UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE CATALUNYA

Value at Risk (VaR)

Anna González Pons
NIU:1273771
Tutora: Alejandra Cabaña
Grado de Estadística Aplicada

Índice

1. INTRODUCCIÓN

La decisión de realizar este trabajo surgió después de mi paso por el Banc Sabadell donde realicé mis prácticas. Al estar en continuo contacto con diferentes tipos de riesgos financieros decidí indagar uno en concreto, el VaR.

La palabra riesgo proviene del latín “risicare” que significa “atreverse”. En finanzas, el concepto de riesgo está relacionado con la posibilidad de que ocurra un evento que se traduzca en pérdidas para los participantes en los mercados financieros, como pueden ser inversionistas, deudores o entidades financieras. El riesgo es producto de la incertidumbre que existe sobre el valor de los activos financieros, ante movimientos adversos de los factores que determinan su precio; a mayor incertidumbre mayor riesgo.

Las medidas más comunes a la hora de hablar de riego financiero son: la volatilidad, el valor en riesgo (VaR) y el déficit previsto (ES).

En este trabajo nos centraremos en el VALUE AT RISK (VaR), es el riesgo que a menudo ofrece el mejor equilibrio. También hacemos un pequeño apunte del déficit previsto (ES), sus siglas responden a las palabras en inglés “expected shortfall”.

La herramienta VaR tiene una amplia aplicación en el mundo de las finanzas, se puede calcular la pérdida máxima tanto para un solo activo financiero como para una cartera de activos financieros. Tras el estallido de la crisis en 2008, cobra especial importancia esta métrica de riesgos, sobre todo en las salas de tesorería de los bancos. La creciente exigencia de capital (Basilea III[1]) hacia el sector bancario y en consecuencia un mayor control de riesgos, hacen que los departamentos de riesgos asignen (menores cantidades de consumo de VaR), un VaR diario, semanal y mensual a las diferentes mesas de tipo de interés, bonos, trading, volatilidad u otros instrumentos negociables en los mercados.

[1]Los Acuerdos de Basilea III (Basilea III) se refieren a un conjunto de propuestas de reforma de la regulación bancaria, publicadas a partir del 16 de diciembre de 2010. Basilea III es parte de una serie de iniciativas, promovidas por el Foro de Estabilidad Financiera (FSB, Financial Stability Board por sus siglas en inglés) y el G-20, para fortalecer el sistema financiero tras la crisis de las hipotecas subprime, que es una crisis financiera causada por desconfianza crediticia.

2. VALUE AT RISK

El VaR nació en EEUU en la década de los 80, siendo utilizado por importantes bancos en el manejo de derivados financieros. Sus siglas responden a las palabras en inglés “value at risk”.

En matemáticas financieras y gestión del riesgo financiero, el valor en riesgo (VaR) es una medida de riesgo ampliamente utilizada del riesgo de mercado [2] en una cartera de inversiones[3] de activos financieros. Se trata de una distribución independiente y es una medida de las pérdidas como resultado de movimientos “típicos” del mercado.

El VaR es una medida para cuantificar el riesgo y se puede definir como el valor máximo probable de pérdida en una cartera, el VaR es un cuantil de la distribución de pérdidas y ganancias (P/L, sus siglas responden a las palabras en inglés “Profit/Loss), para el periodo de tiempo y el nivel de confianza escogidos.

Podemos escribir como $VaR(p)$ o $VaR^{100 \cdot p\%}$ Indicamos las pérdidas y ganancias (P/L) en una cartera de inversiones con la variable aleatoria Q con una realización particular indicada por q. Si tenemos una unidad de un activo, P/L estaría indicado como:

$$Q = P_t - P_{t-1}$$

donde P_t es el precio en el tiempo t.

En términos más generales, si el valor de la cartera es ϑ:

$$Q = \vartheta \cdot Y$$

donde Y hace referencia a un activo.

Es decir, la relación P/L es el valor de la cartera multiplicado por los beneficios (desde ahora en adelante *returns*). La densidad de P/L se denota por $f_q(\cdot)$. Entonces, el VaR viene dado por:

$$\Pr[Q \leq -\mathrm{VaR}(p)] = \mathrm{p}$$

ó

$$p = \int_{-\infty}^{-VaR(p)} f_q(x) dx$$

[2] Este riesgo es consecuencia de la probabilidad de variación del precio o tasa de mercado en sentido adverso para la posición que tiene la empresa

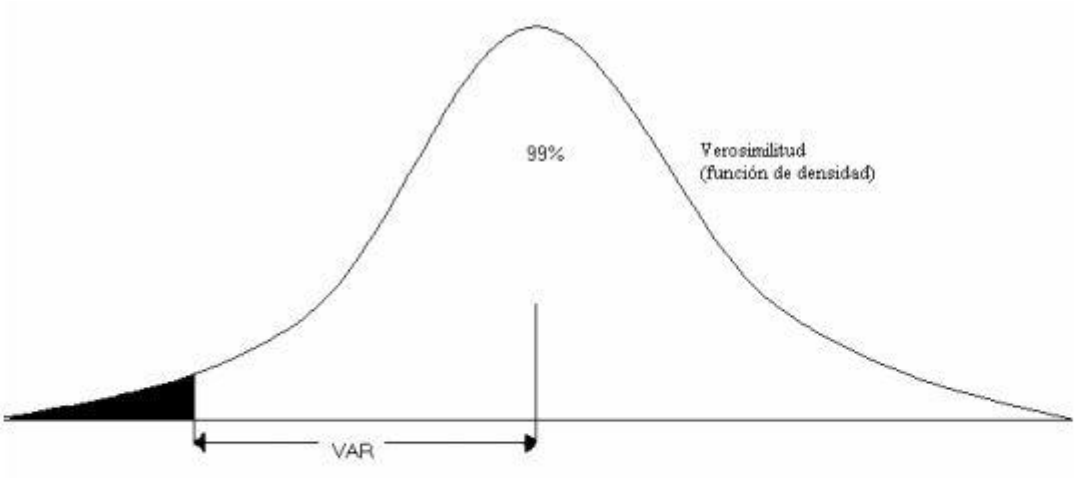
[3] La cartera de inversiones o portafolio de inversiones, es el conjunto de activos financieros en los cuales se invierte.

Usamos el signo negativo porque VaR es un número positivo y estamos tratando con pérdidas, es decir, la probabilidad de pérdidas es mayor (más negativa) que VaR negativo.

Un ejemplo práctico seria:

Una entidad bancaria podría considerar que el VAR diario de una cartera operativa es de 50 millones de euros con un nivel de confianza del 90%. Esto quiere decir que solamente hay 10 posibilidades entre 100, en condiciones normales del mercado, de que tenga una pérdida superior a los 40 millones de euros. Fijando un nivel de confianza p como por ejemplo del 99% y un horizonte temporal de 2 semanas el VaR de una cartera dada es la pérdida en el valor de mercado que es excedido con probabilidad $1 - p$. Es decir, si $p = 0.99$, entonces, con probabilidad del 99%, la pérdida excede el VaR con el 1% de probabilidad. Conviene observar que el VaR no es la diferencia entre el Valor esperado y el Valor p-crítico de las pérdidas, sino más bien es el cuantil.

Podemos representar gráficamente el Value at Risk de la siguiente manera:



VaR se puede presentar alternativamente como un número negativo o positivo, equivalentemente, las probabilidades se pueden indicar lo más cercano a 1 o lo más cercano a 0, como por ejemplo $VaR(0.95)$ o $VaR(0.05)$. Esto no implica ninguna contradicción, es simplemente como se trata el VaR en el mundo real.

El Valor en Riesgo representa las pérdidas potenciales, pero en el habla informal tanto las ganancias y las pérdidas se pueden denominar como números positivos, esta convención puede ser confuso en algunos lugares.

2.1 CÁLCULO DEL VaR

Hay tres pasos esenciales a la hora del calcular el Valor en Riesgo:

1. La probabilidad de pérdidas superiores al VaR, p, se debe especificar con el nivel de probabilidad más común que es el 1%. La teoría proporciona poca orientación sobre la elección de p, se determina principalmente por la forma en la que el usuario del sistema de gestión de riesgos desea interpretar el número VaR. ¿Es una "gran" pérdida la que se produce con una probabilidad de 1% o 5% o incluso 0,1%? Los VaR de 1% y 5% son muy comunes en la práctica, pero los números extremos más elevados (por ejemplo: 10%) se utilizan a menudo en la gestión del riesgo y los números extremos más bajos (por ejemplo: 0,1%) se utilizan a menudo para aplicaciones como el capital económico, el análisis de supervivencia o el análisis de riesgos a largo plazo para los fondos de pensiones.
2. El segundo paso es elegir el *holding periode*, es decir, el período de tiempo durante el cual pueden ocurrir las pérdidas. Este período es por lo general 1 día, pero puede ser más o menos dependiendo de las circunstancias particulares. Aquellos que negocian activamente sus carteras pueden usar como período 1 día, pero para los inversores institucionales y las sociedades no financieras es más realista emplear períodos más largos.
3. El tercero y último paso es la identificación de la distribución de la probabilidad de la Ganancia y la Pérdida de la cartera. Este es el aspecto más difícil e importante de los modelos de riesgo. La práctica habitual consiste en estimar la distribución mediante el uso de las observaciones del pasado y un modelo estadístico.

En la interpretación y la comparación de los números de VaR, es crucial tener en cuenta la probabilidad y período de mantenimiento, ya que, sin ellos, los números de VaR no tienen sentido porque la distribución de Q depende del *holding period.* Por ejemplo una cartera idéntica podría producir dos estimaciones diferentes de VaR si los gestores de riesgo eligen diferentes valores de p y *holding periode*. Obviamente, la pérdida sufrida con una probabilidad de solo el 1% excede a la pérdida sufrida con una probabilidad del 5%.

Que el valor en riesgo de cartera de posiciones de una empresa sea una medida relevante del riesgo de dificultades financieras durante un corto período de tiempo depende de la liquidez de las posiciones de la cartera y el riesgo de salidas de efectivo extremas. Las condiciones de liquidez adversas conducen a la alta transacción de costes, tales como los diferenciales de ancho y grandes demandas de cobertura. La captura de estos efectos es poco probable con el VaR.

En la gestión de riesgos, el VaR es un importante paso adelante con respecto a las medidas tradicionales basadas en la sensibilidad a las variables del mercado (por ejemplo, los "*greeks*[4]"). VaR es un concepto universal y se puede aplicar a la mayoría de instrumentos financieros. En él se resume en un solo número todos los riesgos de una cartera incluyendo el riesgo de tasa de interés, el riesgo de divisas, y así sucesivamente

2.2 APLICACIÓN DEL VaR

Artzner et al. (1999) estudiaron las propiedades que debe tener una medida del riesgo para ser considerada como una medida del riesgo razonable y útil. Se identifican cuatro axiomas de medidas de riesgo ideales. La medida de riesgo que satisface estos cuatro axiomas se denomina *coherente*.

La medida de riesgo *coherente* se define como:

Consideramos dos variables aleatorias de valores reales X y Y. La función $\varphi(\cdot): X, Y \rightarrow \mathbb{R}$ se define como una medida de riesgo *coherente* si satisface para X, Y y la constante c.

a) Monotonía

$$X, Y \in V, \quad X \leq Y \quad \rightarrow \quad \varphi(X) \geq \varphi(Y).$$

Si el portafolio X nunca excede los valores de la cartera de Y (es decir, siempre es más negativo, por lo tanto, sus pérdidas serán iguales o más grandes), el riesgo de Y nunca debe superar el riesgo de X.

b) Subaditividad[5]

$$X, Y, X+Y \in V \quad \rightarrow \quad \varphi(X+Y) \leq \varphi(X) + \varphi(Y).$$

[4] Derivadas respecto de distintos parámetros de las Ganancias. Se emplean para medir la sensibilidad de las opciones para los factores de riesgo subyacentes.

[5] La función de costos es subaditiva si la producción de uno o más bienes o servicios es menos costosa en una empresa que si la producción se reparte entre más de una empresa, cualquiera sea la forma en la que se realice el reparto entre ellas.

El riesgo de las carteras de X e Y no puede ser peor que la suma de los dos riesgos individuales (una manifestación del principio de diversificación[6]).

c) Homogeneidad Positiva

$$X \in V, c > 0 \quad \rightarrow \quad \varphi(cX) \leq \ c\varphi(X).$$

d) Invarianza bajo translaciones

$$X \in V, c > R \quad \rightarrow \quad \varphi(X + c) \leq \varphi(X) - c.$$

Añadir c en la cartera es como añadir dinero en efectivo, el cual actúa como un seguro, por lo que el riesgo de $X + c$ es menor que el riesgo de X descontando c.

La medida de riesgo se denota por $\varphi(\cdot)$, que podría ser la volatilidad, VaR, o alguna otra cosa.

Hay tres cuestiones principales que se plantean en la aplicación del VaR:

1. El VaR es solamente un cuantil de la distribución P/L (Pérdidas/Ganancias).
2. VaR no es una medida de riesgo coherente.
3. El VaR es fácil de manipular.

El VaR es la pérdida potencial mínima que una cartera puede sufrir en un resultado adverso. VaR da la " el mejor de los peores escenarios" y, como tal, se subestima, inevitablemente, las pérdidas potenciales asociados con un nivel de probabilidad.

1. Por ejemplo, el VaR diario con un nivel de confianza del 5% significa que se espera que durante 95 días de cada 100 los movimientos de precios de los activos sean menor que el valor en riesgo y para los 5 días de cada 100 se espera que exceda el VaR. Como consecuencia de ello, el 5% VaR es incapaz de capturar el riesgo de movimientos extremos que tienen una probabilidad de menos del 5%.
2. VaR no es una medida de riesgo coherente, ya que no siempre satisface el axioma de subaditividad (ejemplo 2.2). VaR es, sin embargo, subaditiva bajo la distribución normal donde VaR es proporcional a la volatilidad, que es subaditiva (ejemplo 2.1)

[6] La diversificación supone reducir el riesgo invirtiendo en una variedad de activos.

Ejemplo 2.1 (volatilidad subaditiva)

Recordamos como se calcula la varianza de una cartera cuando tenemos dos activos, X y Y, con volatilidades σ_X y σ_Y, respectivamente, coeficiente de correlación ρ y pesos de la cartera w_X y w_Y:

$$\sigma_{cartera}^2 = w_X^2\sigma_X^2 + w_Y^2\sigma_Y^2 + 2w_X w_Y \rho \sigma_X \sigma_Y.$$

Reescribiendo, obtenemos

$$\sigma_{cartera}^2 = (w_X\sigma_X + w_Y w_Y)^2 - 2w_X w_Y \sigma_X \sigma_Y + 2w_X w_Y \sigma_{\rho X}\sigma_{\rho Y}$$

$$= (w_X\sigma_X + w_Y w_Y)^2 - 2w_X w_Y(1-\rho)\sigma_X\sigma_Y$$

donde el último término es positivo. La volatilidad es por lo tanto positiva porque:

$$\sigma_{cartera} \leq w_X\sigma_X + w_Y\sigma_Y$$

Ejemplo 2.2

Consideramos un activo X para el cual con probabilidad 4,9% hay un retorno de - 100 y el 95,1% de un retorno de cero. En este caso $VaR^{5\%} = 0$ y $VaR^{1\%} = 100$.

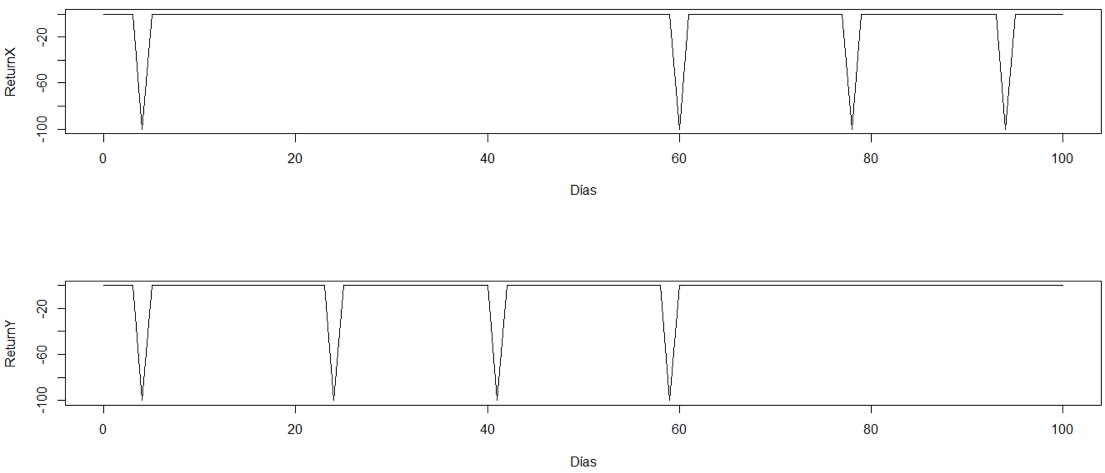


Figura 1. Dos *returns* de activos independientes a 100 días (Anexo 1.1)

Supongamos que tenemos una cartera de bienes X e Y con igual cantidad de valores en cada una, donde ambas tienen la misma distribución y son independientes entre sí. En este caso, el valor en riesgo del 5% de la cartera es de aproximadamente 50. Por tanto, tenemos el resultado:

$$VaR^{5\%}(0.5X + 0.5Y) \approx 50 > \ VaR^{5\%}(X) + VaR^{5\%}(Y) = 0 + 0.$$

En este ejemplo, la cartera parece tener más riesgo que si todos los fondos se invirtiesen en un solo activo debido a que la probabilidad de una pérdida es ligeramente inferior a la probabilidad de VaR de un activo (4,9 % frente a 5 %), pero cuando tenemos dos activos la probabilidad de pérdida de dinero de un activo es mayor que la probabilidad VaR:

$$\Pr(almenos\ un\ activo\ pierde\ dinero) = 1 - (0.951 * 0.951) \approx 0.096$$

Sin Embargo en 2010 *Gemzell-Danielsson K* estudió la subaditividad del VaR y encontró que si el índice de la cola es mayor que 2, es decir, si la distribución tiene varianza finita, entonces sí es subaditiva y esto ocurre para la mayoría de las acciones, tasas de cambios y materias primas.

3. Una debilidad importante de VaR es la facilidad con la que se puede manipular. Debido a que es sólo un cuantil de la distribución de pérdidas y ganancias, a las instituciones financieras a menudo les resulta fácil "mover" el cuantil. (ejemplo 2.3)

Ejemplo 2.3

Supongamos que el valor en riesgo antes de cualquier manipulación es VaR_0 y que un banco realmente desearía que VaR fuera VaR_1 donde $0 > VaR_1 > VaR_0$. Una forma de lograr esto es suscribir una opción de venta con un precio de ejercicio por debajo VaR_0 y comprar uno con un precio de ejercicio por encima de VaR_1. El efecto de esta será la de reducir la ganancia esperada y aumentar el riesgo a la baja.

3. IMPLEMENTACIÓN DE LAS PREVISIONES DEL RIESGO

La discusión Teórica del VaR que hemos planteado hasta ahora se basa en la suposición de que la distribución de pérdidas y ganancias (P/L) era conocida. Sin embargo, en la práctica, es necesario estimar la distribución P / L usando observaciones históricas de los *returns* de los activos de interés, donde los diferentes supuestos inevitablemente conducen a diferentes pronósticos de riesgo.

Hay dos métodos principales para la predicción del VaR:

- No paramétrico
- Paramétrico

En algunos casos especiales puede ser que veamos una combinación de los dos métodos.

El método no paramétrico generalmente se refiere a la Simulación Histórica, que utiliza la distribución empírica de los datos para calcular las previsiones de riesgo.

Por lo contrario, los métodos paramétricos se basan en la estimación de la distribución subyacente de los *returns* y luego en obtener las previsiones de riesgo de la distribución estimada. Para la mayoría de las aplicaciones, el primer paso en el proceso es la estimación de la matriz de covarianza.

3.1 MÉTODO NO PARAMÉTRICO

La simulación histórica es un método simple para la predicción del riesgo y se basa en la suposición de que la historia se repite, donde se espera que uno de los *returns* pasados observados pueda ser el próximo *return*.

Cada observación histórica tiene el mismo peso en la previsión de simulación histórica. Esto puede ser una desventaja, sobre todo cuando hay un cambio estructural en la volatilidad. Sin embargo, en ausencia de cambios estructurales, la simulación histórica tiende a obtener mejores resultados que los métodos alternativos. Es menos sensible a valores atípicos y no incorpora error de estimación en la misma manera que los métodos paramétricos. Las ventajas de la simulación histórica se vuelven especialmente claras cuando se trabaja con las carteras, ya que capta directamente la dependencia no lineal, cosa que otros métodos no pueden.

3.1.1 Simulación Histórica Univariante

El VAR por simulación histórica es una de las formas del cálculo del VaR, siempre un poco más laboriosa que el VaR paramétrico y menos precisa que el VaR por simulación de Monte Carlo. Se trata de aplicar a la cartera de activos financieros, variaciones históricas del precio de los títulos para generar escenarios contrastables con la posición inicial (conocida como spot en inglés), generando diferentes posibles resultados simulados a partir de los cuales se obtendrá el VAR.

El VaR a la probabilidad p es simplemente el valor negativo $(T * p)$ en el vector de *return* ordenado multiplicado por el valor monetario de la cartera.

Con los datos del 1 de Enero del 2006 hasta el 31 de Diciembre del 2015 de los precios de las acciones de Mircrosoft y IBM calculamos la herramienta estadística R el VaR y obtenemos un VaR de 55,88€, es decir, como máximo obtendremos una pérdida de 55,88€ para esta cartera. El código de R lo encontraremos en el Anexo (Apartado 2.1).

3.1.2 Simulación Histórica Multivariante

La simulación histórica es una poco más complicada en el caso de muchos activos. En primer lugar, se forma una cartera de *returns* históricos usando ponderaciones de la cartera actual: (3.1)

$$y_{cartera} = \sum_{k=1}^{K} w_k y_k$$

donde k es el número de activos en la cartera, $y_k = \{y_{t,k}\}_{t=1}^{T}$ es la matriz de *returns* del activo k, w_k es el peso del activo k y $y_{cartera}$ es el vector de *returns* de la cartera.

Es mejor utilizar el algebra matricial. Sea Y la matriz $T \times K$ de *returns* históricos y W la matriz $K \times 1$ de los pesos de la cartera, entonces la ecuación (3.1) se puede escribir como:

$$y_{cartera} = YW$$

Con los datos del 1 de Enero del 2006 hasta el 31 de Diciembre del 2015 de los precios de las acciones de Mircrosoft y IBM calculamos con R el VaR y obtenemos un VaR de 43,67€, es decir, como máximo obtendremos una pérdida de 43,67€ para esta cartera. El código de R lo encontraremos en el Anexo (Apartado 2.2).

3.2 MÉTODO PARAMÉTRICO

En contraste con la simulación histórica del método no paramétrico, el primer paso en los métodos paramétricos es la estimación de la matriz de covarianza. El enfoque principal es la derivación del VaR bajo los supuestos de distribución más comunes: la normalidad y la T-Student.

3.2.1 Derivación del VaR

Partiendo de la definición del VaR:

$$p = \Pr[Q \leq -VaR(p)] = \int_{-\infty}^{-VaR(p)} f_q(x)dx$$

Donde Q son las Pérdidas/Ganancias.

<u>VaR para *returns* simples</u>

Suponemos inicialmente que tenemos una unidad del activo (es decir, el valor de la cartera actual es P_t). Por lo tanto, derivamos el VaR para *returns* simples a partir de la fórmula:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

donde asumimos que la media de los *returns* es 0. La volatilidad está indicada como σ. Vamos a empezar con la definición de VaR:

$$\Pr[Q_1 \leq -VaR(p)] = p$$

A continuación se obtiene a partir del VaR:

$$p = \Pr\big(P_t - P_{t-1} \leq -VaR(p)\big)$$
$$= \Pr\,(P_{t-1} - R_t \leq -VaR(p))$$

$$= \Pr\left(\frac{R_t}{\sigma} \leq -\frac{VaR(p)}{P_{t-1}\sigma}\right).$$

Denotamos la distribución de los *returns* normalizados (R_t/σ) como $F_R(\cdot)$ y la distribución inversa como $F_R^{-1}(p)$. Entonces se deduce que el VaR para la participación de una unidad del activo es:

$$VaR(p) = -\sigma F_R^{-1}(p)P_{t-1}$$

Denotamos el nivel de significación por $\gamma(p) = F_R^{-1}(p)$, por lo tanto la ecuación del VaR se puede escribir como:

$$VaR(p) = -\sigma\gamma(p)P_{t-1}$$

<u>VaR para *returns* continuos</u>

En este caso, si utilizamos *returns* continuos partimos de la fórmula:

$$Y_t = \log P_t - \log P_{t-1}$$

entonces,

$$\begin{aligned} p &= \Pr\big(P_t - P_{t-1} \leq -VaR(p)\big) \\ &= \Pr\left(P_{t-1}(e^{Y_t} - 1) \leq -VaR(p)\right) \\ &= \Pr\left(\frac{Y_t}{\sigma} \leq \log\left(-\frac{VaR(p)}{P_{t-1}} + 1\right)\frac{1}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

ya que $-\frac{VaR(p)}{P_{t-1}} \leq 1$. Denotando la distribución de los *returns* normalizados (Y_t/σ) como $F_y(\cdot)$, tenemos:

$$VaR(p) = -(\exp\big(F_y^{-1}(p)\sigma\big) - 1)P_{t-1}$$

y para $F_y^{-1}(p)\sigma$ pequeños, el VaR para la participación de una unidad del activo es:

$$VaR(p) \approx -\sigma\gamma(p)P_{t-1}$$

Por lo tanto el VaR para *returns* continuos es aproximadamente el mismo que se usa para *returns* simples.

<u>VaR cuando hay más de un activo</u>

Este análisis se puede ampliar fácilmente a un marco multivariante. En el caso de dos activos:

$$\sigma^2_{cartera} = (w_1 \quad w_2)\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{12} & \sigma_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\ w_2\end{pmatrix}$$

ó

$$\sigma^2_{cartera} = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\rho\sigma_1\sigma_2$$

Tenemos en cuenta que $\sigma_{11} = \sigma_1^2$ es la varianza y $\sigma_{12} = \rho\sigma_1\sigma_2$ es la covarianza. En general, si w es una matriz $K \times 1$ de los pesos de la cartera y $\sum$ es la matriz de covarianza $K \times K$, por tanto la varianza de la cartera es:

$$\sigma^2_{cartera} = w'\textstyle\sum w$$

entonces, el VaR es:

$$VaR(p) = -\sigma_{cartera}\gamma(p)P_{t-1}.$$

3.2.2 VaR cuando los *returns* tienen distribución Normal

No se han especificado las distribuciones de los *returns* en las derivaciones descritas anteriormente. Suponemos que los *returns* tienen una distribución Normal. Indicaremos la función de distribución Normal como $\Phi(\cdot)$.

<u>Univariante</u>

Suponemos $\vartheta = 1€$ y $\sigma = 1$, donde los *returns* de distribuyen normalmente. Si $p = 1$, obtenemos $VaR = -\Phi^{-1}(0.05) = 1.64$. Si no es igual a uno, entonces el VaR es simplemente:

$$VaR^{5\%} = \sigma 1.64$$

y si el valor de la cartera no es igual a 1, entonces:

$$VaR^{5\%} = \sigma 1.64\vartheta$$

O bien podemos mirar la distribución inversa en tablas estadísticas para obtener el cuantil de la probabilidad.

Con los datos del 1 de Enero del 2006 hasta el 31 de Diciembre del 2015 de los precios de las acciones de Mircrosoft y IBM calculamos con R el VaR y obtenemos un VaR de 41,49€. El código de R lo encontraremos en el Anexo (Apartado 2.3)

Multivariante

El cálculo en el caso multivariante es igualmente sencillo de implementar, procedemos como en el caso univariante.

Con los datos del 1 de Enero del 2006 hasta el 31 de Diciembre del 2015 de los precios de las acciones de Mircrosoft y IBM calculamos con R el VaR y obtenemos un VaR de 30,12€. El código de R lo encontraremos en el Anexo (Apartado 2.4)

3.2.3 VaR cuando los *returns* tienen distribución T-Student

Vamos a suponer que los *returns* tienen distribución T-Student con ν grados de libertad. La ventaja de la distribución de la T-Student respecto la distribución normal son las colas pesadas, donde ν indica cuán pesadas son las colas. Cuando $\nu = \infty$ la T-Student se convierte en la Normal.

Ajuste de la varianza

La varianza implicada por ν de una distribución T-Student viene dada por:

$$\frac{\nu}{\nu - 2}$$

La varianza de una variable aleatoria con distribución T-Student no está definida cuándo $\nu \leq 2$. Si generamos datos de, por ejemplo,$t(4)$, entonces la varianza de la muestra será alrededor de 2. Si a continuación utilizamos la varianza de la muestra en el cálculo del VaR junto con la inversa de la distribución $t(4)$, el VaR se sobreestima. La volatilidad muestra con eficacia $\gamma(p)$ y $\hat{\sigma}$. En consecuencia, en este caso tenemos que escalar la estimación de la volatilidad por ν.

$$\sigma^2 \equiv \frac{\nu}{\nu - 2} \tilde{\sigma}^2$$

es decir, $\tilde{\sigma}^2$ es la varianza en exceso implícita de la distribución estándar T-Student.

Calculamos con R el VaR con *returns* con distribución T-Student descargando los datos del 1 de Enero del 2006 hasta el 31 de Diciembre del 2015 de los precios de las acciones de Mircrosoft y IBM y obtenemos que el VaR, es decir, la pérdida máxima de la cartera es de 49,74€. El código de R lo encontraremos en el Anexo (Apartado 2.5).

3.2.4 Expected shortfall bajo Normalidad

Expected shortfall, a partir de ahora ES, es otra medida de riesgo. Se han propuesto una serie de medidas de riesgo alternativas para superar el problema de la falta de subaditividad en el valor en riesgo y / o proporcionar más información acerca de la forma de la cola. Artzner et al. (1999) demuestran que la ES es subadditiva. ES responde a la pregunta:

¿Qué se espera de la pérdida cuando las pérdidas exceden el VaR?

Suponiendo que la función de distribución de la cartera es continua, la respuesta a la cuestión viene dada por un valor esperado condicional por debajo del cuantil asociado con probabilidad p. En consecuencia, ES puede distinguir entre los niveles de grado de riesgo tanto en activos manipulados como no manipulados. Por lo tanto significa que ES es consciente de la forma de la distribución de la cola, mientras que el VaR no lo es.

Por lo tanto definimos ES como:

$$ES = -E[Q|Q \leq -VaR(p)]$$

donde Q son las Pérdidas/Ganancias y matemáticamente la esperanza (E) se definde como:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

La derivación del ES es más complicada que la derivación de VaR porque necesitamos, en primer lugar, obtener el valor en riesgo y luego calcular la expectativa condicional.

Recordamos la definición de ES:

$$ES = -\int_{-\infty}^{-VaR(p)} x f_{VaR}\,(x)dx$$

Cuando los rendimientos se distribuyen normalmente y el valor de la cartera es uno, tenemos:

$$ES = \frac{1}{p}\int_{-\infty}^{-VaR(p)} x\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}exp\left[-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}\right]dx.$$

Por lo tanto:

$$ES = \frac{1}{p}\left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}exp\left[-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}\right]\right]_{-\infty}^{-VaR(p)}$$

es decir, el término entre corchetes sólo necesita ser evaluado en los límites. Dado que el límite inferior es cero, señalamos que la densidad normal estándar es $\emptyset(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp\left[-\frac{x^2}{2}\right]$, obtenemos:

$$ES = -\frac{\sigma^2\emptyset(-VaR(p))}{p}.$$

Si el valor de la cartera es ϑ obtenemos:

$$ES = -\vartheta\frac{\sigma^2\emptyset(-VaR(p))}{p}.$$

Calculamos con R el ES y obtenemos que es igual a 28,84€. El código de R lo encontraremos en el Anexo (Apartado 2.6). También hemos realizado el cálculo utilizando la integración directa, que podría ser útil en general.

3.2.5 VaR utilizando modelos de volatilidad en función del tiempo

Debido en parte a las características de la volatilidad y de los precios de las acciones, se desarrollaron modelos de series temporales de tipo heterocedásticos, como por ejemplo el modelo GARCH.

El modelo GARCH , sus siglas responden a las palabras en inglés Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, introducido por Bollerslev en 1986.

La familia de modelos GARCH permite especificaciones más ricas de las propiedades dinámicas de las volatilidades, mientras que al mismo tiempo permite la estimación de los parámetros del modelo para cada conjunto de datos.

GARCH Normal

Suponiendo un modelo GARCH (1,1):

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \alpha Y_t^2 + \beta \sigma_t^2$$

La distribución condicional más común en el modelo GARCH es la normal; es decir, Z_t sigue la distribución

$$Z_t \sim \mathcal{N}\ (0,1)$$

por lo que los *returns* vienen dados por $Y_t \sim \mathcal{N}\ (0, \sigma_t^2)$. Denotamos este modelo como el GARCH con distribución Normal.

En la aplicación de las previsiones de VaR de un modelo GARCH, hay que tener la última estimación de la volatilidad $\hat{\sigma}_t$ y el vector de parámetros para obtener la previsión del VaR para el día $t+1$. En efecto tenemos que calcular manualmente $\hat{\sigma}_{t+1}^2$.

Calculamos con la herramienta estadística R el VaR con el modelo GARCH de distribución Normal y obtenemos que el VaR es igual a 36,12€. El código de R lo encontraremos en el Anexo (Apartado 2.7).

GARCH t-Student

El modelo GARCH normal podría ser mejorado mediante la sustitución de la distribución normal condicional con una distribución condicionalmente pesada, donde los parámetros que determinan la “gordura” han de calcularse a través de los otros parámetros del modelo.

Se han hecho varias propuestas de distribución; la más común es la t de Student.

$$Z_t \sim t_{(\nu)}$$

donde ν son los grados de libertad.

Calculamos con R el VaR con el modelo GARCH de distribución t-Student y obtenemos que el VaR es igual a 34,21€. El código de R lo encontraremos en el Anexo (Apartado 2.8).

4. VaR PARA OPCIONES Y BONOS

En el caso de los activos como bonos y opciones no es posible calcular el VaR directamente como hemos visto hasta ahora, ya que su valor intrínseco[7] cambia con el paso del tiempo. Cuando observamos un Bono a través del tiempo, estamos ante un activo cuyas características de riesgo están en constante cambio. Esto significa que no podemos modelar el riesgo en este tipo de activos directamente por los métodos descritos hasta ahora.

La principal dificultad proviene del hecho de que la desviación estándar de los rendimientos de un bono o una opción no se pueden estimar fácilmente, y tenemos que depender de una transformación de un factor de riesgo como los tipos de interés o los precios de las acciones al riesgo en un bono o una opción.

4.2 BONOS

Un bono es un instrumento de renta fija, donde el emisor del bono está obligado a pagar intereses (el cupón) a intervalos regulares y devolver el capital al vencimiento al titular de los bonos. El precio de un bono viene dado por la suma de sus flujos de caja descontados.

Asumimos que la curva de rendimiento es plana para que las tasas de interés, r, para todos los vencimientos sean las mismas. El precio de un bono, P, está dado por el valor presente del flujo de efectivo, $\{\tau_t\}_{t=1}^{T}$ (es decir, los pagos de cupones) en el que el último pago, T, también se incluye el principal:

$$P = g(r,t) = \sum_{t=1}^{T} \frac{\tau_t}{(1+r)^t}. \tag{4.1}$$

Denotamos esta ecuación como la ecuación de cotización de bonos, $g(\cdot)$, que es una función de las tasas de interés y el tiempo. Como sólo tenemos en cuenta las tasas de interés lo escribimos como $g(r)$.

Nuestro interés se centra en la aleatoriedad de las tasas de interés al riesgo en un bono. En general, también tendríamos que considerar el riesgo de impago de la fianza, pero aquí asumimos que el bono es emitido por una entidad libre de riesgo (por ejemplo, algunos gobiernos, como el gobierno de España).

[7] El valor intrínseco es el valor que tiene en el mercado el metal

El principal problema en el análisis de riesgo del bono se debe a que un cambio simétrico en las tasas de interés se traduce en un cambio asimétrico de los precios del bono.

Ejemplo 4.2

Consideramos un bono con valor nominal de 1.000€, un vencimiento de 50 años y un cupón anual de 30€. Suponiendo que tenemos una curva de rendimiento plana una tasa de interés del 3%, entonces el precio actual es de 484€. Consideramos la posibilidad de cambios paralelos en la curva de rendimiento del 5% o 1%.

Tasa de Interés	Precio	Cambio del Precio
1%	892€	408€
3%	484€	
5%	319€	165€

El cambio del 3% al 1% hace que el incremento del precio del bono sea de 408€, pero en cambio un cambio de la misma magnitud de tasa de interés (2%), es decir una tasa de interés del 5%, hace que el precio del bono disminuya pero solo 165€. Un cambio simétrico en las tasas de interés se traduce en un cambio asimétrico en los precios del bono.

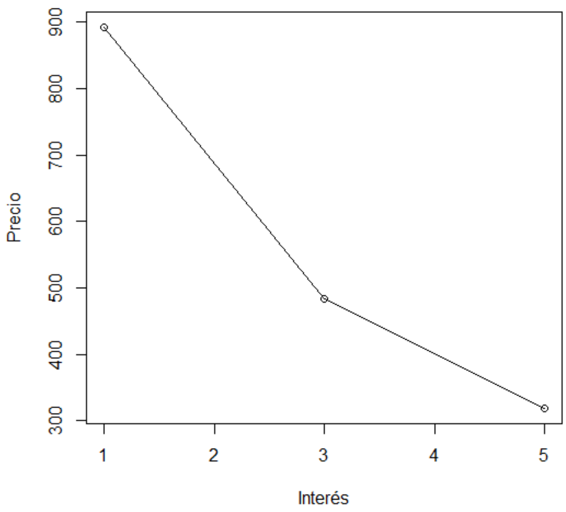


Figura 2. Convexidad del Bono (Anexo Apartado 3.1)

4.1.2 Duración Normal del VaR

Tenemos que encontrar una manera de aproximar el riesgo del bono como una función del riesgo en las tasas de interés. Hay varias formas de hacer esto, por ejemplo, podríamos utilizar la fórmula de Ito[8], o seguir la derivación para el VaR de las opciones. Independientemente del enfoque, llegaríamos a la misma respuesta. Nosotros seguiremos la derivación para el VaR de las opciones. (En el apartado 4.2 Opciones)

Una forma común de determinar la sensibilidad de los precios de los bonos como una función de la sensibilidad a los tipos de interés es modificando la duración, D^*. Empezaremos con la función de fijación de precios de bonos a partir de (4.1), $g(r)$, donde consideremos el impacto de un pequeño cambio en r , es decir el dr. Podemos expresar el impacto del cambio en r como la función de la primera derivada $g'(r)$:

$$g(r + dr) \approx g(r) + (dr)g'(r)$$

donde r es la tasa de interés anual.

Definiremos D^*, es decir duración modificada, como el negativo de la primera derivada, $g'(r)$, dividido por los precios:

$$D^* = -\frac{1}{P}g'(r)$$

El primer paso para calcular el VaR de un bono es identificar la distribución de los cambios de las tasas de interés, dr. Entonces asumimos que están dadas por:

$$r_t - r_{t-1} = d_r \sim N(0, \sigma_r^2)$$

donde σ_r es la volatilidad de los incrementos diarios de las tasas de interés. Podríamos haber usado casi cualquier distribución.

El próximo paso es el mapeo de la distribución de dr en los precios de los bonos. Independientemente de si usamos el lema de Ito o seguimos la derivación para el VaR de las opciones, llegamos al método de la duración normal para conseguir el VaR del bono. Aquí nos encontramos con que los *returns* de los bonos son simplemente duración modificada de los cambios en las tasas de interés, por lo tanto la distribución de los *returns* del bono es:

$$R_{Bono} \sim N(0, (D^*\sigma_r)^2)$$

---

[8] La fórmula Ito es un famoso resultado matemático derivado por el matemático japonés K. Ito en 1951. Hablando en términos generales, se puede considerar la regla de cadena del cálculo estocástico.
En finanzas, el lema de Ito se utiliza frecuentemente para derivar el proceso estocástico seguido por el precio de un título derivado.

Por lo tanto el VaR del bono es:

$$VaR_{Bono}(p) \approx D^* \times \sigma_r \times \gamma(p) \times \vartheta$$

donde el nivel de significación es la inversa de la distribución normal para la probabilidad p, $\gamma(p) = \Phi^{-1}(p)$.

4.1.3 La Exactitud de la duración normal del VaR

La exactitud de estas aproximaciones depende de la magnitud de la duración y del horizonte de tiempo del VaR. Las principales fuentes de error son los supuestos de linealidad y la curva de rendimiento plana.

El segundo factor en la aproximación de la exactitud de la duración normal del VaR es la volatilidad del cambio de las tasas de interés.

La precisión del método de la duración normal del VaR es generalmente más alta en vencimientos de menor rango de tiempo, bonos de baja volatilidad.

4.1.4 Convexidad y el VaR

Es conceptualmente sencillo para mejorar la aproximación de la Duración pero también para la incorporación de un término de segundo orden (es decir, la convexidad). En este caso el cambio de la tasa de interés, el dr, aparece dos veces, la segunda vez al cuadrado. Esto significa que incluso si el dr se distribuye normalmente, R_{bono} no lo hace. La distribución de $(dr)^2$ es la Chi-Cuadrado, y seria sencillo de derivar una ecuación de VaR con convexidad.

Como cuestión práctica, incluso la incorporación de la convexidad puede dejar un considerable sesgo en los cálculos del VaR. Por supuesto que podríamos incorporar los términos de orden aún más altos. Esto, sin embargo, puede aumentar aún más la complejidad matemática. Además, si tenemos una cartera de bonos, es probable que la presencia de estas transformaciones no lineales de la distribución normal haga que el cálculo del VaR de la cartera sea muy engorroso. Por esta razón, se prefieren en general los métodos de Monte Carlo.

4.2 OPCIONES

Una opción le da al propietario el derecho pero no la obligación de comprar (call) o vender (put) una activo subyacente en una fecha fija en el futuro que se conoce como la fecha de vencimiento a un precio predeterminado llamado precio de ejercicio.

Las opciones europeas sólo pueden ejercerse en la fecha de vencimiento, mientras que las opciones americanas pueden ejercerse en cualquier momento hasta la fecha de vencimiento a discreción del titular. Nosotros nos centramos en las opciones más simples (es decir, de Europa), pero el análisis básico puede extenderse a muchas otras variantes.

Las opciones europeas[9] pueden tener un precio usando la ecuación de Black and Scholes (1973):

$$put_t = Xe^{-r(T-t)} - P_t + call$$

$$call_t = P_t \Phi(\mathrm{d}_1) - Xe^{-r(T-t)} \Phi(\mathrm{d}_2)$$

donde

$$d_1 = \frac{\log(P_t/X) + (r + \sigma_a^2/2)(T-t)}{\sigma_a \sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\log(P_t/X) + (r - \sigma_a^2/2)(T-t)}{\sigma_a \sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma_a \sqrt{T-t}$$

donde P_t es el precio del activo subyacente en el tiempo t, que se mide en años, X es el precio de ejercicio, r es la tasa de interés anual libre de riesgo, $T-t$ es el tiempo hasta el vencimiento, σ_a es la volatilidad anual del activo subyacente, Φ es la distribución normal estándar. Nos referimos a la función de fijación de precios como la función $g(\cdot)$ y usamos el término g para designar tanto la opción de compra como de venta.

El valor de una opción se ve afectada por muchos factores subyacentes. Sin embargo si asumimos estándar Black-Scholes, el activo subyacente tiene *returns* normales independientes e idénticamente distribuidos, con una curva de rendimiento plana no aleatoria, por lo tanto, para el VaR el único factor de riesgo que importa es P. El riesgo en todas las otras variables puede ser ignorado.

[9] Una opción Europea es una opción que puede ejercerse solamente durante un período de ejercicio limitado al final de la vida de la opción.

El objetivo, entonces, es el cálculo del riesgo en el activo subyacente en una opción (es decir, el riesgo en P). Esto se puede hacer usando la opción delta y gamma.

4.2.1 Delta

La sensibilidad de primer orden de una opción con respecto al precio subyacente se denomina delta, que se define como:

$$\Delta = \frac{\partial g(P)}{\partial (P)} = \begin{cases} \Phi(\mathrm{d}_1) > 0 & call \\ \Phi(\mathrm{d}_1) - 1 < 0 & put \end{cases}$$

Delta es igual a ± 1 para opciones *in-the-money*[10], dependiendo si se trata de una call o put, esta alrededor de $\pm 0{,}5$ para opciones *at-the-money*[11], y es igual a 0 para opciones *out-the-money*[12].

Para los pequeños cambios en P, el precio de la opción cambiará aproximadamente por Δ. La aproximación es razonablemente buena para los precios de activos cercanos al precio que fue calculado para delta, pero empeorara gradualmente para los precios que se desvían significativamente de ese precio.

4.2.2 Gamma

La sensibilidad de segundo orden de una opción con respecto al precio se llama gamma, que se define como:

$$\Gamma = \frac{\partial^2 g}{\partial P^2} = e^{-r(T-t)} \frac{\emptyset(d_1)}{P_t \sigma_a \sqrt{(T-t)}}$$

La gamma es más elevada cuando una opción está un poco fuera del dinero, y decrece cuando el precio subyacente se aleja del precio de ejercicio.

---

[10] Una opción **in-the-money** tiene valor intrínseco; por ejemplo en el caso de una opción de compra el precio del activo subyacente es mayor que el precio de ejercicio de la opción.

[11] Una opción está **at-the-money** si su precio de ejercicio (strike price), es decir, el precio que el poseedor debe pagar para ejercer su derecho, es el mismo que el precio del subyacente sobre el que la opción está basada.

[12] Una opción está **out-of-the-money** si no tiene valor intrínseco; sería el caso de una opción de compra (call) para la que el precio del activo subyacente es menor que el precio de ejercicio de la opción.

4.2.3 Implementación

Implementamos la ecuación de Black-Scholes y el cálculo de gamma y delta como una función en R que llamaremos bs. Esta función toma (X, P, r, sigma, T) como argumentos y devuelve una estructura que contiene los precios de call y put, así como delta y gamma. El código de R lo encontramos en el Anexo.

Si sabemos que el precio de ejercicio es 90, el precio 100, la tasa libre de riesgo es del 5%, la volatilidad del 20% y el vencimiento es en medio año, obtenemos (el código de R lo encontraremos en el Anexo (Apartado 3.2):

```
> bs(90,100,0.05,0.2,0.5)
$Call
[1] 13.49852

$Put
[1] 1.27641

$Delta.Call
[1] 0.8395228

$Delta.Put
[1] -0.1604772

$Gamma
[1] 0.01723826
```

4.2.4 VaR Delta-normal

Podemos utilizar delta para aproximar los cambios en el precio de la opción como una función de los cambios en el precio del subyacente.

Denotemos la variación diaria de los precios de las acciones como:

$$dP = P_t - P_{t-1}$$

El cambio en el precio dP implica que el precio de la opción cambiará aproximadamente por:

$$dg = g_1 - g_{t-1} \approx \Delta dP = \Delta(P_t - P_{t-1})$$

donde Δ es la opción delta en el tiempo $t-1$, y g es o bien el precio de la call o del put. Los *returns* simples sobre el subyacente se definen como:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

Siguiendo las hipótesis de Black-Scholes los *returns* son normales independientes e idénticamente distribuidos:

$$R_t \sim N(0, \sigma_d^2)$$

con la volatilidad diaria σ_d. La derivación del VaR para las opciones es paralela a la derivación del VaR para *returns* simples.

Denotemos el VaR de la opción por $VaR_0(p)$, donde p es la probabilidad:

$$p = \Pr\big(g_t - g_{t-1} \leq -VaR_o(p)\big)$$

$$= \Pr\,(\Delta(P_t - P_{t-1}) \leq -VaR_o(p))$$

$$= \Pr\,(\Delta P_t R_t \leq -VaR_o(p))$$

$$= Pr\left(\frac{R_t}{\sigma_d} \leq -\frac{1 VaR_o(p)}{\Delta P_{t-1}\sigma_d}\right)$$

La distribución de los *returns* estándar (R_t/σ_d) es la normal estándar $\Phi(\cdot)$, por lo tanto, el nivel de significación viene dado por $\gamma(p) = F_R^{-1}(p)$. Entonces, se deduce que el VaR para una opción en una unidad del activo es:

$$VaR_o(p) \approx |\Delta| \times \sigma_d \times \gamma(p) \times P_{t-1}$$

Esto significa que el VaR de la opción es simplemente delta multiplicado por el VaR del subyacente, VaR_{sub}:

$$VaR_o(p) \approx |\Delta| VaR_{sub}$$

Necesitamos el valor absoluto de Δ porque es posible que o bien tengamos opciones de compra o de venta, mientras que el VaR es siempre positivo.

La calidad de la aproximación aquí depende de la extensión de no linealidades, que son una función del tipo de opción, sus vencimientos, la volatilidad de los factores del mercado subyacente y el horizonte del VaR. Cuanto más corto sea el horizonte del VaR, mejor es la aproximación del delta-normal. A efectos de gestión del riesgo, la mala aproximación de delta para el precio verdadero de la opción para grandes cambios en el precio del subyacente es claramente una causa de preocupación.

5. MÉTODOS DE SIMULACIÓN PARA EL VaR PARA OPCIONES Y BONOS

La simulación de Monte Carlo es el método de elección para el pronóstico del VaR de las carteras que contienen activos como opciones y bonos. Métodos numéricos que hacen uso de números aleatorios se llama Monte Carlo. La idea que reside detrás de las simulaciones de Monte Carlo es la de replicar los resultados del mercado en el ordenador, en base a algún modelo de la evolución del mercado. Al realizar un número suficiente de simulaciones, se obtiene una amplia muestra de los resultados del mercado que nos permite calcular con precisión algunas cantidades de interés, como el precio de las opciones y de los bonos o el VaR. Si observamos una muestra suficientemente grande del proceso estadístico y calculamos el promedio, entonces podemos llegar a un número que es aproximadamente igual a la expectativa matemática.

Hay dos limitaciones importantes en este enfoque. En primer lugar, se basa siempre en algún modelo y por lo tanto la calidad de los resultados está limitada inevitablemente por la calidad del modelo. En segundo lugar, a menudo necesitamos un tamaño de simulación muy grande para hacer los cálculos con precisión.

5.1 PRECIOS DE SIMULACIÓN

Hay varios métodos disponibles para los precios de activos, como las opciones y los bonos. Para los activos relativamente simples podemos utilizar una solución analítica (por ejemplo, la fórmula del valor actual para un bono estándar y el modelo Black-Scholes para una opción Europea).

5.1.1 Bonos

El precio y el riesgo de los activos de renta fija, como los bonos, se basa en las tasas interés del mercado. Mediante el uso de un modelo de la distribución de las tasas de interés, podemos simular al azar las curvas de rendimiento de ese modelo y utilizarlas para obtener la distribución de los precios de los bonos. En otras palabras, hacemos un mapa de la distribución de los tipos de interés en la distribución de los precios de los bonos.

Indicamos las tasas de interés anuales como r_j (la tasa de cupón cero se usa para descontar un pago recibido en el tiempo j en el futuro). Podemos utilizar una ecuación de precios modificado cuando no asumimos que la curva de rendimientos es plano, es decir que todos los r son los mismos:

$$P = \sum_{j=1}^{T} \frac{\tau_j}{(1 + r_j)^j}$$

donde P es el precio del bono, τ_j es el flujo de efectivo del bono, incluyendo el valor nominal de τ_T.

Supongamos que tenemos un bono con 10 años a vencimiento, un valor nominal de 10€ y un interés anual del 7%, donde las tasas de interés del mercado actual son $\{r_t\} = (5.00, 5.69, 6.09, 6.38, 6.61, 6.79, 6.94, 7.07, 7.19, 7.30) \times 0.01$

Calculamos con la herramienta estadística R el valor actual del bono y obtenemos un precio de 9,91€. El código de R lo encontraremos en el Anexo (Apartado 4.1).

Simulación

Suponemos que la curva de rendimientos está restringida por lo que sólo puede desplazarse hacia arriba y hacia abajo, no cambiar de forma. Sin embargo, uno podría desear que los rendimiento también cambien de forma.

Los cambios en los rendimientos, ε_i, tienen distribución normal estándar con desviación σ, es decir:

$$\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$$

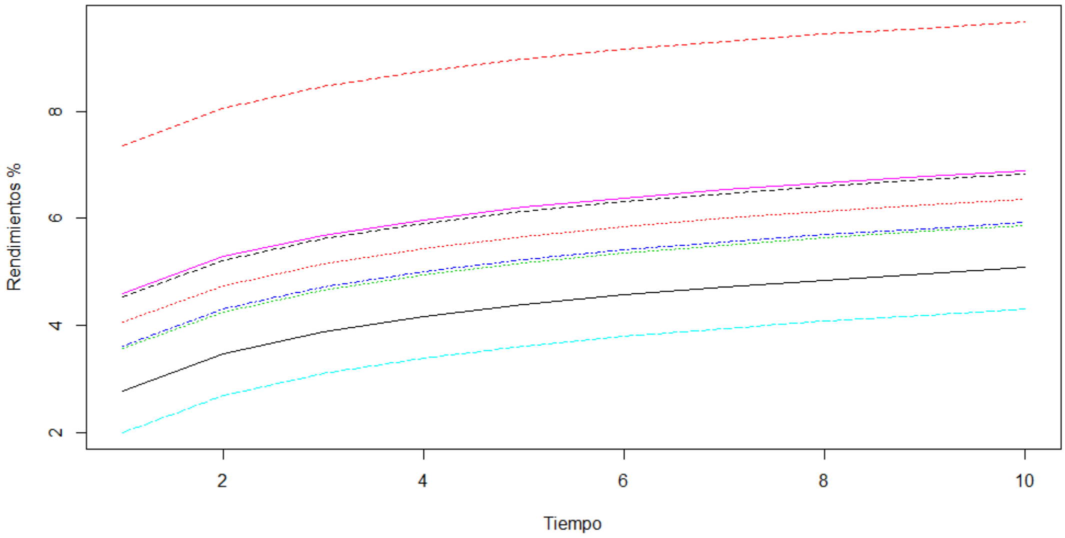


Figura 3. Ocho simulaciones de curvas de rendimiento (Anexo Apartado 4.2)

La ecuación del precio es similar a la ecuación (4.1), el i-ésimo precio simulado, P_i, es el valor actual de los flujos de efectivo, utilizando las tasas de interés simuladas ϵ_i:

$$P_i = \sum_{j=1}^{T} \frac{\tau_j}{(1 + r_j + \epsilon_i)^t}, \qquad i = 1, \ldots, S$$

donde $r_j + \epsilon_i$ es el i-ésimo tasa de interés simulada en el tiempo j.

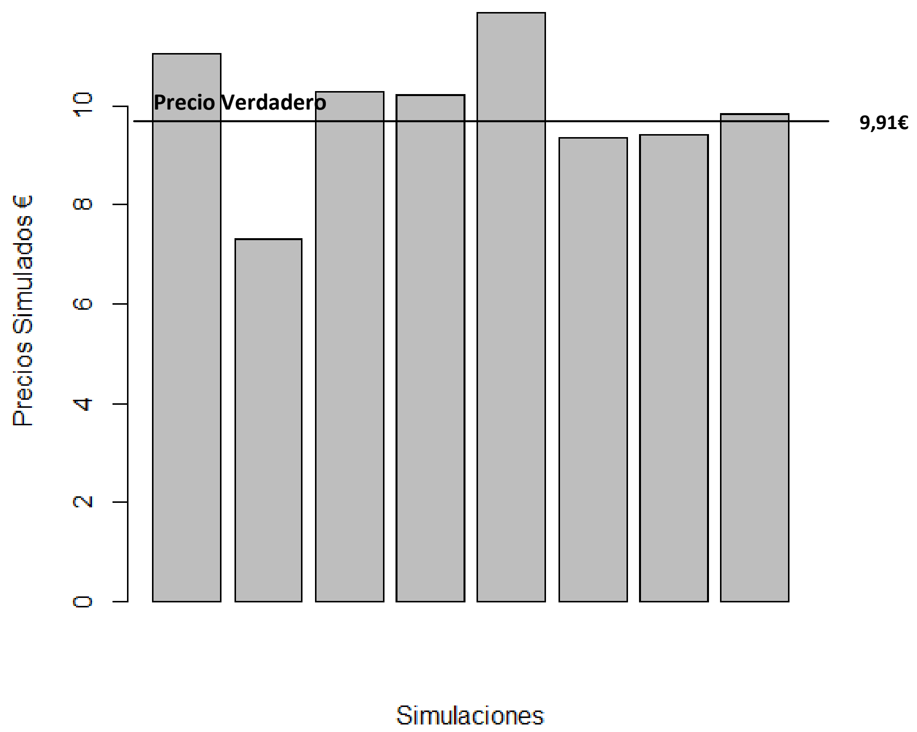


Figura 4. Ocho simulaciones con rendimientos (Anexo Apartado 4.3)

<u>La curva de rendimiento para cambiar la forma</u>

Hemos hecho el supuesto de que la curva de rendimiento sólo se puede desplazar hacia arriba y abajo, donde el choque al azar se distribuye normalmente. Esto no es realista en la práctica, ya que las curvas de rendimiento cambiar de forma con el tiempo, y la distribución de los cambios en las tasas de interés puede no ser la normal.

Sería relativamente sencillo modificar el enfoque anterior para incorporar tales efectos. Por ejemplo, si queremos permitir que la curva de rendimiento cambiede forma, podría ser útil el uso de análisis de componentes principales

(ACP)[13] y simular los dos o tres primeros componentes principales en la simulación. Esto proporcionaría una manera eficiente para modelar la dinámica de la curva de rendimiento

5.1.2 Opciones

Hay dos activos primitivos[14] en el modelo de precios de Black-Scholes. Una cuenta de mercado de dinero cuyo valor se aprecia en la tasa libre de riesgo y una acción subyacente que sigue un camino aleatorio distribuido normalmente con la variación de r (es decir, la tasa anual libre de riesgo). Este último se llama movimiento browniano geométrico[15] en tiempo continuo, que es una de las suposiciones subyacentes en la ecuación de Black-Scholes.

El precio de futuros de no arbitraje de una acción que se entrega en tiempo T con una tasa anual libre de riesgo r, viene dado por:

$$F = Pe^{rT}$$

Utilizaremos una opción de compra europea como ejemplo, en la que el precio actual es de 50€, la volatilidad anual es de un 20%, la tasa anual libre de riesgo es del 5%, hay 6 meses a vencimiento y el precio de ejercicio es de 40€.

Calculamos con R el precio de la opción de compra europea utilizando Black-Scholes y obtenemos un precio de 11,0873€. El código de R lo encontraremos en el Anexo.

<u>Monte Carlo</u>

En primer lugar, simulamos los rendimientos a lo largo del período hasta el vencimiento y utilizaremos estos valores para el cálculo de los precios de futuros simulados. Una vez que tengamos una muestra suficiente de los precios de futuros, será sencillo calcular el conjunto de pagos de la opción, por ejemplo, $\max(0, F - X)$. El precio de Monte Carlo de la opción viene dado por la media de estos pagos. La única complejidad que surge de este procedimiento se debe a la expectativa de una variable aleatoria log-normal; es decir, si

---

[13] Las componentes principales han de satisfacer las siguientes condiciones:

- Cada componente es una combinación lineal unitaria de las variables iniciales
- Las componentes son incorrelacionadas dos a dos
- Están ordenadas en orden decreciente de varianza, siendo la primera la que tiene la máxima varianza posible

Las componentes se obtienen a través de la transformación ortogonal: $Y = V^t X$

[14] Los activos financieros primitivos son aquéllos cuyo valor depende de sus rentas futuras esperadas y del riesgo a que están sujetos.

[15] (1827 Robert Brown) El movimiento geométrico Browniano es un proceso aleatorio que describe el comportamiento de ciertas variables aleatorias a medida que se desplaza en el tiempo. Da por supuesto que el cambio de un período de tiempo al siguiente no está relacionado ni con el nivel de precios ni con las series pasadas de cambios de precio

$$O \sim N(\mu, \sigma^2)$$

entonces,

$$E[\exp(O)] = \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)$$

Por lo tanto, tenemos que aplicar una corrección logarítmica normal (es decir, restar $\frac{1}{2}\sigma^2$ de la simulación de los returns) para asegurar que la expectativa del precio de futuros simulado es el mismo que el valor teórico.

Calculamos con R el precio de la opción de compra europea utilizando Monte Carlo y obtenemos un precio de 11,08709€. El código de R lo encontraremos en el Anexo (Apartado 4.4).

Podemos medir la exactitud de la simulación por lo cerca que esta el precio calculado por Monte Carlo al precio calculado por el método Black-Scholes, que es 11,08709€ y 11,0873€ respectivamente, suficientemente cercanos a efectos prácticos.

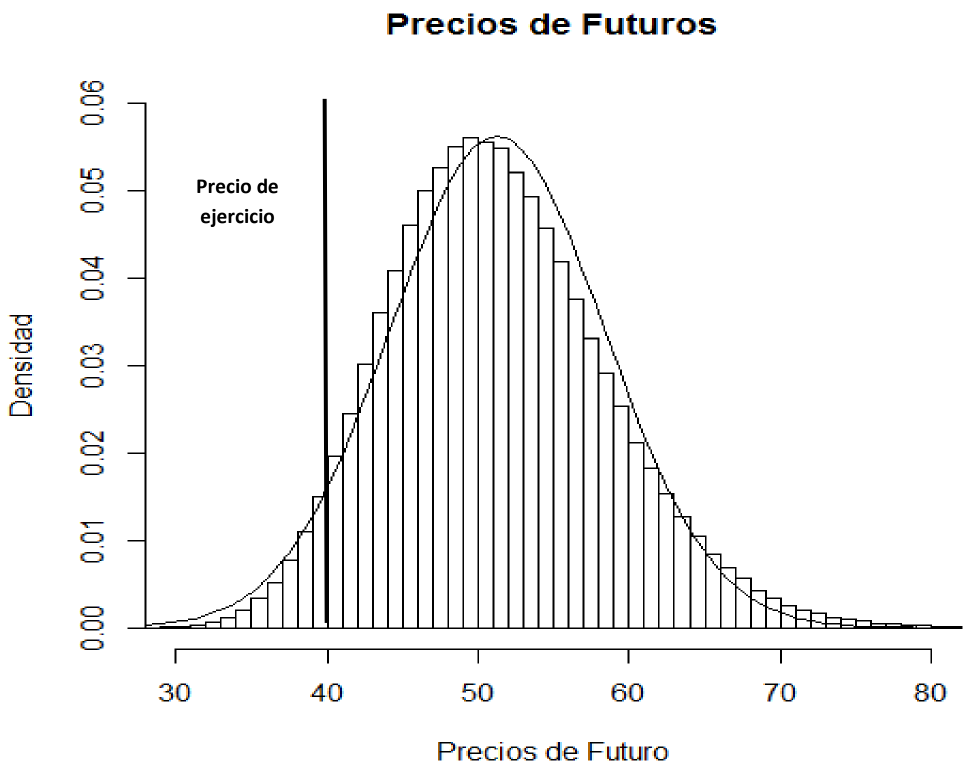


Figura 5 Distribución de 10^6 simulaciones de precios futuros, P=50, $\sigma = 0.2, r = 0.05, T = 0.5, X = 40$, y la línea de la distribución normal (Anexo Apartado 4.5)

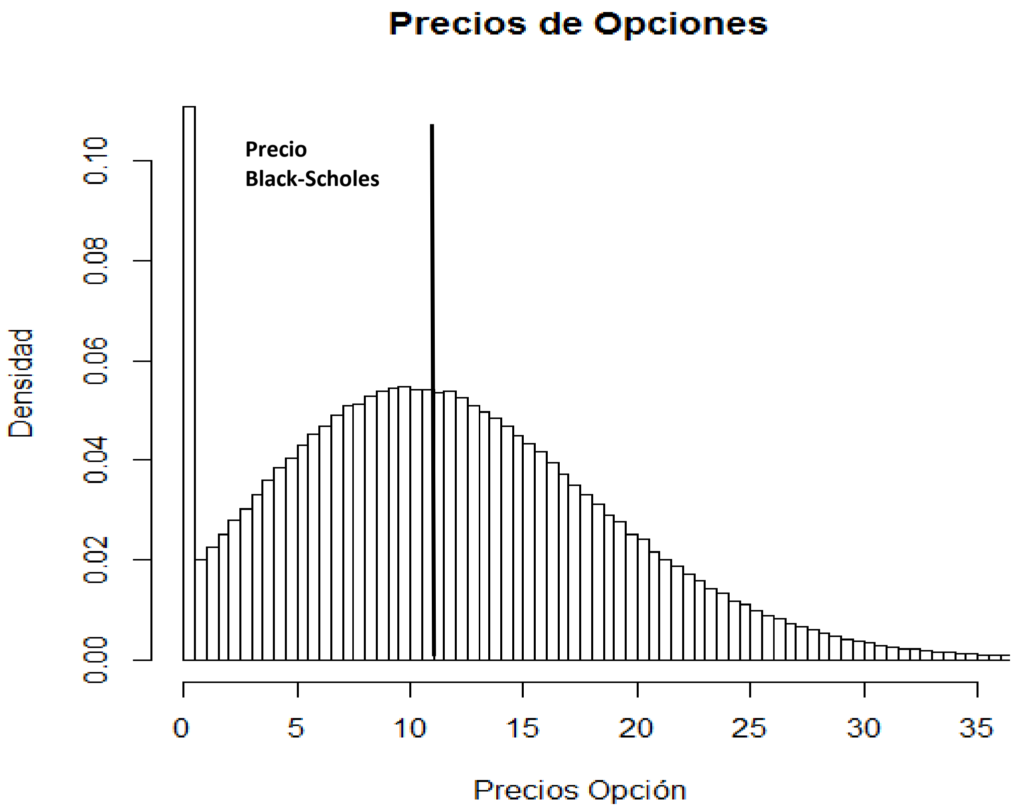


Figura 6 Distribución de los precios de la opción de la simulación (Anexo Apartado 4.6)

Para calcular el VaR, simplemente hay que mirar el valor más pequeño del 1% de la distribución para obtener el VaR del 99%.

5.1.3 Simulación del VaR para un activo

Los métodos descritos anteriormente se pueden utilizar para obtener el valor en riesgo, pero no son los métodos más convenientes para la simulación del VaR. Un mejor enfoque podría consistir en simular el *return* de un día de un activo y luego aplicar fórmulas de precios para el precio de futuro simulado. La diferencia entre los valores futuros simulados de mañana y de hoy es que conocemos el valor que representa la simulación de P / L (Pérdidas/Ganancias) en nuestra cartera, a partir del cual se puede calcular el VaR a través del método de Monte Carlo.

Consideramos un activo con precio P_t y con *returns* iid normal distribuidos, con la volatilidad σ de un día y donde la tasa anual libre de riesgo es r.

El número de unidades de la base de activos realizada en una cartera se denota por x^b, y el número de derechos de opción se denota por x^o.

El *tiempo de calendario* (365 días al año) se usa para calcular la tasa de interés. Para escalar la volatilidad se utiliza el *tiempo de negociación* (normalmente 250 días al año)

El VaR a través del método de Monte Carlo con un activo básico

El método para obtener el VaR a través de Monte Carlo se resume en los siguientes pasos:

1. Calcular el valor inicial de la cartera:

$$v_t = x^b P_t$$

2. Simular S *returns* de un día, $y_{t+1,t}$, de:

$$N(0, \sigma^2), \quad i = 1, \dots, S$$

3. Calcular el precio de futuro de un día:

$$P_{t+1,i} = P_t e^{r(1/365)} \times e^{y_{t+1,i}} \times e^{-0.5\sigma^2}, \; i = 1, \dots, S$$

4. Calcular el valor de futuros simulado de la cartera:

$$\vartheta_{t+1,i} = x^b P_{t+1,i}$$

5. El i-ésimo valor simulado de ganancias y pérdidas es entonces:

$$q_{t+1,i} = \vartheta_{t+1,i} - \vartheta_t$$

6. VaR se puede obtener directamente a partir del vector de simulación de P/L, $\{q_{t+1,i}\}^2$. Por ejemplo, el VaR(0.01) es el 1% valor más pequeño.

Es importante darse cuenta de que es el $t+1$ precio del activo básico que se está simulando. Esto se calcula multiplicando la exponencial del *return* simulado por el precio de futuro, a continuación, se aplica una corrección logarítmica normal. Utilizamos el *return* libre de riesgo ya que es lo que asume la ecuación de Black-Scholes, pero podemos usar cualquier número que queramos. Puesto que será muy pequeño, simplemente se podría fijar en cero.

Ejemplo 5.1

Supongamos que somos propietarios de una acción con un precio de 100, donde los retornos tienen volatilidad diaria $\sigma = 0.01$. La tasa anual libre de riesgo es del 5%.

Calculamos el VaR de un día a través del método de Monte Carlo con R y obtenemos un VaR de 2,28€. El código de R lo encontraremos en el Anexo (Apartado 4.7).

El VaR de una opción en un activo básico

Para las opciones, el paso adicional es aplicar la ecuación de Black-Scholes a los precios actuales y futuros simulados, donde tenemos x^o opciones. $g()$ denota la ecuación de Black-Scholes.

Se utilizan los mismo pasos que hemos utilizado para calcular el VaR a través de Monte Carlo pero varían el 1 y el 4, el resto son los mismos.

1. El valor inicial de la cartera es:

$$\vartheta_t = x^o g(P_t, X, T, \sqrt{250}\sigma, r)$$

4. El i-ésimo valor de futuro simulado de la cartera es:

$$\vartheta_{t+1,i} = x^o g(P_{t+1,i}, X, T - 1/365\,, \sqrt{250}\sigma, r)$$

Ejemplo 5.2

Supongamos que somos propietarios de una opción de compra con un precio de ejercicio de 100€ y una fecha de caducidad en el tiempo de 3 meses.

Calculamos con R el VaR de un día a través del método de Black-Sholes para una opción y obtenemos un VaR de 1,21€. El código de R lo encontraremos en el Anexo (Apartado 4.8).

Opciones y una acción

Esta metodología se extiende directamente a una situación en la que tenemos una cartera con una acción y una opción o incluso con múltiples opciones (put o call y/o muchos precios de ejercicios). Es necesario realizar el cálculo del VaR con el método de Black-Scholes.

Ejemplo 5.3

Supongamos que somos propietarios de una opción de compra con un precio de ejercicio de 100€ y una opción de venta con un precio de ejercicio de 110€ junto con la acción subyacente.

Calculamos con R el VaR de un día a través del método de Black-Sholes para una opción y obtenemos un VaR de 1,50€. El código de R lo encontraremos en el Anexo (Apartado 4.9).

5.1.4 Simulación del VaR para una Cartera

La principal diferencia en el caso multivariante es que, en lugar de simular el *return* de un activo, necesitamos simular *returns* correlacionados para todos los activos. Los precios de futuros simulados se calculan de la misma forma que antes, y se obtiene el valor de la cartera mediante la suma de las tenencias de activos individuales simulados.

Supongamos que tenemos dos activos no derivados en nuestra cartera, cuya distribución diaria de *returns* es:

$$N\left(\mu = \begin{pmatrix} 0.05/365 \\ 0.05/365 \end{pmatrix},\ \Sigma = \begin{pmatrix} 0.01 & 0.0005 \\ 0.0005 & 0.02 \end{pmatrix}\right)$$

Simulamos con R los *returns* de dos activos utilizando la función *mvrnorm(S, mu, Sigma)* donde *S* es el número de simulaciones, *mu* el vector de medias y *sigma* la matrix de covarianzas K×K. El código de R lo encontraremos en el Anexo (Apartado 4.10).

<u>Simulación del VaR para una Cartera para activos básicos</u>

El método para obtener el VaR para una cartera donde x^b es el vector de *holdings*, i el número de simulaciones y k el número de activos de tal manera que $P_{t,k,i}$ denota la i-ésima simulación del precio del activo k en el tiempo t , se resume en los siguientes pasos:

1. El valor inicial de la cartera es:

$$\vartheta_t = \sum_{k=1}^{K} x_k^b P_{t,k}$$

2. Simulamos un vector de *returns* de un día a partir de hoy hasta mañana, denotada por $y_{t+1,i}$ de:

$$N\left(\mu - \frac{1}{2} Diag\Sigma , \Sigma\right)$$

donde $Diag\Sigma$ extrae los elementos de la diagonal para realizar la corrección logarítmica normal.

3. La i-ésima simulación de precio de futuro del activo k es:

$$P_{t+1,k,i} = P_{t,k} \exp\left(Y_{t+1,k,i}\right)$$

4. La i-ésima simulación del valor de futuros de la cartera es:

$$\vartheta_{t+1,i} = \sum_{k=1}^{K} x_k^b P_{t+1,k,i}$$

5. La i-ésima simulación del valor (q) de P/L es entonces:

$$q_{t+1,i} = \vartheta_{t+1,i} - \vartheta_t$$

6. El VaR se puede obtener directamente a partir del vector de simulaciones P/L, $\{q_{t+1,i}\}_{i=1}^{S}$, como anteriormente cuando hemos descrito los pasos para calcular el VaR a través del método de Monte Carlo.

Supongamos que tenemos una unidad de cada activo, calculamos el VaR simulando la relación P/L de la cartera con R y obtenemos que el VaR es igual a 25,97€. El código de R lo encontraremos en el Anexo (Apartado 4.11).

5.1.5 VaR de la cartera para opciones

Si hay opciones en la cartera, se requieren algunas modificaciones en el procedimiento anterior. Por simplicidad supongamos que hay un solo tipo de opción por acción. Los artículos 1 y 4, de los pasos descritos antes para calcular el VaR para una cartera, se reemplazan por:

1. El valor inicial de la cartera es:

$$\vartheta_t = \sum_{k=1}^{K} \left(x_k^b P_{t,k} + x_k^o g(P_{t,k}, X_k, T, \sqrt{250}\sigma_k, r) \right)$$

4. El i-ésimo valor de futuro simulado de la cartera es:

$$\vartheta_{t+1,i} = \sum_{k=1}^{K} \left(x_k^b P_{t+1,k,i} + x_k^o g(P_{t+1,k,i}, X_k, T - \frac{1}{365}, \sqrt{250}\sigma_k, r) \right)$$

Calculamos el VaR de la cartera para dos activos y una opción con R y obtenemos un VaR de 20,81€. El código de R lo encontraremos en el Anexo (Apartado 4.12).

Estimaciones de simulaciones

Hay varias cuestiones que deben abordarse en todos los ejercicios de simulación de Monte Carlo. Los más importantes son la calidad del generador de números aleatorios, el método de transformación y el número de simulaciones.

- La Calidad del generador de números aleatorios

  Las simulaciones de Monte Carlo se basan en replicar el mundo real en el ordenador. Como tal, la calidad de la simulación de Monte Carlo no sólo depende de la calidad del modelo estocástico subyacente, sino también la calidad del generador de números aleatorios utilizado. Las propiedades del generador de números aleatorios conduce todo el resultado, si se utiliza un generador de baja calidad o sesgado se obtendrán resultados inexactos. Por ejemplo, si el período del generador de números aleatorios es 10 y ejecutamos una simulación de tamaño 100, el mismo cálculo se repite 10 veces. La calidad deseada y el período del generador dependen de la aplicación subyacente. En los cálculos sencillos que implican un activo no es muy necesario un gran número de números aleatorios en cambio sí que es necesario un gran número de números aleatorios para carteras que constan de muchas opciones exóticas.

- Método de transformación

  Del mismo modo, la calidad del método de transformación también juega un papel clave. Muchos métodos de transformación están únicamente sintonizados de manera óptima para el centro de la distribución, esto puede llegar a ser problemático cuando se simulan los fenómenos extremos. No es raro utilizar en algunos métodos de transformación las aproximaciones lineales para las colas extremas, lo que conducirá a los uniformes extremos a transformarse de forma incorrecta.

- Número de simulaciones

  Es importante elegir correctamente el número de simulaciones. Si elegimos muy pocas simulaciones de la respuesta resultante será inexacta, si elegimos demasiados estaremos malgastando recursos informáticos valiosos. Teniendo en cuenta que las simulaciones pueden tardar bastante tiempo en ejecutarse, incluso si el hardware es muy de alta gama, la elección del tamaño de simulación es a menudo vital. No hay reglas fijas en cuanto al número de simulaciones necesarias para una respuesta precisa. En casos especiales hay pruebas estadísticas formales para el número de simulaciones. No se recomiendan las propuestas comunes que indican que la exactitud de la simulación está relacionada con el tamaño de la simulación inversa, ya que se basan en la suposición de linealidad, lo cual no es correcto en las aplicaciones de este trabajo. Como la mayoría de las aplicaciones del VaR a través del método de Monte Carlo se basan en la transformación no lineal de una variable aleatoria y sólo se utiliza un cuantil de los resultados, la determinación del número de simulaciones es aún más compleja. La mejor manera, en muchos casos, es simplemente aumentar el número de simulaciones y ver cómo converge la estimación de Monte Carlo. Cuando los números han dejado de cambiar hasta tres dígitos significativos, el número de simulaciones es probablemente suficiente.

6. CONCLUSIONES

Una vez concluido este proyecto podemos recoger varios puntos claves.

La distribución subyacente de la rentabilidad financiera es desconocida e imposible de identificar con precisión con la tecnología actual. Esto sugiere que el uso de medidas de riesgo de distribución libre es la mejor manera de predecir el riesgo en la mayoría de los casos.

El VaR a menudo ofrece el mejor equilibrio entre la fuerza teórica y la viabilidad de la aplicación. Su mayor debilidad es la falta de subaditividad para algunas clases de activos, pero para la mayoría de los activos VaR permanece subaditiva.

En los métodos no paramétricos, la ventaja de la Simulación Histórica es que utiliza los datos observados directamente, no está sujeta a error de estimación y puede capturar directamente la dependencia no lineal. La desventaja es que se basa en ponderaciones fijas de los *returns* de manera que reacciona lentamente a los cambios estructurales en el riesgo de los activos. Por lo contrario, los métodos paramétricos se basan en la estimación de alguna distribución de los datos, a partir de los cuales se obtiene un pronóstico del VaR. Esto significa inevitablemente que el error de estimación y el riesgo del modelo se convierten en un problema grave, a menudo dificulta la elección del modelo.

El pronóstico del VaR de activos tales como opciones y bonos es mucho más complicado que el pronóstico del VaR para los activos básicos como acciones y divisas. Tenemos que emplear un proceso de dos pasos: en primer lugar, el modelo del factor de riesgo subyacente y, a continuación, utilizar la ecuación de precios y una extensión de la función para obtener el VaR de la opción o del bono.

El punto de partida de todo análisis de riesgo es cada modelo estadístico de los factores de riesgo subyacentes, ya sean acciones, divisas, materias primas, tipos de interés o alguna otra cosa. Con un modelo de este tipo en la mano, podemos obtener medidas de riesgo, como el VaR, por métodos tales como los descritos. Sin embargo si tenemos opciones o bonos utilizamos otros métodos como por ejemplo simulaciones de Monte Carlo ya que nos permite permiten externalizar la mayor parte de los cálculos pesados a un ordenador.

Se ha implementado una forma sencilla de obtener el VaR por el método de Monte Carlo mediante el cual se simula el precio de un activo subyacente, aplicado las ecuaciones de precios analíticos y de ahí obtener la simulación de ganancias y pérdidas (P / L). De esta manera, es fácil obtener el VaR como la probabilidad p cuantil de la simulación de P/L, similar a la simulación histórica.

Después de finalizar este trabajo puedo afirmar que he adquirido nuevos conocimientos de estadística financiera.

7. BIBLIOGRAFÍA

- Jon Danielsson (2011) ***Financial risk forecasting***, Wiley Finance, J. Wiley & Sons Ltd, UK.

- Kirt C. Butler (2012) *Multinational Finance:* ***Evaluating the Opportunities, Costs, and Risks of Multinational Operations, 5th Edition*****,** Wiley Finance, J. Wiley & Sons, New Jersey.

- Apuntes de *Ingeniería Financiera*, Código de R y Teoría

- Apuntes de *Series Temporals*, Teoría

- Apuntes *Análisis Multivariante*, Teoría.

- www.economipedia.com, €conomipedia- Diccionario económico y financiero

- www.expansion.com, Expansión- Diario de Economía

- www.economia48.com, economía48- Diccionario de Economía

- https://es.finance.yahoo.com/, YAHOO! Finanzas

8. ANEXOS

Apartado 1

1.1)

```
> par(mfrow=c(2,1))

> Días=0:100
> ReturnX=numeric(101)
> ReturnX[5]=-100
> ReturnX[61]=-100
> ReturnX[79]=-100
> ReturnX[95]=-100
> plot(Días,ReturnX,type="l")
>
> Días=0:100
> ReturnY=numeric(101)
> ReturnY[5]=-100
> ReturnY[25]=-100
> ReturnY[42]=-100
> ReturnY[60]=-100
> plot(Días,ReturnY,type="l")
```

Apartado 2

```
library(evir)
library(quantmod)
library("tseries")


 > p1 = get.hist.quote(instrument = "msft",start = "2006-01-01",
 + end = "2015-12-31",quote = "AdjClose")
> p2 = get.hist.quote(instrument = "ibm", start = "2006-01-01",
 + end = "2015-12-31",quote = "AdjClose")
> y1=coredata(diff(log(p1)))
> y2=coredata(diff(log(p2)))
> y1=tail(y1,T-14)
> y2=tail(y2,T-14)
> T = length(y1)
> value = 1000
> y=cbind(y1,y2)
> p = 0.01
```

2.1)

```
> ys=sort(y1)
> op=T*p
> VaR1=-ys[op]*value
> VaR1
```

2.2)

```
> w = matrix(c(0.3,0.7))
> yp = y %*% w
> yps = sort(yp)
> VaR2 = -yps[op]*value
> VaR2
```

2.3)

```
> sigma=sd(y1)
> VaR3=-sigma*qnorm(p)*value7
> VaR3
```

2.4)

```
> sigma=sqrt(w' %*% cov(y) %*% w) # portfolio volatility
> VaR4 =-sigma * qnorm(p)*value
> VaR4
```

2.5)

```
> library(QRM)
> scRet=(y1)*100
> res=fit.st(scRet)
> sigma=res$par.ests[3]/100
> nu=res$par.ests[1]
> VaR5=-sigma*qt(df=un,p=p)*value
> VaR5
```

2.6)

```
> ES=sigma*dnorm(qnorm(p))/p*value

#Forma Directa
> VaR=-qnorm(p)
> integrar=function(q){q*dnorm(p)}
> ES1=-sigma*integrate(integrar,-Inf,-VaR$value/p*value)
```

2.7)

```
> library(fGarch)
> g = garchFit(~garch(1,1),y1,cond.dist = "norm",include.mean =
+ FALSE,trace = FALSE) # parameter estimates
> omega = g@fit$matcoef[1,1]
> alpha = g@fit$matcoef[2,1]
> beta = g@fit$matcoef[3,1]
> sigma2 = omega + alpha * y[T]^2 + beta * g@h.t[T]
> VaR9 = -sqrt(sigma2) * qnorm(p) * value
```

2.8)

```
> library(fGarch)
> g = garchFit(~garch(1,1),y1,cond.dist = "std",include.mean =
+ FALSE,trace = FALSE) # parameter estimates
> omega = g@fit$matcoef[1,1]
> alpha = g@fit$matcoef[2,1]
> beta = g@fit$matcoef[3,1]
> sigma2 = omega + alpha * y[T]^2 + beta * g@h.t[T]
> VaR9 = -sqrt(sigma2) * qnorm(p) * value
```

Apartado 3

3.1)

```
> Interés=c(1,3,5)
> Precio=c (892,484,319)
> plot(Interés, Precio)
> lines(Interés,Precio, type="l")
```

3.2)

```
> bs = function(X, P, r, sigma, T)
+ {
+ d1 = (log(P/X)+(r+0.5*sigma^2)*(T))/(sigma*sqrt(T))
+ d2 = d1-sigma*sqrt(T)
+ Call = P*pnorm(d1,mean=0,sd=1)-X*exp(-r*(T))*pnorm(d2,mean=0,sd=1)
+ Put =X*exp(-r *(T))*pnorm(-d2, mean=0,sd=1)-P * pnorm(-d1,mean = 0,
sd = 1)
+
+ Delta.Call = pnorm(d1, mean = 0, sd = 1)
+ Delta.Put = Delta.Call-1
+ Gamma = dnorm(d1, mean = 0, sd = 1)/(P*sigma*sqrt(T))
+
+ return(list(Call = Call,Put = Put,Delta.Call = Delta.Call,
+ Delta.Put = Delta.Put,Gamma = Gamma))
+ }
> bs(90,100,0.05,0.2,0.5)
```

Apartado 4

4.1)

```
> cur.rend= c(5.00,5.69,6.09,6.38,6.61,6.79,6.94,7.07,7.19,7.30)
> T = length(cur.rend)
> r = 0.07
> Par = 10
> cupon= r * Par # coupon payments
> dineroefectivo= 1:10 * 0 + cupon
> dineroefectivo[10] = dineroefectivo[10] + Par
> P = sum(dineroefectivo/((1 + cur.rend/100)^(1:T)))
> P
```

4.2)

```
> library(grDevices)
> set.seed(12)
> sigma = 1.5
> S=8
> r = rnorm(S,0,sigma)
> ysim = matrix(nrow = T,ncol = S)
> for (i in 1:S) ysim[,i] = cur.rend+r[i]
> ysim = matrix(matrix(cur.rend,T,S),ncol=S)+
matrix(t(matrix(r,S,T)),ncol=S)
> matplot(ysim, type="l",
+   xlab="Tiempo",ylab="Rendimientos %",
+   #labels = c("Verdadero", "Simulado")
+ )
```

4.3)

```
> SP = vector(length = S)
> for (i in 1:S){
+ SP[i] = sum(dineroefectivo/((1 + ysim[,i]/100)^(T)))
+ }
> SP = SP-(mean(SP)-P)
> barplot(SP, ylab="Precios Simulados €",
+ xlab="Simulaciones")
```

4.4)

```
> library(fOptions)
> P0 = 50
```

```
> sigma = 0.2
> r = 0.05
> T = 0.5
> X = 40
> f = bs(X,P0,r,sigma,T)
>
> GBSOption(S=50, X=40, Time=1/2,r=0.05, sigma=0.2,b=r)
```

4.5)

```
> S = 1e6
> set.seed(12)
> F = P0 * exp(r*T)
> ysim = rnorm(S,-0.5 * sigma * sigma * T,sigma * sqrt(T))
> F=F* exp(ysim)
> SP = F-X
> SP[SP < 0] = 0
> fsim = SP * exp(r*T)
> getOption("max.print")
[1] 99999
>
> hist(F,probability = TRUE,nclass = 100,ylim =
c(0,0.06),xlim=c(30,80),
+       ylab="Densidad",xlab="Precios de Futuro",
+ main= "Precios de Futuros")
> x = seq(min(F),max(F),length = 100)
> lines(x, dnorm(x, mean = mean(F), sd = sd(SP)))
```

4.6)

```
> S = 1e6
> set.seed(12)
> F = P0 * exp(r*T)
> ysim = rnorm(S,-0.5 * sigma * sigma * T,sigma * sqrt(T))
> F=F* exp(ysim)
> SP = F-X
> SP[SP < 0] = 0
> fsim = SP * exp(r*T)
> getOption("max.print")
[1] 99999


> hist(fsim,nclass = 100,probability = TRUE, xlim=c(0,35),main=
"Precios de Opciones",
+ ylab="Densidad",xlab="Precios Opción")
```

4.7)

```
> set.seed(1)
> S = 1e7
> s2 = 0.01^2
> p = 0.01
> r = 0.05
> P = 100
> ysim = rnorm(S,r/365-0.5 * s2,sqrt(s2))
> Psim = P * exp(ysim)
> q = sort(Psim-P)
> VaR14 =-q[p*S]
> VaR14
```

4.8)

```
> T = 0.25;
> X = 100;
> sigma = sqrt(s2 * 250);
> f = bs(X,P,r,sigma,T)
```

```
> fsim = bs(X,Psim,r,sigma,T-(1/365))
> q = sort(fsim$Call - f$Call)
> VaR15 = -q[p * S]
> VaR15
```

4.9)

```
> X1 = 100
> X2 = 110
> f1 = bs(X1,P,r,sigma,T)
> f2 = bs(X2,P,r,sigma,T)
> f2sim = bs(X2,Psim,r,sigma,T-(1/365))
> f1sim = bs(X1,Psim,r,sigma,T-(1/365))
>
> q = sort(f1sim$Call + f2sim$Put + Psim-f1$Call-f2$Put-P);
> VaR16 = -q[p * S]
> VaR16
```

4.10)

```
> library (MASS)
> mu = c(r/365,r/365)
> Sigma = matrix(c(0.01, 0.0005, 0.0005, 0.02),ncol = 2)
> set.seed(12)
> y = mvrnorm(S,mu,Sigma)
```

4.11)

```
> K=2
> P = c(100,50)
> x = c(1,1)
> Port = P %*% x
> Psim = matrix(t(matrix(P,K,S)),ncol=K)* exp(y)
> PortSim = Psim %*% x
> q = sort(PortSim-Port[1,1])
> VaR17 = -q[S * p]
> VaR17
```

4.12)

```
> f = bs(P[2],P[2],r,sigma,T)
>
> fsim = bs(P[2],Psim[,2],r,sigma,T-(1/365))
> q = sort(fsim$Call + Psim[,1]-f$Call-P[1]);
> VaR18 =-q[p*S]
> VaR18
```

9. METADATA

Título: Value at Risk (VaR)

Nombre del Autor: Anna González Pons

Nombre del Tutor: Alejandra Cabaña

Resumen:

- En este trabajo nos centramos en cálculo del valor en riesgo (VaR) para todo tipo de activos y la combinación de ellos (cartera). Hemos estudiado el método analítico del cálculo del VaR, para poder calcularlo de forma directa, pero no siempre es posible este método, como por ejemplo en Bonos y Opciones. Por ese motivo también hemos estudiado a través de simulaciones el cálculo del VaR para este tipo de activos.

- En aquest treball ens centrem en el càlcul del valor en risc (VaR) per a tot tipus d'actius i la combinació d'aquests (cartera). Hem estudiat el mètode analític del càlcul del VaR, per poder calcular-ho de forma directa, però no sempre es possible aquest mètode, com per exemple en Bons i Opcions. Per aquest motiu també hem estudiat a través de simulacions el càlcul del VaR per aquest tipus d'actius

- In this work we focus on calculating the value at risk (VaR) for all types of assets and combinations of them (portfolios). We have studied the analytical methods for cumputing the VaR directly, but since this method is not always feassible (e.g. for certain bonds and options), we have also atempted VaR calculation through simulations for this type of asset.

Palabras clave:

1. VaR
2. Riesgo
3. Black-Scholes
4. Monte Carlo
5. Bono
6. Opción
7. Activo