

# **El trasplante renal cruzado con múltiples donantes\***

Aina Rosales Calandre

Universitat Autònoma de Barcelona

16 de mayo, 2014

Treball Fi de Grau

Grau en Economia

Tutor: Jordi Massó Carreras

\*Agradezco a Jordi Massó el haberme introducido en el mundo de los trasplantes cruzados y haberme enseñado la cantidad de campos de aplicación que tiene la economía. También le doy las gracias por todo su tiempo y por todos los conocimientos que me ha transmitido.

## **Resumen**

Se describen los aspectos fundamentales de la insuficiencia renal, los principales tratamientos para tratar a los pacientes de esta enfermedad, y las compatibilidades que deben existir entre el paciente y el riñón del donante para poder realizar un trasplante. Se presentan los programas de trasplante renal cruzado como una solución para disminuir el problema de escasez de riñones, que no permite satisfacer la demanda existente. Además se describe el algoritmo de TTC de Gale diseñado para asignar objetos indivisibles a agentes, y se explica la aplicación propuesta de este algoritmo como mecanismo de asignación en los programas de trasplantes cruzados. Por último se propone una modificación del algoritmo de TTC de Gale para problemas de trasplantes cruzados cuando algunos pacientes disponen de múltiples donantes.

# El trasplante renal cruzado con múltiples donantes

## ÍNDICE

1. Introducción .....	4
2. El riñón .....	5
2.1. La insuficiencia renal .....	5
2.2. La diálisis .....	6
3. Los trasplantes renales de donantes vivos como tratamiento de la insuficiencia renal .....	6
3.1. Compatibilidad .....	7
4. Programa de trasplantes cruzados.....	8
4.1. El caso de España .....	8
4.2. Otros programas de trasplantes cruzados existentes.....	9
5. Definición del algoritmo TTC de Gale.....	10
5.1 Descripción del algoritmo de TTC de Gale como solución a la donación renal cruzada...	10
5.2. Propiedades de la asignación del TTC de Gale .....	15
6. Modificación del algoritmo TTC de Gale .....	16
6.1. Modificación del algoritmo para la introducción de más de un donante para cada paciente.....	16
6.2. Efecto de la introducción de un nuevo individuo en el programa de donación cruzada según su grupo ABO .....	21
6.3. Propiedades de la asignación del TTC de Gale modificada .....	24
7. Conclusiones.....	25
8. Bibliografía .....	26

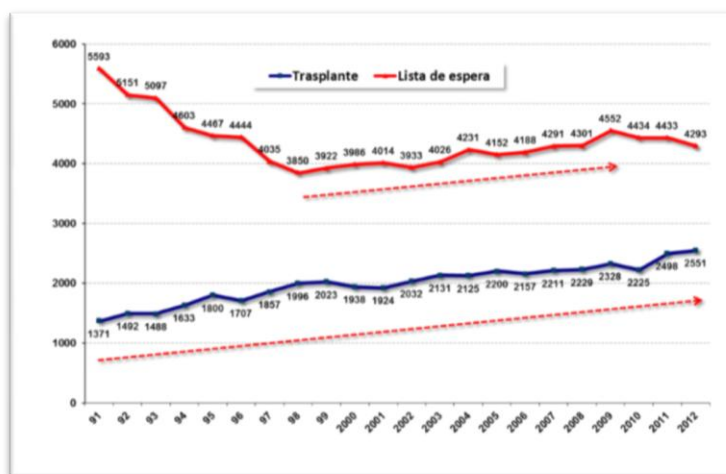
## 1. Introducción

La economía es la ciencia que trata de la asignación de los recursos escasos entre fines alternativos. La asignación de la mayoría de los recursos (bienes) se realiza a través de mercados y de sus precios. Pero existen mercados de determinados bienes, en los que la sociedad no quiere que los precios jueguen ese papel decisivo, ya que para ese tipo de asignaciones las características relevantes son otras diferentes. Algunos ejemplos claros de estas situaciones son la asignación de alumnos a las diferentes universidades, o de como los estudiantes de medicina son repartidos entre los diferentes hospitales o que mecanismo usar para distribuir a los niños en la escuela primaria. Los economistas Alvin E. Roth y Lloyd S. Shapley, recibieron en 2012 el Nobel de Economía, por su gran contribución a este tipo de problemas con sus aportaciones acerca de los diseños de mercados.

En este artículo se explica el algoritmo del TTC de Gale para solucionar problemas de asignación de objetos indivisibles a agentes, propuesto por David Gale en 1974, como un mecanismo para resolver los problemas de asignación de trasplantes cruzados de donantes vivos. Además introduciremos una modificación en este algoritmo para poder comprobar si en la situación en la que los pacientes dispongan de múltiples donantes, este continúa siendo un buen mecanismo de asignación y sigue manteniendo todas sus propiedades.

El principal tratamiento al que se someten los pacientes que sufren insuficiencia renal terminal es la diálisis, pero este es un tratamiento duro y costoso que deteriora la capacidad de vida de las personas que la padecen. Para ello existe otra alternativa al tratamiento de este tipo de patología, el trasplante renal, ya sea de donante cadáver o de donante vivo. Esta opción proporciona una mejor calidad de vida al paciente y un coste menor que la diálisis.

Tal y como observamos en la gráfica 1 el número de trasplantes de riñón realizados en España se ha duplicado en los últimos años (de 1.371 en el año 1991 hemos pasado a 2.551 en el año 2012). También podemos ver que la cantidad de personas en lista de espera se ha reducido en más de 1.000 personas (ha pasado de 5.593 a 4.552).



Gráfica 1: Lista de espera trasplante renal en España 1991-2012.

Esto muestra un gran progreso y un incremento del número de trasplantes realizados a lo largo de los últimos años, pero a la vez, también nos permite darnos cuenta que hay una escasez de órganos que no permite abastecer al gran número de pacientes que se encuentran a la espera para un trasplante de riñón.

Así pues, podemos decir que la principal limitación o problemática para que todo el mundo pueda disfrutar de un trasplante de riñón es la escasez de órganos. Es por eso que en los últimos años se ha buscado la manera de intentar solventar los casos en que si que existe un donante o órgano potencial para un paciente pero este no es compatible con su receptor, con tal de poder aumentar el número de trasplantes realizados y poder seguir reduciendo la lista de espera. Para ello una de las principales innovaciones de los últimos años, mencionada por primera vez por el médico norteamericano Rapaport en 1986, los trasplantes renales cruzados. Estos tal y como los explica la ONT en el Programa Nacional de Donación Renal Cruzada “dan la posibilidad de que pacientes que no pueden recibir un riñón de un donante, debido a una incompatibilidad del grupo sanguíneo ABO o por haber dado la prueba cruzada positiva, se les da la posibilidad de intercambiar donantes, de manera que cada uno de los receptores reciba un riñón compatible y los donantes realicen su deseo de donación”.

## **2. El riñón**

Los riñones son los órganos encargados de la filtración de la sangre, la cual realizan a través de unas pequeñas partículas llamadas nefronas, con el objetivo de excretar los productos no deseables mediante la orina. Además el riñón también contribuye en la homeostasis, es decir, en la regulación de diferentes sustancias para mantener el equilibrio del cuerpo, y en la producción de diferentes hormonas como son la renina, la vitamina D y la eritropoyetina

### **2.1. La insuficiencia renal**

La insuficiencia renal es la incapacidad de los riñones para realizar sus funciones básicas cuando estos no son capaces de filtrar las sustancias de desecho que se encuentran en la sangre.

Encontramos tres niveles o fases de insuficiencia renal. La insuficiencia renal crónica, que es aquella que presenta un deterioro constante a lo largo de los años de la capacidad de los riñones para realizar sus funciones; la aguda, que es la pérdida rápida y progresiva de la función renal, esta se produce de repente; y por último, encontramos la insuficiencia renal terminal que se produce cuando los riñones solo son capaces de funcionar por debajo del 15% de su capacidad, cuando se llega a este nivel solo se puede llevar a cabo un tratamiento sustitutivo, ya sea diálisis o un trasplante.

## **2.2. La diálisis**

La diálisis es el tratamiento que se les aplica a las personas que sufren insuficiencia renal terminal y que no disponen de un donante de riñón.

Hay básicamente dos tipos de diálisis:

- La hemodiálisis: se debe realizar en un lugar donde dispongan del dispositivo adecuado para poder filtrar la sangre. Esta consiste en filtrar la sangre y eliminar los desechos haciéndola pasar continuamente por un filtro exterior que hace la función de las nefronas y posteriormente devuelve la sangre filtrada al cuerpo.
- La diálisis peritoneal: esta es la que el paciente puede llevar a cabo sin necesidad de asistir al centro médico. Consiste en la introducción de un tubo en el peritoneo que se encarga de introducir en la cavidad abdominal un líquido llamado dializado que tiene la función de sacar las toxinas de los vasos sanguíneos y de esta manera poder realizar el filtrado de la sangre. Una vez finalizado el proceso de filtración se bombea el dializado hacia el exterior y las toxinas son expulsadas con él.

Este tratamiento tiene diferentes inconvenientes, el primero es que deteriora considerablemente la calidad de vida de la persona que padece insuficiencia renal. Otro de ellos es que este tipo de tratamientos o seguimientos son muy costosos.

## **3. Los trasplantes renales de donantes vivos como tratamiento de la insuficiencia renal**

Debido al elevado coste de la diálisis y a los efectos que esta provoca sobre la calidad de vida de los pacientes, hoy en día el trasplante renal es el mejor tratamiento existente para la gente que padece insuficiencia renal terminal.

A causa de la escasez de órganos para abastecer la cantidad de personas que se encuentran en la lista de espera para recibir un riñón, y gracias al gran conocimiento y experiencia que se tiene sobre el tema y al descubrimiento de los inmunosupresores los trasplantes de donante vivo han aumentado en los últimos años.

Esta modalidad de trasplantes se ha llevado a cabo por diferentes razones:

- La insuficiencia de donantes cadáver ha hecho que se busquen medidas alternativas para reducir las listas de espera de los trasplantes renales.
- A causa de la disminución de los accidentes de tráfico los donantes cadáver han disminuido considerablemente.
- El aumento de la edad potencial de los donantes y de las patologías que estos padecen.

- Por último, aunque no tan significativo, el impedimento cultural que en algunos, países como Latinoamérica, Japón y Corea hay con respecto a utilizar los órganos de los cadáveres.

No obstante, también es importante señalar que estos no son los únicos motivos que han llevado al desarrollo y a la utilización de trasplante de donantes vivos, sino que el resultado que este tipo de trasplante están dando es mucho mejor que el que presenta el de donante de cadáver.

Por lo tanto, es natural preguntarse porque si este tipo de donación es tan beneficiosa no se aplica en todos los sitios del mundo y con más frecuencia. La respuesta es sencilla porque la donación de donante vivo implica el tener que intervenir a una persona que se encuentra en un buen estado de salud para extraerle un riñón, cosa que significa que el donante tendrá que resistir el resto de su vida con tan solo un riñón.

Según el último balance de actividad de la ONT publicado en 2013, la donación de vivo se consolida como una de las vías más claras de crecimiento del número de donantes. El trasplante renal de vivo representa en este momento un 15% del total de los trasplantes renales efectuados en nuestro país, mientras que en el mundo representan un 40% del total, lo que significa que aún estamos lejos de los demás países.

### 3.1. Compatibilidad

Para poder realizar un trasplante de riñón es necesario que existan dos tipos de compatibilidades entre el donante y el receptor: el tipo sanguíneo y que los tejidos de ambos se parezcan lo más posible para poder disminuir el riesgo de que el receptor rechace el nuevo riñón.

Las principales compatibilidades que deben darse entre el donante y el receptor son:

- Compatibilidad ABO: es la que proviene del grupo sanguíneo, y es necesario que donante y receptor sean compatibles, ya que el sistema inmunitario atacará a cualquier riñón que no sea de un grupo sanguíneo compatible con el suyo. A continuación podemos ver como se distribuye esta compatibilidad:
  - ✓ Grupo A: solo puede recibir de A o de O, y puede donar a A y a AB.
  - ✓ Grupo B: solo puede recibir de B o de O, y puede donar a B y a AB.
  - ✓ Grupo AB: puede recibir de todos los grupos, pero solo puede donar a AB.
  - ✓ Grupo O: solo puede recibir de O, pero es donante universal.
- Compatibilidad HLA: es la que viene dada por el tipo de tejido, y esta se determina básicamente por 6 proteínas denominadas antígenos leucocitarios humanos situadas en la superficie de las células con núcleo (principalmente los leucocitos), y las cuales se encargan de diferenciar los cuerpos extraños que entran en contacto con el organismo para desarrollar una respuesta inmune en contra de los cuerpos infecciosos. El problema es que de estas 6 proteínas prácticamente cada persona tiene una versión

diferente, por lo tanto es muy difícil en este caso encontrar una compatibilidad del 100%, por eso en este tipo de compatibilidad se busca que los tejidos se parezcan lo más posible.

Como podemos ver en la clasificación anterior no tenemos en cuenta el factor Rh, ya que la incompatibilidad dada por este factor entre donante y paciente puede ser corregida o atenuada con el tratamiento inmunosupresor al que son sometidos los pacientes que reciben un órgano.

## **4. Programa de trasplantes cruzados**

En los últimos años hemos podido ver como los trasplantes de vivo tienen cada vez un papel más significativo en el total de trasplantes realizados, ya que es la única manera de satisfacer esta demanda de las personas que sufren insuficiencia renal. Este tipo de trasplantes normalmente suelen producirse entre familiares o amigos, los cuales donan uno de sus riñones al familiar que padece insuficiencia renal. En estos caso existe la posibilidad de que el donante y el paciente no sean compatibles, ya sea por el incompatibilidad del grupo sanguíneo ABO o por que la prueba cruzada (que testa el grado de compatibilidad de los HLA) entre paciente y receptor haya dado positiva, lo que significa que el paciente es sensible a determinados antígenos que el donante posee y eso no permite realizar el trasplante. Actualmente se han desarrollado lo que se llama programas de trasplantes cruzados.

Existen diferentes modalidades de trasplantes. Según el director de la ONT, Rafael Matesanz, existen “cruces simples: en los que dos parejas donante receptor incompatibles intercambian sus respectivos donantes. Cruces a tres o más bandas: en los que se forma un ciclo de trasplantes.[...] Intercambio utilizando parejas compatibles: se trata de un cruce simple o a varias bandas pero una o varias de las parejas incluidas son compatibles. [...] La utilización de un donante altruista o buen samaritano: se incluye el donante buen samaritano en el pool de parejas incompatibles, como inicio de una cadena de trasplantes que finaliza en un enfermo de la lista de espera de cadáver.”. Es necesario remarcar que en el caso de los cruces a varias bandas es muy importante el número de componentes de los cuales dispone el ciclo, ya que todas las operaciones deben realizarse a la vez para evitar que ninguno de los donantes que componen el ciclo tenga la posibilidad de revocar su consentimiento una vez se haya realizado el trasplante de su pareja incompatible. Este hecho provoca que un incremento considerable del número de componentes del ciclo pueda hacer imposible que este se llevara a cabo.

### **4.1. El caso de España**

El Programa Nacional de Donación Renal Cruzada de España está formado por un grupo de centros que deben cumplir con una serie de requisitos para poder formar parte del programa. Una vez un centro cumple con todos los requisitos necesarios para formar parte del programa, éste inscribe en un registro nacional a todas aquellas parejas donante-receptor que cumplan



con algunas de las siguientes características: incompatibilidad del grupo sanguíneo, prueba cruzada positiva o la existencia de un beneficio asociado a un procedimiento de trasplante renal cruzado (por ejemplo: obtener un riñón de una edad más parecida entre donante y receptor). Para realizar la asignación entre el donante y el receptor se usa un programa informático el cual asigna a través de un algoritmo cuales son los mejores emparejamientos teniendo en cuenta los dos factores de compatibilidad.

Este programa se puso en marcha por primera vez en España en el año 2009 e incluye todas las modalidades descritas anteriormente, los cruces simples y a varias bandas, la posibilidad de incluir parejas compatibles o un buen samaritano.

La evolución que ha sufrido este programa se puede ver claramente en la gráfica 2 donde se muestra claramente un aumento del número de parejas activas en los cruces realizados, el cual ha venido acompañado de un aumento del número de centros adscritos al programa de 8 a principios del 2009 a 20 en la actualidad.



Gráfica 2: Número de parejas activas en los cruces realizados

Es importante tener en cuenta el gran crecimiento que el programa ha experimentado. Desde el inicio del Programa Nacional de Donación Renal Cruzada en España se han realizado 44 trasplantes cruzados, 16 cruces simples una y cuatro cadenas de tres, de las cuales cada una de ellas ha incluido un donante buen samaritano.

## 4.2. Otros programas de trasplantes cruzados existentes

En la actualidad son muchos los países que tienen un programa de trasplantes cruzados. A continuación, sin ser exhaustivos, describiremos algunos de los más importantes de Estados Unidos y Europa.

En Estados Unidos existen diferentes programas de trasplantes cruzados.

El primero de todos los programas de donación cruzada fue el *New England Program for Kidney Exchange (NEPKE)* y fue implementado en el Massachusetts General Hospital que realizó su primer trasplante cruzado el 25 de febrero de 2003. También encontramos el de la

escuela de medicina de UCLA. El programa se llama *Ucla Kidney Exchange Program*, presenta los dos tipos de trasplantes cruzados que existen los swap, que vendrían a ser los cruces simples, y las chain transplantation, la cual empieza con un buen samaritano y se realiza una cadena donde el donante del paciente que ha recibido el órgano del buen samaritano dona su órgano a otro paciente desconocido. Al finalizar la operación el programa permite a los donantes y pacientes conocerse entre ellos. Desde el año 2001, el Johns Hopkins Comprehensive Transplant Center tiene un programa de trasplantes renales cruzados llamado *Paired Kidney Exchange Johns Hopkins*, que también permite a las parejas conocerse entre ellas pero solo una vez finalizado el intercambio. En 2003 Johns Hopkins Comprehensive Transplant Center, fue el primero del mundo en realizar un trasplante cruzado con un ciclo de tres parejas participantes, y en 2005 fue el primero en hacerlo con un ciclo de 5 parejas. La UNOS (United Network for Organ Sharing) también dispone de un programa de trasplantes cruzados llamado *Kidney Paired Donation (KPD)*, que incluye a todos los centros de Estados Unidos que pueden realizar trasplantes cruzados. En 2010, el Northwestern Memorial de Chicago, realizó un ciclo de trasplantes cruzados que involucró a 8 parejas.

Australia también tiene su propio programa llamado *Australian Paired Kidney Exchange (AKX)*.

En el caso de Europa, el Reino Unido dispone también de un programa de donación cruzada llamado *National Matching Scheme for Paired and Pooled (kidney) Donation*, en el cual se han llevado a cabo intercambios entre dos parejas, pero aún no se han realizado cruces de tres o más parejas. Holanda realizó su primer trasplante renal cruzado en 2003 en el Erasmus Medical Center en Rotterdam. En Alemania se implementó el 1 de enero de 2004 participando 7 centros médicos de trasplantes alemanes. Recientemente, en Abril del 2013 Portugal realizó su primer trasplante cruzado con el *Programa Nacional para Doação Renal Cruzada*. Además España, Portugal, Italia y Francia (que ya disponen cada uno de su propio programa de trasplantes cruzado) estudian colaborar entre ellos de manera que así pueda aumentar el número de trasplantes realizados.

## 5. Definición del algoritmo TTC de Gale

### 5.1 Descripción del algoritmo de TTC de Gale como solución a la donación renal cruzada

Dado este problema de incompatibilidad entre las parejas de pacientes y donantes vivos podemos adaptar el algoritmo TTC de Gale descrito en Shapley y Scarf (1974) para resolver problemas de asignación de objetos indivisibles. Roth, Sönmez y Ünver (2004), propusieron su adaptación para resolver problemas de trasplantes cruzados. Como veremos más adelante, el algoritmo tiene muy buenas propiedades.

Sea  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  un conjunto finito de  $n$  agentes (en nuestro caso pacientes) y  $O = \{o_1, \dots, o_n\}$  un conjunto finito de  $n$  objetos (órganos de donantes vivos). Una asignación es una función  $\mu: A \rightarrow O$  biyectiva de manera que para todo  $o \in O$  existe un  $a \in A$  tal que  $\mu(a) = o$ , y para todo par  $a, a' \in A$  distintos,  $\mu(a) \neq \mu(a')$ . Es decir, que a cada agente le corresponde un objeto, y a la vez este no puede ser asignado a más de un agente.

Disponemos de una asignación inicial en la que cada agente tiene su propio objeto  $\mu: A \rightarrow O$ , es decir, tenemos  $n$  parejas paciente-donante  $\{(a_1, o_1), \dots, (a_n, o_n)\}$  (de hecho  $\mu$  puede ser visto como este conjunto de  $n$  pares) que son incompatibles entre ellos, ya que si no fuera así se realizaría el trasplante y estas no entrarían en el problema de asignación. Queremos encontrar una nueva asignación  $\rho: A \rightarrow O$  que permita realizar algunos trasplantes entre las parejas paciente-donante que sean compatibles. Para ello, para cada agente  $a_i \in A$ , definiremos  $P_i$  como un orden o ranking de preferencia del agente  $a_i$  sobre el conjunto de objetos, de manera que el que goce de una mayor compatibilidad con el agente ocupe la primera posición en el ranking. Así, si el objeto  $o_j$  se sitúa en el ranking por encima del objeto  $o_k$  significará que  $o_j$  es mejor objeto para ese agente que  $o_k$ .

Sea  $P = (P_1, \dots, P_n)$  el perfil de preferencias de los  $n$  agentes que podemos representarlas como una tabla.

### Ejemplo 1:

Supondremos que  $|A| = |O| = 11$ . Cada agente  $a_j$ ,  $j = 1, \dots, 11$ , tiene un ranking de todos los objetos en  $O$ . Con las distintas características de los agentes y los objetos (tipos sanguíneo, HLA, edad, sexo, etc) podemos construir una tabla. Por ejemplo:

$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$
$o_6$	$o_6$	$o_8$	$o_{10}$	$o_4$	$o_2$	$o_4$	$o_{11}$	$o_3$	$o_3$	$o_1$
$o_8$	$o_8$	$o_{10}$	$o_8$	$o_2$	$o_9$	$o_{11}$	$o_4$	$o_5$	$o_5$	$o_{11}$
$o_7$	$o_{10}$	$o_7$	$o_7$	$o_{11}$	$o_4$	$o_2$	$o_9$	$o_4$	$o_{11}$	$o_7$
$o_{10}$	$o_7$	$o_6$	$o_6$	$o_9$	$o_{11}$	$o_9$	$o_2$	$o_9$	$o_4$	$o_5$
$o_4$	$o_4$	$o_{11}$	$o_9$	$o_1$	$o_3$	$o_1$	$o_{10}$	$o_2$	$o_2$	$o_4$
$o_2$	$o_9$	$o_4$	$o_4$	$o_8$	$o_6$	$o_8$	$o_7$	$o_{11}$	$o_9$	$o_{10}$
$o_9$	$o_{11}$	$o_2$	$o_{11}$	$o_5$	$o_{10}$	$o_3$	$o_5$	$o_7$	$o_{10}$	$o_6$
$o_{11}$	$o_2$	$o_9$	$o_2$	$o_{10}$	$o_5$	$o_7$	$o_6$	$o_8$	$o_6$	$o_9$
$o_3$	$o_5$	$o_1$	$o_5$	$o_6$	$o_1$	$o_6$	$o_8$	$o_6$	$o_8$	$o_3$
$o_1$	$o_3$	$o_3$	$o_3$	$o_7$	$o_7$	$o_{10}$	$o_3$	$o_{71}$	$o_1$	$o_8$
$o_5$	$o_1$	$o_5$	$o_1$	$o_3$	$o_8$	$o_5$	$o_1$	$o_{10}$	$o_7$	$o_2$

Podemos resolver el problema de asignación a través del algoritmo de TTC de Gale con esta tabla como input.

Dado un problema de asignación  $(A, O, P, \mu)$  obtendremos la asignación del algoritmo a través de las siguientes etapas:

1ª etapa:

1. Se construye un grafo con nodos, que representan a las diferentes parejas paciente-donante incompatibles; es decir, el nodo 1 es la pareja  $(a_1, o_1)$ , ..., el nodo  $n$  es la pareja  $(a_n, o_n)$ .
2. Cada agente señala a su mejor objeto, de manera que de cada nodo solo sale una flecha dirigida al nodo que contiene ese mejor objeto. A partir del grafo dirigido se

construyen los ciclos. Es fácil observar que al menos existe un ciclo (debido a que hay un número finito de nodos) y que estos no se interceptan (ya que un mismo agente solo puede señalar a un objeto).

3. Se eliminan del grafo todos aquellos agentes que pertenezcan a un ciclo juntamente con su mejor objeto y se les asigna el objeto señalado, es decir, se satisfacen los ciclos.
4. Si queda algún agente se pasa a la siguiente etapa donde se repite exactamente el mismo procedimiento, utilizando como input el conjunto definido al eliminar todos los agentes y objetos asignados en la presente etapa, y eliminado de los órdenes de preferencias, de los agentes no asignados, los objetos que ya han sido asignados.

Etapa  $k > 1$ :

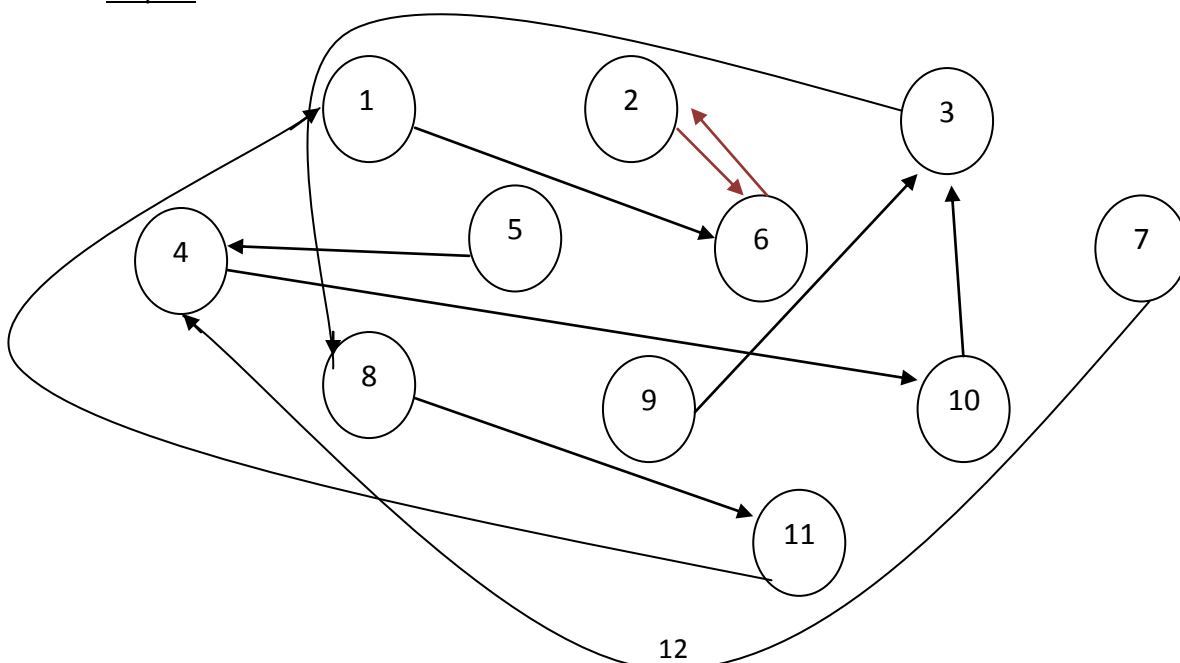
1. Se construye un grafo con los nodos restantes de la etapa  $k - 1$ , que representan a las diferentes parejas paciente-donante incompatibles que aun no han sido asignadas.
2. Cada agente señala a su mejor objeto, de manera que de cada nodo solo sale una flecha. A partir del grafo dirigido se construyen los ciclos.
3. Se eliminan del grafo todos aquellos agentes que pertenezcan a un ciclo juntamente con su mejor objeto y se les asigna el objeto señalado, es decir, se satisfacen los ciclos.
4. Si queda algún agente se pasa a la siguiente etapa donde se repite exactamente el mismo procedimiento al problema reducido.

Cuando ya no quede ningún agente, significará que todos los agentes tienen un objeto asignado. Esta asignación será el resultado de haber aplicado el algoritmo y la definiremos , como  $\rho: A \rightarrow O$ .

### **Ejemplo 1 (continuación):**

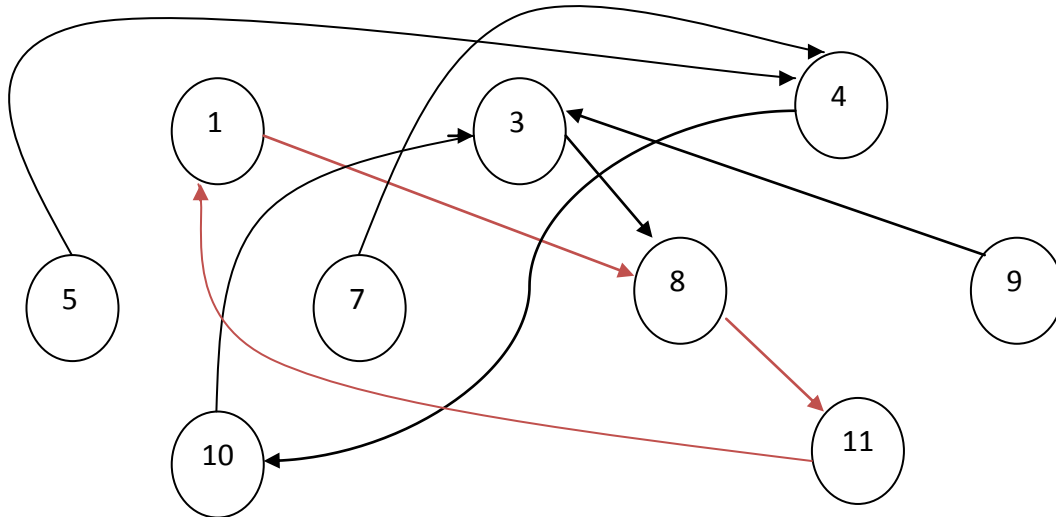
Construimos el grafo con los 11 nodos y hacemos salir de cada uno una flecha señalando al nodo que contiene el órgano que ocupa la primera posición en su ranking de preferencia. Por ejemplo, del nodo 1 sale una flecha hacia el nodo 6, ya que el objeto  $o_6$  es el mejor para el agente  $a_1$ , y así sucesivamente.

Etapa 1:



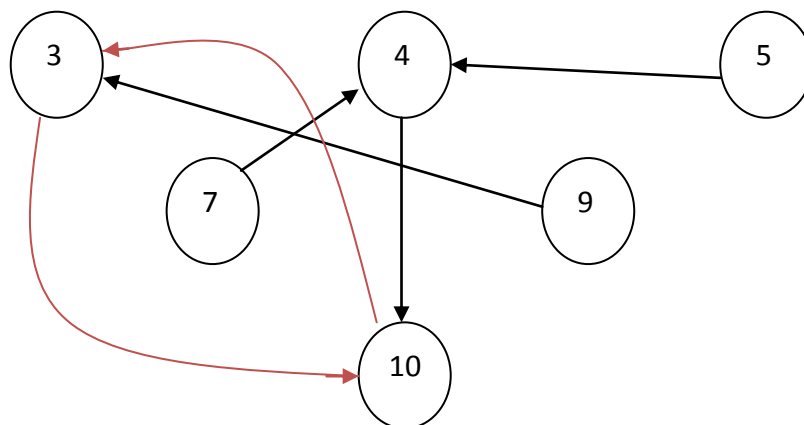
Sacamos del grafo los nodos que satisfacen un ciclo, que en nuestro caso son los nodos 6 y 2, y repetimos la operación con los nodos restantes. El agente 2 es asignado al objeto 6 y el agente 6 al objeto 2.

Etapas 2:



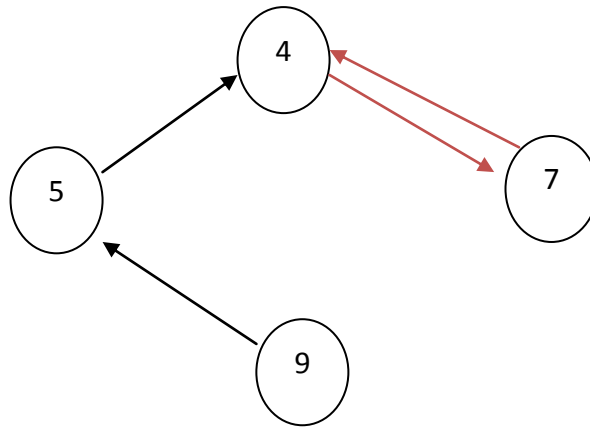
Sacamos ahora del grafo los nodos 1, 8 y 11 ya que satisfacen el ciclo en la segunda etapa y procedemos a realizar la misma acción en la tercera etapa. Los agentes 1, 8 y 11 son asignados a los objetos 8, 11 y 1, respectivamente.

Etapas 3:



A continuación sacamos del grafo todos los nodos que pertenecen a un ciclo satisfecho, nodos 3 y 10, y pasamos a la siguiente etapa con los nodos restantes. El agente 3 es asignado al objeto 10 y el agente 10 al objeto 3.

Etapas 4:



Sacamos los nodos 4 y 7 del grafo y realizamos la misma operación que anteriormente con los últimos nodos que restan de las etapas anteriores. El agente 4 es asignado al objeto 7 y el agente 7 al objeto 4.

Etapas 5:



Finalmente, el agente 5 es asignado al objeto 9 y el agente 9 al objeto 5.

Una vez finalizadas todas las etapas podemos ver en la siguiente tabla el resultado de la nueva asignación, y en ella podemos apreciar que todos los agentes mejoran su situación y obtienen un objeto mejor del que disponían inicialmente.

$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$
$O_6$	$O_6$	$O_8$	$O_{10}$	$O_4$	$O_2$	$O_4$	$O_{11}$	$O_3$	$O_3$	$O_1$
$O_8$	$O_8$	$O_{10}$	$O_8$	$O_2$	$O_9$	$O_{11}$	$O_4$	$O_5$	$O_5$	$O_{11}$
$O_7$	$O_{10}$	$O_7$	$O_7$	$O_{11}$	$O_4$	$O_2$	$O_9$	$O_4$	$O_{11}$	$O_7$
$O_{10}$	$O_7$	$O_6$	$O_6$	$O_9$	$O_{11}$	$O_9$	$O_2$	$O_9$	$O_4$	$O_5$
$O_4$	$O_4$	$O_{11}$	$O_9$	$O_1$	$O_3$	$O_1$	$O_{10}$	$O_2$	$O_2$	$O_4$
$O_2$	$O_9$	$O_4$	$O_4$	$O_8$	$O_6$	$O_8$	$O_7$	$O_{11}$	$O_9$	$O_{10}$
$O_9$	$O_{11}$	$O_2$	$O_{11}$	$O_5$	$O_{10}$	$O_3$	$O_5$	$O_7$	$O_{10}$	$O_6$
$O_{11}$	$O_2$	$O_9$	$O_2$	$O_{10}$	$O_5$	$O_7$	$O_6$	$O_8$	$O_6$	$O_9$
$O_3$	$O_5$	$O_1$	$O_5$	$O_6$	$O_1$	$O_6$	$O_8$	$O_6$	$O_8$	$O_3$
$O_1$	$O_3$	$O_3$	$O_3$	$O_7$	$O_7$	$O_{10}$	$O_3$	$O_7$	$O_1$	$O_8$
$O_5$	$O_1$	$O_5$	$O_1$	$O_3$	$O_8$	$O_5$	$O_1$	$O_{10}$	$O_7$	$O_2$

La asignación obtenida al aplicar el algoritmo de TTC de Gale es:

$$\rho = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} \\ o_8 & o_6 & o_{10} & o_7 & o_9 & o_2 & o_4 & o_{11} & o_5 & o_3 & o_1 \end{pmatrix}$$

## 5.2. Propiedades de la asignación del TTC de Gale

Esta nueva asignación obtenida de aplicar el algoritmo del TTC de Gale a cualquier perfil de preferencias tiene las siguientes propiedades:

El algoritmo selecciona una asignación en el núcleo.

El núcleo de un intercambio es aquella asignación que no puede mejorarse, o bloquearse por ninguna coalición de agentes, es decir, que ningún subgrupo de agentes puede reorganizarse fuera del grupo y conseguir más utilidad que la obtenida en el grupo. Roth y Postlewaite (1977) demostraron que el algoritmo de TTC de Gale selecciona la única asignación en el núcleo.

Sea  $\rho$  la asignación obtenida al problema  $(A, O, P, \mu)$  al aplicar el algoritmo de TTC de Gale, y sean  $E_1, \dots, E_k$  los agentes asignados y sacados del problema en cada una de las etapas  $1, \dots, k$  del algoritmo. Podemos decir que no habrá ningún agente de la etapa  $E_1$  que quiera bloquear la asignación  $\rho$  ya que este ha sido asignado a su mejor objeto. Lo mismo sucederá con los agentes de las etapas posteriores, ya que cada uno de ellos estará obteniendo su mejor objeto, de entre los objetos que aún no han sido asignados.

El mecanismo definido por el TTC de Gale no es manipulable.

Roth (1982) establece que el mecanismo de TTC de Gale no es manipulable. Sea  $\rho$  la asignación obtenida al revelar las preferencias de cada individuo y donde  $E_1, \dots, E_k$  son los agentes asignados y sacados del problema en cada una de las etapas. Entonces, ningún agente contenido en la etapa  $E_1$  querrá declarar una preferencia distinta, ya que todos están obteniendo su mejor objeto. Además ningún agente que no pertenezca a esta etapa podrá modificar el resultado de la asignación en esta primera etapa revelando unas preferencias distintas, ya que estos no forman parte del ciclo.

Lo mismo pasa en las siguientes etapas, en cada una de ellas los agentes reciben su mejor objeto una vez eliminados los objetos ya asignados, por lo tanto ninguno de ellos querrá revelar unas preferencias distintas, ya que están obteniendo su mejor objeto.

La asignación es individualmente racional.

Sea  $\mu$  la asignación inicial antes de aplicar el algoritmo, y  $\rho$  la asignación obtenida de la aplicación del algoritmo. La asignación que proporciona el TTC de Gale es individualmente racional ya que cada agente obtiene un objeto mejor que el que tenía o el mismo que en la asignación inicial.

Ma (1994) demostró que el mecanismo del núcleo es el único que satisface las tres propiedades: el mecanismo es individualmente racional, eficiente y no manipulables.

La asignación seleccionada por el TTC de Gale es parte de un equilibrio competitivo.

Un equilibrio competitivo es aquel que asigna los recursos a través de la relación del precio de los bienes y la valoración que los consumidores tienen de esos bienes. De manera que cada consumidor obtiene una cantidad de recursos relativa a su valoración de estos.

En el caso de la asignación de TTC de Gale, esta se comporta como un equilibrio competitivo, ya que cada agente obtiene un objeto en función del objeto del que dispone, de manera que aquellos agentes que dispongan de un objeto con mayores cualidades, y que por lo tanto se sitúe en los primeros lugares de las preferencias de los otros agentes, obtendrá su mejor objeto con más facilidad, ya que será preferido por un mayor número de agentes y por lo tanto tendrá más posibilidades de pertenecer a un ciclo, con un objeto mejor.

El mecanismo es eficiente en el sentido de Pareto.

Una asignación es eficiente en el sentido de Pareto si no es posible mejorar a un agente sin que otro empeore. Al tratarse de un equilibrio competitivo el mercado se vacía, es decir, todos los recursos son asignados a algún agente, y eso comporta que para mejorar el bienestar o la utilidad de uno de estos agentes es necesario que otro empeore.

## 6. Modificación del algoritmo TTC de Gale

### 6.1. Modificación del algoritmo para la introducción de más de un donante para cada paciente

Sea  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  un conjunto finito de  $n$  agentes (pacientes) y  $O = \{o_1, \dots, o_m\}$  un conjunto finito de  $m$  objetos (órganos de donantes vivos), donde  $m \geq n$ , es decir, algunos agentes disponen de más de un objeto. Definimos  $O_i = \{o_{i1}, \dots, o_{ik_i}\}$ , donde  $k_i$  es el número de objetos del que dispone el agente  $i$  (donantes por paciente). Para poder resolver el problema definiremos el conjunto  $\hat{A}$  replicando cada agente  $i$ ,  $k_i$  veces. Por lo tanto,  $\hat{A}$  puede escribirse como  $\hat{A} = \{a_{11}, \dots, a_{1k_1}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nk_n}\}$ , y su cardinalidad es  $\hat{n} \equiv m$ .

Una asignación del problema modificado es una función biyectiva  $\mu: \hat{A} \rightarrow O$ .

Disponemos de una asignación inicial  $\hat{\mu}: \hat{A} \rightarrow O$  en la que cada agente tiene sus propios objetos, es decir,  $\hat{\mu}$  también puede describirse como el conjunto de  $\hat{n}$  pares de paciente-donantes  $\hat{\mu}_i = \{(a_{11}, o_{11}), \dots, (a_{1k_1}, o_{1k_1}), \dots, (a_{n1}, o_{n1}), \dots, (a_{nk_n}, o_{nk_n})\}$  que son incompatibles entre ellos, ya que si no fuera así se realizaría el trasplante y estos no entrarían en el problema de asignación. Lo que queremos es encontrar una nueva asignación  $\hat{\rho}: \hat{A} \rightarrow O$  que haga que las parejas paciente-donante sean compatibles. Para ello definiremos  $\hat{P}$  como un orden o ranking de preferencia para cada agente sobre los objetos, de manera que el que goce de una mayor compatibilidad con el agente ocupe la primera posición en el ranking. Para poder tener en cuenta los diferentes objetos de cada agente, los agentes que dispongan de más de un objeto realizarán una réplica de sus preferencias para cada uno de los objetos de los que dispongan, de manera que  $\hat{P}_i = \{P_{i1}, \dots, P_{ik_i}\}$ . Entonces el nuevo problema de asignación  $(\hat{A}, O, \hat{P}, \hat{\mu})$  es un problema con el mismo número de agentes y objetos.

#### Ejemplo 2:

Modificamos el ejemplo 1, permitiendo que el agente 4 disponga de dos donantes, el anterior ( $o_4 = o_{41}$ ) y el nuevo,  $o_{42}$ .



Ahora dispondremos de una tabla de ordenación de preferencias idéntica a la anterior a la cual le añadiremos una columna adicional que replique las preferencias del agente 4, ya que en nuestro caso es el que dispone de un donante adicional, e incorporaremos el objeto  $o_{42}$  (órgano del segundo donante del agente 4) entre las preferencias de los agentes.

En el siguiente ejemplo analizaremos el caso en el que el objeto  $o_{42}$  del agente 4 se encuentra en el ranking de preferencia de cada agente por encima de su asignación inicial, ya que si este se encontrara por debajo de su asignación en el modelo inicial, este nuevo objeto no podría modificar el resultado del problema. Abusando de la notación, si  $k_i = 1$ , denotaremos por  $o_i$  el objeto  $o_{i1}$ .

$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_{41}$	$P_{42}$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$
$o_6$	$o_{42}$	$o_{42}$	$o_{10}$	$o_{10}$	$o_{41}$	$o_{42}$	$o_{42}$	$o_{42}$	$o_3$	$o_{42}$	$o_{42}$
$o_{42}$	$o_6$	$o_8$	$o_8$	$o_8$	$o_2$	$o_2$	$o_{41}$	$o_{11}$	$o_{42}$	$o_3$	$o_1$
$o_8$	$o_8$	$o_{10}$	$o_{42}$	$o_{42}$	$o_{42}$	$o_9$	$o_{11}$	$o_{41}$	$o_5$	$o_5$	$o_{11}$
$o_7$	$o_{10}$	$o_7$	$o_7$	$o_7$	$o_{11}$	$o_{41}$	$o_2$	$o_9$	$o_{41}$	$o_{11}$	$o_7$
$o_{10}$	$o_7$	$o_6$	$o_6$	$o_6$	$o_9$	$o_{11}$	$o_9$	$o_2$	$o_9$	$o_{41}$	$o_5$
$o_{41}$	$o_{41}$	$o_{11}$	$o_9$	$o_9$	$o_1$	$o_3$	$o_1$	$o_{10}$	$o_2$	$o_2$	$o_{41}$
$o_2$	$o_9$	$o_{41}$	$o_{41}$	$o_{41}$	$o_8$	$o_6$	$o_8$	$o_7$	$o_{11}$	$o_9$	$o_{10}$
$o_9$	$o_{11}$	$o_2$	$o_{11}$	$o_{11}$	$o_5$	$o_{10}$	$o_3$	$o_5$	$o_7$	$o_{10}$	$o_6$
$o_{11}$	$o_2$	$o_9$	$o_2$	$o_2$	$o_{10}$	$o_5$	$o_7$	$o_6$	$o_8$	$o_6$	$o_9$
$o_3$	$o_5$	$o_1$	$o_5$	$o_5$	$o_6$	$o_1$	$o_6$	$o_8$	$o_6$	$o_8$	$o_3$
$o_1$	$o_3$	$o_3$	$o_3$	$o_3$	$o_7$	$o_7$	$o_{10}$	$o_3$	$o_{71}$	$o_1$	$o_8$
$o_5$	$o_1$	$o_5$	$o_1$	$o_1$	$o_3$	$o_8$	$o_5$	$o_1$	$o_{10}$	$o_7$	$o_2$

Una vez realizada la tabla con cada una de las preferencias de los agentes, podemos resolver el problema de asignación a través del algoritmo de TTC de Gale con esta tabla como input.

Dado un problema de asignación  $(\hat{A}, O, \hat{P}, \hat{\mu})$  obtendremos la asignación del algoritmo a través de las siguientes etapas, pero debemos tener en cuenta que cuando saquemos a un agente de un ciclo tendremos que eliminar, también, todos los objetos que este agente tenía (agentes replicados), excepto el que participa en el ciclo ya que cada agente solo va a donar uno de sus objetos:

1ª etapa:

1. Se construye un grafo con nodos, que representan a las diferentes parejas paciente-donante incompatibles, es decir, el nodo 1.1 es la pareja  $(a_{11}, o_{11})$ , ..., el nodo 1. $k_1$  es la pareja  $(a_{1k_1}, o_{1k_1})$ , ..., el nodo n.1 es la pareja  $(a_{1n}, o_{1n})$ , ..., y el nodo n. $k_n$  es la pareja  $(a_{nk_n}, o_{nk_n})$ .
2. Cada agente señala a su mejor objeto, de manera que de cada nodo solo sale una flecha. Entonces construimos los ciclos, ya que al menos existe un ciclo y que estos no se interceptan.
3. Se eliminan del grafo todos aquellos agentes que pertenezcan a un ciclo juntamente con su mejor objeto y se les asigna el objeto señalado, es decir, se satisfacen los ciclos.

Además se sacan también del grafo todas aquellas réplicas que correspondan a los agentes que ya pertenecen a un ciclo, ya que estos solo donaran uno de sus objetos.

4. Si queda algún agente se pasa a la siguiente etapa donde se repite el mismo procedimiento.

Etapa  $k > 1$ :

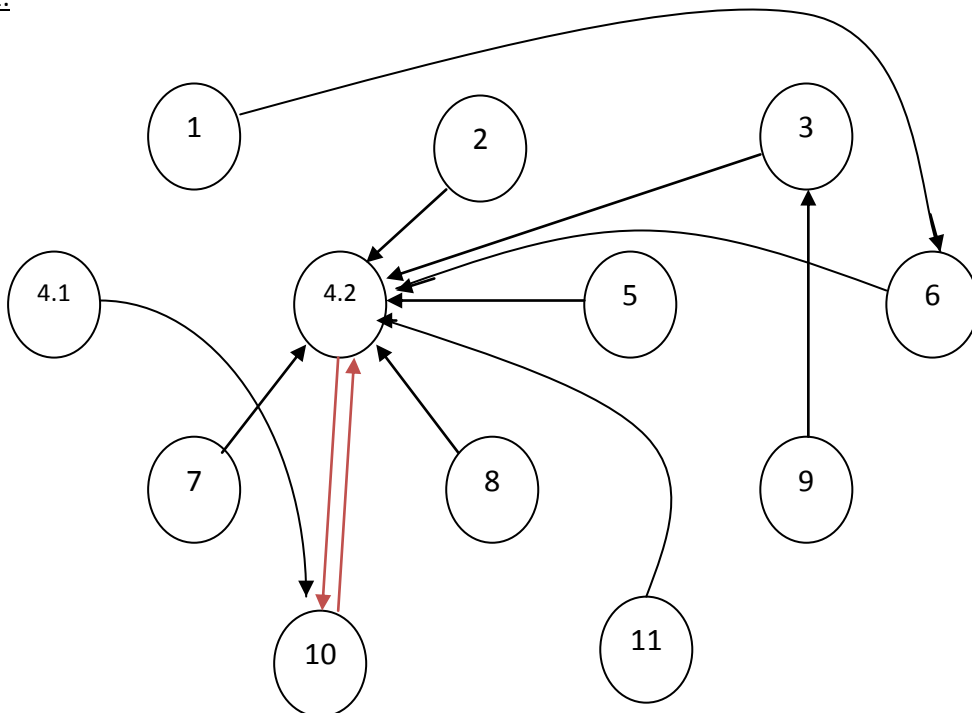
1. Se construye un grafo con los nodos restantes de la etapa  $k - 1$ , que representan a las diferentes parejas paciente-donante incompatibles que aun no han sido asignadas.
2. Cada agente señala a su mejor objeto, de manera que de cada nodo solo sale una flecha. Entonces construimos los ciclos.
3. Se eliminan del grafo todos aquellos agentes que pertenezcan a un ciclo juntamente con su mejor objeto y se les asigna el objeto señalado, es decir, se satisfacen los ciclos. Además se sacan también del grafo todas aquellas réplicas que correspondan a los agentes que ya disponen de una asignación, ya que estos solo donaran uno de sus objetos.
4. Si queda algún agente se pasa a la siguiente etapa donde se repite el mismo procedimiento.

Cuando ya no quede ningún agente, significará que todos los agentes tienen un objeto asignado. Esta asignación será el resultado de haber aplicado el algoritmo y la definiremos como  $\hat{p}: \hat{A} \rightarrow O$ .

### Ejemplo 2 (continuación):

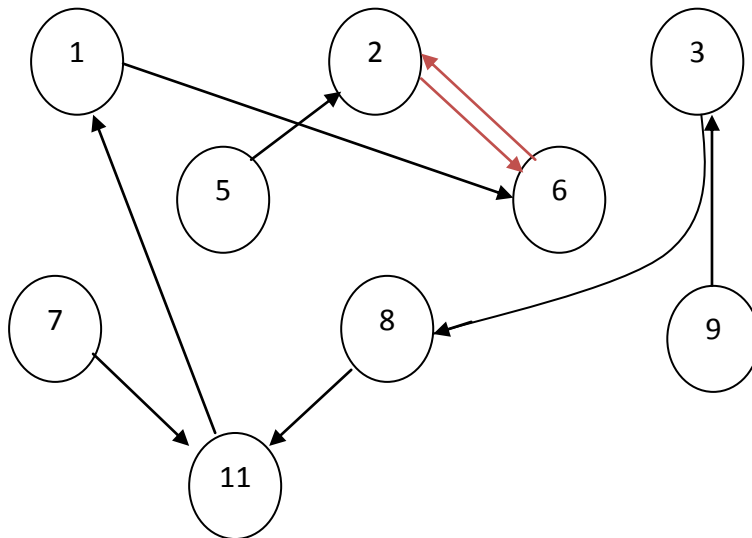
Construimos el grafo con los 12 nodos y hacemos salir de cada uno una flecha señalando al nodo que contiene el objeto que ocupa la primera posición en su ranking de preferencia. Por ejemplo, del nodo 1 sale una flecha hacia el nodo 6, ya que el objeto  $o_6$  es el mejor para el agente  $a_1$ , y así sucesivamente.

Etapa 1:



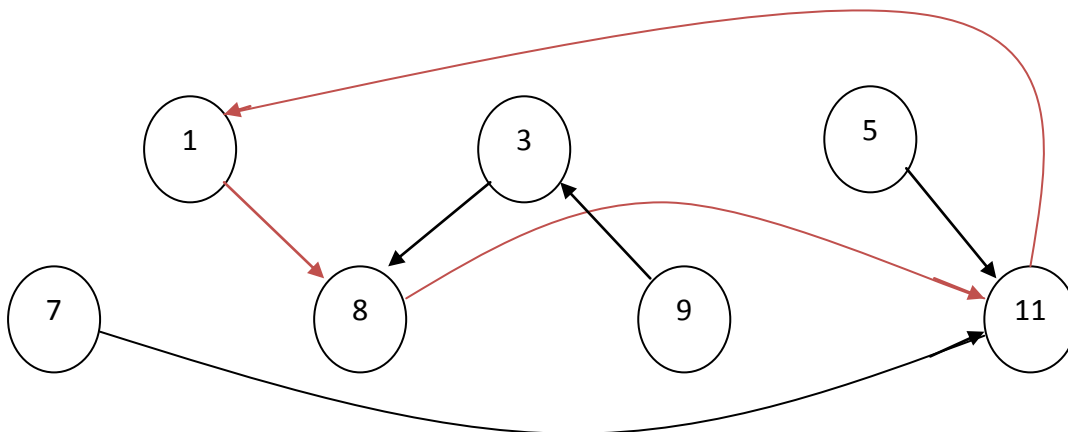
Sacamos del grafo los nodos 10 y 4.2, ya que estos forman un ciclo, pero al sacar del grafo el nodo 4.2 debemos sacar también el nodo 4.1, ya que estos son replicas y los dos pertenecen al mismo agente, y este solo va a donar uno de sus órganos. El agente 10 es asignado al objeto 4.1 y el agente 4.2 al objeto 10.

### Etapas 2:



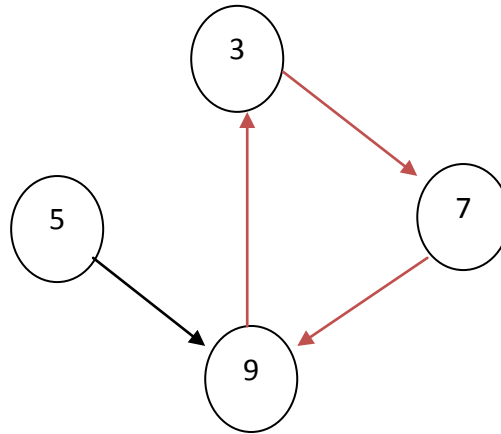
En esta etapa se satisface un ciclo formado por los nodos 2 y 6, por lo tanto los retiramos del grafo y pasamos a la siguiente etapa con los nodos restantes. El agente 6 es asignado al objeto 2 y el agente 2 al objeto 6.

### Etapas 3:



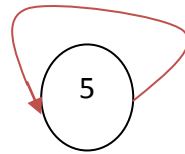
En esta etapa encontramos un ciclo formado por tres parejas, los nodos 1, 8 y 11. Los sacamos del grafo y repetimos la operación con los nodos restantes. Los agentes 1, 8 y 11 son asignados a los objetos 8, 11 y 1, respectivamente.

Etapla 4:



Volvemos a encontrar un ciclo de tres parejas formado por los nodos 3, 7 y 9. Procedemos a la siguiente etapa con el único nodo restante. Los agentes 3, 7 y 9 son asignados a los objetos 7, 9 y 3, respectivamente.

Etapla 5:



En esta última etapa solo nos queda un nodo el cual por lo tanto al agente 5 le es asignado su mismo objeto.

En la siguiente tabla podemos ver el resultado de la asignación al aplicar el algoritmo de TTC de Gale modificado.

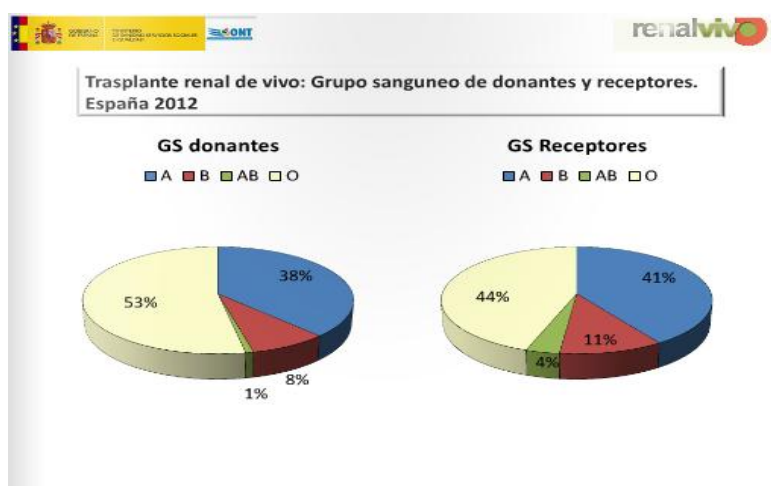
$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_{41}$	$P_{42}$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$
$O_6$	$O_{42}$	$O_{42}$	$O_{10}$	$O_{10}$	$O_{41}$	$O_{42}$	$O_{42}$	$O_{42}$	$O_3$	$O_{42}$	$O_{42}$
$O_{42}$	$O_6$	$O_8$	$O_8$	$O_8$	$O_2$	$O_2$	$O_{41}$	$O_{11}$	$O_{42}$	$O_3$	$O_1$
$O_8$	$O_8$	$O_{10}$	$O_{42}$	$O_{42}$	$O_{42}$	$O_9$	$O_{11}$	$O_{41}$	$O_5$	$O_5$	$O_{11}$
$O_7$	$O_{10}$	$O_7$	$O_7$	$O_7$	$O_{11}$	$O_{41}$	$O_2$	$O_9$	$O_{41}$	$O_{11}$	$O_7$
$O_{10}$	$O_7$	$O_6$	$O_6$	$O_6$	$O_9$	$O_{11}$	$O_9$	$O_2$	$O_9$	$O_{41}$	$O_5$
$O_{41}$	$O_{41}$	$O_{11}$	$O_9$	$O_9$	$O_1$	$O_3$	$O_1$	$O_{10}$	$O_2$	$O_2$	$O_{41}$
$O_2$	$O_9$	$O_{41}$	$O_{41}$	$O_{41}$	$O_8$	$O_6$	$O_8$	$O_7$	$O_{11}$	$O_9$	$O_{10}$
$O_9$	$O_{11}$	$O_2$	$O_{11}$	$O_{11}$	$O_5$	$O_{10}$	$O_3$	$O_5$	$O_7$	$O_{10}$	$O_6$
$O_{11}$	$O_2$	$O_9$	$O_2$	$O_2$	$O_{10}$	$O_5$	$O_7$	$O_6$	$O_8$	$O_6$	$O_9$
$O_3$	$O_5$	$O_1$	$O_5$	$O_5$	$O_6$	$O_1$	$O_6$	$O_8$	$O_6$	$O_8$	$O_3$
$O_1$	$O_3$	$O_3$	$O_3$	$O_3$	$O_7$	$O_7$	$O_{10}$	$O_3$	$O_{71}$	$O_1$	$O_8$
$O_5$	$O_1$	$O_5$	$O_1$	$O_1$	$O_3$	$O_8$	$O_5$	$O_1$	$O_{10}$	$O_7$	$O_2$

## 6.2. Efecto de la introducción de un nuevo individuo en el programa de donación cruzada según su grupo ABO

Para poder evaluar una situación más real, en la que el segundo donante del paciente 4 ( $o_{42}$ ) suponga una mejor opción para algunos de los pacientes y para otros no, debemos establecer un criterio que haga que el órgano o donante  $o_{42}$  sea compatible con algunos pacientes y con otros no. En este caso utilizaremos el grupo sanguíneo, y observaremos cuales son los resultados cambiando el tipo sanguíneo del segundo donante del paciente 4 ( $o_{42}$ ).

Para ello, en primer lugar, tenemos que tener en cuenta las normas de compatibilidad del donante según el grupo sanguíneo, sin tener en cuenta el Rh, ya que este no influye en un trasplante.

Además para hacer una mejor aproximación de la distribución de los grupos sanguíneos entre la población utilizaremos los datos estadísticos obtenidos por diferentes estudios sobre la distribución de los grupos sanguíneos en España, tanto de los donantes como de los receptores. Estos son los siguientes:



Gráfica 3. Fuente: Organización Nacional de Trasplantes

Como nosotros disponemos de un grupo de 11 parejas, de acuerdo con estos datos y para simplificar los cálculos supondremos que, en nuestra población hay 4 agentes (pacientes en nuestro caso) y 4 objetos (donantes) pertenecientes al grupo sanguíneo A, 4 agentes (pacientes) y 4 objetos (donantes) pertenecientes al grupo O, 2 agentes (pacientes) y 2 objetos (donantes) pertenecientes al grupo B, 1 agente (paciente) y 1 objeto (donante) pertenecientes al grupo AB. En la tabla encontramos la distribución de nuestra población, y en ella podemos ver la incompatibilidad que existe entre todas las parejas de nuestra población:

	Paciente	Donante
<b>Grupo A</b>	$a_1, a_2, a_3, a_4$	$o_6, o_7, o_8, o_{10}$
<b>Grupo O</b>	$a_5, a_6, a_7, a_8$	$o_2, o_4, o_9, o_{11}$
<b>Grupo B</b>	$a_9, a_{10}$	$o_3, o_5$
<b>Grupo AB</b>	$a_{11}$	$o_1$

Es necesario remarcar que el caso del donante universal, es decir en los casos en los que el donante corresponde al grupo sanguíneo O, la incompatibilidad viene dada por otro factor, como el HLA o la edad de los pacientes, ya que si no, no sería posible justificar su incompatibilidad ya que el grupo sanguíneo O es el donante universal.

### **Ejemplo 3:**

En este caso supondremos que el donante  $o_{42}$  es del grupo sanguíneo A. Y en tal caso solo podrá donar su órgano a aquellos pacientes que correspondan al grupo sanguíneo A o AB, y dentro de los grupos de órganos correspondientes a un mismo grupo sanguíneo estos se ordenaran conforme a las mejores características (edad, estado de salud, factor HLA, otros factores de compatibilidad, etc) para cada agente (paciente).

$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_{41}$	$P_{42}$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$
$o_6$	$o_6$	$o_{42}$	$o_{10}$	$o_{10}$	$o_{41}$	$o_2$	$o_{41}$	$o_{11}$	$o_3$	$o_3$	$o_1$
$o_{42}$	$o_8$	$o_8$	$o_{42}$	$o_{42}$	$o_2$	$o_9$	$o_{11}$	$o_{41}$	$o_5$	$o_5$	$o_{11}$
$o_8$	$o_{10}$	$o_{10}$	$o_8$	$o_8$	$o_{11}$	$o_{41}$	$o_2$	$o_9$	$o_{41}$	$o_{11}$	$o_{42}$
$o_7$	$o_{42}$	$o_7$	$o_7$	$o_7$	$o_9$	$o_{11}$	$o_9$	$o_2$	$o_9$	$o_{41}$	$o_7$
$o_{10}$	$o_7$	$o_6$	$o_6$	$o_6$	$o_1$	$o_3$	$o_1$	$o_{10}$	$o_2$	$o_2$	$o_5$
$o_{41}$	$o_{41}$	$o_{11}$	$o_9$	$o_9$	$o_8$	$o_6$	$o_8$	$o_7$	$o_{11}$	$o_9$	$o_{41}$
$o_2$	$o_9$	$o_{41}$	$o_{41}$	$o_{41}$	$o_{42}$	$o_{10}$	$o_3$	$o_5$	$o_{42}$	$o_{10}$	$o_{10}$
$o_9$	$o_{11}$	$o_2$	$o_{11}$	$o_{11}$	$o_5$	$o_5$	$o_7$	$o_6$	$o_7$	$o_6$	$o_6$
$o_{11}$	$o_2$	$o_9$	$o_2$	$o_2$	$o_{10}$	$o_{42}$	$o_6$	$o_{42}$	$o_8$	$o_{42}$	$o_9$
$o_3$	$o_5$	$o_1$	$o_5$	$o_5$	$o_6$	$o_1$	$o_{10}$	$o_8$	$o_6$	$o_8$	$o_3$
$o_1$	$o_3$	$o_3$	$o_3$	$o_3$	$o_7$	$o_7$	$o_5$	$o_3$	$o_{71}$	$o_1$	$o_8$
$o_5$	$o_1$	$o_5$	$o_1$	$o_1$	$o_3$	$o_8$	$o_{42}$	$o_1$	$o_{10}$	$o_7$	$o_2$

### **Ejemplo 4:**

En este caso supondremos que el donante  $o_{42}$  es del grupo sanguíneo O. Y en tal caso solo podrá donar a aquellos pacientes que correspondan a cualquier grupo sanguíneo, y dentro de los grupos de órganos correspondientes a un mismo grupo sanguíneo estos se ordenaran conforme a las mejores características (edad, otros factores de compatibilidad, etc) para cada agente (paciente).

$P_1$	$P_{a_2}$	$P_3$	$P_{41}$	$P_{42}$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$
$O_6$	$O_6$	$O_8$	$O_{10}$	$O_{10}$	$O_{41}$	$O_{42}$	$O_{41}$	$O_{11}$	$O_3$	$O_3$	$O_1$
$O_8$	$O_8$	$O_{10}$	$O_8$	$O_8$	$O_{42}$	$O_2$	$O_{11}$	$O_{42}$	$O_5$	$O_5$	$O_{11}$
$O_7$	$O_{10}$	$O_7$	$O_7$	$O_7$	$O_2$	$O_9$	$O_{42}$	$O_{41}$	$O_{41}$	$O_{11}$	$O_7$
$O_{10}$	$O_7$	$O_6$	$O_6$	$O_6$	$O_{11}$	$O_{41}$	$O_2$	$O_9$	$O_9$	$O_{41}$	$O_5$
$O_{41}$	$O_{41}$	$O_{42}$	$O_9$	$O_9$	$O_9$	$O_{11}$	$O_9$	$O_2$	$O_{42}$	$O_2$	$O_{41}$
$O_{42}$	$O_9$	$O_{11}$	$O_{42}$	$O_{42}$	$O_1$	$O_3$	$O_1$	$O_{10}$	$O_2$	$O_{42}$	$O_{10}$
$O_2$	$O_{11}$	$O_{41}$	$O_{41}$	$O_{41}$	$O_8$	$O_6$	$O_8$	$O_7$	$O_{11}$	$O_9$	$O_6$
$O_9$	$O_{42}$	$O_2$	$O_{11}$	$O_{11}$	$O_5$	$O_{10}$	$O_3$	$O_5$	$O_7$	$O_{10}$	$O_{42}$
$O_{11}$	$O_2$	$O_9$	$O_2$	$O_2$	$O_{10}$	$O_5$	$O_7$	$O_6$	$O_8$	$O_6$	$O_9$
$O_3$	$O_5$	$O_1$	$O_5$	$O_5$	$O_6$	$O_1$	$O_6$	$O_8$	$O_6$	$O_8$	$O_3$
$O_1$	$O_3$	$O_3$	$O_3$	$O_3$	$O_7$	$O_7$	$O_{10}$	$O_3$	$O_1$	$O_1$	$O_8$
$O_5$	$O_1$	$O_5$	$O_1$	$O_1$	$O_3$	$O_8$	$O_5$	$O_1$	$O_{10}$	$O_7$	$O_2$

### Ejemplo 5:

En este caso supondremos que el donante  $O_{42}$  es del grupo sanguíneo B. Y en tal caso solo podrá donar a aquellos pacientes que correspondan al grupo sanguíneo B y AB, y dentro de los grupos de órganos correspondientes a un mismo grupo sanguíneo estos se ordenaran conforme a las mejores características (edad, otros factores de compatibilidad, etc) para cada agente (paciente).

$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_{41}$	$P_{42}$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$
$O_6$	$O_6$	$O_8$	$O_{10}$	$O_{10}$	$O_{41}$	$O_2$	$O_{41}$	$O_{11}$	$O_3$	$O_{42}$	$O_1$
$O_8$	$O_8$	$O_{10}$	$O_8$	$O_8$	$O_2$	$O_9$	$O_{11}$	$O_{41}$	$O_5$	$O_3$	$O_{11}$
$O_7$	$O_{10}$	$O_7$	$O_7$	$O_7$	$O_{11}$	$O_{41}$	$O_2$	$O_9$	$O_{41}$	$O_5$	$O_7$
$O_{10}$	$O_7$	$O_6$	$O_6$	$O_6$	$O_9$	$O_{11}$	$O_9$	$O_2$	$O_9$	$O_{11}$	$O_5$
$O_{41}$	$O_{41}$	$O_{11}$	$O_9$	$O_9$	$O_1$	$O_3$	$O_1$	$O_{10}$	$O_{42}$	$O_{41}$	$O_{41}$
$O_2$	$O_9$	$O_{41}$	$O_{41}$	$O_{41}$	$O_8$	$O_{42}$	$O_8$	$O_7$	$O_2$	$O_2$	$O_{42}$
$O_9$	$O_{11}$	$O_2$	$O_{11}$	$O_{11}$	$O_{42}$	$O_6$	$O_3$	$O_5$	$O_{11}$	$O_9$	$O_{10}$
$O_{11}$	$O_2$	$O_9$	$O_2$	$O_2$	$O_5$	$O_{10}$	$O_7$	$O_6$	$O_7$	$O_{10}$	$O_6$
$O_3$	$O_{42}$	$O_1$	$O_5$	$O_5$	$O_{10}$	$O_5$	$O_{42}$	$O_8$	$O_8$	$O_6$	$O_9$
$O_{42}$	$O_5$	$O_3$	$O_{42}$	$O_{42}$	$O_6$	$O_1$	$O_6$	$O_3$	$O_6$	$O_8$	$O_3$
$O_1$	$O_3$	$O_5$	$O_3$	$O_3$	$O_7$	$O_7$	$O_{10}$	$O_{42}$	$O_1$	$O_1$	$O_8$
$O_5$	$O_1$	$O_{42}$	$O_1$	$O_1$	$O_3$	$O_8$	$O_5$	$O_1$	$O_{10}$	$O_7$	$O_2$

### Ejemplo 6:

En este caso supondremos que el donante  $O_{42}$  es del grupo sanguíneo AB. Y en tal caso solo podrá donar a aquellos pacientes que correspondan al grupo sanguíneo AB, y dentro de los grupos de órganos correspondientes a un mismo grupo sanguíneo estos se ordenaran conforme a las mejores características (edad, otros factores de compatibilidad, etc) para cada agente (paciente).

$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_{41}$	$P_{42}$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$
$O_6$	$O_6$	$O_8$	$O_{10}$	$O_{10}$	$O_{41}$	$O_2$	$O_{41}$	$O_{11}$	$O_3$	$O_3$	$O_1$
$O_8$	$O_8$	$O_{10}$	$O_8$	$O_8$	$O_2$	$O_9$	$O_{11}$	$O_{41}$	$O_5$	$O_5$	$O_{11}$
$O_7$	$O_{10}$	$O_7$	$O_7$	$O_7$	$O_{11}$	$O_{41}$	$O_2$	$O_9$	$O_{41}$	$O_{11}$	$O_7$
$O_{10}$	$O_7$	$O_6$	$O_6$	$O_6$	$O_9$	$O_{11}$	$O_9$	$O_2$	$O_9$	$O_{41}$	$O_5$
$O_{41}$	$O_{41}$	$O_{11}$	$O_9$	$O_9$	$O_1$	$O_3$	$O_1$	$O_{10}$	$O_2$	$O_2$	$O_{41}$
$O_2$	$O_9$	$O_{41}$	$O_{41}$	$O_{41}$	$O_8$	$O_6$	$O_8$	$O_7$	$O_{11}$	$O_9$	$O_{10}$
$O_9$	$O_{11}$	$O_2$	$O_{11}$	$O_{11}$	$O_5$	$O_{10}$	$O_3$	$O_5$	$O_7$	$O_{10}$	$O_{42}$
$O_{11}$	$O_2$	$O_9$	$O_2$	$O_2$	$O_{10}$	$O_{42}$	$O_7$	$O_{42}$	$O_8$	$O_6$	$O_6$
$O_3$	$O_5$	$O_1$	$O_{42}$	$O_{42}$	$O_6$	$O_5$	$O_6$	$O_6$	$O_6$	$O_8$	$O_9$
$O_{42}$	$O_3$	$O_{42}$	$O_5$	$O_5$	$O_7$	$O_1$	$O_{42}$	$O_8$	$O_{42}$	$O_1$	$O_3$
$O_1$	$O_1$	$O_3$	$O_3$	$O_3$	$O_3$	$O_7$	$O_{10}$	$O_3$	$O_1$	$O_7$	$O_8$
$O_5$	$O_{42}$	$O_5$	$O_1$	$O_1$	$O_{42}$	$O_8$	$O_5$	$O_1$	$O_{10}$	$O_{42}$	$O_2$

Los ejemplos anteriores sugieren que el grupo sanguíneo puede tener mucha importancia a la hora de poseer un donante adicional. Por un lado, si el donante que añadimos es del grupo sanguíneo AB, el efecto que tendrá en el ciclo prácticamente siempre será nulo, ya que este tiende a situarse en los últimos puestos del ranking. En cambio si el donante adicional es del grupo sanguíneo O, es decir, es un donante universal, el paciente tiene muchas probabilidades de obtener un objeto mucho mejor, ya que este es compatible con todos los pacientes.

### 6.3. Propiedades de la asignación del TTC de Gale modificada

La modificación del algoritmo sigue manteniendo las siguientes propiedades:

- La asignación está en el núcleo.
- El mecanismo no es manipulable.
- La asignación es individualmente racional.
- El mecanismo escoge una asignación de equilibrio competitivo asociado al problema de asignación.

En cambio, la asignación resultante de aplicar la modificación del algoritmo no proporciona una asignación eficiente en el sentido de Pareto, es decir, puede ser que al introducir un donante adicional algún agente empeore, obtenga un objeto de su ranking de preferencias por debajo de la asignación que obtenía sin introducir un nuevo donante.

Por otro lado, podemos remarcar dos propiedades nuevas:

- Introducir un donante adicional mejora la situación del paciente.
- El TTC de Gale, en el caso de que un mismo paciente disponga de más de un donante, identifica cual es el mejor órgano de estos dos, ya que este será asignado antes.



## 7. Conclusiones

La utilización, en los últimos años, de los trasplantes cruzados ha conseguido disminuir el número de personas en lista de espera, gracias que estos dan la posibilidad a parejas incompatibles de realizar trasplantes intercambiando los donantes con otras parejas. Con el paso del tiempo y los avances médicos y técnicos, cada vez son más los países que realizan este tipo de trasplantes, y los ciclos cada vez se componen de un mayor número de parejas. Esto es positivo, ya que los trasplantes cruzados proporcionan una mayor compatibilidad entre el paciente y el donante, y el trasplante proviene de un donante vivo, lo que proporciona una mayor grado de supervivencia del órgano del donante en el paciente.

No sabemos cuál es el algoritmo que usa cada país para realizar la asignación en los trasplantes cruzados, pero podemos afirmar que el algoritmo de TTC de Gale proporciona una asignación eficiente y con unas buenas propiedades. Además este admite ciertas modificaciones, como la de la introducción de un donante adicional para algunos o todos los pacientes, sin perder ninguna de las propiedades de la asignación.

En cuanto a la modificación del algoritmo podemos ver que la introducción de un donante adicional, al menos, siempre mejora la situación del paciente o en el peor de los casos lo mantiene en la misma situación que estaba antes de introducir el nuevo donante. Entonces, podemos decir que la introducción de donantes adicionales es beneficiosa para el paciente que lo posee, aunque puede hacer empeorar la situación de los otros pacientes que intervienen en el intercambio, ya que al tratarse de un equilibrio competitivo, si uno mejora alguien tiene que empeorar.

Para finalizar, sería bueno realizar la reflexión de si realmente el mecanismo que se está utilizando para la asignación de trasplantes cruzados se está haciendo de una manera correcta, ya que, como hemos podido ver en artículo anterior, hay algoritmos que presentan propiedades extraordinarias para la realización de esta asignación y que sería bueno que todos los países fueran conscientes de ello.

La principal extracción que podemos hacer de este trabajo es que la economía es una ciencia que tiene muchos más ámbitos de aplicación de los que parece, y que es necesario que los economistas colaboren en la resolución de problemas de asignación, ya que estos conocen cuales son los mecanismos existentes y sus propiedades.

## 8. Bibliografía

- A.E. Roth, *Incentive compatibility in a market with indivisible goods*, Economics Letters 9, 127-132 (1982).
- A.E. Roth y A. Postlewaite, *Weak versus strong domination in a market with indivisible good*, Journal of Mathematical Economics 4, 131-137 (1977).
- A.E. Roth, T. Sönmez y U. Ünver, *Kidney Exchange*, Quarterly Journal of Economics 119, 457-488 (2004).
- J. Ma, *Strategy-proofness and the strict core in a market with indivisibilities*, International journal of Game Theory 23, 75-83 (1994).
- L. Sharple y H. Scarf, *On Cores and indivisibilities*, Journal of Mathematical Economics 1, 23-28 (1974).
- M. De la Oliva Valentín y R. Matesanz, *Trasplante cruzado*, Organización Nacional de Trasplantes, 2013.
- Balance de actividad de la ONT en 2013. Ministerio de Sanidad, Servicios Sociales e Igualdad. (<http://www.ont.es/Documents/Datos2014.pdf>).
- Programa Nacional de Donación Renal Cruzada, Organización Nacional de Trasplantes, 2014. (<http://www.ont.es/>).