
Càlcul d'interval de confiança conservadors

Manuel Antón Almenara

Grau d'Estadística Aplicada
Universitat Autònoma de Barcelona

Trabajo Final de Grado

Tutor: **Aureli Alabert Romero**

10 de julio de 2015

Resumen

En este documento se realiza un análisis de diferentes métodos para estimar intervalos de confianza de un parámetro teniendo en cuenta los dos aspectos más importantes, su nivel de cobertura frente al valor nominal definido y la longitud del intervalo. Los dos métodos extremos son el método Exacto, definido por Finkelstein en 2000 como un concepto general, que puede ser interesante para distribuciones discretas, aunque para este tipo de distribuciones habían sido establecidos en 1934 por Clopper-Pearson(binomial) y en 1936 por Garwood (Poisson).En el otro extremo estaría el método de Wald.

El método de Filkenstein lo podemos definir como conservador dado que su cobertura siempre está por encima del valor nominal, sin embargo la longitud de sus intervalos es superior a cualquier otro método, el método de Wald por el contrario tiene la longitud más corta de todos los métodos, pero su cobertura está por debajo del nivel nominal, esto se acentúa para tamaños de muestra pequeños. Para tamaños de muestra superiores a 100, en general, el método Exacto es el más adecuado en las distribuciones estudiadas (Binomial, Poisson, Hipergeométrica).

Resum

En aquest document es realitza una anàlisi de diferents mètodes per estimar intervals de confiança d'un paràmetre tenint en compte els dos aspectes més importants, el seu nivell de cobertura davant el valor nominal definit i la longitud de l'interval. Els dos mètodes extrems són el mètode Exacte, definit per Finkelstein en 2000 com un concepte general, que pot ser interessant per a distribucions discretes, encara que per a aquest tipus de distribucions havien estat establerts el 1934 per Clopper-Pearson (binomial) i el 1936 per Garwood (Poisson). En l'altre extrem hi hauria el mètode de Wald.

El mètode de Finkelstein el podem definir com conservador atès que la seva cobertura sempre està per sobre del valor nominal, però la longitud dels seus intervals és superior a qualsevol altre mètode, el mètode de Wald per contra té la longitud més curta de tots els mètodes, però la seva cobertura està per sota del nivell nominal, això s'accentua per mides de mostra petits. Per mides de mostra superiors a 100, en general, el mètode Exacte és el més adequat en les distribucions estudiades (Binomial, Poisson, Hipergeomètrica).

Abstract

In this paper an analysis is made of different methods to estimate confidence intervals for a parameter taking into account the two most important aspects, the level of coverage against the nominal value defined and the length of the interval. The two extreme methods are the exact method defined by Finkelstein in 2000 as a general concept, that may be interesting for discrete distributions, although for such distributions it had been established in 1934 by Clopper-Pearson (binomial) and in 1936 by Garwood (Poisson). In the other end we find the Wald method.

The Filkenstein method can be defined as conservative as their coverage is always above the nominal value, however the length of intervals is superior to any other method, the method of Wald on the contrary has the shortest length of all methods, but its coverage is below the nominal level, this is accentuated for small sample sizes. For sample sizes up to 100, in general, the Exact method is the best for the studied distributions (Binomial, Poisson, Hypergeometric).

Índice

1. Introducción	6
2. Metodología	7
3. Distribución binomial	8
3.1. Método de Wald	8
3.2. Método de Agresti-Coull(1998)	8
3.3. Método Exacto Clopper-Pearson,(Finkelstein)	9
3.4. Método de Bayes	9
3.5. Método de razón de verosimilitud	10
3.6. Método de Wilson	10
3.7. Probabilidad de cobertura de los diferentes métodos	11
3.8. Longitud de los intervalos de confianza de los diferentes métodos	14
3.9. Diferencia de longitud de los intervalos de confianza de los diferentes métodos en relación al método asintótico	16
3.10. Simulación	18
3.10.1. Probabilidad de cobertura de los modelos de simulación	18
3.10.2. Longitud intervalos simulación y asintótico	20
3.10.3. Diferencia longitud simulación y asintótico	21
3.11. Resultados con tamaños de muestra $n=50$ y $n=100$	22
3.12. Distribución Binomial:Conclusiones	22
4. Distribución de Poisson	23
4.1. Método de Wald	23
4.2. Método Score	23
4.3. Método Exacto	24
4.4. Método de Bayes	24
4.5. Método de LRT	24
4.6. Probabilidad de cobertura de los diferentes métodos	25
4.7. Longitud de los intervalos de confianza de los diferentes métodos	31
4.8. Diferencia longitud de los intervalos de confianza de los diferentes métodos	32
4.9. Resultados con tamaños de muestra $n=50$ y $n=100$	34
4.10. Distribución Poisson:Conclusiones	34
5. Distribución Hipergeometrica	35
5.1. Método de Wald	35
5.2. Método de Agresti-Coull(1998)	35
5.3. Método de Wilson	36
5.4. Método Exacto,(Finkelstein)	36
5.5. Probabilidad de cobertura de los diferentes métodos	37
5.6. Longitud de los intervalos de confianza de los diferentes métodos	39

5.7. Diferencia longitud de los intervalos de confianza de los diferentes métodos .	40
5.8. Resultados con tamaños de muestra $n=50$, $n=100$ y $N=500$	41
5.9. Resultados con tamaños de muestra $n=20$ y $N=1000$ y $N=10000$	41
5.10. Distribución Hipergeométrica:Conclusiones	41
6. Bibliografía	42
7. Apéndice 1	43
8. Apéndice 2	51
9. Apendice 3	67
10. Apendice 4	79

1. Introducción

La construcción de intervalos de confianza es una de las metodologías más básicas en estadística. El concepto intervalo de confianza aparece de manera rudimentaria en los trabajos de Laplace en 1814(1).

Neyman en 1937 estableció las bases de la estimación por medio de intervalos de confianza (2), previamente en el apéndice de su trabajo en 1934(3) ya aparece el concepto de intervalo de confianza.

En el libro de E.L.Lehmann (4) hay un relato de las controversias en relación a la autoría del concepto de intervalo de confianza.

El método más general para la obtención de estos intervalos para un único parámetro, en general desconocido, está basado en la distribución asintótica del pivote estadístico cuando el tamaño de la muestra tiende a infinito. Este método de Wald y Wolfowitz, 1939(5) se utiliza en los libros de texto y es también el intervalo de confianza más comúnmente utilizado en la práctica.

Finkelstein y cols.(6) estudian el papel del método de obtención de los intervalos de confianza de las pruebas de hipótesis, la ventaja de utilizar este método para obtener un intervalo de confianza es que la cobertura de probabilidad es demostrable, al menos al nivel nominal, independientemente del tamaño de la muestra.

Esta propiedad es el contenido del primer teorema en el citado artículo. Por esta razón, el método de obtención de intervalos de confianza de las pruebas de hipótesis se denominará como método conservador.

Este método conservador (Finkelstein) se aplica en varios entornos diferentes. En esos entornos en que los métodos tradicionales de obtención de un intervalo de confianza se conocen, se comparan dos parámetros, el primero es la probabilidad de cobertura para poderla evaluar frente al valor nominal definido y el segundo es la longitud del intervalo.

En primer lugar se calcula la probabilidad de cobertura a partir de métodos tradicionales en el contexto de un ejemplo representativo. Los métodos tradicionales se estudian para calcular una probabilidad de cobertura, que a menudo cae sustancialmente por debajo del nivel nominal establecido.

El segundo lugar se compararan las longitudes de los intervalos de los métodos tradicionales y los intervalos del método conservador, en los casos en los que los intervalos tradicionales y conservadores ofrecen casi la misma probabilidad de cobertura, la longitud del intervalo del método conservador se ve que es bastante competitiva con la longitud del intervalo del método tradicional. Así, el coste de mantener un nivel de confianza conocido utilizando el método conservador no es alta. Además, la base teórica del método conservador es simple e intuitiva. Compararemos este método conservador con el método de Wald para las distribuciones binomial, poisson e hipergeométrica y también realizaremos la comparación con otros métodos, estos métodos no cumplen con la cobertura nominal definida en todo el intervalo de probabilidad estudiado, no obstante estudiaremos los resultados de estos métodos para evaluar si son competitivos, utilizando el método de Wald como referencia.

2. Metodología

Vamos a dar las bases del método descrito por Finkelstein (6): Supongamos que $\Theta \subset \mathbb{R}$ es el conjunto de posibles valores de un parámetro desconocido θ . Definimos $\theta_{min} = \inf\Theta$ y $\theta_{max} = \sup\Theta$ como los valores mínimo y máximo del parámetro desconocido. Uno o ambos θ_{min} y θ_{max} pueden ser infinitos.

El objetivo es construir un intervalo de confianza conservador $100(1 - \alpha)\%$ para θ . Esto significa que las variables aleatorias L y U tienen la propiedad de que $P_\theta[L \leq \theta \leq U] \geq 1 - \alpha$ para todo $\theta \in \Theta$.

El artículo sugiere el siguiente método para construir las variables aleatorias L y U . Para cada número real r definimos $L(r) = \inf\{\theta \in \Theta : P_\theta[M \geq r] > \alpha\}$ y si el conjunto está vacío $L(r) = \theta_{min}$.

Similarmente definimos $U(r) = \sup\{\theta \in \Theta : P_\theta[M \leq r] > \alpha\}$ y si el conjunto está vacío $U(r) = \theta_{max}$.

Supongamos que M es un estadístico, que es estocástico monótono creciente en θ ,

$\forall m \in \mathbb{R}, \theta \mapsto P_\theta\{M \geq m\}$ es creciente.

Entonces:

Para cualquier $0 < \alpha < 1$ y cualquier $\theta \in \Theta$, $P_\theta[L(M) \leq \theta] \geq 1 - \alpha$, $P_\theta[\theta \leq U(M)] \geq 1 - \alpha$ y por consiguiente $P_\theta[L(M) \leq \theta \leq U(M)] \geq 1 - 2\alpha$.

Cuando el estadístico M es estocástico decreciente en θ los puntos finales se definen utilizando las fórmulas $L(r) = \sup\{\theta \in \Theta : P_\theta[M \leq r] > \alpha\}$, y, si este conjunto está vacío $L(r) = \theta_{max}$.

De la misma manera $U(r) = \inf\{\theta \in \Theta : P_\theta[M \geq r] > \alpha\}$ y si el conjunto está vacío $U(r) = \theta_{min}$.

El resultado se prueba de manera análoga para M estocásticamente decreciente.

El método general se estudiará en varios contextos diferentes. Se evaluará la diferencia de longitud de los intervalos así como la probabilidad de cobertura de cada método.

La diferencia de longitud del intervalo de confianza se evaluará de la siguiente manera:

$(U(r) - L(r)) - (U'(r) - L'(r))$ donde $U'(r)$ y $L'(r)$ son los límites superior e inferior del método alternativo.

La probabilidad de cobertura de un intervalo de confianza se define como la proporción de veces que el intervalo contiene el verdadero valor del parámetro.

La probabilidad de cobertura para un intervalo de confianza CI del parámetro θ de una distribución $X \sim f_x(x|\theta)$ que toma valores enteros, donde $f_x(x|\theta)$ es la función de densidad de probabilidad, se calcula mediante:

$$C(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I(k, \theta) f(k|\theta)$$

Donde

$$I(k, \theta) \begin{cases} 1, & \theta \in CI \\ 0, & \theta \notin CI \end{cases}$$

3. Distribución binomial

Supongamos que X es una variable aleatoria con distribución Binomial, X cuenta los éxitos en n ensayos independientes de Bernoulli con la probabilidad de éxito p ($0 \leq p \leq 1$).

La función de probabilidad de una distribución binomial con parámetro p es:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

La probabilidad de cobertura de un intervalo de confianza de una distribución Binomial, para un método dado, tiene la expresión:

$$C(p) = \sum_{k=0}^n (I\{L(k) \leq p \leq U(k)\}) \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

donde I indica la función correspondiente a cada método.

El trabajo de Finkelstein desarrolla la comparación entre el método general, con carácter conservativo, con el método de Wald para una distribución binomial. En Pires(7) hay descritos 20 métodos diferentes para el cálculo de intervalos de confianza de la distribución binomial, nos centraremos en los más importantes para comparar con el método de Wald, que utilizaremos como referencia.

En los apartados siguientes están descritos estos métodos.

3.1. Método de Wald

El método de Wald es el más utilizado en la práctica en análisis estadístico. La aproximación normal para el intervalo de confianza de una proporción binomial p tiene la siguiente forma:

$$CI = \hat{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\hat{p}\hat{q}/n}$$

donde $z_{\alpha/2}$ es el cuantil $1 - \alpha/2$ de la distribución normal, $\hat{p} = X/n$ y $\hat{q} = 1 - \hat{p}$

3.2. Método de Agresti-Coull(1998)

Agresti-Coull(9) proponen una modificación del método asintótico, de la manera siguiente:

$$\tilde{n} = n + z^2 \text{ y } \tilde{p} = \frac{1}{\tilde{n}}(X + \frac{1}{2}z^2)$$

entonces el intervalo de confianza queda como:

$$IC = \tilde{p} \pm z \sqrt{\frac{1}{\tilde{n}}\tilde{p}(1 - \tilde{p})}$$

donde z es el cuantil $1 - \alpha/2$ de la distribución normal.

3.3. Método Exacto Clopper-Pearson,(Finkelstein)

El método de Clopper -Pearson descrito en 1934(8) da los mismos resultados que los obtenidos con el método descrito por Finkelstein, el método nos indica que los límites inferior y superior del IC son:

$$L(x) = \{\theta|P[Bin(n; \theta) \leq X] > \alpha/2\} \text{ y } U(x) = \{\theta|P[Bin(n; \theta) \geq X] > \alpha/2\}$$

y los podemos calcular mediante la aproximación de la distribución Beta:

$$Beta(\alpha/2; x; n - x + 1) < \theta < Beta(1 - \alpha/2; x + 1; n - x)$$

El paquete binomial de R permite calcular el intervalo de confianza y la cobertura para el método Exacto, también hemos escrito un script para hacer los cálculos de acuerdo con el método de Finkelstein, los resultados de ambos cálculos son idénticos.

3.4. Método de Bayes

En el marco bayesiano el parámetro θ es una variable aleatoria cuya distribución a priori es $\pi(\theta)$. Las observaciones tienen distribución condicionada con densidad (o función de masa) $f(x|\theta)$.

Tras la observación de una muestra $\tilde{X} = \tilde{x}$, la distribución de probabilidad de θ se modifica con la información recibida y pasa a tener la distribución a posteriori $\pi(\theta|x)$. Así, cualquier intervalo (o en general, cualquier conjunto) $A \subset \Theta$ será un intervalo bayesiano de probabilidad

$$P(\theta \in A|\tilde{x}) = \int_A \pi(\theta|\tilde{x})d\theta = 1 - \alpha$$

El conjunto A depende de la muestra observada a través de $\pi(\theta|\tilde{x})$

Los conjugados previos de la distribución binomial son la distribución Beta, es decir, si el previo es $p \sim Beta(a, b)$, entonces la distribución posterior de p es $p|X \sim Beta(X + a, n - X + b)$

Luego el intervalo Bayesiano es:

$$CI_B = [L_B(x), U_B(x)]$$

donde L_B es el cuantil $\alpha/2$ y U_B es el cuantil $1 - \alpha/2$ de la distribución $Beta(X + a, n - X + b)$

El no informativo de Jeffreys previo de la distribución binomial es la distribución $Beta(1/2, 1/2)$, es decir utilizamos la distribución $Beta(X + 1/2, n - X + 1/2)$ para obtener el intervalo bayesiano de una distribución binomial

$$IC = Beta(\alpha/2; x + 1/2; n - x + 1/2) < \theta < Beta(1 - \alpha/2; x + 1/2; n - x + 1/2)$$

3.5. Método de razón de verosimilitud

El método de la razón de verosimilitud es uno de los más usados para la construcción de intervalos de confianza. Se construye por inversión de la prueba de razón de verosimilitud que acepta la hipótesis nula:

$$H_0 : p = p_0$$

si $-2\log(\Lambda_n) \leq k^2$ donde Λ_n es la razón de verosimilitud

$$\Lambda_n = \frac{L(p_0)}{\sup_p L(p)} = \frac{p_0^X (1 - p_0)^{n-X}}{\left(\frac{X}{n}\right)^X \left(1 - \frac{X}{n}\right)^{n-X}}$$

Siendo L la función de verosimilitud.

3.6. Método de Wilson

El intervalo de confianza descrito por Wilson en 1927(10) está definido por la siguiente expresión:

$$CI_W = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}z^2} \left[\hat{p} + \frac{1}{2n}z^2 \pm z \sqrt{\frac{1}{n}\hat{p}(1 - \hat{p}) + \left(\frac{1}{4n^2}\right)z^2} \right]$$

3.7. Probabilidad de cobertura de los diferentes métodos

En las figuras 1 a 3 están las coberturas de probabilidad de los diferentes métodos, con el método de Wald como referencia. El tamaño de muestra es 20 y α es 0.025, lo que nos da una cobertura nominal del 95 % (línea naranja), los valores de p están entre 0.01 y 0.99 en intervalos de 0.01. Analizando la figura 1 podemos observar que para el método Exacto (Clopper-Pearson/Filkenstein), la cobertura siempre está por encima del 95 % para cualquier probabilidad, mientras que el método asintótico (Wald) nunca alcanza el valor nominal. Los resultados son iguales que los obtenidos en trabajo de Filkenstein(6), la cobertura mínima del método asintótico es del 18 % y la del método Exacto del 96 % .

Para el método de Agresti (figura 2) podemos observar que la cobertura no está siempre por encima del 95 %, de hecho entre $p=0.34$ y $p=0.66$ hay valores por debajo del 95 %, la cobertura mínima es del 93 %.

Para el método de Bayes (figura 2) las coberturas están en general por debajo del 95 %, únicamente están por encima entre 0.01 y 0.09 y 0.91 y 0.99, la cobertura mínima es del 87 %.

Para el método de razón de verosimilitud (figura 3) podemos observar que la cobertura oscila alrededor del valor del 95 %, únicamente en las probabilidades extremas está por encima del valor nominal ($p < 0.09$ y $p > 0.91$), la cobertura mínima es del 87 %.

Por último con el método de Wilson (figura 3) las coberturas oscilan alrededor del valor nominal del 95 %, el valor mínimo del 92 % corresponde a una $p = 0,05$.

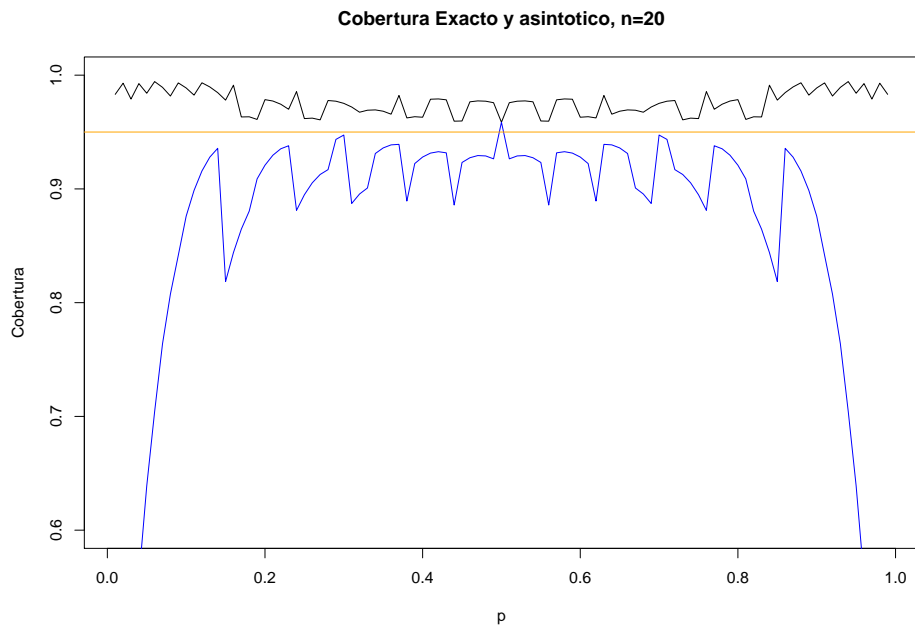


Figura 1: Probabilidad de cobertura del método Exacto para $n=20$ y $\alpha=0.05$

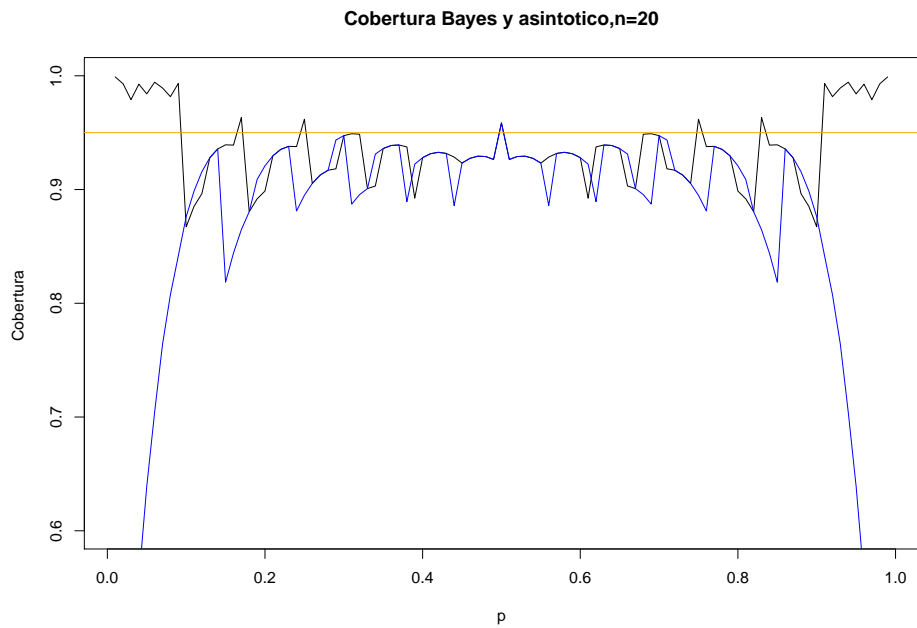
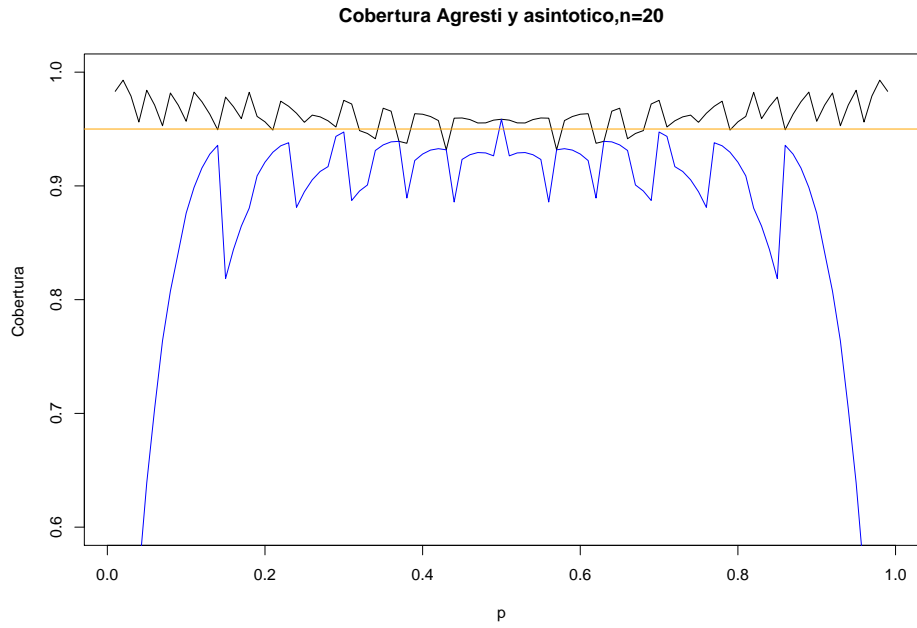


Figura 2: Probabilidad de cobertura de los métodos Agresti y Bayes para $n=20$ y $\alpha=0.05$

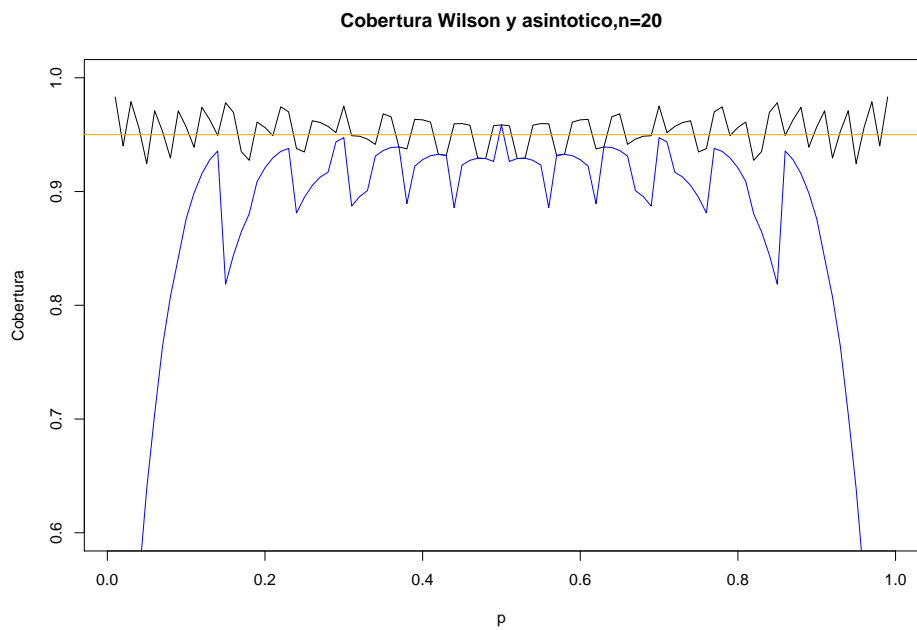
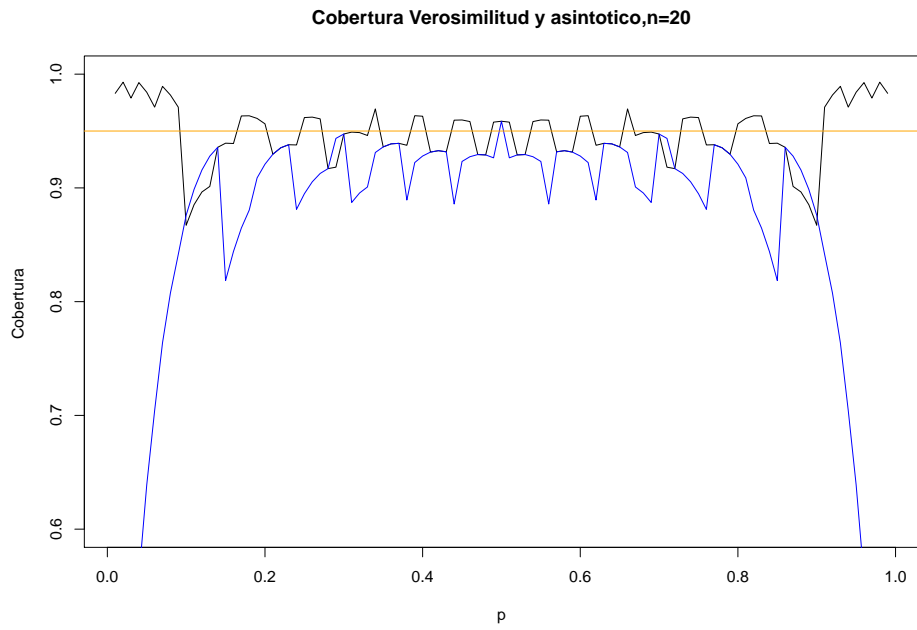


Figura 3: Probabilidad de cobertura de los métodos LRT y Wilson para $n=20$ y $\alpha=0.05$

3.8. Longitud de los intervalos de confianza de los diferentes métodos

En la figura 4 podemos observar, en el primer gráfico, la longitud del intervalo del método Exacto y del método Wald, vemos que el de Wald es más corto que el Exacto en todo el intervalo de probabilidad, también vemos los intervalos de Agresti y Wilson y podemos observar que en una zona de valor de p , aproximada, de 0.1 a 0.9 ambos intervalos son menores que el de Wald, esto los hace competitivos frente al método de Wald y por supuesto frente al método conservador, sabiendo que la probabilidad de cobertura de ambos métodos está muy cercana al 95%. En el segundo gráfico tenemos las longitudes de los intervalos de los métodos Exacto, Wald, Bayes y razón de verosimilitud(LRT). Podemos observar que para valores de p entre 0.2 y 0.8, aproximadamente, los intervalos de Bayes y LRT son más cortos que los de Wald y Exacto, aunque la diferencia no es muy grande. En el apartado siguiente veremos las diferencias de cada uno de los intervalos respecto al de Wald, que utilizaremos como referencia.

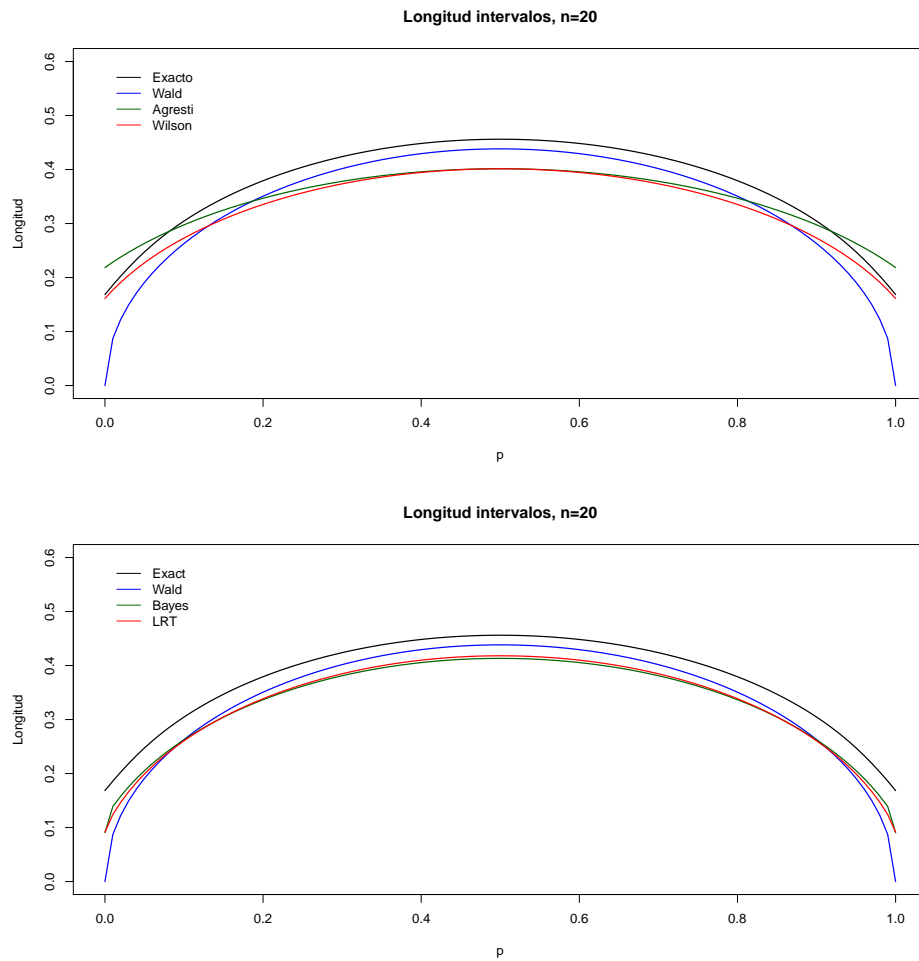


Figura 4: Longitud de los intervalos de confianza de los diferentes métodos para $n=20$ y $\alpha=0.05$

3.9. Diferencia de longitud de los intervalos de confianza de los diferentes métodos en relación al método asintótico

En la tabla 1 tenemos los valores máximo y mínimo de la diferencia para cada método, podemos ver que los valores máximos de los métodos Exacto, Agresti y Wilson son parecidos entre si y los de Bayes y LRT también son muy parecidos entre ellos, los valores mínimos son negativos para todos los métodos excepto el Exacto que es positivo. Los valores obtenidos para la diferencia entre el método Exacto y el asintótico son los indicados en el artículo de Finkelstein(6).

En la figura 5 tenemos las diferencias de cada uno de los métodos con respecto al de Wald, podemos observar que la diferencia con respecto al Exacto es siempre positiva, es decir para cualquier valor de p el intervalo asintótico siempre es menor. Los intervalos de los otros métodos tienen valores positivos pero también negativos, es decir, existen valores de p en los que estos intervalos son menores que el asintótico. Los intervalos obtenidos con los métodos de Agresti y Wilson son más competitivos para valores de p del orden de 0.2 a 0.8 y en el caso de los métodos de Bayes y LRT para valores de p del orden de 0.1 a 0.9.

Como resumen podemos establecer que el método Exacto nos da, para todo valor de p , una cobertura por encima del nominal pero con longitudes superiores al resto de los métodos. Los métodos de Bayes y LRT ofrecen unas longitudes menores que la asintótica en un amplio intervalo de valores de p pero sus coberturas están por debajo del nominal y por último los métodos de Agresti y Wilson, también nos ofrecen intervalos más cortos en un intervalo de p algo menor que los métodos de Bayes y LRT, pero su cobertura está más cerca, en general, del valor nominal.

	Max	Min
Exacto-Wald	0.17	0.02
Agresti-Wald	0.22	-0.04
Bayes-Wald	0.09	-0.03
LRT-Wald	0.09	-0.02
Wilson-Wald	0.16	-0.04

Tabla 1: =
"Máximo y mínimo de la diferencia entre métodos"

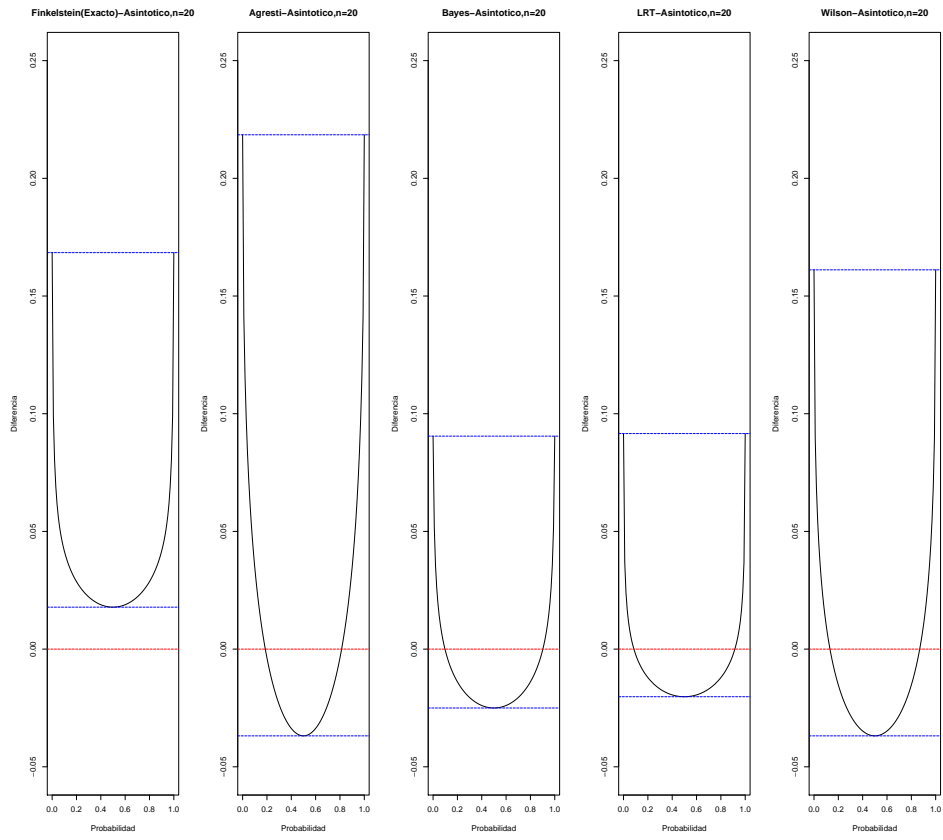


Figura 5: Diferencia de longitud de los diferentes métodos en relación al asintótico para $n=20$ y $\alpha=0.05$

3.10. Simulación

Vamos a simular muestras de $n=20$ de una distribución binomial, con un intervalo de valores de p de 0.01 a 0.99, eliminando los valores de 0 y 1 tal como hemos hecho con los cálculos en los apartados anteriores.

Realizaremos tres modelos de simulación distintos, en el primero simularemos 1000 muestras de tamaño 20 para cada valor de p (con el intervalo definido anteriormente), con la función $\text{rbinom}(1000,20,p)$. Para cada una de las 1000 simulaciones y para cada valor de p (0.01-0.99) calcularemos el valor de \hat{p} (suma de los 20 valores/20). Con los 1000 valores de cada valor de \hat{p} calcularemos el cuantil del 0.025 y el cuantil del 0.975. Haciendo la diferencia entre los cuantiles calcularemos la longitud del intervalo para cada probabilidad, y sabiendo el número de valores de \hat{p} que existen entre los dos cuantiles podemos calcular su porcentaje de cobertura.

Un segundo modelo es crear para cada valor de p un vector con 1000000 de valores y tomar 1000 muestras de tamaño 20 para cada valor de p y a partir de cada muestra calcular la cobertura y la amplitud del intervalo del mismo modo indicado para la primera simulación (ver apéndice 4).

Por último realizaremos un modelo bootstrap, tomaremos una muestra de tamaño 20 del vector (1000000) creado en el modelo anterior, para cada valor de p (0.01-0.99) y realizaremos un bootstrap 1000 veces para calcular para cada valor de p la cobertura y la amplitud del intervalo del mismo modo que hemos indicado anteriormente.

3.10.1. Probabilidad de cobertura de los modelos de simulación

En la figura 6 tenemos la comparativa de la cobertura de las tres simulaciones con el método asintótico, la cobertura de las simulaciones es, para todos los valores de p , como mínimo del 95 %. Esto es lo esperado por el diseño de la simulación, pues el intervalo está construido con los cuantiles del 0.025 y del 0.975 de los 1000 valores de \hat{p} , obtenidos para cada uno de los valores estudiados (0.01-0.99).

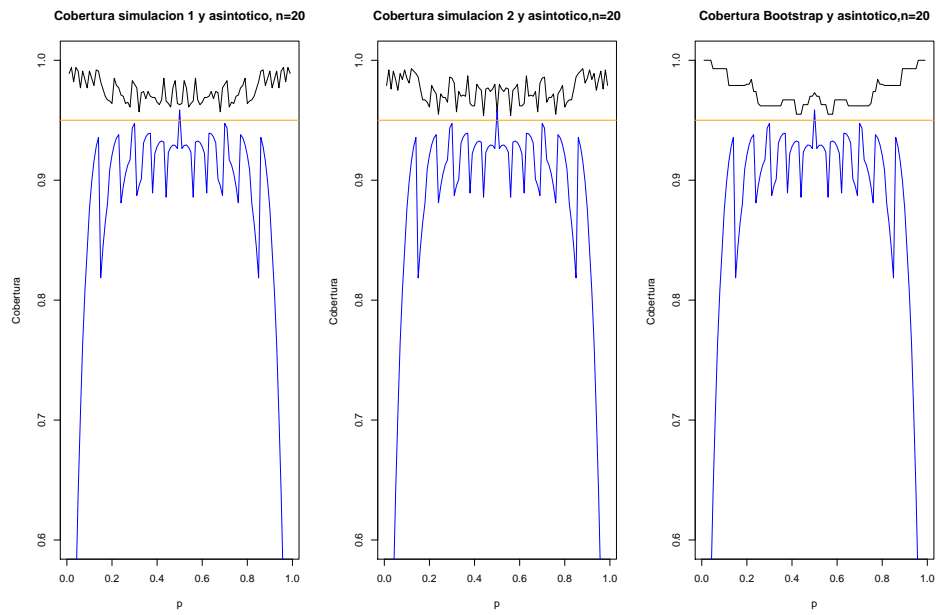


Figura 6: Probabilidad de cobertura de las diferentes simulaciones para $n=20$ y $\alpha=0.05$

3.10.2. Longitud intervalos simulación y asintótico

En la figura 7 tenemos la longitud de los intervalos de las tres simulaciones y la del método de Wald, podemos ver que en general las longitudes de las tres simulaciones son menores, excepto en algunos valores de p . Esto nos indica, como hemos indicado en el apartado 3.8, que es posible obtener intervalos menores que los que obtenemos con el método asintótico pero obteniendo coberturas superiores o iguales a la nominal definida.

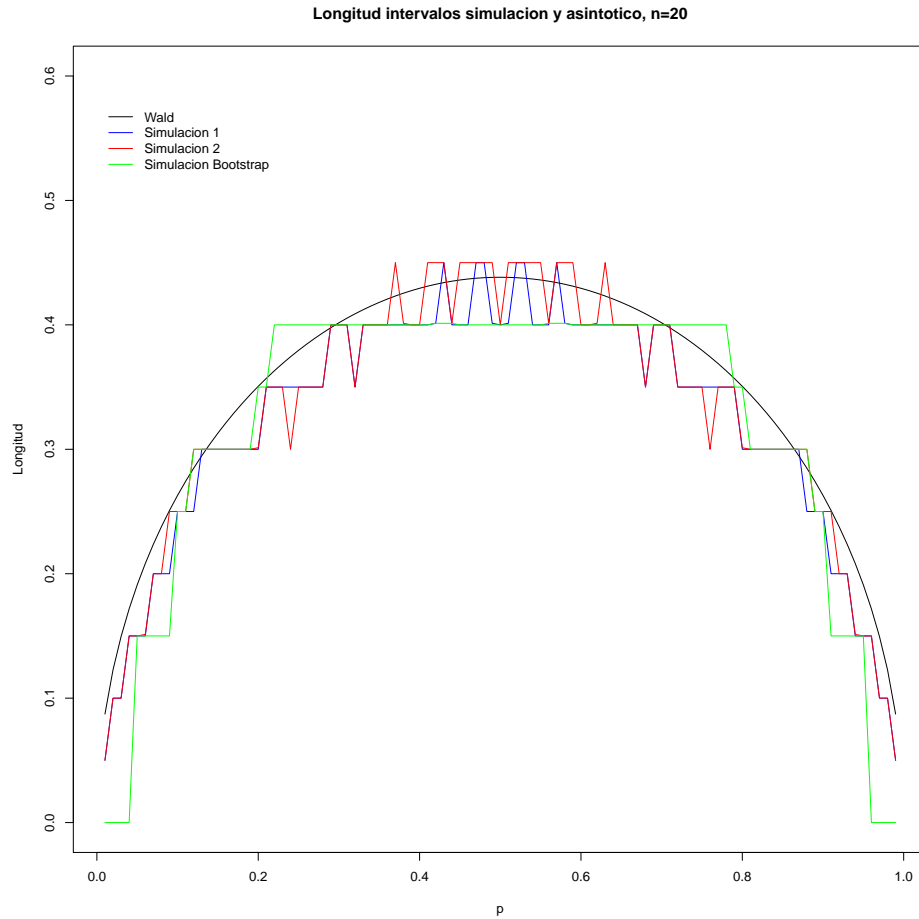


Figura 7: Longitud intervalos simulación y asintótico para $n=20$ y $\alpha=0.05$

3.10.3. Diferencia longitud simulación y asintótico

En la figura 8 tenemos las diferencias de los intervalos de confianza obtenidos con los métodos simulados con respecto al método asintótico. Podemos observar que la mayoría de las diferencias son negativas indicando que a pesar de tener coberturas superiores o iguales a la nominal los intervalos son menores que los asintóticos. En la tabla 2 tenemos los valores máximo y mínimo de cada una de las diferencias. Si comparamos los valores con los indicados en la tabla 1, vemos que los máximos tienen valores más pequeños y los mínimos tienen valores mayores en valor absoluto (son negativos) que cualquiera de los métodos descritos anteriormente

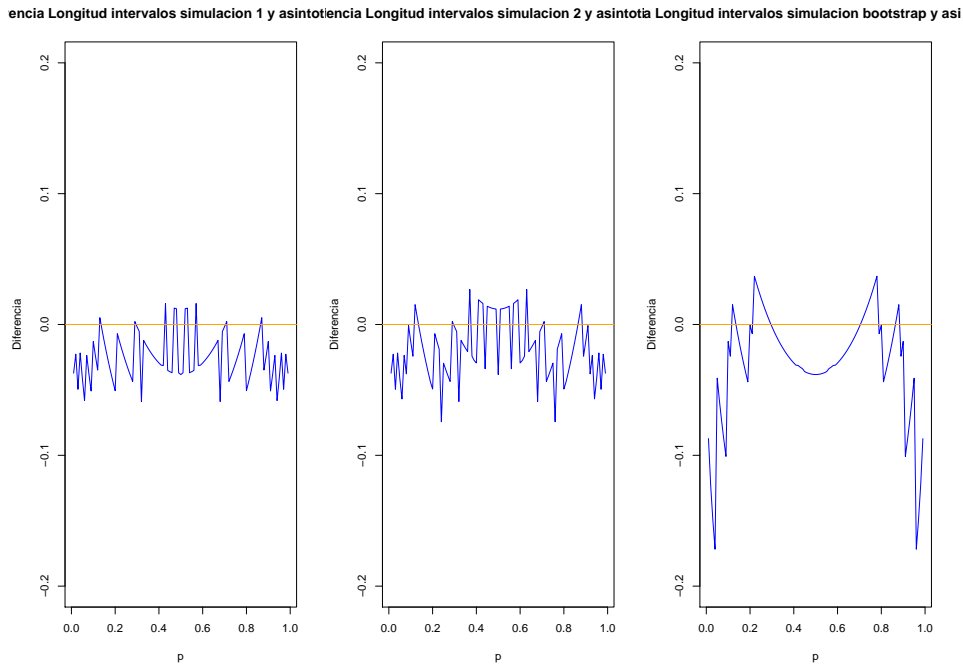


Figura 8: Diferencia longitud intervalos simulación y asintótico para $n=20$ y $\alpha=0.05$

	Max	Min
sim1-Wald	0.02	-0.06
sim2-Wald	0.03	-0.07
simb-Wald	0.04	-0.17

Tabla 2: =

"Máximo y mínimo de la diferencia entre métodos(simulación y asintótico)"

3.11. Resultados con tamaños de muestra $n=50$ y $n=100$

En el apéndice 1 vemos las figuras 22 a 24 con las coberturas para $n=50$ y las figuras 25 a 27 para $n=100$. Podemos observar, al incrementar el tamaño de muestra, que las coberturas mínimas no cambian prácticamente para los métodos de Bayes y de razón de verosimilitud, aumentan para los métodos de Wald y Agresti, disminuye para el método de Wilson y se mantienen constantes para el método Exacto.

En las figuras 28 y 29 podemos observar que al aumentar el tamaño de muestra, las diferencias entre los diferentes métodos y el método asintótico se van reduciendo, en las tablas 5 y 6 tenemos estos valores y vemos como se reduce la diferencia máxima al aumentar el tamaño de muestra ($n=20,50,100$), de hecho para $n=100$, los métodos Exacto, Wald, Bayes y LRT, para valores de p entre 0.1 y 0.9 no parecen mostrar diferencias apreciables. Esto nos indica que para muestras grandes y valores de p entre 0.1-0.9 lo más adecuado sería utilizar el método exacto.

3.12. Distribución Binomial: Conclusiones

El método Exacto siempre ofrece la mayor cobertura, aunque esto implica que la longitud de su intervalo es mayor, para muestras pequeñas el equilibrio entre cobertura y longitud lo presenta el método de Agresti, por lo que sería el más adecuado para estas muestras.

Con el aumento del tamaño de muestra los métodos Exacto y Wald tienden a dar resultados similares en la longitud del intervalo, en cambio en cobertura el de Wald sigue sin alcanzar el nivel nominal en su cobertura, por ello a partir de $n=100$ el método Exacto parece el más adecuado, dado que siendo conservador en la cobertura es competitivo en la longitud.

4. Distribución de Poisson

La distribución de Poisson es una distribución discreta en la familia de las distribuciones exponenciales. La función de densidad de una distribución de Poisson(λ) de X_i es :

$$P(X_i = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Donde k es un entero no negativo y λ es un numero real positivo.

La probabilidad de cobertura de un intervalo de confianza de una distribución de Poisson, para un método dado, tiene la expresión:

$$C(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (I\{L(k) \leq \lambda \leq U(k)\}) \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

donde I indica la función correspondiente a cada método.

Patil(11) describe 19 métodos para obtener intervalos de confianza de la media de una distribución de Poisson, de ellos evaluaremos los siguientes métodos : Wald, Score, Exacto, Bayes y LRT(razón de verosimilitud).

4.1. Método de Wald

Para una muestra aleatoria independiente con distribución de Poisson (λ) $\{X_1, \dots, X_n\}$ la expresión del intervalo de confianza de la media de Poisson λ de acuerdo con la aproximación de la normal estándar(Wald)es de la forma:

$$\bar{X} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\bar{X}/n}$$

donde $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$ y $z_{\alpha/2}$ es el cuantil $1 - \alpha/2$ de la distribución normal.

Es todavía el método más extendido para el cálculo del intervalo de confianza de la media de una distribución de Poisson.

4.2. Método Score

El método score tiene la expresión (Baker L. 2002)(12):

$$\bar{X} + \frac{z_{\alpha/2}^2}{2n} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{4\bar{X} + \frac{z_{\alpha/2}^2}{n}}{4n}}$$

donde $z_{\alpha/2}$ es el cuantil $1 - \alpha/2$ de la distribución normal

4.3. Método Exacto

El límite inferior del intervalo para la media λ de una distribución de Poisson es el valor mínimo λ_l que satisface la siguiente ecuación (Baker L. 2002)(12):

$$\sum_{i=0}^S \frac{e^{-n\lambda_l} (n\lambda_l)^i}{(i!)} \leq \alpha/2$$

El límite superior es el valor máximo λ_l que satisface la siguiente ecuación(12):

$$\sum_{i=S}^{\infty} \frac{e^{-n\lambda_l} (n\lambda_l)^i}{(i!)} \leq \alpha/2$$

donde $S = \sum_{i=1}^n X_i$

Fay y Feuer (1997)(13) dan la solución a estas dos ecuaciones en la forma de la distribución χ^2

$$CI = [L(x), U(x)] = \left[\frac{1}{2} (\chi^2)_{2x}^{-1}(\alpha/2), \frac{1}{2} (\chi^2)_{2(x+1)}^{-1}(1 - \alpha/2) \right]$$

donde $(\chi^2)_n^{-1}(p)$ es el p cuantil de la distribución χ^2 con n grados de libertad.

4.4. Método de Bayes

El no informativo de Jeffreys previo de la distribución de Poisson es proporcional a $\lambda^{1/2}$, entonces la posterior distribución de λ es $\lambda|X \sim \Gamma(X + \frac{1}{2}, \frac{1}{n})$, de manera que el intervalo de confianza queda de la forma:

$$CI = [L(x), U(x)] = \left[\Gamma(X + \frac{1}{2}, \frac{1}{n})(\alpha/2), \Gamma(X + \frac{1}{2}, \frac{1}{n})(1 - \alpha/2) \right]$$

donde $\alpha/2$ y $1 - \alpha/2$ son los cuantiles de la distribución $\Gamma(X + \frac{1}{2}, \frac{1}{n})$.

4.5. Método de LRT

El intervalo de confianza de la razón de verosimilitud de la distribución de Poisson se construye por la inversión del test de razón de verosimilitud de la hipótesis nula $H_0 : \mu = \mu_0$.

El intervalo cubre λ si $-2\log(\Lambda_n) \leq z_{\alpha/2}^2$ donde Λ_n es:

$$\Lambda_n = \frac{\lambda^{n\bar{X}} e^{-n\lambda}}{\bar{X}^{n\bar{X}} e^{-n\bar{X}}}$$

4.6. Probabilidad de cobertura de los diferentes métodos

Vamos a evaluar la probabilidad de cobertura de los diferentes métodos, podremos observar los gráficos con valores de λ entre 0 y 30 y una ampliación con valores de λ entre 0 y 5.

En las figuras 9 a 11 vemos los gráficos con λ de 0 a 30, vemos que el método de Wald(figura 10) tiene una cobertura por debajo del valor nominal para valores pequeños de λ , a partir de valores de λ del orden de 3 aparecen coberturas por encima del valor nominal, hay una oscilación en torno a este valor que conforme aumenta λ va disminuyendo y acercándose al valor nominal.

Los métodos Score y Bayes(figuras 10 y 11) tienen un perfil prácticamente idéntico, oscilando en torno al valor nominal y con el aumento de λ va disminuyendo esta oscilación. El método Exacto (figura 9) está siempre por encima del valor nominal, con valores superiores para valores de λ pequeños y acercándose al valor nominal conforme aumenta λ , por último el método de razón de verosimilitud(figura 11), tiene un perfil similar a los de Bayes y Score, pero con una oscilación menor.

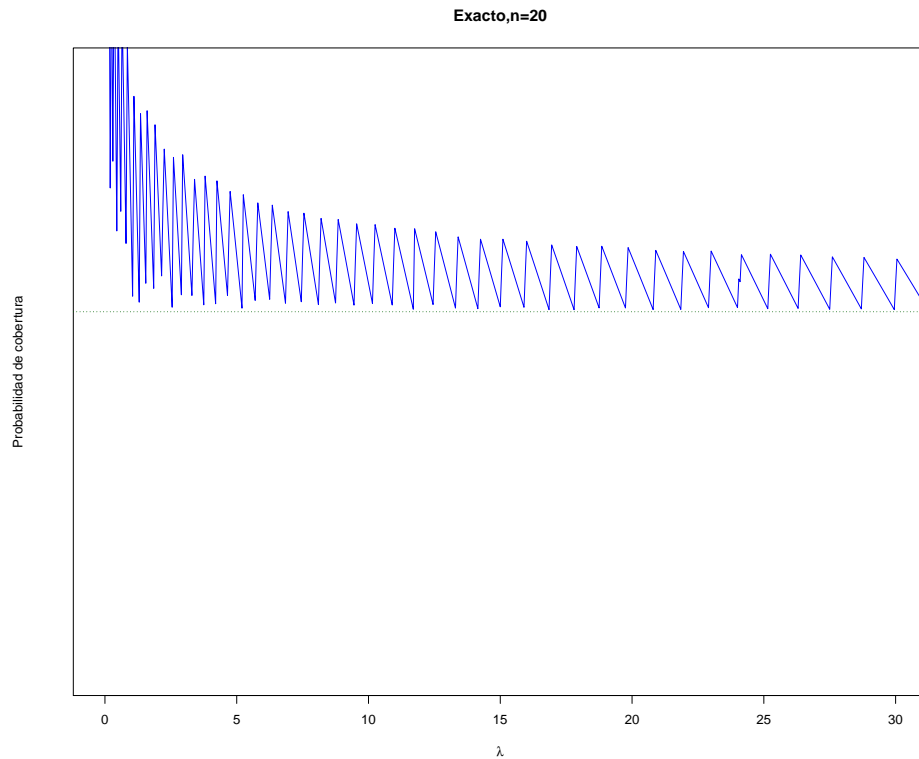


Figura 9: Probabilidad de cobertura del método Exacto para λ entre 0 y 30, $n=20$ y $\alpha=0.05$

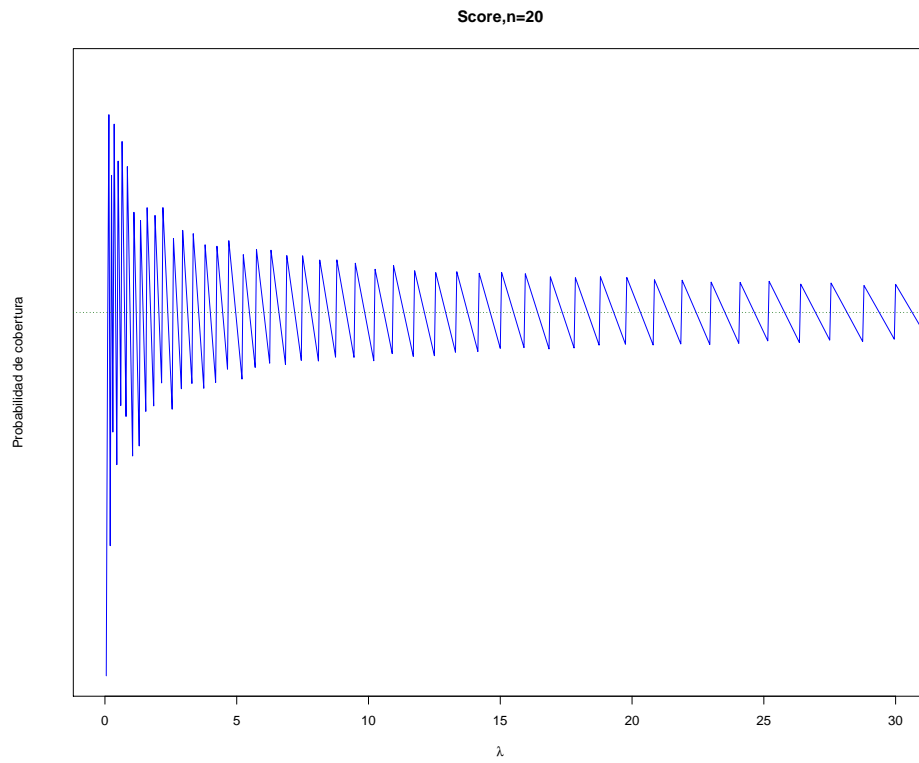
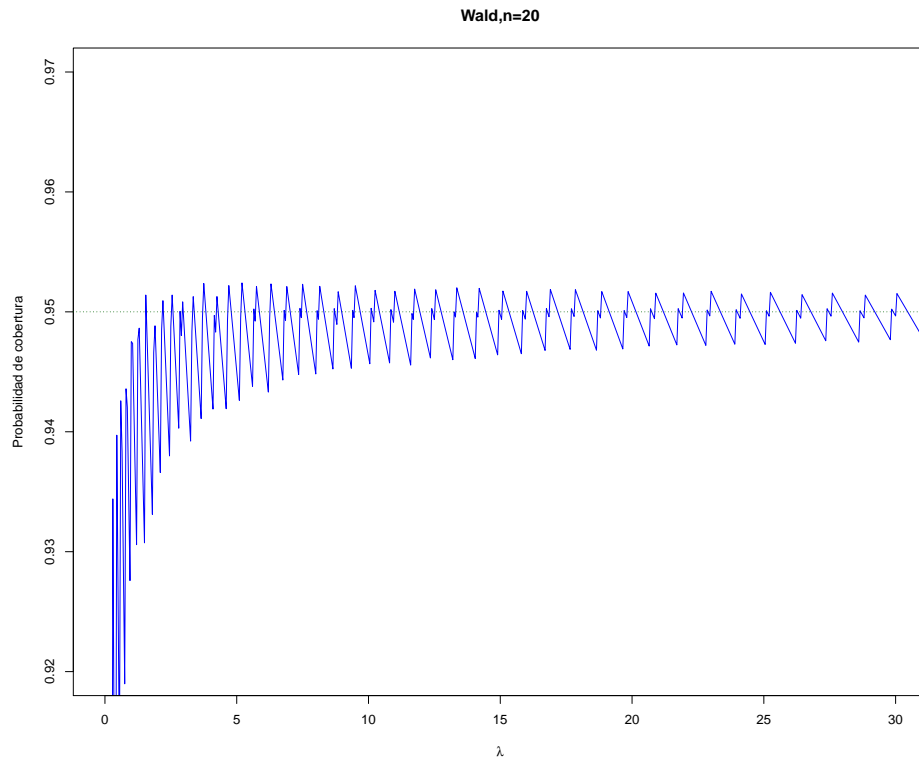


Figura 10: Probabilidad de cobertura de los métodos Wald y Score para λ entre 0 y 30, $n=20$ y $\alpha=0.05$

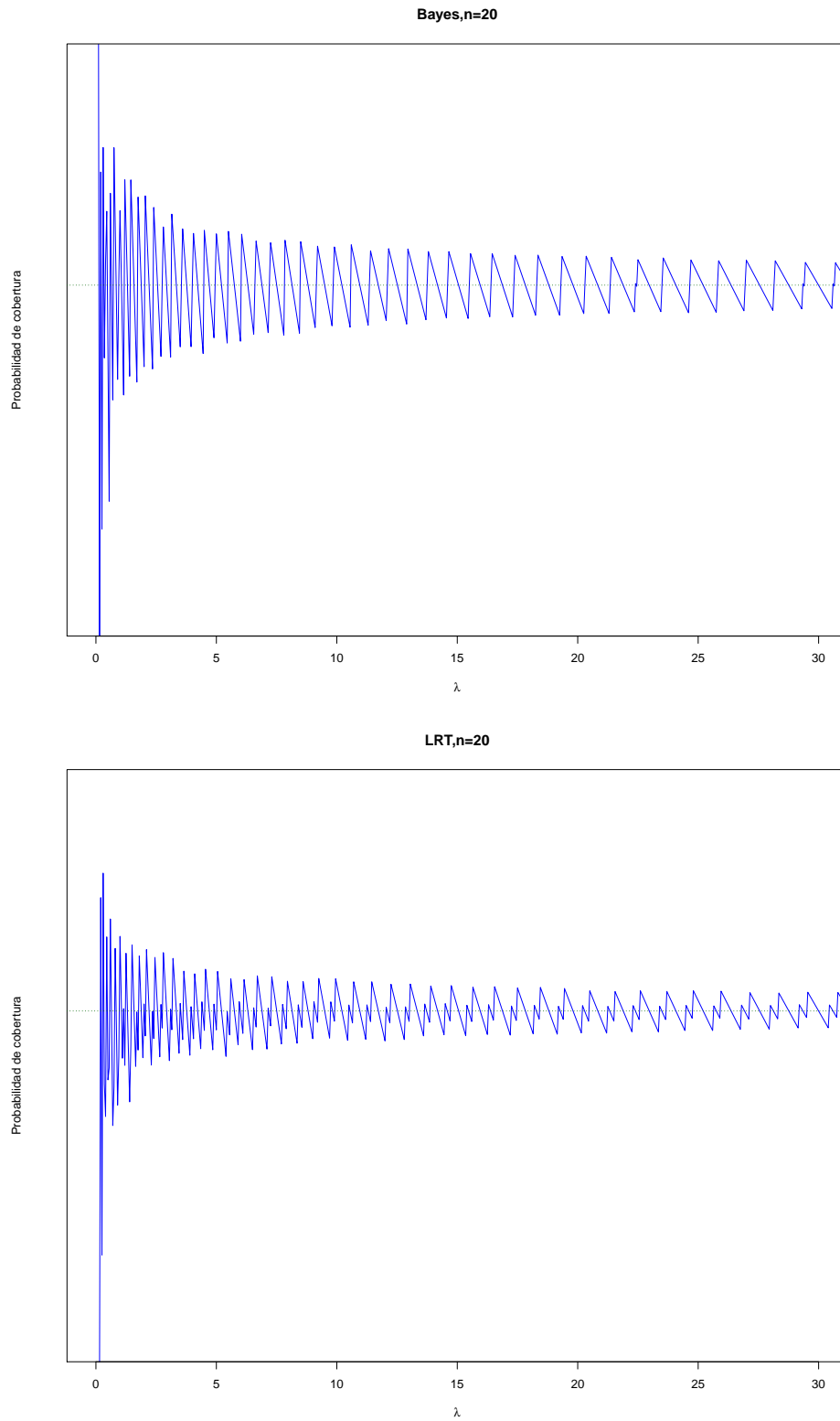


Figura 11: Probabilidad de cobertura de los métodos Bayes y LRT para λ entre 0 y 30, $n=20$ y $\alpha=0.05$

En las figuras 12 a 14 podemos ver los gráficos para λ entre 0 y 5, aquí vemos que el método de Wald(figura 13) no alcanza el valor nominal excepto para unos pocos valores de probabilidad, el método Exacto(figura 12) siempre está con coberturas superiores al valor nominal y los otros tres métodos(figura 13 y 14) oscilan a lo largo del valor nominal, oscilación que disminuye al aumentar λ . Como en el gráfico previo el método de razón de verosimilitud es el que presenta la menor oscilación. Estos resultados están de acuerdo con los indicados por Brown (14).

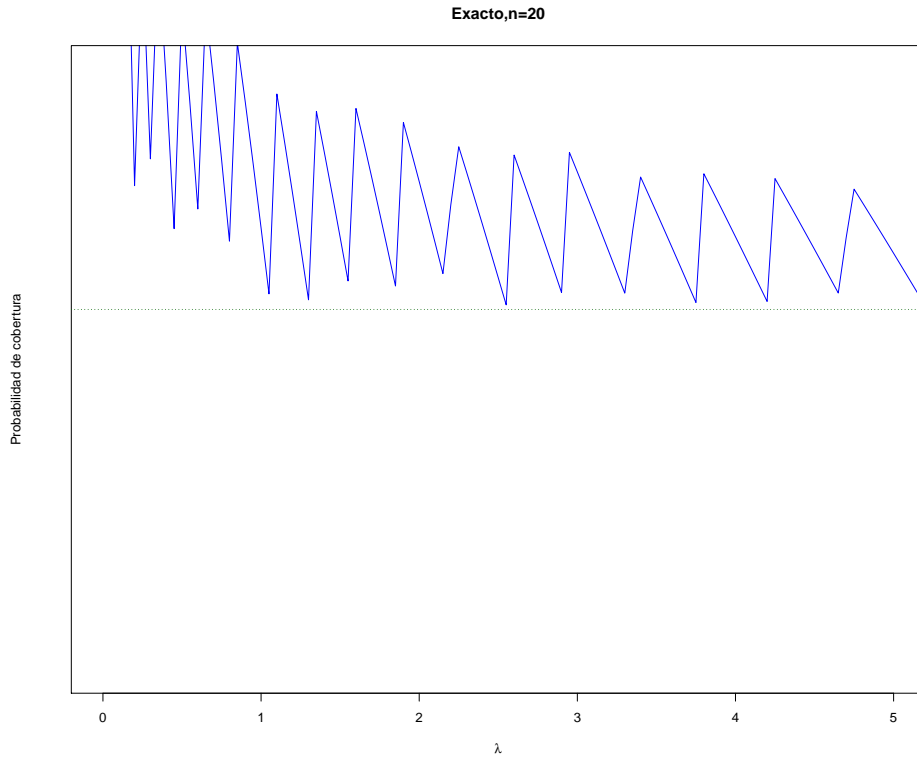


Figura 12: Probabilidad de cobertura de el método Exacto para λ entre 0 y 5, $n=20$ y $\alpha=0.05$

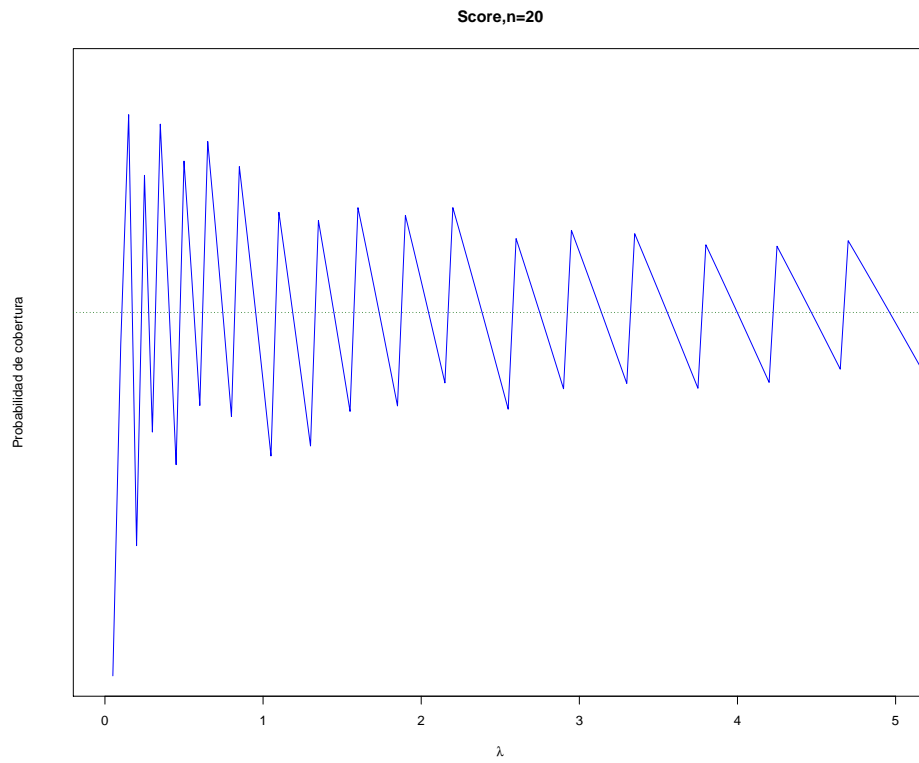
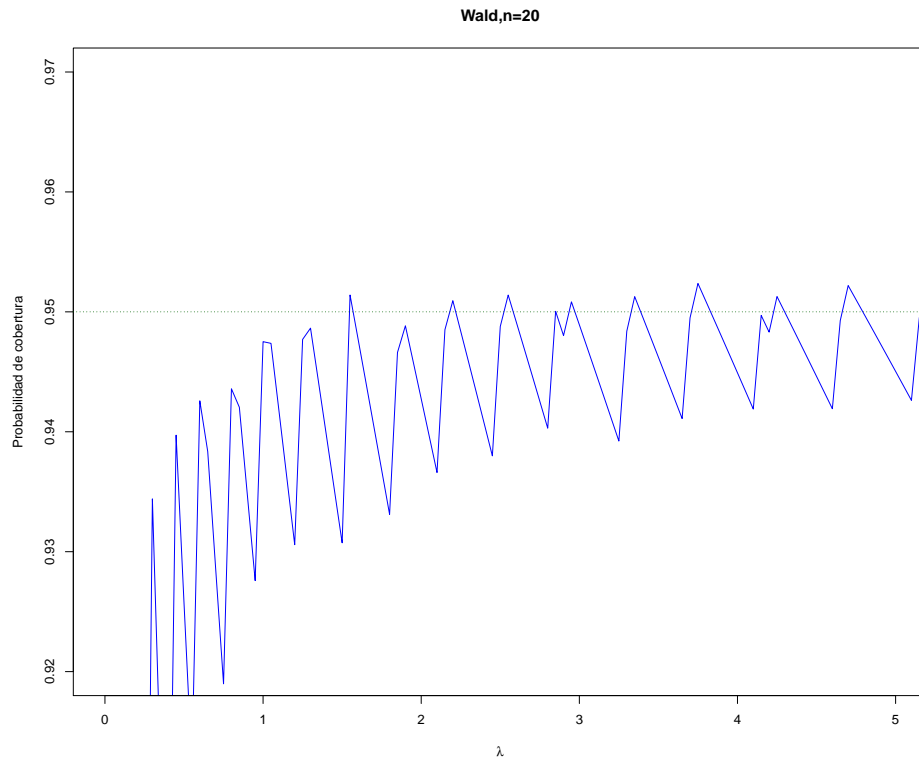


Figura 13: Probabilidad de cobertura de los métodos Wald y Score para λ entre 0 y 5, $n=20$ y $\alpha=0.05$

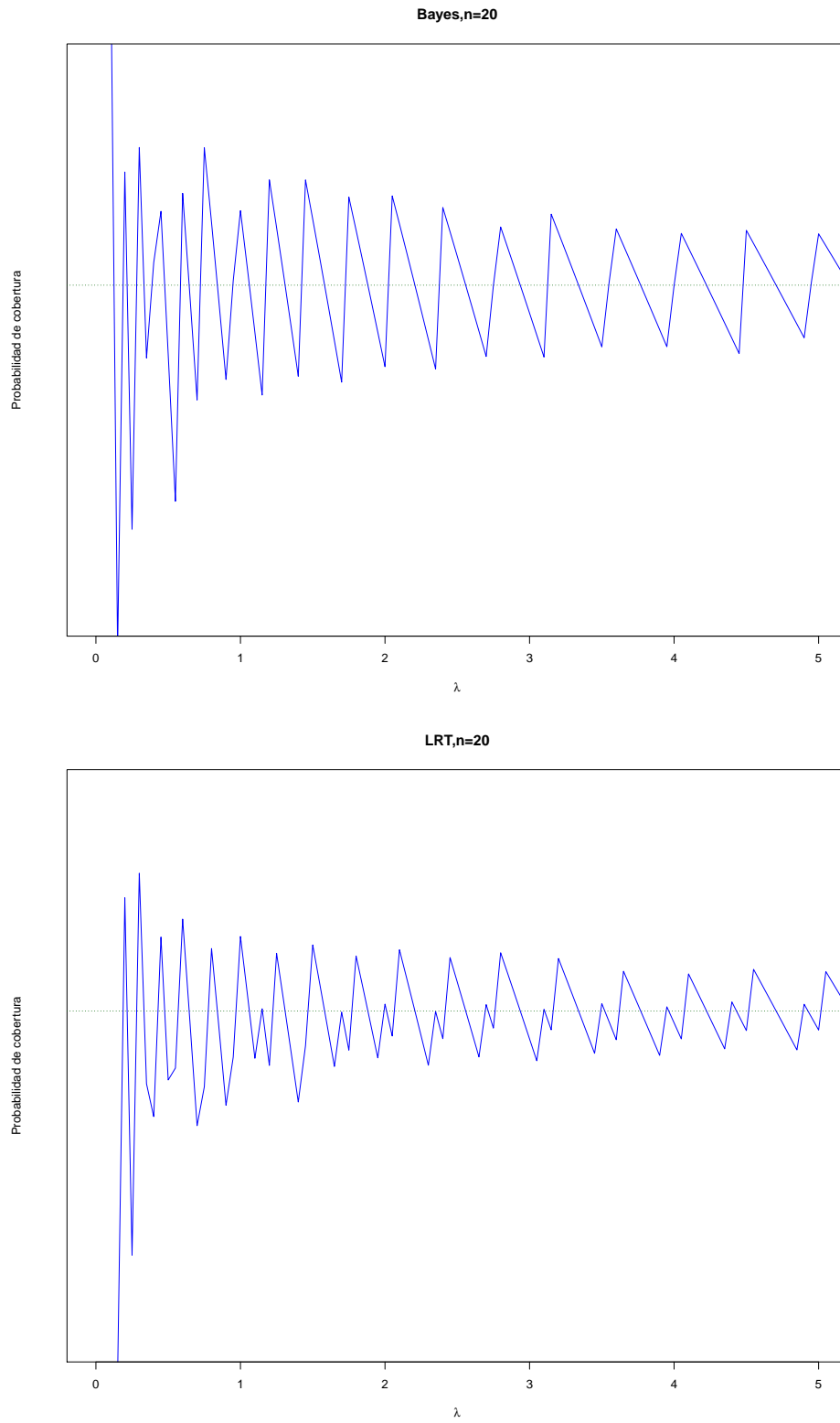


Figura 14: Probabilidad de cobertura de los métodos Bayes y LRT para λ entre 0 y 5, $n=20$ y $\alpha=0.05$

4.7. Longitud de los intervalos de confianza de los diferentes métodos

En la figura 15 podemos ver tres gráficos con las longitudes de los métodos Exacto (azul), Wald(rojo) en los tres gráficos y los de Score(primer gráfico), Bayes(segundo gráfico) y LRT(tercer gráfico)(verde), el método exacto tiene, para todos los valores de λ , la mayor longitud. El resto de los métodos prácticamente no permiten diferenciar las longitudes entre ellos.

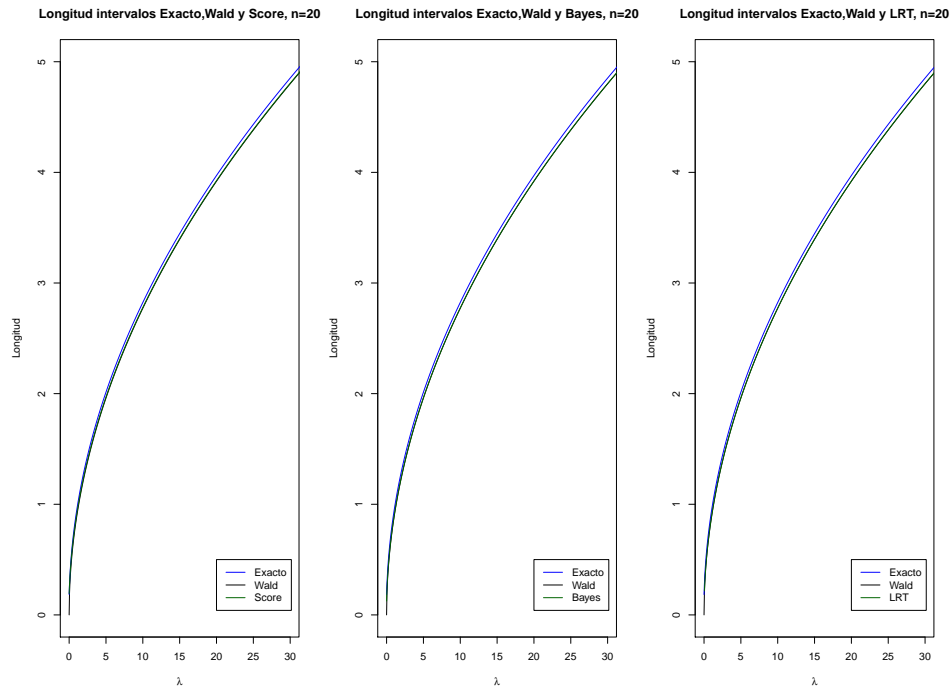


Figura 15: Longitud de los intervalos de confianza de los diferentes métodos para λ entre 0 y 30, $n=20$ y $\alpha=0.05$

4.8. Diferencia longitud de los intervalos de confianza de los diferentes métodos

En la figura 16 podemos ver las diferencias de cada método en relación al de Wald, vemos que el método Exacto es, como hemos comentado antes, más largo en todo el intervalo de valores de λ .

Los otros tres métodos Score, Bayes y LRT, a partir de valores de $\lambda \geq 5$ son prácticamente iguales, con diferencias prácticamente nulas para los métodos de Bayes y LRT y ligeramente mayor que cero (0.009) para el método Score. En la figura 17 vemos las diferencias ampliadas para los valores de λ entre 0 y 5.

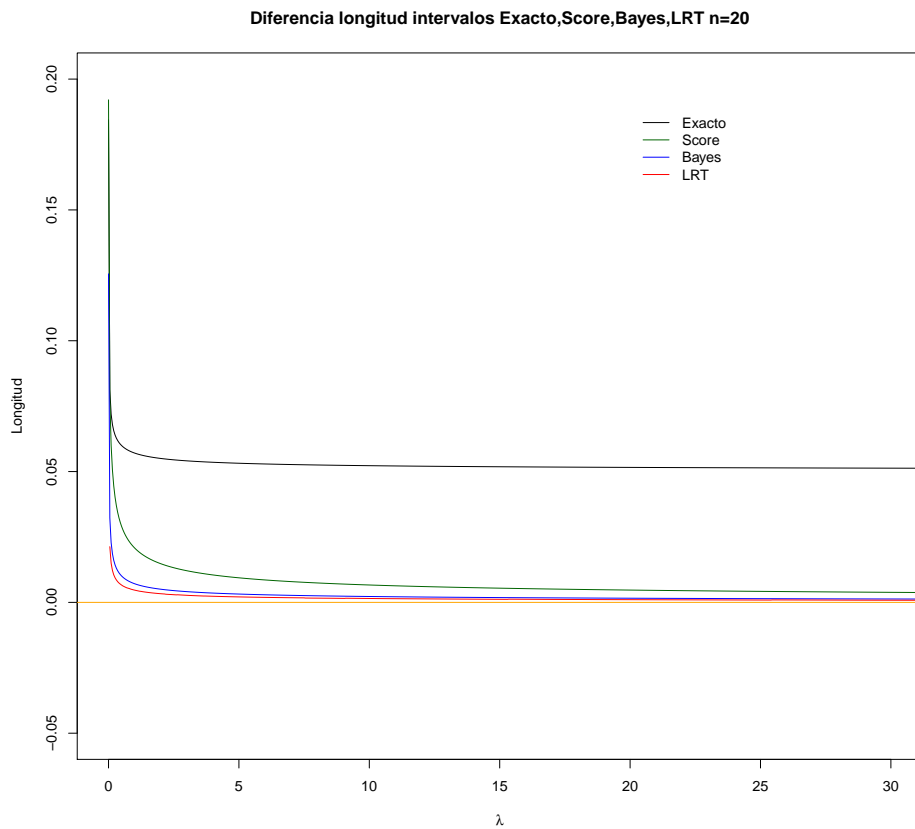


Figura 16: Diferencia de longitud de los intervalos de confianza de los diferentes métodos en relación al de Wald para λ entre 0 y 30, $n=20$ y $\alpha=0.05$

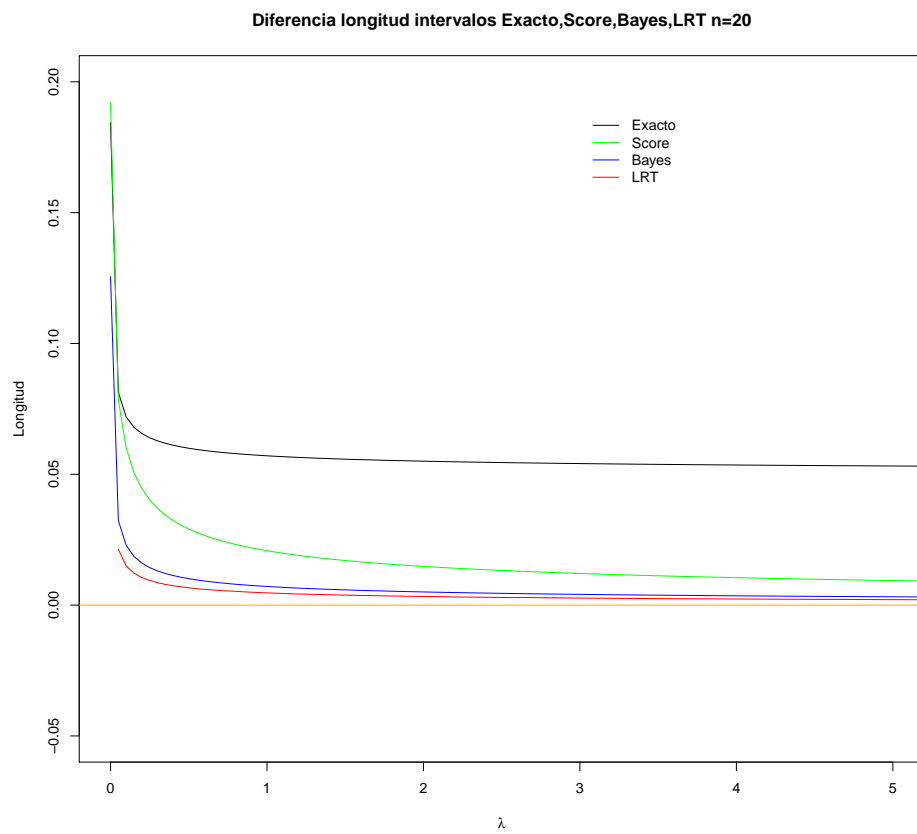


Figura 17: Diferencia de longitud de los intervalos de confianza de los diferentes métodos en relación al de Wald para λ entre 0 y 5, $n=20$ y $\alpha=0.05$

4.9. Resultados con tamaños de muestra $n=50$ y $n=100$

En el apéndice 2 vemos los resultados de la probabilidad de cobertura, para cada uno de los métodos descritos, con tamaños de muestra de 50 y 100 y λ entre 0 y 30. En las figuras 30 a 32 y 36 a 38 vemos los gráficos para los tamaños de muestra de 50 y 100 respectivamente y valores de λ entre 0 y 30, se puede observar que al aumentar el tamaño de muestra la amplitud de la oscilación, en torno al valor nominal, va disminuyendo para los métodos que tienen valores por debajo del valor nominal. El método Exacto sigue estando por encima del valor nominal y la amplitud de su oscilación también va disminuyendo con el aumento del tamaño de la muestra.

Podemos observar lo mismo en las figuras 33 a 35 y 39 a 41 donde vemos la cobertura para λ entre 0 y 5, para los dos tamaños de muestra citados.

En relación a la longitud de los intervalos, podemos observar en las figuras 42 y 44 las diferencias de los diferentes métodos en relación al método de Wald, para valores de λ entre 0 y 30; vemos que los métodos de Score, Bayes y LRT muestran diferencias cercanas a cero a partir de un valor de λ entorno a 3. El método Exacto muestra que va disminuyendo hasta valores de λ menores de 0.5, manteniéndose constante la diferencia a partir de valores de λ mayores de 0.5, con una longitud en torno a 0.025 para $n = 50$ y algo menor para $n = 100$.

En las figuras 43 y 45 vemos resultados similares para valores de λ entre 0 y 5, con el aumento del tamaño de muestra la diferencia va disminuyendo para todos los métodos y está muy próxima a cero para los tres métodos no conservadores (Score, Bayes y LRT).

4.10. Distribución Poisson: Conclusiones

Al igual que para la distribución binomial el método Exacto es el único cuya cobertura cumple con el valor nominal, pero presenta la mayor longitud del intervalo de confianza para todo valor de λ . Los otros cuatro métodos presentan valores de cobertura oscilando alrededor del valor nominal, quedando por debajo del valor nominal para valores pequeños de λ (en general para valores inferiores a 5). Las longitudes de los métodos de Wald, Score, Bayes y LRT son menores que las del método Exacto y con mínimas diferencias entre ellos.

En general con el aumento del tamaño de muestra la probabilidad de cobertura de los métodos que están por debajo del valor nominal cada vez se acercan más a él. El método Exacto va disminuyendo las diferencias de longitud con los otros métodos con el aumento del tamaño de muestra. Para muestras pequeñas el método que presenta la mejor relación cobertura/longitud es el de razón de verosimilitud, pero su cálculo es el más complejo, por ello el método Score sería el más razonable, para muestras mayores de 50 el método Exacto sería el que presenta la mejor relación cobertura/longitud.

5. Distribución Hipergeométrica

La distribución hipergeométrica es una distribución de probabilidad discreta, que describe la probabilidad de k éxitos en una muestra de tamaño n , extraída sin reemplazo, de una población N , de tamaño finito, que contiene M éxitos y $N-M$ fracasos.

La función de densidad tiene la siguiente expresión:

$$P(K = k|n, M, N) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

La probabilidad de cobertura de un intervalo de confianza de una distribución Hipergeométrica de un método dado tiene la expresión:

$$C(p) = \sum_{k=0}^n (I\{L(k) \leq p \leq U(k)\}) \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

donde I indica la función correspondiente a cada método.

El trabajo de Finkelstein desarrolla la comparación entre el método general, con carácter conservativo, con el método de Wald para una distribución hipergeométrica. En Lee (15) hay descritos 6 métodos diferentes para el cálculo de intervalos de confianza de la distribución hipergeométrica, estudiaremos los de Wald, Agresti y Wilson para relacionarlos con el método exacto.

5.1. Método de Wald

El método de Wald es el más utilizado en la práctica en análisis estadístico. La aproximación normal para el intervalo de confianza de una proporción hipergeométrica $p=(M/N)$ tiene la siguiente expresión:

$$CI = \hat{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{1 - f} \sqrt{\hat{p}\hat{q}/(n - 1)}$$

donde $z_{\alpha/2}$ es el cuantil $1 - \alpha/2$ de la distribución normal, $\hat{p} = k/n$, $\hat{q} = 1 - \hat{p}$ y $f = n/M$

5.2. Método de Agresti-Coull(1998)

Agresti-Coull(9) proponen una modificación del método asintótico, de manera que el intervalo de confianza para la distribución hipergeométrica queda como :

$$CI = \hat{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{1 - \hat{f}} \sqrt{\hat{p}\hat{q}/(\hat{n} - 1)}$$

donde z es el cuantil $1 - \alpha/2$ de la distribución normal, $\hat{n} = n + 4$, $\hat{p} = k/\hat{n}$, $\hat{q} = 1 - \hat{p}$ y $\hat{f} = \hat{n}/N$, ver Lee(15).

5.3. Método de Wilson

El intervalo de confianza de descrito por Wilson en 1927(10) está definido por la siguiente expresión:

$$CI_W = \hat{p}^* \pm z_{\alpha/2} \frac{\sqrt{1-f^*}}{\hat{n}^*} \sqrt{n\hat{p}\hat{q} + (1-f^*)z_{\alpha/2}^2/4}$$

donde $\hat{n}^* = n + (1-f^*)z_{\alpha/2}^2$, $\hat{p}^* = (k + (1-f)z_{\alpha/2}^2/2)/\hat{n}^*$, $\hat{p} = k/n$, $\hat{q} = 1 - \hat{p}$ y $f = n/N$, ver Lee(15).

5.4. Método Exacto,(Finkelstein)

El método de Clopper -Pearson descrito en 1934(8) para la distribución binomial fue desarrollado por Cochran(16) para la distribución hipergeométrica, Chung and Delury (17) tabularon los resultados para una serie de valores de N, los intervalos de confianza inferior y superior se calculan por medio de las siguientes expresiones:

$$M_{L.c(k)} = \max \left\{ M : \sum_{i=k}^n \text{hyper}(N, M, n, i) \leq \alpha/2 \right\}$$

$$M_{U.c(k)} = \min \left\{ M : \sum_{i=0}^k \text{hyper}(N, M, n, i) \leq \alpha/2 \right\}$$

Hemos calculado los intervalos de confianza por medio de un script de R, los resultados obtenidos para $N = 100$ $n = 30$ son concordantes con los indicados en el artículo de Finkelstein(6).

5.5. Probabilidad de cobertura de los diferentes métodos

Vamos a evaluar la cobertura de los diferentes métodos, podremos observar los gráficos con valores de $N = 500$ y $n = 20$, para comparar con los resultados obtenidos por Seung-Chun Lee (15).

En las figuras 18 y 19 vemos los gráficos con $N=500$ y $n=20$, podemos observar que el método de Wald(figura 18) tiene una cobertura por debajo del valor nominal para la mayoría de los valores.

Los métodos de Agresti y Wilson(figura 19) tienen un perfil muy parecido en los valores centrales de probabilidad, pero con marcadas diferencias en los valores extremos, ambos métodos presentan una cobertura de probabilidad oscilando alrededor del valor nominal. El método Exacto(figura 18) esta siempre por encima del valor nominal, con valores superiores al inicio y final(para valores de p muy próximos a 0 y a 1).

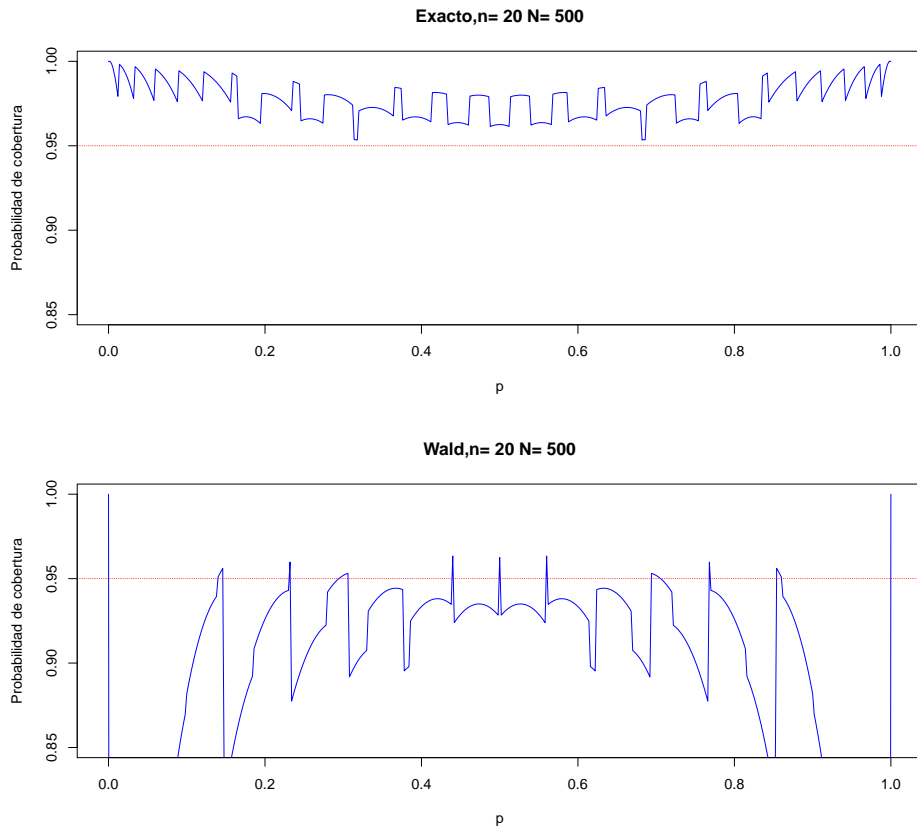


Figura 18: Probabilidad de cobertura de los métodos Exacto y Wald para $N=500$ y $n=20$

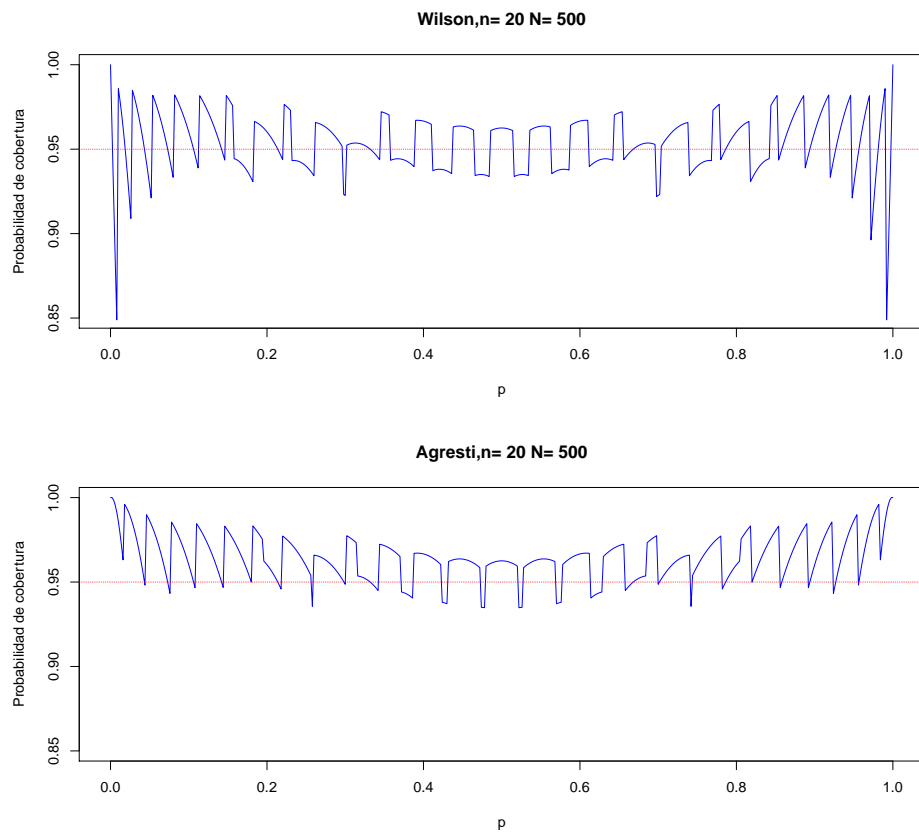


Figura 19: Probabilidad de cobertura de los métodos Wilson y Agresti para $N=500$ y $n=20$

5.6. Longitud de los intervalos de confianza de los diferentes métodos

En la figura 20 podemos ver los gráficos con las longitudes de los métodos Exacto (rojo), Wald(negro), Agresti(azul) y Wilson(verde), el método Exacto tiene la mayor longitud, con el método de Wald muy cerca del Exacto en los valores centrales de probabilidad, los otros dos métodos(Agresti y Wilson) tienen longitudes muy similares entre sí para valores centrales de probabilidad y con ligeras diferencias en los extremos. También podemos observar que los métodos de Agresti y Wilson muestran valores sensiblemente menores que los métodos Exacto y Wald en el tramo central de probabilidades (0.2-0.8).

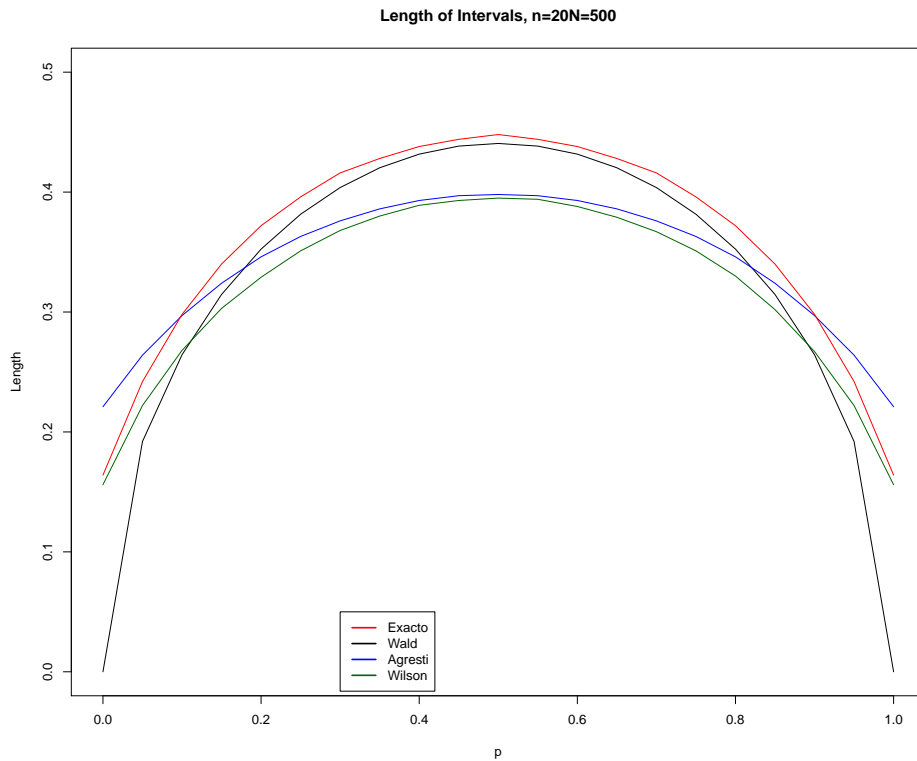


Figura 20: Longitud de los intervalos de confianza de los diferentes métodos para N=500 y n=20

5.7. Diferencia longitud de los intervalos de confianza de los diferentes métodos

En la figura 21 podemos ver las diferencias de cada método en relación al de Wald, vemos que el método Exacto es, como hemos comentado antes, más largo en todo el intervalo de valores de probabilidad, la diferencia es siempre positiva, más alta en los extremos y cercana a cero en los valores centrales.

Los otros dos métodos Agresti(azul) y Wilson(verde), presentan diferencias negativas en el tramo central de probabilidad (aproximadamente entre 0.15 y 0.85), lo que les hace más competitivos con respecto al método de Wald, al mostrar menor longitud y mayor probabilidad de cobertura.

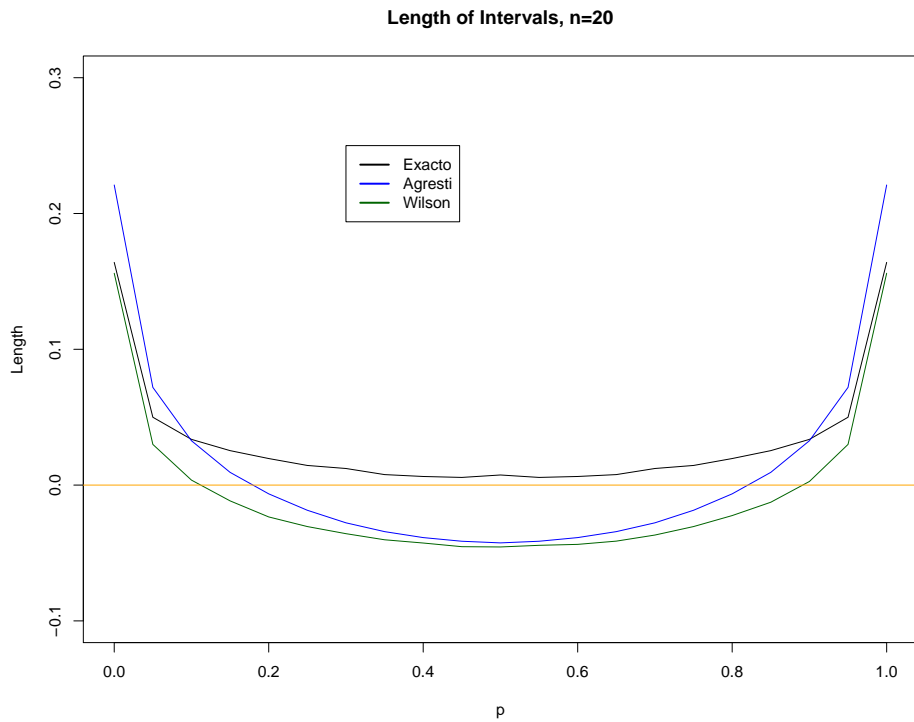


Figura 21: Diferencia de longitud de los intervalos de confianza de los diferentes métodos en relación al de Wald para $N=500$ y $n=20$

5.8. Resultados con tamaños de muestra $n=50$, $n=100$ y $N=500$

En las figuras 46 a 49 del apéndice 3 tenemos las graficas de la probabilidad de cobertura de los diferentes métodos para dos tamaños de muestra $n(50,100)$, manteniendo fijo el tamaño de la población N en 500, las coberturas de los diferentes métodos mantienen prácticamente el mismo nivel de cobertura al aumentar el tamaño de la muestra n . En las figuras 50 y 51 tenemos la longitud de los diferentes métodos, podemos observar que al aumentar n disminuyen las longitudes en valor absoluto y las diferencias entre métodos se van acortando, para $n=100$ las diferencias, entre los diferentes métodos, son prácticamente despreciables.

5.9. Resultados con tamaños de muestra $n=20$ y $N=1000$ y $N=10000$

En las figuras 52 a 55 del apéndice 3 tenemos las graficas de la probabilidad de cobertura de los diferentes métodos para dos tamaños de población $N(1000,10000)$, manteniendo fijo el tamaño de la muestra n en 20, las coberturas de los diferentes métodos se mantienen prácticamente constantes al aumentar el tamaño de la población. En las figuras 56 y 57 tenemos la longitud de los diferentes métodos, podemos observar que al aumentar N no varía el comportamiento de las longitudes de los diferentes métodos.

5.10. Distribución Hipergeométrica:Conclusiones

Al igual que para la distribución binomial y la de Poisson el método Exacto es el único cuya cobertura cumple con el valor nominal, pero presenta la mayor longitud del intervalo de confianza para todo valor de p , los métodos de Agresti y Wilson presentan valores de cobertura oscilando alrededor del valor nominal, quedando claramente por debajo del valor nominal para valores extremos de $p(p < 0,15, p > 0,85)$, mientras el método de Wald está, para prácticamente todos los valores de p , por debajo del valor nominal.

Las longitudes de los diferentes métodos muestran una clara diferencia entre los métodos Exacto y Wald frente a Agresti y Wilson, estos últimos presentan longitudes menores.

Al aumentar el tamaño de muestra, manteniendo el tamaño de la población, las coberturas de probabilidad no varían sustancialmente, en cambio las longitudes de los métodos van disminuyendo hasta hacerse la diferencia entre ellos muy pequeña.

Al aumentar el tamaño de la población, manteniendo constante el tamaño de la muestra, no hay cambios en las coberturas de probabilidad ni en la longitud de los diferentes métodos.

6. Bibliografía

- 1-Laplace, P.S. (1814). *Théorie analytique des probabilités* (2nd ed.). Paris: Courcier.
- 2-Neyman. Outline of a Theory of Statistical Estimation Based on the Classical Theory of Probability, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, Vol. 236, No. 767. (Aug. 30, 1937), pp. 333-380.
- 3-Neyman, J. (1934). On two different aspects of the representative method: The method of stratified sampling and the method of purposive sampling. *Journal of the Royal Statistical Society*, 97, 558-625.
- 4-E.L.Lehmann, Fisher, Neyman, and the creation of classical statistics, Springer, 2011 pag. 80
- 5-Wald, A., Wolfowitz, J. (1939). Confidence limits for continuous distribution functions. *The Annals of Mathematical Statistics*, 10, 105-118.
- 6-Filkenstein, H. G. Tucker and J. A. Veeh. Conservative confidence intervals for a single parameter, *Communications in Statistics: Theory and Methods*, 29, no.8 (2000).
- 7-A. M. Pires, C. Amado. Interval estimators for a binomial proportion: comparison of twenty methods, *Statistical Journal* Volume 6, Number 2, June 2008, 165-197.
- 8-Clopper, C.J., Pearson, E.S. (1934). The use of confidence or fiducial limits illustrated in the case of the binomial. *Biometrika*, 26, 404-413.
- 9-Agresti, A., Coull, B.A. (1998). Approximate is better than exact for interval estimation of binomial proportions. *The American Statistician*, 52, 119-126.
- 10-Wilson, E.B. (1927). Probable inference, the law of succession, and statistical inference. *Journal of the American Statistical Association*, 22, 209-212.
- 11-V.V. Patil, H.V. Kulkarni, Comparison of confidence intervals for the Poisson mean: some new aspects, *Statistical Journal* Volume 10, Number 2, June 2012, 211-227
- 12-Barker, L. 2002. A comparison of nine confidence intervals for a poisson parameter when the expected number of events is ≤ 5 , *American Statistician*, vol. 56, no. 2, pp. 85-89.
- 13-Fay P. M. Feuer J. E. 1997. Confidence intervals for directly standardized rates: a method based on the gamma distribution, *Statistics in Medicine*, vol. 16, pp.791-801.
- 14-Lawrence D. Brown, T. Tony Cai and Anirban DasGupta, Interval estimation in exponential families, *Statistica Sinica*, 13,(2003), 19-49
- 15-Seung-Chun Lee, Confidence Intervals for a Proportion in Finite Population Sampling, *Communications of the Korean Statistical Society* 2009, Vol. 16, No. 3, 501-509
- 16-Cochran, W. G. (1977), *Sampling Techniques* (3rd ed.), New York: Wiley
- 17-Chung. H. H., and Delury, D. B. (1950), *Confidence Limits for the Hypergeometric Distribution*, Toronto: University of Toronto Press.

7. Apéndice 1

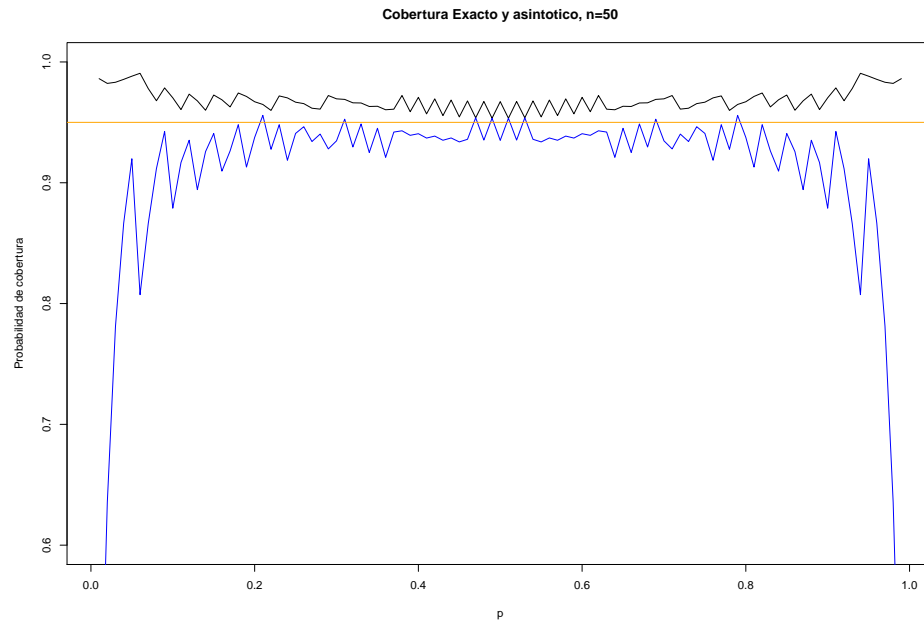


Figura 22: Probabilidad de cobertura del método Exacto para $n=50$ y $\alpha=0.05$

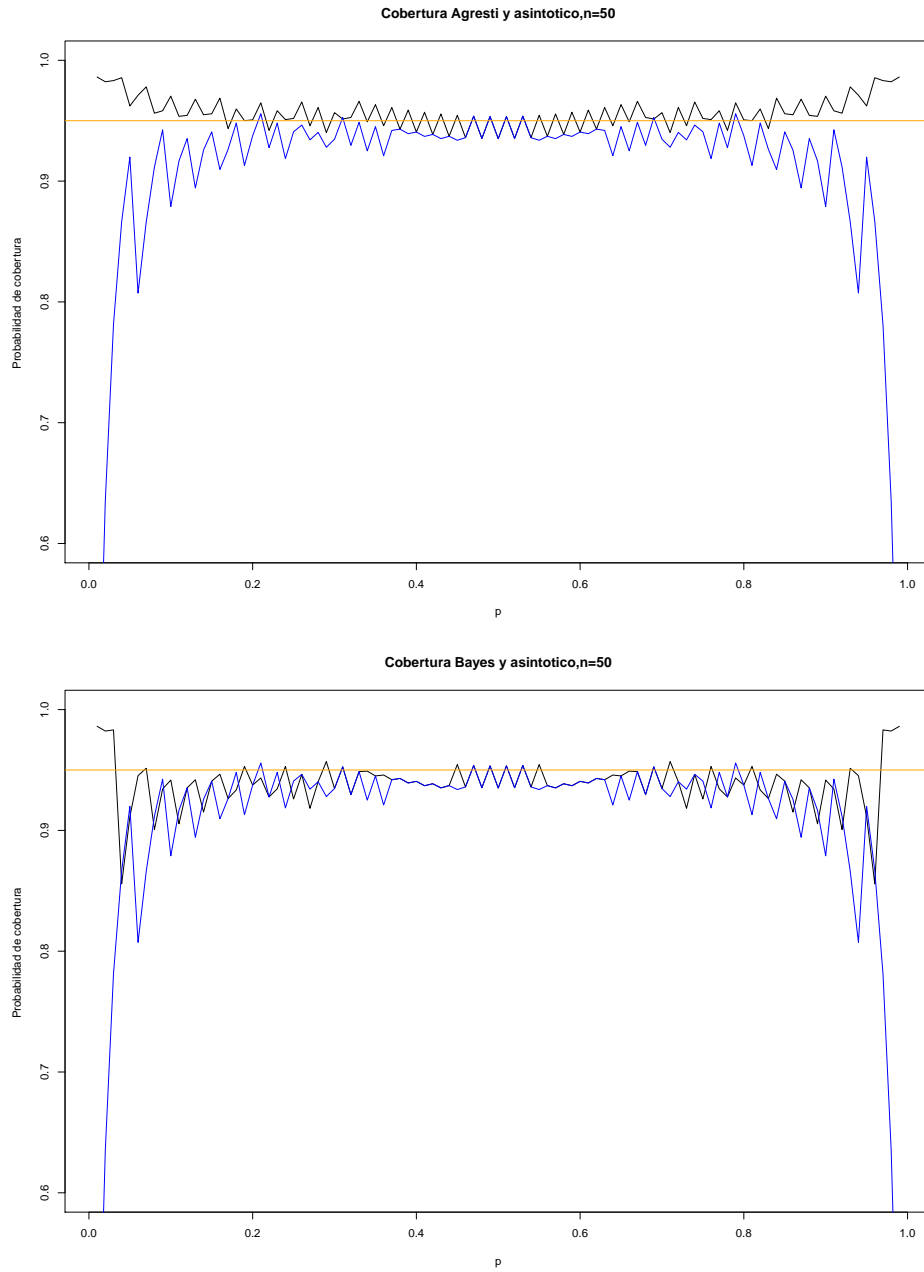


Figura 23: Probabilidad de cobertura de los métodos Agresti y Bayes para $n=50$ y $\alpha=0.05$

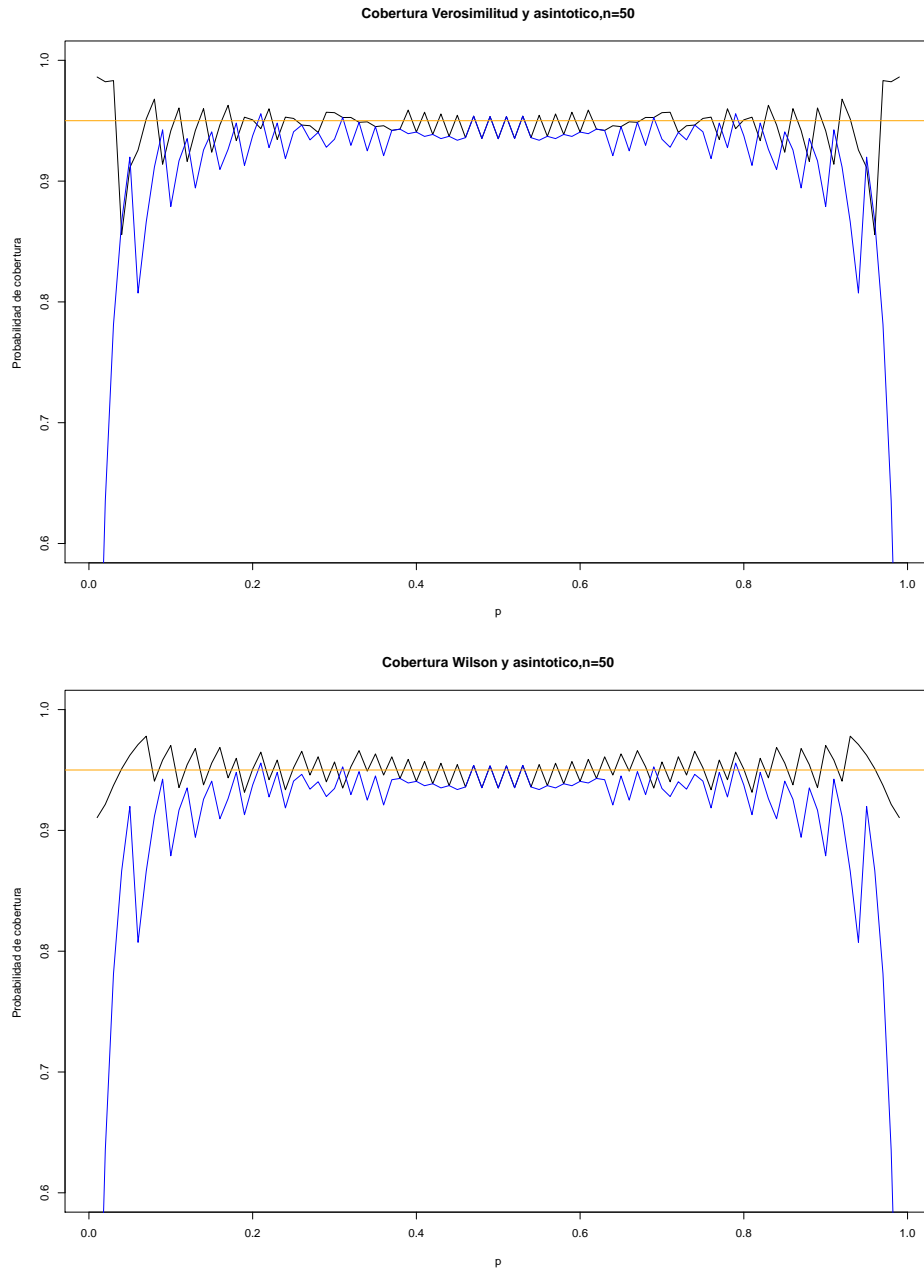


Figura 24: Probabilidad de cobertura de los métodos LRT y Wilson para $n=50$ y $\alpha=0.05$

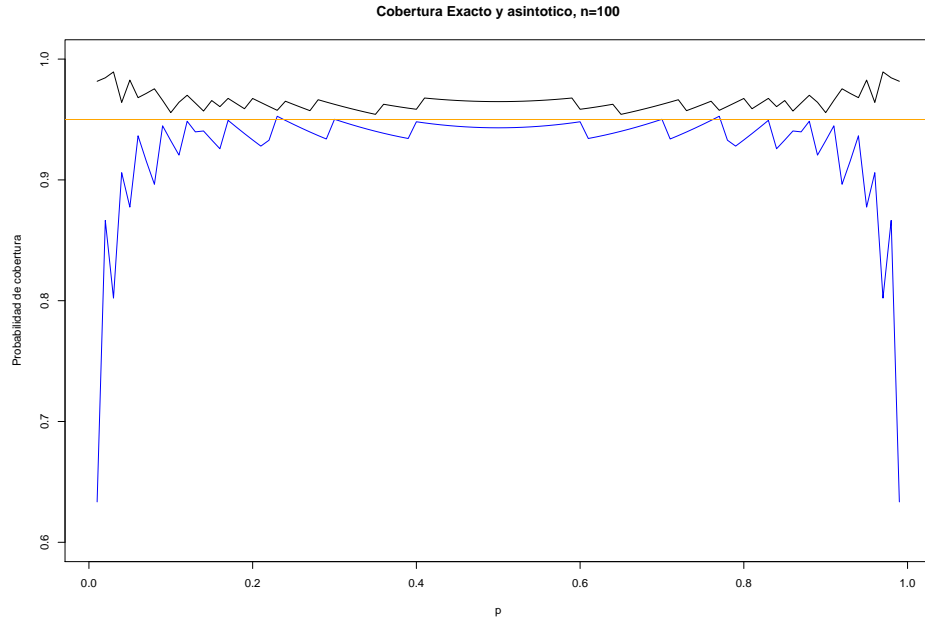


Figura 25: Probabilidad de cobertura del método exacto para $n=100$ y $\alpha=0.05$

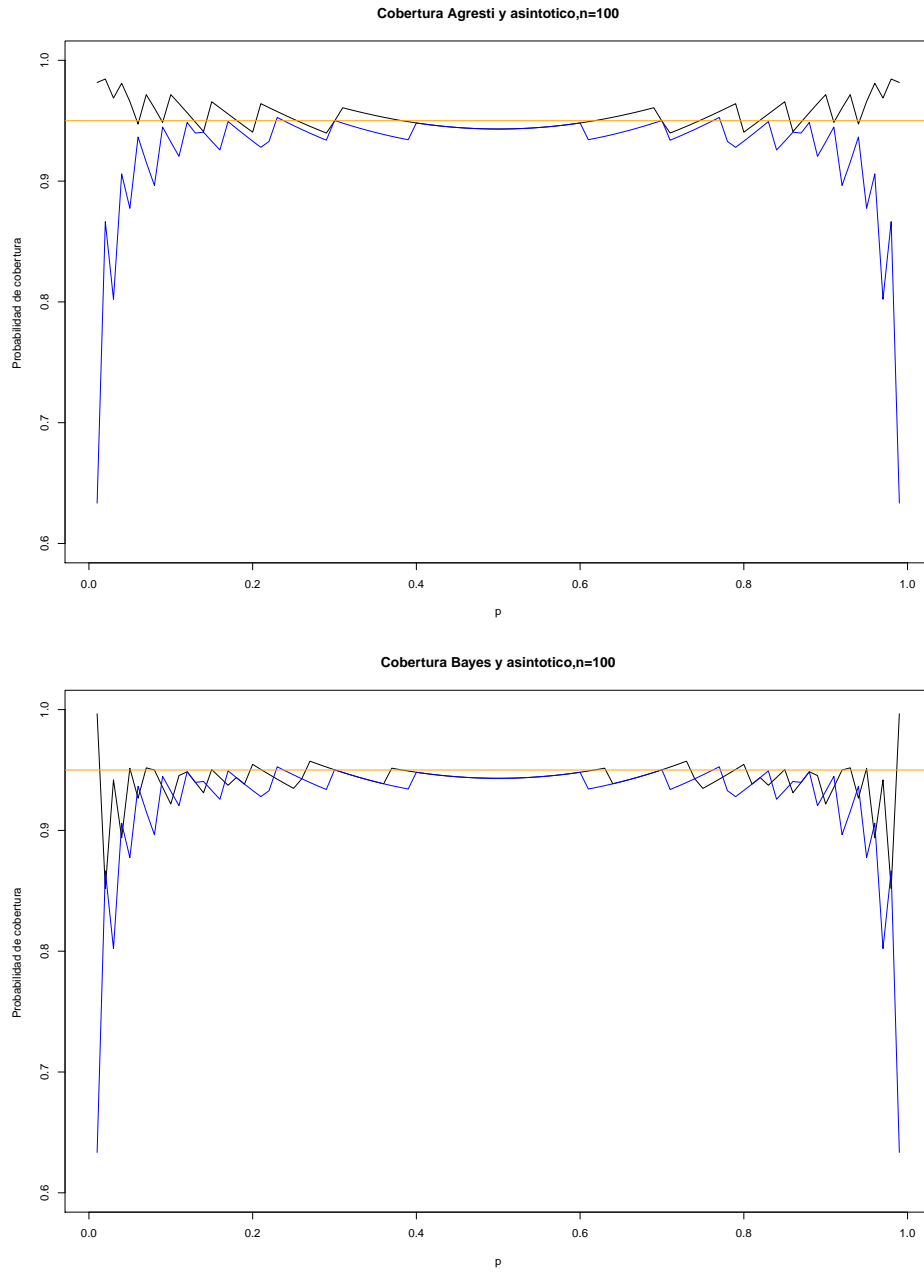


Figura 26: Probabilidad de cobertura de los métodos Agresti y Bayes para $n=100$ y $\alpha=0.05$

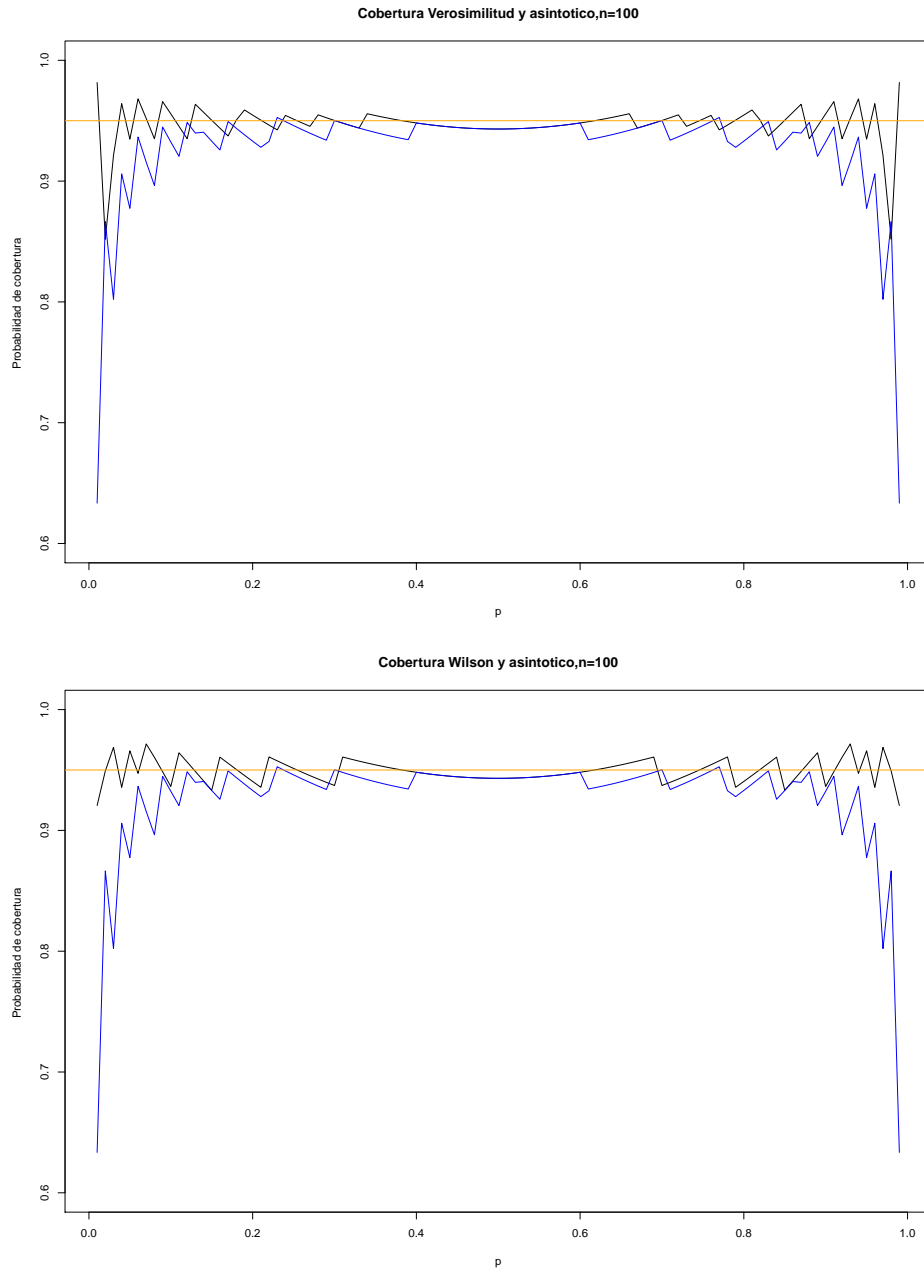


Figura 27: Probabilidad de cobertura de los métodos LRT y Wilson para $n=100$ y $\alpha=0.05$

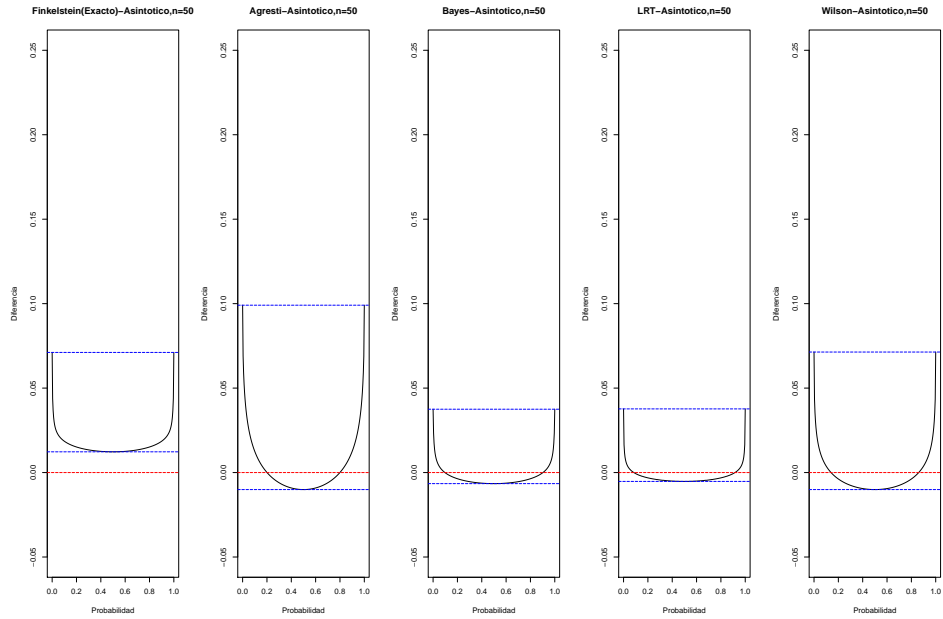


Figura 28: Diferencia de longitud de los diferentes métodos en relación al asintótico para $n=50$ y $\alpha=0.05$

	Max	Min
Exacto-Wald	0.07	0.01
Agresti-Wald	0.10	-0.01
Bayes-Wald	0.04	-0.01
LRT-Wald	0.04	-0.01
Wilson-Wald	0.07	-0.01

Tabla 3: =
"Máximo y mínimo de la diferencia entre métodos para $n=50$ "

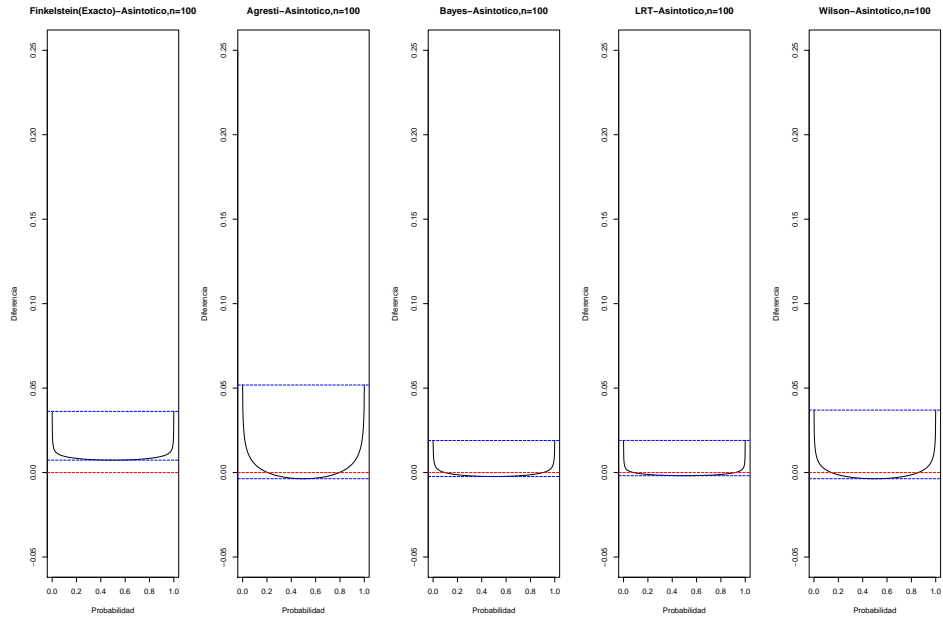


Figura 29: Diferencia de longitud de los diferentes métodos en relación al asintótico para $n=100$ y $\alpha=0.05$

	Max	Min
Exacto-Wald	0.04	0.01
Agresti-Wald	0.05	-0.00
Bayes-Wald	0.02	-0.00
LRT-Wald	0.02	-0.00
Wilson-Wald	0.04	-0.00

Tabla 4: =

"Máximo y mínimo de la diferencia entre métodos para $n=100$ "

8. Apéndice 2

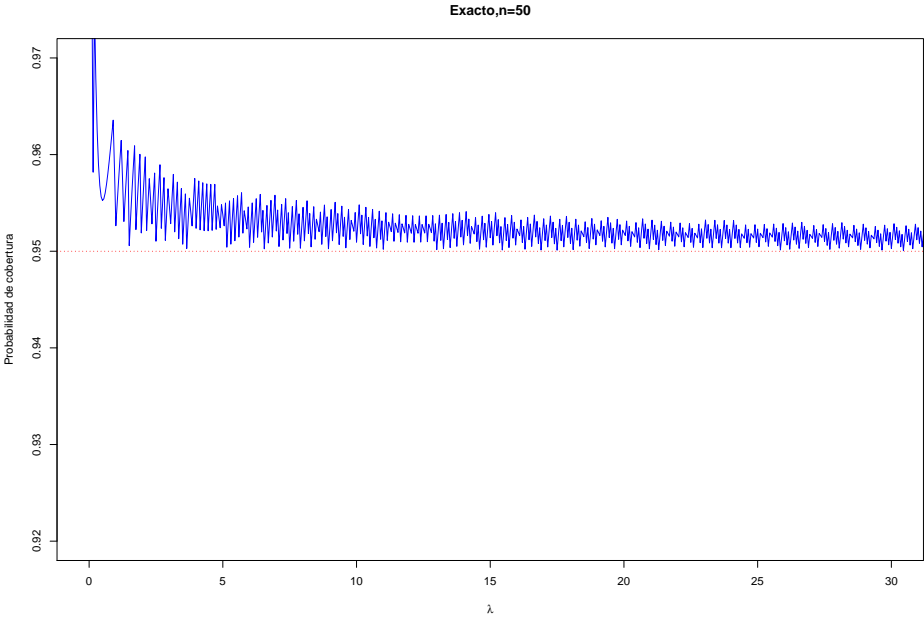


Figura 30: Probabilidad de cobertura del método Exacto para λ entre 0 y 30,n=50 y $\alpha=0.05$

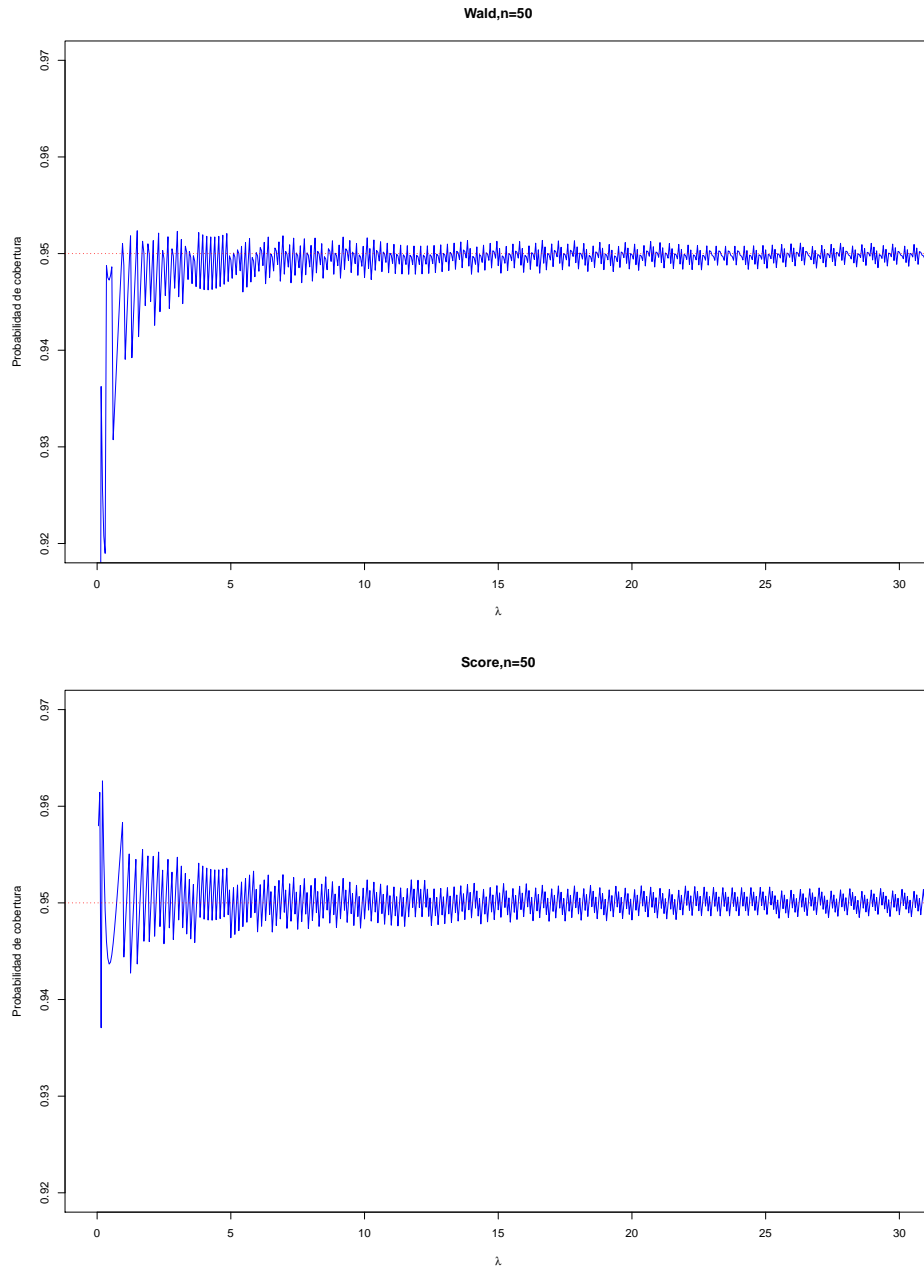


Figura 31: Probabilidad de cobertura de los métodos Wald y Score para λ entre 0 y 30, $n=50$ y $\alpha=0.05$

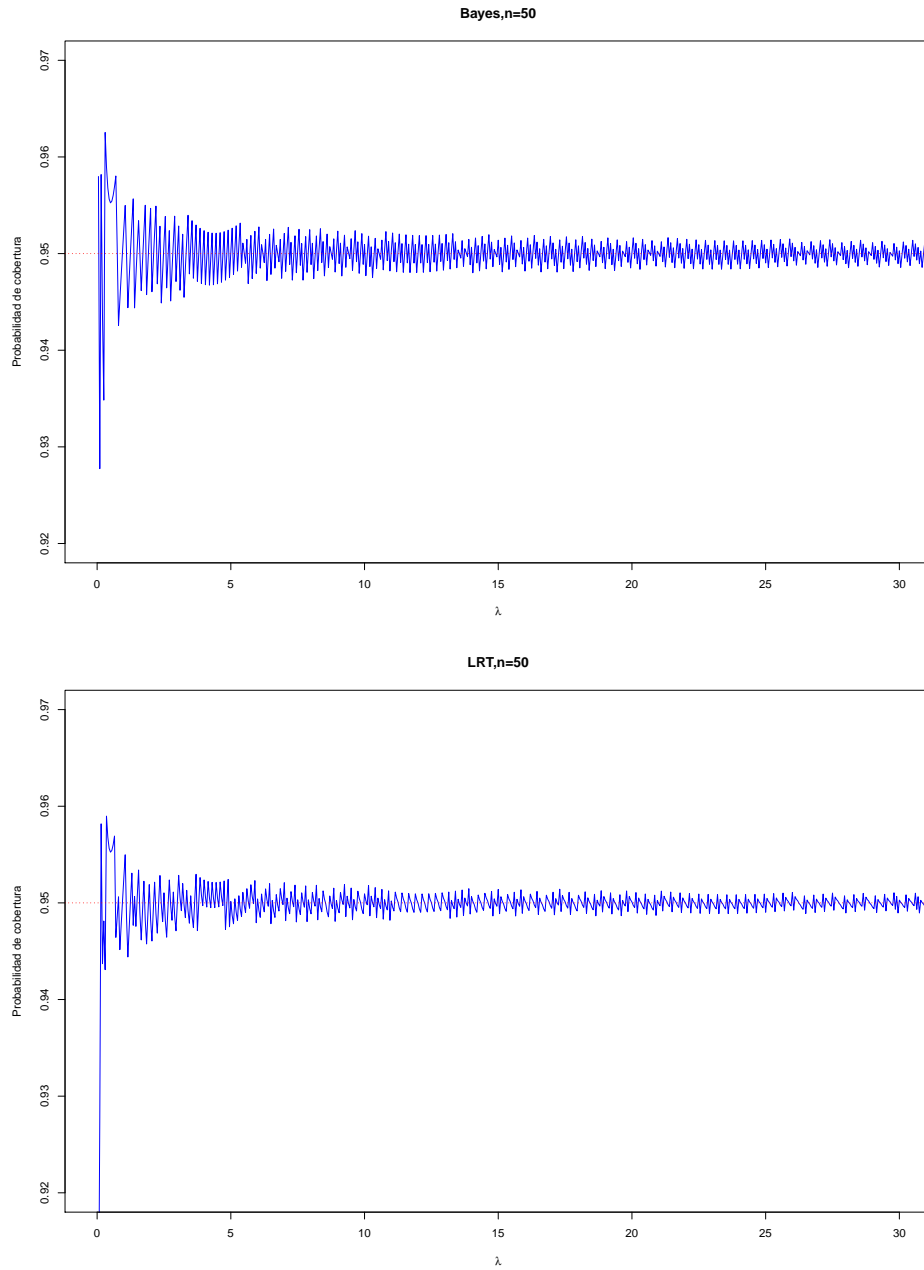


Figura 32: Probabilidad de cobertura de los métodos Bayes y LRT para λ entre 0 y 30, $n=50$ y $\alpha=0.05$

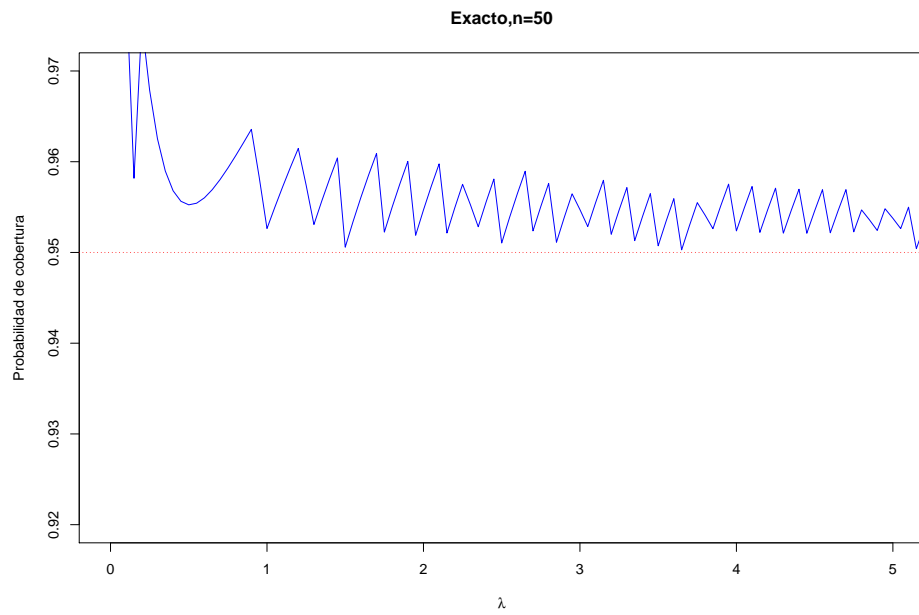


Figura 33: Probabilidad de cobertura del método Exacto para λ entre 0 y 5, $n=50$ y $\alpha=0.05$

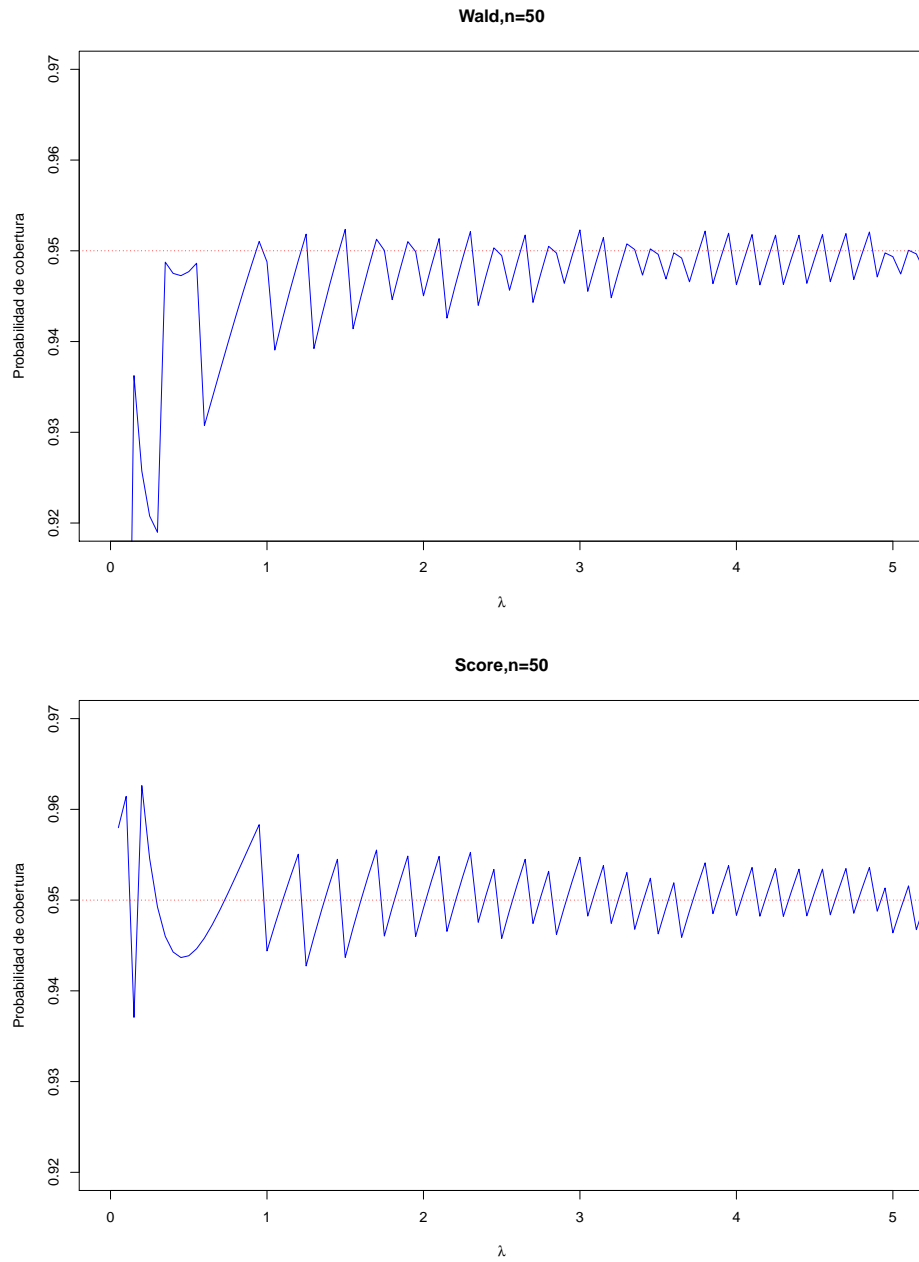


Figura 34: Probabilidad de cobertura de los métodos Wald y Score para λ entre 0 y 5, $n=50$ y $\alpha=0.05$

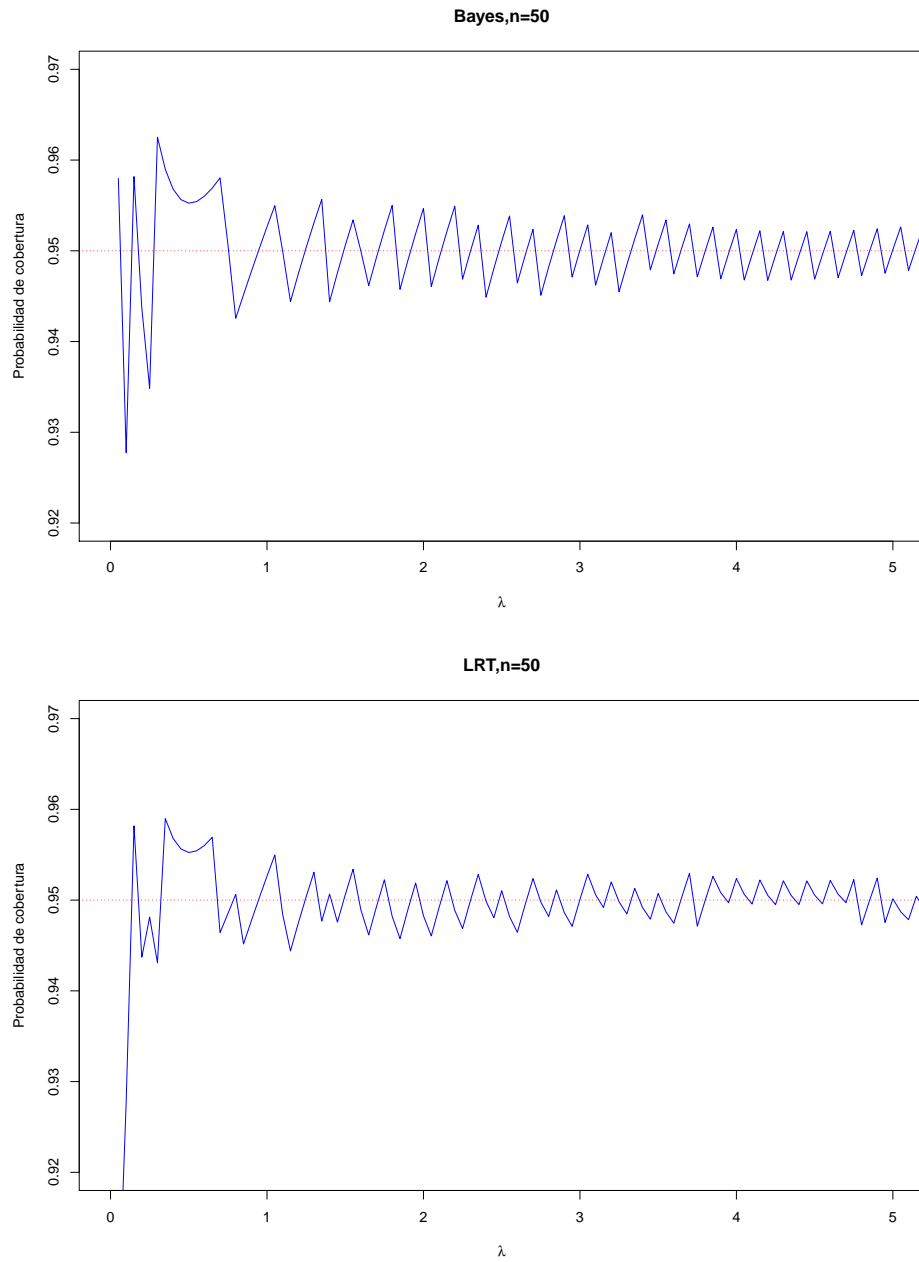


Figura 35: Probabilidad de cobertura de los métodos Bayes y LRT para λ entre 0 y 5, $n=50$ y $\alpha=0.05$

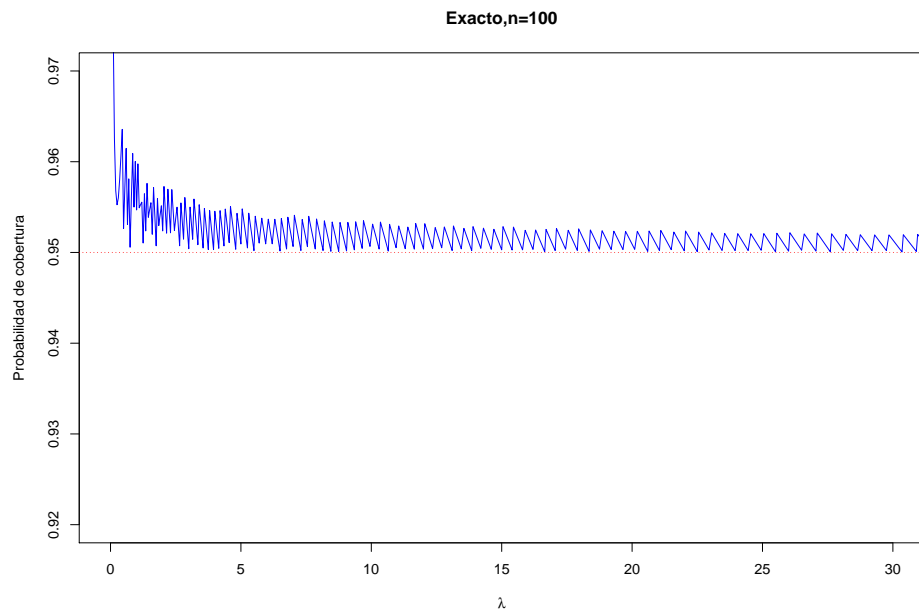


Figura 36: Probabilidad de cobertura del método Exacto para λ entre 0 y 30, $n=100$ y $\alpha=0.05$

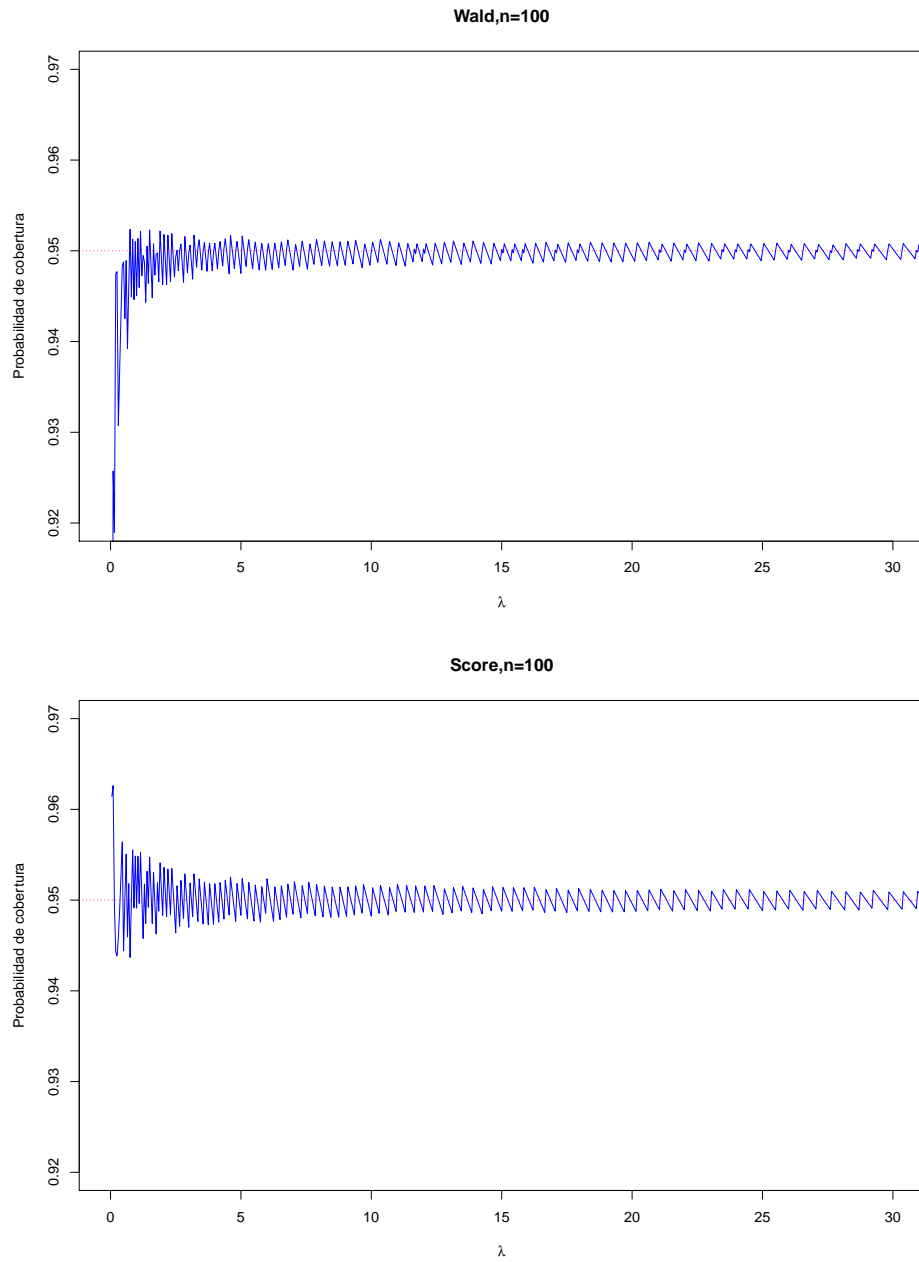


Figura 37: Probabilidad de cobertura de los métodos Wald y Score para λ entre 0 y 30, $n=100$ y $\alpha=0.05$

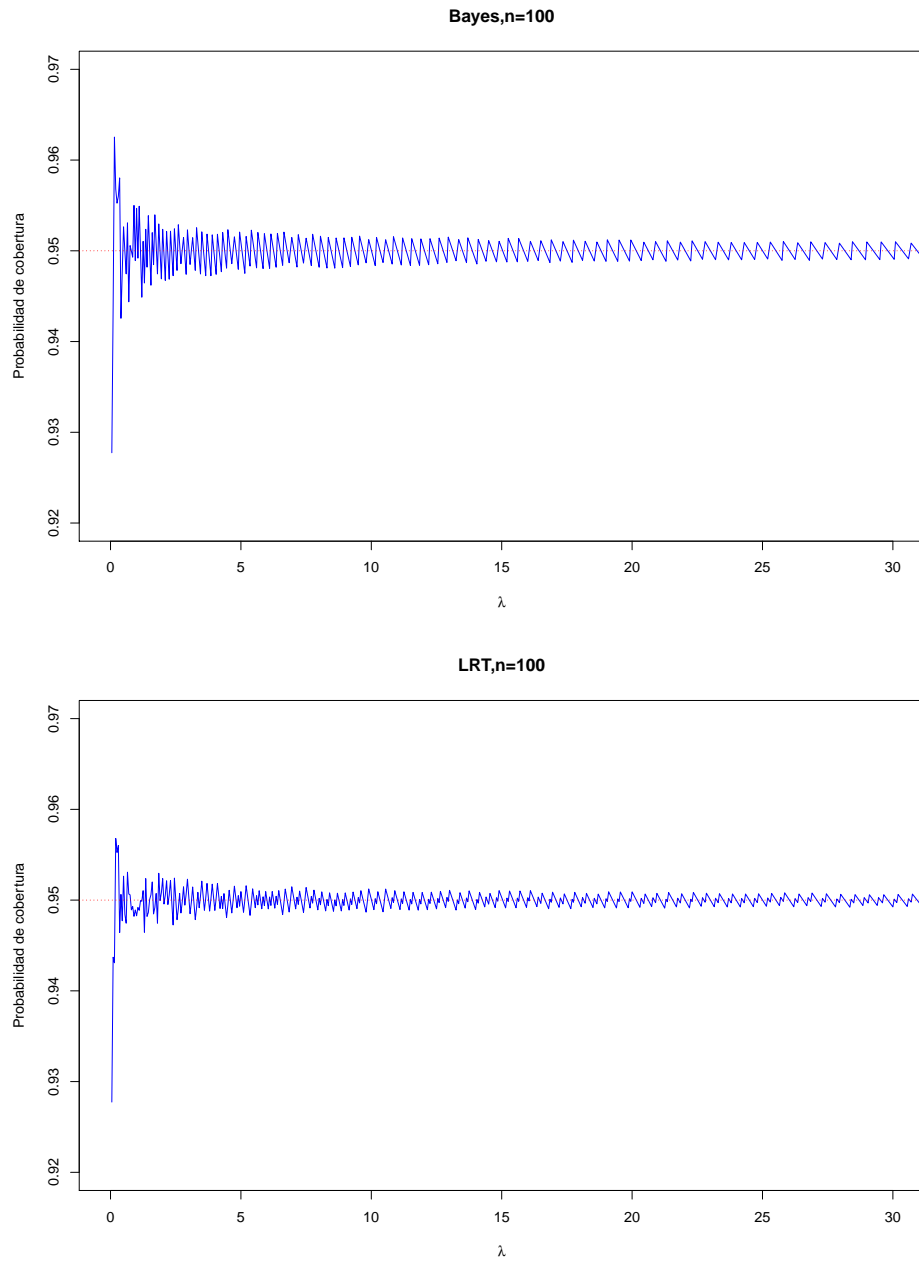


Figura 38: Probabilidad de cobertura de los métodos Bayes y LRT para λ entre 0 y 30, $n=100$ y $\alpha=0.05$

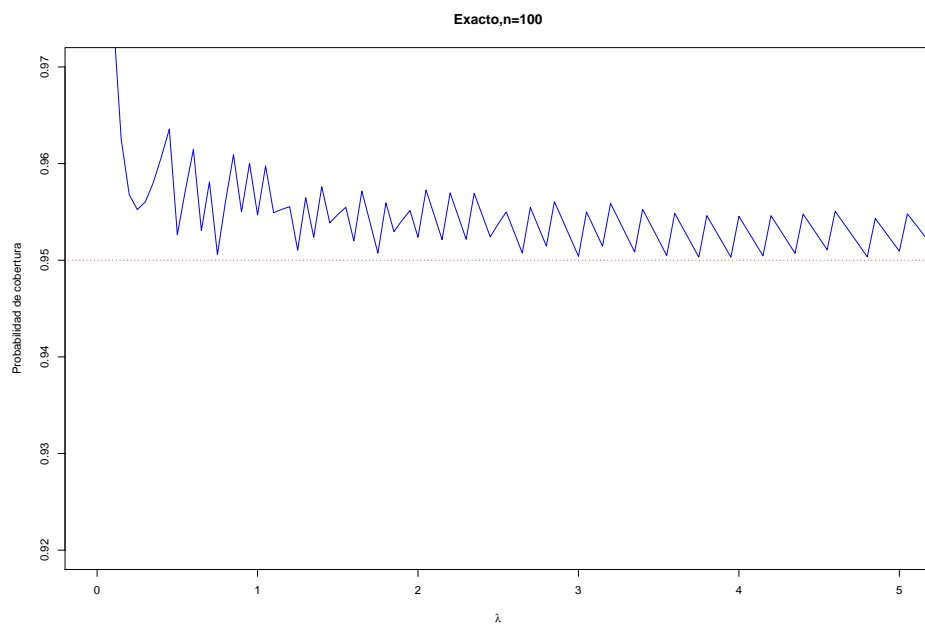


Figura 39: Probabilidad de cobertura del método Exacto para λ entre 0 y 5, $n=100$ y $\alpha=0.05$

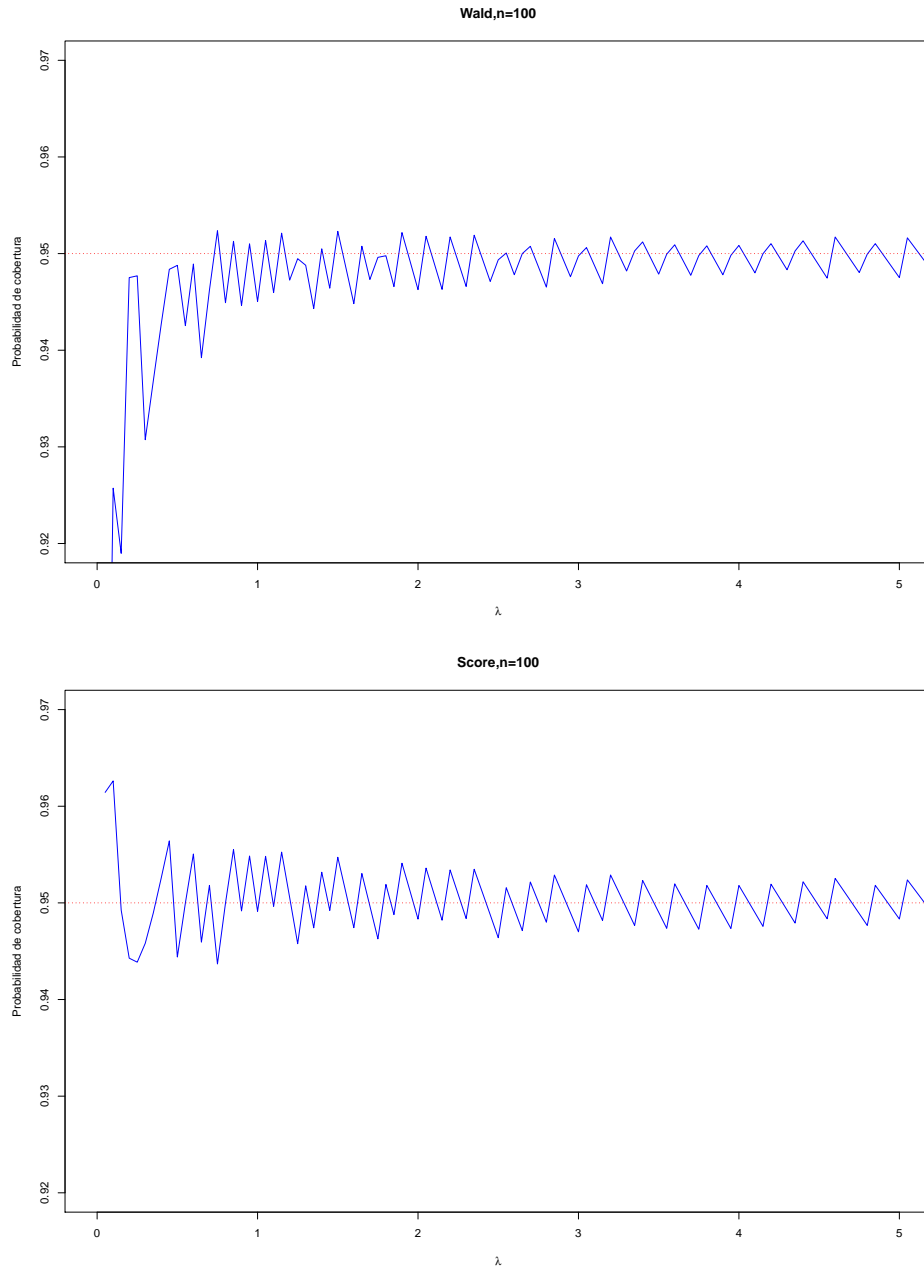


Figura 40: Probabilidad de cobertura de los métodos Wald y Score para λ entre 0 y 5, $n=100$ y $\alpha=0.05$

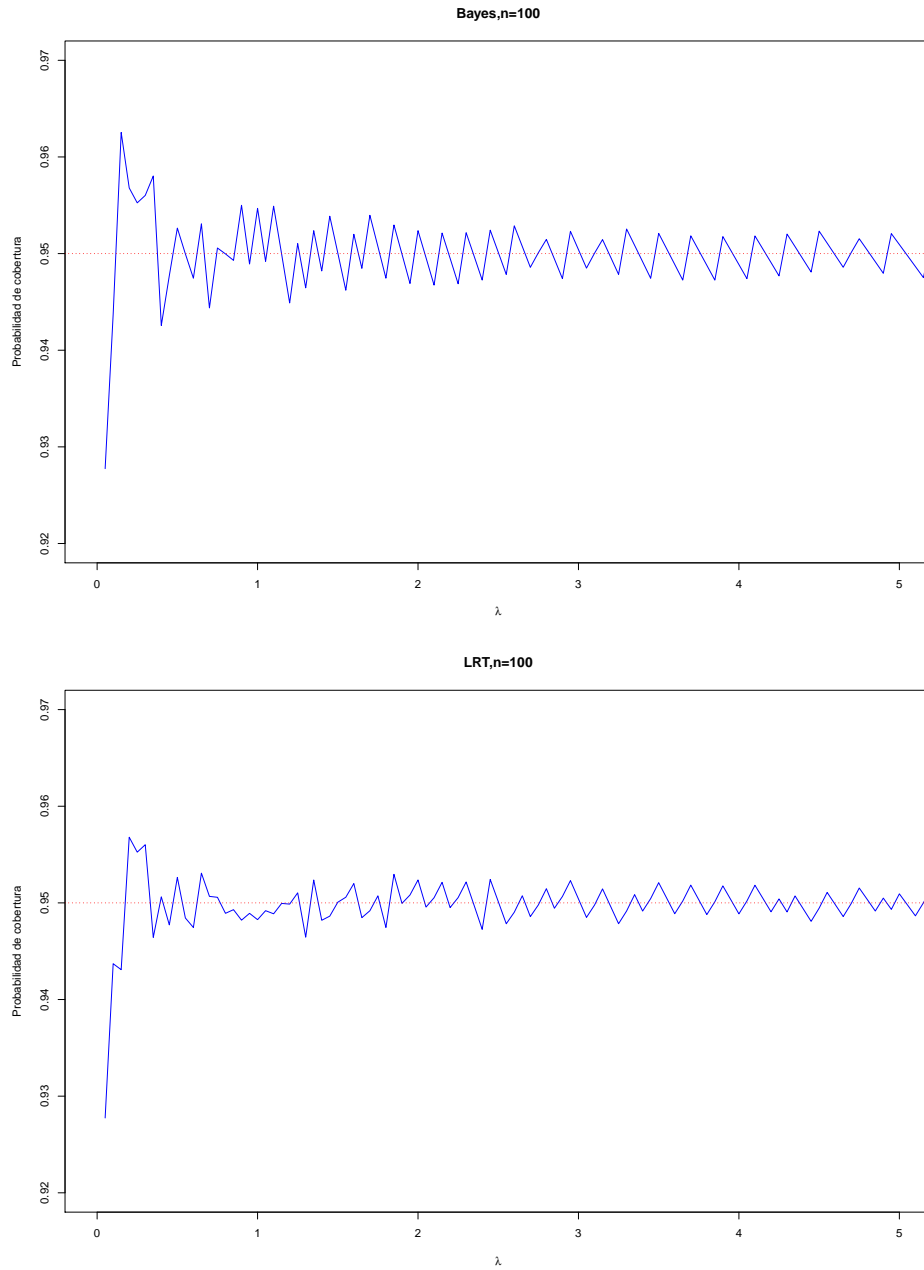


Figura 41: Probabilidad de cobertura de los métodos Bayes y LRT para λ entre 0 y 5, $n=100$ y $\alpha=0.05$

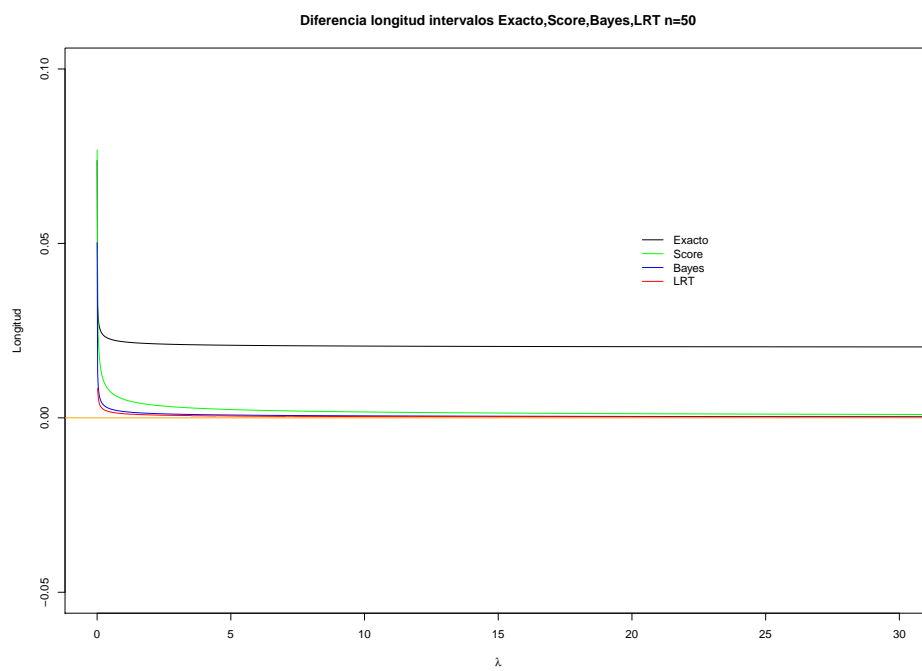


Figura 42: Diferencia de longitud de los intervalos de confianza de los diferentes métodos para λ entre 0 y 30, $n=50$ y $\alpha=0.05$

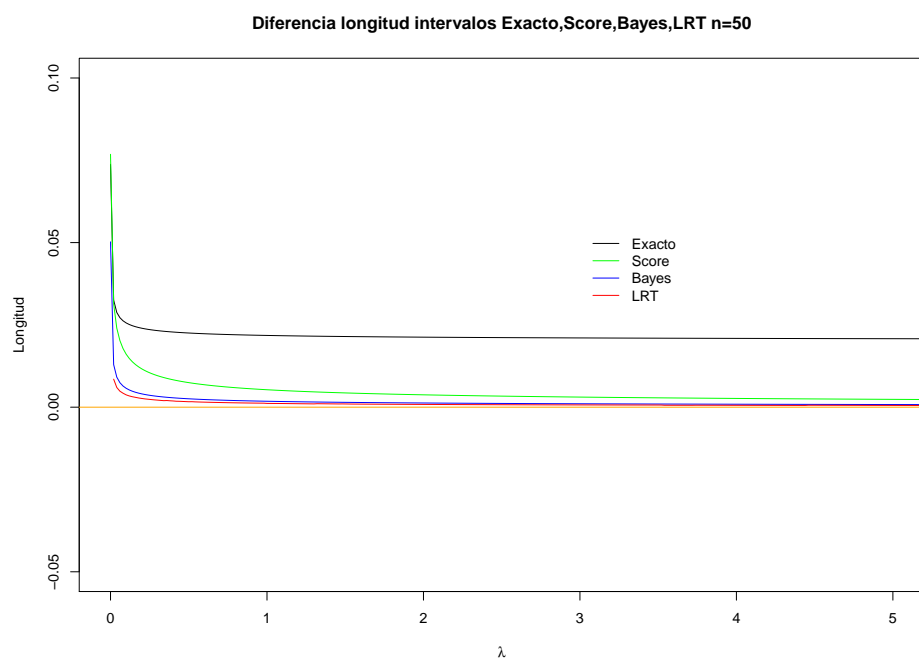


Figura 43: Diferencia de longitud de los intervalos de confianza de los diferentes métodos para λ entre 0 y 5, $n=50$ y $\alpha=0.05$

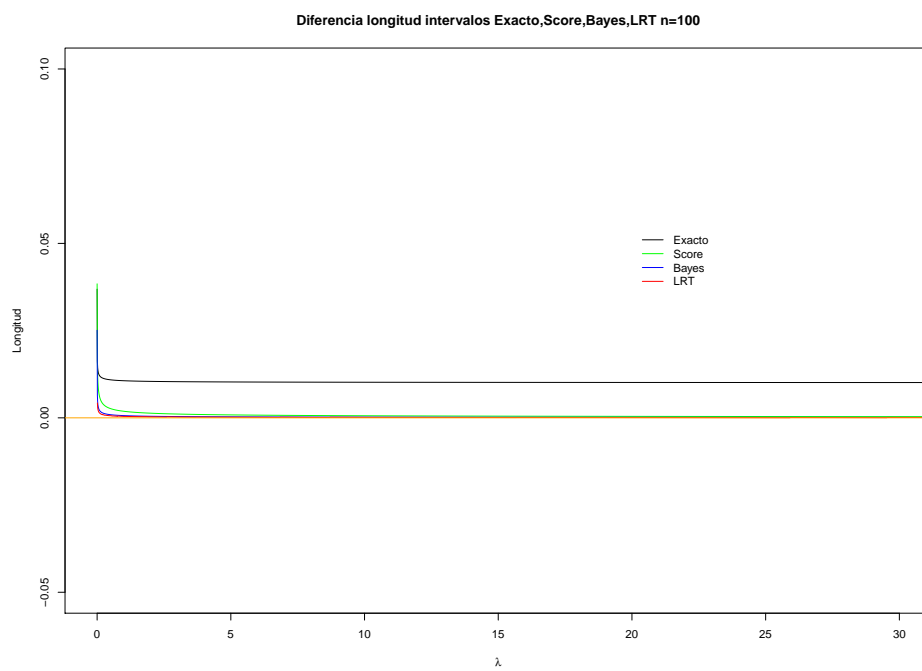


Figura 44: Diferencia de longitud de los intervalos de confianza de los diferentes métodos para λ entre 0 y 30, $n=100$ y $\alpha=0.05$

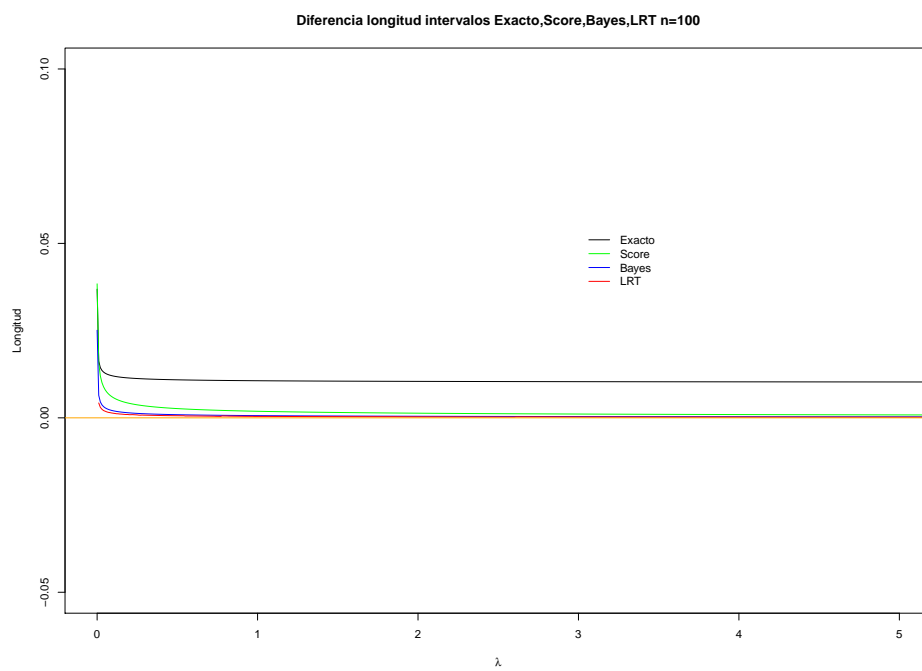


Figura 45: Diferencia de longitud de los intervalos de confianza de los diferentes métodos para λ entre 0 y 5, $n=100$ y $\alpha=0.05$

9. Apendice 3

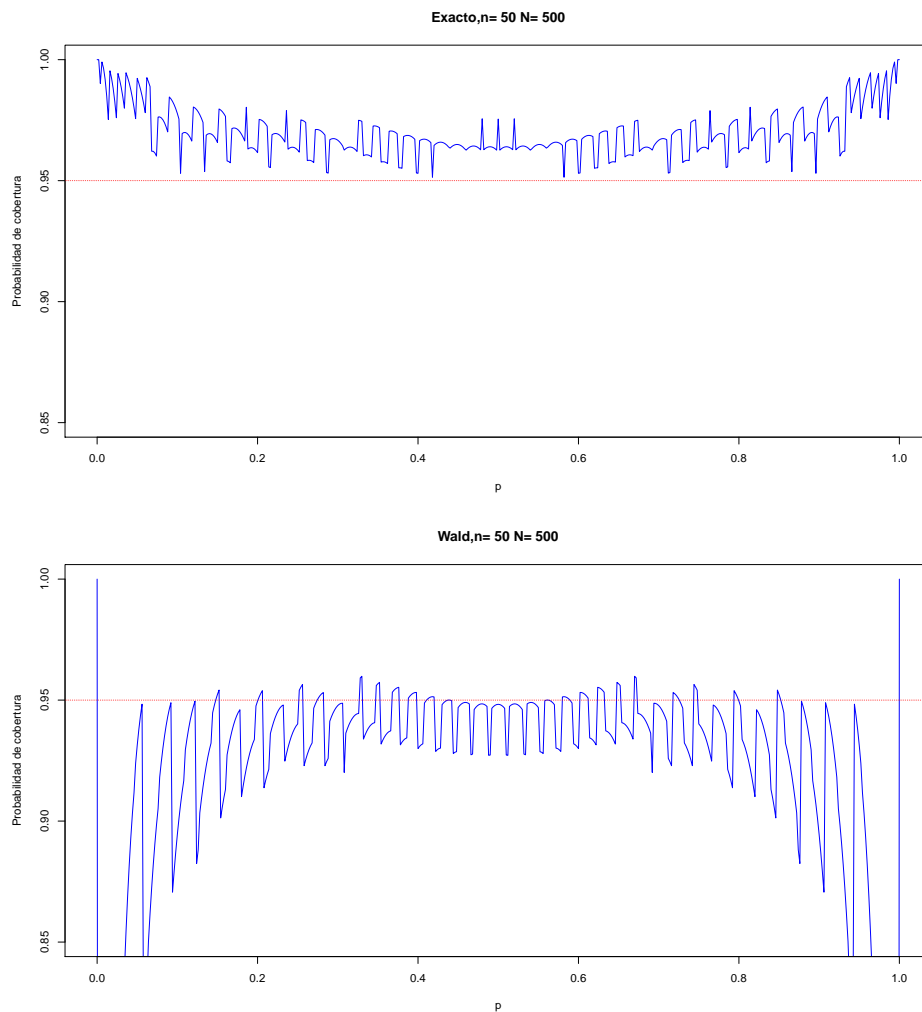


Figura 46: Probabilidad de cobertura de los métodos Exacto y Wald para $N=500$ y $n=50$

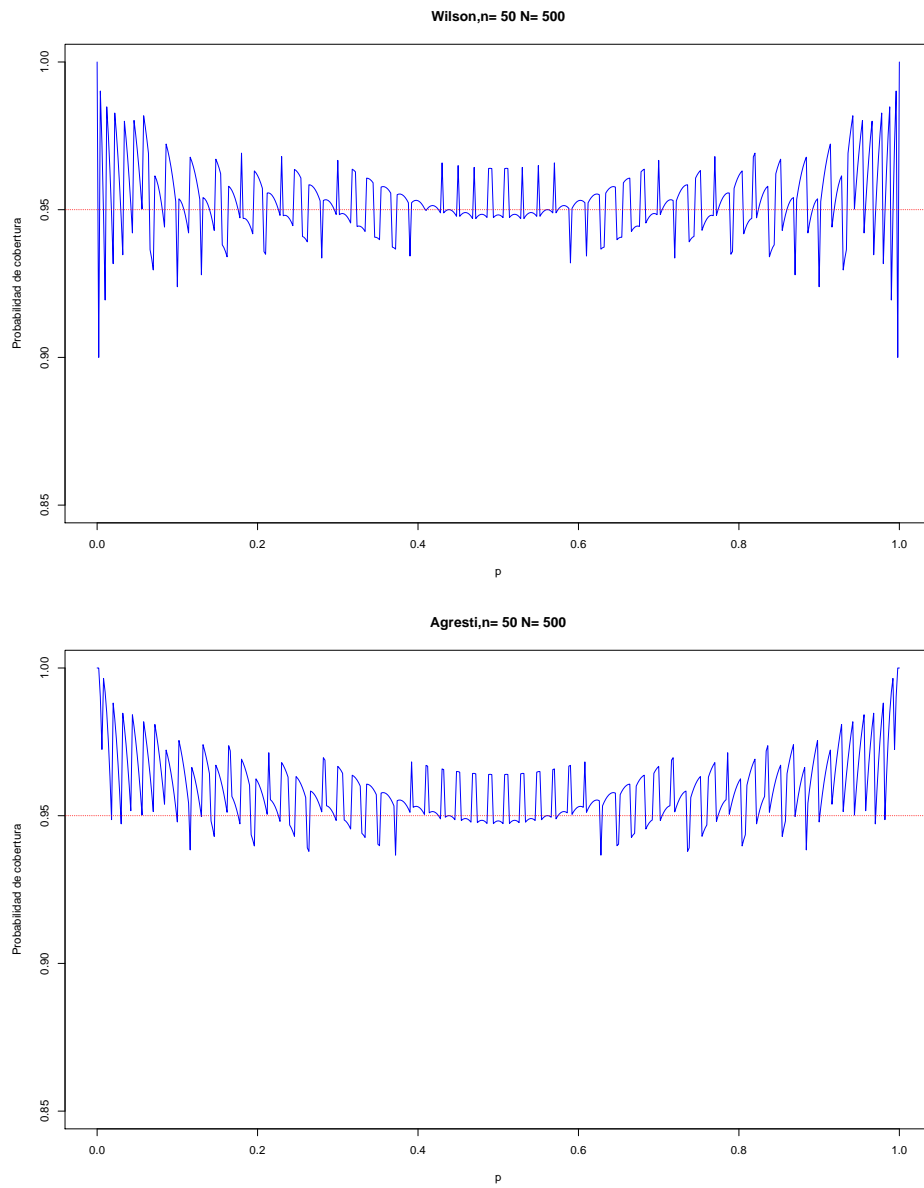


Figura 47: Probabilidad de cobertura de los métodos Wilson y Agresti para $N=500$ y $n=50$

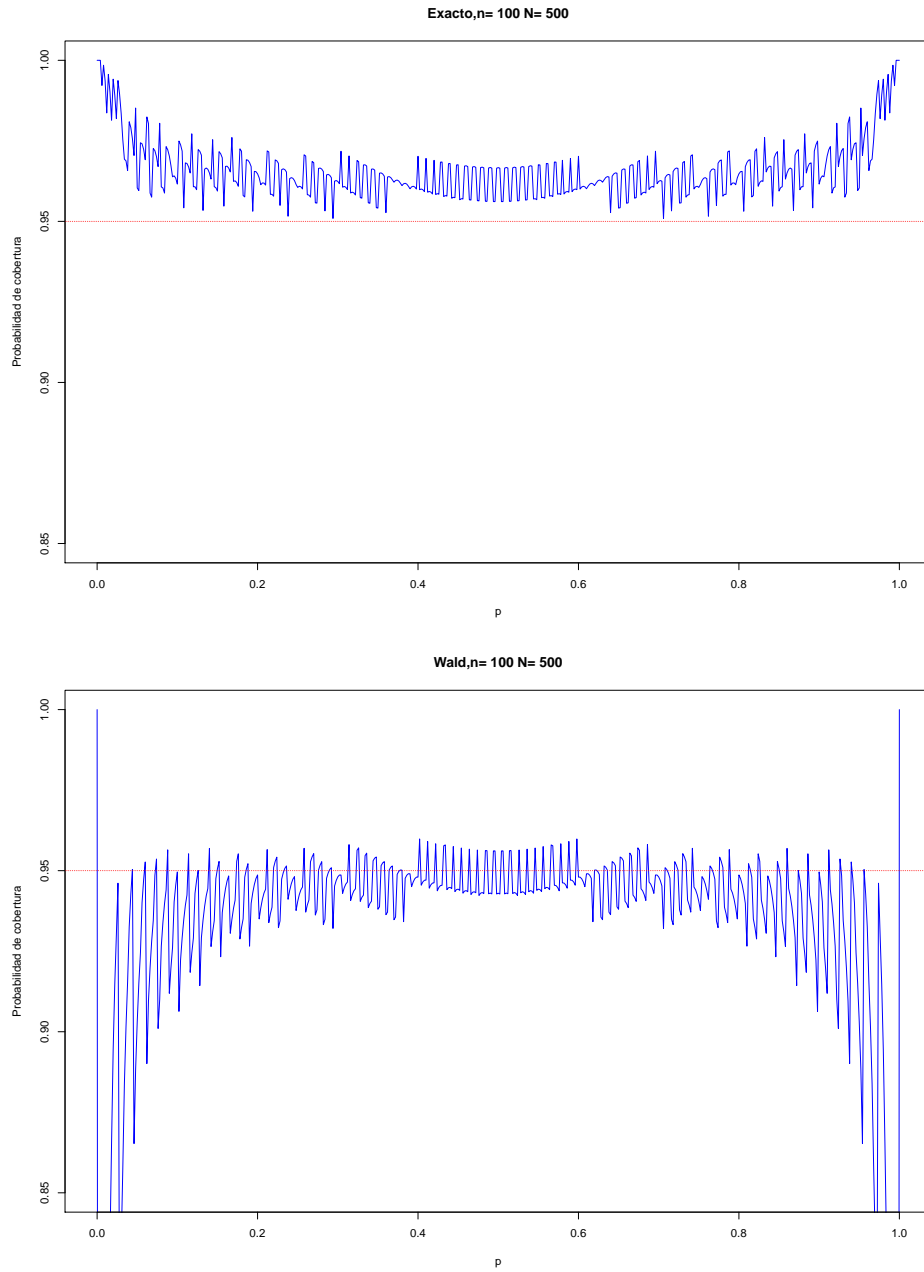


Figura 48: Probabilidad de cobertura de los métodos Exacto y Wald para $N=500$ y $n=100$

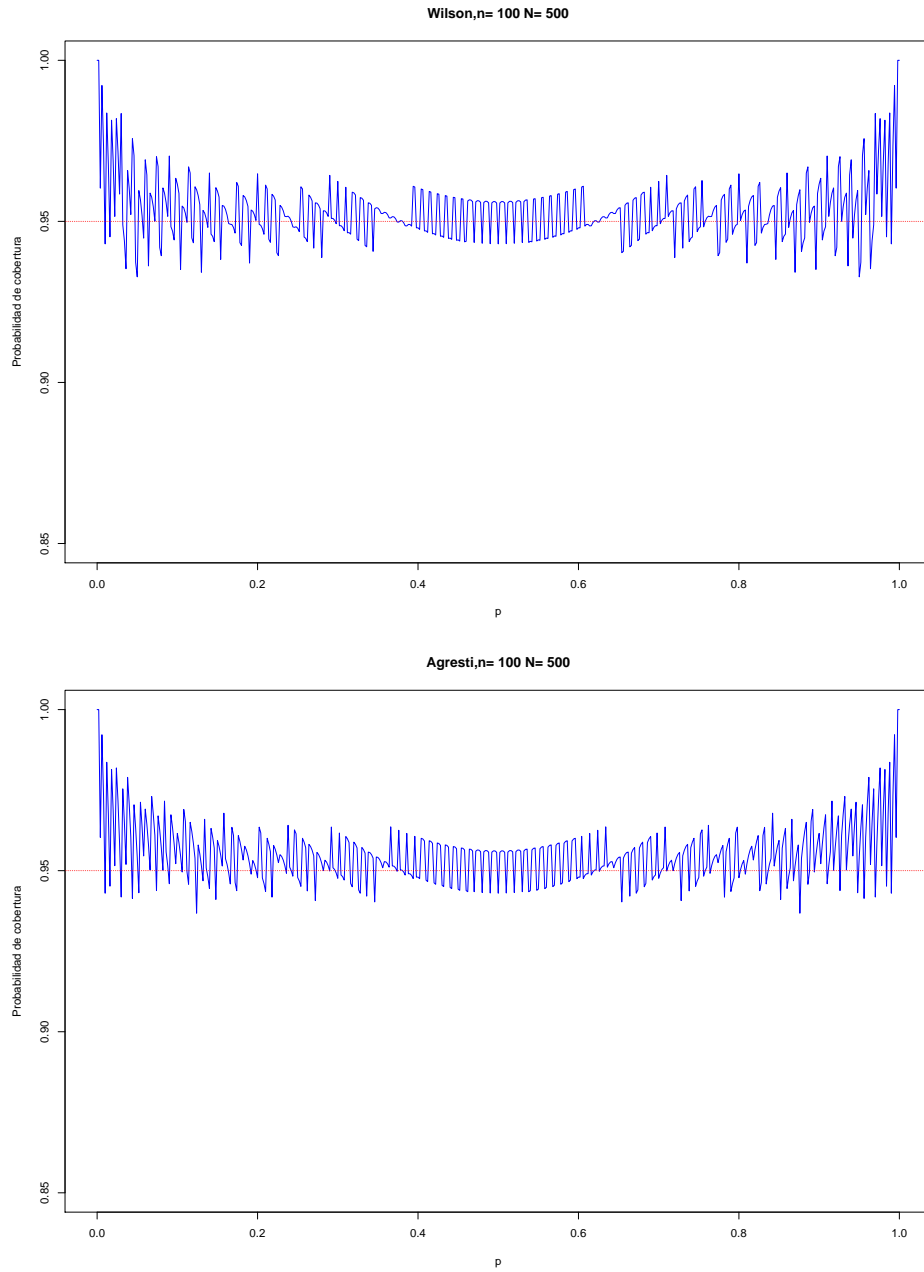


Figura 49: Probabilidad de cobertura de los métodos Wilson y Agresti para $N=500$ y $n=100$

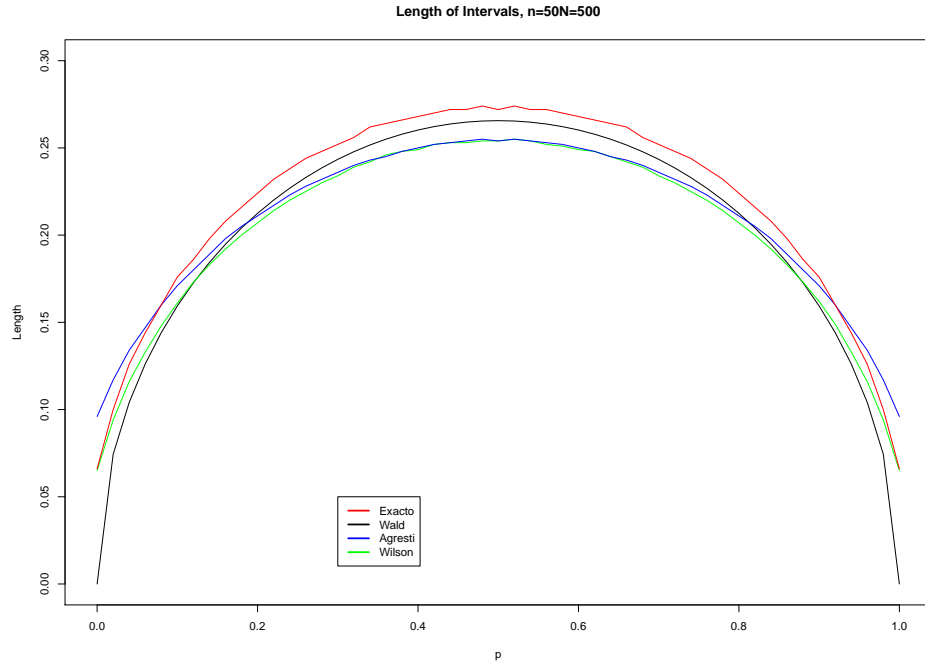


Figura 50: Longitud de los intervalos de confianza de los diferentes métodos para $N=500$ y $n=50$

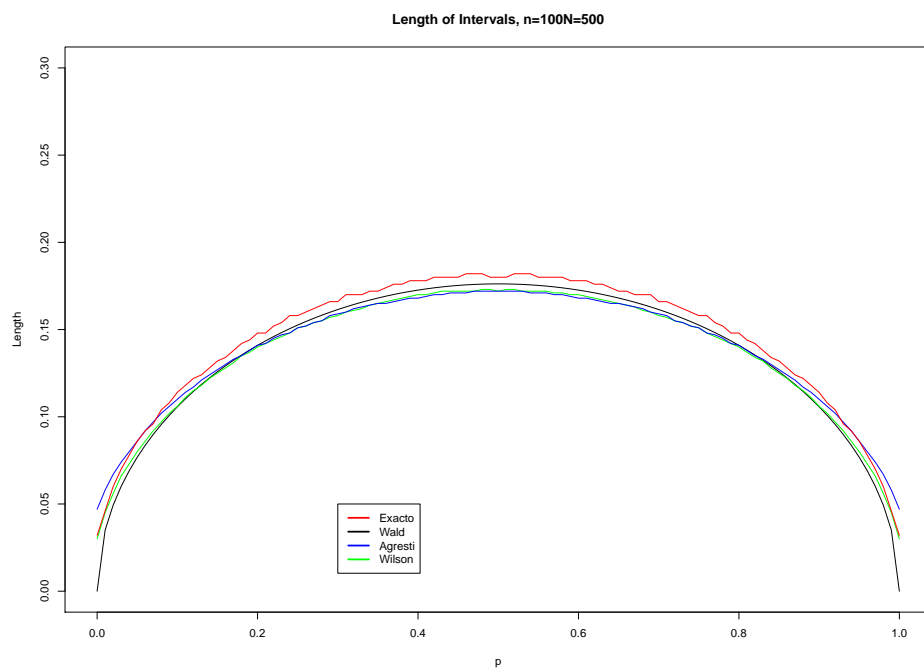


Figura 51: Longitud de los intervalos de confianza de los diferentes métodos para $N=500$ y $n=100$

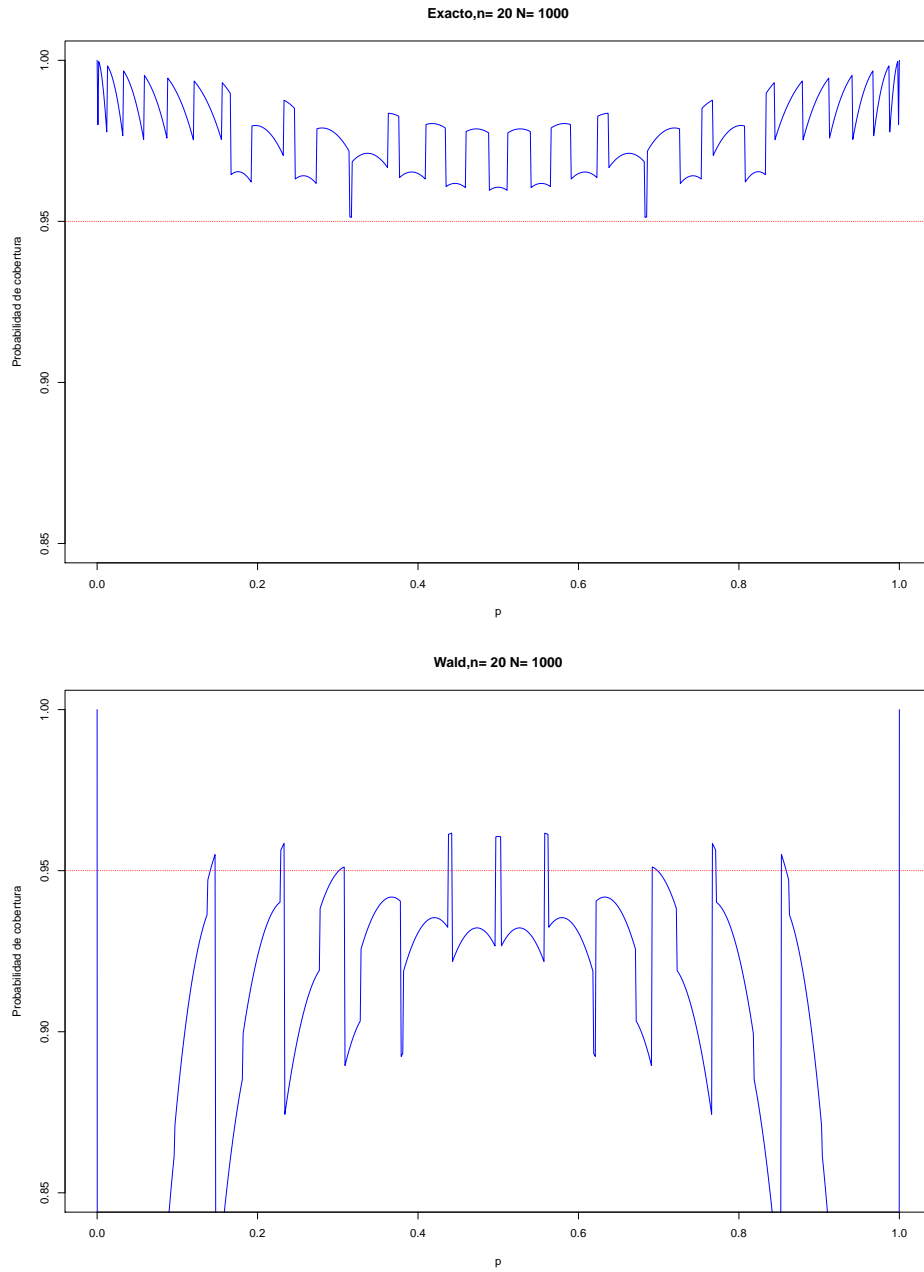


Figura 52: Probabilidad de cobertura de los métodos Exacto y Wald para $N=1000$ y $n=20$

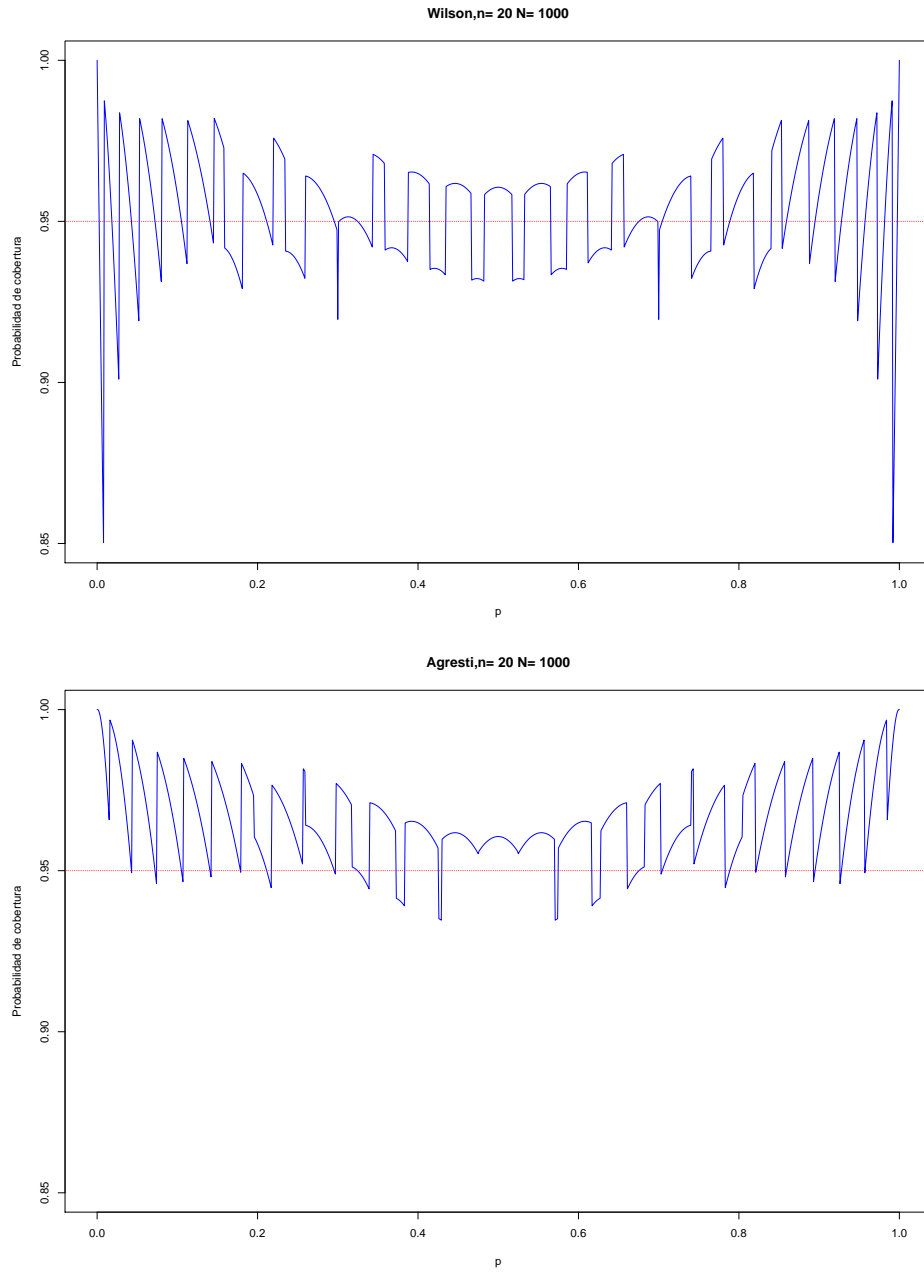


Figura 53: Probabilidad de cobertura de los métodos Wilson y Agresti para $N=1000$ y $n=20$

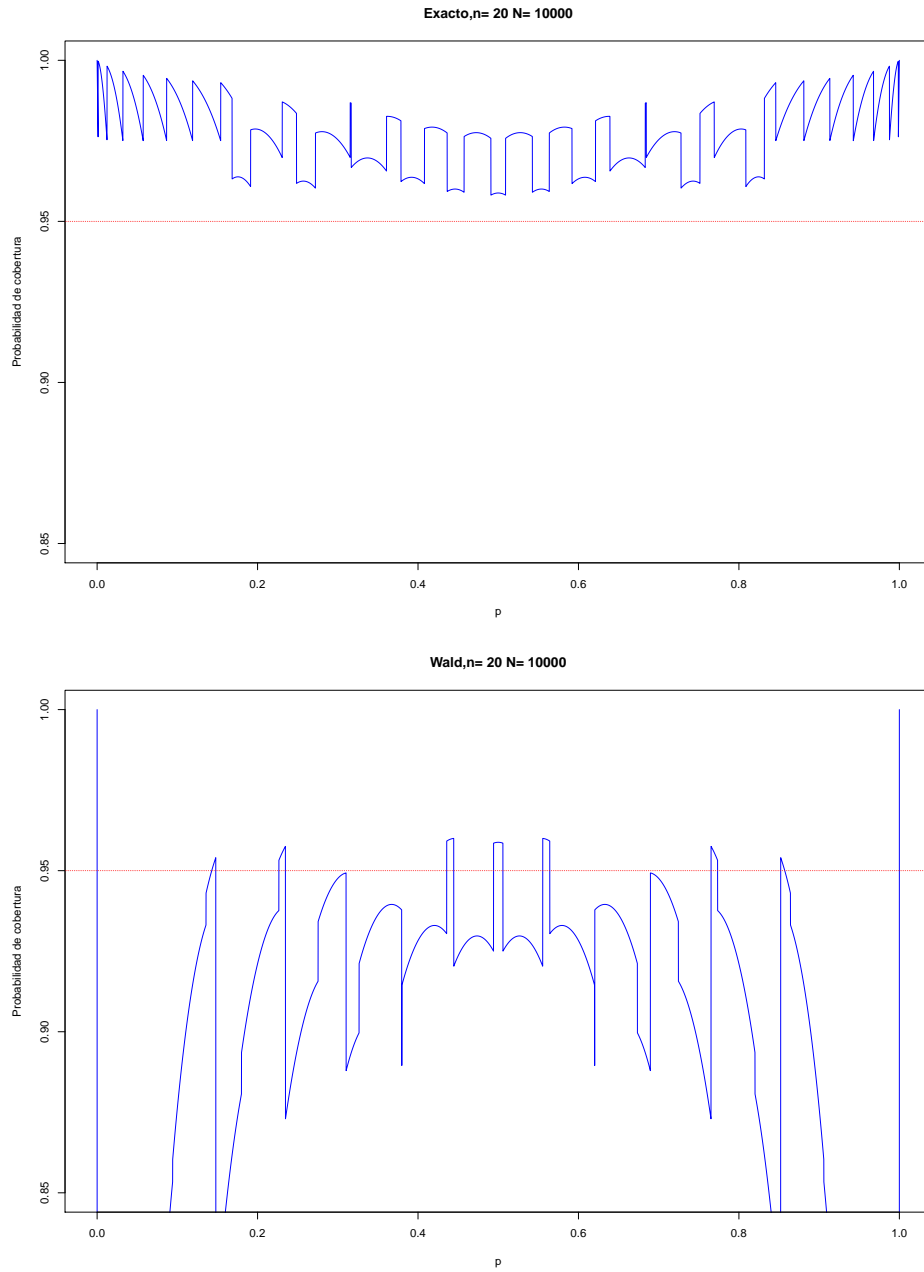


Figura 54: Probabilidad de cobertura de los métodos Exacto y Wald para $N=10000$ y $n=20$

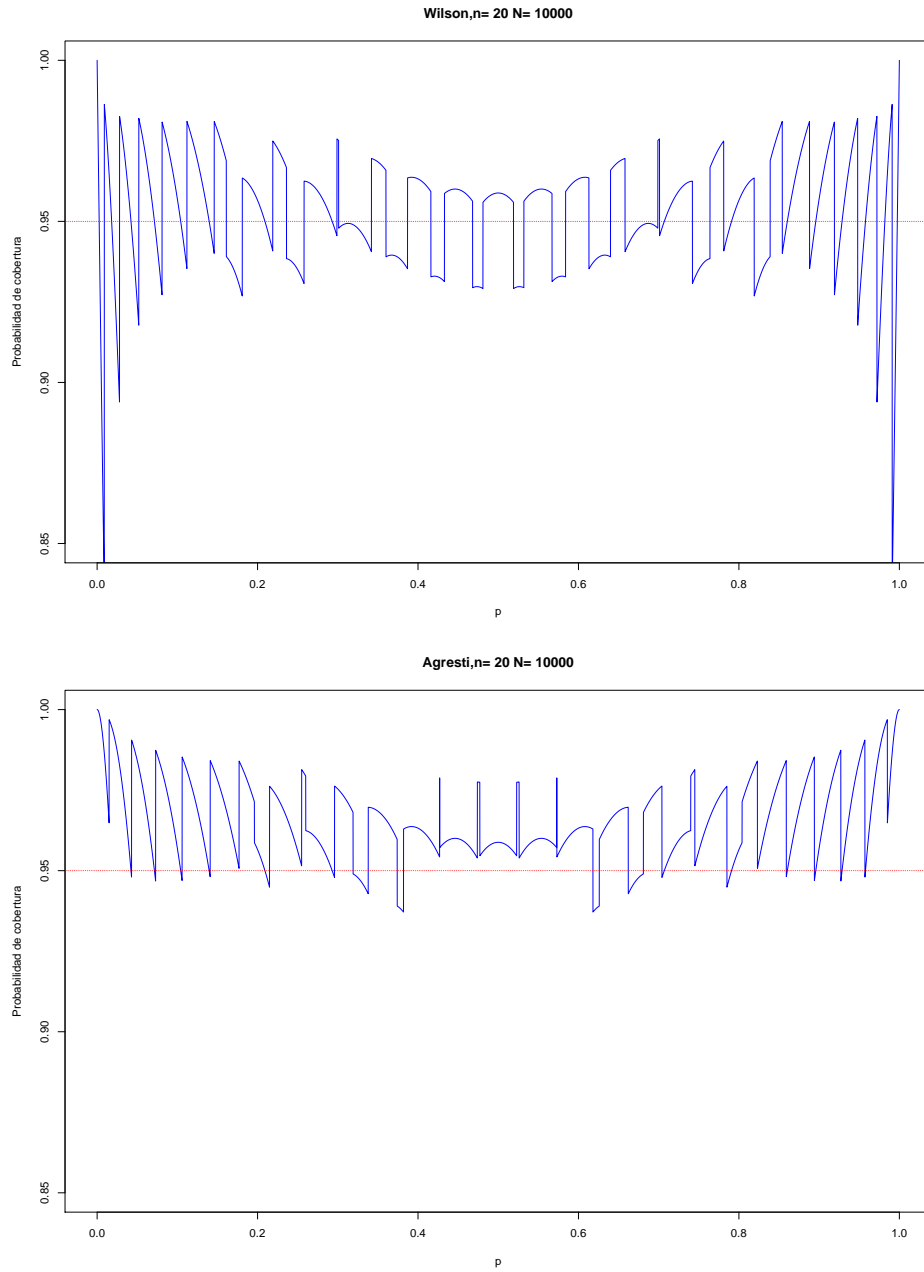


Figura 55: Probabilidad de cobertura de los métodos Wilson y Agresti para $N=10000$ y $n=20$

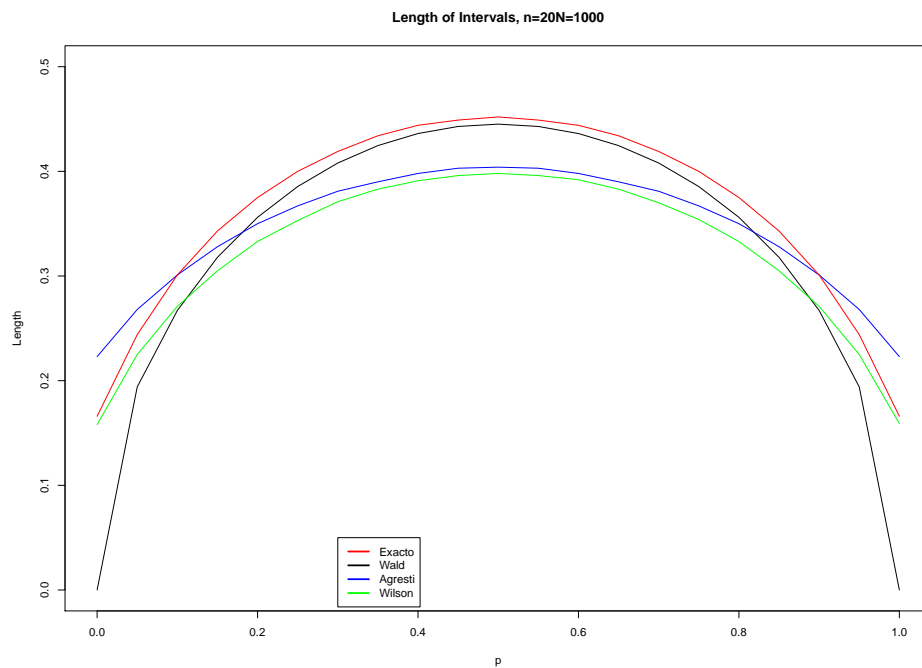


Figura 56: Longitud de los intervalos de confianza de los diferentes métodos para $N=1000$ y $n=20$

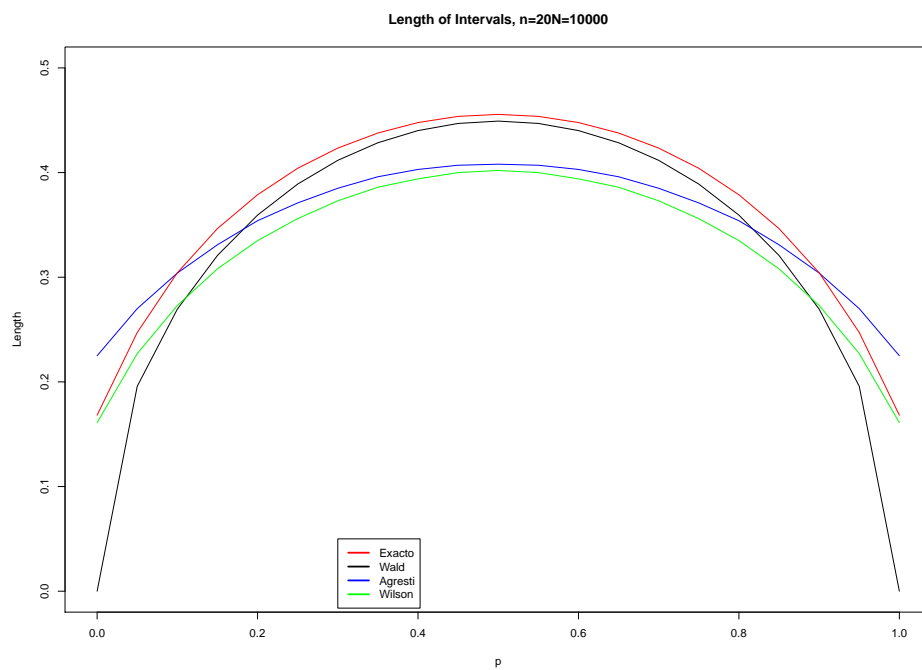


Figura 57: Longitud de los intervalos de confianza de los diferentes métodos para $N=10000$ y $n=20$

10. Apéndice 4

Ejemplo de una simulación partiendo de un vector de 1000000 de valores generados con la función rbinom para una $p=0.45$. De este vector, que consideramos la población, seleccionamos una muestra de 20 unidades y lo repetimos 1000 veces. En la figura 58 vemos los valores obtenidos (suma de los 20 valores/20) de \hat{p} frente a sus frecuencias

De estos 1000 valores de \hat{p} calculamos los cuantiles de 0.025 y 0.975 (obtenemos 0.25 y 0.65), la diferencia nos da el valor de la longitud del intervalo de confianza obtenido (0.40), con este método, para un valor de $p=0.45$. Calculamos el número de valores de \hat{p} que tenemos entre 0.25 y 0.65, lo dividimos por 1000 y obtenemos la cobertura del método para una $p=0.45$ (0.964)

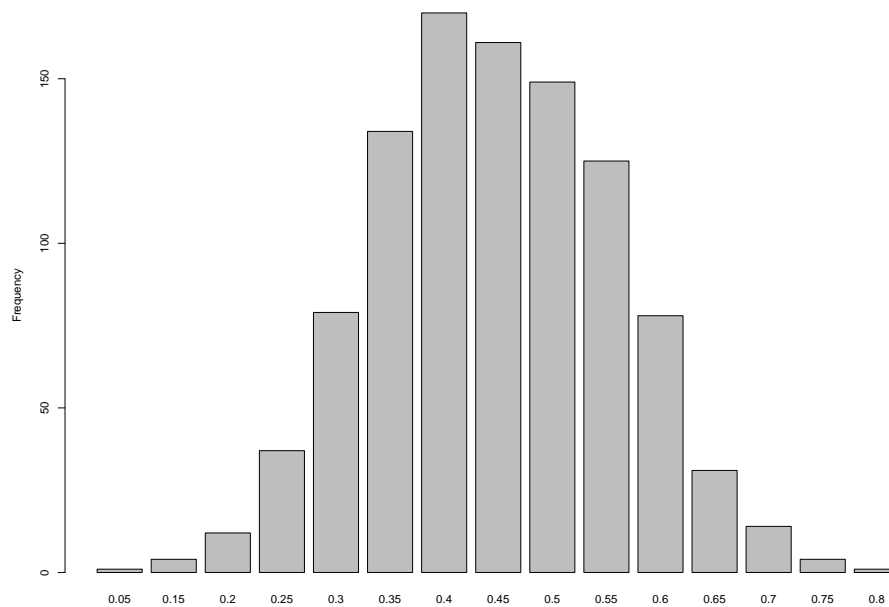


Figura 58: Valores de \hat{p} obtenidos con una simulación de 1000 muestras de tamaño 20 para una $p=0.45$