Universitat Autònoma de Barcelona

Treball final de grau

CADENES DE MARKOV I APLICACIONS

Autor: Daniel Romero Lozano

Tutora: Dra. Alejandra Cabaña Nigró

Barcelona, 2 de setembre de 2015

Abstract

The importance of Markov Chains arises from the fact that there exist a large number of physical, biological, economic and social phenomena that can be thus modeled, at least as simplified models, through a well developed theory that allows computations and analyzing the underlying phenomena. We shall study some basic theoretical facts practical applications. We present some theorems with their proofs and properties regarding discrete time Markov Chains and briefly introduce Poisson Process as a continuous time Markovian model.

Resum

La importància de les Cadenes de Markov vénen donades pel fet que hi ha gran nombre de fenòmens físics, biològics, econòmics i socials que poden modelar-se d'aquesta manera, almenys com a models simplificats per molts d'ells, a partir d'una teoria ben desenvolupada que permet fer càlculs i analitzar els fenòmens. Estudiarem els elements bàsics en teoria i veurem aplicacions en models pràctics. Demostrarem alguns dels teoremes i propietats de les Cadenes de Markov a temps discret i introduirem el procés de Poisson en les cadenes a temps continu.

Resumen

La importancia de las cadenas de Markov se debe a que existen un gran número de fenómenos físicos, biológicos, económicos y sociales que pueden modelarse de esta manera, al menos como modelos simplificados para muchos de ellos, a partir de una teoría bien desarrollada que nos permite hacer cálculos y analizar los fenómenos. Estudiaremos los elementos básicos en teoría y veremos aplicaciones en modelos prácticos. Demostraremos algunos de los teoremas y propiedades de las Cadenas de Markov en tiempo discreto e introduciremos el proceso de Poisson en las cadenas de tiempo continuo.

Vull agrair a la professora Alejandra Cabaña per la seva paciència i comprensió durant el transcurs d'aquest treball.

I especialment a la meva família i la meva parella per donar-me forces i ajudar-me en els moments difícils aquests últims anys.

Índex

1 Introducció **1**

1.1 Estructura . . . 1

2 Definicions i Propietats **2**

2.1 Més Exemples . . . 8

3 Classificació d'estats **11**

3.1 Introducció . . . 11

3.2 Classificació . . . 12

4 Relacions d'equivalència **18**

5 Distribucions estacionàries i comportament límit **21**

5.1 Definicions i Propietats . . . 21

5.2 Més exemples . . . 23

5.2.1 Cadenes doblement estocàstiques . . . 25

6 Introducció al Temps Continu **26**

6.1 Poisson . . . 26

7 Aplicacions **31**

7.1 Medicina . . . 31

7.1.1 Introducció . . . 31

7.1.2 Exemple . . . 31

7.2 Internet . . . 36

8 Conclusions del treball **38**

Referències **39**

1 Introducció

Cada cop més les matemàtiques i l'estadística són l'eina principal per estudiar i modelar fenòmens en tota mena d'àmbits, les cadenes de Markov són un clar exemple. Durant el transcurs d'aquest treball aprendrem els conceptes més importants de les Cadenes de Markov, des de definicions i propietats fins a proposicions i teoremes més complexes. Tot ells amb la seva corresponent demostració. També veurem alguns exemples i analitzarem aplicacions en diferents contextos.

"Per predir el futur només necessitem conèixer el present, no importa el passat."

Aquesta expressió recull filosòficament el que són les Cadenes de Markov. En el pròxim capítol veurem la seva definició i podrem entendre el sentit d'aquesta frase.

L'essència d'aquest treball és aconseguir plasmar la importància i rellevància de les Cadenes de Markov com una eina d'estudi i modelatge matemàtic. Reunint els conceptes teòrics i exemples pràctics amb l'objectiu de què el lector pugui familiaritzar-se i entendre aquest concepte que rep el seu nom pel matemàtic rus *Andrei Markov (1856-1922).*

1.1 Estructura

L'estructura del treball està dividida en vuit seccions; les sis primeres contenen la teoria, juntament amb petits exemples que ajudaran a entendre els conceptes teòrics. Seguidament trobarem una secció on veurem com els conceptes anteriorment estudiats es poden aplicar per modelar sistemes en situacions reals. I finalment reunirem les conclusions extretes durant el transcurs del treball.

2 Definicions i Propietats

A partir d'ara considerarem:

- $X = \{X_n\}_{nv\geq 0}$ una família de variables aleatòries, generalment no independents.
- (Ω, F, P) un espai de probabilitats.
- $E = \{x_n, n \geq 0\}$ l'espai d'estats.

Definició 2.1. *Prenem $\{X_n\}_{n\geq 0}$ una família de variables aleatòries i $E = \{x_n, n \geq 0\}$ un espai d'estats discret. Si tenim que $x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n, x_{n+1} \in E$ per tot $n \geq 0$ compleix:*

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, ..., X_0 = x_0) = P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n) \tag{2.1}$$

diem que aquest procés estocàstic és una ***cadena de Markov***

Definició 2.2. *Anomenem* ***cadena de Markov homogènia*** *a les cadenes de Markov que compleixen per qualsevol $x_i, x_j \in E$*

$$P(X_{n+1} = x_j \mid X_n = x_i) = P(X_1 = x_j \mid X_0 = x_i) \forall n \geq 1 \tag{2.2}$$

és a dir, que les probabilitats condicionades no depenen de l'instant.

Definició 2.3. *S'anomena* ***matriu estocàstica*** *a tota matriu $P = (p_{ij})_{i,j}$ que compleix*

- $0 \leq p_{ij} \leq 1 \forall i, j \geq 0.$
- $\sum_{k=0}^{+\infty} p_{ik} = 1$

Un exemple és la ***matriu de transició en un pas*** *de la cadena de Markov homogènia, on definim per $P = (p_{ij})_{i,j\geq 0}$,*

$$p_{ij} := P(X_{n+1} = x_j \mid X_n = x_i)$$

on la posició ij de la matriu ens indica la probabilitat que tenim d'anar de l'estat i a l'estat j en un instant de temps.

Veiem un exemple per tenir més clar aquest concepte.

Exemple 1. Ehrenfest chain

Aquesta cadena és originaria com a model físic per dos volums cúbics d'aire connectats per un petit forat. En la versió matemàtica tenim dues urnes amb un total de N pilotes. L'experiment tracta d'agafar una de les pilotes aleatòriament i moure-la a l'altra urna.

Sigui X_n el número de pilotes que hi han a l'urna número 1 després de n moviments. Clarament, X_n té la propietat de Markov, l'única informació rellevant que necesitem per estudiar l'instant $n+1$ és el número de pilotes X_n que tenim en l'instant n, sense tenir en compte les observacions anteriors $X_{n-1}, ..., X_1, X_0$.

Per argumentar aquest fet veiem que la probabilitat d'augmentar en una unitat el número de pilotes a la urna 1 és

$$P(X_{n+1} = i+1 | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0) = \frac{N-i}{N}$$

I la probabilitat en disminuir en una unitat és

$$P(X_{n+1} = i-1 | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0) = \frac{i}{N}$$

Per tant,

- $p(i, i+1) = \frac{N-i}{N}$, $p(i, i-1) = \frac{i}{N}$ per $0 \leq i \leq N$
- $p(i, j) = 0$ per altres casos.

El càlcul de totes les probabilitats bé donat només pels valors del número total de pilotes N i el valor de X_n.
Amb aquest dos resultats podem calcular la matriu de transició a un pas. Per exemple per $N = 4$

$$\begin{array}{c} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 2/4 & 0 & 2/4 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Definició 2.4. *Denotem la* ***distribució de la cadena en l'instant*** n *com* π_n *on*

$$\pi_n(x_i) = P(X_n = x_i)$$

La ***distribució inicial*** π_0 *és la llei de la variable inicial* X_0, $\pi_0 := L(X_0)$ *tal que* $\pi_0(x_i) = P(X_0 = x_i) \forall x_i \in E$

A més, podem demostrar que per tot $n \geq 1$ *i* $x_0, x_1, ..., x_n \in E$,

$$P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) = \pi_0(x_0) p_{1,0} \cdot ... \cdot p_{n-2,n-1} p_{n-1,n}$$

Demostració. Per demostrar aquesta igualtat només hem d'utilitzar:

1. Probabilitat condicionada $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$
2. Propietat de Markov 2.1

Així tenim:

$$\begin{aligned} P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) &=^{(1)} P(X_n = x_n | X_0 = x_0, ..., X_{n-1} = x_{n-1}) \\ &\cdot P(X_0 = x_0, ..., X_{n-1} = x_{n-1}) \\ &=^{(2)} p_{n-1,n} P(X_0 = x_0, ..., X_{n-1} = x_{n-1}) \\ &=^{(1)+(2)} p_{n-1,n} p_{n-2,n-1} P(X_0 = x_0, ..., X_{n-2} = x_{n-2}) \\ &\vdots \\ &= p_{n-1,n} p_{n-2,n-1} \cdot ... \cdot p_{1,0} P(X_0 = x_0) \\ &= p_{n-1,n} p_{n-2,n-1} \cdot ... \cdot p_{1,0} \pi_0(x_0) \end{aligned}$$

□

Definició 2.5. *Diem* ***matriu de transició en m passos*** *de la cadena de Markov a la matriu $P^{(m)}$, on els elements de la matriu són:*

$$p_{ij}^{(m)} = P(X_{n+m} = x_j \mid X_n = x_i) = P(X_m = x_j \mid X_0 = x_i)$$

Aquesta matriu clarament compleix les propietats per ser una matriu estocàstica.

Teorema 2.1. *La distribució d'una cadena de Markov homogènia a temps discret es pot expressar a partir de la matriu de probabilitats i la distribució inicial π_0. Tenim:*

$$\pi_n = \pi_0 P^{(n)}$$

per qualsevol $n \geq 1$.

Demostració. Demostrarem aquest teorema per inducció sobre n.

<u>Per n=1:</u> Volem veure que $\pi_1 = \pi_0 P$,

$$\pi(x_i) = P(X_1 = x_i) = \sum_{x_k \in E} P(X_1 = x_i | X_0 = x_k) P(X_0 = x_k) = \sum_{x_k \in E} p_{ki} \pi_0(x_k) = \pi_0(x_i) P$$

Per hipòtesi d'inducció (HI) suposem ara per n,

$$\pi_n(x_i) = P(X_n = x_i) = \sum_{x_l \in E} \pi_0(x_l) p_{li}^{(n)}$$

i veiem per $n + 1$

Per n+1

$$\begin{aligned}
\pi_{n+1}(x_i) &= \sum_{x_k \in E} P(X_{n+1} = x_i | X_n = x_k) P(X_n = x_k) \\
&= \sum_{x_k \in E} P(X_{n+1} = x_i | X_n = x_k) \pi_n(x_k) \\
&=^{(HI)} \sum_{x_k \in E} P(X_{n+1} = x_i | X_n = x_k) \sum_{x_l \in E} \pi_0(x_l) p_{lk}^{(n)} \\
&= \sum_{x_k \in E} p_{ki} \sum_{x_l \in E} \pi_0(x_l) p_{lk}^{(n)} \\
&= \sum_{x_k \in E} \sum_{x_l \in E} \pi_0(x_l) p_{lk}^{(n)} p_{ki} \\
&= \sum_{x_l \in E} \pi_0(x_l) \left(\sum_{x_k \in E} p_{lk}^{(n)} p_{ki} \right)
\end{aligned}$$

Per tant, per acabar la demostració necesitem veure que

$$\sum_{x_k \in E} p_{lk}^{(n)} p_{ki} = p_{li}^{(n+1)}$$

Per demostrar això, necessitarem:

1. Probabilitat condicionada $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$
2. Propietat de Markov (2.1)
3. Fórmula probabilitats totals $P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + ... + P(A_n)P(B|A_n)$

$$\begin{aligned}
\sum_{x_k \in E} p_{lk}^{(n)} p_{ki} &= \sum_{x_k \in E} P(X_n = x_k | X_0 = x_l) P(X_{n+1} = x_i | X_n = x_k) \\
&=^{(2)} \sum_{x_k \in E} P(X_n = x_k | X_0 = x_l) P(X_{n+1} = x_i | X_n = x_k, X_0 = x_l) \\
&=^{(1)} \sum_{x_k \in E} \frac{\cancel{P(X_n = x_k, X_0 = x_l)}}{P(X_0 = x_l)} \frac{P(X_{n+1} = x_i, X_n = x_k, X_0 = x_l)}{\cancel{P(X_n = x_k, X_0 = x_l)}} \\
&=^{(1)} \sum_{x_k \in E} \frac{P(X_{n+1} = x_i, X_0 = x_l | X_n = x_k) P(X_n = x_k)}{P(X_0 = x_l)} \\
&=^{(3)} \frac{P(X_{n+1} = x_i, X_0 = x_l)}{P(X_0 = x_l)} \\
&=^{(1)} P(X_{n+1} = x_i | X_0 = x_l) \\
&= p_{li}^{(n+1)}
\end{aligned}$$

És el resultat que volíem per concloure

$$\sum_{x_l \in E} \pi_0(x_l) p_{li}^{(n+1)}$$

I així poder finalitzar la demostració per inducció del teorema.

□

Seguidament veurem un teorema interesant que és útil per treballar amb les matrius de transició. Però abans necessitem demostrar la proposició següent:

Proposició 2.1. $P^{(m)} = P^m$ *per tot* $m \geq 0$

Demostració. Provarem aquest fet per inducció. Per aquesta demostració necesitarem:

1. Propietat de Markov (2.1)
2. Probabilitat condicionada $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$
3. Fórmula probabilitats totals $P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + ... + P(A_n)P(B|A_n)$
4. $P(A \cap B|C) = P(A|B \cap C)P(B|C)$

El cas $n = 1$ és lògic, per tant mirem el cas $n = 2$

Per n=2: Volem veure $P^{(2)} = P^2$, per fer això ens fixarem els elements de la matriu, aleshores haurem de demostrar que tots els elements $p_i^{(2)} j \in P^{(2)}$ són iguals als de la matriu P^2. Hem de veure:

$$p_{ij}^{(2)} = \sum_{x_k \in E} p_{ik} p_{kj} \qquad \forall x_i, x_j \in E$$

Per definició,

$$p_{ij}^{(2)} = P(X_2 = x_j | X_0 = x_i)$$

Aleshores,

$$
\begin{aligned}
P(X_2 = x_j | X_0 = x_i) &=^{(2)} \frac{P(X_2 = x_j, X_0 = x_i)}{P(X_0 = x_i)} \\
&= \sum_{x_k \in E} \frac{P(X_2 = x_j, X_1 = x_k, X_0 = x_i)}{P(X_0 = x_i)} \\
&=^{(2)} \sum_{x_k \in E} P(x_2 = x_j | X_1 = x_k, X_0 = x_i) \frac{P(X_1 = x_k, X_0 = x_i)}{P(X_0 = x_i)} \\
&=^{(2)} \sum_{x_k \in E} P(x_2 = x_j | X_1 = x_k, X_0 = x_i) P(X_1 = x_k | X_0 = x_i) \\
&=^{(1)} \sum_{x_k \in E} P(x_2 = x_j | X_1 = x_k) P(X_1 = x_k | X_0 = x_i) \\
&= \sum_{x_k \in E} p_{ik} p_{kj}
\end{aligned}
$$

Ja hem vist el cas $n = 2$. Suposem certa la hipòtesis d'inducció (HI) per n i veiem $n + 1$

Per n+1:

$$
\begin{aligned}
p_{ij}^{(n+1)} &= P(X_{n+1} = x_j | X_0 = x_i) \\
&= \sum_{x_k \in E} P(X_{n+1} = x_j, X_n = x_k | X_0 = x_1) \\
&=^{(4)} \sum_{x_k \in E} P(X_{n+1} = x_j | X_n = x_k, X_0 = x_1) P(X_n = x_k | X_0 = x_i) \\
&=^{(1)} \sum_{x_k \in E} P(X_{n+1} = x_j | X_n = x_k) P(X_n = x_k | X_0 = x_i) \\
&= \sum_{x_k \in E} P(X_1 = x_j | X_0 = x_k) P(X_n = x_k | X_0 = x_i) \\
&= \sum_{x_k \in E} p_{ik}^{(1)} p(n)_{kj}
\end{aligned}
$$

Si passem aquesta última igualtat a matrius,

$$P^{(n+1)} = P^{(1)} P^{(n)}$$

Com que sabem que $P^{(1)} = P^1$ i per hipòtesi d'inducció $P^{(n)} = P^n$, podem concloure

$$P^{(n+1)} = P^{(1)} P^{(n)} = P P^n = P^{n+1}$$

Per tant, hem demostrat que per qualsevol $n \geq 1$, $P^{(n)} = P^n$.

$\square$

Teorema 2.2. ***Champman-Kolmogorov***

L'equació de Champman-Kolmogorov ens diu que es compleix

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{x_k \in E} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)} = \sum_{x_k \in E} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)} \qquad \forall x_i, x_j \in E, \forall m, n \geq 0$$

Si possem aquesta igualtat en forma de matrius, és equivalent:

$$P^{(m+n)} = P^{(m)} P^{(n)} = P^{(n)} P^{(m)} = P^m P^n = P^n P^m$$

Demostració. Aquest teorema és conseqüència immediata de la preposició anterior.

$\square$

2.1 Més Exemples

Exemple 2. Gambler's ruin

Considerem un joc d'atzar que en qualsevol dels torns pots perdre 1 euro amb probabilitat $1 - p = 0.6$ o guanyar-lo amb probabilitat $p = 0.4$. Suposem que tenim les normes que si arribem a tenir N euros ens retirem amb la fortuna i, com és lògic, sense diners hem de deixar de jugar.

Sigui X_n la quantitat de diners que tenim després de jugar n vegades. Està clar que X_n té la propietat de Markov (2.1), ja que per poder predir el següent estat X_{n+1} només necesitem saber la informació de X_n.

- $P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0) = 0.4$ per $j = i + 1$
- $P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0) = 0.6$ per $j = i - 1$
- $P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0) = 1$ per $i = \{0, N\}$
- $P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0) = 0$ per altres casos

Suposem que estem al cas $N = 4$, la matriu de transició a un pas serà

$$\begin{array}{c} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Podem calcular ara algunes probabilitats a dos passos, per exemple:

- $p^2(2,4) = (0.4)(0.4) = 0.16$ necessitem guanyar les dues partides.
- $p^2(3,3) = (0.4)(0.6) = 0.24$ necessitem perdre una i guanyar la següent.
- $p^2(2,2) = (0.4)(0.6) + (0.6)(0.4) = 0.48$ necessitem perdre una i guanyar la següent o al revés.
- $p^2(0,0) = 1$ quan entrem als estats 0 o 4 ja no podem sortir.

Si calculem la matriu de transició en dos passos veiem que obtenim els mateixos valors,

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0.24 & 0 & 0.16 & 0 \\ 0.36 & 0 & 0.48 & 0 & 0.16 \\ 0 & 0.36 & 0 & 0.24 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

També podem calcular la matriu de transició després de jugar, per exemple, $n = 20$ partides:

$$P^{20} = \begin{pmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.87655 & 0.00032 & 0 & 0.00022 & 0.12291 \\ 0.69186 & 0 & 0.00065 & 0 & 0.30749 \\ 0.41842 & 0.00049 & 0 & 0.00032 & 0.58437 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

Exemple 3. Cadena de Markov en dues etapes

En una cadena de Markov la distribució de X_{n+1} només depèn de X_n. És fàcil generalitzar el cas perquè la distribució de X_{n+1} només depengui de (X_n, X_{n-1}), cadena en dues etapes. Anem a veure un exemple concret sobre un jugador de basketball que encistella un tir depenen de les següents probabilitats:

- $\frac{1}{2}$ si ha fallat els dos anteriors.
- $\frac{2}{3}$ si ha encistellat un dels dos anteriors.
- $\frac{3}{4}$ si ha encistellat els dos anteriors.

Tenim els estats del procés següents $\{OO, OF, FO, FF\}$, on O es refereix a que ha encistellat el tir i F que l'ha fallat. Les probabilitats de transició són:

$$
\begin{array}{c}
 \\
\textbf{OO} \\
\textbf{OF} \\
\textbf{FO} \\
\textbf{FF}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc}
\textbf{OO} & \textbf{OF} & \textbf{FO} & \textbf{FF}
\end{array} \\
\begin{pmatrix}
3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\
2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1/2 & 1/2
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Per exemple si ens trobem en la situació FO, o sigui $X_{n-1} = F$ i $X_n = O$, voldrà dir que el següent tir serà F amb probabilitat $\frac{1}{3}$. Si això passa, el següent estat serà $(X_n, X_{n+1}) = (O, F)$ amb probabilitat $\frac{1}{3}$.

Aquest fenomen es coneix com **The Hot Hand** i s'han realitzat alguns estudis per veure si realment un jugador que es troba en una "bona ratxa"de tirs té més probabilitats d'encistellar el següent.

3 Classificació d'estats

Analitzarem els tipus d'estats que poden tenir les cadenes de Markov i veurem les seves característiques. Abans, hem de tenir clars alguns conceptes bàsics.

3.1 Introducció

La següent notació,

$$P_x(A) = P(A|X_0 = x)$$

denota la probabilitat d'arribar a un conjunt d'estats $A \subset E$ partint inicialment de $x \in E$.

Definició 3.1. *El* ***temps de tornada*** *a un estat es defineix com*

$$T_x = min\{n > 0 | X_n = x\}, x \in E$$

amb $T_x = +\infty$ en el cas que mai pogui tornar a l'estat inicial x. Intuïtivament, T_x és el temps mínim que es triga a tornar a l'estat inicial x sense tenir en compte el temps 0.

Entenem $\rho_{yy} = P_y(T_y < \infty)$ com la probabilitat de retornar a l'estat y quan sortim de y, excloent $n = 0$.

Teorema 3.1. *Strong Markov Property*
Sigui $\{X_n\}$ una cadena de Markov, suposem que T_y és un temps de tornada. Aleshores $X_{T_y}, X_{T_{y+1}}, X_{T_{y+2}}, \ldots$ és una cadena de Markov.

Demostració. Sigui $v_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ i $T_y = n$.

$$P(X_{T_{y+1}} = z, X_{T_y} = y) = \sum_{x \in v_n} P(X_{n+1} = z, X_n = y, \ldots, X_0 = x_0)$$

Utilitzant la fórmula de probabilitat condicionada i com que $\{X_n\}$ és una cadena de Markov,

$$\begin{aligned} P(X_{T_{y+1}} = z, X_{T_y} = y) &= \sum_{x \in v_n} P(X_{n+1} = z | X_n = y, \ldots, X_0 = x_0) P(X_n = y, \ldots, X_0 = x_0) \\ &= p(y, z) \sum_{x \in v_n} P(X_n = y, \ldots, X_0 = x_0) \\ &= p(y, z) P(X_{T_y} = y) \end{aligned}$$

Si tornem a utilitzar la probabilitat condicionada trobem el resultat que volíem.

$$P(X_{T_{y+1}} = z | X_{T_y} = y) = p(y, z)$$

□

3.2 Classificació

Amb les definicions i propietats anteriors tenim dos possibilitats per classificar els estats a partir del temps:

- Diem que $y \in E$ és **transitori** si

  $$P_y\{T_y = +\infty\} > 0$$

  és a dir, que es pot sortir d'ell i no tornar amb probabilitat positiva.

- Diem que $y \in E$ és **recurrent** si

  $$P_y\{T_y < +\infty\} = 1$$

  és a dir, que partint de l'estat y tornarà en algun moment amb probabilitat 1.

Proposició 3.1. *$y \in E$ és transitori o recurrent.*

Demostració. Per fer aquesta demostració veurem que si un estat y no es transitori per definició serà recurrent, i a la inversa.

- Suposem $y \in E$ no és transitori, per definició de transitori tenim que $P_y\{T_y = +\infty\} > 0$, per tant ara estem en el cas que $P_y\{T_y = +\infty\} = 0$.
  Volem veure que $P_y\{T_y < +\infty\} = 1$ que és la definició de que l'estat $y \in E$ sigui recurrent, com que

  $$\left.\begin{array}{r} 1 - P_y\{T_y = +\infty\} = P_y\{T_y < +\infty\} \\ P_y\{T_y = +\infty\} = 0 \end{array}\right| \implies \quad P_y\{T_y < +\infty\} = 1$$

  Amb això tenim que si **no és transitori ha de ser recurrent**.

- Suposem $y \in E$ no és recurrent, per definició de recurrent tenim que $P_y\{T_y < +\infty\} = 1$, per tant ara estem en el cas que $P_y\{T_y < +\infty\} \neq 1$.
  Volem veure que $P_y\{T_y = +\infty\} > 0$, tenim

  $$\left.\begin{array}{r} 1 - P_y\{T_y = +\infty\} = P_y\{T_y < +\infty\} \\ P_y\{T_y < +\infty\} \neq 1 \end{array}\right| \implies \quad P_y\{T_y = +\infty\} > 0$$

  Per tant, si **no és recurrent ha de ser transitori**.

□

Exemple 4. Gambler's ruin

Considerem el cas $N = 4$, per tant tenim la matriu de transició

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Anem a veure que els estats **1,2 i 3** són transitoris i els estat **0 i 4** són recurrents.

És fàcil veure que els estats 0 i 4 són recurrents ja que quan ens trobem en aquest estat ja no sortirem mai amb probabilitat 1. Per tant la probabilitat de tornar a l'estat en un temps finit és 1.

$$P_0\{T_0 < +\infty\} = 1 \qquad P_4\{T_4 < +\infty\} = 1$$

Per raonar que els estats $1, 2$ i 3 són transitoris, veiem que sortint de 1 si la cadena va cap a 0 mai retornarà a 1, per tant la probabilitat de que mai retorni serà més gran que 0.

$$P_1\{T_1 = +\infty\} \geq p(1,0) = 0.6 > 0$$

Amb l'estat 2 passa el mateix, si comencem a 2 i anem cap a 1 i després cap a 0 mai tornarem a l'estat inicial, llavors

$$P_2\{T_2 = +\infty\} \geq p(2,1)p(1,0) = 0.36 > 0$$

La cadena va de l'estat 3 al 4 amb probabilitat 0.4 i ja no pot tornar a l'estat 3, per tant veiem que l'estat 3 també és transitori.

$$P_3\{T_3 = +\infty\} \geq p(3,4) = 0.4 > 0$$

Així doncs, tenim dos estats recurrents i tres transitoris.

Un altre punt interesant de les cadenes de Markov és estudiar el nombre de vegades que passem per un estat $x \in E$.

Definició 3.2. *Sigui un estat inicial $x \in E$. Denotem N_x al* ***nombre de vegades que la cadena passa per l'estat*** *x*

$$N_x := \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{\{X_n = x\}}$$

Teorema 3.2. *Un estat transitori és visitat un nombre finit de vegades $N_y \sim Geo(p)$, on $p = P_y\{T_y = +\infty\} > 0$ i funció de probabilitat $P_y\{N_y = k\} = p(1-p)^{k-1}$ per $k = \{1, 2, \dots\}$.*

Demostració. Com que tenim un estat transitori, per definició tenim $P_y\{T_y = +\infty\} > 0$. Per fer la demostració diferenciarem dos casos

1. $\underline{P_y\{T_y = +\infty\} = 1 \quad \Longrightarrow \quad P_y\{T_y < +\infty\} = 0}$

   Per tant, mai tornarem a l'estat y i el nombre de visites a l'estat y sortint d'aquest serà $N_y = 1$.

2. $\underline{0 < P_y\{T_y = +\infty\} < 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 < P_y\{T_y < +\infty\} < 1}$

   Necessitarem les següents propietats:

   (a) Propietat de Markov (2.1)
   (b) Probabilitat condicionada $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$
   (c) Strong Markov Property (Teorema 3.1)

   Demostrem per inducció sobre k que $P_y\{N_y = k\} = p(1-p)^{k-1}$ per $k = \{1, 2, \dots\}$. El cas $k = 1$ és senzill ja que la probabilitat de que sortint de y no tornem mai més aquest estat és p per l'enunciat. Veiem $k = 2$

   Per k=2:

   En aquest cas sortirem de y i només tornarem a passar una vegada, això vol dir,

$$
\begin{aligned}
P_y\{N_y = 2\} &= P_y\{T_y < +\infty, T_y^{(2)} = \infty\} \\
&=^{(b)} P_y\{T_y^{(2)} = \infty | T_y < +\infty\} P_y\{T_y < +\infty\} \\
&= P_y\{T_y^{(2)} = \infty | X_{T_y} = y\}(1 - P_y\{T_y = +\infty\}) \\
&= P_y\{X_{T_y+1} \neq y, X_{T_y+2} \neq y, X_{T_y+3} \neq y, \dots | X_{T_y} = y\}(1-p) \\
&= P_y\{X_1 \neq y, X_2 \neq y, X_3 \neq y, \dots | X_0 = y\}(1-p) \\
&= P_y\{T_y = \infty\}(1-p) \\
&= p(1-p)
\end{aligned}
$$

   Suposem cert per hipòtesi d'inducció (HI) per k,

$$
\begin{aligned}
P_y\{N_y = k\} &= P_y\{X_{T_y^{(k)}+1} \neq y, X_{T_y^{(k)}+2} \neq y, X_{T_y^{(k)}+3} \neq y, \dots | X_{T_y} = y\} \\
&= p(1-p)^{k-1}
\end{aligned}
$$

   I veiem $k + 1$.

Per k+1:

$$
\begin{aligned}
P_y\{N_y = k+1\} &= P_y\{T_y < +\infty, T_y^{(k+1)} = \infty\} \\
&=^{(b)} P_y\{T_y^{(k+1)} = \infty | T_y < +\infty\} P_y\{T_y < +\infty\} \\
&= P_y\{T_y^{(k+1)} = \infty | X_{T_y} = y\}(1 - P_y\{T_y = +\infty\}) \\
&= P_y\{X_{T_y^{(k)}+1} \neq y, X_{T_y^{(k)}+2} \neq y, X_{T_y^{(k)}+3} \neq y, \dots | X_{T_y} = y\}(1-p) \\
&=^{(HI)} P_y\{N_y = k\}(1-p) \\
&= p(1-p)^{k-1}(1-p) \\
&= p(1-p)^k
\end{aligned}
$$

Per tant, hem vist que un estat transitori és visitat un nombre $N_y \sim Geo(p)$ finit de vegades.

□

Definició 3.3. *Definim el* ***nombre esperat de visites*** *a un estat com*

$$\mathbb{E}_y(N_y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{\{X_n = y\}}$$

És fàcil demostrar les següents propietats:

1. $x_j \in E \Longrightarrow \mathbb{E}_{x_j}(N_{x_j}) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{jj}^{(n)}$
2. $y \in E$ transitori $\Longrightarrow \mathbb{E}_y(N_y) = \frac{1}{p} < +\infty$
3. $y \in E$ recurrent $\Longrightarrow \mathbb{E}_y(N_y) = +\infty$
4. $x_j \in E$ recurrent $\Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} p_{jj}^{(n)} = +\infty$
5. $x_j \in E$ transitori $\Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} p_{jj}^{(n)} < +\infty$
6. $y \in E$ transitori $\Longrightarrow$ per tot $x \in E$ tenim $\mathbb{E}_x(N_y) < +\infty$
7. E finit $\Longrightarrow$ existeix algun $x \in E$ recurrent

Demostració. 1. Per demostrar aquest apartat necessitem aplicar Fubini.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{x_j}(N_{x_j}) &= \mathbb{E}_{x_j}(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{\{x_n=x_j\}}) \\ &\downarrow^{Fubini} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}_{x_j}(\mathbf{1}_{\{x_n=x_j\}}) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P_j\{X_n = x_j\} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} p_{jj}^{(n)}\end{aligned}$$

2. Com hem vist anteriorment $N_y \sim Geo(p)$. Aleshores, el nombre esperat de visites a $y \in E$ és l'esperança de la distribució geomètrica.

3. Per definició, si un estat recurrent és visitat infinites vegades és clar que la seva esperança serà infinit.

4. És conseqüència directa dels punts 1,2 i 3.

5. És conseqüència directa dels punts 1,2 i 3.

6. Siguin $x = x_i$ i $y = x_j$, si no existeix cap m tal que $p_{ij}^m > 0$ aleshores

$$\mathbb{E}_x(N_y) = 0 < +\infty$$

   En cas contrari podem afirmar que,

$$\mathbb{E}_x(N_y) \leq \mathbb{E}_y(N_y) < +\infty$$

   Per la propietat número 2.

7. Suposem que no existeix cap estat recurrent. Per la propietat número 6 tenim que per qualsevol $x, y \in E$ tenim $\mathbb{E}_x(N_y) < +\infty$. Per tant com que tenim un número finit d'estats,

$$\sum_{y \in E} \mathbb{E}_x(N_y) < +\infty$$

En canvi,

$$\begin{aligned}\sum_{y\in E}\mathbb{E}_x(N_y) &= \sum_{y\in E}\sum_{n=0}^{+\infty} P_x\{X_n = y\}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P_x\{X_n \in E\}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} 1\\ &= +\infty\end{aligned}$$

Trobem una contradicció, per tant no tots els estats poden ser transitoris. Com a mínim tenim un estat recurrent.

$\square$

4 Relacions d'equivalència

Podem estudiar les cadenes de Markov a partir de descompondre-la en diferents classes que tenen diferents característiques. Abans però hem de tenir clar com es relacionen els estats de la cadena.

Definició 4.1. *Diem que l'estat $x_j \in E$ és* ***accessible*** *desde $x_i \in E$ si existeix un $M \geq 0$ tal que $p_{ij}^{(M)} > 0$, denotat com $x_i \longrightarrow x_j$.*

Amb aquesta definició veiem un estat sempre és accessible a ell mateix, ja que $p_{ii}^{(0)} = 1 \geq 0$.

Definició 4.2. *Dos estats $x_i, x_j \in E$ estan* ***comunicats*** *si x_i és accessible desde x_j i x_j accessible desde x_i, ho denotem com $x_i \longleftrightarrow x_j$.*

Una manera d'entendre aquest fet, és dir que $x_j \in E$ és accessible desde $x_i \in E$ "si existeix algun camí per anar de x_i a x_j".

Definició 4.3. *Definim el període d_i d'un estat $x_i \in E$ com*

$$d_i = mcd\{n \geq 1; p_{ii}^{(n)} > 0\}$$

amb $d_i = +\infty$ si no existeix cap $n \geq 1$ amb $p_{ii}^{(n)} > 0$.

Lema 4.1. *Si $x_i \longrightarrow x_j$ i $x_j \longrightarrow x_k$, aleshores $x_i \longrightarrow x_k$*

Demostració. Per definició existeixen $m, n \geq 0$ tal que $p_{ij}^m > 0$ i $p_{jk}^n > 0$. Per tant,

$$0 < p_{ij}^m p_{jk}^n \leq p_{ik}^{n+m}$$

Això ens diu que $x_i \longrightarrow x_k$. □

Lema 4.2. *La relació de comunucació ($\longleftrightarrow$) és una relació d'equivalència.*

Demostració. Per demostrar això hem de veure que compleix les propietats reflexiva, simètrica i transitiva.

- Reflexiva
  Hem vist que els estats són accessibles a ells mateixos, llavors $x_i \longleftrightarrow x_i \quad \forall x_i \in E$.

- Simètrica
  És evident que $x_i \longleftrightarrow x_j \quad \Longleftrightarrow \quad x_j \longleftrightarrow x_i \quad \forall x_i, x_j \in E$.

- Transitiva
  Pel Lema anterior es demostra que per qualsevol $x_i, x_j, x_k \in E$ si $x_i \longleftrightarrow x_j$ i $x_j \longleftrightarrow x_k$, aleshores $x_i \longleftrightarrow x_k$

Així doncs, podem dir que és tracta d'una relació d'equivalència.

$\square$

A partir d'ara, podem dir que si dos estats estan comunicats pertanyen a la mateixa classe d'equivalència.

Teorema 4.1. *Siguin $x_i, x_j \in E$ dos estats comunicats, suposem que x_i és recurrent aleshores x_j també ho és.*

Demostració. Com que x_i, x_j estan comunicats, existeixen $M, N > 0$ tals que $p_{ij}^{(N)} > 0$ i $p_{ji}^{(M)} > 0$. Per tant podem posar,

$$p_{jj}^{(m+k+n)} = \sum_{s,t \in E} p_{js}^{(m)} p_{st}^{(k)} p_{tj}^{(n)}$$

Si desenvolupem aquesta expressió

$$\begin{aligned} \sum_{s,t \in E} p_{js}^{(m)} p_{st}^{(k)} p_{tj}^{(n)} &\geq p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(k)} p_{ij}^{(n)} \\ &= C \cdot p_{ii}^{(k)} \end{aligned}$$

Amb $p_{ji}^{(m)} p_{ij}^{(n)} = C > 0$ tenim que $p_{jj}^{(m+k+n)} \geq C \cdot p_{ii}^{(k)}$. Com que per la propietat 4 del tema anterior tenim que $\sum_{t=0}^{+\infty} p_{ii}^{(t)} = +\infty$ aleshores,

$$\sum_{l=0}^{+\infty} p_{jj}^{(l)} = +\infty \geq \sum_{k=1}^{+\infty} p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(k)} p_{ij}^{(n)} \geq C \sum_{k=1}^{+\infty} p_{ii}^{(k)} = +\infty$$

Per tant, per aquesta mateixa propietat x_j també és recurrent.

$\square$

Corol·lari 4.1. *Siguin $x_i, x_j \in E$ dos estats comunicats, suposem que x_i és transitori aleshores x_j també ho és.*

Demostració. Sabem que un estat ha de ser transitori o recurrent. Suposem que x_j no és transitori, per tant és recurrent. Com que x_i i x_j estan comunicats, pel teorema anterior x_i ha de ser recurrent. Arribem a una contradicció. Per tant x_j ha de ser transitori.

$\square$

Corol·lari 4.2. *Recurrència i Transitorietat són propietats de classe.*

Demostració. Acabem de veure que si dos estats estan comunicats han de ser del mateix tipus, recurrents o transitoris. Per tant, en una classe d'equivalència tots els estats són de la mateixa classe ja que tots estan comunicats entre ells.

□

Així doncs, podem parlar de classes recurrents o transitòries.

Proposició 4.1. *El període és una propietat de classe.*

Demostració. Suposem que x_i, x_j estan comunicats i tenen períodes diferents $d_i \neq d_j$ respectivament. Existeixen naturals $N, M > 0$ tal que $p_{ij}^{(N)} > 0$ i $p_{ji}^{(M)} > 0$. Per tant,

$$p_{ii}^{(N+M)} \geq p_{ii}^{(N+k+M)} \geq p_{ij}^{(N)} p_{jj}^{(k)} p_{ji}^{(M)}$$

Per tot $k \geq 1$ tal que $p_{jj}^{(k)} > 0$. Aleshores tenim,

$$d_i | N + k + M \Longrightarrow d_i | k \Longrightarrow d_i | d_j$$

Llavors d_i divideix d_j. Si fem aquest mateix raonament però per d_j arribarem a la conclusió que d_j divideix d_i, això implica que $d_i = d_j$, arribem a una contradicció. Per tant si dos estats estan comunicats tenen el mateix període. Això implica que el període és una propietat de classe.

□

Definició 4.4. *Una **cadena és irreductible** si en l'espai d'estats existeix una única classe d'equivalència. Això vol dir que per $\forall x_i, x_j \in E$ aleshores x_i i x_j estàn comunicats.*

Proposició 4.2. *Si tenim una cadena irreductible, tots els estats d'aquesta cadena són del mateix tipus. A més, si es tracta d'una cadena de Markov homogènia finita a temps discret podem afirmar que els estats són recurrents.*

Demostració. Per definició de cadena irreductible només tenim una única classe d'equivalència, com com a mínim existeix un $x \in E$ que serà transitori o recurrent aleshores pel corol·lari anterior tots els estats de la cadena seràn del mateix tipus, transitoris o recurrents.

Si tenim E finit, utilitzant la propietat número 7 del tema anterior ja veiem que tots els estats han de ser recurrents, ja que com a mínim un estat ha de ser recurrent.

□

5 Distribucions estacionàries i comportament límit

5.1 Definicions i Propietats

Anteriorment hem vist la definició de la distribució de la cadena en un instant concret, així com la inicial. Però fins ara no ens havíem preguntat que passa en les cadenes de Markov quan el estat inicial és aleatori.

Podem expressar la probabilitat de que en un instant n ens trobem amb la distribució $P(X_n = j)$ a partir de la matriu de transició i la distribució inicial $\pi_0 = (\pi_0(1), \pi_0(2), \dots, \pi_0(N))$, amb N el número de estats de la cadena.

$$\begin{aligned} P(X_n = j) &= \sum_i P(X_0 = i, X_n = j) \\ &= \sum_i P(X_0 = i) P(X_n = j | X_0 = i) \\ &= \sum_i \pi_0(i) p_{ij}^n \end{aligned}$$

Estem multiplicant el vector de probabilitats inicials amb la matriu de transició. Veiem algun exemple per què quedi més clar.

Exemple 5. Considerem la distribució inicial $\pi_0 = (0.5, 0.2, 0.3)$ i la matriu de transició

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Per tant, per trobar la distribució de la cadena a un pas

$$(0.5, 0.2, 0.3) \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix} = (0.47, 0.32, 0.21)$$

La interpretació d'aquests resultats és que si sortim d'un estat inicial aleatori, al primer pas de la cadena podríem trobar-nos a l'estat 1 amb una probabilitat de $P(X_1 = 1) = 0.47$. Igual passa amb els altres estats amb $P(X_1 = 2) = 0.32$ i $P(X_1 = 3) = 0.21$.

Si tenim el cas $\pi p = \pi$ aleshores diem que π és una distribució estacionària. Aquest tipus de distribucions són molt importants en la teoria de les cadenes de Markov, anem a definir-les més formalment.

Definició 5.1. *π és una* ***mesura estacionària*** *si $\pi = \pi P$.*

Definició 5.2. *π és una **distribució estacionària** si és una mesura estacionària i compleix que és una distribució de probabilitat.*

Busquem una fórmula general per la distribució estacionària $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ per cadenes de Markov amb dos estats:

Si tenim dos estats la matriu de transició serà de la forma

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{array} & \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix} \end{array}$$

amb $p, q \in (0,1)$. Com que per definició sabem que $\pi_1 + \pi_2 = 1$, podem trobar la distribució estacionària π

$$(\pi_1, \pi_2) \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2)$$

$$\pi_1 = \frac{q}{p+q} \qquad \pi_2 = \frac{p}{p+q}$$

Per tant, aquestes dos fórmules ens donen la distribució estacionària per qualsevol cadena amb dos estats.

Teorema 5.1. *Si tenim una matriu de transició P de mida kxk de una cadena de Markov irreductible aleshores existeix una única solucó per $\pi P = \pi$ amb $\sum_x \pi_x = 1$ i $\pi_x > 0$ per tot x.*

Demostració. Veure la pàgina 22 de la referència [2]. ☐

Recordem que havíem vist que $\pi_n = \pi_0 P^n$. Es pot donar el cas que que π_n sigui convergent a una distribució de probabilitat π, que en diem distribució límit.

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \pi_n = \pi_0 (\lim_{n\to\infty} P^n) = \pi P$$

La distribució límit és una distribució estacionària. Veiem la definició:

Definició 5.3. *Sigui P la matriu de transició d'una cadena de Markov i π_0 la distribució inicial. Diem **distribució límit** al vector*

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \pi_0 P^n$$

Exemple 6. Considerem la distribució inicial $\pi_0 = (0.3, 0.5, 0.2)$ d'una cadena de Markov amb matriu de transició:

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.7 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Calculem algunes potències de P per veure el comportament de π_n.

$$\pi_1 = \pi_0 P = (0.25, 0.34, 0.41)$$

$$\pi_2 = \pi_0 P^2 = (0.3, 0.5, 0.2) \begin{pmatrix} 0.3 & 0.31 & 0.39 \\ 0.47 & 0.26 & 0.27 \\ 0.23 & 0.43 & 0.34 \end{pmatrix} = (0.371, 0.309, 0.32)$$

$$\pi_8 = \pi_0 P^8 = (0.3, 0.5, 0.2) \begin{pmatrix} 0.33332 & 0.333239 & 0.333429 \\ 0.33362 & 0.333237 & 0.333144 \\ 0.333049 & 0.333525 & 0.333427 \end{pmatrix} = (0.333419, 0.333295, 0.333286)$$

$$\pi_{64} = \pi_0 P^{64} = (0.3, 0.5, 0.2) \begin{pmatrix} 0.333333 & 0.333333 & 0.333333 \\ 0.333333 & 0.333333 & 0.333333 \\ 0.333333 & 0.333333 & 0.333333 \end{pmatrix} = (0.333333, 0.333333, 0.333333)$$

Així doncs, si continuem calculant potències ens anirem apropant cada cop més a la distribució límit

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \pi_n = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$$

5.2 Més exemples

Exemple 7. Buscarem l'expressió general de la distribució estacionària per una cadena de Markov amb tres estats. Podem considerar la matriu de transició de la forma:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{array} & \begin{pmatrix} p & q & 1-p-q \\ u & v & 1-u-v \\ s & t & 1-s-t \end{pmatrix} \end{array}$$

Per tant hem de resoldre el sistema següent:

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3) \begin{pmatrix} p & q & 1-p-q \\ u & v & 1-u-v \\ s & t & 1-s-t \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$$

A més, per les propietats de $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ sabem que $\pi_1 + \pi_2 \pi_3 = 1$. Utilitzant aquesta informació i les equacions que ens dóna el sistema de matrius anterior, és fàcil arribar al resultat desitjat.

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{ut - s(v-1)}{(p-1)(v-1) + s(q-v+1) + t(u-p+1) - qu} \\ \pi_2 &= \frac{qs - t(p-1)}{(p-1)(v-1) + s(q-v+1) + t(u-p+1) - qu} \\ \pi_3 &= \frac{(p-1)(v-1) - qu}{(p-1)(v-1) + s(q-v+1) + t(u-p+1) - qu} \end{aligned}$$

Exemple 8. Considerem la matriu de transició

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Per trobar la distribució estacionària hem de resoldre el sistema següent

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} y = x \\ 0.5x + 0.5z = y \\ y = z \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

És fàcil veure que la distribució estacionària és $\pi = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Si haguéssim utilitzat les fórmules trobades a l'exercici anterior obtindríem el mateix resultat.

Provem ara de buscar una distribució límit, calculem potències de P i trobem que,

$$P^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textit{per } n \textit{ senar}$$

$$P^n = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \qquad \textit{per n parell}$$

Per tant com que les potències de la matriu van oscil·lant, podem dir que aquesta cadena no té distribució límit.

5.2.1 Cadenes doblement estocàstiques

Es pot donar el cas que els valors de cada columna d'una matriu de transició també sumin 1. En aquest cas tenim la següent definició:

Definició 5.4. *Sigui X_n una cadena de Markov amb $\sum_i p_{ij} = \sum_j p_{ij} = 1$ llavors diem que la cadena és* ***doblement estocàstica****.*

Per aquest tipus de cadenes tenim una proposició interessant.

Proposició 5.1. *Si tenim una cadena de Markov doblement estocàstica amb N estats aleshores $\pi_i = \frac{1}{N}$ $\forall i \in \{1, \ldots, N\}$ és distribució estacionària.*

Demostració. Si és distribució estacionària, es complirà que $\pi_i \sum_i p_{ij} = \pi_i$. Per definició de cadena doblement estocàstica sabem que $\sum_i p_{ij} = 1$. $\square$

Exemple 9. Considerarem un joc de taula amb les caselles del 0 al 5, cada torn tirem dues monedes i avancem un espai per cada cara que hagi sortit a la tirada. Tenint en compte que de la casella 5 tornem a saltar a la 0, per exemple si ens trobem a la casella i i triem k cares la nostra posició serà $i + kmod(6)$. Per tant la matriu de transició és

$$P = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.5 \\ 0.5 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0.25 \end{pmatrix}$$

Tant la suma de les files com de les columnes és 1, cadena doblement estacionària. Segons la proposició anterior, la distribució estacionària hauria de ser $\pi = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$. És fàcil comprovar-ho:

$$(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}) \begin{pmatrix} 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.5 \\ 0.5 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0.25 \end{pmatrix} = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$$

Per tant, hem vist que si tenim una cadena doblement estocàstica és fàcil trobar la distribució estacionària.

6 Introducció al Temps Continu

Fins ara hem estudiat les cadenes de Markov a temps discret, en aquest apartat veurem una petita introducció de les cadenes a temps continu, concretament introduirem el procés de Poisson com una cadena de Markov a temps continu.

6.1 Poisson

Sigui un sistema en el que s'observa el número de vegades que succeeix un esdeveniment, que es repetirà de forma aleatòria i independent del temps. Denominarem $N(t)$ la variable que ens indica quantes vegades ha succeït aquest esdeveniment en un interval de temps t. Considerem $P_n(t) = P(N(t) = n)$ la probabilitat que en un interval de temps t succeeixin n esdeveniments, $P_n(t)$ diferenciable. Intentarem trobar $P_n(t)$ que compleixi les condicions següents:

- La probabilitat que l'esdeveniment succeeixi 0 vegades en un interval de temps 0 és 1, $P_0(0) = 1$.
- La probabilitat que l'esdeveniment succeeixi $n > 0$ vegades en un interval de temps 0 és 0, $P_n(0) = 0$.
- La probabilitat d'ocurrència d'un esdeveniment en l'interval $(t, t+\delta t)$ és $\lambda\delta t + o(\delta t)$, amb λ constant positiva i

$$\lim_{\delta t\to 0}\frac{o(\delta t)}{\delta t} = 0$$

- La probabilitat que no succeeixi cap esdeveniment en $(t, t+\delta t)$ és $1-\lambda\delta t+o(\delta t)$.

Els dos últims punts ens dónen una definició axiomàtica de procés de Poisson.

A partir d'aquestes condicions podem trobar la distribució de Poisson, que dóna nom a aquest procés.

$$P_n(t+\delta t) = P_n(t)(1-\lambda\delta t - o(\delta t)) + P_{n-1}(t)(\lambda\delta t + o(\delta t)) + o(\delta t)$$

Si reordenem l'expressió i fem el límit per $\delta t \to 0$

$$\frac{P_n(t+\delta t)-P_n(t)}{\delta t} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \frac{o(\delta t)}{\delta t}(P_{n-1}(t) - P_n(t) + 1)$$

$$\lim_{\delta t\to 0}\frac{P_n(t+\delta t)-P_n(t)}{\delta t} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \cancel{\lim_{\delta t\to 0}\frac{o(\delta t)}{\delta t}(P_{n-1}(t) - P_n(t) + 1)}$$

Per definició, quan $\delta t \to 0$ tenim que $\lim \frac{o(\delta t)}{\delta t} = 0$, per tant obtenim l'equació diferencial següent

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)$$

Si posem $n = 0$, tenim que $P_{-1}(t) = 0$ i sabem que $P_0(0) = 1$ ja què es refereix a que no s'ha produït cap esdeveniment en l'interval $[0, 0]$. Aleshores, obtenim l'equació diferencial de primer grau

$$\begin{cases} \frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) \\ P_0(0) = 1 \end{cases}$$

Si ho resolem:

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

Per iteració sobre diferents valor de n, podem resoldre el sistema diferencial

$$\begin{cases} \frac{dP_n(t)}{dt} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) \\ P_0(t) = e^{-\lambda t} \\ P_n(0) = 0 \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Calcularem alguns valors de n per veure el terme general.

- $\underline{n = 1}$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda P_1(t) + \lambda P_0(t)$$

Sabem que $P_0(t) = e^{-\lambda t}$, aïllem els termes de $P_1(t)$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} + \lambda P_1(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Multipliquem per $e^{\lambda t}$ i utilitzem la igualtat $\frac{d(e^{\lambda t} P_1(t))}{dt} = e^{\lambda t} \frac{dP_1(t)}{dt} + \lambda e^{\lambda t} P_1(t)$ que correspon a la derivada del producte.

$$e^{\lambda t} \frac{dP_1(t)}{dt} + \lambda e^{\lambda t} P_1(t) = \lambda$$

$$\int \frac{d(e^{\lambda t} P_1(t))}{dt} dt = \int \lambda dt$$

$$e^{\lambda t} P_1(t) = \lambda t$$

Per tant,

$$P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$$

- $\underline{n=2}$
  Ara que tenim el valor de $P_1(t)$ podem trobar el valor de $P_2(t)$.

$$\frac{dP_2(t)}{dt} + \lambda P_2(t) = \lambda P_1(t)$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} + \lambda P_2(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}$$

Multipliquem per $e^{\lambda t}$ i utilitzem el procediment anterior.

$$e^{\lambda t}\frac{dP_2(t)}{dt} + \lambda e^{\lambda t} P_2(t) = \lambda^2 t$$

$$\int \frac{d(e^{\lambda t}P_2(t))}{dt}dt = \int \lambda^2 t dt$$

$$e^{\lambda t}P_2(t) = \frac{\lambda^2 t^2}{2}$$

Aleshores,

$$P_2(t) = \frac{\lambda^2 t^2}{2} e^{-\lambda t}$$

- $\underline{n=3}$
  Seguim el mateix procediment per trobar $P_3(t)$.

$$\frac{dP_3(t)}{dt} + \lambda P_3(t) = \lambda P_2(t)$$

$$\frac{dP_3(t)}{dt} + \lambda P_3(t) = \frac{\lambda^3 t^2}{2} e^{-\lambda t}$$

$$e^{\lambda t}\frac{dP_3(t)}{dt} + \lambda e^{\lambda t} P_3(t) = \frac{\lambda^3 t^2}{2}$$

$$\int \frac{d(e^{\lambda t} P_3(t))}{dt} dt = \int \frac{\lambda^3 t^2}{2} dt$$

$$e^{\lambda t} P_3(t) = \frac{\lambda^3 t^3}{6}$$

Finalment,

$$P_3(t) = \frac{\lambda^3 t^3}{6} e^{-\lambda t}$$

- General
  Per iteració es poden continuar trobant valors de $P_n(t)$, que en termes generals és

$$\boxed{P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}}$$

Per tant podem dir que el procés d'arribades és un procés de Poisson i si $N(t)$ és el número d'arribades en l'interval $[0, t]$, aleshores $P(N(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$ per $n \geq 0$.

Vist això, es pot trobar una distribució del temps entre dues aparicions de l'esdeveniment successives. Aquest temps és una variable aleatòria que en direm **temps d'espera**, τ. També es por interpretar com el temps d'espera fins que succeeixi l'esdeveniment per primera vegada.

La probabilitat que almenys l'esdeveniment succeeixi una vegada en un interval de temps t és $1 - P_0(t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Per tant podem expressar la distribució de densitat del temps d'espera com

$$f(\tau) = \frac{d(1 - e^{-\lambda \tau})}{d\tau} = \lambda e^{-\lambda \tau} \quad , \tau \geq 0$$

Com que la variable τ és una variable continua, trobem l'esperança amb el següent càlcul:

$$E(\tau) = \int_{\tau} \lambda e^{-\lambda\tau} d\tau \quad , \tau \geq 0$$

Si integrem per parts, tenim el **temps mitjà d'espera en el procés de Poisson**

$$E(\tau) = \frac{1}{\lambda}$$

El procés de Poisson és utilitzat per modelar cadenes de Markov a temps continu, especialment en els denominats processos d'arribada.

7 Aplicacions

Les cadenes de Markov són utilitzades per modelar sistemes en diferents àmbits, com per exemple economia, medicina i indústria. En aquest apartat veurem alguns exemples.

7.1 Medicina

7.1.1 Introducció

Cada cop més les matemàtiques i l'estadística apareixen en estudis relacionats amb la salut i la medicina, les cadenes de Markov són un exemple. Des de fa temps que es poden trobar investigacions que utilitzen les cadenes de Markov, per exemple per l'estudi de l'evolució de pacients amb depressió [5], modelar els temps d'arribada i permanència de pacients [8], anàlisis predictius i comparatius en les morts en una unitat de vigilància intensiva [6] o per pendre decisions òptimes en l'admissió de pacients [7].

Veurem un exemple on trobarem, a través de cadenes de Markov discretes i les seves propietats estudiades, expressions per la predicció d'estada de pacients en una unitat de vigilància intensiva de cardiologia que permetrà planificar adequadament l'atenció dels pacients i portar un control més exhaustiu d'aquests. Aquest tema ha sigut objecte d'estudi en diverses investigacions estadístiques a través de diferents mètodes.

Per posar-nos en context i tenir més clar per a què serviran les expressions trobades, utilitzarem dades que van ser recollides per realitzar un seguiment sobre l'evolució de pacients [9].

7.1.2 Exemple

- Dades

  Denotem X_t l'estat d'un pacient en l'instant t, la seqüència $X_0, X_1, X_2, \ldots$ indica els canvis d'estat d'un pacient al llarg del temps. Les hipòtesis que tenim per aquet model són les següents:

  1. Número finit d'estats.
  2. Propietat de markov, la transició d'un estat a un altre depèn només de l'estat actual.
  3. Propietat estacionària.

  Per classificar els pacients en estats de la cadena, primer definim aquests estats per una puntuació (**T**) associada al nivell de risc de l'individu. Per poder valorar aquesta puntuació es tenen en compte sis factors, cadascun d'aquests està puntuat dins d'un rang. El rang no és el mateix per tots els factors, per així aconseguir que uns tinguin més pes que d'altres alhora de determinar la puntuació del pacient.

Els factors que es tenen en compte i els rangs que es puntuen són els següents:

- F1: Edat $[0, 8]$
- F2: Cirurgia prèvia $[0, 8]$
- F3: Condició inicial del pacient $[0, 12]$
- F4: Problemes postoperatoris $[0, 16]$
- F5: Diagnòstic mèdic $[0, 24]$
- F6: Intervenció quirúrgica $[0, 36]$

Quan un pacient és ingressat i per cada una de les etapes que està a l'hospital, es puntuen aquests factors dins dels rangs establerts. Considerem que cada etapa de la cadena és de dos dies. Per calcular el valor de la puntuació (**T**) es sumen els valor puntuats als sis factors anteriors.

$$T = \sum_{i=1}^{6} Fi$$

A partir dels resultats obtinguts es classifica l'individu dins d'un estat o un altre depenent de la puntuació obtinguda. El conjunt d'estats de la cadena són.

- $\mathbf{T} \leq 25$, risc baix $\Longrightarrow$ Estat **A**.
- $26 \leq \mathbf{T} \leq 41$, risc mitjà $\Longrightarrow$ Estat **B**.
- $42 \leq \mathbf{T} \leq 57$, risc alt $\Longrightarrow$ Estat **C**.
- $\mathbf{T} \geq 58$, risc greu $\Longrightarrow$ Estat **D**.
- Si un pacient ja ha marxat de l'hospital $\Longrightarrow$ Estat **E**

Per tant, el nostre conjunt d'estats és (A,B,C,D,E). Així podem tenir una trajectòria de cada pacient des de que és ingressat fins que marxa.

- Estudi

Considerem p_{ij} la probabilitat de transició de l'estat i a j. També definim les probabilitats de transició per l'estat **E** com,

$$p_{EA} = 0 \qquad p_{EB} = 0 \qquad p_{EC} = 0 \qquad p_{ED} = 0 \qquad p_{EE} = 1$$

Per construir la matriu de transició s'utilitza una mostra de 64 registres de pacients que van estar ingressats. Es va calcular les puntuacions de cada individu en cadascuna de les etapes que va estar a l'hospital i es van classificar en els estats corresponents. Les dades mostren les trajectòries que realitzaven els pacients pels estats de la cadena. Utilitzem aquests valors per obtenir la matriu de transició a un pas següent, que serà l'objecte principal d'estudi.

$$P = \begin{array}{c} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \\ \mathbf{D} \\ \mathbf{E} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{D} & \mathbf{E} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{103}{169} & \frac{8}{169} & \frac{1}{169} & 0 & \frac{57}{169} \\ \frac{46}{194} & \frac{114}{194} & \frac{22}{194} & \frac{10}{194} & \frac{2}{194} \\ \frac{11}{50} & \frac{18}{50} & \frac{18}{50} & \frac{2}{50} & \frac{1}{50} \\ 0 & \frac{6}{14} & \frac{2}{14} & \frac{2}{14} & \frac{4}{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Primer estudiarem els tipus d'estats que tenim, a primera vista es pot dir que els estats **A,B,C** i **D** són transitoris i l'estat **E** recurrent. Raonem aquest fet.

L'estat **E** és clarament recurrent, ja que quan arribem a aquest estat ja no en sortirem mai amb probabilitat 1. Per tant, la probabilitat de tornar a l'estat **E** en un temps finit és 1, que correspon a la definició d'estat recurrent.

$$P_E\{T_E < +\infty\} = 1$$

Recordem que un estat y és transitori per definició si $P_y\{T_y = +\infty\} > 0$. Veiem que l'estat **A** és transitori ja que sortint de **A** si, per exemple, la cadena va cap a **E** en un pas mai retornarà a l'estat **A**, per tant la probabilitat que mai retorni serà més gran que 0

$$P_A\{T_A = +\infty\} \geq p_{AE} = \frac{57}{169} = 0.3373 > 0$$

El mateix passa amb els estats **B,C** i **D**. Podem trobar una trajectòria que ens porti cap a **E** que farà que mai més podem tornar. Per exemple,

$$P_B\{T_B = +\infty\} \geq p_{BE} = \frac{114}{194} = 0.5876 > 0$$

$$P_C\{T_C = +\infty\} \geq p_{CB} \cdot p_{BE} = \frac{18}{50} \cdot \frac{114}{194} = 0.2115 > 0$$

$$P_D\{T_D = +\infty\} \geq p_{DE} = \frac{4}{14} = 0.2857 > 0$$

Aquestes dades ens fan veure que els pacients sortiran de l'hospital amb probabilitat 1 al llarg del temps.

Des del punt de vista de les relacions d'equivalència els estats **A,B,C** i **D** estan comunicats entre ells ja que podem trobar $M \geq 0$ tal que $p_{ij}^{(M)} > 0$ per $\forall i, j \in \{A, B, C, D\}$. Per exemple,

$$\begin{array}{ll}
p_{AB}^1 > 0 & p_{BA}^1 > 0 \\
p_{AC}^1 > 0 & p_{CA}^1 > 0 \\
p_{AD}^2 > 0 & p_{DA}^2 > 0 \\
p_{BC}^1 > 0 & p_{CB}^1 > 0 \\
p_{BD}^1 > 0 & p_{DB}^1 > 0 \\
p_{CD}^1 > 0 & p_{DC}^1 > 0
\end{array}$$

En canvi aquests estats no estan comunicats amb **E**, l'estat **E** només està comunicat a ell mateix. Això ens diu que tenim dos classes d'equivalència; la classe $\{A, B, C, D\}$ i la classe $\{E\}$. D'aquesta manera només veient, per exemple, que **A** és transitori ja podríem afirmar que **B,C,D** també ho són, ja que hem vist a teoria que transitorietat i recurrència són propietats de classe.

Ens interessa saber quin és el terme mitjà d'etapes que un pacient ingressat, això vol dir fins que arriba a l'estat **E**. Però abans, necessitem trobar una expressió pel nombre de visites a un estat $j \in \{A, B, C, D\}$ sortint des de $i \in \{A, B, C, D\}$, $\mathbb{E}_y(N_y)$. Per aproximar aquest valor definim la variable

$$V_{ij}(n) = \sum_{m=1}^{n} X_{ij}(m)$$

$$X_{ij}(n) = \begin{cases} 1 & si\ un\ pacient\ comen\text{ç}a\ a\ l'estat\ i\ es\ troba\ a\ j\ en\ n\ salts \\ 0 & altres \end{cases}$$

A més,

$$\mathbb{E}(X_{ij}(n)) = p_{ij}^{(n)}$$

Gràcies a la matriu de transició podem trobar aquests valors utilitzant les seves potències. Aleshores, podem expressar el nombre esperat d'etapes que un pacient ha passat a l'estat j, ingressat a i, després de n salts com:

$$\mathbb{E}(V_{ij}(n)) = \sum_{m=1}^{n} p_{ij}^{(n)}$$

Si ara tenim en compte i com a estat inicial i calculem $\mathbb{E}(V_{ij}(n))$ per cada $j \in \{A, B, C, D\}$ podem expressar la quantitat esperada d'etapes que un pacient es troba ingressat amb estat inicial i després de n salts, ho denotem com $V_i(n)$:

$$V_i(n) = \sum_{j \in \{A,B,C,D\}} \mathbb{E}(V_{ij}(n))$$

D'aquesta manera si fem que n tendeixi a $+\infty$, estadísticament per un n gran, podem trobar un valor esperat de quantes etapes ha estat ingressat un pacient qualsevol en funció de l'estat en el qual ha sigut ingressat, ho denotem com V_i.

Coneixent la distribució inicial π_0 podem trobar l'expressió que ens permeti calcular l'estimació del temps mitjà que un pacient qualsevol estarà ingressat a l'hospital (tm).

$$tm = \sum_{j \in \{A,B,C,D\}} \pi_{j_0} V_j$$

- Conclusions

Gràcies a les cadenes de Markov es troba un model pel sistema i unes expressions que permetran planificar el correcte funcionament i organització de la unitat hospitalària realitzant prèviament un recull de dades que serviran com a base per construir la matriu de transició utilitzada.

Les dades utilitzades només han sigut per posar en context la situació, això vol dir que la modificació d'alguns factors poden ser incorporats en aquest model sense que afecti als resultats obtinguts, com per exemple:

- La incorporació de més estats de classificació dels pacients.
- Diferents mètodes de classificació de l'estat dels individus.

El model serveix com a base per estudiar sistemes una mica més complexos sense haver de realitzar un estudi complet. Per exemple es poden considerar dos estats recurrents que ens indiquin que el pacient deixa d'estar ingressat a l'hospital; el primer en cas que l'individu "ha passat a una millor vida", l'altre que ja està en condicions de sortir de l'hospital.

El model trobat es podria aplicar a altres àmbits fora de la medicina amb dades que segueixin una estructura similar, sense haver de fer grans modificacions a l'establert.

7.2 Internet

El portal de recerca per internet més gran del món, Google, utilitza un model de cadenes de Markov. Quan nosaltres busquem alguna cosa a través d'aquest portal ens retorna una llista de pàgines on generalment els primers resultats són els més rellevants per la nostra recerca. Aquest fet és a causa d'un algoritme anomenat **PageRank** que s'encarrega de puntuar cada página web i crea automàticament un ranking. Aquest algoritme està basat en una cadena de Markov.

Google té un registre amb pàgines web que es va actualitzant periòdicament, suposem que té N registres. Aleshores el que es fa és numerar aquestes pàgines de 1 a N i imposa una sèrie de propietats entre elles.

Prenem una pàgina imaginària amb el valor 0. Sigui p_{ij} la probabilitat d'anar des de i fins a j en un salt per $i, j \in \{1, \ldots, N\}$. Les propietats imposades entre pàgines són:

1. $p_{ii} = 0$ per qualsevol $i \in \{0, \ldots, N\}$
2. $p_{i0} > 0$ per qualsevol $i \in \{1, \ldots, N\}$
3. $p_{0i} > 0$ per qualsevol $i \in \{1, \ldots, N\}$
4. $p_{ij} > 0$ per qualsevol $i, j \in \{1, \ldots, N\}$ amb $i \neq j$, només si a la pàgina i hi ha algun enllaç que faci referència a la pàgina j.

Definim la quantitat $S(i)$ per $i \in \{0, \ldots, N\}$ com:

$$S(i) = \sum_{j \in \{1,\ldots,N\}} \mathbf{1}_{\{p_{ij}>0\}}$$

Per definició $S(0) = N$ i $S(i) \geq 1$ per qualsevol $i \in \{1, \ldots, N\}$. Prenem $p \in (0, 1)$, arribat a aquest punt es construeix la matriu P del sistema amb conjunt d'estats $E = \{0, \ldots, N\}$ seguint el següent patró:

- $p_{ii} = 0$ per qualsevol $i \in \{0, \ldots, N\}$

- $p_{0i} = \frac{1}{N}$ per qualsevol $i \in \{1, \ldots, N\}$
- Per qualsevol $i \in \{1, \ldots, N\}$,

$$p_{i0} = \begin{cases} 1 & si\ S(i) = 1 \\ 1 - p & si\ S(i) > 1 \end{cases}$$

- Per qualsevol $i, j \in \{1, \ldots, N\}$ amb $i \neq j$,

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{p}{S(i)-1} & si\ a\ i\ hi\ ha\ un\ enllaç\ a\ j \\ 0 & altres \end{cases}$$

Amb aquesta matriu Google té una cadena de Markov que compleix les propietats per tenir una distribució estacionària π. Els valors del vector π són els que utilitza per assignar el ranking a cada pàgina. Interpretant que com més rellevant és una pàgina web, més quantitat de visites tindrà al llarg del temps començant en un node qualsevol aleatori.

8 Conclusions del treball

Durant el transcurs del treball hem pogut comprovar que la rellevància i la gran capacitat aplicativa que tenen les cadenes de Markov, fan que puguin ser l'eina principal per modelar gran quantitat de sistemes i algoritmes per fenòmens de tot tipus d'àmbits. Aquest fet proporciona una comprensió favorablement intuïtiva per l'estudi de la teoria.

D'altra banda, hem pogut apreciar la base teòrica tan *compacte* que tenen les cadenes de Markov. Amb això ens referim a què qualsevol definició, propietat o teorema són iguals d'importants en el marc teòric de les cadenes, tota la teoria influeix en el desenvolupament per igual.

Lamentablement, no hem pogut reunir en aquest treball tota la teoria desitjada que engloben les cadenes de Markov, a causa de què el marc teòric és molt gran i encara podríem aprofundir molt més. Per exemple en les cadenes a temps continu, *Models de Markov ocults (Hidden Markov Model)* o estudiar les relacions amb les *Martingale*. Per aquesta raó, volem animar als lectors a indagar més a fons sobre el magnific món de les Cadenes de Markov.

Referències

[1] D. Stirzaker, *Stochastic Processes and Models*, Oxford University press, 2005.

[2] R. Durrett, *Essentials of Stochastic Processes*, second edition, December, 2011.

[3] Pierre Brémaud, *Markov Chains. Gibbs fields, Monte Carlo Simulation and queues*, Springer, 1999.

[4] Sidney Resnick, *Adventures in Stochastic Processes*, Birkhäuser Boston, 2005.

[5] S.B.Patten, *Markov models of major depression for linking psychiatric epidemiology to clinical practice*, Clinical Practice and Epidemiology in Mental Health, Vol. 1, 2005.

[6] Bäuerle R; Rücker A; Schmandra TC; Holzer K; Encke A; Hanisch E, *Markov cohort simulation study reveals evidence for sex-based risk difference in intensive care unit patients*, American Journal of Surgery, Vol. 179, 2000.

[7] D. Collart; A. Haurie, *On the control of care supply and demand in a urology department*, European Journal of Operational Research, Vol. 4, 1980.

[8] Shmueli A; Sprung CL; Kaplan EH, *Optimizing admissions to an intensive care unit*, Health Care Management Science, Vol. 6, 2003.

[9] P. Peña, *Cadena de Markov para modelar la permanencia de pacientes en una unidad de cuidados intensivos cardiológico*, 2002.