Universitat Autònoma de Barcelona

GRADO DE ESTADÍSTICA APLICADA

Trabajo final de grado

OPTIMIZACIÓN DE PORTAFOLIOS

Teoría, comparación y aplicaciones

Cristina Martínez Navarro

Septiembre del 2016

Tutorizado por:
Alejandra Cabaña Nigro

Resumen

Académicos y profesionales del mundo financiero, generalmente, optimizan los portafolios mediante el criterio de la media-varianza de Markowitz. Su objetivo es maximizar los beneficios esperados ajustados al riesgo para determinar el conjunto de carteras óptimas.
No obstante, existen otros criterios alternativos que tienen una idea subyacente y no menos plausible; el ratio de Sharpe y la maximización de la media geométrica tienen como objetivo maximizar el crecimiento esperado del capital invertido, con lo que su objetivo es optimizar la riqueza a largo plazo. Este criterio tiene varias propiedades atractivas y es fácil de implementar, sin embargo, parece haber tomado un papel secundario ante el problema de selección de carteras. Además, existe una extensión de la media geométrica, el criterio de Kelly; más desconocido en el mundo de las inversiones por su aplicación en los juegos de azar, este método considera que hay una proporción óptima del capital que un inversor debe invertir en cada activo en función de sus ventajas.
El objetivo final de este artículo es comparar los criterios mencionados desde una perspectiva teórica y empírica. Los resultados presentados y discutidos nos plantean la pregunta: ¿Están ajustando los académicos y profesionales las carteras con un enfoque útil a la realidad?
Palabras clave: Carteras de inversión, optimización, activos, Markowitz, ratio de Sharpe, MMG, criterio de Kelly.

Abstact

Academics and practitioners usually optimize portfolios on the basis of mean and variance of Markowitz. They set the goal of maximizing risk-adjusted returns and thus determine their optimal exposures to the assets considered.
However, there is an alternative criterion that has an equally plausible underlying idea; The Sharpe ratio and geometric mean maximization aims to maximize the growth of the capital invested, thus seeking to maximize terminal wealth. This criterion has several attractive properties and is easy to implement, and yet it seems to have taken a back seat to the maximization of risk-adjusted returns. Furthermore, there is an extension of maximization geometric mean called Kelly criterion; most unknown in the investments world due to its applied in gambling, this method considers that there is an optimal proportion of capital that investors should invest in each asset according to their odds.
The ultimate goal of this article is to compare both criteria from an empirical and theoretical perspective. The results reported and discussed leave the question: Are academics and practitioners overlooking a useful portfolio approach?
Keywords : Portfolio, Optimization, assets, Markowitz, Sharpe Ratio, GMM, Kelly Criterion.

Resum

Acadèmics i professionals del món financer, generalment, acostumen a optimitzar les carteres d'actius mitjançant el criteri de la mitjana-variància de Markowitz. Aquest fixa el seu objectiu en maximitzar els beneficis esperats ajustats al risc i en funció de com interactuen aquests dos parámetres detemina el conjunt de carteres óptimes.
No obstant, existeixen altres criteris alternatius que tenen una idea subjacent i no menys plausible; tant la taxa de Sharpe com la maximització de la mitjana geomètrica tenen com objectiu maximitzar el creixement esperat del capital invertit, per tal d'optimizar els guanys a llarg termini. Aquest criteri té diverses propietats que el fan atractiu i és senzill d'implementar, tot i així, sembla ser que ha adquirit un paper secundari a l'hora de solucionar el problema de selecció de carteres. A més, existeix una extensió de la mitjana geomètrica, el criteri de Kelly; més desconegut en el món de les inversions degut a les aplicacións en els jocs d'atzar, aquest mètode considera que hi ha una proporció òptima del capital que un inversor ha d'invertir en cada actiu en funció de les possibilitats.
L'objetiu final d'aquets article es comparar els criteris esmentats des d'una perspectiva teòrica i empírica. Els resultats presentats i discutits ens plantegen la pregunta: Estan ajustant els acadèmics y profesionals les carteras amb un enfoc útil a la realitat?
Paraules clau: Cartera d'inversions, optimització, actius, Markowitz, taxa de Sharpe, MMG, criteri de Kelly.

Índice

1. Introducción

1.1. Prefacio

Para mi proyecto de fin de grado de Estadística Aplicada he querido comparar distintos criterios que se utilizan para solucionar lo que se conoce comúnmente como problema de selección de carteras para obtener mayor rentabilidad de nuestras inversiones. Más allá de los modelos matemáticos que se aplican, no debemos olvidar que obtener ganancias depende de más factores como es la información privada que dispone el inversor, el estudio previo sobre el sector, el azar y la suerte, entre otros.

Desde siempre me ha interesado el mundo financiero y la Bolsa concretamente. Es un sector que ha despertado siempre mi curiosidad al igual que el mundo de la estadística, el cual desempeña un rol muy relevante. Quería conocer si existía una estrategia óptima que fuera más allá de la teoría moderna para obtener beneficios invirtiendo nuestro capital a un conjunto de activos financieros.

Fue a principio de curso de último año, cuando empecé la asignatura optativa de Introducción a la Ingeniería financiera, impartida por Alejandra Cabaña, que vi la posibilidad de realizar este trabajo. Quería profundizar en los aspectos teóricos en que se fundamentan los distintos modelos y algoritmos de optimización y no tanto en el análisis de datos (que también se realiza en el trabajo). Vi en este proyecto la oportunidad de poder entender las bases de los diferentes criterios, las restricciones y conocer las ventajas y carencias de cada método.

Actualmente la teoría de selección de carteras se ha vuelto un tema de lo más interesante y necesario que nunca. Existen muchas oportunidades de inversión disponibles y la cuestión de cómo los inversionistas deberían de integrar sus carteras una parte central de las finanzas. De esta cuestión se originó la teoría de carteras desarrollada por Harry Markowitz en 1952 y desde entonces han ido surgiendo otros criterios y teorías, ya sean basándose en este método o proponiendo enfoques alternativos, algunos de los cuales, se abordan en este trabajo.

Este artículo consta de dos partes. La primera parte es un enfoque teórico en que se describen por orden cronológico de aparición los métodos que han ido surgiendo al largo de la historia. El primer criterio es padre de la teoría de selección de carteras, el modelo de Markowitz, seguido del ratio de Sharpe.
Durante la documentación y búsqueda de información para realizar este trabajo me topé con un artículo escrito por Edward O. Thorp llamado *Undersanding The Kelly Criterion*[1] y me sorprendió que pese a su plausibilidad no se escuche nada de él. Tras indagar en él descubrí un método alternativo llamado maximización de la media geométrica, el cual conforma el tercer criterio que se estudia en el trabajo. Para terminar, se explica la aplicación del criterio de Kelly en finanzas como extensión que es de la maximización de la media geométrica.

La segunda parte pretende mostrar de forma empírica las diferencias entre los distintos métodos analizando la base de datos con la serie temporal de los beneficios de empresas de baja capitalización en el marcado de Estados Unidos entre 1997 y 2001. Se compararán los criterios usando el lenguaje/software R.

[1] Reproducción revisada a partir de dos columnas de *A Mathematician on Wall Street* en la revista *Wilmott Magazine*, mayo y septiembre de 2008. Editado por Bill Ziemba

1.2. Glosario

Un **activo financiero** es un tipo de activo intangible que representa un derecho legal sobre una cantidad monetaria futura. Un **portafolio** o **cartera** de inversión, es una determinada combinación de activos financieros en los cuales se invierte el capital. Una cartera de inversiones puede estar compuesta por una combinación de algunos instrumentos de renta fija y renta variable. El **mercado financiero** es el espacio en el que tiene lugar el intercambio de productos financieros y donde se fijan sus precios. Es aquí, en el mercado financiero, donde se negocian los activos y contratos de derivados.

Son activos financieros las acciones, las obligaciones, las opciones, los futuros, etc. La adquisición de activos financieros se le denomina **inversión financiera**. Cuando una persona, o empresa, adquiere un conjunto de activos financieros se dice que está en posesión de una cartera de valores. Así, por ejemplo, una cartera puede estar compuesta de 500 acciones de Inditex, 850 de Repsol, 375 del Banc Sabadell, 2.500 obligaciones del Estado a 10 años y 1.100 obligaciones de Iberdrola.

Las inversiones financieras, como cualquier proyecto de inversión, se componen de un desembolso inicial y de unos flujos de caja (dividendos, intereses, derechos de suscripción preferentes, o los ingresos de la venta de la totalidad o de parte de la cartera), por lo que el análisis de este tipo de inversión seguirá el mismo procedimiento que el de cualquier otro proyecto sea éste de ámbito financiero o real. Es preciso tener en cuenta que una inversión financiera se diferencia de una productiva en los siguientes aspectos:

- Es fraccionable: Se pueden adquirir 1, 5, 165 o 1.000 acciones, por ejemplo.
- Tiene mayor liquidez: si cotiza en bolsa se pueden comprar y vender en un corto plazo de tiempo.
- Es diversificable: Se pueden comprar activos financieros emitidos por diferentes emisores.
- Tiene una mayor flexibilidad temporal: las acciones tienen un vencimiento indefinido y el de las obligaciones es conocido de antemano.

Entre los objetivos que una persona puede tener a la hora de formar una cartera de inversión podemos destacar, el conseguir una cierta rentabilidad sobre un capital, evitar en lo posible la erosión inflacionaria sobre el dinero ahorrado, lograr una cierta liquidez, gestionar un fondo de pensiones, etc.
Supongamos que un inversor tiene una suma determinada de dinero que desea invertir en el momento actual en una serie de activos financieros. Este dinero deberá permanecer invertido durante cierto tiempo al final del cual venderá los títulos, procediendo a consumir o a reinvertir el dinero recibido.

1.3. Conceptos básicos

En la teoría de portafolios suponemos que hay dos características fundamentales de los activos que determinan el comportamiento que toma un inversor. Primero, su **rendimiento**, es decir, la ganancia proporcional a su inversión. Segundo, el **riesgo**, definido como las fluctuaciones del rendimiento. Para esto, debemos entender antes de todo como se calculan los beneficios de los activos financieros.

Definimos P_t como el precio de la acción u otro producto financiero en el tiempo t. Dada una escala de tiempo τ, el τ-periodo de los beneficios simples en el tiempo t, $R_t(\tau)$, la tasa de cambio obtenida en el precio durante el periodo de tiempo en que el inversor tiene su capital invertido en el activo que va de $t-\tau$ hasta t. Así pues, la serie de beneficios simples se define como

$$R_t(\tau) = \frac{P_t - P_{t-\tau}}{P_{t-\tau}} = \frac{P_t}{P_{t-\tau}} - 1 \tag{1}$$

De la expresión resultante vemos que la fracción $\frac{P_t}{P_{t-\tau}}$ será mayor que 1 si el precio del activo ha aumentado desde que se adquirió hasta t, o bien si ha bajado respecto al precio de compra será menor que 1. Para terminar se resta una unidad y con se logra definir la rentabilidad ya que será un valor positivo si se ha incrementado el valor del activo en el periodo de tiempo que tenemos capital invertido o bien será negativo si se ha devaluado.
El beneficio bruto obtenido en el tiempo t es $R_t(\tau) + 1$. Si $\tau = 1$ tenemos un beneficio simple de un periodo bruto y lo denotan R_t.

Existe una razón práctica por la cual se definen los beneficios en el pasado (es decir, desde $t-\tau$ a t) y es que la mayoría de veces se quiere conocer la rentabilidad obtenida hoy por un activo comprado en algún momento del pasado.
Hay que tener en cuenta que los valores de los beneficios pueden ir de - 1 de a infinito, por lo que en principio no se puede perder más de lo que se ha invertido pero en contraposición puedes obtener ilimitadas ganancias.
Así pues, el beneficio simple bruto obtenido durante el τ-periodo en el tiempo t (desde que adquirimos un activo hasta el tiempo t) es igual al producto de los beneficios brutos simples logrados desde el tiempo $t-\tau$ hasta t:

$$\begin{aligned} R_t(\tau) + 1 &= \frac{P_t}{P_{t-\tau}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} \cdot \frac{P_t}{P_{t-2}} \cdots \frac{P_{t-\tau+1}}{P_{t-\tau}} \\ &= (1+R_t) \cdot (1+R_{t-1}) \cdots (1+R_{t-\tau+1}) \end{aligned} \tag{2}$$

Los beneficios son independientes a la magnitud del precios, pero no lo son del periodo de tiempo τ, el cual puede ser minutos, días, semana o años o cualquier otra escala de tiempo, pero siempre expresado en unidades. Si no se especifica lo contrario, se asume que la escala de tiempo es de un año, y en este caso, se le denomina ratio de rentabilidad anual. Se define como la rentabilidad anual

$$Anual(R_t(\tau)) = \left(\prod_{j=0}^{\tau-1} (1+R_{t-j}) \right)^{1/\tau} - 1 \tag{3}$$

Vemos que esta ecuación corresponde a la media geométrica de la rentabilidad simple bruta de un τ-periodo. Por teoría sabemos que el logaritmo de la media geométrica es igual a la media aritmética de los logaritmos de los valores de la variable, con lo que aplicamos logaritmos en cada lado de la igualdad y seguidamente, aplicamos la exponencial, quedando como resultado

$$Anual(R_t(\tau)) = exp\left(\frac{1}{\tau} \sum_{j=0}^{\tau-1} ln(1+R_{t-j}) \right) - 1 \tag{4}$$

donde $r_t = ln(1+R_t) = ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = lnP_t - lnP_{t-1}$ se conoce como rentabilidad compuesta continua o bien *log-return*. Es decir, $r_t(\tau)$ no es más que la suma de rentabilidades durante el τ-periodo.

2. Criterio Media-Varianza de Markowitz

Este criterio fue originado por Harry Markowitz, un académico estadounidense de finanzas y premio nobel de economía en 1990, autor de un artículo sobre selección de carteras publicado en 1952, en el cual presentó las bases en la gestión de carteras de inversión, revolucionando así el mundo de las finanzas.

2.1. Marco teórico

La teoría moderna de la selección de cartera *(modern portfolio theory)* propone que el inversor debe abordar la cartera como un todo, estudiando las características de riesgo y rentabilidad global, en lugar de escoger valores individuales en virtud de la rentabilidad esperada de cada valor en particular.
En su modelo, Markowitz, dice que los inversionistas tienen una conducta racional a la hora de seleccionar su cartera de inversión y por lo tanto siempre buscan obtener la máxima rentabilidad sin tener que asumir un alto nivel de riesgo. Nos muestra también, como hacer una cartera óptima disminuyendo el riesgo de manera que el rendimiento no se vea afectado.
Para poder integrar una cartera de inversión equilibrada lo más importante es la diversificación ya que de esta forma se reduce la variación de los precios. La idea de la cartera es, entonces, diversificar las inversiones en diferentes mercados y plazos para así disminuir las fluctuaciones en la rentabilidad total de la cartera y por lo tanto también del riesgo.

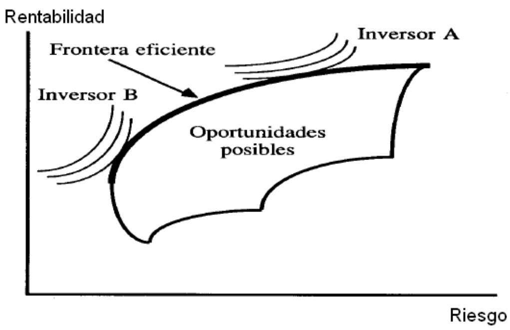


Figura 1: Relación entre rentabilidad y riesgo según Markowitz.

Este modelo define la manera de medir la rentabilidad y la volatilidad de un portafolio y cómo este último concepto de riesgo está íntimamente ligado con lo que conocemos como diversificación. Como un portafolio no es nada más que un conjunto de activos, el problema se podría reducir a seleccionar la mejor cartera que existe entre el conjunto de posibles combinaciones, pero nos encontraremos con un contratiempo: el inversor pretende obtener la más alta rentabilidad para su inversión, y al mismo tiempo quiere asumir el menor riesgo posible.
El cálculo de la rentabilidad de la cartera es el promedio ponderado de las rentabilidades de los activos, mientras que el cálculo de la volatilidad de la cartera difiere de ello. La unión de varios activos bajo un mismo capital de inversión conlleva a obtener distintos comportamientos y tendencias con lo que existirán mayores combinaciones ya que se comportan como lo harían cada uno independientemente y cuando estos conforman una cartera, le ceden al inversor el beneficio de la diversificación.

2.2. Regla Media-Varianza y Diversificación

Markowitz (1952) establece el objetivo de fijar las posibles combinaciones de rentabilidad (R) y riesgo que se puede elegir, siendo el peso asignado a los activos (w) la variable sobre la cual va a tener capacidad de decisión el sujeto en cuestión.

Beneficios de un portafolio:

Sea $\wp$ un portafolio de N activos y n_i el número de acciones del activo i en $\wp$, para $i = 1$,..,N. Entonces, en cierto tiempo t, el valor neto del portafolio es:

$$P_t^{\wp} = \sum_{i=1}^{N} n_i P_t^i \tag{5}$$

donde P_t^i es el precio del activo i en t. Si lo aplicamos a un periodo de tiempo τ obtenemos que:

$$R_{i,t} = \frac{P_{i,t} - P_{i,t-1}}{P_{i,t-1}} \qquad \text{donde i= 1...N} \tag{6}$$

que equivale a la tasa de variación de los precios de un activo en un período t dado.
El $R_{i,t}$ para un periodo τ en un tiempo t, es decir, el promedio ponderado al riego de los beneficios del activo i en el tiempo t, lo podemos calcular como,

$$R_t^{\wp}(\tau) = \sum_{i=1}^{N} w_i R_{i,t}(\tau) \tag{7}$$

donde $R_{i,t}(\tau)$ son los beneficios en el τ-período del activo i en el tiempo t, y w_i es el peso o la proporción del activo i en el portafolio $\wp$ y se define como

$$w_i = \frac{n_i P_{t-\tau}^i}{\sum_{j=1}^{N} n_j P_{t-\tau}^j} \tag{8}$$

Así pues, el portafolio queda determinado por el vector de pesos w_i que nos indicará la proporción de nuestro capital que debemos invertir en cada activo que optimiza los beneficios ponderados al riesgo. En este modelo, las alternativas posibles son:

- Si $w_i > 0$ significa posiciones largas en el portafolio.
- Si $w_i < 0$ significa posiciones cortas en el portafolio.
- Si $w_i = 0$ significa que no hay posiciones adoptadas en el íessimo activo.

El modelo de selección de la cartera de Markowitz parte de la hipótesis que los inversores deberían considerar la rentabilidad esperada positiva y dejar en segundo plano su volatilidad. Y esto tiene una clara explicación matemática en la creencia ampliamente aceptada entre los inversores sobre la importancia de la diversificación en la selección. Tenemos que $\wp$ es un portafolio con N activos de riesgo. Como vemos en la expresión (8) el portafolio queda determinado por un vector de pesos $w_i = (w_1, \ldots, w_N)$, donde si $W_i = 0$ indica que el activo i no formará parte del portafolio. A partir de ahora nos referiremos al portafolio por el vector de pesos que lo defina y con tal de simplificar omitiremos los parámetros t y τ siempre que sea posible, es decir en

notación matemática, usaremos R_t^w en vez de $R_t^{\wp}(\tau)$ para referirnos a su rentabilidad.
El valor medio o beneficio esperado en el tiempo t para el portafolio w es

$$\mu_w = E(R_t^w) = \sum_{i=1}^{N} w_i \cdot E(R_{i,t}) \tag{9}$$

$$\text{sujeto a } \textstyle\sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \text{ , } w_i \geq 0 \text{ para toda } i = 1...n$$

A la misma vez se define la varianza del portafolio w, la cual pretendemos minimizar, como

$$\sigma_w^2 = Var(R_t^w) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij} \tag{10}$$

donde σ_i es la desviación típica de $R_{i,t}$, $\rho_{i,j}$ es el coeficiente de correlación de los beneficios de los activos de i y j, $\sigma_{i,j} = Cov(R_{i,t}, R_{j,t})$ es la covarianza de las rentabilidades de los activos i y j.
Notamos que $\sigma_{i,i} = Cov(R_{i,t}, R_{i,t}) = \sigma_i^2$

Necesitamos saber como se correlacionan los diferentes activos del portafolio para lograr la combinación óptima que debemos escoger ya que al ir cambiando los valores de w, obtenemos pares de rentabilidad y riesgo, que representan las distintas alternativas posibles, comprendiendo de esta manera el conjunto factible.

Es por eso que la **diversificación** viene dada básicamente por la correlación entre las rentabilidades de cada par de activos de la cartera, es decir, cómo se comportan los rendimientos de un activo respecto al otro.
Para medir esa correlación usamos el Coeficiente de Correlación de Pearson y para calcular la volatilidad de una cartera usamos la desviación típica de sus rendimientos que contienen implícitamente esta correlación. La formalización matemática de la diversificación se define siguiendo dos casos extremos de la correlación entre los activos:

- **Escenario 1:** La correlación entre las rentabilidades de los activos del portafolio están incorreladas dos a dos, es decir, para todo $i \neq j$, $\rho_{i,j} = 0$.
  En este caso, la varianza resulta:

  $$Var(R_t^w) = \sum_{i=1}^{N} (w_i)^2 \sigma_i^2 \tag{11}$$

  Si asumimos que los activos de la cartera tienen el mismo peso, es decir, $w_i = \frac{1}{N}$, tenemos que

  $$Var(R_t^w) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^2 \leq \frac{\sigma_M^2}{N} \tag{12}$$

  donde $\sigma_M = max[\sigma_i : i = 1, ..., N]$.
  De esta expresión observamos que si N tiende a infinito la variancia de las rentabilidades tiende a 0. Esto significa que cuanto mayor es el número de pares de activos que no estén correlacionados, más próxima a cero será la desviación de las rentabilidades del portafolio y en consecuencia, menor será el riesgo de este.

- **Escenario 2:** Las correlaciones entre las rentabilidades de los activos dos a dos del portafolio son similares y constantes al largo del tiempo. Este caso teórico se puede llevar a cabo considerando que todos los rendimientos de los activos que conforman la cartera tienen la misma varianza (σ^2 constante) y la correlación es $\rho_{i,j} = c \leq 1$. Además asumimos como en el escenario anterior que el conjunto de pesos es igual para todos los activos. Así pues, para todo $i \neq j$ $\sigma_{i,j} = Cov(R_{i,t}, R_{j,t}) = c \cdot \sigma^2$,

$$\begin{aligned} Var(R_t^w) &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_i w_j \sigma_{i,j} \\ &= \frac{1}{N^2}(\sum_{1\leq i\leq N} \sigma_{ii} + \sum_{1\leq i\leq j\leq N} \sigma_{ij}) \\ &= \frac{\sigma^2}{N} + (1-\frac{1}{N})c\sigma^2 = \frac{(1-c)}{N}\sigma^2 + c\sigma^2 \end{aligned} \tag{13}$$

  Esto demuestra que no importa cuán grande sea N ya que no se podrá reducir la varianza de la cartera por debajo de $c\sigma^2$. La conclusión que se puede sacar es que cuanto mayor es la presencia de activos correlacionados similarmente entre sí, más próximo está el riesgo del portafolio al riesgo común de todos los activos.

Por lo tanto, la diversificación siguiendo el criterio de media-varianza se lleva a cabo teniendo en cuenta los activos que proporcionan una correlación razonablemente baja. Markowitz, tras la representación de los distintos trazados que puede realizar la varianza de una cartera en función de N, otorgado por cualquiera de los casos anteriores, se ha concluido que escogiendo alrededor de entre 15 a 20 activos, son números razonables para el tamaño de una cartera.

2.3. Riesgo mínimo de la Media-Varianza del Portafolio

En este apartado pretendemos buscar la combinación de pesos que nos retorna mayor beneficio esperado mientras la varianza sea mínima. Para obtener el portafolio $\wp$ con N activos de riesgo determinado por el vector w, definimos la matriz

$$C = [\sigma_{i,j}]_{i\leq 1, j\leq 1} \tag{14}$$

donde $\sigma_{ij} = Cov(R_{i,t}, R_{j,t}) = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$, y definimos también el vector de rentabilidades esperadas como $\mu = (\mu_1 \ldots \mu_N)$, donde recordamos que μ_i es el valor esperado de beneficio del activo i en el portafolio. Con estas expresiones podemos reescribir la rentabilidad esperada y la varianza del portafolio como

$$E(R_t^w) = w'\mu \quad \text{y} \quad Var(R_t^w) = w'Cw \tag{15}$$

Según media de los rendimientos en comparación con la variación de la regla de los retornos del Markowitz, la principal preocupación de los inversores es el de obtener un cierto nivel de prestaciones en virtud de la cantidad más pequeña posible de riesgo. Por lo tanto, el problema de selección de la cartera de Markowitz se centra en encontrar los pesos $w = (w_1, \ldots, W_N)$ de tal manera que, para una tasa de rentabilidad esperada de $r* = E(R^w)$ el rendimiento esperado de la cartera está determinado por w y $r*$, mientras que su varianza $Var(R^w)$ sea mínima.

$$\min \quad Var(R_t^w) = w'Cw \tag{16}$$

$$\text{sujeto a:} \quad w'\mu = r* \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \tag{17}$$

Para encontrar dicha varianza, el criterio de Markowitz plantea un problema de programación cuadrática con restricciones lineales que se puede resolver mediante un sistema de ecuaciones lineales. Se puede expresar como

$$2\sum_{j=1}^{N} w_j\sigma_{ij} - \lambda_1\mu_1 - \lambda_2 = 0 \quad \text{para i=1,...,N}$$

$$\text{Sujeto a } \sum_{i=1}^{N} w_i\mu_i = r* \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{N} w_i = 1.$$

Las restricciones indican que el sujeto invierte todo su presupuesto para los N activos. Bajo estas condiciones, este problema puede ser resuelto analíticamente mediante multiplicadores de Lagrange, el cual queda planteado para N + 2 (son dos restricciones) ecuaciones con N + 2 pesos $w_1, \ldots, w_N, \lambda_1, \lambda_2$ desconocidos como: De la solución de este sistema lineal se obtienen los pesos para una cartera con una media de $r*$ y con la varianza más pequeña posible. Esta solución se denomina **eficiente** en el sentido de que se trata de la cartera mejor balanceada entre rentabilidad esperada $r*$ y mínima varianza.

2.4. La frontera eficiente

Para un conjunto de activos N que construyen una cartera hay que tener en cuenta, como hemos ido viendo hasta ahora, los distintos valores de r^* de rendimiento esperado y para cada uno de estos resolver el sistema de ecuaciones.
Así se obtienen las distintas soluciones eficientes de los pesos $w*$ como resultado de las combinaciones posibles de los activos dentro del portafolio que generan mayor rentabilidad esperada (r^*) y menor varianza, por consiguiente, la desviación estándar $\sigma* = \text{std}(R^w*)$.

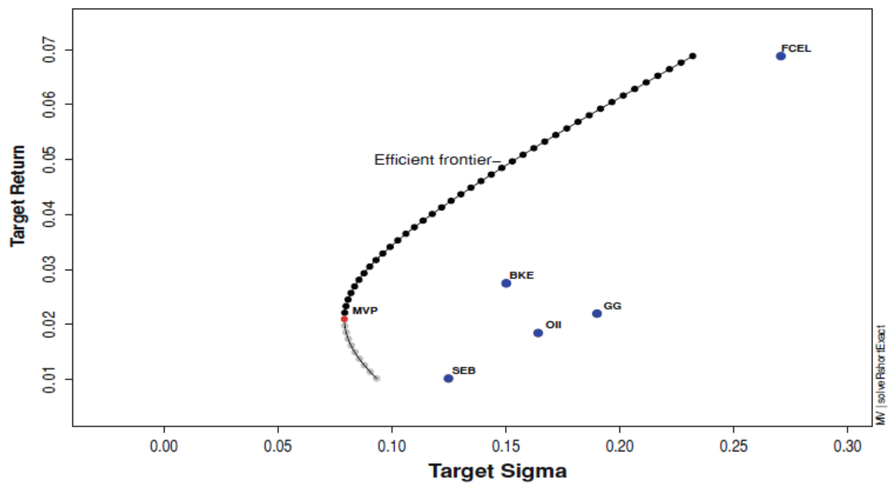


Figura 2: Frontera eficiente y MVP.

Si representamos el conjunto de puntos ($\sigma*$, $r*$) obtenidos en un mismo plano (riesgo vs. media), tenemos los resultados en la parte derecha de la hipérbola generada como podemos ver en la figura 2. El vértice de esta hipérbola tiene como coordenadas la desviación estándar y los beneficios de la cartera de mínima varianza (MVP). Denotemos estos valores como σ_{MVP} y r_{MVP}, respectivamente.

La parte de la curva por encima del punto (σ_{MVP}, r_{MVP}), es decir, donde los puntos ($\sigma*$, $r*$) para $r*¿r_{MVP}$ obtenidos a partir de las soluciones de $w*$, se denomina la **frontera eficiente** y el punto de inflexión es el locus mínima varianza (MVP). En la figura anterior se puede observar los conceptos descritos y las posiciones en el gráfico de riesgo-media de cinco activos que se utilizan para construir carteras eficientes. La región definida por la derecha de la hipérbola (es decir, por debajo y que incluye la frontera eficiente y por encima del locus mínima varianza) es el conjunto factible de las carteras de media-varianza. Cualquier punto que se encuentre en esta región factible es un par ($sigma_w$, r_w) que verifica las ecuaciones de la optimización.

Tras estudiar profundamente el modelo que propone Markowitz vemos que tiene una idea muy intuitiva y práctica para resolver el problema de selección de carteras, no obstante, el modelo tiene deficiencias ya que brinda al inversor la elección final del portafolio tras proporcionar la frontera eficiente y eso puede generar errores de elección ya que es subjetivo al inversor.

La teoría de selección de cartera de Markowitz toma en consideración la rentabilidad esperada a largo plazo y la volatilidad esperada a corto plazo. En este método la volatilidad se trata como un factor de riesgo, y la cartera se conforma en función de la tolerancia al riesgo de cada sujeto. Además, el criterio se basa en un único periodo de tiempo el cual no se adapta a la realidad.

Más allá de sus incongruencias, es un buen criterio para conocer la relación entre los activos y estudiar que combinación de activos genera mayor rentabilidad asumiendo el menor riesgo posible. Los inversionistas siguieron esta recomendación y adoptaron, además, la maximización de los rendimientos ajustado al riesgo, medido por el ratio de Sharpe como criterio básico para la selección de la cartera. Este criterio se explica en el siguiente apartado.

3. Maximización del Ratio de Sharpe

Este criterio fue desarrollado por el premio Nobel William Sharpe. El ratio de Sharpe es el rendimiento libre de la tasa de riesgo medio obtenido por unidad de volatilidad:

$$RS = \frac{E(R^w) - r_f}{std(R^w)}$$

Para entender en que consiste este criterio se necesita conocer los rendimientos del *Market Portfolio* para una cartera de activos con riesgo determinado.

3.1. *Capital Market Line* y *Market Portfolio*

Consideramos la frontera eficiente, EF, para carteras de activos con riesgo y el punto $(0, r_f)$, correspondiente al activo libre de riesgo.

El ***Capital Market Line*** (CML) es la línea tangente resultante de unir el intercept (eje de coordenadas) con el punto $(0, r_f)$ en el plano de media-varianza. Esta línea tangente contiene todas las carteras eficientes conocidas, y en el punto de la recta CML donde hace contacto con la curva EF (frontera eficiente) nos proporciona las coordenadas de la desviación estándar y la rentabilidad esperada de una cartera en particular, la cual se conoce como *Market Portfolio*.

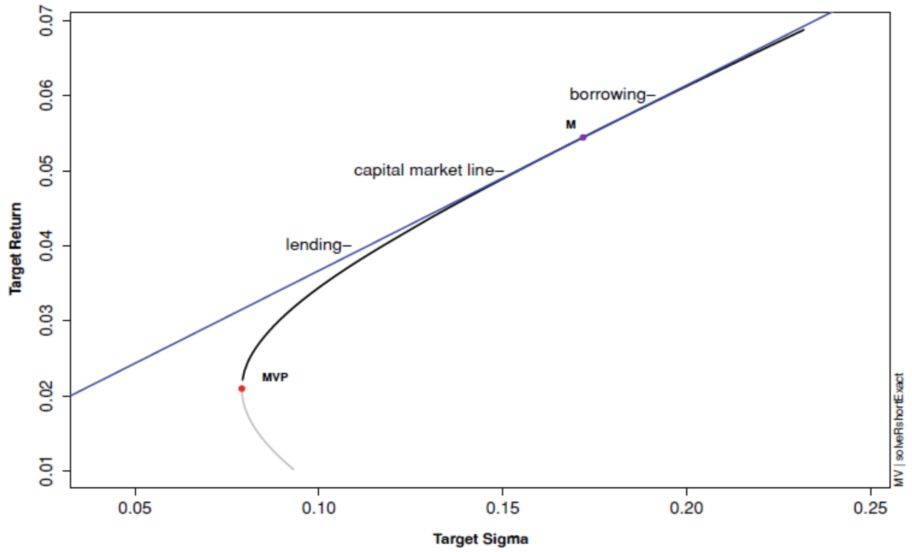


Figura 3: Frontera eficiente de carteras libres de riesgo con activos con $r_f = 2\,\%$. Capital Market Line (Azul); Market Portfolio (M)

La **cartera de mercado o *Market Portfolio*** es la cartera que maximiza $tan\theta$, es decir, la cartera con la relación (mayor rentabilidad)/ riesgo óptima siendo el portafolio más representativo del mercado ya que contiene para todo activo la proporción al peso de la acción en el mercado. Veamos por qué esto es así. Tenemos θ que es el ángulo generado entre el eje horizontal y la línea que pasa por (0,r_f) y el punto (std(R^w), E(R^w)) que corresponde a una cartera viable de activos con riesgo. Entonces,

$$tan\theta = \frac{E(R^w) - r_f}{std(R^w)} \tag{18}$$

Restando la tasa libre de riesgo de la rentabilidad media, el rendimiento asociado con actividades de riesgo puede ser aislado. De este cálculo podemos extraer la idea que si invirtiéramos toda una cartera en activos libres de riesgo, tales como la compra de bonos del Tesoro estaríamos jugando a riesgo cero y, para los que el rendimiento esperado es la tasa libre de riesgo, dicha cartera tendría un ratio de Sharpe de exactamente cero.

3.2. Ratio de Sharpe

Consideramos (std(R_M),E(R_M)) como el punto que describe el *Market Portfolio*, el cuál llamaremos $\wp_M$, también conocido como el portafolio tangente o punto de contacto entre CML y EF_r. Como hemos visto anteriormente, (0,r_f) representa el activo libre de riesgo, entonces, cualquier punto (std(R^w), E(R^w)) sobre la recta CLM es, una cartera eficiente con:

$$E(R^w) = w_f \cdot r_f + (1 - w_f)E(R_M) \quad \text{rentabilidad esperada y}$$

$$std(R^w) = (1 - w_f) \cdot std(R_M) quad \text{desviación típica}$$

donde W_f es la proporción de capital que debe invertir en el activo libre de riesgo. Si:

- $w_r \geq 0$ estaremos prestando de tasas libres de riesgo.
- $w_r < 0$ nos estamos vendiendo a la tasa libre de riesgo, con lo que deberíamos incrementar nuestras inversiones en activos con riesgo.

Llegados aquí redefinimos la recta CML como

$$\begin{aligned} E(R^w) &= r_f + (1 - w_f)(E(R_M) - r_f) \\ &= r_f + \frac{(E(R_M) - r_f)}{std(R_M)} std(R^w) \end{aligned} \tag{19}$$

La expresión $SR_M = \frac{E(R_M)\hat{a}r_f}{std(R_M)}$ es conocida como el *Sharpe Ratio* del *Market Portfolio*. Cuanto mayor sea el ratio de Sharpe, mejor será la inversión, siendo el ratio de Sharpe óptimo el perteneciente al *Market Portfolio*, es decir, cuando $SR^w = SR_M$.

3.3. Optimización

Este método nos garantiza la mejor proporción posible que puedes asumir de variabilidad en los beneficios de los activos financieros. La maximización tiene como restricción ninguna venta es posible a corto plazo. Este problema se puede escribir con notación matemática como

$$Max_{w_1,\ldots,w_N} \quad SR_\wp = \frac{\mu_\wp - r_f}{\sigma_\wp} = \frac{\sum_{i=1}^N w_i \mu_i - r_f}{\sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij}}} \tag{20}$$

$$\text{Sujeto a:} \quad \sum_{i=1}^N w_i = 1 \quad \text{y} \quad w_i \geq 0 \quad \text{para toda i} \tag{21}$$

En general, cuanto mayor es el valor del ratio de Sharpe más atractiva es la rentabilidad ajustada al riesgo. Este método no deja de ser interesante de contrastar ya que proporciona la rentabilidad más alta por unidad de riesgo asumida además de informar el estado del mercado en el que nos movemos.

4. Criterio Media Geométrica

Existen otros criterios alternativos menos populares entre los académicos y profesionales que consisten en maximizar el crecimiento del capital invertido a largo plazo. Este es el caso del criterio *Geometric Mean Maximization*(GMM), que se basa en la maximización de la media geométrica de los beneficios de una cartera. A simple vista, la idea parece ser tan plausible como la maximización de la beneficios ajustados al riesgo de Sharpe.

Markowitz (1952) fue el primero en apostar por el enfoque de la media-varianza y la selección de carteras con la menor volatilidad posible con tal de obtener altos beneficios, o bien, el mayor rendimiento para un nivel de riesgo predeterminado.
Sharpe (1964), Lintner (1965), y Mossin (1966) complementaron esta idea con el argumento de que, dada una tasa libre de riesgo, la combinación óptima de los activos de riesgo está dado por el mercado de la cartera (*Portfolio Market*).
La selección de la cartera de activos de riesgo que maximiza el ratio de Sharpe ha sido el criterio estándar para académicos y profesionales desde entonces.

4.1. Marco teórico

Los orígenes del criterio GMM están ligados la estrategia de juegos de azar desarrollada por John Kelly (1956) que analizó la estrategia de una apuesta óptima en los juegos considerando la información privada que tiene un jugador.
Él consideraba que los juegos de azar tenían cierta información privada que generaba ruido; se debía realizar un alto número de apuestas con efectos acumulativos (reinvirtiendo ganancias y pérdidas) y apostar una proporción constante de nuestro capital en cada ronda. Con estas condiciones, Kelly se preguntó cuánto debería apostar un jugador con tal de obtener el mayor beneficio a largo plazo.

En cierto modo, no es del todo cierto que exista ruido en los juegos de azar por lo tanto si apostaba una alta proporción de capital, eso le llevaría a la ruina; no obstante, como la información privada es valiosa, al apostar poco no estaría aprovechando al máximo las ventajas de la inversión. Por lo tanto, dedujo que debía existir una proporción de capital a invertir en cada apuesta que optimizaba el beneficio a largo plazo. Esta proporción, Kelly la expresó como

$$K = \frac{E}{O} = \frac{\text{valor esperado de la apuesta o inversión (Edge)}}{\text{ganancias potenciales por euro apostado (Odds)}}$$

En este apartado no profundizaremos más en el criterio de Kelly ya que se explica más adelante, pero sí que debemos resaltar algunas propiedades del sistema de apuestas de Kelly que son compartidos por la versión de selección de carteras del criterio GMM:

- El inversor nunca corre el riesgo de ruina. Su capital, nunca puede ser totalmente perdido.
- Las ganancias a largo plazo son más probables que cualquier otra estrategia (aunque no seguras)
- Las inversiones pueden ser muy agresivas (cuando las oportunidades son muy atractivas).
- El paseo puede ser muy desigual (volátil)
- Invertir más (o menos) de K aumenta el riesgo (o lo disminuye) y disminuye el crecimiento del capital.

En 1959, Henry Allen Latane, argumentó que Markowitz había desarrollado un método para la determinación de carteras eficientes, pero no una forma de seleccionar una de entre todas las posibles. De hecho, en el marco propuesto por Markowitz, la elección de una cartera específica de los de la frontera eficiente es subjetiva.
Sin embargo, Latane buscaba un criterio más objetivo y argumentó que la elección óptima de un inversor racional que tenía como objetivo maximizar su rentabilidad esperada a largo plazo entre un gran número de posibilidad, todas ellas con incertidumbres y acumulación de decisiones era la estrategia que tuviera mayor probabilidad de lograr mayor riqueza a largo plazo. También argumentó que tal estrategia sería la que tuviese mayor rentabilidad al calcular la media geométrica de los beneficios.

Por lo tanto, al igual que Kelly (1956) introdujo el criterio GMM al mundo de los juegos de azar, Latane (1959) lo introdujo en el mundo de la inversión.

4.2. Maximización de la media geométrica

Maximizar los beneficios mediante la media geométrica puede ser implementado de distintas maneras. Ziemba (1972), Elton and Gruber (1974), Weide, Peterson, and Maier (1977), Bernstein and Wilkinson (1997), todos han propuesto distintos algoritmos para resolver este problema. El que proponemos a continuación es sencillo de implementar y además, utiliza lo mismo que el criterio de Sharpe.
Con tal de obtener los pesos óptimos de los activos en la cartera con el criterio GMM definimos R como Beneficio simple y $r = ln(1+R)$, donde su media geométrica (GM) viene dada por:

$$1 + GM(R) = \left(\prod_{i=1}^{N}(1+R_i))\right)^{1/N} \quad \text{donde N es el número de retornos en la muestra} \tag{22}$$

Cogemos logaritmos a los dos lados de la expresión

$$ln(1+GM(R)) = (\frac{1}{N}) \cdot \sum_{i=1}^{N}(1+R_i) = (\frac{1}{N}) \cdot \sum_{i=1}^{N}(r_i) = E(r) = \mu \tag{23}$$

donde μ_i se corresponde a la media aritmética (o valor esperado) de r. Entonces,

$$GM(R) = \exp E(r) - 1 = \exp \mu - 1 \tag{24}$$

Aplicamos el teorema de Taylor para aproximar $ln(1+R) = r$ sobre el rendimiento de μ

$$ln(1+R)_\mu \approx ln(1+\mu) + \frac{R-\mu}{1+\mu} - \frac{(R-\mu)^2}{2\cdot(1+\mu)^2} + \frac{(R-\mu)^3}{3\cdot(1+\mu)^3} - \frac{(R-\mu)^4}{4\cdot(1+\mu)^4} + \cdots, \tag{25}$$

y si realizamos la esperanza en cada lado de la ecuación tenemos

$$E[ln(1+R)_\mu] = E(r) \approx ln(1+\mu) - \frac{E[(R-\mu)^2]}{2\cdot(1+\mu)^2} + \frac{E[(R-\mu)^3]}{3\cdot(1+\mu)^3} - \frac{E[(R-\mu)^4]}{4\cdot(1+\mu)^4} + \cdots, \tag{26}$$

Finalmente, si substituimos de la primera expresión GM(R) obtenemos

$$GM(R) \approx exp\left(ln(1+\mu) - \frac{E[(R-\mu)^2]}{2\cdot(1+\mu)^2} + \frac{E[(R-\mu)^3]}{3\cdot(1+\mu)^3} - \frac{E[(R-\mu)^4]}{4\cdot(1+\mu)^4} + \cdots\right) - 1 \tag{27}$$

y ignorando todos los momentos superiores a segundo orden[2] se conoce como la media geométrica de los beneficios, como la siguiente expresión:

$$GM(R) \approx exp\left(ln(1+\mu) - \frac{\sigma^2}{2\cdot(1+\mu)^2}\right) - 1 \tag{28}$$

donde $\sigma^2 = E[(R-\mu)^2]$ indica la varianza de los beneficios simples.

La expresión formal del criterio referido en este trabajo como GMM sería:

$$Max_{w_1,\dots,w_N} \quad GM_{\wp} \approx exp\left(ln(1+\mu) - \frac{\sigma^2}{2\cdot(1+\mu)^2}\right) - 1 = \tag{29}$$

$$\approx exp\left(ln(1+\sum_{i=1}^{N} w_i\mu_i) - \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij}}{2(1+\sum_{i=1}^{N} w_i\mu_i)^2}\right) - 1$$

$$\text{Sujeto a:} \quad \sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \quad \text{y} \quad w_i \geq 0 \quad \text{para toda i (no hay ventas a corto plazo)} \tag{30}$$

Como hemos visto en la demostración, la media geométrica que proponemos es una muy buena aproximación a la media geométrica exacta. Simulaciones realizadas en otros estudios validan que no se gana al incluir más momentos en la aproximación.

De este criterio cabe destacar el rol que juega la volatilidad ya que, mientras en Sharpe la volatilidad no es deseada porque va asociada a riesgo, en GMM tampoco es deseable pero por una distinta razón, porque reduce la media geométrica de los beneficios.
En otras palabras, en este criterio la volatilidad es perjudicial porque reduce la tasa de crecimiento del capital invertido y eso significa que disminuye el capital esperado a largo plazo.

Es el primer criterio presentado hasta ahora que toma otro enfoque de la volatilidad de los activos financieros. Por esa razón merece tenerse en consideración, teniendo en cuenta que en el mundo real las empresas sufren altas fluctuaciones a corto plazo.
La idea que pretende transmitir este criterio al fin y al cabo es basarse en la tendencia general del activo y no en capitalizar a corto plazo.

4.3. Criterio de Kelly: Extensión de GMM

El criterio de Kelly fue ideado en 1956 por John L. Kelly y su objetivo era maximizar el crecimiento de una apuesta a largo plazo. El contexto de este método se sitúa en los juegos de azar. La idea es simple, apostar o invertir con el fin de maximizar tras cada apuesta o inversión la tasa esperada de crecimiento del capital, o lo que es equivalente, a maximizar el valor esperado del logaritmo de la rentabilidad (*log-returns*).
No obstante, hay investigadores que han indagado este criterio más allá de los juegos de azar, buscando la plausibilidad de este método en inversiones financieras.

Ejemplo de Pabrai

En 2007, el gestor de fondos Mohnish Pabrai dio ejemplos de los usos del criterio de Kelly en situaciones de inversión basándose en la empresa *Steward Enterprises.* Su análisis proporcionó un

[2]Markowitz ya sugería como aproximación a la media geométrica de un activo la expresión $\frac{ln(1+\mu)-\sigma^2}{2(1+\mu)^2}$

listado de los posibles peores escenarios en que nos podemos encontrar y su rentabilidad durante los próximos 24 meses, que se resumen en la siguiente tabla:

Probabilidad	Rentabilidad
$p_1 = 0{,}80$	$R_1 > 100\,\%$
$p_2 = 0{,}19$	$R_2 > 0\,\%$
$p_3 = 0{,}01$	$R_3 = -100\,\%$
Suma= 1.00	

El valor esperado del capital, E(R_f) , si apostamos una fracción f de nuestro capital neto es

$$E(R(f)) = \sum_{i=1}^{N=3} p_i ln(1 + R_i f) \tag{31}$$

Aplicado a los datos del ejemplo nos quedaría la ecuación que llamaremos a partir de ahora $g(f)$

$$g(f) = E(R(f)) = 0{,}80 \cdot ln(1 + f) + 0{,}01 \cdot ln(1 + f) \tag{32}$$

Realizando $g'(f) = 0$ obtenemos las soluciones óptimas (f*) de la fracción de Kelly. En el caso del ejemplo resulta $f* = 0{,}975$ según Pabrai. Este que desconocía el criterio en 2000, apostó el 10 % en el activo, no obstante el tener conocimiento no tendría por qué haber invertido más necesariamente. Hay aspectos que deben considerarse con más detenimiento:

- **Coste de oportunidad**
  Supongamos que la misma cartera descrita por Pabrai fuese invertida en otra empresa independiente, pero con las mismas probabilidades de recompensa. Por simetría, la estrategia óptima sería invertir en ambos la misma fracción óptima f*. Desde $2 \cdot f* < 1$ hasta $2 \cdot f* = 1$, hay probabilidades de pérdida total, cosa que Kelly siempre evita. Con lo que tenemos una primera restricción ya que $f* < 0{,}5$.
  Solucionaríamos el problema de programación no-lineal para maximizar los *log-returns* o logaritmo del beneficio esperado, sujeto a restricciones en los pesos de los activos.
  Un inversor con mentalidad de Kelly diría que concentraras muchas acciones en una misma empresa si las oportunidades son atractivas, sugiriendo apuestas de entre el 25 % del capital hasta el 40 %. No obstante, para hacer dichas concentraciones se debe tener cierto conocimiento del sector y depositar mucha confianza en un mismo activo. Es por eso, que si no eres profesional o gozas de información confidencial/privilegiada, es recomendable diversificar, en el caso contrario, el criterio de Kelly opina que no tiene sentido.
  Si tenemos una cartera con 20 activos es una idea descabellada poner dinero en el activo que ocupa la última posición pudiendo invertir en el primero. Este criterio recomienda invertir en las 5 primeras mejores posiciones ya que en general sobreestima las expectativas.

- **Tolerancia al riesgo**
  El criterio de Kelly en el más estricto sentido es demasiado arriesgado para muchos inversores, con lo que se define una suavización del modelo mediante una constante, $f = f * \cdot c$ donde c es $0 < c < 1$.
  Las personas tendemos a no considerar las probabilidades de eventos inesperados o que suceden con poca frecuencia pero tienen un gran impacto. Aquí los valores de f* podrán ser negativos al calcular los pesos de los activos con tal de contrastar el máximo de información en el parámetro.

- **Enfoque a largo plazo** El criterio de Kelly tiene la propiedad que a mayor tiempo transcurrido desde la inversión, las probabilidades de beneficio aumenta (cuando t tiende a infinito las probabilidades tienden a 1).
  Consideramos por simplicidad, repetidas tiradas de una moneda favorable. El resultado en n jugadas es X_n donde $P(X_n = 1 = cara) = p > 1/2$ y $P(X_n = -1 = cruz) = 1 - p = q > 0$. Los X_n son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. La fracción de Kelly es:
  $$f* = p - q = E(X_n) > 0$$
  La estrategia que propone Kelly consiste en invertir en cada apuesta la fracción $f_n = f*$ para todo $n = 1, 2...N$. Ahora consideramos una estrategia conjunta con apuestes $g_n, n = 1, 2, .., N$, con $g(n) \neq f*$, para algunas n≥N y g(n)=f* para el resto. Entonces, la estrategia $\{g_n\}$ se diferencia de Kelly en al menos n tiradas, pero para el resto (a la larga), ambas no difieren entre sí. Existen probabilidades positivas de que del conjunto $\{g_n\}$ está por encima de Kelly para todo $n \geq N$. Por ejemplo considerando la secuencia de $n < N$ primeras jugadas tales que $X_n = 1$ si $g_n > f*$ y $X_n = -1$ si $g_n \geq f*$. Entonces para esta secuencia especifica de apuestas, donde la probabilidad es $\geq q^N$, la estrategia $\{g_n\}$ genera más ganancias que Kelly, para cada $n \leq N$ donde $g_n \neq f*$, con lo que Kelly se excede para todas las $n \geq N$.

  Entonces si sucede lo mismo que en el ejemplo, Â¿son necesarias infinitas n para que $g_n \neq f*$? Esta cuestión se trató años atrás en el artículo *Blackjack Forum* donde John Leib proponía una estrategia que difiere de Kelly en cada apuesta (con probabilidades tan cerca de 1 como se desea), pero tras un número finito de apuestas obtenía mayores beneficios que la estrategia de Kelly y se mantenía por encima siempre. Veamos la paradoja de Leib para entender la idea que nos propone.

- **Paradoja de Leib**
  Asumimos que el capital es infinitamente divisible, entonces dado $\epsilon > 0$ existe N > 0 y una secuencia de $\{f_n\}$ con $f_n \neq f*$ para todo n, tal que
  $$P(V_n^* < V_n \forall n \geq N) > 1 - \epsilon$$
  $$\text{donde} \quad V_n = \prod_{i=1}^{n}(1 + f_i X_i) \quad \text{y} \quad V_n^* = \prod_{i=1}^{n}(1 + f_i^* X_i)$$
  Además existe una constante que definiremos $b > 1$ tal que $P(V_n/V_n^* \geq b, n \geq N) > 1 - \epsilon$ y que hace posible $P(V_n - V_n^* \to \infty) > 1 - \epsilon$.

  Comprobación: Primeramente hay que verificar la afirmación para n=N. Segundo, una vez tenemos comprobado que $\{f_n, n \leq N\}$ va por delante en n=N podemos construir $\{f_n \neq f^*, n > N\}$ con tal de verificar que se mantiene a la larga. Para esto, supongamos que $V_N > V_N^*$ y para ciertos valores de $a > 0$, $b > 1$ tenemos que $V_N \geq a + bV_N^*$. Entonces, $V_N - V_N^* \geq c > 0$ puesto que hay un número finito de apuestas en los primeros ensayo,
  $$V_N \geq c + V_N^* \geq c/2 + [(c/2) + V_N^*] = c/2 + [dmax(V_N^*) + V_N^*] \geq c/2 + (d+1)V_N^*$$
  donde dMax$V_N^* = c/2$ y queda definido $d > 0$. Si redefinimos los parámetros y consideramos $c/2 = a > 0$ y $d + 1 = b > 1$, nos resulta la ecuación inicial $V_N \geq a + bV_N^*$ la cual podemos interpretar como división del capital en dos partes, un término constante a y el segundo, bV_N^*.

Para n>N, invertiríamos $f_n = f^*$ de bV_N^* y una cantidad adicional $\frac{a}{2^n}$ de la parte a, del total que, generalmente, es distinto a f^*.

La fracción bV_n^* se convierte en $bV_n^* \forall n > N$ y la fracción a jamás se agotará ya que consideramos $V_n > bV_n^* \forall n > N$. Por lo tanto, mientras la $P[V^* \to \infty] = 1$ tenemos que la probabilidad $P[\frac{V_n}{V_n^*} \geq b] = 1$, de lo que se extrae que la probabilidad de ganancia potencial está garantizada a largo plazo, o lo que es lo mismo, $P[V_n - V_n^* \to \infty] = 1$

Discusión del criterio

La idea que nos transmite este criterio es invertir poco en un activo para empezar con un valor inferior a la fracción de Kelly. Si obtenemos un pérdida, entonces tenemos más que Kelly; al contrario, si se obtiene ganancias no estamos aprovechando las oportunidades de la rentabilidad del activo con lo que deberíamos apostar por encima del ratio de Kelly.

Llegados a este punto debemos considerar una distinción importante. En las aplicaciones financieras se supone comúnmente que f_i son constantes que dependen sólo de la variable (o variables) aleatoria del período de tiempo actual.
Tales estrategias ajustadas a un único periodo (como el caso de media-varianza de Markowitz, por ejemplo), determinarían la selección de carteras mediante una función de utilidad y la maximización de la utilidad esperada para obtener los pesos a apostar. Sin embargo, para sistemas de juegos de azar la cantidad depende de los resultados anteriores, es decir, tal como lo hace en el ejemplo Leib.

Como hemos podido ver este criterio tiene aspectos que le hacen muy atractivo. Si queríamos construir una cartera de activos mediante el ratio de Kelly, buscaríamos su plausibilidad realizando el criterio de Kelly para cada activo que conforma la cartera, invirtiendo en los 5 primeros activos la mayor parte de capital siendo proporcional a la ventaja que le atribuye Kelly a la empresa en cuestión.

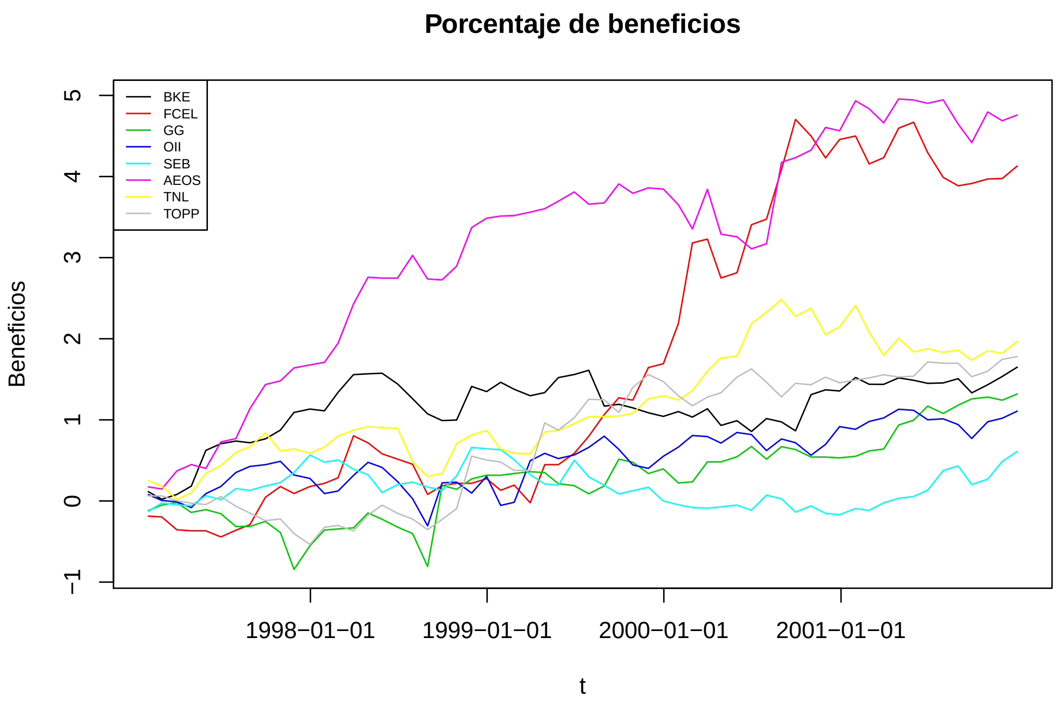
Es un método que a día de hoy sigue siendo tema de debate aunque no sea tan popular por las limitaciones que se le atribuye al inversor. Esta vez no sucede como en el criterio de Markowitz, donde el inversor tenía la elección final de entre las carteras balanceadas sino que se trata de la información privada que dispone el inversor y que no se refleja en la media de los beneficios ni en la volatilidad. Esta información podría ser, por ejemplo, un nuevo lanzamiento de producto de `Apple`, conocer una futura colisión de bancos, etc.

5. Aplicaciones

En este apartado vamos a comparar empíricamente las soluciones que nos proponen los distintos métodos descritos en el trabajo. Para ello, vamos a utilizar la base de datos `SMALLCAP` del paquete `fPortfolio`, en la que se puede encontrar información de 22 empresas *small caps* con el registro mensual de sus acciones, ponderadas al mercado de Estados Unidos entre el 31 de enero de 1997 al 31 de diciembre de 2001.

Con la instrucción `SMALLCAP.RET` obtenemos la serie de beneficios de las acciones. *Small Cap* es un término usado para clasificar a las empresas de baja capitalización de mercado [3].
La definición de *Small Cap* puede variar, pero en general es una empresa con un mercado de capitalización que va de 300 a 2 mil millones de dólares. Una de las mayores ventajas de invertir en acciones de pequeña capitalización es la oportunidad de vencer a los inversores institucionales, esto hace que sea más atractivo invertir en este sector por ese motivo nos hemos decantado por analizar esta base de datos.

Graficamos las distintas trayectorias que siguen los 22 activos desde 1997 hasta 2001 y calculamos la matriz de varianza-covarianza para observar como interactúan entre ellos con tal de preseleccionar un conjunto de activos que participaran en nuestra cartera. Los resultados los podemos encontrar en la página 27 del anexo. Nosotros trabajaremos con 8 *Small caps*: BKE, FCEL, GG, OII, SEB, AEOS, TNL y TOPP.



[3] La capitalización de mercado de una empresa es el valor de mercado de sus acciones en circulación

A simple vista, vemos como el activo *AEOS* (color lila) tiene la rentabilidad más elevada, con lo que cabe esperar que tenga posiciones largas dentro de las carteras eficientes. En términos generales, la mayoría de *small caps* elegidas tienen beneficios a lo largo del período de estudio. Calculamos la rentabilidad media de cada activo junto a su volatilidad con la matriz de varianza-covarianzas. Podemos encontrar la tabla con la información en la página 27 del anexo.

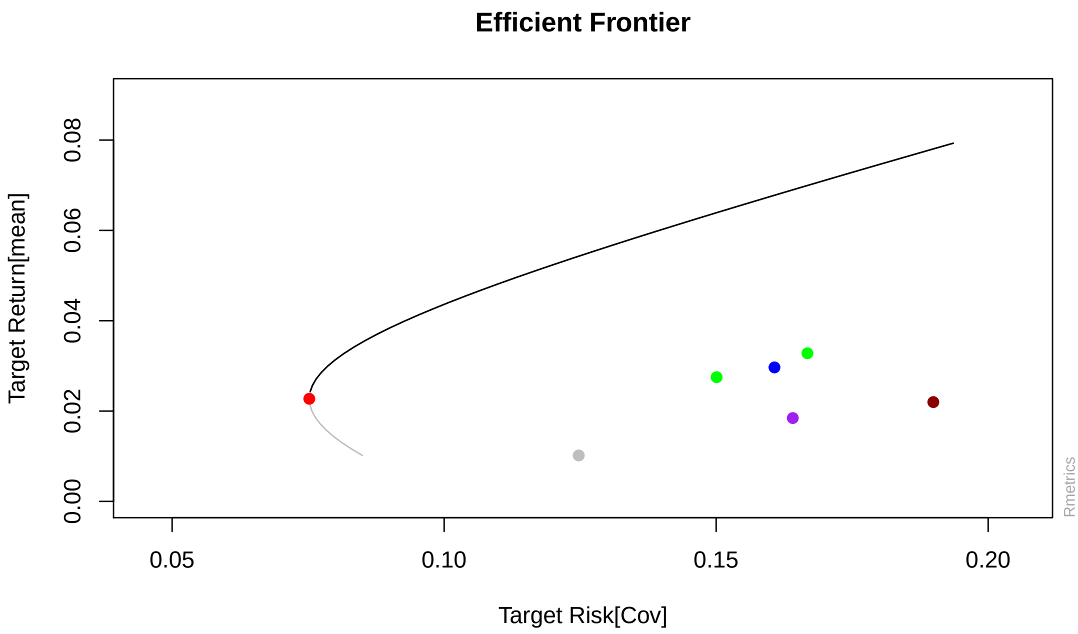
Los resultados son, por ejemplo, BKE tiene un promedio de 0.0275 (o 2.75 %) y una varianza de 0.0225 (es decir, una desviación estándar de $\sqrt{0{,}0225} = 0{,}15$). AEOS es el activo con un mayor rentabilidad en media con un valor de 7.93 % y su varianza es de 0.0574.

Suele suceder que los activos con un mayor rendimiento esperado incorporan el mayor riesgo asociado. Recordamos que riesgo significa la posibilidad de que el rendimiento esperado no coincida con el que realmente se obtiene de la inversión. Normalmente a mayor rendimiento medio esperado le corresponde un mayor riesgo. Lo podemos ver en FCEL y AEOS como ambos pertenecen a las medias y varianzas más elevadas.

Una vez estimados los parámetros de interés, procedemos a estimar los portafolios óptimos que proponen los distintos criterios estudiados:

5.1. Modelo de Markowitz

Calculamos ahora el portafolio proporcionado por el criterio de media-varianza para el conjunto de datos seleccionado con la ayuda de la función `portfolioFrontier` y la cartera de mínima varianza (MVP). Mostramos los resultados en forma de gráfico con la frontera eficiente, la localización del MVP (punto rojo) y las carteras eficientes.



En la tabla de a continuación se muestra el conjunto de carteras calculadas para el punto de mínima varianza (MVP), las 5 carteras más eficientes, el punto que nos retorna una rentabilidad del 5 % y el correspondiente al máximo beneficio (MaxR) junto a sus pesos que definen el portafolios, sus medias y varianzas:

Activos	**MVP**	w_{P1}	w_{P13}	w_{P25}	w_{P37}	w_{P50}	**EP(0.05)**	**MaxR**
BKE	0.1299	0.1391	0.1267	0.1143	0.1019	0.0884	0.1099	0
FCEL	0.0671	0.0024	0.0897	0.1770	0.2642	0.3588	0.2077	0
GG	0.0807	0.1051	0.0722	0.0392	0.0062	-0.0295	0.0276	0
OII	0.1915	0.2762	0.1619	0.0475	-0.0668	-0.1907	0.0073	0
SEB	0.3564	0.4851	0.3114	0.1376	-0.0361	-0.2244	0.0764	0
AEOS	0.007	-0.1206	0.0516	0.2238	0.3960	0.5826	0.2844	1
TNL	0.0238	0.201	0.0251	0.3	0.35	0.0403	0.0318	0
TOPP	0.1437	0.0925	0.1615	0.2306	0.2996	0.3745	0.2549	0
$\hat{\mu}(\%)$	2.27	1.02	2.71	4.40	6.10	7.93	5	7.93
$\hat{\sigma}^2$	0.0752	0.0850	0.0765	0.1009	0.1421	0.1936	0.1142	

Cuadro 1: Tabla resumen optimización para μ=0.05

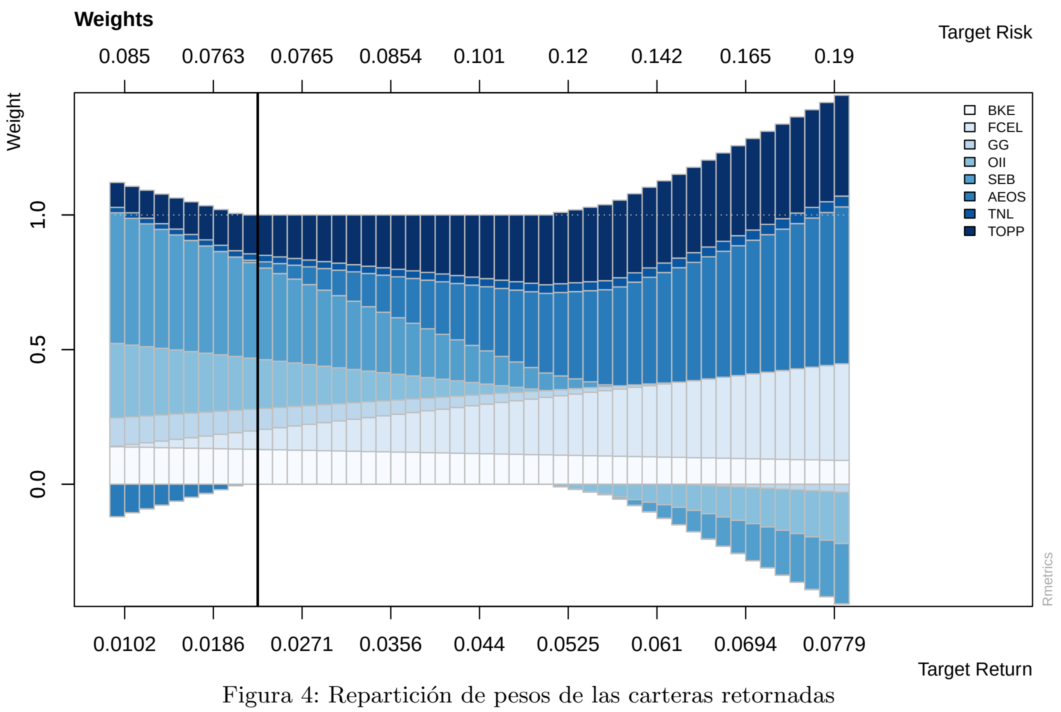


Figura 4: Repartición de pesos de las carteras retornadas

En la tabla se observa que el portafolio 50 es uno de los más eficientes calculados por texttt-portfolioFrontier; contiene posiciones cortas para los activos GG, OII y SEB ($w < 0$) y posiciones más largas para AEOS, TOPP, FCEL.

Vemos como el portafolio que tiene mayor rentabilidad (MaxR) nos sugiere que invirtamos todo nuestro capital en el mismo activo, siendo la empresa AEOS la que debería de llevarse el 100 %

de las acciones. Esta estrategia no es óptima ya que atenta contra la diversificación, un principio básico de la regla media-varianza de Markowitz[4].

Con la instrucción `weightsPlot` de R se realizamos el gráfico de pesos (Figura 4) ya que ilustra muy bien cómo se conforman las carteras, representando la evolución de los pesos que sigue cada activo dentro de las carteras durante la optimización y además podemos apreciar como $\sum_{i=1}^{N=8} w_i = 1$.

Llegados a este punto, nos queda elegir con que cartera nos quedamos entre las más eficientes. Como se ha comentado en la teoría, este es un punto conflictivo del criterio de Markowitz ya que la elección final es subjetiva al inversor en función de su aversión al riesgo, pudiendo escoger entre el conjunto de las carteras con mejor relación rentabilidad-riesgo. En este caso, nos quedaremos con el portafolio 50 el cual no sugiere que diversifiquemos de tal modo:

Cartera final									
BKE	FCEL	GG	OII	SEB	AEOS	TNL	TOPP	$\mu_{\wp}$	$\hat{\sigma}^2$
8.84 %	35.88 %	-2.95 %	-19.07 %	-22.44 %	58.26 %	4.03 %	37.45 %	7.93 %	0.1936
Con una rentabilidad esperada del 7.93 % y un volatilidad de 0.1936 unidades.									

Cuadro 2: Elección final de cartera de inversión según Markowitz

5.2. Ratio de Sharpe

Buscamos ahora cuál es el portafolio óptimo siguiendo el criterio de Sharpe. Como hemos visto antes, la cartera que maximiza el ratio de Sharpe coincide con el *Market Portfolio*. Por esa razón, vamos a calcular la cartera de mercado con una tasa libre de riesgo del 1.2 % para las Small caps seleccionadas. Podemos ver la solución de manera gráfica:

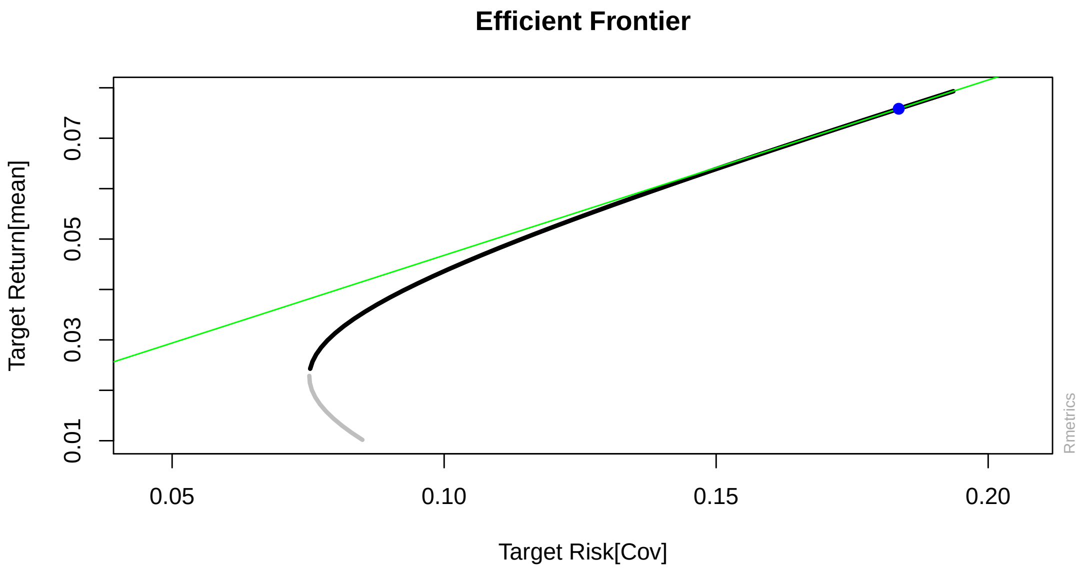


Figura 5: Gráfico de la frontera eficiente, Market Line (verde) y del Market Portfolio (azul)

[4]La diversificación se conocida con el aforismo de -no poner todos los huevos en la misma cesta- que equivale a decir -dispersa tu dinero y tu atención-, en el caso de la maximizar los beneficios, su aforismo sería -pon todos los huevos en una cesta y vigila bien la cesta-.

En este gráfico podemos observar como la cartera de mercado es el punto entre la intersección de la frontera eficiente y la recta tangente al eje de coordenadas (0,1.2) y la hipérbole.
La siguiente tabla nos resume las Características de la cartera óptima propuesta por Sharpe:

Cartera final									
BKE	FCEL	GG	OII	SEB	AEOS	TNL	TOPP	$\mu_\wp$	$\hat{\sigma}^2$
9.10 %	34.09 %	-2.27 %	-16.72 %	-18.87 %	54.72 %	3.93 %	36.03 %	7.58 %	0.1836
Con una rentabilidad esperada del 7.58 % y un volatilidad de 0.1836 unidades.									

Cuadro 3: Elección final de cartera de inversión según Sharpe Ratio

5.3. Extensión GMM: Criterio de Kelly

El ratio de Kelly nos proporciona relación de ventaja sobre probabilidades de la cartera. Matemáticamente está maximizando la log-utilidad. Como tal, el criterio de Kelly es igual al beneficio máximo esperado de la estrategia dividida por la varianza esperada:

$$leverage = \frac{\hat{R}_s - R_f}{Std(R)^2}$$

Como medida del rendimiento, el ratio de Kelly se calcula retrospectivamente sobre una inversión en particular como una medida de la ventaja que tiene la inversión sobre la tasa libre de riesgo. Se puede utilizar como un método de clasificación para comparar inversiones de una manera similar al ratio de Sharpe.

leverage o Kelly ratio de los activos que conforman la cartera y pesos en el portafolio									
	Riesgo(%)	BKE	FCEL	GG	OII	SEB	AEOS	TNL	TOP
KR	0	0.6103	0.4700	0.3047	0.3427	0.3268	0.6903	0.5895	0.5742
$w_\wp$	0	15.61 %	12.02 %	7.79 %	8.76 %	8.36 %	17.66 %	15.08 %	14.69 %
KR	1.2	0.3439	0.3881	0.1384	0.1198	-0.0587	0.5859	0.3738	0.3420
$w_\wp$	1.2	15.40 %	17.37 %	6.19 %	5.36 %	-2.26 %	26.23 %	16.73 %	15.31 %

Cuadro 4: Elección final de cartera de inversión según Sharpe Ratio

5.4. Comparación de resultados

Tras computar los distintos algoritmos propuestos en la teoría, obtenemos tres portafolios óptimos los cuales queda definidos por el vector de pesos W_i. En la siguiente tabla se resume la información:

Cartera	w_{BKE}	w_{FCEL}	w_{GG}	w_{OII}	w_{SEB}	w_{AEOS}	w_{TNL}	w_{TOPP}
Markowitz	8.84 %	35.88 %	-2.95 %	-19.07 %	-22.44 %	58.26 %	4.03 %	37.45 %
Sharpe	9.10 %	34.09 %	-2.27 %	-16.72 %	-18.87 %	54.72 %	3.93 %	36.03 %
Kelly	15.40 %	17.37 %	6.19 %	5.36 %	-2.26 %	26.23 %	16.73 %	15.31 %

Observamos que los tres criterios nos indican que la mayor proporción que invirtamos sea en el activo AEOS, al igual que coinciden en que OII tendrá posiciones cortas en la cartera. Las carteras de Markowitz y Sharpe no difieren mucho en cuanto a resultados, mientras que Kelly adjudica mayor importancia a los activos con mayor volatilidad mientras que adjudica menos peso en la cartera a los que tienen mayor valor esperado de retorno.

6. Conclusiones

En este trabajo se ha abordado el problema de construcción de carteras de inversiones usando el modelo de Markowitz y proponiendo otros métodos alternativos como es la maximización del ratio de Sharpe, la maximización de la media geométrica y para finalizar el criterio de Kelly, el cual es una extension de la media geométrica.

El modelo de Markowitz presenta incongruencias ya que esta límitado a un solo período las estimaciones de la cartera, cosa que atenta contra la realidad. Además al tratar el problema de opimización mediante multiplicadores de Lagrange lo hace un criterio ineficiente por el alto grado de recurso de las matrices de covarianza. En trabajos futuros se pretende abordar por estrategias de algoritmos evolutivos para evitar que suceda esto.
Al fin y al cabo, todos los criterios tienen alguna deficiencia con lo que descartamos la posibilidad de una estrategia óptima.

Los modelos aplicados para la formación de carteras de inversión proporcionan cierto grado de cobertura frente al riesgo, evitando pérdidas mayores que las que tiene el mercado. Y es que como hemos podido ver, el concepto de riesgo no es igual para todos ls criterios.

Entonces, según el tipo de inversor que tengamos en frente se le asignará la estrategia más óptima en función de sus características. Y es que no existe un método universal que recopile toda la información que puede plasmar la variación de precios de los activos financieros.
Por eso, si estamos ante un aficionado al mundo financiero, se recomendaría realizar un estudio preliminar mediante el modelo de Markowitz y seguidamente realizar el criterio GMM para poder contrastar que nos dice un modelo que estima a corto plazo versus otro que estima a largo plazo.
En conclusión, realizar un portafolio blanzeado diversificando tus acciones en distintos sectores ya que a la larga nos produce mayor rentabilidad sin necesidad de asumir una gran cantidad de riesgo.

Si estamos ante un profesional del sector, recomendaríamos seguir la estrategia propuesta por Kelly, donde las opciones de obtener beneficio a largo plazo se vuelven más atractivas sin necesidad de asumir un alto riesgo.

Podemos concluir tras estudiar profundamente la teoría que se usa en la selección de carteras que si queremos obtener rentabilidad invirtiendo nuestro capital en activos finanzieros es necesario indagar en que depositamos realmente nuestra confianza y saber ser cauteloso cuando el mercado juega en nuestra contra y arriesgarse más en la inversión cuando las oportunidades de mercado sean atractivas.

7. Bibliografía

1. A. Arratia (2014). Computational Finance, "*Atlantis Studies in Computational Finance and Financial Engineering*",capitulo 8.

2. Estrada, Javier (2006). "*Downside Risk in Practice*", Journal of Applied Corporate, Finance.

3. Estrada, Javier (2007). "*Book review - Fortuneâs Formula, by William Poundstone.*"Journal of Investment Management, 5, 131-132.

4. Kelly, John (1956). "*A New Interpretation of Information Rate*". Bell System Technical Journal,35, 917-926.

5. Latane, Henry (1979). "*The Geometric Mean Criterion Continued.*"Journal of Banking and Finance, 3, 309-311.

6. Latane, Henry and Donald Tuttle (1967). "*Criteria for Portfolio Building*". Journal of Finance, 22, 359-373.

7. Markowitz, Harry (1952). "*Portfolio Selection.*"Journal of Finance, 7, 77-91.

8. Markowitz, Harry (1959). *Portfolio Selection. Efficient Diversification of Investments.* John Wiley Sons.

9. Samuelson, P. A. (1967)."*General proof that diversification pays*". The Journal of Financial and Quantitative Analysis, 2(1), 1-13.

10. Sharpe, W. (1964). "*Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk*". The Journal of Finance, 19(3), 425-442.

11. Sharpe W. (1970). "*Portfolio Theory and Capital Market*", Mc Graw-Hill. Nueva York.

12. Weide, James, David Peterson, and Steven Maier (1977). "*A Strategy Which Maximizes the Geometric Mean Return on Portfolio Investments.*"Management Science, 23, 1117-1123.

13. Würtz, D., Chalabi (2009), Y., Chen, W., Ellis, A. "*Portfolio optimization with R/RMetrics*"(1st ed.), Zurich: Rmetrics Publishing.

14. Ziemba, William (1972). "*Note on Optimal Growth Portfolios When Yields Are Serially Correlated.*"Journal of Financial and Quantitative Analysis, 7, 1995-2000.

8. Anexo

8.1. Aplicaciones

8.1.1. Selección de activos

Gráfico de los rentabilidades de los distintos *small cap*

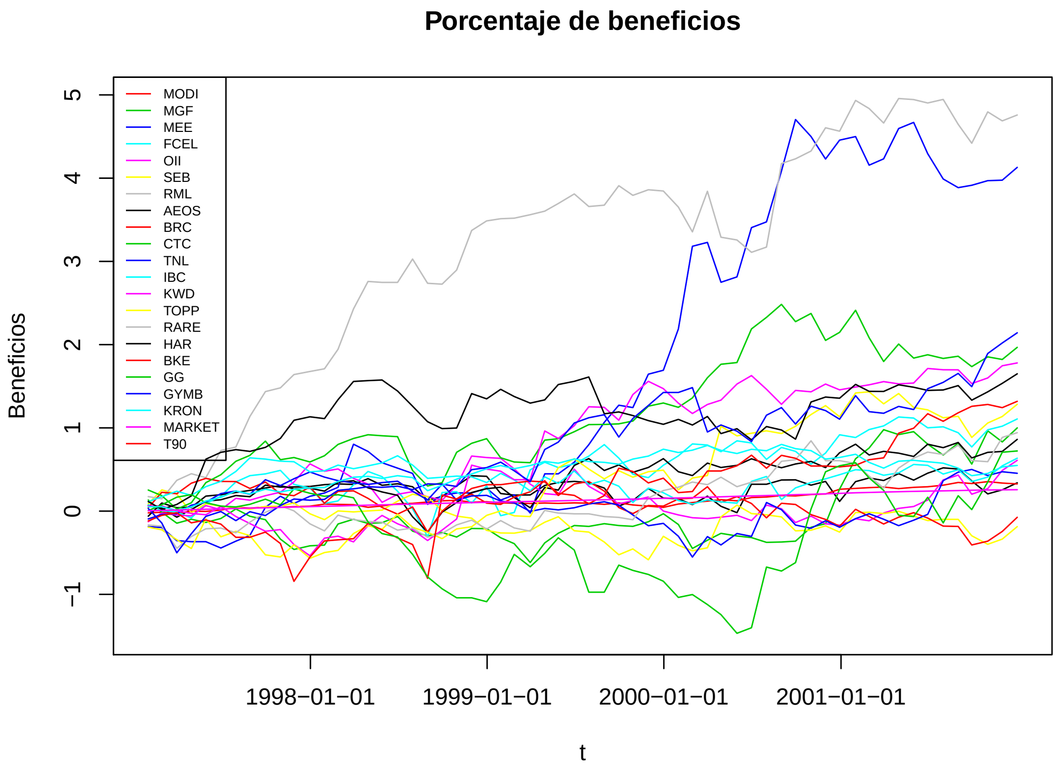
```
covData2 <- covEstimator(Data2)
table2<-cbind(covData2$Sigma,media=covData2$mu)
table2<-round(as.table(table2,main="Covariance matrix and
                       sample mean of five stocks"),4)
```

	BKE	FCEL	GG	OII	SEB	AEOS	TNL	TOPP	media
BKE	0.0225	-0.0026	-0.0035	-0.0010	0.0073	0.0119	0.0067	0.0037	0.0275
FCEL	-0.0026	0.0732	0.0073	0.0112	-0.0052	0.0115	0.0138	-0.0014	0.0688
GG	-0.0035	0.0073	0.0361	0.0126	-0.0017	0.0067	0.0035	0.0053	0.0220
OII	-0.0010	0.0112	0.0126	0.0269	-0.0040	0.0058	0.0054	0.0009	0.0185
SEB	0.0073	-0.0052	-0.0017	-0.0040	0.0156	0.0026	0.0029	0.0023	0.0102
AEOS	0.0119	0.0115	0.0067	0.0058	0.0026	0.0574	0.0075	0.0012	0.0793
TNL	0.0067	0.0138	0.0035	0.0054	0.0029	0.0075	0.0278	0.0055	0.0328
TOPP	0.0037	-0.0014	0.0053	0.0009	0.0023	0.0012	0.0055	0.0258	0.0297

8.1.2. Código estimación cartera de Markowitz

```
##MV|solveRshortExact:
shortSpec <- portfolioSpec()
setSolver(shortSpec) <- "solveRshortExact"
shortFrontier <- portfolioFrontier(Data,spec=shortSpec,
                                   constraints="Short")
#print(shortFrontier) #report results for portfolio:1,13,25,37,50
Frontier <- shortFrontier ##Plot the Efficient Frontier
frontierPlot(Frontier,frontier="both",risk="Sigma",type="l",
              ylim=c(0,0.09),ylab="Rentabilidad esperada",xlab="Riesgo",
              main="Frontera eficiente")
## Plot some portfolios
minvariancePoints(Frontier,pch=19,col="red") #the MVP point
##Position of each asset in the sigma-mu plane
singleAssetPoints(Frontier,risk="Sigma",pch=19,cex=1, col=c("green",
                          "blue","darkred","purple","grey","yellow"))
# frontierPlot  Plots efficient frontier,
#minvariancePoints  Adds minimum variance point,
#cmlPoints  Adds market portfolio,
#cmlLines  Adds capital market Line,
#tangencyPoints  Adds tangency portfolio point,
#tangencyLines  Adds tangency line,
#equalWeightsPoints  Adds point of equal weights portfolio,
#singleAssetPoints  Adds points of single asset portfolios,
```

```
Data2 <- SMALLCAP.RET #to get returns
attach(Data2)
datacum<-apply(Data2,2,cumsum)
# Grafico
lim<-c(min(datacum),max(datacum))
plot(datacum[,1],main="Porcentaje de beneficios",
     ylim=lim,xlab="t",ylab="Beneficios",type="l")
for(i in 2:22)
{
lines(datacum[,i],col=i)
}
legend(x="topleft",cex=0.6,
       c("MODI" , "MGF","MEE"  , "FCEL" , "OII",    "SEB" , "RML" ,
       "AEOS" , "BRC",    "CTC"  , "TNL"  , "IBC", "KWD",    "TOPP",
       "RARE" , "HAR" ,   "BKE"  , "GG" , "GYMB"  , "KRON",
       "MARKET","T90"),lty=1,col=c(2:22))
```



```
#twoAssetsLines  Adds EF for all combinations of two assets,
#sharpeRatioLines  Adds Sharpe ratio line,
#monteCarloPoints  Adds randomly produced feasible portfolios,
#tailoredFrontierPlot  an example for a tailored plot.
```

8.1.3. Código estimación ratio de Sharpe

```
RiskF = portfolioSpec()
setRiskFreeRate(RiskF) = 0.012 ##at 1.2% risk-free rate
setSolver(RiskF) <- "solveRshortExact"
##Market portfolio for this Risk free rate
M = tangencyPortfolio(Data,spec=RiskF,constraints="Short")
#al Market Line and plot the Market Portfolio type the commands:
##recompute the efficient frontier to consider risk-freeasset
Frontier2=portfolioFrontier(Data,spec=RiskF,constraints="Short")
frontierPlot(Frontier2,risk="Sigma",type="l",lwd=3)
##Capital Market Line
tangencyLines(Frontier2,risk= "Sigma",col ="green",lwd=1)
##plot Market Portfolio
cmlPoints(Frontier2,pch=19,col="blue")
```

8.1.4. Código estimación cartera Kelly

```
KellyRatio(R=Data,Rf=0,method='half')
frKelly<-KellyRatio(R=Data,Rf=0,method='half')
frKellyPor<- frKelly/sum(frKelly)
sum(frKellyPor)
KellyRatio(R=Data,Rf=0.012,method='half')
rKelly<-KellyRatio(R=Data,Rf=0.012,method='half')
rKellyPor<- rKelly/sum(rKelly)
sum(rKellyPor)
```