



Universitat Autònoma de Barcelona
Facultat d'Economia i Empresa

FORMAS MATEMÁTICAS
DE MEJORAR LA
DEMOCRACIA
ERNEST ESTER BURGOS

Trabajo de fin de grado en economía bajo la orientación de **Salvador Barberà** al que el autor agradece todas las consideraciones tomadas con el mismo.

Bellaterra, 9 de Junio de 2015.

ÍNDICE

Democracia	3
El punto de partida	4
Condorcet y su teorema del jurado	5
Mejorando la democracia	7
1. Sistema de votación	7
El método mejorado	7
Ejemplo	8
2. Número de votantes	10
En contra de la democracia en masa	10
Ejemplos	12
3. El voto en el tiempo	13
El Statu Quo	13
El Ranking UEFA para competiciones de clubes de Fútbol	14
Ejemplo	15
4. Competencia	16
Modelo de toma de decisiones individual respecto a la Competencia	16
Sistema de selección de votantes	17
Ejemplo	18
Conclusión	19
Bibliografía	20

DEMOCRACIA

Durante las últimas décadas la sociedad ha experimentado increíbles cambios sociales y tecnológicos. Las telecomunicaciones, el abastecimiento de energía, la sanidad... Casi todos los ámbitos de nuestra vida han pasado por un proceso de mejora. Sistemas nuevos, diferentes, más eficaces. Pero más importante todavía es la percepción ciudadana de que este proceso de cambio es necesario y beneficioso. Enseñamos a los niños a criticar y a mejorar las cosas esperando que en un futuro transformen el mundo para bien. Sin embargo a la hora de hablar de sistemas de elección y representación ciudadana, con la excepción del mundo académico, este sentimiento no existe. Llevamos mucho tiempo viviendo con la inamovible creencia de que lo indispensable para estos menesteres es lo que en términos técnicos se conoce, irónicamente, como pluralidad.

Este estancamiento social es entendible desde el punto de vista histórico. Las sociedades avanzadas por fin hemos llegado al consenso de la igualdad y del respeto después de muchos siglos de represión y de conflictos. Quizá nos merecíamos un descanso. Aun así, es inquietante mirar atrás y ver que en la mayoría de países desarrollados la última gran aportación al sistema es el voto de la mujer o el emigrante censado. No es por falta de oportunidades, de ejemplos o de literatura sobre el tema que se ha dado este fenómeno. Al fin y al cabo, como toda ciencia, la elección social se desarrolla de manera orgánica en la sociedad. Hoy en día la gente de a pie se cuestiona si Borda es el sistema adecuado para elegir el balón de oro, si el conjunto de votantes es el adecuado y si hay uno mejor. Pero no se cuestiona si la pluralidad es el mejor sistema para elegir a su gobierno o si el conjunto de votantes es el más eficiente.

Los luchadores por los derechos están más ocupados por expandir la pluralidad horizontalmente que por llevar el sistema hacia delante. Parece que será necesario que hasta el último país del mundo abrace la democracia para que nos comencemos a plantear si es posible mejorar algo. Pero, ¿Y si este enfoque es el equivocado? ¿Y si lo necesario para acabar de llevar la democracia a todos los rincones del mundo es precisamente una sofisticación del sistema? Estas preguntas empiezan a ser relevantes al ritmo en que el sistema actual fracasa. En Egipto después de la primavera árabe se acogió la democracia en lo que tardaron los egipcios en poner a un gobierno teocrático. En los países occidentales se critica la ilusión creada de que tenemos elección cuando en la práctica es discutible. Y en América Latina llegan a preguntarse si seguiría habiendo democracia de tener la oposición la oportunidad real de llegar al gobierno. ¿Podría un sistema mejorado salvar estos obstáculos? El enfoque de este trabajo es de carácter matemático. Desprovisto de opiniones subjetivas. Es un intento por extraer conclusiones sobre la teoría democrática con las herramientas que hoy en día ofrecen la estadística, la teoría de juegos y la ciencia de la elección social. El objetivo se aborda con el conocimiento de las limitaciones existentes en cuanto a capacidad y tiempo. También es importante añadir que este mismo objetivo se podría abordar de muchas maneras distintas y las utilizadas aquí son una parte muy pequeña de las opciones disponibles.

EL PUNTO DE PARTIDA

Al empezar la búsqueda sobre un punto de partida con el que abordar la democracia revisé la literatura empírica sobre las consecuencias de ésta en la sociedad, sus justificaciones y el estado actual en la que se encuentra en diferentes países. Me asombró aprender que los intentos hasta ahora de relacionar la democracia con el crecimiento económico han sido infructuosos. En palabras de Adam Przeworski para una entrevista en 2003:

“Es claro que la democracia, a nivel agregado, no afecta al ritmo de crecimiento del ingreso total. Algunos autores, como Roberto Barro, sostienen que si mides la democracia en términos continuos, encuentras una relación curvilínea entre democracia y desarrollo. Pero creo que también hay una relación curvilínea entre dictadura y desarrollo: los países no democráticos con niveles medios de ingreso también tienen altos niveles de crecimiento.”¹

Esta conclusión anti intuitiva para un ciudadano de cualquier país desarrollado y las explicaciones de Przeworski sobre cómo la literatura en este tema estaba muy sesgada sobre todo a partir del 1982 me llevó a buscar un enfoque más axiomático de la democracia. Los autores académicos que trazan un enfoque basado en la teoría de juegos utilizan el reduccionismo al máximo y de repente pasé de la representación de la democracia como un concepto que engloba a la sociedad a unos ejemplos muy específicos sobre como grupos de pocas personas toman decisiones en conjunto. El análisis se basaba comúnmente en la asimetría de la información y como esta afectaba al resultado. Así, Meirowitz y Landa explican que para que la democracia pueda traer resultados más eficientes ha de haber una deliberación que traiga un aprendizaje que cambie las preferencias de los votantes para con las opciones de entre las que se elige². Al minimizar la muestra, mi interés principal que era la democracia entendida como la elección de los representantes y gobernantes de la sociedad se dividía ahora en un océano de miles de ejemplos y matices diferentes. Creí que un enfoque más general sería más conveniente. Al fin y al cabo debía haber algún argumento matemático para la defensa de la democracia como sistema.

Y así es como llegue a la democracia epistémica. Que es una concepción de la democracia que trata de legitimar la aptitud de los procesos democráticos para producir buenos resultados³. Según la literatura epistémica los procesos democráticos facilitan de por sí las elecciones correctas y el teorema comúnmente aceptado en el que se basa esta creencia para dar un razonamiento matemático es el Teorema del Jurado de Condorcet. Este es el punto de referencia del trabajo y la fuente de donde brotan todas las conclusiones matemáticas analizadas en éste. Creo conveniente recalcar que el propósito del trabajo es la crítica constructiva y científica hacia el sistema democrático y en ningún caso se pretende deslegitimar el proceso democrático.

¹ Gerardo L. Munk. 2003. Capitalismo, democracia y ciencia. Pág. 24.

² Adam Meirowitz y Dimitri Landa. 2009. *Game theory, information, and deliberative democracy*.

³ David M Estlund. 2007. *Democratic Authority*.

CONDORCET Y SU TEOREMA DEL JURADO

El marqués de Condorcet (1743-94) pasó gran parte de su vida estudiando la matemática, la probabilidad y su aplicación a toda clase de aspectos de la vida pública. Su trabajo no se limitó al ámbito académico. Condorcet fue el mayor artífice de la proposición de constitución que fue presentada a la Convención Nacional Francesa en 1793 y que sería recordada como Girondina. Su intención era incluir un sistema electoral que representara con la mayor fidelidad posible la voluntad del pueblo. Para ello utilizó todos los conocimientos que había recogido durante años sobre sistemas de votación y toda la experiencia política acumulada durante su vida. Es de entender su enfado cuando los jacobinos rechazaron dicha proposición y procedieron a escribir una constitución diferente que, si bien recogía algo de la proposición Girondina, distaba mucho de ser la herramienta democrática matemáticamente óptima que el marqués pretendía. Su crítica a los jacobinos y a la nueva constitución lo convirtió en persona non grata para el gobierno aun habiendo formado parte los años anteriores de la primera plana política en París defensora de la revolución. Los jacobinos decretaron su encarcelamiento y juicio por traición. Por experiencia con otros casos de políticos girondinos Condorcet sabía que el juicio acabaría con una visita a la guillotina. Trató de huir de Francia pero fue capturado y dos días más tarde murió en una celda.⁴

Así pues su trabajo quedó olvidado durante bastante tiempo en parte por el legado de la propaganda jacobina y en parte porque su obra estuvo a la sombra de su contemporáneo el matemático Jean-Charles de Borda cuyo trabajo fue revisado y alabado por el mismo Condorcet. Fue ya en el siglo XX cuando el autor fue redescubierto y fue recuperado el teorema del jurado, que aquí nos ocupa, y que ha sido utilizado para defender el sistema democrático.

El teorema se aplica bajo la hipótesis de que un grupo de votantes ha de escoger entre dos alternativas de entre las cuales una es la alternativa correcta. Por la simplicidad metafórica, se utiliza la situación de un jurado que tiene que decidir entre dos opciones, culpable e inocente, al dar su veredicto sobre un acusado. Está claro que una de las opciones es la correcta, pero cuál de ellas resulta, en primera instancia, desconocido para el jurado. El teorema dice que, bajo las hipótesis de que las opiniones de los votantes son independientes entre ellas y de que cada votante elige la opción correcta con probabilidad mayor que un medio:

Cuando el número de votantes tiende a infinito, la probabilidad de que el grupo de votantes tome la decisión correcta por mayoría tiende a 1.⁵

Es fácil ver como este teorema puede ser utilizado para defender la democracia. Bajo las hipótesis de Condorcet, cuantas más personas voten mayor será la probabilidad de que elijan la opción correcta por mayoría. Aunque los supuestos no son del todo realistas para el caso general de votaciones democráticas ya que las opiniones de los votantes no

⁴ Iain McLean y Fiona Hewitt. 1994. *Condorcet. Foundations of Social Choice and Political Theory*.

⁵ Elchanan Mossel. 31 de agosto de 2010. *Condorcet's Theorem*.

serán completamente independientes y seguramente ni todos tengan la misma probabilidad de acertar la decisión correcta ni esta probabilidad supere la mitad de los casos con certeza, es interesante ver las conclusiones que se pueden derivar de el teorema y que consecuencias tienen los diferentes valores de cada una de las variables en juego.

Para plantear el teorema de una manera un poco más formal llamamos “ v ” a la probabilidad de que cada votante elija la opción correcta (cuyo valor ha de comprenderse entre 0’5 y 1). Y llamamos $(1-v)$ a la probabilidad de que cada votante elija la opción incorrecta. El número de votos que conforma la mayoría es “ h ” y el número de votos que conforman la minoría es “ k ” siendo la suma de estos el total de los votos. Siguiendo las hipótesis anteriormente explicadas la probabilidad de que los votantes hayan observado los hechos correctamente es:

$$\frac{v^{h-k}}{v^{h-k} + (1-v)^{h-k}}$$

Esta expresión aumenta tanto con un incremento de la probabilidad de que los votantes juzguen correctamente (v), como al aumentar la diferencia entre la mayoría y la minoría ($h-k$) y por lo tanto al aumentar el número de votantes.⁶

Vamos a demostrar por qué esto es cierto.⁷ Para simplificar suponemos que el número de votantes inicial “ n ” es impar y consideremos que ocurre al añadir dos votantes más a la votación. Las consecuencias pueden ser:

1. Sus votos son opuestos y se cancelan.
2. Sus votos son iguales pero sólo sirven para aumentar o acortar el resultado inicial sin llegar a cambiarlo.
3. La opción correcta “ c ” estaba a 1 voto de ser mayoría y los nuevos votantes han votado correctamente.
4. La opción “ c ” era mayoría por 1 voto y ahora es minoría. Solo las dos últimas posibilidades alteran el resultado.

En los casos 3 y 4 hay un último votante ($n-1$) que decide la votación con la misma probabilidad (v). La probabilidad de que se pase de incorrecto a correcto es entonces $(1-v)v^2$ mientras que la probabilidad de pasar de correcto a incorrecto es $v(1-v)^2$. Si v es mayor que 0’5 entonces:

$$(1-v)v^2 > v(1-v)^2$$

Y queda demostrado que un aumento del número de votantes incrementa la probabilidad de que tomen la decisión correcta por mayoría.

Este teorema es la referencia elegida para este trabajo y desde él trataré de recoger diferentes aportaciones a la teoría de la Elección Social. Intentando siempre desde una perspectiva matemática encontrar mejoras al sistema de votación convencional utilizado en la casi totalidad de países desarrollados.

⁶ Iain McLean y Fiona Hewitt, op.cit. Pág.35 [notación alterada levemente]

⁷ Anónimo. Condorcet's jury theorem. 2015.

MEJORANDO LA DEMOCRACIA

Ha llovido mucho desde que Matemáticos como Condorcet o Borda tuvieran que defender la Pluralidad por su carácter práctico. Hoy en día no es descabellado pensar que un sistema de voto global pueda incorporar las preferencias de los votantes más allá de su candidato predilecto. En la siguiente parte del trabajo se exponen diferentes aspectos del proceso que podrían ser mejorados en la actualidad para conseguir un mejor resultado.

1. Sistema de votación.

Un aspecto obviado deliberadamente al presentar el teorema del jurado ha sido el de la cantidad de alternativas para la cual el teorema es válido. En el ejemplo del jurado los votantes deciden entre solo dos opciones. Este hecho no es casual. El mismo Condorcet encontró imposible aplicar el teorema cuando hay tres o más opciones pues llegó a la conclusión de que las preferencias colectivas podrían ser cíclicas (no transitivas) aunque las individuales no lo fueran. Aun así, ideó un sistema de votación para más de dos alternativas llamado método de Condorcet que se basa en la comparación por parejas de los votos de las diferentes alternativas.

Evidentemente la situación que nos ocupa es la de encontrar un sistema para cuando la sociedad tiene que elegir entre más de dos alternativas. Para ello revisaremos el trabajo del académico H.P. Young que ha desarrollado el trabajo de Condorcet desde la perspectiva de la inferencia estadística. El método de elección de Young, modifica el propuesto por el francés para evitar incongruencias y preferencias cíclicas. En lo seguido se expone un resumen del método ya modificado así como un ejemplo con el cual podremos ver porque este método es mejor que otros y por qué es más interesante que el método de Borda aunque este último pueda ser un mejor estimador.

El método de Condorcet Mejorado⁸

1. Para que el método funcione todos los votantes tienen que mostrar sus preferencias de manera que elijan entre parejas de dos opciones y determinen qué opción es mejor que la otra. Cada muestra de preferencia entre una pareja es llamada “proposición”. Ejemplos: $(a > b)$, $(b > c)$, $(a > c)$. mientras que la conclusión lógica del conjunto de proposiciones que ordena las diferentes opciones: $(a > b > c)$, es llamada una “opinión”. Quedando descartadas todas las opiniones cuyas preferencias son intransitivas, es decir, aquellas en las que no se puede ordenar a las opciones porque son cíclicas. Así, el número total de opiniones posibles es $n(n - 1)(n - 2) \dots 2$.

2. Teniendo en cuenta las opiniones validas de todos los votantes podemos contrastar cuantas “voces” apoyan cada proposición contando cuantas veces dicha proposición aparece entre todas las opiniones. Siendo el número de estas $n(n - 1)/2$.

⁸ Young, H.P. 1988. *Condorcet's Theory Voting. The American Political Science Review.*

3. Formamos una opinión de entre esas $n(n-1)/2$ proposiciones que estén apoyadas por más “voces”. Si esa opinión esta entre las $n(n-1)(n-2) \dots 2$ posibles se elige la opción a la que esa opinión le da la preferencia. Si esa opinión está dentro de las $2^{n(n-1)/2} - n(n-1)(n-2) \dots 2$ opiniones inconsistentes entonces se revierte en esa opinión las proposiciones que tienen la menor pluralidad combinada y se adopta la opinión de entre las que quedan.

Ejemplo

Supongamos que el gobierno organiza una votación para decidir a qué tipo de gastos le da prioridad en los presupuestos del estado. Para simplificar supondremos que hay 100 votantes y que las opciones a elegir son Sanidad, Educación e Infraestructuras. Los votantes votan como el sistema estipula y la votación queda así:

	Sanidad	Infraestructuras	Educación
Sanidad	-	51	60
Infraestructuras	49	-	60
Educación	40	40	-

La probabilidad conjunta de que una opinión como por ejemplo ($S > E > I$) sea observada es:

$$L(SIE) = \frac{100!}{51!49!} [v^{51}(1-v)^{49}] \cdot \frac{100!}{60!40!} [v^{60}(1-v)^{40}] \cdot \frac{100!}{60!40!} [v^{60}(1-v)^{40}]$$

$$= \frac{(100!)^3}{51! 49! 60! 40! 60! 40!} [v^{171}(1-v)^{129}]$$

Nótese que para todas las opiniones validas la parte izquierda de la ecuación será la misma y por lo tanto el factor decisivo es el apoyo conjunto en las comparaciones por parejas. La tabla con las posibles opiniones queda así:

$$L(SIE) = [v^{171}(1-v)^{129}]$$

$$L(SEI) = [v^{151}(1-v)^{149}]$$

$$L(ISE) = [v^{169}(1-v)^{131}]$$

$$L(IES) = [v^{149}(1-v)^{151}]$$

$$L(ESI) = [v^{131}(1-v)^{169}]$$

$$L(EIS) = [v^{129}(1-v)^{171}]$$

Según este criterio la opinión que tiene la mayor verosimilitud siempre y cuando se cumpla la especificación de que “v” es mayor que un medio es la opinión que ordena las opciones ($S > I > E$) y por lo tanto la voluntad de los votantes en su conjunto preferiría que se dedicaran los presupuestos del estado por ese orden de prioridad. A

simple vista se deduce que este método es mejor que el de pluralidad en la medida que al recoger más información de los votantes es capaz de crear una lista de preferencias más fiel y por tanto es mejor estimador de la voluntad de la gente. Lo que no es tan obvio es que de haber usado el método de pluralidad en este caso el ganador hubiera sido la inversión en educación al acumular 40 votos como primera opción comparado con los 30 de las otras dos. Esta opción es la peor pues hubiera dejado insatisfecha a la mayoría de la gente.

Pero la pregunta que aún nos queda por resolver es ¿Por qué este sistema? Para conseguir un mejor resultado nos hubiera valido el sistema de Borda que tiene en cuenta las preferencias de los votantes sobre todos los candidatos también. Y en la práctica Borda sería más fácil de llevar a cabo. El propio Young demuestra que para los casos donde “v” es cercana a un medio en realidad Borda podría ser un mejor estimador que el método de Condorcet. La clave es, según el académico, que el recuento de Borda carece de unas propiedades muy atractivas para la agregación de preferencias que el sistema de Condorcet si tiene. A saber, la independencia de opciones irrelevantes y la agregación de “sacos de votos”. Nos centramos en la primera propiedad siguiendo el ejemplo para demostrar porqué el sistema expuesto es mejor que el de Borda.

Imaginemos que los organizadores de la elección tienen interés en que salga elegida la inversión de infraestructuras porque conseguirían beneficios con sus empresas de construcción. ¿Podrían alterar la votación añadiendo una alternativa irrelevante?

	Sanidad	Infraestructuras	Educación	Deportes	Borda
Sanidad	-	51	60	80	191
Infraestructuras	49	-	60	90	199
Educación	40	40	-	90	170
Deportes	20	10	10	-	30

Vemos que sí. La alternativa irrelevante en este caso es Deportes. Esta alternativa es irrelevante porque pierde contra todas las demás. Aun así modifica el recuento de borda de manera que la opción infraestructuras ahora gana mientras que en el caso de las tres opciones el recuento quedaría:

Sanidad	111
Infraestructuras	109
Educación	80

Esto no ocurre con el método mejorado de Condorcet. Para ver por qué solo hay que fijarse en que la opción Sanidad gana por mayoría a todas las demás. Su posición en el ranking será primera independientemente de si agregamos la opción Deportes o no. De la misma manera el orden de las otras alternativas tampoco variará.

Queda demostrado entonces que el método mejorado de Condorcet sería una mejora en cuanto al sistema utilizado para revelar las preferencias de los ciudadanos.

2. Número de votantes.

El teorema del jurado abre también el debate sobre la cantidad de votantes requeridos para tomar una decisión por mayoría. Aunque a primera vista la conclusión definitiva es que “cuantos más mejor” se pueden sacar otras conclusiones relevantes. El propio Condorcet postuló que en cada votación, de ser ciertas sus premisas, habría un tamaño del jurado para el cual se diera con certeza la elección correcta. Entendiendo certeza como que la probabilidad de elección de la opción incorrecta era tan pequeña que podría ser obviada.

En contra de la democracia en masa⁹

Más interesante si cabe es el argumento del profesor de economía Jason Brennan. Él no cree que las hipótesis del teorema del jurado sean correctas y por lo tanto no cree que las democracias modernas estén bien representadas por dicho teorema. Pero no se queda ahí. El profesor utiliza el teorema para demostrar que bajo sus hipótesis existe una cantidad de votantes para la cual es más eficiente no incluir un votante más que incluirlo. Esto le lleva a la conclusión de que añadir votantes al jurado no es siempre la mejor opción que refutaría las ideas que se tratan de defender con el teorema y tendría implicaciones indeseables desde el punto de vista social. Si las democracias modernas estuvieran modeladas como los demócratas epistémicos creen significaría que la sociedad podría estar mejor si no votara todo el mundo. El razonamiento de Brennan es el siguiente: Las aportaciones marginales a la probabilidad de acierto conjunta son decrecientes. Es decir, si la probabilidad de que el jurado vote correctamente tiende a 1 cuantos más votantes se añadan, entonces llegará un momento en el que el votante $n+1$ añadido aumentará la probabilidad de acertar de forma insignificante. Bajo las Hipótesis de Condorcet, aun cuando la probabilidad de acertar de cada votante es de 0’51, la agregada para elegir por mayoría tiende a 1 de manera relativamente rápida. Que quiere decir que aun en el más difícil de los casos los votantes extra se convierten en irrelevantes bastante pronto. Hasta aquí esto es solo una perspectiva diferente del razonamiento explicado anteriormente de Condorcet donde en vez de buscar el tamaño que elija la opción correcta con certeza se busca el tamaño donde añadir más votantes no es necesario. Pero Brennan añade un factor a su teoría que la vuelve original y le da una serie de propiedades bastante útiles que serán desarrolladas más adelante. Lo que hace Brennan es relacionar esta probabilidad marginal de acertar añadida por cada votante con un valor monetario. Para ello se plantea cual es el coste de tomar la decisión equivocada y, desde este prisma, supone que cada votante está añadiendo valor esperado a la votación.

La fórmula utilizada se deriva de la que obtiene la probabilidad de que el jurado acierte:

$$PA = \sum_{h=n+1/2}^n \left[\frac{n!}{h!(n-h)!} \right] v^h (1-v)^{n-h}$$

⁹ . Jason Brennan. 2009. *Condorcet’s Jury Theorem as an Argument against Mass Democracy*.

¹⁰ Dennis C. Mueller. 2003. *Public choice III*. Pàg 129

Calculando $[PA(N+1) - PA(N)]$ y multiplicándolo por el valor de la decisión encuentra el valor marginal del voto $N+1$.¹¹

En una decisión donde la diferencia entre elegir la opción equivocada de la opción correcta supone una pérdida de 1.000.000 de euros, el valor que le añade el votante número 1001 al aumentar la probabilidad de acierto un 0,02 es de 20.000 euros. Brennan entiende la situación como una lotería entre conseguir 0 euros (la opción incorrecta) y conseguir un millón (la opción correcta) donde cada votante adicional incrementa el valor esperado. La pregunta es entonces ¿en qué número de votantes nos interesa parar? El profesor calculó que para unas elecciones en su país solo 100.001 votantes harían falta para igualar el valor marginal añadido con un supuesto coste de oportunidad. Y hasta aquí llega su razonamiento, donde concluye que si alguien cree que el teorema de Condorcet es correcto entonces estará de acuerdo en que no debe votar todo el mundo.

¿Por qué me parece interesante su teoría y cómo podría utilizarse para mejorar la democracia? Hay dos aspectos que abren un abanico de posibilidades que nos interesan como sociedad. El primero es bastante obvio, si de verdad fuese posible acotar el número de votantes para optimizar nuestros esfuerzos, podríamos aplicar el sistema de votaciones más veces. Convocar elecciones supone un coste para la sociedad y los ciudadanos. Un coste monetario de organización logística, un coste físico al requerir que los votantes pierdan su tiempo votando y un coste de esfuerzo tanto para transmitir la información necesaria para que los electores decidan como para procesarla. Pero según el razonamiento de Brennan estos costes podrían disminuirse increíblemente sin que nos tuviéramos que preocupar de que el resultado de la votación se viese afectado. En su ejemplo solo harían falta cien mil personas para decidir unas elecciones al parlamento de Estados Unidos. El número de votantes para esas elecciones es de 120 millones. ¡Se podrían haber celebrado 1200 elecciones! Bueno, vamos a ser justos y suponer que el coste informativo de celebrar elecciones aumenta con el número de estas, o que sería imposible conseguir muestras de población independientes para tantas elecciones. Seamos generosos con estos nuevos costes y pensemos que se podrían haber celebrado 500. Justificar esta posibilidad es un gran paso adelante para la teoría democrática. Hoy en día los ciudadanos votan como mucho 3 veces al año en los países desarrollados. Esto limita mucho la soberanía ciudadana, pero nunca se cuestiona porque hay una restricción real, perceptible para la gente, a la hora de mostrar las preferencias de los votantes sistemáticamente. Pero ahora podríamos ser más eficientes y celebrar muchas más elecciones con el mismo coste si aceptamos la teoría del profesor Brennan. La idea de limitar el número de votantes y aun así conseguir una imagen fiel de la voluntad ciudadana no es para nada descabellada. Hoy en día las encuestas electorales consiguen esto con un número de participantes todavía inferior al propuesto aquí. Un sistema donde hacen falta menos personas para decidir popularmente nos lleva a un mundo donde la ciudadanía puede decidir sobre más cosas.

¹¹ Nótese que no hace falta que se valore con dinero se podría utilizar cualquier otra medida y la discusión sobre como valorar elecciones es muy amplia y no nos ocupa.

El segundo aspecto y menos intuitivo es el hecho de que ahora el tamaño del jurado depende del valor de la decisión que se haya de votar. El debate entre democracia y eficiencia siempre ha estado roto por la incapacidad de crear un sistema que permita expresar su opinión a todo el mundo y mantenga la posibilidad de decidir sobre ciertos temas puntualmente a jurados profesionales más técnicos. Pero con nuestro desarrollo esto ahora es posible. Imaginemos un escenario donde se deba decidir sobre la sanidad de un país. Esta decisión tiene un valor elevadísimo tanto en el coste presupuestario como en la vida de los ciudadanos y por lo tanto el valor esperado que añada el votante $N+1$ será más grande que el que añada para una cuestión con menos relevancia. Se justifica entonces que para esta decisión el número de votantes sea mayor. O dicho de otra manera, ahora tenemos un sistema que nos permite saber qué decisiones decidir por sufragio general y qué decisiones decidir con una muestra reducida y eficiente.

Ejemplos

Supongamos que un estado tiene que decidir sobre una inversión en autopistas. Hay dos proyectos distintos y se valora la diferencia entre escoger el proyecto equivocado en 10 millones de euros. Distinguir cual es el proyecto que más beneficia a los ciudadanos se presenta como una tarea muy complicada ya que no afecta a todos por igual y calcular las posibles consecuencias económicas de poner la autopista en uno u otro lugar se hace imposible. Por esta razón se atribuye a los votantes una capacidad de acierto de 0,51. Según los cálculos de Brennan con estos parámetros en una votación por mayoría el votante número 25.001 añade $1,7 \times 10^{-5}$ ¹² a la probabilidad de acierto conjunta que equivale a un incremento del valor esperado de 170 euros. Si consideramos que 170 euros es una cantidad suficientemente pequeña entonces se llega al consenso de que 25.000 votantes es una cantidad de votantes suficiente para llevar a cabo la elección. Al ser la probabilidad añadida independiente de la valoración que se le da a la decisión es fácil ver que si se creyera que la diferencia entre proyectos es de 1 millón de euros el votante añadiría solo 17.

Ahora imaginemos que el estado ha de decidir en qué se gastan los 100 millones de presupuesto destinados en investigación y desarrollo otorgados a los investigadores de sanidad. La diferencia entre los dos proyectos a elegir es la misma que antes 10 millones pero ahora la decisión es sí no afecta directamente a la vida de los ciudadanos y más importante, la comunidad científica conocedora de lo que significaría cada proyecto tiene una capacidad para acertar relativamente elevada 0,9. ¿Es justificable que la decisión sea tomada por una cantidad de votantes reducida? Si hacemos caso al doctor Brennan está claro que sí. Al ser la posibilidad de acierto tan alta se podría dejar la decisión en manos de la comunidad científica y con un tamaño de 1000 votantes la aportación marginal de uno más se haría irrelevante en aspectos monetarios. Esta conclusión es importante porque aunque quisiéramos que la decisión la tomara toda la población sería imposible que esta lo hiciera para todas las decisiones. En este caso el hecho de disminuir el número de votantes mejora la democracia.

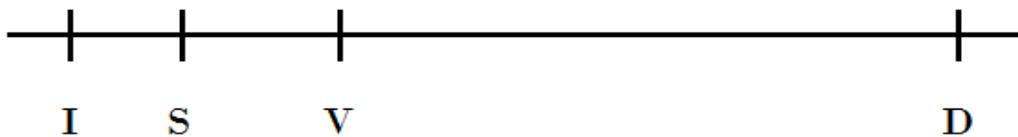
¹² Jason Brennan. 2009. *Condorcet Jury Theorem Mathematics Help*.

3. El voto en el tiempo

En este apartado, al contrario de los demás, primero se desarrollará la teoría para después relacionarla con el Teorema del Jurado. Al fin y al cabo el tiempo no es una variable del teorema y una conclusión al respecto que naciera directamente de éste sería difícilmente justificable. Hay diversas formas en las que el tiempo puede condicionar las votaciones según la literatura académica sobre la elección social. En las elecciones a un parlamento, por ejemplo, los resultados anteriores y las perspectivas futuras pueden condicionar los resultados del presente. En elecciones con información perfecta el orden en el que se realiza la votación puede alterar el resultado de ésta. En este apartado se expone y desarrolla el concepto del “Statu Quo” con la promesa de que al final, después de seguir la explicación, será visible la relación que guarda con el teorema.

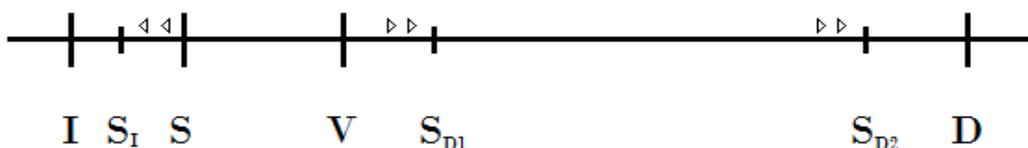
El Statu Quo ¹³

En el 1985 Bernard Grofman publicaba un trabajo titulado “The neglected role of the Status Quo in models of issue voting”. En él, alertaba de que los modelos explicativos sobre los procesos de voto olvidan un elemento crucial que condiciona las decisiones de los votantes. Este elemento no es otro que el estado en que se encuentra el objeto de votación en el momento en el que se produce ésta y al que Grofman se refiere por el término “Statu Quo”. Grofman utiliza el ejemplo de un simple i unidimensional modelo espacial de voto donde hay competición entre dos partidos y un votante ha de decidir a qué partido votar según sus preferencias.



Donde “I” y “D” representan los partidos posicionados en el espectro ideológico a la izquierda y a la derecha respectivamente, “V” representa el posicionamiento ideológico del votante y “S” representa el Statu Quo o situación de partida.

En los modelos tradicionales, el votante escogería votar al partido “I” que es el que está más cerca de las preferencias del votante. Pero estos modelos obvian que el partido que gobierne se encontraría una situación preexistente. Y que no es realista esperar que cualquiera de los partidos consiga cambiar el sistema a su imagen y semejanza durante su mandato. A lo sumo, conseguirán mover el Statu Quo hacia sus respectivas posiciones. Teniendo esto en cuenta ahora el votante podría salir beneficiado de ser elegido el partido “D” pues acercaría el Statu Quo a sus preferencias siempre éste no consiga “arrastrarlo” demasiado a la derecha (S_{D2}).



¹³ Bernard Grofman.1985. *The neglected role of the Status Quo in Models of Issue Voting*.

Nótese que introduciendo el concepto de Statu Quo no solo obtenemos una mejora cualitativa a la hora de explicar el comportamiento del votante sino que además estamos aumentando las posibilidades estratégicas que tiene éste en el momento de votar. Ahora puede obtener un resultado más próximo a lo que desea votando a “D” si considera que el partido tiene una fuerza tal que dejaría el Statu Quo en SDI de tener la oportunidad de gobernar. En general votará siempre al partido que crea que dejará el Statu Quo más cerca de su posición.

Esto nos lleva a preguntarnos si existe algún sistema de elección que incorpore el Statu Quo y que nos permita aprovechar estas ventajas. Y la respuesta, como ya se había avanzado en la introducción de este trabajo, es que la elección social es una ciencia orgánica donde destacan las innovaciones en todo aquello que de verdad importa a la sociedad.

El Ranking UEFA para competiciones de clubes de Fútbol

En las competiciones internacionales de fútbol como la Champions League participan equipos de diferentes ligas nacionales. Cada liga nacional tiene asignadas un número de plazas para esta competición por las que los equipos compiten. Pero el número de plazas otorgado a cada liga no es el mismo. Hay ligas que tienen 4 como la española o la inglesa y otras que tienen una o que tienen acceso a eliminatorias previas en las que conseguir plaza como las ligas escandinavas. Pero esta asignación no es estática. Depende de los resultados obtenidos por los equipos de cada liga en competiciones internacionales previas. Aquí están los cuatro primeros puestos del ranking y sus calificaciones:¹⁴

		2010-11	2011-12	2012-13	2013-14	2014-15	Puntuación
1	España	18.214	20.857	17.714	23.000	18.357	98.142
2	Inglaterra	18.357	15.250	16.428	16.785	13.571	80.391
3	Alemania	15.666	15.250	17.928	14.714	15.571	79.129
4	Italia	11.571	11.357	14.416	14.166	18.166	69.676

Los tres primeros puestos de la lista reciben 4 plazas en la competición mientras que el cuarto recibe 3. Si los equipos Italianos rindieran más en las competiciones futuras que los alemanes, la liga italiana le arrebataría el tercer puesto a la alemana y conseguiría una plaza adicional. Así, el ranking tiene en cuenta un periodo de tiempo mucho más extendido que el presente inmediato de manera que podemos afirmar que las puntuaciones de los años anteriores al actual, representan el Statu Quo que condiciona las asignaciones del presente.

En el ranking las puntuaciones se otorgan en base a los resultados de los partidos pero el sistema sirve igual para casos donde las puntuaciones se otorgan en base a votos.

¹⁴ Rankings de la UEFA para competiciones de clubes Día 3/5/2013

Ejemplo

Volvamos al escenario donde los votantes tienen que decidir el orden de prioridades para el presupuesto estatal. Pero ahora, imaginemos que los votos no determinan directamente la asignación sino que otorgan puntos a las alternativas según el resultado y que esos puntos se suman a los otorgados en los tres años anteriores para determinar la asignación presupuestaria del año actual al dividirlos por el total (400):

	2011	2012	2013	2014	Puntuación	Asi. Pres
Sanidad	30	30	30	25	115	29%
Educación	25	20	15	30	90	23%
Infraestructuras	20	15	20	20	75	19%

Ahora llegamos a la actualidad donde se han de repetir las votaciones para otorgar los puntos de 2015. Los votantes ahora saben que voten lo que voten no podrán cambiar completamente los presupuestos ya que se tendrán en cuenta las votaciones de 2012 a 2014 que son de facto el Statu Quo. Supongamos que en el país de los votantes ha habido un terremoto que ha destruido parte de la infraestructura. Ahora los votantes, conociendo el Statu Quo previo tienen la posibilidad de manifestar en la votación unas preferencias que no se corresponden exactamente con las suyas y utilizar la estrategia de votar por la opción de infraestructuras para llevar el Statu Quo allá donde quieren aumentando el presupuesto de Infraestructuras. Este aumento además estará limitado por el sistema, lo que trae la atractiva propiedad de estabilización.

	2012	2013	2014	2015	Puntuación	Asi. Pres
Sanidad	30	30	25	25	110	28%
Educación	20	15	30	20	85	21%
Infraestructuras	15	20	20	30	85	21%

¿Y qué tiene que ver todo esto con el Teorema del Jurado? Pues que al utilizar los votos del pasado para decidir las asignaciones del futuro estamos multiplicando el número de votantes y por lo tanto, al utilizar el sistema que incorpora el Statu Quo, la probabilidad de conseguir la asignación correcta aumenta. Este argumento es criticable si opinamos que los votantes son los mismos de un año a otro y que incluso en el año presente su capacidad para acertar será más alta gracias a la experiencia y a la información extra. Pero este argumento es falso por dos motivos. Primero, en años anteriores puede haber votado gente que no vote en el presente aumentando efectivamente el número de votantes. Pero segundo y más importante es que se puede argumentar que la misma persona en años diferentes mantiene diferente información debido a que en el presente no puede recordar con exactitud todas las circunstancias que modelaban sus preferencias en el pasado. Queda demostrado entonces que un sistema que tuviera en cuenta el Statu Quo puede obtener mejores resultados que el que se utiliza actualmente y que por tanto hay margen de mejora.

4. Competencia.

Una de las variables más importantes del Teorema del Jurado es la probabilidad con la que los individuos son capaces de escoger la opción correcta. Es importante, primero, porque para que el teorema resulte válido esta capacidad ha de ser mayor que un medio. De lo contrario, el teorema funciona igual de bien para escoger la opción errónea¹⁵. Y, segundo, porque cuanto más alta sea esta probabilidad, mejores resultados logrará cualquier sistema de elección.

Se desarrolla en este apartado un sistema cuyo objetivo es la selección de aquellos votantes cuya probabilidad de acierto es más alta. Especificando desde el principio que la intención no es seleccionar en base a criterios arbitrarios como el cociente intelectual ni tampoco pretender que una parte de la sociedad quede privada del derecho de voto sino que todos sus miembros participen en aquellas votaciones para las que tienen una probabilidad de acierto más alta. El sistema está basado en un modelo de toma de decisiones en el cual existe la imposibilidad de los votantes para disponer de toda la información posible referente a todos los ámbitos y en la creencia de que diferentes votantes dispondrán de su competencia máxima en votaciones diferentes.

Modelo de toma de decisiones individual respecto a la Competencia.

Suponemos que la gente elegiría la opción correcta de entre todas las posibles si dispusiera de toda la información y fuera capaz de comprenderla y utilizarla en su totalidad. A esta capacidad y al conjunto de información disponible por un individuo en el momento de tomar una decisión se les referirá por la sigla “C” de competencia.

Para representar el grado de competencia de un individuo en el momento de la elección se utilizará una escala de valoración entre 0 y 1 donde 1 representa el total conocimiento de la información y capacidad para utilizarla y 0 el desconocimiento total.

Así pues en una elección donde el individuo sopesa diferentes posibilidades otorgaría a cada una de ellas una valoración (que se representará con una puntuación) dependiendo del grado de competencia que tenga:

$$C \times VO + (1 - C) \times VS = V$$

Donde “VO” y “VS” son valoraciones objetiva y subjetiva respectivamente, “V” la valoración total y todas ellas pueden adquirir cualquier valor puntual entre 0 y 10.

Utilizaré como ejemplo la elección de una repuesta a la pregunta $2 \times 2 = ?$

Donde las posibles alternativas sean 2, 4 y 6 para los casos de $C = 1$, $C = 0,5$ y $C = 0$. Y donde “VA” es una variable aleatoria que representa las razones subjetivas para valorar los candidatos de cada individuo en el momento de la elección:

¹⁵ Robert E. Goodin. 2001. *Epistemic Democracy: Generalizing the Condorcet Jury Theorem*.

$C = 1.$

Alternativa (2): $1 \times 0 + 0 \times VA(6) = 0$

Opción escogida: Alternativa (4)

Alternativa (4): $1 \times 10 + 0 \times VA(4) = 10$

Alternativa (6): $1 \times 0 + 0 \times VA(8) = 0$

$C = 0,5.$

Alternativa (2): $0,5 \times 0 + 0,5 \times VA(6) = 3$

Opción escogida: Alternativa (4)

Alternativa (4): $0,5 \times 10 + 0,5 \times VA(4) = 7$

Alternativa (6): $0,5 \times 0 + 0,5 \times VA(8) = 4$

$C = 0.$

Alternativa (2): $0 \times 0 + 1 \times VA(6) = 6$

Opción escogida: Alternativa (6)

Alternativa (4): $0 \times 10 + 1 \times VA(4) = 4$

Alternativa (6): $0 \times 0 + 1 \times VA(8) = 8$

Podemos ver que cuanto más grande es “C” más peso tiene la valoración objetiva y por lo tanto más posibilidades de que el votante se incline por la opción correcta. Mientras que cuanto “C” es próxima a 0 la decisión del votante es aleatoria.

Es importante notar que “C” depende de la votación que se realice ya que diferentes votaciones requerirán diferentes conocimientos para que el votante exprese una valoración objetiva.

Sistema de selección de votantes

Es evidente que un sistema de selección de votantes no tiene sentido en el marco democrático actual. En este apartado estamos suponiendo un escenario donde la selección de votantes está justificada como se hizo por ejemplo en el apartado dos de este trabajo. Es posible que en un futuro se permitan votaciones populares para decisiones menos generales a las que estamos acostumbrados hoy en día. Es para ese tipo de votaciones donde podría ser útil este tipo de sistema. La selección no tiene que ser extrema (buscar exactamente los votantes más competentes), según el teorema del jurado, basta con cerciorarse de que la capacidad de acertar del votante es mayor que un medio. En este sistema entendemos que una competencia mayor que un medio es aquella en la que el votante está familiarizado con la información requerida en la votación. En unas elecciones al parlamento de un país es argumentable que todos los posibles votantes están familiarizados con el tema suficiente como para expresar una opinión objetiva. Pero para las votaciones más específicas como qué protocolo de seguridad se ha de utilizar en los hospitales o qué tipo de infraestructura se ha de

priorizar en los presupuestos del ministerio de fomento esto no ha de ser necesariamente así. Es más, si ciertamente en un futuro se aumenta el número de votaciones públicas, sería inconcebible pedirle a la ciudadanía que se mantuviera informada de los temas relevantes en todas las votaciones.

Ejemplo

El sistema propuesto es el siguiente:

- Se crean categorías con las que describir las votaciones, por ejemplo para las mencionadas anteriormente podrían ser “sanidad, seguridad” y “tráfico, construcción” respectivamente.
- Se reconoce a los ciudadanos competencia en estas categorías según criterios demostrables y automáticos guardando un perfil de los votantes en la administración. Por ejemplo para que se reconociera la competencia de un ciudadano en sanidad bastaría que hubiese trabajado en un hospital o un órgano relacionado a la sanidad indiferentemente del rango o del trabajo que desempeñara. Para que se le reconociera la competencia en tráfico podría bastar tener el carnet de conducir.
- Se atribuyen categorías entonces a las diferentes votaciones que se han de realizar y cada categoría añade un grado de dificultad en forma de exponente a la competencia en el modelo de decisión individual:

$$C^{1+\alpha+\beta} \times PO + (1 - C^{1+\alpha+\beta}) \times PS = P$$

Donde " α " y " β " equivalen al grado de dificultad añadido por categoría en el ejemplo sanidad (α), seguridad (β) y toman valores positivos.

- Se reconoce a todos aquellos que tengan así en su perfil la competencia es las categorías pertinentes quitando de la ecuación los exponentes relativos a cada categoría.
- Se apartan de la votación todos aquellos ciudadanos para los que se entienda que la Competencia quedaría suficientemente reducida como para no tomar una decisión objetiva. En nuestro ejemplo no haría falta que los ciudadanos tuviesen reconocida la competencia en las dos categorías, podría ser suficiente con tener reconocida una de ellas para que se considerara que su competencia está por encima de un medio.
- Se elige aleatoriamente entre los ciudadanos restantes el número de ellos que sea necesario para la votación y esta se lleva a cabo.

Como se puede comprobar, si bien es cierto que toda selección de votantes tiene un carácter excluyente, con el teorema del jurado podemos abordar la tarea desde una perspectiva menos elitista de lo habitual. Buscando no así a expertos con probabilidades de acierto muy altas sino al segmento de población cuya probabilidad de acierto es superior a un medio para una votación dada. Garantizando según el teorema que la probabilidad de acierto del conjunto será mayor que no llevando a cabo una selección.

CONCLUSIÓN

La hipótesis principal de este trabajo es que el sistema democrático actual es mejorable y por lo tanto el debate sobre cómo transformarlo desde un punto de vista empírico y objetivo debería estar abierto. Después de exponer los cambios relativos a las cuatro variables escogidas en los apartados anteriores podemos afirmar que la teoría democrática es abordable con metodología matemática y que se pueden extraer conclusiones con este tipo de análisis. Por lo tanto, no podemos rechazar la posibilidad de que el sistema democrático sea mejorable y el debate ciertamente debería estar abierto.

Más allá de la hipótesis principal, los cambios al sistema propuestos durante este trabajo han servido para hacer más específica la imagen de un futuro donde la democracia se ha transformado. En un principio, mi intención era buscar un sistema mejor que la democracia. Pero además de pretenciosa la tarea se hizo difícil de concretar. Era difícil de imaginar un sistema nuevo que la sociedad aceptara y que fuera manifiestamente mejor que el actual. En cambio, se me hace fácil imaginar un futuro donde se aplican los cambios desarrollados en estas páginas. En una sociedad donde se utilizara el sistema mejorado de Condorcet sería necesario el esfuerzo especificar un orden de preferencia entre los candidatos por parte del votante. Aunque esta tarea no es poca cosa. Puede ser asumible y gratificante socialmente. En el aspecto práctico, unas papeletas un poco diferentes y un sistema de recuento computacional. También es fácil imaginar una institución estatal que se encargue de cuantificar el valor de diferentes decisiones y organice elecciones con un electorado acorde al valor de cada decisión. Un futuro donde los ciudadanos pueden reflejar sus opiniones en temas menos generales con una mayor cantidad de votaciones gracias al hecho de limitar el electorado que supone reducir el coste de llevarlas a cabo. Sería también posible en un futuro, que los ciudadanos pudieran utilizar información de votaciones previas para decidir sus votos en el presente. Se publicarían los rankings que actuarían de Statu Quo y se debatiría ampliamente sobre las posibilidades que tiene el electorado de acercar la situación allá a donde sus preferencias indiquen. Los ciudadanos además podrían utilizar esta información para tomar decisiones privadas desde donde abrir un negocio hasta en qué ciudad desea vivir con la estabilidad que aporta el saber que el panorama no puede cambiar radicalmente porque el sistema lo impide. Por último, si de verdad se convocara una gran cantidad de elecciones y fuera posible acotar el número de votantes al necesario sería posible que los organizadores de una elección utilizaran las bases de datos para descartar a aquellos ciudadanos que tienen una gran probabilidad de escoger aleatoriamente. Y gracias a la gran cantidad de votaciones sería posible practicar esta exclusión puntual sin excluir a nadie totalmente del sistema de manera que todo el mundo participara en alguna votación sintiéndose parte del sistema y aportando sus conocimientos a la causa de tomar decisiones con una probabilidad de acierto superior. En definitiva, una sociedad más democrática y matemáticamente eficaz es posible, y deberíamos estar trabajando en hacerla realidad.

BIBLIOGRAFÍA

Libros

3. David M Estlund. 2007. *Democratic Authority* . Princeton University Press.
10. Dennis C. Mueller. 2003. *Public choice III*. Cambridge University Press. Pàg 129
4. Iain McLean y Fiona Hewitt. 1994. *Condorcet. Foundations of Social Choice and Political Theory*. Edward Elgar Publishing.

Artículos científicos

2. Adam Meirovitz y Dimitri Landa. Game theory, information, and deliberative democracy. *American Journal of Political Science*, Vol. 53, No. 2, April 2009, pp. 427–444.
13. Bernard Grofman. 1985. *The neglected role of the Status Quo in Models of Issue Voting*. *The Journal of Politics*, Vol. 47, No 1. pp230-237
15. Robert E. Goodin. 2001. *Epistemic Democracy: Generalizing the Condorcet Jury Theorem*. *Journal of Political philosophy*. Nuffield College Oxford.
8. Young, H.P. 1988 Condorcet's Theory Voting. *The American Political Science Review*, Vol. 82, No. 4 pp. 1231-1244

Documentos on-line

1. Gerardo L. Munk. 2003. Capitalismo, democracia y ciencia. Pag 24 <http://www.palermo.edu>

Conferencias (por escrito)

5. Elchanan Mossel. 31 de agosto de 2010. Condorcet's Theorem.
Escribas: J. Neeman, N. Truong, and S. Troxler <http://www.stat.berkeley.edu>

Recursos on-line

7. http://en.wikipedia.org/wiki/Condorcet's_jury_theorem
14. <http://es.uefa.com/memberassociations/uefarankings/country/>
datos obtenidos el 3 de Mayo de 2015.

Blogs

9. Jason Brennan 27 de Junio de 2009 *Condorcet's Jury Theorem as an Argument against Mass Democracy*.
12. 25 de junio de 2009. *Condorcet Jury Theorem Mathematics Help*. <http://publicreason.net/>

