conexiones presentadas explícitamente en las guías didácticas. De hecho, algunos autores incluso utilizan el término «rica» como sinónimo de una actividad que fomenta el establecimiento de conexiones entre diferentes conceptos matemáticos al resolver problemas. Liljedahl (2020) lo describe así:

Las buenas tareas de resolución de problemas también son tareas ricas, ya que requieren que los estudiantes recurran a una diversidad rica de conocimientos matemáticos y los combinen de diferentes maneras para resolver el problema. También se les llama ricas porque resolver estos problemas conduce a la interacción con una sección transversal rica y diversa de las matemáticas. (p. 20)

Tipos de conexiones matemáticas

Para empezar, la investigación que sustenta la ETC diferencia entre conexiones «extramatemáticas» y conexiones «intramatemáticas» (De Gamboa et al., 2022):

Las conexiones extramatemáticas ocurren cuando las matemáticas se relacionan con contextos fuera de las matemáticas, como sucede con las actividades de modelización. Las conexiones intramatemáticas ocurren

cuando existe una relación entre representaciones, definiciones, conceptos, procedimientos y proposiciones dentro del contexto de las matemáticas. (p. 4)

Es importante destacar que los ejemplos de los tres marcos que citamos a continuación provienen principalmente de la educación secundaria. Sin embargo, nuestro estudio se centra en guías para educación primaria. Esta extensión es significativa porque la naturaleza y el contexto de las conexiones en matemáticas de primaria pueden diferir de las de secundaria. Al incluir ejemplos de educación primaria, mientras exploramos la modularidad de nuestra herramienta para enriquecer las guías, como resultado colateral extendemos el alcance del marco ETC a diferentes niveles educativos. Esto es, consideramos que explorar las conexiones en la educación primaria añade relevancia a nuestro estudio y contribuye a una comprensión más amplia de cómo las ideas matemáticas están interrelacionadas desde las primeras etapas del aprendizaje.

La siguiente lista explora diferentes tipos de conexiones «intramatemáticas» a través de comparar aquellas definidas en tres artículos recientes y relevantes dentro del marco ETC (Businskas 2008; De Gamboa et al. 2022; Rodríguez-Nieto et al. 2021). Más adelante discutimos esta lista y la adaptamos a nuestra interpretación desde la perspectiva del análisis documental de una guía didáctica de educación primaria.

1. Conexión entre representaciones

Businskas (2008):

- Representación alterna: A es una representación alterna de B.
- Representación equivalente: A es equivalente a B. Llamamos representaciones equivalentes a los conceptos que se representan de diferentes maneras dentro de la misma forma de representación, para distinguirlos de representaciones en formas diferentes.

Rodríguez-Nieto et al. (2021):

- Representaciones diferentes: Se identifican cuando el sujeto representa un concepto matemático usando representaciones equivalentes o alternas.

De Gamboa et al. (2022):

- Representación alterna: La conexión elemental se establece entre dos representaciones del mismo objeto matemático. La conexión relaciona representaciones alternas cuando hay un cambio en el registro.
- Representación equivalente: La conexión elemental se establece entre dos representaciones del mismo objeto matemático. La conexión relaciona representaciones equivalentes cuando ambas representaciones pertenecen al mismo registro.

2. Conexión entre procedimientos

Businskas (2008):

- Procedimiento: A es un procedimiento utilizado al trabajar con el objeto B.

Rodríguez-Nieto et al. (2021):

- Procedimental: Estas conexiones se manifiestan a través del uso de reglas, algoritmos o fórmulas para completar o resolver una tarea matemática, de la forma: A es un procedimiento utilizado para trabajar con el concepto B.

De Gamboa et al. (2022):

- Procedimiento: La conexión elemental se establece entre un concepto y un procedimiento que puede usarse al trabajar con el concepto.
- Procedimiento equivalente: La conexión elemental se establece entre dos procedimientos útiles para resolver la misma tarea.

3. Conexión entre características

Businskas (2008):

- Características comunes: A y B comparten algunas características en común.

Rodríguez-Nieto et al. (2021):

- Característica: Se identifica cuando el sujeto manifiesta algunas características de los conceptos o describe sus propiedades en términos de otros conceptos que los hacen diferentes o similares a otros.

De Gamboa et al. (2022):

- Característica común de representación: La conexión elemental se establece entre dos objetos que comparten una característica común, sin ser equivalentes. Estas conexiones elementales son provocadas por interpretaciones erróneas y ambiguas de los objetos matemáticos por parte de los estudiantes. Las características comunes que sustentan las conexiones elementales pueden estar relacionadas con similitudes en la representación.
- Característica común de definición: La conexión elemental se establece entre dos objetos que comparten una característica común, sin ser equivalentes. Las características comunes que sustentan la conexión pueden estar relacionadas con su definición.

4. Conexión por implicación

Businskas (2008):

- Implicación: A implica B (y otras relaciones lógicas). Esta conexión indica una dependencia de un concepto con respecto a otro de manera lógica.

Rodríguez-Nieto et al. (2021):

- Implicación: Esta conexión se identifica cuando un concepto A lleva a otro concepto B mediante una relación lógica ($A \rightarrow B$).

De Gamboa et al. (2022):

- Implicación: La conexión elemental también se establece entre dos proposiciones; se refiere a implicaciones o argumentos del tipo «si-entonces».
- Justificación: La conexión elemental se establece entre dos proposiciones, donde una premisa lleva a una conclusión.

5. Conexión por atribución de significado

Rodríguez-Nieto et al. (2021):

- **Significado:** Se identifica cuando un estudiante atribuye un sentido a un concepto matemático, es decir, lo que significa para él o ella. Incluye aquellos casos en los que el estudiante da una definición que ha construido para estos conceptos. Es diferente del tipo de característica porque no se describen las propiedades y cualidades de los conceptos matemáticos.

Al estudiar los tres trabajos que contribuyen al marco ETC, notamos muchas coincidencias en la forma en que se categorizan las conexiones, pero también algunas divergencias. Un primer ejemplo de tales discrepancias son las conexiones «orientadas a la instrucción» (comprensión de un concepto basada en conocimientos previos), definidas únicamente por Rodríguez-Nieto et al. (2021). Un segundo ejemplo son las conexiones «metafóricas» (implican proyectar propiedades de un dominio familiar para estructurar uno abstracto), definidas por Rodríguez-Nieto et al. (2021) y De Gamboa et al. (2022). Esto sugiere que podrían surgir tipos adicionales de conexiones a medida que el campo siga evolucionando. Para reflejar este potencial de crecimiento, optamos por incluir un sexto tipo, denominado «otras», que sirve como categoría para aquellas conexiones que no encajan fácilmente en los tipos existentes. Las conexiones incluidas en este cajón de sastre se eligen en función de su menor frecuencia o relevancia relativa en nuestro análisis de guías didácticas de primaria, aunque pueden aparecer ocasionalmente. Este es el caso de las conexiones «parte-todo» (relaciones donde un concepto es una generalización o un caso particular de otro), que son definidas por los tres autores, pero no aparecen con la misma frecuencia que los tipos anteriores en educación primaria.

Los lectores más familiarizados con la investigación sobre conexiones en matemáticas notarán la ausencia en la lista de aquellas conexiones que vinculan ideas matemáticas con situaciones de la vida real, es decir, las conexiones que permiten la modelización. Esto se debe a que el marco ETC se centra conscientemente en las conexiones «intramatemáticas», que existen dentro del mundo de las ideas matemáticas. Si bien incorporar la modelización y las conexiones

«extramatemáticas» podría proporcionar información valiosa, hacerlo ampliaría el alcance de nuestra investigación de una manera que desviaría el enfoque de nuestro interés principal: la estructura interna de las ideas matemáticas y las conexiones entre ellas.

En cualquier caso, al comparar los diferentes tipos de conexiones descritos en el marco ETC, destacamos las diversas formas en que las conexiones internas matemáticas pueden presentarse y analizarse en las guías didácticas. La lista es ambiciosa y sistemática en su análisis de las diversas conexiones en el aula de matemáticas desde la perspectiva del docente o del estudiante. Sin embargo, al aplicarla a una guía didáctica de primaria, encontramos que no todos los tipos comparten la misma naturaleza y que algunos parecen superponerse. Por ejemplo, una «implicación» (tipo 4 en la lista anterior) podría establecerse usando dos representaciones, especialmente en primaria, lo que también la clasificaría como tipo 1. Por lo tanto, argumentamos que el marco ETC necesita adaptarse para el análisis documental, como veremos a continuación.

En el capítulo 5, metodología, describimos los materiales y métodos utilizados en nuestro estudio, para proporcionar un relato detallado del proceso de recopilación de datos y la adaptación de este marco teórico. Conviene recordar que pretendemos analizar la riqueza de las conexiones en las guías didácticas y dar respuesta a dos de nuestras preguntas de investigación: **«¿Qué tipo de conexiones se pueden evidenciar a partir del análisis de la riqueza competencial de una guía didáctica?»**, y **«¿Cómo se puede enriquecer una guía desde el punto de vista de las conexiones?»**.

5. Metodología

Como describimos en el contexto, capítulo 3, uno de los pilares fundamentales de Innovamat son sus guías didácticas, un documento escrito que, con la intención de ser formativo para los docentes, establece la secuencia de tareas para cada sesión y la gestión recomendada en el aula. El presente estudio tiene como objetivo desarrollar una herramienta de análisis que permita caracterizar dichas guías desde el punto de vista de la riqueza competencial intrínseca.

Como se discute en el marco teórico, capítulo 4, las guías están compuestas por actividades que pueden considerarse un documento en el sentido que el Enfoque Documental de la Didáctica (DAD) les otorga: son un recurso (el conjunto de tareas propuestas para cada sesión) acompañado de un esquema de uso (su gestión). Cabe recordar que, aunque el DAD sugiere que el esquema de uso es proporcionado por el docente al utilizar el recurso, sostenemos que en las actividades que conforman las guías, gran parte de este esquema (es decir, el objetivo, las reglas de acción y algunas adaptaciones) se presenta explícitamente, lo que las convierte más en un documento que en un recurso. Sin embargo, esto no impide que cada docente interprete y utilice las guías a su manera.

La relación entre las actividades que ocurren en el aula y las guías puede compararse con la relación entre la realidad y una película. Las actividades, compuestas por tareas y su gestión, existen en el mundo dinámico y real. Las guías, por otro lado, son como películas, representaciones «simplificadas» de esa realidad. Así como una película solo puede capturar una fracción de la riqueza y complejidad de la realidad, una guía solo puede encapsular una parte de la riqueza inherente en una actividad. Profundizando en la metáfora, podríamos decir que el contenido explícito en las guías es como el brillo de la imagen, iluminando los elementos clave y haciéndolos claramente visibles. Los procesos (resolución de problemas; razonamiento y prueba; comunicación y representación; conexiones) aportan color, profundidad y matices. La gestión, a su vez, la equiparamos al movimiento: proporciona la interacción dinámica que da vida a la escena.

Normalmente, un libro de texto solo incluye teoría y ejercicios, por lo que, siguiendo con nuestra metáfora, sería como una fotografía en blanco y negro, que captura los elementos básicos de la realidad, pero carece de color y dinamismo. Una

guía que incluye tanto contenidos como algo de gestión sería como una película en blanco y negro, con movimiento e interacción, pero todavía sin color. En contraste, una guía que incluye contenidos y procesos, pero no gestión, sería como una fotografía a color, ofreciendo una visión más rica, pero estática. Finalmente, una guía que incluye el contenido de las tareas, los procesos y la gestión sería como una película a color, es decir, una representación más completa y realista de la actividad.

La riqueza de la actividad es una condición necesaria para la riqueza de la guía, al igual que una realidad interesante es necesaria para una película interesante. Sin embargo, esta no es una condición suficiente. Una actividad rica no se traduce automáticamente en una guía rica. La calidad de la guía, como la calidad de una película, depende de qué tan bien capture y comunique la riqueza potencial de la actividad. Para docentes experimentados que están familiarizados con la actividad, una guía menos detallada podría ser suficiente, ya que pueden llenar los vacíos con su conocimiento y experiencia; pueden inferir la riqueza de la actividad a partir de una guía más simple, al igual que alguien familiarizado con un paisaje puede inferir la vista completa a partir de una película limitada. Sin embargo, para los docentes con menos experiencia, una guía rica es crucial para comprender e implementar la actividad de manera efectiva, de la misma forma que una película detallada es necesaria para que alguien no familiarizado con el paisaje pueda apreciar su belleza y complejidad.

Por supuesto, esta metáfora podría extenderse. Por ejemplo, ¿podrían las habilidades socioemocionales ser comparadas con el sonido de una película, porque añaden una capa de resonancia emocional y enriquecen la experiencia general? Sin embargo, tales extensiones son innecesarias para los propósitos de este estudio. En su lugar, centramos en el valor de esta metáfora en su capacidad para resaltar la complejidad de las actividades en el aula y la relativa simplicidad de las guías. Las actividades, como la realidad, son multifacéticas y complejas, lo que las hace difíciles de caracterizar de manera integral, especialmente cuando se consideran tanto los aspectos de las tareas como su gestión. Las guías, sin embargo, están compuestas por segmentos discretos, como los píxeles en una imagen o video, lo que las hace más manejables de analizar. Este enfoque contribuye a una comprensión teórica más amplia de cómo las guías pueden capturar y comunicar efectivamente la riqueza de las actividades de aula.

Una guía didáctica de Innovamat es un documento que proporciona una secuencia de actividades para cada sesión (es decir, tareas junto con estrategias recomendadas para su gestión en el aula). Como ejemplo, a continuación podemos ver una sesión específica para 4º curso de primaria (Figura 2):

Figura 2

Guía didáctica del reto 19 de 4º curso de primaria (Innovamat, 2021).

Reto 19
Polígonos convexos
Un tangram particular

Dimensiones

- Resolución de problemas
- Razonamiento y prueba
- Conexiones
- Comunicación y representación

Bloques de contenido

- Numeración y cálculo
- Espacio y forma
- Medida
- Estadística y azar
- Relaciones y cambio

En esta sesión...

Construimos polígonos a partir de un tangram triangular casero, los bautizamos y encontramos su perímetro.

Para ello, será necesario:

- Construir el tangram con papel.
- Encontrar el perímetro de una figura.

Materiales

- Video 19
- Recurso 19.1 (Pista 2)
- Recurso 19.2 (Pista 3)
- Hojas cuadrículadas
- Lápices de colores
- Escuadra y/o cartabón
- Tijeras

¿POR DÓNDE EMPEZAMOS?

¿Qué? Proyectamos el video del reto que contextualiza y guía la dinámica de esta actividad.

¿Cómo?

Vamos allá!

Video 19.

Hojas cuadrículadas, lápices de colores, escuadra o cartabón y tijeras.

Q. Repartimos una hoja cuadrículada, una escuadra o cartabón y unas tijeras a cada uno.

A lo largo del video:

- Seguimos las instrucciones para construir, cada uno, su propio tangram.

Actividad 1

¿Qué? Encontramos polígonos convexos.

¿Cómo?

Vamos allá!

Recurso 19.1, Recurso 19.2.

Q. Repartimos el cuaderno a todo el mundo.

1. Explicamos al alumnado que queremos construir, con las piezas del tangram que hemos construido, todos los polígonos convexos que podamos.

Un polígono es convexo cuando ninguno de sus ángulos interiores supera los 180 grados. No hace falta que el alumnado mida ángulos, simplemente basta con explicarlo y estar pendientes de que todos los polígonos que surjan lo sean.

2. Pedimos que, cada vez que una pareja encuentre un polígono, lo calquen o lo dibujen aproximadamente en el cuaderno, de manera individual.

3. Vamos dando pistas progresivamente a lo largo de la actividad, como:

- Pista 1: Debéis encontrar 2 rectángulos, 2 triángulos, 2 paralelogramos, 3 trapecios, 1 cometa y 1 pentágono. En total, 11 polígonos.
- Pista 2: Proyectamos el Recurso 19.1, donde están las sombras de los 11 polígonos.
- Pista 3: Proyectamos el Recurso 19.2, donde están las soluciones.

Actividad 2

¿Qué? Nombramos los polígonos y encontramos su perímetro.

¿Cómo?

Vamos allá!

Escuadra y/o cartabón.

1. Pedimos al alumnado que escriba el nombre de cada uno de los polígonos que hemos dibujado en el cuaderno.

Quedó saber algunos nombres o los recuerden de la pista 1 de la actividad anterior. Si no, podemos ayudarles.

2. Pedimos que midan el perímetro de algunos de los polígonos con la escuadra o el cartabón y lo escriban al lado, en el cuaderno.

No hace falta que todo el alumnado encuentre todos los perímetros. Nos basta con que mida unos cuantos, en función de la habilidad de cada uno.

3. Hacemos una puesta en común para descubrir que algunos polígonos tienen el mismo perímetro que otros y para hacer surgir las estrategias que han usado para medir y/o calcular los perímetros.

Pretendemos que, al final de la actividad, todo el mundo tenga dibujados en el cuaderno los 11 polígonos.

¿QUÉ HEMOS TRABAJADO?

- ¿El alumnado sabe comparar los diferentes polígonos que encuentra?
- ¿El alumnado conoce el nombre de los polígonos más habituales?
- ¿El alumnado sabe encontrar el perímetro de un polígono?

En este reto, se introduce el concepto de «polígono convexo» y se practica la identificación y clasificación de polígonos, así como la medición de perímetros. El reto se lleva a cabo a través de una actividad práctica con un rompecabezas geométrico compuesto por tres piezas triangulares, inspirado por el tangram mínimo de Brügner (Brügner, 1984). La sesión comienza con los alumnos creando su propio tangram triangular siguiendo una guía en video proyectada. Una vez preparado el tangram, los alumnos trabajan en parejas para construir diversos polígonos convexos con las piezas. Se les proporciona orientación e indicaciones para ayudarlos a descubrir una variedad de polígonos: rectángulos, triángulos, paralelogramos, trapecios, una cometa y un pentágono. A medida que los alumnos identifican cada

polígono, se les anima a dibujar estas formas en sus cuadernos de registro, para referencia futura. Durante este proceso, se ofrecen pistas para facilitar el descubrimiento e identificación de los polígonos.

En la segunda parte de la sesión, los alumnos etiquetan los polígonos identificados y trabajan la medición experimental de sus perímetros mediante una regla o similar. Esta tarea no solo se centra en obtener las mediciones, sino que también está diseñada para ayudar a los estudiantes a descubrir que, aunque todos los polígonos tienen la misma área (porque están formados por los mismos tres triángulos), no todos tienen el mismo perímetro. Al final del reto, el objetivo es que los alumnos hayan desarrollado una comprensión de qué es un polígono convexo y sus propiedades, así como de la medición de perímetros con instrumentos de medida.

Ahora que ya conocemos, a través de su definición y a partir de un ejemplo concreto, el objeto que queremos analizar (las guías didácticas) y la mirada con la que queremos analizarlas (la riqueza competencial), es momento de recopilar los datos que nos permitirán crear la herramienta de análisis.

5.1. Creación de la herramienta

Nuestra herramienta de análisis se desarrolla a partir del marco teórico, para dar respuesta a nuestra pregunta de investigación:

¿Cómo podemos desarrollar y aplicar una herramienta que combine las dimensiones clave del enriquecimiento matemático para analizar y mejorar eficazmente guías didácticas de matemáticas en educación primaria?

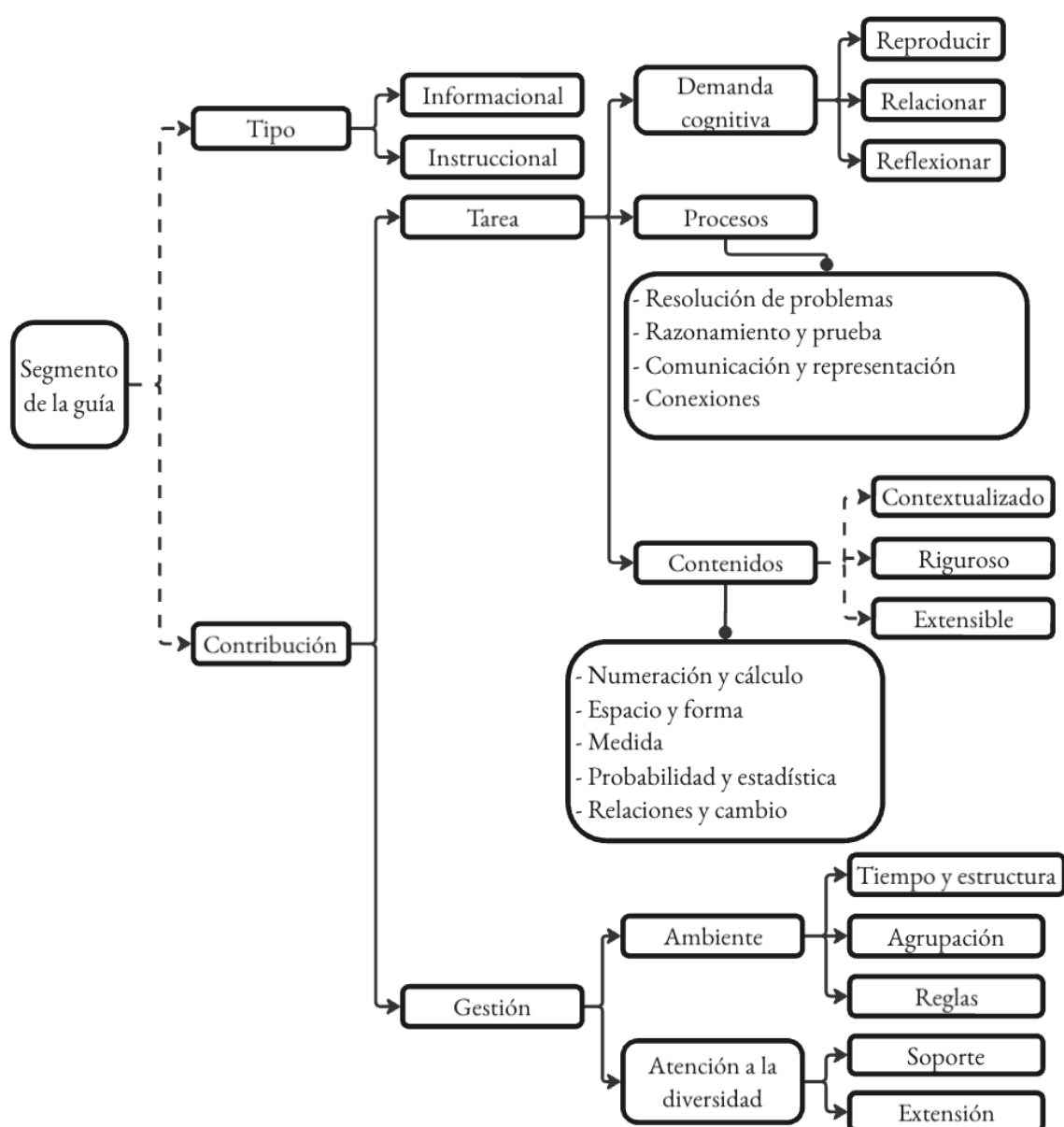
Dado que entendemos que una guía está formada por actividades (tareas y gestión de las mismas), consideramos que la riqueza de la guía se deriva directamente de la riqueza de las actividades que la componen.

La caracterización comienza, por lo tanto, considerando la mínima unidad de información con significado dentro de la guía, lo que denominamos «segmento de la guía» (este puede ser una frase, una imagen, etc.). Primero, nos centramos en el «tipo de segmento», para distinguir entre aquellos que son «instrucciones» porque

requieren alguna acción por parte del docente, y los que son meramente «informativos» y, por lo tanto, no requieren ninguna acción específica. A partir de ahí, tanto los segmentos «instruccionales» como los «informativos» pueden referirse principalmente a la tarea o a su gestión. El siguiente esquema reúne los diferentes aspectos de la riqueza explorados en el marco teórico (Figura 3).

Figura 3

Diagrama con los aspectos para caracterizar un segmento de una guía.



Ahora que tenemos una perspectiva general de los aspectos a considerar, podemos profundizar en cómo los entendemos. La mayoría de los aspectos tienen características excluyentes, mientras que otros no (representados por líneas discontinuas en el diagrama anterior). Por ejemplo, un segmento es exclusivamente de tipo informativo *o bien* instruccional; un segmento puede contribuir más a la tarea *o bien* a su gestión, etc. Por el contrario, el contenido de un segmento debe caracterizarse como contextualizado, riguroso y extensible al mismo tiempo. La siguiente tabla (Tabla 3) puede ser útil para comprender estas diferencias en la naturaleza de los diferentes aspectos:

Tabla 3

Aspectos de los segmentos y su definición de riqueza.

Aspecto del segmento	Opciones	Caracterización de riqueza	Fuentes principales ²
Tipo	Informativo	Las guías deben combinar ambos tipos de segmentos: los segmentos instruccionales resumen los pasos principales, mientras que los segmentos informativos los complementan.	-
	Instruccional		
Contribución	Tarea	Debe haber un equilibrio entre los segmentos que contribuyen a la tarea y los que contribuyen a su gestión.	Definición de actividad, de Vilalta et al. (2021)
	Gestión		Definición de tarea, de Mason y Johnston-Wilder (2006)
Tarea: demanda cognitiva	Reproducir	Las guías deben incluir tareas con una alta demanda cognitiva (relacionar y reflexionar por encima de reproducir).	Segunda dimensión del <i>TRU-Math</i> de Schoenfeld (2016)
	Relacionar		Niveles de competencia, de de Lange (1999)
	Reflexionar		
Tarea: Procesos	- Resolución de problemas - Razonamiento y prueba	Las guías deben incluir tareas que promuevan uno o más de estos procesos.	Competencias, de Niss y Højgaard (2019)

² Para una bibliografía más detallada, se recomienda releer el marco teórico.

	• Comunicación y representación • Conexiones		Estándares de procesos, del NCTM (2000)
Tarea: Contenido	Contextualizado	Las guías deben incluir contenido contextualizado, riguroso y extensible, coherente con los bloques de contenido curriculares.	Características del contenido, de Deulofeu y Vila (2021)
	Riguroso		Coherencia, de Gueudet et al. (2013)
	Extensible		Bloques de contenido, del <i>National Governors Association Center for Best Practices, and Council of Chief State School Officers</i> (2010)
	• Numeración y cálculo • Espacio y forma • Medida • Probabilidad y estadística • Relaciones y cambio		Primera dimensión del <i>TRU-Math</i> de Schoenfeld (2016)
Gestión: Ambiente	Tiempo y estructura	Las guías deben ser estructuradas e incluir recomendaciones sobre cómo secuenciar las tareas, cómo usar materiales manipulativos o cómo distribuir el tiempo a lo largo de la sesión.	Secuencia, de Gueudet et al. (2013)
	Agrupación	Las guías deben aconsejar sobre cómo agrupar el alumnado para promover cooperación en equipo y también momentos de reflexión individual.	Trabajo cooperativo, de Piggott (2011) Cuarta dimensión del <i>TRU-Math</i> de Schoenfeld (2016)
	Reglas	Las guías deben explicar las reglas de participación para cada actividad, estableciendo expectativas claras, y fomentar la identidad matemática.	Cuarta dimensión del <i>TRU-Math</i> de Schoenfeld (2016) Perspectiva, de Valverde et al. (2002)
Gestión: Atención a la diversidad	Soporte	Las guías deben informar al maestro sobre las dificultades más habituales y proporcionar estrategias para apoyar a los alumnos mediante técnicas de	Tercera dimensión del <i>TRU-Math</i> de Schoenfeld (2016)

		andamiaje y recursos adicionales.	
	Extensión	Las guías deben ofrecer tareas de ampliación para los alumnos que necesiten estímulos adicionales.	

Una vez desarrollada la primera versión de la herramienta, es necesario probarla para detectar inconsistencias, mejorarla y terminar validándola.

En esta etapa inicial, decidimos probar la herramienta a partir de aplicarla a una guía específica de 4º curso de primaria de Innovamat, el Reto 19 (ver Figura 1). ¿Por qué esta sesión? En primer lugar, porque los autores de Innovamat señalan que el Reto 19, inspirado en una actividad relativamente conocida sobre el Tangram mínimo de Brügger (Brügger, 1984), es un ejemplo representativo de la propuesta. En segundo lugar, entre los diferentes tipos de sesiones incluidas en la propuesta, como se describe en Vilalta (2021), las Aventuras como el Reto 19 son independientes de las sesiones previas y posteriores, lo que simplifica su análisis. En tercer lugar, porque el equipo investigador tiene más experiencia combinada como maestros en los cursos de 3º y 4º de primaria.

En el siguiente capítulo, el capítulo 6, describimos en detalle cómo tres especialistas en educación matemática aplican la herramienta por separado en un proceso de «triangulación» (Flick, 2013), para identificar discrepancias, mejorarla y, finalmente, validarla. En cualquier caso, la herramienta debería funcionar independientemente de la sesión elegida, por lo que iteraciones adicionales con diferentes guías y propuestas ayudarían a perfeccionarla, como se discute en las limitaciones descritas en el capítulo 8.

Una vez validada, nos proponemos explorar la modularidad de la herramienta y su capacidad para ser extendida. Como hemos descrito, nuestro interés se centra en las conexiones como uno de los elementos más fundamentales del aprendizaje de las matemáticas y, por ende, su riqueza. Por ello, aunque el proceso de validación por triangulación se llevó a cabo antes de proponer la extensión de la herramienta que permite analizar las conexiones, es coherente describir la metodología que nos permite definir posteriormente esta extensión.

5.2. Extensión de la herramienta: conexiones

Como hemos descrito en el marco teórico, comprender cómo se promueven las conexiones matemáticas a través del diseño curricular en un documento como es una guía es fundamental. No en vano, queremos dar respuesta a dos de nuestras preguntas de investigación: «**¿Qué tipo de conexiones se pueden evidenciar a partir del análisis de la riqueza competencial de una guía didáctica?**», y «**¿Cómo se puede enriquecer una guía desde el punto de vista de las conexiones?**».

Nuestro objetivo ahora, por lo tanto, es adaptar la lista de tipos de conexiones definida por el marco de la Teoría de Conexiones Extendida (ETC), explorada en el apartado 4.3 del marco teórico, al contexto en una guía didáctica. Para lograrlo, necesitamos dar un paso atrás y reflexionar sobre qué significa hacer conexiones. ¿Qué conectamos? Como explicamos en el marco teórico, establecer conexiones matemáticas es un proceso cognitivo que implica reconocer y establecer vínculos entre ideas matemáticas (es decir, conceptos, procedimientos o representaciones de estos conceptos y procedimientos) (Businskas, 2008). Por lo tanto, dado que solo se consideran tres tipos de ideas, antes de avanzar en la discusión parece lógico realizar un enfoque sistemático que explore todas las posibles «categorías», como se muestra en la siguiente tabla de doble entrada (Tabla 4):

Tabla 4

Categorías de conexiones: ¿qué conectamos?

Categoría (¿qué conectamos?)		Idea B		
		Concepto	Representación	Procedimiento
Idea A	Concepto	CC	CR	CP
	Representación	RC	RR	RP
	Procedimiento	PC	PR	PP

Es importante señalar que entendemos las conexiones de manera bidireccional, por lo que podemos considerar que una conexión PR es equivalente a una conexión RP, por ejemplo. Esto implica que las «categorías» sombreadas en gris en la tabla anterior están repetidas y no necesitan considerarse por separado. Por lo

tanto, definimos seis categorías diferentes según las dos ideas que se conectan. La siguiente lista presenta un ejemplo de cada categoría desde una perspectiva de educación primaria:

- CC: Conectar el concepto de «doble» con el concepto de «simetría». Después de representar una cantidad con un material manipulativo (como cubitos), podemos visualizar su doble colocando un espejo frente a ellos y contando todos los cubos y sus reflejos como un todo.
- CR: Conectar el concepto de «multiplicación» de dos factores y su propiedad conmutativa con la representación de un rectángulo cuyos lados miden lo mismo que los factores.
- CP: Conectar el concepto de «perpendicularidad» con el procedimiento para dibujarla en papel mediante las herramientas adecuadas.
- RR: Conectar la representación de un número de dos cifras en unidades con la representación del mismo número en decenas y unidades para trabajar el valor posicional.
- RP: Conectar la representación de avanzar en la línea numérica con el procedimiento de sumar.
- PP: Conectar el procedimiento de dividir mediante reparto con el procedimiento de dividir mediante el algoritmo vertical estándar.

Como se puede observar, nos referimos a ellas como «categorías» para diferenciarlas de los «tipos» descritos en el marco ETC que hemos explorado en el apartado 4.3 del marco teórico. Para nosotros, determinar la categoría es un paso preliminar necesario que nos ayuda a entender qué ideas matemáticas se están conectando. Posteriormente, podemos profundizar y analizar el «tipo» de conexión.

Reiteramos que los tipos de conexiones definidos por los autores citados dentro del marco ETC reflejan diferentes naturalezas. Por esta razón, algunas de las seis «categorías» se solapan con algunos «tipos». Este es el caso, por ejemplo, de las conexiones entre representaciones o entre procedimientos. Tal ambigüedad conlleva que el análisis resulte más complejo, por lo que decidimos separar «categoría» (¿qué estamos conectando?) de «tipo» (¿cuál es la naturaleza de esta conexión?). Esto significa que la lista de tipos que hemos definido en el apartado 4.3 del marco teórico debe adaptarse en consecuencia, como se muestra a continuación (Tabla 5):

Tabla 5

Adaptación de los tipos de conexiones del marco ETC.

Tipo en el marco ETC	Adaptación
1. Conexión entre representaciones	Este tipo se convierte en categoría: RR
2. Conexión entre procedimientos	Este tipo se convierte en categoría: PP
3. Conexión entre características	Tipo 1. Conexión entre características
4. Conexión por implicación (lógica, justificación)	Tipo 2. Conexión por implicación
5. Conexión dando significado	Tipo 3. Conexión dando significado
6. Otras conexiones: - Orientadas a la instrucción - Metafóricas - Parte-todo	Tipo 4. Otras conexiones

Para justificar aún más la inclusión de un tipo tan amplio como «otras conexiones» al final de la lista, es importante recordar que nuestro objetivo no es determinar exhaustivamente todos los tipos posibles de conexiones que podrían existir en un aula de matemáticas (como pretende el marco ETC), ni siquiera todos los tipos que podrían encontrarse en una guía didáctica. Nuestro objetivo es utilizar este marco teórico para mostrar la modularidad de la herramienta y extenderla para detectar oportunidades de enriquecer las guías desde una perspectiva basada en competencias centrada en las conexiones. Es por ello que preferimos mantener la lista abierta con un último tipo amplio. Esta decisión no resta valor a los tipos bien definidos; al contrario, los tres primeros tipos siguen siendo los más comunes, como veremos en el estudio de caso.

En cualquier caso, hemos definido que cualquier conexión matemática corresponde a una de las seis categorías, que establecen cómo se conectan las ideas, y también a un tipo, que especifica la naturaleza de dicha conexión.

Una vez creada la extensión de la herramienta, de nuevo es necesario probarla y validarla por triangulación (Flick, 2013). Decidimos hacerlo aplicándola a la misma guía didáctica de Innovamat que sirve para validar la herramienta general. ¿Por qué? Porque consideramos que la extensión de la herramienta para detectar conexiones será aún más evidente si realizamos la prueba en la misma guía: así podemos

observar cuánto más profundizamos en la caracterización de las conexiones y en la detección de oportunidades para enriquecer dicha guía. En el capítulo 7, de manera análoga al capítulo 6 para la herramienta general, profundizamos en cómo se aplica y valida dicha extensión.

6. Aplicación de la herramienta en una guía

En este capítulo, profundizamos en la aplicación de nuestra herramienta que nos permite validarla. La herramienta se aplica a una guía específica, el reto 19 del currículo de 4º grado de Innovamat (la misma guía que aparece detallada en el capítulo 5) por tres expertos diferentes en educación matemática. Esta sesión fue elegida por varias razones, como describimos en el capítulo 5: en primer lugar, los autores de Innovamat identificaron esta sesión como representativa, lo que la convierte en una candidata ideal para probar la herramienta; en segundo lugar, entre los diversos tipos de sesiones del programa, el reto 19, inspirado en el tangram mínimo de Brügger (1984), destaca por ser independiente de las lecciones previas y posteriores, hecho que reduce la complejidad del análisis; en tercer lugar, la experiencia docente de los investigadores está estrechamente vinculada a los cursos de 3º y 4º grado, lo que facilita un análisis más fiable. El proceso de triangulación (Flick, 2013), en el que diferentes expertos aplican de manera independiente la herramienta a la misma guía, nos permite analizar preliminarmente la consistencia y fiabilidad de nuestra herramienta. Este análisis proporciona información sobre la aplicación práctica de nuestra herramienta y, en última instancia, arroja luz sobre el potencial de la guía para facilitar actividades matemáticas ricas con una gestión de aula efectiva.

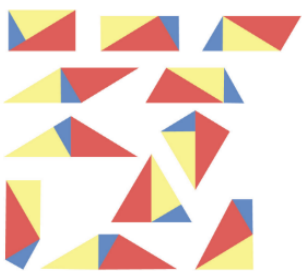
6.1. Análisis de datos y resultados

Para aplicar la herramienta a una guía, comenzamos por atomizar dicha guía en segmentos que, como hemos explicado, representan la mínima cantidad de información con significado global. Centrándonos en el citado ejemplo del currículo de 4º grado de Innovamat, si consideramos no solo la guía escrita, sino también el video introductorio de la lección (referenciado en la guía y proporcionado a los maestros a través de una plataforma digital), contamos 87 segmentos diferentes en dos páginas y un video de 3 minutos. Algunos ejemplos de segmentos ilustrativos son los siguientes (Tabla 6):

Tabla 6

Ejemplos de segmentos ilustrativos de la guía.

Segmento de la guía		Descripción breve
Imagen	Texto	
Reto 19 Polígonos convexos Un tangram particular	Reto 19 Polígonos convexos Un tangram particular	Número de reto, título y subtítulo.
O. Repartimos una hoja cuadrículada, una escuadra o cartabón y unas tijeras a cada uno.	o. Repartimos una hoja cuadrículada, una escuadra o cartabón y unas tijeras a cada uno.	Paso preparatorio sobre los materiales manipulativos.
 Es importante pintar las piezas por los 2 lados, porque el alumnado puede darles la vuelta cuando explore las posibilidades.	[Consejo] Es importante pintar las piezas por los dos lados, porque el alumnado puede darles la vuelta cuando explore las posibilidades.	Consejo para el maestro acerca de cómo colorear las piezas.
 Para dibujar la perpendicular, quizás el alumnado necesita ayuda a la hora de usar la escuadra y/o el cartabón.	[Consejo] Para dibujar la perpendicular, quizás el alumnado necesita ayuda a la hora de usar la escuadra y/o el cartabón.	Consejo para el maestro acerca de una dificultad esperada a la hora de dibujar.
1. Explicamos al alumnado que queremos construir, con las piezas del tangram que hemos construido, todos los polígonos convexos que podamos.	1. Explicamos al alumnado que queremos construir, con las piezas del tangram que hemos construido, todos los polígonos convexos que podamos.	Paso para empezar a construir polígonos convexos.
 Un polígono es convexo cuando ninguno de sus ángulos interiores supera los 180 grados. No hace falta que el alumnado mida ángulos, simplemente basta con explicarlo y estar pendientes de que todos los polígonos que surjan lo sean.	[Consejo] Un polígono es convexo cuando ninguno de sus ángulos interiores supera los 180 grados. No hace falta que el alumnado mida ángulos, simplemente basta con explicarlo y estar pendientes de que todos los polígonos que surjan lo sean.	Consejo para el maestro con la definición de «convexo» y gestión de expectativas.

 Pretendemos que, al final de la actividad, todo el mundo tenga dibujados en el cuaderno los 11 polígonos. 	[Consejo] Pretendemos que, al final de la actividad, todo el mundo tenga dibujados en el cuaderno los 11 polígonos.	Consejo con expectativas sobre las 11 soluciones.
--	--	--

Una vez que la guía se divide en segmentos, la herramienta nos permite caracterizar cada uno de ellos según nuestro marco de análisis de riqueza.

Tecnológicamente, la herramienta se implementa a través de una hoja de cálculo: cada segmento de la guía, acompañado de su imagen, forma una fila con varias celdas a completar mediante menús desplegables. Siguiendo el marco y la metodología descritos en el capítulo 5, primero identificamos el tipo de segmento: instrucción, que requiere acciones específicas por parte del docente, o información, que no solicita acciones concretas. Una vez identificado el tipo de segmento, evaluamos su principal contribución a la actividad, ya sea a la tarea o a su gestión.

Si el segmento contribuye principalmente a la tarea, evaluamos su demanda cognitiva, que puede clasificarse en reproducir, relacionar o reflexionar. También caracterizamos los procesos implicados, que pueden incluir resolución de problemas, razonamiento y prueba, conexiones, y comunicación y representación. Además, analizamos los contenidos de la tarea, considerando si son contextualizados, rigurosos y extensibles dentro de los bloques de contenido curricular (números y operaciones, espacio y forma, medida, estadística y probabilidad, o cambio y relaciones).

Si el segmento contribuye a la gestión de la actividad, evaluamos el entorno, considerando aspectos como el tiempo y la estructura, la agrupación y las normas. También valoramos las estrategias de atención a la diversidad: apoyo y ampliación.

Para facilitar la comprensión de cómo se aplica nuestra herramienta en la práctica, a continuación presentamos una selección de cuatro ejemplos específicos de la guía. Estos ejemplos, mostrados en la tabla siguiente (Tabla 7), representan una variedad de tipos de segmentos y contribuciones, y muestran cómo se caracteriza

cada segmento según nuestros criterios. Cada columna en la tabla corresponde a un segmento diferente de la guía, con las filas proporcionando detalles sobre sus aspectos.

Tabla 7

Aplicación de la herramienta a algunos segmentos ilustrativos de la guía.

Segmento	[Consejo] En caso de considerar que esta actividad puede tomar demasiado tiempo, recomendamos realizarla en algún momento antes de la sesión.	1. Explicamos al alumnado que queremos construir, con las piezas del tangram que hemos construido, todos los polígonos convexos que podamos.	[Consejo] Un polígono es convexo cuando ninguno de sus ángulos interiores supera los 180 grados. No hace falta que el alumnado mida ángulos, simplemente basta con explicarlo y estar pendientes de que todos los polígonos que surjan lo sean.
¿Informativo o instruccional?	Informativo: Proporciona orientación sobre la gestión del tiempo de la actividad.	Instruccional: Proporciona una directiva clara sobre la tarea.	Informativo: Proporciona una definición de contenido.
¿Tarea o gestión?	Gestión: Ofrece recomendaciones sobre cómo manejar el tiempo, en lugar de describir una tarea específica.	Tarea: Describe una tarea específica para que los estudiantes la realicen.	Tarea: Delimita la demanda para los estudiantes.
Tarea: Demanda cognitiva	n/d	Reflexionar: Esta tarea requiere que los estudiantes apliquen su comprensión sobre polígonos y utilicen habilidades de	Relacionar: Entender la convexidad requiere comparar ángulos.

		resolución de problemas para construirlos todos con las piezas del tangram.	
Tarea: Procesos	n/d	Resolución de problemas: Seguir una estrategia para encontrarlos todos de manera sistemática. Razonamiento y prueba: Comparar formas y encontrar patrones que faciliten la búsqueda. Conexiones: Relacionar la convexidad de los polígonos con los ángulos interiores.	Conexiones: Relacionar la convexidad de los polígonos con los ángulos interiores.
Tarea: Contenido	n/d	Contextualizado: Gracias al video. Riguroso: Cubre la convexidad de los polígonos (currículo de 4º grado en Cataluña) dentro del bloque de contenido «Espacio y forma». Extensible: Se puede conectar con conocimientos previos sobre formas y extender a propiedades y medidas geométricas.	Contextualizado: Es relevante, ya que la tarea requiere comprender la convexidad. Riguroso: Cubre la convexidad de los polígonos (currículo de 4º grado en Cataluña) dentro del bloque de contenido «Espacio y forma». Extensible: Debe conectarse con conocimientos previos sobre

			ángulos.
Gestión: Ambiente	Tiempo y estructura: Aconseja sobre cómo estructurar el tiempo de la actividad, un aspecto clave del ambiente.	n/d	n/d
Gestión: Atención a la diversidad	n/d	n/d	n/d

Para ofrecer una perspectiva más amplia de nuestro análisis, ahora que hemos profundizado en ejemplos cualitativos concretos, presentamos un resumen cuantitativo de la guía en términos de porcentajes.

Es importante señalar, sin embargo, que este resumen, aunque proporciona una visión esclarecedora sobre la distribución de los diferentes tipos de segmentos en la guía, no constituye un análisis estadístico exhaustivo. Nuestro enfoque principal en este estudio es el desarrollo conceptual de la herramienta y su aplicación práctica dentro de un contexto educativo específico. Por lo tanto, este resumen cuantitativo tiene como objetivo complementar nuestros hallazgos cualitativos al destacar patrones o tendencias en los datos (Tabla 8), sin afirmar con certeza empírica la fiabilidad y validez de la herramienta en diversos contextos. Por ejemplo, en este caso, el resumen cuantitativo nos informa acerca de que, aunque todos los procesos están presentes en la guía, los principales en esta sesión son comunicación y representación, y resolución de problemas.

Tabla 8

Análisis cuantitativo de la guía.

Aspecto del segmento	Opciones	Cantidad	Interpretación de riqueza
Tipo	Informativo	68 de 87 (78%)	Aprox. 3 segmentos informativos por cada instruccional.
	Instruccional	19 de 87 (22%)	
Contribución	Tarea	42 de 87 (48%)	Hay un equilibrio entre

	Gestión	45 de 87 (52%)	los segmentos que contribuyen a la tarea y a su gestión.
Tarea: Demanda cognitiva 13 de 42 (31%)	Reproducir	5 de 13 (38%)	Solo $\frac{1}{3}$ de los segmentos con demanda cognitiva son reproductivos (nivel inferior). Solo 1 es reflexivo (nivel superior).
	Relacionar	7 de 13 (54%)	
	Reflexionar	1 de 13 (8%)	
Tarea: Procesos 18 de 42 (43%)	• Resolución de problemas	6 de 18 (33%)	Los 4 procesos están explícitamente involucrados.
	• Razonamiento y prueba	2 de 18 (11%)	
	• Conexiones	1 de 18 (6%)	
	• Comunicación y representación	9 de 18 (50%)	
Tarea: Contenido 26 de 42 (62%)	Contextualizado	26 de 26 (100%)	Todos los segmentos de contenido son apropiados. Evidencian que esta sesión trata sobre geometría y medida.
	Riguroso	26 de 26 (100%)	
	Extensible	26 de 26 (100%)	
	• Números y operaciones	0 de 26 (0%)	
	• Espacio y forma	19 de 26 (73%)	
	• Medida	6 de 26 (23%)	
	• Estadística y probabilidad	0 de 26 (0%)	
	• Relaciones y cambio	1 de 26 (4%)	
Gestión: Ambiente 42 de 45 (93%)	Tiempo y estructura	38 de 42 (91%)	La mayoría de los segmentos de gestión son estructurales. Esto parece desequilibrado, pero podemos encontrar una explicación en el proceso de segmentación:

			consideramos cada ícono o título de sección (que dan estructura a la guía) como un segmento.
	Agrupación	3 de 42 (7%)	Solo hay 3 porque solo hay 3 momentos a lo largo de la sesión en los que se establece o cambia el agrupamiento.
	Reglas	1 de 42 (2%)	Hay una falta de segmentos explícitos que guíen al docente a la hora de fomentar la motivación a través de directrices de participación.
Gestión: Atención a la diversidad 3 de 45 (7%)	Soporte	3 de 3 (100%)	Todos los segmentos de atención a la diversidad se refieren a estrategias de apoyo.
	Extensión	0 de 3 (0%)	Hay una falta de segmentos explícitos que guíen al docente sobre cómo retar a los estudiantes más talentosos.

El proceso de triangulación realizado por los tres expertos en educación matemática arrojó un alto grado de consenso, con acuerdo total en 80 de los 87 segmentos, lo que representa casi el 90% de los segmentos. Los siete segmentos restantes presentaron algunas discrepancias que pueden clasificarse en tres cuestiones:

1. Cómo etiquetar segmentos que parecen contribuir tanto a la tarea como a su gestión a la vez.
2. Cómo etiquetar segmentos que pueden tener diferentes niveles de demanda cognitiva.
3. Cómo etiquetar segmentos que implican más de un proceso, más de un contenido, o incluso ambos.

Como se describe a continuación, las discrepancias se abordaron a través de discusión hasta alcanzar un consenso, lo que contribuyó a la mejora de la herramienta y derivó en su versión «final».

6.2. Discusión

Esta sección describe cómo las discusiones sobre las discrepancias durante el proceso de triangulación nos llevaron a la versión final de la herramienta y la propuesta de mejora de la guía.

Una de estas discrepancias surgió con segmentos que parecían contribuir tanto a la tarea como a su gestión. Por ejemplo, el segmento «Repartimos una hoja cuadriculada, una escuadra o cartabón y unas tijeras a cada uno» generó debate. Un investigador argumentó que este segmento definía las condiciones iniciales manipulativas para la tarea, mientras que los otros dos investigadores consideraron que el uso de manipulativos era más un tema de gestión. Esta discusión llevó a considerar la inclusión de una opción de «uso de manipulativos» dentro del «ambiente». Sin embargo, para evitar la implicación de que el uso de manipulativos es una condición imprescindible para la riqueza, acordamos incluir este uso dentro del aspecto de «tiempo y estructura». Además, se acordó que un segmento puede contribuir tanto a la tarea como a su gestión, pero que en estos casos nos centraríamos en su contribución principal.

Un problema similar surgió con la demanda cognitiva. Algunos segmentos de tarea pueden tener una demanda cognitiva que no se ajusta completamente a un único nivel, especialmente si se tienen en cuenta las habilidades variables entre los estudiantes de un grupo. Por ejemplo, el segmento «Pedimos a los estudiantes que escriban en el cuaderno los nombres de cada uno de los polígonos que hemos dibujado», podría considerarse simplemente «reproductivo» si los estudiantes ya conocen los nombres, o «relacional» si tienen que conectar las ideas de las pistas de la actividad previa. A partir de reconocer esta complejidad, acordamos categorizar la demanda cognitiva considerando el currículo oficial y las habilidades esperadas para estudiantes medios en el grado correspondiente.

Por último, surgieron discusiones interesantes sobre si una tarea puede involucrar más de un proceso, más de un contenido, o incluso ambos. Esto condujo a

un cambio significativo en la herramienta. Inicialmente, solo permitía seleccionar un proceso o un contenido para cada segmento contribuyente a la tarea. Sin embargo, esta discusión destacó que la riqueza desde una perspectiva basada en competencias radica precisamente en la interrelación de múltiples contenidos y procesos. Por lo tanto, limitar las opciones parecía contraproducente. Como resultado, la versión actual de la herramienta permite la caracterización de un segmento con múltiples procesos y contenidos simultáneamente, para capturar mejor la compleja riqueza de las tareas.

Cuando aplicamos nuestra herramienta a la guía de un reto de Innovamat, confirmamos que la riqueza no es un atributo binario (es decir, rica o no rica), sino un proceso continuo de mejora (es decir, enriquecimiento). La herramienta actúa como unas gafas que identifican áreas específicas en las que la película (es decir, la guía) es más rica y áreas en las que podría enriquecerse aún más.

Nuestro análisis, que combina datos cuantitativos con comentarios cualitativos para cada segmento, revela que la guía analizada incluye varios rasgos clave de riqueza: entrelaza de manera efectiva contenido y procesos, exige un nivel medio-alto de demanda cognitiva y proporciona consejos explícitos de gestión, logrando un equilibrio entre tarea y gestión. Sin embargo, también encontramos áreas de mejora potenciales. Los consejos de gestión, aunque útiles, están muy centrados en la estructura de la guía. Esto se debe, en parte, a nuestro proceso de segmentación, que trata cada ícono o título de sección como un segmento separado, pero esta guía podría beneficiarse de directrices más explícitas sobre cómo fomentar la motivación e identidad matemática de los estudiantes a través de la conversación y también sobre cómo atender mejor la diversidad, con demandas simplificadas para los alumnos con alguna dificultad y, sobre todo, demandas más desafiantes para los estudiantes avanzados. Desde nuestra perspectiva, abordar estas áreas tendría el potencial de mejorar la riqueza de esta guía en particular.

A continuación, sugerimos algunas propuestas específicas de mejora para las tres áreas (Tabla 9):

Tabla 9

Aspectos mejorables y consiguientes propuestas de enriquecimiento.

Aspecto mejorable	Propuestas de enriquecimiento
Gestión: conversación, motivación e identidad	Antes de pedir que construyan el tangram, planteamos una conversación alrededor de la pregunta «¿Qué observas?», para fomentar el uso del vocabulario geométrico: rectángulo formado por tres triángulos rectángulos, diagonal, perpendicular, ángulo recto, etc.
	Antes de pedir que busquen polígonos convexos, preguntamos si alguien sabe qué significa «convexo».
	A la hora de nombrar y etiquetar los polígonos con el perímetro, podemos organizar un juego inspirado en el «¿Quién es quién?» por parejas, para que practiquen los nombres de las figuras mientras las investigan. Por turnos, los alumnos pueden preguntar «¿Es un cuadrilátero?», «¿tiene un perímetro mayor que 20 cm?», etc. hasta adivinar en qué figura está pensando el compañero.
Gestión: atención a la diversidad (soporte)	Si un alumno muestra dificultades para dibujar y/o recortar el rectángulo, podemos darle uno ya construido para centrar el tiempo en la búsqueda de polígonos convexos.
	De forma parecida, si anticipamos que habrá alumnos con dificultades para dibujar y/o calcar las soluciones en el cuaderno, podemos agruparlos en parejas o en grupos de tres para que se ayuden mutuamente. Incluso se puede cambiar la directriz de dibujar por la de tomar fotos de las soluciones para eliminar dicha dificultad.
	Si contamos con alumnos que desconocen el vocabulario geométrico necesario para la actividad, podemos proporcionar alguna referencia en forma de dibujo o póster que les ayude a relacionar la palabra con la imagen, así como ayudarlos a la hora de comprobar la convexidad de una solución.
Gestión: atención a la diversidad (ampliación)	Los alumnos más avanzados pueden prescindir de las pistas 2 y 3 en la búsqueda de soluciones.
	A la hora de encontrar los perímetros de los polígonos, ponemos la restricción de solamente tomar nueve medidas. De este modo, esperamos fomentar la estrategia descrita en el último consejo de la página.

	Podemos sugerir a los alumnos más avanzados que creen su propio juego de tangram de tres piezas y lleven a cabo una investigación parecida sobre los polígonos convexos que se pueden construir con su propuesta.
--	---

En cualquier caso, más allá de la discusión sobre el acierto de estas propuestas, el hecho de que la aplicación de la herramienta permita descubrir áreas de mejora para enriquecer la guía, en sí mismo, evidencia la utilidad y fiabilidad de la herramienta. Obviamente, si eventualmente se itera la guía para enriquecerla, sería interesante volver a aplicar la herramienta y observar cómo evoluciona el análisis, como explicamos en el capítulo 8.

7. Aplicación de la herramienta extendida: conexiones

En este capítulo, de manera análoga al capítulo anterior, nos centramos en la aplicación de la herramienta extendida descrita en el capítulo 5 para profundizar en las conexiones. Los mismos tres expertos en educación matemática, ya familiarizados con la herramienta inicial, aplicaron de forma independiente el marco extendido a la misma guía didáctica (el reto 19 de 4º de primaria de Innovamat), en busca de conexiones. Este proceso de triangulación (Flick, 2013), en el que tres expertos examinan la misma guía utilizando la herramienta extendida, nos permitió analizar la consistencia y fiabilidad de la herramienta a la hora de identificar conexiones matemáticas específicas. Este análisis ofrece una mejor perspectiva sobre la eficacia con la que la guía fomenta conexiones matemáticas significativas y, a su vez, sirve para obtener una validación inicial sobre la utilidad práctica de la herramienta en la detección de oportunidades para explicitar mejor las conexiones.

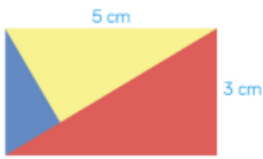
7.1. Análisis de datos y resultados

Para entender el proceso de análisis desde su concepción, es importante tener en cuenta que se pidió a los tres expertos que se centraran únicamente en aquellas conexiones relevantes para 4º de primaria. Por ejemplo, aunque la conexión entre el numeral 5 y un grupo de cinco objetos es altamente relevante en educación infantil, puede considerarse irrelevante en 4º de primaria debido a su obviedad. Con esta consideración en mente, los tres expertos revisaron los 87 segmentos que componen la guía didáctica del ya conocido reto 19 e identificaron todas las posibles conexiones según las categorías y tipos definidos en el marco teórico.

Al final del proceso de triangulación, se identificaron un total de 13 conexiones matemáticas diferentes en la guía didáctica, las cuales se categorizaron de la siguiente manera (Tabla 10):

Tabla 10

Caracterización de las 13 conexiones encontradas en la guía didáctica analizada.

Segmento(s)	Categorías y tipos de conexiones
[Bloques de contenido] Espacio y forma – Medida – Relaciones y cambio	CC - Características (1) De manera muy preliminar, los bloques de contenido marcados ayudan a guiar al docente en la identificación del contenido que aparece en la sesión, lo que puede fomentar conexiones entre conceptos de espacio y forma (C) y medida (C) que comparten características similares, como el concepto de perímetro. O entre espacio y forma (C) y relaciones y cambio (C), como los patrones o características comunes de las formas encontradas.
A lo largo del vídeo: • Seguimos las instrucciones para construir, cada uno, su propio tangram. 	RR - Características (2) La creación del tangram en papel requiere reconocer un dibujo del mismo en la pantalla (R) y conectar esta representación con la representación en papel (R).
	CP - Significado (3) El tangram requiere trazar una perpendicular. Los alumnos necesitan comprender el concepto de perpendicularidad (C) y conectarlo con el procedimiento de trazarla en papel (P), mediante una escuadra o un cartabón.
[Consejo] Es importante pintar las piezas por los 2 lados, porque el alumnado puede darles la vuelta cuando explore las posibilidades.	CP - Características (4) Pedir a los estudiantes que coloreen ambos lados sienta las bases para la conexión entre el procedimiento de voltear una figura bidimensional (P) y el concepto de simetría (C) mientras exploran posibilidades.
1. Explicamos al alumnado que queremos construir, con las piezas del tangram que hemos construido, todos los polígonos convexos que podamos. [Consejo] Un polígono es	CP - Significado (5) Los estudiantes necesitan conectar la definición de convexidad (C) con un procedimiento para verificar la convexidad (P) mientras exploran posibilidades.

convexo cuando ninguno de sus ángulos interiores supera los 180 grados. No hace falta que el alumnado mida ángulos, simplemente basta con explicarlo y estar pendientes de que todos los polígonos que surjan lo sean.	
3. Vamos dando pistas progresivamente a lo largo de la actividad, como: Pista 1: Debéis encontrar 2 rectángulos, 2 triángulos, 2 paralelogramos, 3 trapecios, 1 cometa, y 1 pentágono. En total, 11 polígonos.	CP - Significado (6) Usar la primera pista requiere conectar los conceptos geométricos listados como palabras (C) con el procedimiento para construir dichas figuras con las piezas del tangram (P).
Pista 2: Proyectamos el Recurso 19.1, donde están las sombras de los 11 polígonos.	RR - Características (7) Usar la segunda pista requiere conectar las figuras representadas como sombras (R) con la representación física de cada solución formada por las piezas (R).
Pista 3: Proyectamos el Recurso 19.2, donde están las soluciones.	RR - Características (8) Usar la tercera pista requiere conectar las figuras representadas con piezas en la pantalla (R) con la representación física de cada solución formada por las piezas (R).
2. Pedimos que midan el perímetro de algunos de los polígonos con la escuadra o el cartabón y lo escriban al lado, en el cuaderno.	CP - Significado (9) Los alumnos necesitan conectar el concepto de perímetro (C) con el procedimiento para encontrarlo (P) midiendo los lados y sumándolos.
3. Hacemos una puesta en común para descubrir que algunos polígonos tienen el mismo perímetro que otros y para hacer surgir las estrategias que han usado para medir y/o calcular los perímetros.	CC - Implicación (10) La conexión entre el concepto de perímetro (C) y el concepto de área (C) a menudo se malinterpreta, ya que los estudiantes tienden a pensar que cuando dos figuras tienen el mismo perímetro, esto implica que deben tener la misma área y viceversa.
[Consejo] Pretendemos que el alumnado entienda que no hacía falta medir todos los	CC - Características (11) Los alumnos necesitan conectar el concepto de

lados del polígono, que bastaba con saber las medidas de los lados de los triángulos y sumar centímetros con centímetros y milímetros con milímetros. Podemos aprovechar para explicar que 10 milímetros son 1 centímetro.	centímetro (C) y el concepto de milímetro (C) a través de su equivalencia ($1\text{ cm} = 10\text{ mm}$).
	PP - Implicación (12) El procedimiento de medir la longitud de los lados de los tres triángulos que componen el tangram (P) implica conocer el perímetro de cualquier figura formada por dichos triángulos sin necesidad de realizar otras mediciones (P).
	PP - Características (13) Los estudiantes de 4º no están familiarizados con los números decimales, pero pueden conectar el procedimiento para operar con números decimales (P) con el procedimiento para operar con números naturales (P) al usar las características comunes de ambos en el contexto de la medida (por ejemplo, $1,3\text{ cm} + 2,5\text{ cm}$ es equivalente a $1\text{ cm} + 2\text{ cm} + 3\text{ mm} + 5\text{ mm}$).

Es importante recordar que, con la herramienta inicial, se detectó únicamente un segmento relevante desde el punto de vista de las conexiones. Por lo tanto, la versión extendida parece ser mucho más sensible a dicho proceso. Para ilustrarlo, podemos recuperar cómo estaban categorizados los segmentos de la tabla anterior cuando se aplicó la herramienta inicial, y compararlo con la nueva categorización. Enseguida observamos que la herramienta inicial situaba muchos de estos segmentos en otros procesos más predominantes. Por ejemplo, el segmento «Seguimos las instrucciones para construir, cada uno, su propio tangram» estaba categorizado como comunicación y representación, porque se entendía que el alumnado debe poner en juego su comprensión de una representación que aparece en pantalla. De la misma manera, los segmentos sobre las pistas que se dan al alumnado mientras busca polígonos también se consideraban de comunicación y representación. El segmento sobre pintar las piezas por ambos lados se consideraba de resolución de problemas porque contribuye a la estrategia de búsqueda de soluciones. Algo parecido ocurre con el segmento sobre la convexidad de los polígonos, que se consideraba clave para la estrategia de resolución en busca de soluciones, o con el segmento sobre la estrategia de medir solamente los lados de los triángulos, que eficiente mucho la búsqueda de los perímetros.

Todos ellos ahora, con la mirada centrada en las conexiones y nuestra sensibilidad más entrenada por el marco teórico, se categorizan diferente. Esto no invalida la herramienta inicial; de hecho, refuerza la idea de que los procesos matemáticos no son compartimentos estancos, sino que en la práctica interactúan y se entrelazan, como ya discutimos en nuestra concepción de riqueza en el marco teórico. En este sentido, el análisis inicial, aunque menos sensible a las conexiones, ya lograba identificar la riqueza de estos segmentos en términos de procesos matemáticos. La herramienta extendida afina la mirada hacia las conexiones y permite visibilizar con mayor claridad las relaciones implícitas entre conceptos, procedimientos y representaciones. Este avance ilustra cómo una sensibilidad más específica no reemplaza una visión más amplia, sino que la enriquece y la profundiza, para permitirnos detectar nuevos matices en la riqueza competencial de los materiales analizados.

7.2. Discusión

El proceso de triangulación destacó con éxito áreas donde el marco teórico y la herramienta extendida requerían mejoras. Si bien el análisis inicial reveló de nuevo un alto nivel de consenso entre los tres expertos, surgieron ciertas inconsistencias que señalaron aspectos que requerían ajustes adicionales. En particular, se hizo evidente la necesidad de diferenciar entre categorías y tipos de conexiones, lo que subrayó la importancia de clarificar estos conceptos dentro del marco teórico. Además, la inclusión de tipos de conexión previamente pasados por alto, como el de «significado», resultó esencial para capturar la complejidad de una guía didáctica, como se describe a continuación:

- **Distinción entre categoría y tipo:** En la versión original del marco teórico, siguiendo la ETC, no se distinguía entre «categoría» y «tipo» de conexión. Sin embargo, a través de este análisis, quedó claro que tal distinción era necesaria para capturar adecuadamente la complejidad de las conexiones en una guía didáctica. Comprender la naturaleza bidireccional de las conexiones (por ejemplo, una conexión PR es equivalente a una RP) ayudó a clarificar que ciertas categorías, una vez identificadas, no necesitaban ser etiquetadas repetidamente. Esto llevó a la categorización de conexiones en seis grupos

distintos, como se describe en el apartado 5.2, cada uno ilustrando una relación específica entre ideas. Refinar las categorías permitió eliminar ambigüedades y mejorar la precisión de nuestro análisis. La incorporación de esta distinción entre categoría y tipo, por lo tanto, es fundamental para la consolidación del marco y la herramienta extendida.

- Observabilidad del tipo «significado»: Inicialmente, las conexiones del tipo «significado» estaban agrupadas dentro de «otras conexiones», ya que, debido a su enfoque en la comprensión del alumno, asumimos que serían difíciles de observar en las guías didácticas. Sin embargo, durante el análisis, ciertos segmentos revelaron oportunidades para que surgieran conexiones basadas en significado. Por ejemplo, en el segmento donde los estudiantes usan las piezas del tangram para construir los polígonos convexos, se les exige conectar el significado de «convexidad» con un procedimiento práctico para identificar dicha propiedad en un polígono. Esto resaltó la necesidad de tratar «significado» como un tipo de conexión distinto.
- «Parte-todo» relegado a «otras conexiones»: En la lista original de tipos, se consideraban las conexiones «parte-todo» como un tipo independiente y principal. Sin embargo, durante el primer análisis no se encontraron ejemplos de este tipo en la guía. Aunque podemos imaginar ejemplos de este tipo de conexión en sesiones donde se descubren propiedades y patrones, parece claro que es un tipo más relevante en la educación secundaria que en primaria. Por ello, decidimos reducir su prominencia sin eliminarlo del todo, y lo incluimos dentro del tipo «otras conexiones».

Estos refinamientos resultaron en una versión más sólida del marco y la herramienta extendida, capaz de identificar una gama más amplia de conexiones matemáticas en una guía didáctica, tanto en términos de categoría como de tipo. Conviene enfatizar que no es necesario que todas las categorías y tipos de conexiones estén presentes en una guía para que esta sea considerada rica desde una perspectiva competencial. El objetivo del marco no es clasificar guías como «ricas» o «no ricas» en conexiones, sino actuar como una lente que identifique áreas específicas donde la guía fomenta conexiones matemáticas relevantes y donde hay oportunidades para un mayor enriquecimiento en este aspecto.

Además de permitirnos analizar y categorizar conexiones dentro de guías didácticas, el marco ofrece a diseñadores curriculares, como los de Innovamat, una base para hacer que estas conexiones sean más explícitas en sus recursos. Al usar la herramienta y su marco extendido, los diseñadores pueden identificar dónde están presentes las conexiones y asegurarse de explicitarlas en las guías. También pueden añadir consejos prácticos para docentes que les ayuden a identificar y abordar mejor estas conexiones en sus aulas.

De manera análoga a lo que hemos hecho en apartado 6.2 con las propuestas de mejora generales, a continuación sugerimos propuestas específicas de mejora desde la perspectiva de las conexiones (Tabla 11, entre paréntesis, el número de conexión referido en la Tabla 10):

Tabla 11

Aspectos mejorables y consiguientes propuestas de enriquecimiento desde la perspectiva de las conexiones.

Aspecto mejorable	Propuestas de enriquecimiento
La mayoría de las conexiones detectadas no están identificadas como tales en la guía.	Marcar con un icono o un comentario todas las conexiones de manera explícita.
Las conexiones entre bloques de contenido (1) no están justificadas.	Explicitar, para el maestro, las conexiones entre conceptos de «espacio y forma» y «medida» que comparten características similares, como el concepto de perímetro. O entre «espacio y forma» y «relaciones y cambio», como los patrones o características comunes de las formas encontradas.
La conexión entre pintar las piezas por ambos lados del papel y la exploración de soluciones simétricas (4) puede pasar desapercibida para muchos alumnos.	Añadir un consejo para que el maestro sea más explícito: «Recordamos a los alumnos que las piezas están pintadas por ambos lados del papel para fomentar la conexión con la simetría que les permitirá encontrar nuevas soluciones».
La conexión entre el concepto de convexidad y el procedimiento para verificarla (5) puede ser una dificultad para los alumnos no familiarizados con	Ofrecer algún ejemplo y contraejemplo de convexidad como referencia, así como alguna pista visual informal, por ejemplo: «los convexos son los que no

el concepto.	tienen <i>partes entradas</i> »; o formal, por ejemplo: «los convexos son los que tienen todas diagonales interiores».
Las conexiones entre las pistas y las soluciones (6, 7 y 8) pueden suponer un reto para los alumnos no familiarizados con el vocabulario geométrico necesario.	Ofrecer una cuarta pista para los alumnos con dificultades de lenguaje que incluya las soluciones con los nombres de las figuras.
La conexión entre el concepto de perímetro y el concepto de área (10), a menudo malinterpretada, no se explora para desmentirla.	Añadir un consejo para que el maestro guíe una conversación alrededor de esta esperada interpretación errónea, ya que los estudiantes tienden a pensar que cuando dos figuras tienen el mismo perímetro, esto implica que deben tener la misma área y viceversa.

Otro punto a considerar es que la mayoría de los ejemplos del marco ETC original provienen de la educación secundaria, lo que hace que la aplicación de esta herramienta en la educación primaria sea tanto novedosa como significativa. La adaptación del marco para incluir el nivel de primaria aumenta su relevancia en la investigación sobre conexiones para las primeras etapas de la educación matemática.

En cualquier caso, en la educación matemática basada en competencias, los entornos que promueven la resolución de problemas han sido considerados esenciales para fomentar un aprendizaje más profundo. Franke y Carey (1997), por ejemplo, describen estos entornos como espacios donde los estudiantes se involucran activamente con ideas matemáticas para adquirir una comprensión más profunda de los conceptos a través de la exploración y la discusión. Dado el papel igualmente crucial de las conexiones matemáticas, proponemos la promoción de un llamado «entorno de conexiones» que dialogue de tú a tú con los «entornos de resolución de problemas». Un entorno de conexiones enfatizaría la identificación y el fomento activo de vínculos entre conceptos, procedimientos y representaciones matemáticas para integrarlos en las prácticas del aula. Este enfoque refleja el énfasis en la capacidad de los estudiantes para ver las matemáticas como una red interconectada de ideas.

8. Limitaciones e investigaciones futuras

A lo largo de los capítulos anteriores, hemos profundizado en la riqueza matemática desde una perspectiva competencial, con especial atención a las conexiones, a partir de un marco teórico *ad hoc*, y hemos desarrollado una herramienta modular que permite caracterizar dicha riqueza competencial con el objetivo de detectar oportunidades para enriquecer guías didácticas y mejorar su diseño. Sin embargo, como en toda investigación, es importante reconocer las limitaciones inherentes al diseño, implementación y alcance de nuestro trabajo. Estas limitaciones no solo contextualizan los resultados obtenidos, sino que también señalan oportunidades para futuras investigaciones y refinamientos.

Los hallazgos obtenidos a partir de sendos procesos de triangulación sugieren que la herramienta desarrollada y su extensión funcionan de manera fiable dentro de la guía de la sesión específica que analizamos. Esta robustez indica que nuestra herramienta tiene potencial para aplicaciones más amplias, lo que la convierte en un recurso valioso para investigadores, docentes y, sobre todo, diseñadores curriculares en el análisis y enriquecimiento de sus documentos didácticos. Sin embargo, reconocemos diversas limitaciones en nuestro estudio.

La primera es la ausencia de un análisis estadístico sólido y de una evaluación psicométrica de la herramienta y su extensión. Si bien nuestro enfoque principal fue el desarrollo conceptual de la herramienta a partir del marco teórico y su aplicación práctica en un contexto educativo específico, la falta de validación estadística detallada implica que no hemos cuantificado las propiedades psicométricas de la herramienta, como su fiabilidad y validez en diferentes contextos. Esta omisión limita nuestra capacidad para afirmar con certeza empírica la aplicabilidad y efectividad universal de la herramienta. Las investigaciones futuras deberían incluir un examen estadístico exhaustivo y pruebas psicométricas para establecer la robustez de la herramienta y garantizar su utilidad y fiabilidad en una gama más amplia de entornos educativos. Esto permitiría, además, identificar posibles ajustes necesarios en su diseño para mejorar su consistencia y aplicabilidad.

Otra limitación es que nuestro estudio aplicó la herramienta y su extensión a una sola guía, lo que no despeja las dudas sobre su adaptabilidad y eficacia en diferentes tipos de guías o materiales educativos con estructuras y contenidos

variados. Aunque la herramienta demostró ser eficaz en el contexto específico de interés para la tesis industrial (es decir, Innovamat), su desempeño en diferentes niveles educativos o contextos sigue sin probarse. Futuras investigaciones deberían explorar la aplicación de la herramienta a una variedad diversa de guías (de diferentes autores curriculares, de diferentes cursos o etapas escolares, etc.) para evaluar rigurosamente su versatilidad y realizar los ajustes necesarios para una usabilidad más amplia.

Además, nuestro análisis trató la guía como un documento estático y no extendió el estudio a su aplicación práctica en el aula. No examinamos cómo los docentes interpretan y utilizan la guía en tiempo real, ni cómo sus características individuales, como el Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT), las habilidades pedagógicas o las capacidades de gestión del aula, influyen en la implementación y efectividad de la guía. Este análisis podría, además, incluir un enfoque longitudinal que estudie el impacto de las guías enriquecidas en el desarrollo de competencias matemáticas en los estudiantes a lo largo del tiempo.

Por último, el marco que utilizamos para definir la riqueza en las actividades educativas podría ampliarse. Nuestro análisis se centró principalmente en ciertos aspectos clave, pero existen otras dimensiones que podrían contribuir significativamente al concepto de riqueza en educación matemática. La resolución de problemas, el razonamiento y prueba, o la comunicación y representación son procesos igualmente fundamentales que merecen una extensión modular similar a la que hemos desarrollado para las conexiones. La exploración de estas dimensiones permitiría validar la modularidad de la herramienta y ampliarla para cubrir otras características clave de la competencia matemática desde una perspectiva más integral. Otros aspectos que se podrían explorar incluyen la naturaleza de la evaluación de las actividades, que debería ser sensible con nuestra concepción de riqueza, o el campo emergente de las habilidades socioemocionales en matemáticas (OCDE, 2017b). Ampliar el alcance de nuestra herramienta para incorporar estos aspectos adicionales creemos que sin duda mejoraría nuestra comprensión de riqueza desde una perspectiva basada en competencias.

En conclusión, aunque esta investigación se centra en diseñar, validar y aplicar una herramienta para enriquecer competencialmente guías didácticas para primaria con énfasis en las conexiones, su enfoque y resultados abren la puerta a

futuros estudios que podrían extender y validar la herramienta en otros contextos, niveles educativos y dimensiones de riqueza. A medida que estas líneas de investigación se exploren, es fundamental seguir evaluando el impacto de las guías enriquecidas en aulas reales, para observar cómo pueden contribuir al desarrollo de una comprensión de las matemáticas más profunda y conectada.

9. Conclusiones

Si has llegado hasta aquí, querido lector, significa que las preguntas de investigación despertaron tu interés. Si has leído todos los capítulos de la tesis, te lo agradezco, probablemente seas capaz de anticipar la mayoría de nuestras conclusiones, ya que muchas han emergido de manera natural a lo largo del texto. Si, por el contrario, has decidido saltar directamente a este capítulo en busca de un resumen que te ahorre lectura y te presente los resultados más relevantes de la tesis, bienvenido también. En cualquier caso, vamos a revisar uno por uno los objetivos de la investigación (detallados en el capítulo 2) para tratar de alcanzar conclusiones destacables para cada uno.

Dado el papel fundamental de los recursos y documentos en la configuración de las experiencias de aprendizaje en educación, existen numerosas investigaciones dedicadas a explorar su impacto (Trouche et al., 2018). Las guías didácticas, en particular, actúan como un vínculo crucial entre el diseño curricular y la implementación en el aula, y tienen el potencial de influir significativamente en el desempeño docente, ya que sirven tanto como herramienta operativa para implementar actividades como recurso para el desarrollo profesional continuo. A pesar de la extensa literatura sobre libros de texto (Gueudet et al., 2013), encontramos una notable brecha en la investigación respecto al análisis de las guías didácticas desde una perspectiva basada en competencias. Nuestro estudio, por lo tanto, ha buscado cerrar esta brecha y ofrecer una perspectiva sobre el análisis y enriquecimiento de guías didácticas de matemáticas en primaria, desde una perspectiva basada en competencias. En este marco, nuestra investigación ha abordado cuestiones clave sobre el concepto de riqueza competencial, la naturaleza de las guías didácticas, y el papel de las conexiones matemáticas como un elemento fundamental del diseño curricular.

Como objetivo previo, sin embargo, dada la naturaleza aplicada de la tesis, era necesario dedicar esfuerzos de la investigación a contextualizar los principios didácticos que sustentan el diseño curricular de Innovamat. Por ello, en el capítulo 3 hemos profundizado en estos principios, con especial atención a aquellos que aportan más valor al marco conceptual de nuestra investigación. Cabe mencionar que una primera versión de estos principios fue publicada, como producto de la presente

tesis, en forma de artículo de divulgación (Vilalta, 2021). Además, como resultado secundario de interés industrial, los principios constituyen ahora el núcleo del llamado «Libro blanco de Innovamat», un documento (descrito en el apartado 3.3) que se ha consolidado como una herramienta clave para la compañía. El «Libro blanco» se utiliza como herramienta formativa para las nuevas incorporaciones al equipo, especialmente en el área didáctica, y facilita su alineación con los principios que guían la propuesta de Innovamat. Además, actúa como referencia para responder dudas frecuentes de maestros y familias. También sirve como un recurso central para estructurar el discurso de ventas y diseñar campañas de marketing y difusión, de manera que la visión de Innovamat esté respaldada por una narrativa coherente y basada en evidencias. Desde una perspectiva más estratégica, el «Libro blanco» funciona como una herramienta estructural viva que ofrece acceso directo a las evidencias y autores de referencia que sustentan la visión de Innovamat, y permite al equipo interno profundizar en temas específicos y mejorarlo de acuerdo con la evolución de la investigación en didáctica de las matemáticas. Finalmente, su contenido ha sido diseñado para cumplir con estándares de evidencia de tipo «tier 4». Este término, ampliamente utilizado en investigaciones educativas y en el diseño curricular en Estados Unidos, hace referencia a evidencias sólidas que cumplen con los criterios establecidos por el *Every Student Succeeds Act* (ESSA) del Departamento de Educación de los Estados Unidos (*U.S. Dept. of Education*, 2015). En resumen, el «Libro blanco» no solo sintetiza los principios didácticos que guían la propuesta de Innovamat, sino que también se ha convertido en una herramienta versátil y estratégica que impacta de manera directa en la formación, la comunicación y la creación de recursos en la empresa.

Una vez abordados los principios didácticos de Innovamat, la tesis pudo centrarse en los objetivos principales.

En primer lugar, para responder cómo definimos una guía didáctica y en qué se diferencia de un libro de texto, partimos del Enfoque Documental de la Didáctica (DAD) definido por Trouche et al. (2018). Así, definimos las guías didácticas como documentos, en contraste con los libros de texto tradicionales, que suelen clasificarse como recursos. Esta distinción es crucial, ya que las guías integran no solo tareas, sino también estrategias de gestión que orientan a los docentes en la implementación de las propuestas que han pensado los diseñadores del programa. Analizando las

guías desde una perspectiva basada en competencias, exploramos su potencial riqueza en términos de contenido, procesos, competencias y gestión del aula, aspectos que suelen pasarse por alto en el análisis tradicional de los libros de texto. Este enfoque nos permite evaluar la calidad intrínseca de una guía como documento, considerando sus aspectos matemáticos y didácticos, y amplía, como decíamos, nuestra comprensión de las guías como herramientas tanto operativas como formativas, diseñadas para apoyar a los docentes en su práctica diaria y en su desarrollo profesional continuo.

En segundo lugar, para responder qué entendemos por riqueza competencial de una actividad en matemáticas, hemos explorado e integrado diversos marcos teóricos. Así, hemos definido la riqueza competencial de una guía formada por actividades como un conjunto de características que promueven el desarrollo integral de la competencia matemática. El concepto de «actividades matemáticas ricas» está en el centro de nuestro marco, visto desde una perspectiva basada en competencias que deriva de la definición de competencia matemática de Niss y Højgaard (2019), la caracterización de clases poderosas de Schoenfeld (2016) y el trabajo de De Lange (1999) sobre los niveles competenciales, entre muchos otros. Además, nuestra exploración sobre las características de una actividad matemática rica nos ha llevado a la formulación de un marco que incorpora componentes clave: la promoción de los procesos matemáticos, la contextualización, rigurosidad y extensión del contenido, la demanda cognitiva de las tareas, la instrucción diferenciada y la creación de un entorno de aprendizaje comprometido y autónomo. Nuestro marco ofrece una perspectiva holística sobre la evaluación y mejora de las guías, contribuyendo al discurso en curso sobre el diseño de guías matemáticas y proporcionando a educadores y diseñadores curriculares una herramienta sólida para enriquecer sus guías.

En tercer lugar, el desarrollo y la validación de una herramienta para analizar la riqueza competencial de las guías constituye una de las principales contribuciones de este estudio. La herramienta inicial se centra en categorizar los segmentos de una guía según su contribución a los componentes de riqueza competencial general. La herramienta fue probada y mejorada mediante un proceso de triangulación con tres expertos en educación matemática. Estas discusiones llevaron a cambios significativos, como permitir la caracterización de un segmento con múltiples

procesos y contenidos simultáneamente, capturando mejor así la compleja riqueza de las tareas. La aplicación de la herramienta a una guía específica de Innovamat reveló que la guía analizada exhibe rasgos de riqueza, pero también destacó áreas que podrían enriquecerse aún más. Esto no solo evidencia la efectividad de nuestra herramienta en la caracterización de la riqueza, sino que también resalta su utilidad al sugerir áreas de mejora. Este hallazgo presentó una oportunidad valiosa para refinar la guía en aspectos específicos, como hemos visto en la Tabla 9 (apartado 6.2) y la Tabla 11 (apartado 7.2).

En cuarto lugar, mostramos como la herramienta se puede extender de manera modular para poner el foco en un aspecto de riqueza específico. En nuestro caso, elegimos el proceso de conexiones. La idea de fomentar conexiones en matemáticas no es nueva. Las investigaciones han demostrado, como detallamos en el marco teórico, que los enfoques de enseñanza efectivos enfatizan una red rica de conexiones matemáticas. Esta extensión, basada en nuestra adaptación de la Teoría Extendida de Conexiones (ETC), introduce una distinción clara entre categorías y tipos de conexiones, lo que facilita una caracterización más precisa y exhaustiva de los vínculos entre conceptos, procedimientos y representaciones en una guía didáctica para primaria. La herramienta extendida mostró una notable mejora en la sensibilidad para detectar conexiones dentro de las guías didácticas. Mientras que la herramienta inicial identificó solo un segmento relevante desde el punto de vista de las conexiones, la versión ampliada permitió identificar 13 conexiones explícitas, distribuidas entre las categorías y tipos definidos en el marco teórico. Este incremento en la detección no solo resalta la efectividad de la herramienta extendida, sino que también evidencia cómo un marco más refinado permite identificar matices que anteriormente pasaban desapercibidos. Cabe destacar que, aunque la herramienta inicial era menos sensible a las conexiones, todos los segmentos ya estaban categorizados dentro de los procesos matemáticos, como comunicación y representación, o resolución de problemas. Esto refuerza la idea de que los procesos matemáticos interactúan y se entrelazan, como discutimos al abordar la definición de riqueza competencial en el marco teórico. Este resultado no solo subraya la importancia de integrar estas conexiones en el diseño curricular, sino que también demuestra la sensibilidad y efectividad del marco extendido. Además, el concepto de un «entorno de conexiones» emergió como una extensión natural de los «entornos de resolución de problemas» ya establecidos en la literatura. Este enfoque propone

integrar activamente los vínculos entre ideas matemáticas en las prácticas del aula, para fomentar una visión de las matemáticas como una red interconectada de conceptos y procedimientos.

Sin embargo, reconocemos que nuestro estudio tiene limitaciones, como detallamos en el capítulo anterior. La herramienta y su extensión aún no han sido sometidas a validación estadística, lo que puede ser clave para garantizar su generalización en diferentes contextos. Además, su aplicación se ha limitado a una única guía, lo que deja abierta la necesidad de probarla en una variedad más amplia de materiales y contextos educativos, más allá del marco de la tesis industrial. También sería valioso explorar cómo los docentes interpretan y aplican la guía en el aula, para observar qué oportunidades se generan y como esto contribuye a la riqueza de la sesión.

En definitiva, mientras buscábamos respuestas a nuestra pregunta de investigación, hemos contribuido a la comprensión y mejora de las guías didácticas de primaria desde una perspectiva basada en competencias centrada en las conexiones matemáticas. Al integrar conceptos de riqueza competencial, hemos desarrollado una herramienta que no solo permite analizar las guías, sino también identificar oportunidades para su enriquecimiento. Este trabajo sienta las bases para futuras investigaciones y desarrollos en el diseño curricular, al tiempo que ofrece a los autores de Innovamat una herramienta práctica para mejorar la calidad de sus recursos y, en última instancia, la experiencia de aprendizaje de los estudiantes y docentes que utilizan la propuesta.

9.1. Difusión de la investigación

Cuando describíamos nuestras metas, en el capítulo 2, empezábamos explicando que el objetivo general de la tesis era, como en toda investigación doctoral, el aprendizaje y desarrollo de las competencias necesarias para realizar investigación, en este caso, dentro del área de conocimiento de la didáctica de las matemáticas. Resulta muy satisfactorio llegar al final, mirar hacia atrás (¡y hacia adelante!) y comprobar que este objetivo se ha cumplido con creces. Esta tesis, este viaje, se ha convertido en un proceso de aprendizaje y desarrollo personal increíble, así que os ruego que me perdonéis por romper la coherencia en el tono al escribir

este apartado en primera persona. A través de ella, he podido consolidar competencias fundamentales para el análisis, la creación y la mejora de recursos educativos de matemáticas desde el punto de vista de la riqueza. La oportunidad de participar en la redacción de publicaciones académicas, divulgar el proyecto Innovamat y debatirlo en congresos locales, nacionales e internacionales me ha permitido no solo ordenar y articular mis ideas, sino también contrastarlas con expertos y profesionales del ámbito. Este diálogo constante ha enriquecido tanto mi perspectiva como los resultados de esta tesis, y ha fortalecido mi capacidad para generar aportaciones relevantes.

En cuanto a publicaciones, la tesis ha dado lugar a una amplia variedad de artículos que reflejan diferentes facetas de la investigación. Entre ellos destaco un pequeño artículo inicial, publicado en *Aula de Innovación Educativa* (Morera et al., 2020), que introdujo el concepto de riqueza en actividades STEM desde una perspectiva matemática y proporcionó una base conceptual que influiría en los desarrollos posteriores. Más adelante, el artículo publicado en *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas* (Vilalta, 2021) sirvió para explicar los principios didácticos fundamentales de Innovamat. Sin embargo, el artículo troncal de esta tesis, publicado en *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education* (Vilalta et al., 2024), representa la publicación más significativa: no solo establece un marco teórico robusto sobre riqueza competencial en una guía didáctica, sino que también describe la creación y validación de la herramienta analítica que constituye el eje central de este trabajo.

Además, la tesis ha servido como base y marco de referencia para otras publicaciones relacionadas con Innovamat de las que he formado parte, aunque no estuvieran directamente vinculadas con los resultados de nuestra investigación. Hablamos, por ejemplo, del artículo que detalla nuestra visión sobre la automatización de las tablas de multiplicar (Calvo et al., 2023). Otro ejemplo es el artículo en el que explicamos nuestro diseño y validación de un programa RTI de intervención escalable en matemáticas (Correig-Fraga et al., 2024).

En el ámbito de la difusión en congresos, la investigación ha sido presentada en diversos escenarios locales, nacionales e internacionales. Empezamos en casa, en el *Congrés Català d'Educació Matemàtica* celebrado en Reus y Tarragona (Vilalta y Morera, 2020), donde pudimos compartir nuestro incipiente marco teórico para

definir riqueza. Poco después surgió la oportunidad de presentar un taller en el ICME-14 (Vilalta et al., 2021), una de las citas más relevantes del ámbito, que por efecto de la pandemia se celebró en formato virtual desde Shanghái, China. Este taller, junto con la comunicación oral que presentamos en el PME-47 celebrado en Auckland, Nueva Zelanda (Vilalta et al., 2024), conforman las dos participaciones en congresos más relevantes tanto para la investigación como para mi aprendizaje como candidato a doctor. Ambos fueron eventos de primer nivel que me ofrecieron la oportunidad de compartir avances significativos de la tesis con expertos en didáctica de las matemáticas de consolidada trayectoria. En el PME, además, tuve la suerte de contar con Janine Remillard entre la audiencia. Remillard es una respetada autora experta en cómo los docentes utilizan materiales curriculares (*University of Pennsylvania Graduate School of Education*. [s.f.]) que cito repetidamente cuando trato de definir lo que entendemos por guía didáctica en el marco teórico (capítulo 4). Sus preguntas y comentarios positivos al terminar mi presentación me animaron en los pasos finales de esta tesis. Además, los talleres realizados en el ámbito latinoamericano, como son el *IX Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, celebrado en remoto desde São Paulo, Brasil, (Vilalta et al., 2022) y la *Conferencia Interamericana de Educación Matemática*, celebrada en Lima, Perú, (Vilalta et al., 2023) ofrecieron espacios para explorar cómo los procesos matemáticos pueden integrarse en el aula de primaria para promover actividades ricas y sirvieron para empezar a pensar en la versión extendida de la herramienta.

Asimismo, de manera menos directa, nuestro marco de riqueza competencial ha tenido presencia en congresos profesionales muy relevantes, como son dos conferencias anuales del *National Congress of Teachers of Mathematics* (Caelles et al., 2022; Fábrega et al., 2024) y otros como la *Fall Conference of the Association of Mathematics Teachers of New Jersey* (Vilalta, 2023) y la conferencia anual del *Utah Council of Teachers of Math* (Vilalta, 2024). Estos encuentros han fortalecido la conexión entre teoría e implementación en el aula y han consolidado la presencia de Innovamat en Estados Unidos.

Por último, un logro particularmente significativo en este viaje ha sido la colaboración con Peter Liljedahl para la edición en español de su influyente libro *Building Thinking Classrooms in Mathematics* (Liljedahl, 2020). Este proyecto surgió gracias a los repetidos encuentros en congresos como los descritos

anteriormente, donde he tenido la oportunidad de presentar nuestro marco y el proyecto Innovamat, y de conocer a muchos referentes en didáctica de las matemáticas. En uno de los encuentros del NCTM, tuve la suerte de conversar con Liljedahl por primera vez. Durante nuestra primera conversación, y en las conversaciones que han seguido, descubrimos una profunda sintonía en nuestra manera de entender la didáctica de las matemáticas, lo que ha marcado el inicio de una relación profesional enriquecedora. Un día, Liljedahl me comentó que su libro había sido traducido a muchos idiomas, pero no al español, y me preguntó si Innovamat podría hacer algo al respecto. Pocos meses después, en Innovamat asumíamos la tarea de revisar la calidad didáctica de la traducción, asegurándonos de que reflejara con precisión la intención y la esencia del original. Además, tuve el honor de ser invitado a formar parte del equipo encargado de redactar el prólogo para la versión en español junto a mis compañeras, mentoras y referentes, Laura Morera (directora de la tesis en la empresa) y Cecilia Calvo. Este proyecto (Calvo et al., 2024) no solo supone un hito personal, sino que también subraya la consolidación de Innovamat como referente en la mejora de prácticas educativas en matemáticas a nivel internacional, y fortalece su presencia y relevancia en el contexto educativo de Estados Unidos.

Estas experiencias, tanto las publicaciones como las participaciones en jornadas y congresos, han demostrado el valor de la tesis no solo como una contribución académica, sino como un puente entre la investigación y la práctica educativa. Han permitido validar y difundir el trabajo realizado, enriquecerlo a través del debate, y establecer conexiones que refuerzan el impacto de Innovamat en la comunidad educativa global.

10. Bibliografía

- Ahl, L., Gunnarsdóttir, G. H., Koljonen, T. y Pálsdóttir, G. (2015). How teachers interact and use teacher's guides in mathematics – cases from Sweden and Iceland. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 20(3–4), 179–197.
- Albarracín, L., Badillo, E., Gíménez, J., Vanegas, Y. y Vilella, X. (2018). *Aprender a enseñar matemáticas en la educación primaria*. Síntesis.
- Arcavi, A. (1999). ...Y en matemáticas, los que instruimos ¿qué construimos? *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, 38, 39–56.
- Askew, M.; Brown, M.; Rhodes, V.; Wiliam, D. y Johnson, D. (1997). *Effective Teachers of Numeracy: Report of a Study Carried Out for the Teacher Training Agency*; King's College, University of London.
- Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority (ACARA). (2015). *F-10 Mathematics curriculum (Version 8.4)*.
- Ball, D. L. (1992). Magical Hopes: Manipulatives and the Reform of Math Education. *American Educator, The Professional Journal of the American Federation of Teachers*, 16(2), 14–18, 46–47.
- Ball, D. L. (1993). With an Eye on the Mathematical Horizon: Dilemmas of Teaching Elementary School Mathematics. *Elementary School Journal*, 93(4), 373–397.
<https://doi.org/10.1086/461730>
- Ball, D. L., Hill, H. C. y Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator, The Professional Journal of the American Federation of Teachers*, 29(1).
- Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407.
<https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Banchi, H. y Bell, R. (2008). The many levels of inquiry. *Science and Children*, 46(2), 26.

- Barahona Avecilla, F., Barrera Cárdenas, O., Vaca Barahona, B. e Hidalgo Ponce, B. (2015). GeoGebra para la enseñanza de la matemática y su incidencia en el rendimiento académico estudiantil. *Revista Tecnológica - ESPOL*, 28(5).
- Baroody, A. J. (2006). Why Children Have Difficulties Mastering the Basic Number Combinations and How to Help Them. *Teaching Children Mathematics*, 13(1), 22-31.
- Baroody, A. J., Purpura, D. J., Eiland, M. D., Reid, E. y Paliwal, V. (2016). Does fostering reasoning strategies for relatively difficult basic combinations promote transfer by K-3 students? *Journal of Educational Psychology*, 108(4), 576–591. <https://doi.org/10.1037/edu0000067>
- Bartell, T., Wager, A., Edwards, A., Battey, D., Mary Foote, M. y Spencer, J. (2017) Toward a Framework for Research Linking Equitable Teaching with the Standards for Mathematical Practice. *Journal for Research in Mathematics Education*, 48(1), 7-21.
- Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A. H., Klusmann, U., Krauss, S., Neubrand, M. y Tsai, Y. (2010). Teachers' Mathematical Knowledge, Cognitive Activation in the Classroom, and Student Progress. *American Educational Research Journal*, 47(1), 133–180. <https://doi.org/10.3102/0002831209345157>
- Bay-Williams, J. M. y SanGiovanni, J. J. (2021). *Figuring Out Fluency in Mathematics Teaching and Learning, Grades K-8: Moving Beyond Basic Facts and Memorization* (1st ed.). Corwin.
- Bay-Williams, J. M. y SanGiovanni, J. J. (2022). *Accessing Fluency through Routine and Opportunity*. NCTM Annual Meeting 2022. Los Angeles, USA.
- Bay-Williams, J. y Kling, G. (2019). *Math fact fluency: 60+ Games and Assessment Tools to Support Learning and Retention*. ASCD.
- Bayeck, R. Y. (2020). Examining Board Gameplay and Learning: A multidisciplinary review of recent research. *Simulation y Gaming*, 51(4), 411–431. <https://doi.org/10.1177/1046878119901286>

- Bereiter, C. y Scardamalia, M. (2006). Education for the knowledge age: Design-centered models of teaching and instruction. En P. A. Alexander y P. H. Winne (Eds.), *Handbook of educational psychology* (2nd ed., pp. 695–713). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Bettencourt, A. (1991). *On What it Means to Understand Science*. Second International History and Philosophy of Science Proceedings, 77-86. Canada.
- Bhanji, J. P. y Delgado, M. R. (2013). The social brain and reward: social information processing in the human striatum. Wiley Interdisciplinary Reviews. *Cognitive Science*, 5(1), 61–73. <https://doi.org/10.1002/wcs.1266>
- Bishop, A. (1985). The Social Construction of Meaning: A Significant Development for Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics*, 5, 24-28.
- Boaler, J. (2020). *Mentalidades matemáticas: Cómo liberar el potencial de los estudiantes mediante las matemáticas creativas, mensajes inspiradores y una enseñanza innovadora*. Nirvana Libros, S. A. de C. V.
- Boertien, H. y de Lange, J. (1994). *The national option of TIMSS in The Netherlands*. Enschede, The Netherlands: University of Twente.
- Boonk, L., Gijssels, H. J., Ritzen, H. y Brand-Gruwel, S. (2018). A review of the relationship between parental involvement indicators and academic achievement. *Educational Research Review*, 24, 10–30. <https://doi.org/10.1016/j.edurev.2018.02.001>
- Booth, T. y Ainscow, M. (2002). *Index for Inclusion: Developing Learning and Participation in Schools*. Centre for Studies on Inclusive Education (CSIE) of the United Kingdom.
- Brenner, M.E., Mayer, R.E., Moseley, B., Brar, T., Duran, R., Reed, B.S. y Webb, D. (1997). Learning by understanding: The role of multiple representations in learning algebra. *American Educational Research Journal*, 34, 663-689.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: didactique des mathématiques (1970-1990)*. Kluwer Academic Publishers.
- Brown, M. (2009). The teacher-tool relationship: Theorizing the design and use of curriculum materials. En J. T. Remillard, B. A. Herbel-Eisenmann y G. M. Lloyd

- (Eds.), *Mathematics teachers at work: Connecting curriculum materials and classroom instruction* (pp. 17–36). Routledge.
- Brügger, G. (1984) Three-triangle-tangram. *BIT* 24, 380–382.
- Bruner, J. (1960). *The Process of Education*. Harvard University Press.
- Bruner, J. S. (1986). *Actual Minds, Possible Worlds*. Harvard University Press.
- Burgués, C. y Sarramona, J. (2013). *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic per a l'Educació Primària*. Generalitat de Catalunya.
- Businskas, A. M. (2008). *Conversations about Connections: How Secondary Mathematics Teachers Conceptualize and Contend with Mathematical Connections*. [Tesis de doctorado, Simon Fraser University, Burnaby, BC, Canada].
- Bybee, R. W. (2013). The case for STEM education: Challenges and opportunities. *National Science Teachers Association*. <https://doi.org/10.2505/9781936959259>
- Caelles, M., Vilalta, A. y Sánchez, V. (2022). “Sam’s journey”: *Exploring the History of Math and Sense of Identity through Powerful Narrative* [Workshop]. Annual Meeting of the National Council of Teachers of Mathematics, Los Angeles, USA.
- Calvo, C., Morera, L. y Vilalta, A. (2024) *Prólogo a la edición en español de «Diseñando aulas para pensar en matemáticas», de Peter Liljedahl*. NED Ediciones e Innovamat.
- Calvo, C., Vilalta, A. y Correig, E. (2023). Automatizar las tablas de multiplicar: un propósito que vayas más allá de 3º de primaria. *Uno: Revista de Didáctica de las matemáticas*, 99, 61-67.
- Carbonneau, K. J., Marley, S. C. y Selig, J. P. (2013). A Meta-analysis of the Efficacy of Teaching Mathematics with Concrete Manipulatives. *Journal of Educational Psychology*, 105(2), 380-400. <https://doi.org/10.1037/a0031084>
- Carpenter, S. K. (2017). Spacing Effects on Learning and Memory. En J. H. Byrne (Ed.), *Reference Module in Neuroscience and Biobehavioral Psychology - Learning and Memory: A Comprehensive Reference (2nd ed.)*. Academic Press. <https://doi.org/10.1016/b978-0-12-809324-5.21054-7>

- Castelnuovo, E. y Barra, M. (1976). *Matematica nella realtà*. Bollati Boringhieri.
- Castelnuovo, E., Arzarello, F. y Bussi, M. G. B. (2017). *Didattica della matematica*. UTET Università.
- Castro, M., Casas, E. E., López-Martín, E., Hernández, L. L., Asencio, E. N. y Gaviria, J. L. (2015). Parental involvement on student academic achievement: A meta-analysis. *Educational Research Review*, 14, 33–46.
<https://doi.org/10.1016/j.edurev.2015.01.002>
- Charles, R. I. (2005). Big ideas and understandings as the foundation for elementary and middle school mathematics. *NCSM Journal of Mathematics Education Leadership*, 7(3), 9–24.
- Christiansen, B. y Walther, G. (1986). Task and activity. En B. Christiansen, A. G. Howson y M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). D. Reidel.
- Civil, M. y Bernier, E. (2006). Exploring images of parental participation in mathematics Education: challenges and possibilities. *Mathematical Thinking and Learning*, 8(3), 309–330. https://doi.org/10.1207/s15327833mtlo803_6
- Clements, D. H. y Sarama, J. (2004). Learning Trajectories in Mathematics Education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 81-89.
https://doi.org/10.1207/s15327833mtlo602_1
- Clements, D. H., Sarama, J., Spitler, M. E., Lange, A. A. y Wolfe, C. R. (2011). Mathematics Learned by Young Children in an Intervention Based on Learning Trajectories: A Large-Scale Cluster Randomized Trial. *Journal for Research in Mathematics Education*, 42(2), 127-166.
<https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.42.2.0127>
- Cobb, P. (1995). Cultural Tools and Mathematical Learning: A Case Study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(4), 362.
<https://doi.org/10.2307/749480>
- Cooke, B. D. y Buchholz, D. (2005). Mathematical Communication in the Classroom: A Teacher Makes a Difference. *Early Childhood Education Journal*, 32(6), 365–369. doi:10.1007/s10643-005-0007-5

- Cooper, H., Lindsay, J., Nye, B. y Greathouse, S. (1998). Relationships among attitudes about homework, amount of homework assigned and completed, and student achievement. *Journal of Educational Psychology*, 90(1), 70–83.
<https://doi.org/10.1037/0022-0663.90.1.70>
- Correig-Fraga, E., Vilalta-Riera, A. y Calvo-Pesce, C. (2024). Development and validation of a semi-automated, scalable response to intervention framework in mathematics. *Springer Nature (SN) Social Sciences* 4, 31.
<https://doi.org/10.1007/s43545-024-00835-7>
- Costa, P.T. y McCrae, R.R. (1992) The Five-Factor Model of Personality and its relevance to personality disorders. *Journal of Psychological Disorders* 6, 343-359.
- Coulombe, N. y Berenson, S. (2001). Representations of Patterns and Functions. En A. Cuoco (Ed.), *The Roles of Representations in School Mathematics, Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 166–72). Reston, VA: NCTM.
- Couso, D. (2017). Per a què estem a STEM? Un intent de definir l'alfabetització STEM per a tothom i amb valors. *Ciències: Revista del professorat de Ciències de Primària i Secundària*, 34. Barcelona: UAB.
<https://revistes.uab.cat/ciencies/article/view/n34-couso/400>
- Cross, K. (2004). Engagement and Excitement in Mathematics. *Mathematical Teaching, Vol. 189*.
- Daniel, G., Wang, C. y Berthelsen, D. (2016). Early school-based parent involvement, children's self-regulated learning and academic achievement: An Australian longitudinal study. *Early Childhood Research Quarterly*, 36, 168–177.
<https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2015.12.016>
- De Gamboa, G.; Caviedes, S.; Badillo, E. (2022). Mathematical connections and the mathematics teacher's specialised knowledge. *Mathematics*, 10(21), 4010.
<https://doi.org/10.3390/math10214010>.
- De La Fuente-Pérez, A. y Deulofeu-Piquet, J. (2022). Uso de las conexiones entre representaciones por parte del profesor en la construcción del lenguaje algebraico. *Bol. Educ. Mat.* 36, 389–410. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a17>.

- de Lange, J. (1999). *Framework for classroom assessment in mathematics*. Freudenthal Institute y National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.
- Deno, S. L. (1985). Curriculum-Based Measurement: The Emerging Alternative. *Exceptional Children*, 52(3), 219-232.
- Depaepe, F., Verschaffel, L. y Kelchtermans, G. (2013). Pedagogical content knowledge: A systematic review of the way in which the concept has pervaded mathematics educational research. *Teaching and Teacher Education*, 34, 12–25. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2013.03.001>
- Deulofeu, J. y Vila, A. (2021). Aprender a pensar matemáticamente en ambientes de resolución de problemas. En GIDIMAT-UA (Eds.), *Ideas para la educación matemática: Perspectivas desde el trabajo de M^a Luz Callejo de la Vega* (pp. 41-67). Compobell: Murcia.
- Dewey, J. (1933). *How We Think*. Boston: Heath.
- Dienes, Z. P. (1969). *Building Up Mathematics*. Hutchison Education.
- Edelson, C., Gordin, D. N. y Pea, R. D. (1999). Addressing the Challenges of Inquiry-Based Learning Through Technology and Curriculum Design, *Journal of the Learning Sciences*, 8:3-4, 391-450, DOI: 10.1080/10508406.1999.9672075
- Ernest, P. (1995). Values, gender and images of mathematics: A philosophical perspective. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 26(3), 449-462. <https://doi.org/10.1080/0020739950260313>
- Espin, C., McMaster, K., Rose, S., Wayman, M., Jenkins, J., Fuchs, L., Fuchs, D., Bradley, R., Yell, M., Busch, T., Hosp, J., Hosp, M., Marston, D., Germann, G., Gibbons, K., Casey, A., Dion, E., Good, R., Lembke, E. y Shinn, M. (2012). *A Measure of Success: The Influence of Curriculum-Based Measurement on Education*. <https://doi.org/10.5749/minnesota/9780816679706.001.0001>
- Fábrega, J., Edo, M. y Vilalta, A. (2024). *The Blank Page: Students' Representations of Mathematical Thinking* [Workshop]. Annual Meeting of the National Council of Teachers of Mathematics, Chicago, USA.

- Fan, H., Xu, J., Cai, Z., He, J. y Fan, X. (2017). Homework and students' achievement in math and science: A 30-year meta-analysis, 1986–2015. *Educational Research Review*, 20, 35–54. <https://doi.org/10.1016/j.edurev.2016.11.003>
- Fan, L. y Zhu, Y. (2007). Representation of problem-solving procedures: A comparative look at China, Singapore, and U.S. mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics*, 66, 61-75.
- Fauvel, J. y Maanen, J. V. A. (2006). *History in Mathematics Education: The ICMI Study*. Springer.
- Fernández, J. y Morales, M. (2022). *La evaluación formativa. Estrategias eficaces para regular el aprendizaje*. Ediciones SM.
- Finkel, D. (10 de setiembre de 2022). *Rich Tasks*. Math for Love. <https://mathforlove.com/lessons/rich-tasks/>
- Fletcher, J. M. y Vaughn, S. (2009). Response to intervention: Preventing and remediating academic difficulties. *Child Development Perspectives*, 3(1), 30-37. <https://doi.org/10.1111/j.1750-8606.2008.00072.x>
- Flick, U. (2013). *The SAGE Handbook of Qualitative Data Analysis*. SAGE Publications Limited.
- Flunger, B., Trautwein, U., Nagengast, B., Lüdtke, O., Niggli, A. y Schnyder, I. (2015). The Janus-faced nature of time spent on homework: Using latent profile analyses to predict academic achievement over a school year. *Learning and Instruction*, 39, 97–106. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2015.05.008>
- Flynn, M., Turner, K., Aminata, D., Livingston, T., Lee, J., Garcia, M. Klassen, A. Kelley-Petersen, M., Singh, S., Margolis, C., Garrison, L., Valdez, M., Vilson, J. y Treglio, C. (2021). Conference Focus Strands. *Program Book for the NCTM Annual Meeting i Exposition*, 8.
- Fosnot, C. y Dolk, M. (2001a). *Young Mathematicians at Work: Constructing Number Sense, Addition, and Subtraction*. Heinemann.
- Fosnot, C. y Dolk, M. (2001b). *Young Mathematicians at Work: Constructing Multiplication and Division*. Heinemann.

- Fosnot, C. y Dolk, M. (2001c). *Young Mathematicians at Work: Constructing Fraction, Decimals and Percent*. Heinemann.
- Foster, C., Francome, T., Hewitt, D. y Shore, C. (2021). Principles for the design of a fully-resourced, coherent, research-informed school mathematics curriculum. *Journal of Curriculum Studies*, 53(5), 621–641.
<https://doi.org/10.1080/00220272.2021.1902569>
- Fovet, F. (Ed.). (2021). *Handbook of Research on Applying Universal Design for Learning Across Disciplines: Concepts, Case Studies, and Practical Implementation*. IGI Global. <https://doi.org/10.4018/978-1-7998-7106-4>
- Franke, M.L. y Carey, D.A. (1997). Young children's perceptions of mathematics in problem-solving environments. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(1), 8–25. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.28.1.0008>.
- Frenkel, E. (2013). *Love and Math: The Heart of Hidden Reality*. Basic Books.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. En Springer eBooks.
<https://doi.org/10.1007/978-94-010-2903-2>
- Friel, S. N., Curcio, F. R. y Bright, G. W. (2001). Making Sense of Graphs: Critical Factors Influencing Comprehension and Instructional Implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 124. <https://doi.org/10.2307/749671>
- Fuchs, D. y Fuchs, L. S. (2006). Introduction to response to intervention: What, why, and how valid is it? *Reading Research Quarterly*, 41(1), 93-99.
<https://doi.org/10.1598/rrq.41.1.4>
- Fuchs, L. S. (2004). The past, present, and future of curriculum-based measurement research. *School Psychology Review*, 33(2), 188-192.
<https://doi.org/10.1080/02796015.2004.12086241>
- Fuchs, L.S., Newman-Gonchar, R., Schumacher, R., Dougherty, B., Bucka, N., Karp, K.S., Woodward, J., Clarke, B., Jordan, N. C., Gersten, R., Jayanthi, M., Keating, B., and Morgan, S. (2021). Assisting Students Struggling with Mathematics: Intervention in the Elementary Grades (WWC 2021006). National Center for Education Evaluation and Regional Assistance (NCEE), Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education. <http://whatworks.ed.gov/>

- Furinghetti, F. (2000). The history of mathematics as a coupling link between secondary and university teaching. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(1), 43-51.
<https://doi.org/10.1080/002073900287372>
- Geary, D. C. (2011). Cognitive predictors of achievement growth in mathematics: A 5-year longitudinal study. *Developmental Psychology*, 47(6), 1539–1552.
<https://doi.org/10.1037/a0025510>
- Geary, D. C. (2012). Evolutionary educational psychology. En K. R. Harris, S. Graham, T. Urdan, C. B. McCormick, G. M. Sinatra y J. Sweller (Eds.), *APA educational psychology handbook, Vol. 1. Theories, constructs, and critical issues* (pp. 597–621). American Psychological Association.
<https://doi.org/10.1037/13273-020>
- Gojak, L. (2017). *A Key to Deep Understanding: The Importance of Rich Tasks in K-12 Mathematics*. McGraw Hill Education.
- González, N., Andrade, R., Civil, M. y Moll, L. C. (2001). Bridging funds of distributed knowledge: Creating zones of practices in mathematics. *Journal of Education for Students Placed at Risk*, 6(1–2), 115–132.
https://doi.org/10.1207/s15327671espr0601-2_7
- Graham, S. y Perin, D. (2007). A Meta-Analysis of Writing Instruction for Adolescent Students. *Journal of Educational Psychology*, 99(3), 445-476.
<https://doi.org/10.1037/0022-0663.99.3.445>
- Gueudet, G., Pepin, B., Trouche, L., (2013). Textbooks’ Design and Digital Resources. En C. Margolinas (Ed.), *Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22*, 325-333.
- Gueudet, G. y Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics*, 71(3), 199-218.
<https://doi.org/10.1007/s10649-008-9159-8>
- Gutiérrez, R. (2013). Why (Urban) mathematics teachers need political knowledge. *Journal of Urban Mathematics Education*, 6(2).
<https://doi.org/10.21423/jume-v6i2a223>

- Harden, R. M. y Stamper, N. (1999). What Is a Spiral Curriculum? *Medical Teacher*, 21(2), 141–143. <https://doi.org/10.1080/01421599979752>
- Hardy, G. H. (1942). What is Mathematics? *Nature*, 150(3815), 673–674.
DOI:10.1038/150673a0
- Hardy, G. H. (1992). *A Mathematician's Apology*. Cambridge University Press.
- Harn, B. A., Chard, D. J., Biancarosa, G. y Kame'enui, E. J. (2011). Coordinating Instructional Supports to Accelerate At-Risk First-Grade Readers' Performance. *The Elementary School Journal*, 112(2), 332–355. <https://doi.org/10.1086/661997>
- Harris, D. N. y Sass, T. R. (2011). Teacher training, teacher quality and student achievement. *Journal of Public Economics*, 95(7–8), 798–812.
<https://doi.org/10.1016/j.jpubeco.2010.11.009>
- Hart, K. J. y el equipo CSMS (1981). Children's understanding of mathematics: 11-16. John Murray.
- Hattie, J. y Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research*, 77(1), 81–112. <https://doi.org/10.3102/003465430298487>
- Henningsen, M. A. y Stein, M. K. (1997). Mathematical Tasks and Student Cognition: Classroom-based Factors that Support and Inhibit High-level Mathematical Thinking and Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 524–549.
- Henrion, C. (1997). *Women in Mathematics: The Addition of Difference*. Amsterdam University Press.
- Henry, V. J. y Brown, R. S. (2008). First-Grade Basic Facts: An Investigation Into Teaching and Learning of an Accelerated, High-Demand Memorization Standard. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(2), 153–183.
<https://doi.org/10.2307/30034895>
- Hiebert, J. (1988). A theory of developing competence with written mathematical symbols. *Educational Studies In Mathematics*, 19(3), 333–355.
<https://doi.org/10.1007/bf00312451>

- Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Human, P., Murray, H. y Olivier, A. (1997) *Making Sense: Teaching and Learning Mathematics with Understanding*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Hiebert, J. y Grouws, D. A. (2007). The Effects of Classroom Mathematics Teaching on Students' Learning. En J. Frank y K. Lester (Eds.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 371–404). Charlotte: Information Age.
- Hiebert, J. y Wearne, D. (1992). Links Between Teaching and Learning Place Value with Understanding in First Grade. *Journal for Research in Mathematics Education* 23, 98–122.
- Hiebert, J. y Wearne, D. (2003). Developing Understanding through Problem Solving. En H. L. Schoen y R. I. Charles (Eds.), *Teaching Mathematics through Problem solving* (pp. 6–12). Reston, VA: NCTM.
- Higuchi, S., Motohashi, Y., Liu, Y., Ahara, M. y Kaneko, Y. (2003). Effects of VDT tasks with a bright display at night on melatonin, core temperature, heart rate, and sleepiness. *Journal of Applied Physiology*, 94(5), 1773–1776.
<https://doi.org/10.1152/japplphysiol.00616.2002>
- Hill, H. C., Blunk, M., Charalambous, C., Lewis, J., Phelps, G., Sleep, L. y Ball, D. L. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: An exploratory study. *Cognition and Instruction*, 26(4), 430–511.
- Hill, N. E. y Tyson, D. F. (2009). Parental involvement in middle school: A meta-analytic assessment of the strategies that promote achievement. *Developmental Psychology*, 45(3), 740–763. <https://doi.org/10.1037/a0015362>
- Hill, P. T. y Celio, M. B. (1998). *Fixing urban schools*. Brookings Institution Press.
- Hillmayr, D., Ziernwald, L., Reinhold, F., Hofer, S. y Reiss, K. (2020b). The potential of digital tools to enhance mathematics and science learning in secondary schools: A context-specific meta-analysis. *Computers & Education*, 153, 103897.
<https://doi.org/10.1016/j.compedu.2020.103897>

- Hindi, S. E. y Renniger, K. A. (2019). Interest Development and Its Relation to Curiosity: Needed Neuroscientific Research. *Educational Psychology Review*, 31(4), 833-852.
- Hmelo-Silver, C. E., Duncan, R. G. y Chinn, C. A. (2007). Scaffolding and Achievement in Problem-Based and Inquiry Learning: A Response to Kirschner, Sweller, and Clark (2006). *Educational Psychologist*, 42(2), 99–107.
<https://doi.org/10.1080/00461520701263368>
- Innovamat (2021). *Adventures 4th grade. Teaching guide*. Innovamat Education SL.
- Innovamat (2024a). *Libro blanco - El aprendizaje de las matemáticas: Fundamentos teóricos de la propuesta de Innovamat*.
- Innovamat (26 de octubre de 2024b). *Impacto: Casos de éxito*.
<https://www.innovamat.com/casos-de-exito/>
- Jacob, R., Hill, H. y Corey, D. (2017). The impact of a professional development program on teachers' mathematical knowledge for teaching, instruction, and student achievement. *Journal of Research on Educational Effectiveness*, 10(2), 379–407. <https://doi.org/10.1080/19345747.2016.1273411>
- Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 71(3), 235-261.
<https://doi.org/10.1007/s10649-008-9174-9>
- Johnson, D. W. y Johnson, R. T. (2022). *La evaluación en el aprendizaje cooperativo: cómo mejorar la evaluación individual a través del grupo*. SM (CESMA).
- Jones, D. L. y Tarr, J. E. (2007). An examination of the levels of cognitive demand required by probability tasks in middle mathematics textbooks. *Statistics Education Research Journal*, 6(2), 4-27.
- Jordan, N. C., Kaplan, D., Ramineni, C. y Locuniak, M. N. (2009). Early Math Matters: Kindergarten Number Competence and Later Mathematics Outcomes. *Dev Psycho*, 45, 850-867.
- Jukić Matić, L. y Glasnović Gracin, D. (2021). How do teacher guides give support to mathematics teachers? Analysis of a teacher guide and exploration of its use in

- teachers' practices. *Research in Mathematics Education*, 23(1), 1–20.
<https://doi.org/10.1080/14794802.2019.1710554>
- Jung, P. G., McMaster, K. L. y Del Mas, R. C. (2017). Effects of early writing intervention delivered within a data-based instruction framework. *Exceptional Children*, 83(3), 281–297. <https://doi.org/10.1177/0014402916667586>
- Kilford, E. J., Garrett, E. y Blakemore, S. (2016). The development of social cognition in adolescence: An integrated perspective. *Neuroscience and Biobehavioral Reviews*, 70, 106–120. <https://doi.org/10.1016/j.neubiorev.2016.08.016>
- Kirschner, P. A., Sweller, J. y Clark, R. E. (2006). Why minimal guidance during instruction does not work: An analysis of the failure of constructivist, discovery, Problem-Based, experiential, and Inquiry-Based teaching. *Educational Psychologist*, 41(2), 75–86. https://doi.org/10.1207/s15326985ep4102_1
- Kleickmann, T., Richter, D., Kunter, M., Elsner, J., Besser, M., Krauss, S. y Baumert, J. (2012). Teachers' content knowledge and pedagogical content knowledge. *Journal of Teacher Education*, 64(1), 90–106.
<https://doi.org/10.1177/0022487112460398>
- Kraft, M. A. y Rogers, T. (2015). The underutilized potential of teacher-to-parent communication: Evidence from a field experiment. *Economics of Education Review*, 47, 49–63. <https://doi.org/10.1016/j.econedurev.2015.04.001>
- Kuiper, W., Bos, K. y Plomp, T. (1997). *TIMSS populatie 2, Nationaal Rapport [TIMSS population 2, National Report]*. Enschede: University of Twente.
- Kulik, J. A. y Fletcher, J. D. (2016). Effectiveness of Intelligent Tutoring Systems: A Meta-Analytic Review. *Review of Educational Research*, 86(1), 42–78.
<https://doi.org/10.3102/0034654315581420>
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: the logic of mathematical discovery*. Cambridge University Press.
- Lambert, R. (2024). *Rethinking disability and mathematics: A UDL Math Classroom Guide for Grades K-8*. Corwin Publishers.
- Lança, C. C. Yam, J. C., Jiang, W., Tham, Y., Emamian, M. H., Tan, C. S. Yin, G., Liu, H., Zhong, H., Zhu, D., Hu, Y., Saxena, R., Hashemi, H., Chen, L., Wong, T.,

- Cheng, C., Pang, C., Zhu, H., Pan, C., ..., Saw, S. (2021). Near work, screen time, outdoor time and myopia in schoolchildren in the Sunflower Myopia AEEC Consortium. *Acta Ophthalmologica*, 100(3), 302–311.
<https://doi.org/10.1111/aos.14942>
- Landa, A. I., Arteaga, B. A., Irizar, I. N., Hermida, L. I., Gorrotxategi, M. A. y Arruti, S. E. (2021). *La evaluación en educación infantil*. Editorial Graó.
- Lange, T. y Meaney, T. (2011). I actually started to scream: emotional and mathematical trauma from doing school mathematics homework. *Educational Studies in Mathematics*, 77(1), 35–51.
<https://doi.org/10.1007/s10649-011-9298-1>
- Laski, E. V., Jor'dan, J. R., Daoust, C. J. y Murray, A. (2015). What Makes Mathematics Manipulatives Effective? Lessons From Cognitive Science and Montessori Education. *SAGE Open*, 5(2), 215824401558958.
<https://doi.org/10.1177/2158244015589588>
- Leikin, R. y Zazkis, R. (Eds.). (2010). *Learning Through Teaching Mathematics*. Springer Netherlands. <https://doi.org/10.1007/978-90-481-3990-3>
- Leont'ev, A. (1975). *Dieyatelinosti, soznaine, i lichynosti* [Actividad, conciencia y personalidad]. Moskva: Politizdat.
- Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOMLOE). *Boletín Oficial del Estado*, 340, 30 de diciembre de 2020, pp. 122868–122953.
<https://www.boe.es/boe/dias/2020/12/30/pdfs/BOE-A-2020-17264.pdf>
- Liljedahl, P. (2020). *Building thinking classrooms in mathematics, grades K-12: 14 Teaching Practices for Enhancing Learning*. Corwin Mathematics.
- Liljedahl, P., Durand-Guerrier, V., Winsløw, C., Bloch, I., Huckstep, P., Rowland, T., Thwaites, A., Grevholm, B., Bergsten, C., Adler, J., Davis, Z., Garcia, M., Sánchez, V., Proulx, J., Flowers, J., Rubenstein, R., Grant, T., Kline, K., Moreira, P., ..., Chapman, O. (2009). Components of Mathematics Teacher Training. En R. Even, D. L. Ball (Eds.), *The Professional Education and Development of Teachers of*

- Mathematics. New ICMI Study Series, vol 11.* Springer, Boston, MA.
https://doi.org/10.1007/978-0-387-09601-8_4
- Litman, J. (2019). Curiosity: Nature, Dimensionality, and Determinants. En K. A. Renninger y S. E. Hidi (Eds.), *The Cambridge Handbook of Motivation and Learning*, 418-442. Cambridge University Press.
- Lockhart, P. (2009). *A Mathematician's Lament*. Bellevue Literary Press.
- Locuniak, M. N. y Jordan, N. C. (2008). Using kindergarten number sense to predict calculation fluency in second grade. *Journal of Learning Disabilities*, 41(5), 451–459. <https://doi.org/10.1177/0022219408321126>
- Ma, W., Adesope, O. O., Nesbit, J. C. y Liu, Q. (2014). Intelligent tutoring systems and learning outcomes: A meta-analysis. *Journal of Educational Psychology*, 106(4), 901-918. <https://doi.org/10.1037/a0037123>
- Madigan, S., McArthur, B. A., Anhorn, C., Eirich, R. y Christakis, D. (2020). Associations between screen use and child language skills. *JAMA Pediatrics*, 174(7), 665. <https://doi.org/10.1001/jamapediatrics.2020.0327>
- Maltese, A. V., Tai, R. H. y Fan, X. (2012). When is Homework Worth the Time? Evaluating the Association Between Homework and Achievement in High School Science and Math. *The High School Journal*, 96(1), 52–72.
<http://www.jstor.org/stable/23275424>
- Margolinas, C. (Ed.). (2013). *Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22*. Oxford.
- Mason, J. y Johnston-Wilder, S. (2006). *Designing and using mathematical tasks*. QED Press.
- Mazzocco, M. M. M. y Thompson, R. E. (2005). Kindergarten Predictors of Math Learning Disability. *Learning Disabilities Research y Practice*, 20(3), 142-155. <https://doi.org/10.1111/j.1540-5826.2005.00129.x>
- McCombs, B. L., Marzano, R. J. (1990). Putting the Self in Self-Regulated Learning: The Self as Agent in Integrating Will and Skill. *Educational Psychologist*, 25(1), 51–69. doi:10.1207/s15326985ep2501_5

- McNeil, N. M. y Jarvin, L. (2007). When Theories Don't Add Up: Disentangling the Manipulatives Debate. *Theory Into Practice*, 46(4), 309-316.
<https://doi.org/10.1080/00405840701593899>
- Meyer, A., Gordon, D. y Rose, D. H. (2015). *Universal Design for Learning: Theory and Practice*. CAST Professional Publishing.
- Morera, L., Ríos, B. y Vilalta, A. (2020). Actividades STEM desde una perspectiva matemática rica. *AULA de innovación educativa (Graó)*, 292, 71-72.
- Moyer, P. S. (2001). Are We Having Fun Yet? How Teachers Use Manipulatives to Teach Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 47, 175-197.
<https://doi.org/10.1023/A:1014596316942>
- Moyer-Packenham, P. S. y Westenskow, A. (2013). Effects of Virtual Manipulatives on Student Achievement and Mathematics Learning. *International Journal of Virtual and Personal Learning Environments*, 4(3), 35-50.
<https://doi.org/10.4018/jvple.2013070103>
- Murawski, W. y Scott, K. (2019). *What Really Works With Universal Design for Learning*. Corwin.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM.
- National Governors Association Center for Best Practices y Council of Chief State School Officers. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*.
- Newmann, F. M., Smith, B., Allensworth, E. y Bryk, A. S. (2001). Instructional Program Coherence: What It Is and Why It Should Guide School Improvement Policy. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 23(4), 297-321.
<https://doi.org/10.3102/01623737023004297>
- Niss, M. y Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 102(1), 9-28.
<https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9>
- NRICH. (2013). *Low Threshold High Ceiling - an Introduction*. NRICH - Millennium Mathematics Project. Cambridge University.

- NRICH. (2017). *Creating a Low Threshold, High Ceiling Classroom*. NRICH - Millennium Mathematics Project. Cambridge University.
- Ontario Ministry of Education. (2007a). *A Guide to Effective Instruction in Mathematics, Kindergarten to Grade 3: Data Management and Probability*. Ontario Ministry of Education.
- Ontario Ministry of Education. (2007b). *A Guide to Effective Instruction in Mathematics, Kindergarten to Grade 3: Patterning and Algebra*. Ontario Ministry of Education.
- Organization for Economic Co-operation and Development (OECD). (2017a). *PISA for Development Assessment and Analysis Framework: Reading, mathematics and science*. OECD Publishing.
- Organization for Economic Co-operation and Development (OECD). (2017b). *Social and Emotional Skills: Well-being, connectedness and success*. OECD Publishing.
- Pane, J. F., Griffin, B. A., McCaffrey, D. F. y Karam, R. (2014). Effectiveness of Cognitive Tutor Algebra I at Scale. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 36(2), 127-144. <https://doi.org/10.3102/0162373713507480>
- Pape, S. J. y Tchoshanov, M. A. (2001). The Role of Representation(s) in Developing Mathematical Understanding. *Theory Into Practice*, 40(2), 118-127. https://doi.org/10.1207/s15430421tip4002_6
- Papert, S. (1993). *The Children's Machine*. Basic Books.
- Park, S. y Oliver, J. S. (2007). Revisiting the Conceptualisation of Pedagogical Content Knowledge (PCK): PCK as a conceptual tool to understand teachers as professionals. *Research in Science Education*, 38(3), 261-284. <https://doi.org/10.1007/s11165-007-9049-6>
- Pepin, B. (2008). *Making connections and seeking understanding: mathematical tasks in English, French and German textbooks*. Presentation, Nuffield seminar series on Mathematical Knowledge in Teaching. Loughborough.
- Perlovsky, L., Bonniot-Cabanac, M. y Cabanac, M. (2010). *Curiosity and Pleasure*. En The 2010 International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN) (1-3). IEEE.

- Pettersson, F. (2017). On the issues of digital competence in educational contexts – a review of literature. *Education and Information Technologies*, 23(3), 1005–1021. <https://doi.org/10.1007/s10639-017-9649-3>
- Piaget, J. (1952). *The Child's Conception of Number*. Humanities Press.
- Piaget, J. (1960). *The Psychology of Intelligence*. Adams Publishing.
- Piggott, J. (2007). The Nature of Mathematical Enrichment: a Case Study of Implementation. *Educate*, 7(2), 30–45. <https://doaj.org/article/1b34e8881b254f638db36ee35e2c7f74>
- Piggott, J. (2011). *Mathematics Enrichment: What Is It and Who Is It For?* NRICH - Millennium Mathematics Project. Cambridge University. <https://nrich.maths.org/5737>
- Pólya, G. (1945). *How to Solve It*. Princeton University Press.
- Polya, G. (1962). *Mathematical Discovery*. En John Wiley & Sons eBooks. <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/194966>
- Preston, R. V. y Garner, A. S. (2003). Representation as a vehicle for solving and communication. *Mathematics Teaching in the middle school*, 9(1), 38-43.
- Purpura, D. J., Baroody, A. J., Eiland, M. D. y Reid, E. (2016). Fostering First Graders' Reasoning Strategies with Basic Sums: The Value of Guided Instruction. *Elementary School Journal*, 117(1), 72–100. <https://doi.org/10.1086/687809>
- Rawson, K. A. y Kintsch, W. (2005). Rereading Effects Depend on Time of Test. *Journal of Educational Psychology*, 97(1), 70.
- Remillard, J. T. (2005). Examining key concepts in research on teachers' use of mathematics curricula. *Review of Educational Research*, 75(2), 211–246. <https://doi.org/10.3102/00346543075002211>
- Remillard, J. T. (2012). Modes of engagement: Understanding teachers' transactions with mathematics curriculum resources. En G. Gueudet, B. Pepin y L. Trouche (Eds.), *From text to 'lived' resources: Mathematics curriculum materials and teacher development* (pp. 105–122). Dordrecht: Springer.

- Remillard, J. T. (2013). *Beyond the script: educative features of five mathematics curricula and how teachers use them*. Paper presented at the AERA annual meeting, San Francisco, USA.
- Resnick, M., Silverman, B. (2005). *Some reflections on designing construction kits for kids*. Proceeding of the 2005 conference on Interaction design and children (IDC 05), Boulder, CO, USA, 117–122. DOI:10.1145/1109540.1109556
- Reynolds, A. J. (1992). Comparing measures of parental involvement and their effects on academic achievement. *Early Childhood Research Quarterly*, 7(3), 441–462. [https://doi.org/10.1016/0885-2006\(92\)90031-s](https://doi.org/10.1016/0885-2006(92)90031-s)
- Roberts, B. W. (2009) Back to the future: Personality and Assessment and personality development. *Journal of Research in Personality*, 43, 137-145.
- Rodríguez-Nieto, C.A.; Moll, V.F.; Borji, V.; Rodríguez-Vásquez, F.M. (2021). Mathematical connections from a networking of theories between extended theory of mathematical connections and onto-semiotic approach. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.* 53(9), 2364–2390. <https://doi.org/10.1080/0020739x.2021.1875071>
- Roher, D. y Taylor, K. (2007). The Shuffling of Mathematics Problems Improves Learning. *Instructional Science*, 35(6), 481-498.
- Rønning, M. (2011). Who benefits from homework assignments? *Economics of Education Review*, 30(1), 55–64. <https://doi.org/10.1016/j.econedurev.2010.07.001>
- Rose, D., Meyer, A. y Hitchcock, C. (2005). *The Universally Designed Classroom*. Harvard Education Press.
- Rose, D. y Meyer, A. (2006). *A Practical Reader in Universal Design for Learning*. Harvard Education Press.
- Rowland, T., Huckstep, P. y Thwaites, A. (2005) ‘Elementary teachers’ mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi’. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8(3), 255-281.
- Ruiz Martín, H. (2021). *¿Cómo aprendemos?: Una aproximación científica al aprendizaje y la enseñanza (Educación basada en evidencias)*. Editorial Graó.

- Ruiz Martín, H. (2023). *“Edumitos”: ideas sobre el aprendizaje sin respaldo científico*. Internacional Science Teaching Foundation.
- Saha, R. A., Ayub, A. F. M. y Tarmizi, R. A. (2010). The Effects of GeoGebra on Mathematics Achievement: Enlightening Coordinate Geometry Learning. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 8, 686-693.
<https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.12.095>
- Sanmartí, N. (2020) *Avaluar és aprendre: L'avaluació per millorar els aprenentatges de l'alumnat en el marc del currículum per competències*. Direcció General de Currículum i Personalització. Departament d'Educació. Barcelona.
- Sarama, J., Clements, D.H. y Spitler, M.E. (2017). Evidence of Teacher Change after Participating in TRIAD's Learning Trajectories-based Professional Development and after Implementing Learning Trajectory-based Mathematics Instruction. *Mathematics Teacher Education and Development*, 19, 58-75.
- Sawyer, A. (2008). *Making connections: promoting connectedness in early mathematics education*. En M. Goos, R. Brown y K. Makar (Eds.), Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australia - Navigating currents and charting directions MERGA 31. Mathematics Education Research Group of Australasia, Australia, Queensland, Brisbane (pp. 429-435).
- Schiefele, U. (2009). Situational and Individual Interest. En *Handbook of Motivation at School*, 211-236. Routledge.
- Schoenfeld, A. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*. Macmillan Publishing Company.
- Schoenfeld, A. H. y «the Teaching for Robust Understanding Project». (2016). *An Introduction to the Teaching for Robust Understanding (TRU) Framework*. Berkeley, CA: Graduate School of Education.
- Schulz, B. (2008). The importance of soft skills: Education beyond academic knowledge. *Nawa Journal of Communication*, 2(1), 146-154.

- Selwyn, N., Nemorin, S., Bulfin, S. y Johnson, N. F. (2020). The “obvious” stuff: exploring the mundane realities of students’ digital technology use in school. *Digital Education Review*, 37, 1–14. <https://doi.org/10.1344/der.2020.37.1-14>
- Sergiovanni, T. J. (1994). *Building community in schools*. Jossey-Bass.
- Sfard, A., Nesher, P., Streefland, L., Cobb, P. y Mason, J. (1998). Learning Mathematics through Conversation: Is It as Good as They Say? *For The Learning of Mathematics*, 18(1), 41–51. <https://eric.ed.gov/?id=EJ565648>
- Shield, M. y Dole, S. (2012). Assessing the potential of mathematics textbooks to promote deep learning. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 183–199. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9415-9>
- Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of new reform. *Harvard Educational Review*, 57, 1–22.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14. <https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>
- Siegle, D. y McCoach, D. B. (2007). Increasing Student Mathematics Self-Efficacy Through Teacher Training. *Journal of Advanced Academics*, 18(2), 278–312. <https://doi.org/10.4219/jaa-2007-353>
- Siemon, D., Barkatsas, T. y Seah, R. (2019). *Researching and Using Progressions (Trajectories) in Mathematics Education (Global Education in the 21st Century, 3)*. Brill. Sense Publishers.
- Šilinskas, G. y Kikas, E. (2017). Parental involvement in Math Homework: links to children’s performance and motivation. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 63(1), 17–37. <https://doi.org/10.1080/00313831.2017.1324901>
- Simon, M. A. y Blume, G. W. (1996). Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. *The Journal of Mathematical Behavior*, 15(1), 3–31. [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(96\)90036-X](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(96)90036-X)
- Singapore Math Inc. (2023). *What is Singapore Math?* Recuperado el 20 de febrero de 2023, de <https://www.singaporemath.com/pages/what-is-singapore-math>

- Skemp, R. R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20–26. <https://ci.nii.ac.jp/naid/10010963202>
- Skemp, R. R. (1987). *The Psychology of Learning Mathematics*. Erlbaum. Hillsdale.
- Smith, M. S. y Stein, M. K. (2011). *5 Practices for orchestrating productive mathematics discussions*. Corwin.
- Smith, M. S., Bill, V. y Hughes, E. K. (2008). Thinking Through a Lesson Protocol: A Key for Successfully Implementing High-level Tasks. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 14, 132–138.
- Spangler, D. A. y Wanko, J. J. (2017). *Enhancing Classroom Practice with Research Behind Principles to Actions*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Stein, M. K., Grover, B. y Henningsen, M. (1996). Building Student Capacity for Mathematical Thinking and Reasoning: An Analysis of Mathematical Tasks Used in Reform Classrooms. *American Educational Research Journal*, 33, 455–488.
- Stylianides, G. J. (2008). An Analytic Framework of Reasoning-and-Proving. *For the Learning of Mathematics*, 28(1), 9-16.
- Sugai, G. y Horner, R. H. (2009). Responsiveness-to-Intervention and School-Wide Positive Behavior Supports: Integration of Multi-Tiered System Approaches. *Exceptionality*, 17(4), 223-237. <https://doi.org/10.1080/09362830903235375>
- Swan, M. y Burkhardt, H. (2014). Lesson design for formative assessment. *Educational Designer*, 2(7). <https://www.educationaldesigner.org/ed/volume2/issue7/article24/>
- Szilágyi, J., Clements, D. H. y Sarama, J. (2013). Young Children's Understandings of Length Measurement: Evaluating a Learning Trajectory. *Journal for Research in Mathematics Education*, 44(3), 581-620. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.44.3.0581>
- Sztajn, P., Confrey, J., Wilson, P. H. y Edgington, C. P. (2012). Learning Trajectory Based Instruction. *Educational Researcher*, 41, 147 - 156.
- The Curriculum Development Council of Honk Kong. (2017). *Mathematics Education Key Learning Area Curriculum Guide (Primary 1 – Secondary 6)*.

- Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 127–146). Macmillan Publishing Co, Inc.
- Thompson, D. R., Huntley, M. A. y Suurtamm, C. (2018). *International Perspectives on Mathematics Curriculum. Research in Mathematics Education*. Information Age Publishing.
- Trautwein, U. (2007). The homework–achievement relation reconsidered: Differentiating homework time, homework frequency, and homework effort. *Learning and Instruction*, 17(3), 372–388.
<https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2007.02.009>
- Trouche, L., Drijvers, P., Gueudet, G. y Sacristan, A. I. (2013). Technology-driven developments and policy implications for mathematics education. En A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y F. K. S. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 753-790). Springer.
- Trouche, L., Gueudet, G. y Pepin, B. (2018). Documentational Approach to Didactics. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*, 1-11. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9_100011-1
- U.S. Department of Education. (2015). *Every Student Succeeds Act (ESSA)*.
<https://www.ed.gov/laws-and-policy/laws-preschool-grade-12-education/every-student-succeeds-act>
- UNESCO. (2023, August 11). *UNESCO issues urgent call for appropriate use of technology in education*.
<https://www.unesco.org/en/articles/unesco-issues-urgent-call-appropriate-use-technology-education>
- University of Pennsylvania Graduate School of Education. [s.f.]
<https://www.gse.upenn.edu/academics/faculty-directory/remillard>
- Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H. y Houang, R.T. (2002). *According to the book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks*. Kluwer Academic Publishers.

- Van De Walle, J. A., Karp, K. S., Bay-Williams, J. M. y Wray, J. A. (2018). *Elementary and middle school mathematics: Teaching Developmentally*. Prentice Hall.
- Van Den Heuvel-Panhuizen, M. y Buys, K. (2008). *Young Children Learn Measurement and Geometry*. Brill.
- Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2008): *Children Learn Mathematics. A Learning-Teaching Trajectory with Intermediate Attainment Targets for Calculation with Whole Numbers in Primary School. Dutch Design in Mathematics Education, V: 1*. Freudenthal Institute, Sense Publishers.
- VanLEHN, K. (2011). The Relative Effectiveness of Human Tutoring, Intelligent Tutoring Systems, and Other Tutoring Systems. *Educational Psychologist*, 46(4), 197-221. <https://doi.org/10.1080/00461520.2011.611369>
- Vatterott, C. (2010). Five Hallmarks of Good Homework. *Educational Leadership*, 68, 10-15.
- Vigotski, L. S. (1978). *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes*. Harvard University Press.
- Vilalta-Riera, A., Deulofeu-Piquet, J. y Morera-Úbeda, L. (2024). Enriching math teaching guides from a competency-based perspective. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 20(7), em2477. <https://doi.org/10.29333/ejmste/14761>
- Vilalta, A. (2021). Un proyecto para desarrollar la competencia matemática en el aula de primaria. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 92, 73-79.
- Vilalta, A. (2023) *Enhancing Mathematical Processes: Rich Math Tasks in Elementary Education* [Workshop]. Fall Conference of the Association of Mathematics Teachers of New Jersey (AMTNJ), Lincroft (NJ), USA.
- Vilalta, A. (2024). *Fostering Math Practices through Rich Math Tasks in Elementary Education*. [Company Workshop] Utah Council of Teachers of Math. Provo (UT), USA.
- Vilalta, A. y Morera, L. (2020). *Activitats riques per a l'aula de primària*. [Workshop] Congrés Català d'Educació Matemàtica. Reus-Tarragona.

- Vilalta, A., Calvo, C. y Morera, L. (2023). *Actividades ricas para primaria: los procesos matemáticos en el aula* [Workshop]. Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Lima, Perú.
- Vilalta, A., Deulofeu, J. y Morera, L. (2024). *Enriching Math Teaching Guides: a Competency-Based Framework* [Oral Communication]. 47th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME47). Auckland, New Zealand.
- Vilalta, A., Morera, L., Rojas, F. y Solar, H. (2021). *Rich Math Activities for a Primary School Class* [Virtual Workshop]. 14th International Congress of Mathematical Education, Shanghai, China.
- Vilalta, A., Torregrosa, A., Morera, L. y Real, A. (2022) *Actividades ricas para primaria: los procesos matemáticos en el aula* [Virtual Workshop]. IX Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, São Paulo, Brasil.
- Vincent, J. y Stacey, K. (2008). Do mathematics textbooks cultivate shallow teaching? Applying the TIMSS video study criteria to Australian eighth-grade mathematics textbooks. *Mathematics Education Research Journal*, 20(1), 81-106.
- Virginia Department of Education (2023). *Rich Mathematical Tasks*.
<https://www.doe.virginia.gov/teaching-learning-assessment/k-12-standards-instruction/mathematics/instructional-resources/rich-mathematical-task>
- Vlach, H. A., Sandhofer, C. M. y Kornell, N. (2008). The Spacing Effect in Children's Memory and Category Induction. *Cognition*, 109, 163-167.
- Weber, S. (1993). The Narrative Anecdote in Teacher Education. *Journal of Education for Teaching*, 19(1), 71-82.
<https://doi.org/10.1080/0260747930190107>
- Wilder, S. (2013). Effects of parental involvement on academic achievement: a meta-synthesis. *Educational Review*, 66(3), 377-397.
<https://doi.org/10.1080/00131911.2013.780009>
- Wilson, P. H., Mojica, G.F. y Confrey, J. (2013). Learning Trajectories in Teacher Education: Supporting Teachers' Understandings of Students' Mathematical Thinking. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32, 103-121.

11. Anexo

11.1. Declaración de autoría del «Libro blanco» de Innovamat

Yo, Albert Vilalta Riera, doctorando en el marco del doctorado industrial de la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB) realizado en Innovamat, declaro que la definición y redacción de los principios didácticos recogidos en el libro blanco de Innovamat fueron desarrolladas en el contexto de mi investigación doctoral.

Como se explica en el capítulo 3, los principios fueron redactados por mí y posteriormente revisados tanto por el director de tesis en la UAB, Jordi Deulofeu, como por la tutora en la empresa, Laura Morera, y los demás responsables didácticos de Innovamat, asegurando su rigor académico y su alineación con la visión de la empresa. Esto mismo se indica en el propio libro blanco, en las páginas iniciales.

Mediante la presente declaración, dejo constancia de mi autoría en la elaboración del libro blanco y de su vínculo directo con la investigación realizada en esta tesis doctoral industrial.

En prueba de conformidad, firman esta declaración los directores y el tutor de la tesis.

Jordi Deulofeu Piquet

Laura Morera Úbeda

Lluís Albarracín Gordo

- Witherell, C. y Noddings, N. (1991). *Stories Lives Tell: Narrative and Dialogue in Education*. Teachers College Pr.
- Xu, J. (2011). Homework completion at the secondary school level: A multilevel analysis. *Journal of Educational Research*, 104, 171-182.
- Xu, J. (2012). Homework and academic achievement. En J. Hattie y E. M. Anderman (Eds.), *International guide to student achievement* (pp. 199-201). New York: Routledge.
- Young, C. B., Wu, S. S. y Menon, V. (2012). The Neurodevelopmental Basis of Math Anxiety. *Psychological Science*, 23(5), 492-501.
<https://doi.org/10.1177/0956797611429134>
- Zazkis, R. y Liljedahl, P. (2009). *Teaching Mathematics as Storytelling*. Macmillan Publishers.
- Zhu, Y. y Fan, L. (2006). Focus on the presentation of problem types in intended curriculum: a comparison of selected mathematics textbooks from Mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 4(4), 609-626.

11. Anexo

11.1. Declaración de autoría del «Libro blanco» de Innovamat

Yo, Albert Vilalta Riera, doctorando en el marco del doctorado industrial de la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB) realizado en Innovamat, declaro que la definición y redacción de los principios didácticos recogidos en el libro blanco de Innovamat fueron desarrolladas en el contexto de mi investigación doctoral.

Como se explica en el capítulo 3, los principios fueron redactados por mí y posteriormente revisados tanto por el director de tesis en la UAB, Jordi Deulofeu, como por la tutora en la empresa, Laura Morera, y los demás responsables didácticos de Innovamat, asegurando su rigor académico y su alineación con la visión de la empresa. Esto mismo se indica en el propio libro blanco, en las páginas iniciales.

Mediante la presente declaración, dejo constancia de mi autoría en la elaboración del libro blanco y de su vínculo directo con la investigación realizada en esta tesis doctoral industrial.

En prueba de conformidad, firman esta declaración los directores y el tutor de la tesis.

Jordi Deulofeu Piquet

Laura Morera Úbeda

Lluís Albarracín Gordo