Ampliació d'una llibreria en MAGMA per a codis Z2Z4-lineals

Cristina Diéguez Martí

Resum — Un codi Z_2Z_4-additiu és un subgrup de $Z_2^\alpha \times Z_4^\beta$, on les paraules-codi són una tupla formada per un vector a Z_2^α i un vector a Z_4^β. Es creen una sèrie de funcions per poder treballar amb codis sobre aquest anell $Z_2^\alpha \times Z_4^\beta$ i així calcular, en MAGMA, el pes mínim de Lee, la distància mínima de Lee, les paraules-codi de pes mínim i la distribució de pesos usant un algorisme basat en la força bruta i un algorisme basat en el còmput del kernel. Posteriorment, es presenta una comparativa de rendiment entre aquests dos algorismes utilitzant dues famílies de codis diferents per tal de poder determinar sota quines característiques quins dels dos algorismes té uns temps de còmput inferiors.

Paraules clau — Codis Z_2Z_4-additius, Codis Z_2Z_4-lineals, MAGMA, Pes mínim de Lee, Distància mínima de Lee, Paraules-codi de pes mínim, Distribució de pesos, Algorisme basat en el kernel, Algorisme basat en la força bruta.

Abstract — A Z_2Z_4-additive code, C, is a subgroup of $Z_2^\alpha \times Z_4^\beta$ in which codewords are determined by a tuple based on a vector on Z_2^α and a vector on Z_4^β. A set of functions on this ring, $Z_2^\alpha \times Z_4^\beta$, is presented for computing, in MAGMA, the minimum Lee weight, the minimum Lee distance, the minimum weight codewords and the weight distribution using an algorithm based on brute force and a kernel-based algorithm. Then, a performance comparison, which uses two different families of codes, is presented in order to conclude what characteristics involve a lower calculation time of both mentioned algorithms.

Index Terms — Z_2Z_4-additive codes, Z_2Z_4-linear codes, MAGMA, Minimum Lee weight, Minimum Lee distance, Minimum weight codewords, Weight distribution, Kernel-based algorithm, BruteForce algortihm.

1 INTRODUCCIÓ

TOT procés d'enviament i recepció de missatges es realitza a través d'un canal de comunicació [5]. No obstant, el missatge rebut a la sortida del canal pot haver patit alguna alteració a causa del soroll i fa que aquest es converteixi en erroni. Aleshores, perquè el receptor pugui eliminar possibles errors es realitza el procés de codificació-descodificació (Figura 1), fent servir codis correctors d'errors.

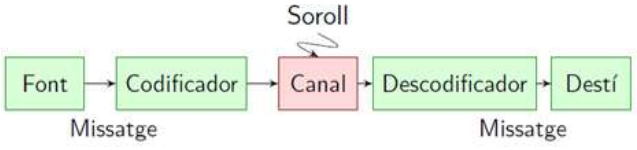


Figura 1. Procés de comunicació.

En la codificació, s'assigna a cada símbol o conjunt de símbols de la font una paraula de longitud fixa, n, afegint redundància. Aquesta paraula de longitud fixa es coneix per paraula-codi i l'agrupació de totes aquestes paraules-codi formen un codi.

En el procés de descodificació, si s'ha produït algun error en la transmissió i el descodificador detecta l'error, es realitza la correcció aprofitant la redundància afegida. Aleshores el que es vol és poder seguir enviant missatges tenint la màxima capacitat de detecció i correcció d'errors amb la mínima redundància. El segon teorema de Shannon especifica aquest fet ja que declara que és possible transmetre informació a través d'un canal amb soroll si es transmet a una taxa de transmissió de la informació[1] inferior a la capacitat del canal. Aquest teorema dóna peu a la teoria de codificació per a la correcció d'errors que té per objectiu la construcció de codificadors i descodificadors que permetin enviar el màxim d'informació amb el mínim d'errors.

Quan s'envia informació a través d'un canal, el problema existent és el soroll introduït en aquest i les alteracions que es produeixen en el missatge enviat, fent que no sigui el mateix que l'expedit per la font. Una manera de poder minimitzar els errors seria augmentant la redundància en el missatge per poder, després, corregir els errors. El desavantatge que presenta és que existeix una penalització en la velocitat de transmissió.

Dins de l'àmbit informàtic, el tipus de codis que presenten un gran interès per les seves característiques són els codis lineals sobre anells i codis lineals sobre cossos finits. En el cas de codis lineals sobre anells, que són amb els quals es va treballar, experimenten les següents propietats:

- Tancament per la suma: dues paraules codi sumades és igual a una altra paraula-codi.

[1] Taxa de transmissió de la informació $R_T=\frac{log_2|C|}{n}$

- Tancament per la multiplicació d'un escalar: si es multiplica una paraula-codi per un escalar, dóna una altra paraula-codi.

Gràcies a aquestes propietats, es pot trobar un conjunt mínim de paraules-codis que són capaces de generar totes les paraules del codi. Aleshores, s'observa que un codi pot ser representat de forma matricial per les paraules-codi generadores. Es crea el que s'anomena matriu generadora que facilita el treball i la representació d'aquest tipus de codis. Amb aquest fet, es redueixen els costos de memòria i còmput a l'hora de treballar amb codis.

Siguin Z_2 i Z_4 els anells d'enters mòdul 2 i 4, respectivament, es denota Z_2^n com el conjunt de tots els vectors binaris de longitud n i Z_4^n com el conjunt de n-tuples sobre l'anell Z_4, coneguts també com vectors quaternaris. Un codi binari, doncs, és un subconjunt C no buit de Z_2^n i un subgrup de Z_2^n es coneix com a codi binari lineal. Paral·lelament succeeix el mateix a Z_4, un subconjunt C no buit de Z_4^n és un codi quaternari i un subgrup de Z_4^n és un codi quaternari lineal. A part d'usar els codis binaris i quaternaris, actualment es treballa amb codis Z_2Z_4-additius, que són subgrups de Z_2^α x Z_4^β on les paraules-codi són una tupla formada per un vector a Z_2^α i un vector a Z_4^β. Aquests codis també posseeixen el concepte de matriu generadora G que està formada per:

- γ vectors d'ordre 2: aquells formats per coordenades a {0,2}.
- δ vectors d'ordre 4: aquells que contenen alguna coordenada a {1,3}.

Coneixent aquesta informació, es diu que el codi C obtingut a partir de la matriu generadora G és de tipus $2^\gamma \cdot 4^\delta$. Aquesta expressió, a la vegada, proporciona el número de paraules-codi de C. A l'hora de generar-les, s'opera $(x,y) \cdot G$ on x pertany a Z_2^γ i y a Z_4^δ ja que si x correspongués a Z_4 es duplicarien les mateixes paraules-codi.

Amb la finalitat de poder treballar a Z_2, existeix una funció anomenada *mapa de Gray* ϕ que proporciona les imatges de les paraules-codi en aquest conjunt; és a dir, realitza una bijecció:

ϕ: $Z_4 \longrightarrow Z_2$

0 ⟶ 00

1 ⟶ 01

2 ⟶ 11

3 ⟶ 10

Si $v=(v1,v2)$ que pertany a Z_2^α x Z_4^β, es defineix $\phi(v)=(v1, \phi(v2))$, on ϕ es pot estendre a Z_4^β de manera natural aplicant ϕ a cada coordenada. Aquesta bijecció només afecta, realment, a les β coordenades quaternàries de les paraules-codi mentre que les α coordenades binàries mantenen iguals. El codi binari $\phi(C)$ s'anomena Z_2Z_4-lineal i, de forma general, no és lineal.

La distància de Hamming $d_H(u,v)$ entre dos vectors u,v que pertanyen a Z_2^n és el nombre de coordenades en les quals difereixen u i v. El pes de Hamming d'un vector u, $w_H(u)$, és la distància de Hamming entre un vector u que pertany a Z_2^n i el vector tot zeros. En codis quaternaris, que són un tipus de representació utilitzant l'anell d'enters mòdul 4, es fa servir la mètrica de Lee. El pes de Lee d'un vector v a Z_4^n, $w_L(v)$, és la suma dels pesos de Lee de les seves coordenades. Els pesos d'aquestes coordenades estan definits de la següent manera:

- $W_L(0)=0$,
- $W_L(1)=W_L(3)=1$,
- $W_L(2)=2$.

La distància de Lee $d_H(u,v)$ entre dos vectors u,v que pertanyen a Z_4^n es pot definir com el pes de Lee de la diferència dels vectors, u i v, és a dir $w_L(u-v)$.

El mapa de Gray ϕ preserva les distàncies, transformant la distància de Lee a distància de Hamming; és a dir, $d_L(u,v) = d_H(\phi(u),\phi(v))$. Gràcies a aquesta funció, s'observa que el pes de Lee d'un vector, v, sobre Z_4 coincideix amb el pes de Hamming de $\phi(v)$ sobre Z_2. Un exemple d'aquest succés seria:

$\phi(10230) = (0100111000)$,
$w_L(10230) = w_L(1) + w_L(0) + w_L(2) + w_L(3) + w_L(0) = 4$,
$w_H(0100111000) = 4$.

La distància mínima d'un codi C és el mínim valor de la distància de totes les parelles de paraules-codi diferents que formen C. Així mateix, el pes mínim d'un codi C és el mínim valor dels pesos de totes les paraules-codi. En aquest projecte, es va treballar amb aquests conceptes a l'hora de plantejar i implementar funcions que ajudessin en el procés de descodificació, que pot ser descodificació via síndrome o descodificació per mínima distància.

Per la implementació de les funcions a desenvolupar, es va treballar amb els conceptes de kernel (nucli), de cosets (traslladats del nucli), de representants i de rang. Tot i que aquests conceptes, en un principi, només tenen sentit sobre Z_2, s'ha observat que el mapa de Gray ϕ permet canviar d'un codi binari C a un codi Z_2Z_4-additiu, i viceversa, permetent traslladar els codis Z_2Z_4-additius a binari i treballar de forma més eficient. El rang d'un codi binari C és la dimensió de l'espai creat per les paraules-codi de C afegint els vectors perquè aquest espai sigui lineal. Aleshores, el rang, r, seria $r = Dim(\langle C \rangle)$. Si C és un codi Z_2Z_4-additiu, el rang és $r = Dim(\langle \phi(C) \rangle)$. El kernel d'un codi binari C, Ker(C), es podria veure com la part

lineal més representativa d'un codi C ja que és la intersecció dels subespais lineals i maximals de C. Paral·lelament, si C és un codi Z_2Z_4-additiu, el kernel de C són tots aquells vectors v els quals $\phi(v)$ pertanyin al nucli $Ker(\phi(C))$. Aquest concepte té una considerable rellevància ja que permet extreure d'un codi no lineal, un subcodi lineal amb el qual treballar de forma òptima. Els codis lineals només tenen els vectors inclosos al nuclis, però els que no ho són, tenen vectors dins al nucli i vectors que no. Aleshores, qualsevol codi binari pot ser representat com a la unió del nucli amb t-1 cosets (traslladats del nucli), per un cert $t \geq 0$. És a dir, existeixen t vectors, c_0 fins a c_t, on c_0 és el vector tot zeros tal que:

$$C = \bigcup_{i=0}^{t} (Ker(C) + c_i)$$

Cada conjunt $Ker(C) + c_i$ és un coset i els vectors c_0 fins a c_t s'anomenen els representants.

2 ESTAT DE L'ART

El grup CCSG és un equip format dins del Departament d'Enginyeria de la Informació i de les Comunicacions, dEIC, i dedicat, parcialment, a la investigació de codis Z_2Z_4-lineals amb la finalitat de dur a terme els següents objectius, entre d'altres:

- Construir i caracteritzar nous codis Z_2Z_4-lineals, i computar els seus paràmetres estructurals.
- Caracteritzar i construir famílies de codis Reed-Muller Z_2Z_4-lineals, i computar-ne el rang i la dimensió del kernel.
- Desenvolupar els algorismes necessaris per establir noves opcions en l'ocultació de dades i en l'autentificació de documents, utilitzant codis Z_2Z_4-lineals.
- Expandir el software de MAGMA implementant nous paquets amb la finalitat de treballar eficientment amb codis Z_2Z_4- lineals, codis regulars i codis no lineals.

Un dels principals articles escrits sobre codis Z_2Z_4-lineals és [1] en què s'estudien els codis Z_2Z_4-additius a partir dels quals s'extreu la corresponent imatge binària i s'obtenen els codis Z_2Z_4-lineals. D'aquests nous codis, es detallen les seves propietats i les formes estàndard de les matrius generadores i de control. També esmentar l'article [3] ja que s'hi demostren les propietats necessàries pel càlcul de rangs i kernels dels codis Z_2Z_4-lineals.

Degut que en aquest projecte ha estat necessari treballar amb les distàncies de Hamming dels codis ja mencionats, una de les referències a destacar és [6] perquè defineix i implementa mètodes algorítmics per la computació de la distància mínima de Hamming per codis Z_2Z_4-lineals.

El llenguatge MAGMA porta incorporades llibreries per treballar amb codis correctors d'errors sobre Z_2 i sobre Z_4 cosa que facilita el treball sobre aquests anells. Gràcies als membres del grup d'investigació CCSG, des de fa uns anys, es duu a terme el desenvolupament d'una nova llibreria en MAGMA per permetre treballar amb codis Z_2Z_4-lineals, fent ús d'algunes llibreries ja existents en aquest llenguatge. Es pretén que aquesta estigui totalment integrada amb la llibreria per a codis lineals.

Com s'ha esmentat anteriorment, s'ha usat el llenguatge MAGMA amb la finalitat de realitzar la part pràctica del projecte. Gràcies al mapa de Gray ϕ es pot treballar amb aquest llenguatge de manera lineal a $Z_2^{\alpha} \times Z_4^{\beta}$ i també es poden relacionar aquests codis amb codis sobre Z_2 i sobre Z_4.

Les referències existents sobre l'ús d'aquest llenguatge en l'entorn desitjat són les proporcionades per MAGMA, [9] i [10]. Addicionalment, també es van consultar les guies que facilita CCSG per MAGMA [8] i per entendre les funcions de codis Z_2Z_4-additius [2].

El fet d'haver de dissenyar i implementar unes funcions que s'integraran dins de MAGMA implica que s'han de seguir els estàndards marcats per tal mantenir el format. Com a conseqüència, es consultarà la guia [7] ja que proporciona aquests estàndards.

3 OBJECTIUS

Els objectius que es presenten en aquest article són els proposats a l'inici del projecte i, al mateix temps, coincideixen amb els escollits durant el transcurs del treball.

- Estudiar els codis Z_2Z_4-lineals tant a nivell conceptual com de les propietats que els defineixen.
- Aprendre un nou llenguatge i entorn de programació anomenat MAGMA.
- Dissenyar i desenvolupar tests de prova de funcions implementades prèviament i de les funcions que s'han implementat en aquest treball.
- Crear noves funcions de codis Z_2Z_4-lineals per determinar del pes mínim de Lee, la distància mínima de Lee, les paraules-codi de pes mínim i la distribució de pesosd'un codi Z_2Z_4-lineal.
- Ampliar la llibreria de MAGMA existent per a codis Z_2Z_4-lineals amb les noves funcions desenvolupades per tal de facilitar la descodificació via síndrome.
- Crear tests de rendiment i valorar els resultats obtinguts.

4 METODOLOGIA I MATERIAL

4.1 Metodologia

Aquest projecte va constar d'un component teòric rellevant a partir del qual es van poder desenvolupar les funcions necessàries per aquesta ampliació de la llibreria de MAGMA. L'expansió de coneixement esmentada va implicar un fil de continuïtat constant al llarg de tot el projecte ja que era necessari aquest suport a l'hora de tractar els codis Z_2Z_4-lineals. L'obtenció de coneixement va provenir de les publicacions al respecte, per exemple [1,4,6,7], i de l'ajuda i assessorament de la tutora del projecte Cristina Fernández. També es va seguir la notació establerta per codis lineals binaris i quaternaris referenciats en els articles consultats.

El component pràctic va adoptar la metodologia de treball de MAGMA sobre codis lineals en els diferents anells aprofitant les llibreries que aquest ja presenta. La seva codificació va seguir l'estil estrictament marcat pels estàndards facilitant, així, la seva integració a la llibreria. Les funcions previstes a desenvolupar durant tot el procés són les mostrades a continuació i cadascuna d'elles es va implementar amb un algorisme basat en la força bruta i un algorisme basat en el càlcul del kernel:

- Z2Z4MinimumLeeWeight,
- Z2Z4MinimumLeeDistance,
- Z2Z4MinimumWord,
- Z2Z4MinimumWords,
- WeightDistribution.

El procés de desenvolupament del projecte va seguir una pràctica de programació d'enginyeria de software anomenada *Test-Driven Development (TDD)*. Aquesta es basa en la idea d'elaborar primer les proves, després escriure el codi font que serà avaluat amb els tests fets i, per últim, fer la reestructuració o refacció del codi escrit. Al realitzar la metodologia en aquest ordre descrit en la Figura 2, va obligar a fer un exercici previ d'anàlisi dels requisits i dels diversos escenaris possibles. També implicava una optimització del codi per resoldre els tests de prova que hi tenien associats minimitzant errors. Degut a l'important paper que jugaven els tests, va ser imprescindible la realització d'un conjunt de proves unitàries que cobrissin tots els casos a avaluar. Al mateix temps, l'etapa de reestructuració també era rellevant ja que facilita la comprensió del codi i millora l'estructura interna, sense canviar el comportament extern. Amb aquesta pràctica s'aconsegueixen codi en MAGMA més robust, més segur, més llegible, amb més facilitat per mantenir-los al llarg del temps i una major rapidesa en el desenvolupament.

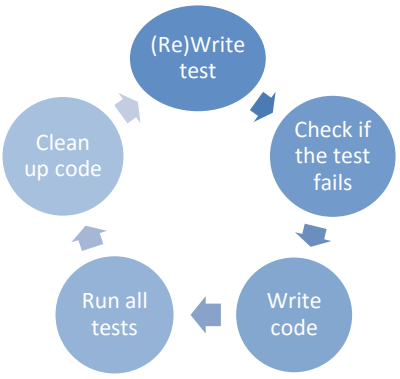


Figura 2: Cicle de vida de Test-Driven Development.

En la fase d'elaboració de proves, es va dur a terme la descripció i implementació de tests de caixa negra programats on s'especificaven quins eren els resultats correctes desitjats per poder realitzar la comparació amb els obtinguts. D'aquesta forma es van poder detectar i observar errors en les funcions programades amb l'objectiu de modificar-les i reavaluar-les.

Conseqüentment, per cada tipus de codi, es van seguir els passos esmentats seguidament per tal de realitzar la verificació de les funcions a testejar:

- Generar el codi amb les característiques específiques.
- Determinar els valors esperats dels paràmetres a provar.
- Comprovar que aquests valors previstos coincideixin amb els resultats que genera cada funció testejada.

Un cop aquesta etapa es va acabar, va començar la fase d'experimentació amb la qual es van dissenyar una sèrie de codis per poder testejar el rendiment de les funcions segons els dos tipus d'algorismes implementats. D'aquesta forma es va poder avaluar el comportament de cada algorisme segons les característiques que presentessin cada família de codis i poder triar quin dels dos era més òptim o, si era necessari usar els dos, quin escollir sota circumstàncies determinades.

4.2 Material

La fase d'experimentació d'aquest projecte va utilitzar dues famílies de codis diferents per poder estudiar el rendiment de les funcions definides en els objectius.

La primera va ser la dels codis de Hadamard. Aquests codis tenen un paràmetre enter $m \geq 1$ i un paràmetre enter δ comprès entre $1 \leq \delta \leq (m-1)/2$. El tipus de codi Hadamard que es genera amb aquests paràmetres és $2^{\gamma}4^{\delta}$, on $\gamma = m + 1 - 2\delta$. Al mateix temps, la longitud d'aquests codis ve donada per $n = 2^{(m-1)}$ sobre Z_4. En aquests codis, es van definir diversos valors de m i δ modificant, així, la dimensió del kernel i el nombre de representants dels cosets (Taula 1). Tot i que aquests codis són codis sobre Z_4, es van generar sobre l'anell $Z_2^{\alpha} \times Z_4^{\beta}$.

Taula 1. Dimensió del kernel i nombre de cosets de codis de Hadamard.

Hadamard Codes (δ,m)	Dimensió Kernel	Nombre Cosets
HadamardCode (3, 10)	9	3
HadamardCode (4, 10)	8	7
HadamardCode (5, 10)	7	15
HadamardCode (3, 11)	10	2
HadamardCode (4, 11)	9	7
HadamardCode (5, 11)	8	15
HadamardCode (6, 11)	7	31

L'altra família de codis utilitzats es van obtenir a partir de les matrius mostrades a l'apèndix A.1 i generades sobre l'anell $Z_2^{\alpha} \times Z_4^{\beta}$. Els codis C1 fins al C6 comparteixen $\alpha = 5$ coordenades binàries i $\beta = 10$ coordenades quaternàries. Al mateix temps, hi ha $\aleph = 4$ vectors d'ordre 2 i $\delta = 6$ vectors d'ordre 4. Aquests codis conserven la mateixa longitud i el nombre de paraules-codi, però canvia la dimensió del kernel i, per tant, el nombre de cosets (Taula 2). Es comença amb un kernel de dimensió 16 i després es redueix fins a 10.

Taula 2. Dimensió del kernel i nombre de cosets de codis Z_2Z_4.

Codis Z_2Z_4-additius	Dimensió Kernel	Nombre Cosets
C1	16	0
C2	15	3
C3	13	7
C4	12	15
C5	11	31
C6	10	63

Amb aquestes dues famílies de codis es van dissenyar els tests de rendiment que calculaven el temps empleat per cadascuna de les funcions desenvolupades amb els dos algorismes esmentats: el basat amb la força bruta i el basat en el càlcul del kernel.

5 RESULTATS

Els resultats, que es van obtenir després de l'execució dels tests de rendiment sobre cadascuna de les funcions implementades, es diferencien segons la família de codis emprada.

Per cada família de codis, es mostren els gràfics dels temps de còmput de cadascuna de les funcions distingint els dos algorismes: el basat en la força bruta i el basat en el càlcul del kernel. Al mateix temps, també es presenta el temps de càlcul del kernel per cadascun d'ells.

5.1 Codis de Hadamard

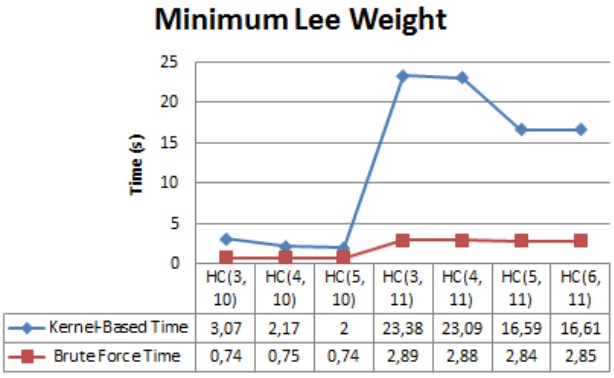


Figura 3.Temps de càlcul del pes mínim de Lee per codis Hadamard.

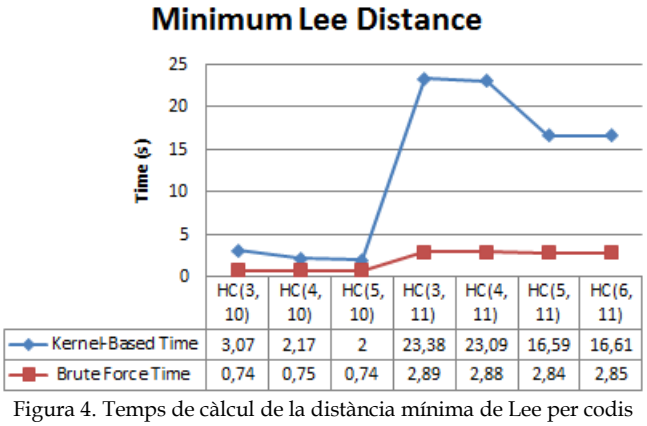


Figura 4. Temps de càlcul de la distància mínima de Lee per codis Hadamard.

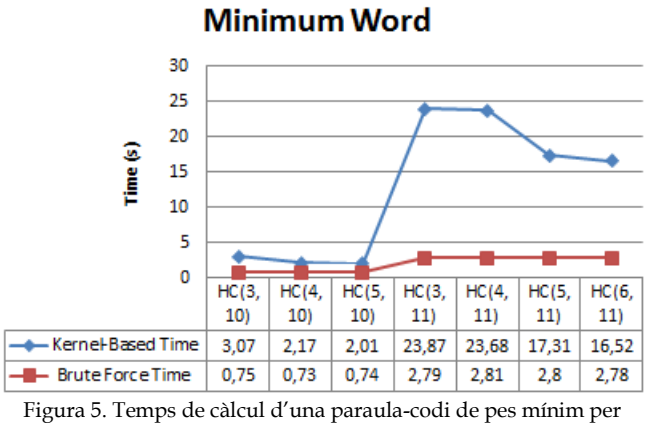
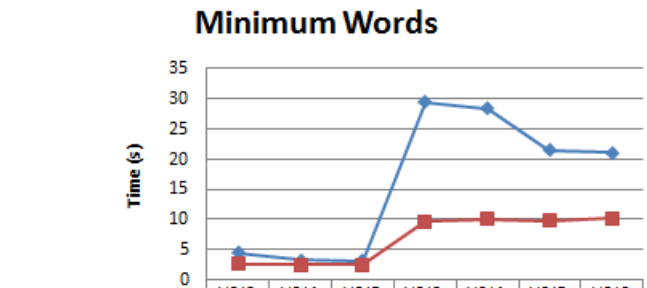
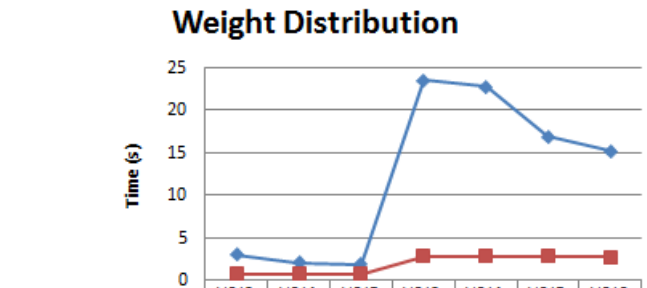


Figura 5. Temps de càlcul d'una paraula-codi de pes mínim per codis Hadamard.



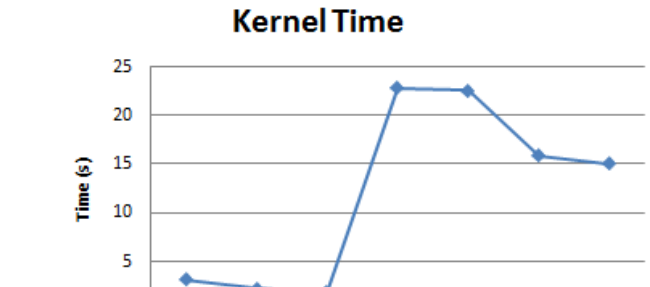
	HC(3, 10)	HC(4, 10)	HC(5, 10)	HC(3, 11)	HC(4, 11)	HC(5, 11)	HC(6, 11)
Kernel-Based Time	4,51	3,36	3,15	29,38	28,33	21,48	21,1
Brute Force Time	2,58	2,56	2,54	9,71	10,03	9,74	10,21

Figura 6. Temps de càlcul de les paraules-codi de pes mínim per codis Hadamard.



	HC(3, 10)	HC(4, 10)	HC(5, 10)	HC(3, 11)	HC(4, 11)	HC(5, 11)	HC(6, 11)
Kernel-Based Time	3,04	2,1	1,84	23,55	22,81	16,96	15,2
Brute Force Time	0,75	0,72	0,73	2,79	2,79	2,85	2,78

Figura 7. Temps de càlcul de la distribució de pesos per codis Hadamard



	HC(3, 10)	HC(4, 10)	HC(5, 10)	HC(3, 11)	HC(4, 11)	HC(5, 11)	HC(6, 11)
Kernel Time	3,07	2,2	1,76	22,82	22,55	15,88	15,05

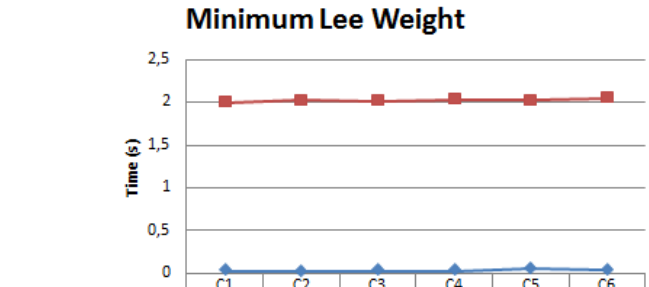
Figura 8. Temps de càlcul del Kernel per codis Hadamard.

Amb els codis de Hadamard s'observa que l'algorisme més eficient pel càlcul de les diverses funcions és el basat en la força bruta ja que els seus temps són inferiors en tots els casos.

En tots els gràfics mostrats d'aquesta secció, es detecta un punt a partir del qual els dos algorismes es distancien de forma desmesurada. L'algorisme basat en el càlcul del kernel augmenta els seus temps en totes les funcions al voltant de la vintena de segons, mentre que en l'algorisme basat en la força bruta, els seus temps no sobrepassen els 3 segons. Aquest punt de divergència es produeix quan el paràmetre m dels codis de Hadamard és 11.

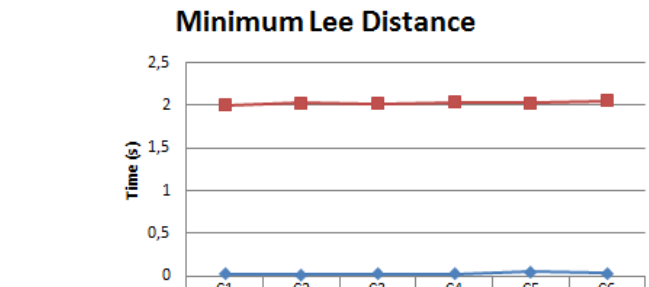
L'augment del paràmentre δ no és rellevant en el cas dels codis de Hadamard m=10, però en els codis de Hadamard on el paràmetre m=11 sí que s'observa una disminució dels temps de càlcul quan aquest δ incrementa.

5.2 Codis Z_2Z_4-additius



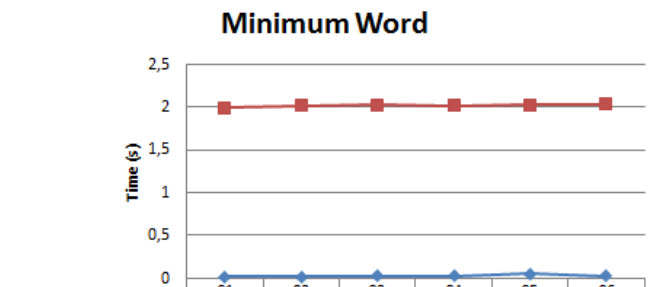
	C1	C2	C3	C4	C5	C6
Kernel-Based Time	0,03	0,02	0,03	0,03	0,05	0,04
Brute Force Time	2	2,03	2,02	2,04	2,03	2,05

Figura 9. Temps de càlcul del pes mínim de Lee per codis Z_2Z_4.



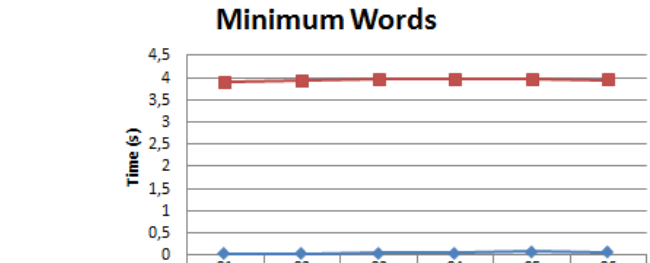
	C1	C2	C3	C4	C5	C6
Kernel-Based Time	0,03	0,02	0,03	0,03	0,05	0,04
Brute Force Time	2	2,03	2,02	2,04	2,03	2,05

Figura 10. Temps de càlcul de la distància mínima de Lee per codis Z_2Z_4.



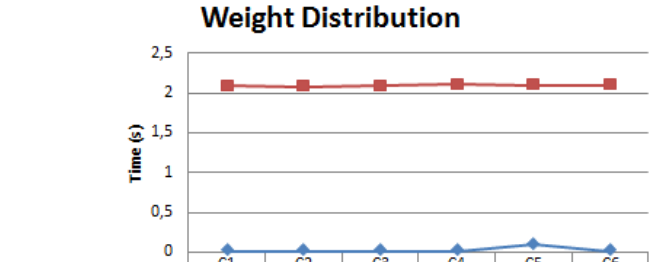
	C1	C2	C3	C4	C5	C6
Kernel-Based Time	0,02	0,02	0,03	0,03	0,05	0,03
Brute Force Time	1,99	2,02	2,03	2,02	2,03	2,04

Figura 11. Temps de càlcul d'una paraula-codi de pes mínim per codis Z_2Z_4.



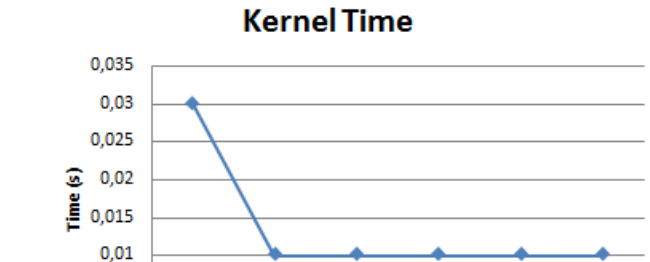
	C1	C2	C3	C4	C5	C6
Kernel-Based Time	0,03	0,03	0,04	0,05	0,08	0,06
Brute Force Time	3,9	3,93	3,96	3,96	3,97	3,95

Figura 12.Temps de càlcul de les paraules-codi de pes mínim per codis Z_2Z_4.



	C1	C2	C3	C4	C5	C6
Kernel-Based Time	0,02	0,02	0,02	0,02	0,1	0,02
Brute Force Time	2,09	2,08	2,09	2,11	2,1	2,1

Figura 13. Temps de càlcul de la distribució de pesos per codis Z_2Z_4.



	C1	C2	C3	C4	C5	C6
Kernel Time	0,03	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01

Figura 14. Temps de càlcul de la distribució de pesos per codis Z_2Z_4.

En aquest conjunt de codis, l'algorisme basat en el càlcul del kernel i el basat en la força bruta impliquen uns temps de càlcul que difereixen de 2 a 3 segons, entre ells.

Tot i que els temps de còmput no estan al voltant de l'odre de la vintena de segons, com el cas anterior, l'algorisme basat en el càlcul del kernel emplea uns temps notablement més baixos front l'algorisme basat en la força bruta per la computació de les mateixes funcions. En tots els casos, els temps emprats per les funcions són inferiors a 1 segon.

Els temps de càlcul d'aquesta família de codis presenta certa linealitat per cadascun dels algorismes estudiats sense que hi hagin canvis bruscos a mesura que augmenta el nombre de cosets representatius.

6 Discussió

En la primera etapa del projecte, mentre es programaven les funcions amb l'algorisme de la força bruta, el que es pensava a nivell teòric era que aquest tipus d'algorisme era poc eficient per realitzar les operacions ja que sempre calia recórrer totes les paraules-codi per obtenir la informació final desitjada. Aquesta forma no era òptima per estalviar temps de càlcul.

Posteriorment, quan es van implementar les funcions amb l'algorisme basat en el càlcul del kernel, s'esperava que aquest fos més eficient ja que el kernel i els cosets d'un codi Z_2Z_4-lineal es traslladen a l'anell d'enters mòdul 2 i, en aquest anell, s'usen les funcions binàries que ja estan optimitzades.

Dels resultats de la família de codis Hadamard, es detecta que l'algorisme òptim és el basat en la força bruta, justament el contrari del que es creia en un principi. S'observa que els codis amb temps de còmput més elevats són aquells en els quals el paràmetre m és igual a 11 i on la dimensió del kernel és la més gran.

La limitació observada resideix en la funció que calcula el kernel, tal com s'observa en el gràfic de còmput del kernel (Figura 8) ja que aquests temps són substancialment elevats. Aquest fet implica que el càlcul del kernel és un coll d'ampolla a l'hora d'obtenir un rendiment més elevat dels temps de còmput en aquesta família de codis. Els codis de Hadamard tenen un codi dual (aquell generat per la matriu de control H) relativament gran. Actualment el càlcul del kernel, està implementat de tal forma que fa servir el dual per poder calcular-lo. Si aquesta funció, com en el de la força bruta, considerés només els vectors d'ordre quatre de la matriu generadora, G, tardaria menys que no pas les que usen el dual en el seu còmput.

Actualment, pels codis de Hadamard és millor l'algorisme basat en la força bruta. No obstant això, si s'optimitzés la funció que calcula el kernel, és possible que els temps de les funcions implementades en aquest projecte milloressin i que l'algorisme basat en el càlcul del kernel desbanqués al de la força bruta.

Amb la segona família de codis, codis Z_2Z_4-additius de C1 a C6, sí que s'observa que l'algorisme basat en el càlcul del kernel és més eficient i òptim perquè va més ràpid en obtenir els resultats que no pas l'altre algorisme. En aquest cas, es destaca la gran diferència de temps a l'hora de dur a terme el càlcul del kernel. El temps invertit en aquest càlcul és de l'ordre de 0,01s mentre que en els codis de Hadamard pot arribar fins a 23s, tal com s'observa a les Figures 8 i 14.

Com a conseqüència del càlcul del kernel i els cosets d'un codi a l'anell d'enters mòdul 2, es creia que l'augment del nombre de cosets estava directament relacionat amb el temps de còmput d'aquest algorisme. No obstant això, amb els resultats observats en les gràfiques anteriors dels codis Z_2Z_4-additius no es produeix tal relació directa. El codi C6 té el major nombre de cosets representatius, però en canvi, el codi que fa servir uns temps majors és el C5. Vists aquests resultats es pot concloure

que, per a aquests codis, el temps de còmput no està vinculat amb la relació existent entre la dimensió del kernel i el nombre de cosets representatius. Es podrien construir codis amb una dimensió de kernel més gran i amb més representants per tal de determinar com estan relacionats aquests factors amb el temps de còmput.

A les dues famílies de codis emprades, s'observa que les funcions del càlcul del pes mínim de Lee i de la distància mínima de Lee obtenen els mateixos resultats pel que fa el temps de còmput. Aquest fet està causat per la programació d'aquestes funcions ja que és exactament la mateixa; és a dir, comparteixen el mateix codi font.

7 CONCLUSIONS

Durant la realització d'aquest projecte s'han assolit els objectius inicialment marcats que han estat coincidents amb els establerts durant el transcurs del mateix.

No s'ha pogut determinar amb certesa quins dels dos algorismes emprats és més eficient i òptim pel càlcul de les funcions ja que les proves realitzades amb les dues famílies de codis proporcionaven resultats dispars, però amb els indicis explicats en l'apartat anterior tot apuntaria que l'algorisme basat en el càlcul del kernel és més eficient. Tot i això, s'hauria d'optimitzar la funció usada pel càlcul del kernel i comprovar després si existeix una millora real del temps de còmput i si aquesta, optimitza els temps de les funcions desenvolupades en aquest projecte per l'algorisme basat en el kernel.

Existeix una altra possible futura línia d'investigació basada en la recerca de característiques de codis Z_2Z_4-lineals amb la finalitat de descobrir per quins codis seria millor dur a terme les funcions usant l'algorisme basat en la força bruta i per quins codis és més eficient utilitzar les funcions fonamentades en l'algorisme basat en el càlcul del kernel. Així es podria obtenir el màxim rendiment dels dos tipus d'algorismes utilitzats a l'hora d'implementar totes les funcions.

AGRAÏMENTS

Especialement, a la Cristina Fernández per acceptar ser la tutora d'aquest projecte i, al mateix temps, per l'ajuda, les correccions i el suport proporcionat durant tot el procés. A la Mercè Villanueva per l'ajuda facilitada.

A la meva família per donar-me l'oportunitat de poder estudiar i suportar-me durant els moments de molta pressió.

A l'Anna, l'Esther, el Carlos, el David, el Nil, l'Arcadi i el Lucas pels anys compartits, per creure en mi i per ser la distracció oportuna en moments molt necessaris.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. Borges, C. Fernández-Córdoba, J. Pujol, J. Rifà and M. Villanueva, "Z2Z4-linear codes: generator matrices and duality," Designs, Codes and Cryptography, vol. 54, pp. 167-179, 2010.

[2] J. Borges, C. Fernández, B. Gastón, J. Pujol, J. Rifà and M. Villanueva, "Z2Z4-Additive Codes. A MAGMA Package", Univeristat Autònoma de Barcelona, 2009.

[3] C. Fernández-Córdoba, J. Pujol, and M. Villanueva, "Z2Z4-linear codes: rank and kernel," Desings, Codes and Cryptography (July 2010) vol. 56. no. 1, pp. 43-59, ISSN: 0925-1022. DOI: 10.1109/TIT.2011.2119465.

[4] B. Gastón, "Codis Z2Z4-Additius en MAGMA", Projecte de final de carrera, Universitat Autònoma de Barcelona, 2008.

[5] L. Huguet i J. Rifà, "Comunicación Digital," Ed. Masson, 1991.

[6] M. Pujol, "Computing the Minimum Hamming Distance for Z2Z4-linear codes", Projecte de final de màster, Universitat Autònoma de Barcelona, 2012.

[7] CCSG Development Group, "CCSG Style Guide", Univeristat Autònoma de Barcelona, 2011.

[8] CCSG Development Group, "Breu Introducció al MAGMA", Univeristat Autònoma de Barcelona, 2004.

[9] Computational Algebra Group, "Overview of MAGMA V2.19 Features", University of Sydney, 2016, https://magma.maths.usyd.edu.au/magma/overview/pdf/overv219.pdf.

[10] "Handbook MAGMA", https://magma.maths.usyd.edu.au/magma/handbook/

APÈNDIX

A1. SECCIÓ D'APÈNDIX

Les matrius usades en MAGMA pel càlcul del rendiment dels diferents algorismes, segons les funcions realitzades, són les següents:

```
M1 := Matrix(Z4,[[2,0,2,0,2, 0,0,0,0, 0,0,0,0,0,0 ],
[0,2,0,2,0, 0,0,0,0, 0,0,0,0,0,0 ],
[0,0,2,0,2, 0,0,2,0, 0,0,0,0,0,0 ],
[0,0,0,0,2, 0,0,0,2, 0,0,0,0,0,0],
[0,0,2,0,2, 0,0,0,0, 1,0,0,0,0,0],
[0,0,2,2,0, 0,0,0,0, 0,1,0,0,0,0 ],
[0,0,2,0,2, 0,0,0,0, 0,0,1,0,0,0 ],
[0,0,2,2,0, 0,0,0,0, 0,0,0,1,0,0 ],
[0,0,0,2,2, 0,0,0,0, 0,0,0,0,1,0 ],
[0,0,2,0,2, 0,0,0,0, 0,0,0,0,0,1 ]]);

C1 := Z2Z4AdditiveCode(M : Alpha := 5);

M2 := Matrix(Z4,[[2,0,2,0,2, 0,0,0,0, 0,0,0,0,0,0 ],
[0,2,0,2,0, 0,0,0,0, 0,0,0,0,0,0 ],
[0,0,2,0,2, 0,0,2,0, 0,0,0,0,0,0 ],
[0,0,0,0,2, 0,0,0,2, 0,0,0,0,0,0 ],
[0,0,2,0,2, 1,0,0,0, 1,0,0,0,0,0 ],
[0,0,2,2,0, 1,0,0,0, 0,1,0,0,0,0 ],
[0,0,2,0,2, 0,0,0,0, 0,0,1,0,0,0 ],
[0,0,2,2,0, 0,0,0,0, 0,0,0,1,0,0 ],
[0,0,0,2,2, 0,0,0,0, 0,0,0,0,1,0 ],
[0,0,2,0,2, 0,0,0,0, 0,0,0,0,0,1 ]]);

C2 := Z2Z4AdditiveCode(M : Alpha := 5);

M3 := Matrix(Z4,[[2,0,2,0,2, 0,0,0,0, 0,0,0,0,0,0 ],
[0,2,0,2,0, 0,0,0,0, 0,0,0,0,0,0 ],
[0,0,2,0,2, 0,0,2,0, 0,0,0,0,0,0 ],
[0,0,0,0,2, 0,0,0,2, 0,0,0,0,0,0 ],
[0,0,2,0,2, 1,0,0,0, 1,0,0,0,0,0 ],
[0,0,2,2,0, 1,1,0,0, 0,1,0,0,0,0 ],
[0,0,2,0,2, 0,1,0,0, 0,0,1,0,0,0 ],
[0,0,2,2,0, 0,0,0,0, 0,0,0,1,0,0 ],
[0,0,0,2,2, 0,0,0,0, 0,0,0,0,1,0 ],
[0,0,2,0,2, 0,0,0,0, 0,0,0,0,0,1 ]]);

C3 := Z2Z4AdditiveCode(M : Alpha := 5);

M4 := Matrix(Z4,[[2,0,2,0,2, 0,0,0,0, 0,0,0,0,0,0 ],
[0,2,0,2,0, 0,0,0,0, 0,0,0,0,0,0 ],
[0,0,2,0,2, 0,0,2,0, 0,0,0,0,0,0 ],
[0,0,0,0,2, 0,0,0,2, 0,0,0,0,0,0 ],
[0,0,2,0,2, 1,0,0,0, 1,0,0,0,0,0 ],
[0,0,2,2,0, 1,1,0,0, 0,1,0,0,0,0 ],
[0,0,2,0,2, 1,1,0,0, 0,0,1,0,0,0 ],
[0,0,2,2,0, 1,0,0,0, 0,0,0,1,0,0 ],
[0,0,0,2,2, 0,0,0,0, 0,0,0,0,1,0 ],
[0,0,2,0,2, 0,0,0,0, 0,0,0,0,0,1 ]]);

C4 := Z2Z4AdditiveCode(M : Alpha := 5);

M5 := Matrix(Z4,[[2,0,2,0,2, 0,0,0,0, 0,0,0,0,0,0 ],
[0,2,0,2,0, 0,0,0,0, 0,0,0,0,0,0 ],
[0,0,2,0,2, 0,0,2,0, 0,0,0,0,0,0],
[0,0,0,0,2, 0,0,0,2, 0,0,0,0,0,0],
[0,0,2,0,2, 1,0,0,0, 1,0,0,0,0,0 ],
[0,0,2,2,0, 1,1,0,0, 0,1,0,0,0,0 ],
[0,0,2,0,2, 1,1,0,0, 0,0,1,0,0,0 ],
[0,0,2,2,0, 1,1,0,0, 0,0,0,1,0,0 ],
[0,0,0,2,2, 0,1,0,0, 0,0,0,0,1,0 ],
[0,0,2,0,2, 0,0,0,0, 0,0,0,0,0,1 ]]);

C5 := Z2Z4AdditiveCode(M : Alpha := 5);

M6 := Matrix(Z4,[[2,0,2,0,2, 0,0,0,0, 0,0,0,0,0,0],
[0,2,0,2,0, 0,0,0,0, 0,0,0,0,0,0 ],
[0,0,2,0,2, 0,0,2,0, 0,0,0,0,0,0 ],
[0,0,0,0,2, 0,0,0,2, 0,0,0,0,0,0 ],
[0,0,2,0,2, 1,0,0,0, 1,0,0,0,0,0],
[0,0,2,2,0, 1,1,0,0, 0,1,0,0,0,0 ],
[0,0,2,0,2, 1,1,0,0, 0,0,1,0,0,0 ],
[0,0,2,2,0, 1,1,0,0, 0,0,0,1,0,0 ],
[0,0,0,2,2, 0,1,0,0, 0,0,0,0,1,0 ],
[0,0,2,0,2, 0,0,0,0, 0,0,0,0,0,1 ]]);

C6 := Z2Z4AdditiveCode(M : Alpha := 5);

M7 := Matrix(Z4,[[2,0,2,0,2, 0,0,0,0, 0,0,0,0,0,0 ],
[0,2,0,2,0, 0,0,0,0, 0,0,0,0,0,0 ],
[0,0,2,0,2, 0,0,2,0, 0,0,0,0,0,0 ],
[0,0,0,0,2, 0,0,0,2, 0,0,0,0,0,0 ],
[0,0,2,0,2, 1,0,0,0, 1,0,0,0,0,0],
[0,0,2,2,0, 1,1,0,0, 0,1,0,0,0,0],
[0,0,2,0,2, 1,1,0,0, 0,0,1,0,0,0 ],
[0,0,2,2,0, 1,1,0,0, 0,0,0,1,0,0 ],
[0,0,0,2,2, 1,1,0,0, 0,0,0,0,1,0 ],
[0,0,2,0,2, 1,0,0,0, 0,0,0,0,0,1 ]]);

C7 := Z2Z4AdditiveCode(M : Alpha := 5);
```