



TÍTULO DEL TFG:

La optimalidad de la co-inversión:

Una aportación desde el sector de las telecomunicaciones y la organización industrial

AUTOR DEL TFG:

Víctor Fernández Modrego

GRADO:

Economía

TUTOR DEL TFG:

Ángel Luis López

FECHA DE ENTREGA:

7-6-2017

0.AGRADECIMIENTOS:

Antes de empezar el trabajo, me gustaría agradecer y dar las gracias a todas aquellas personas que o bien me han ayudado o bien han permitido que reflexionase con ellos los detalles del trabajo. Por ello, quiero dar las gracias en primer lugar a mi tutor Ángel Luis Lopez por su ayuda y guía. También me gustaría dar las gracias a Andrea, Pablo, Álex, Marc y Guillem, sin ellos y sus ánimos este trabajo no hubiese sido posible. Gracias a todos.

Dicho lo anterior, aclarar que todos los errores que pueda haber en el trabajo son míos.

1.RESUMEN:

Este trabajo de fin de grado trata, tal como dice el título, sobre la optimalidad de la co-inversión. En otras palabras, si la co-inversión puede mejorar el bienestar agregado de un determinado mercado. Tal mejora de bienestar y por tanto si estos esquemas de inversión son óptimos o no, se calculará mediante el cambio en los beneficios de las empresas entre las dos posibilidades de inversión analizadas: Co-inversión o inversión unilateral.

Para llegar al calculo de estos beneficios y por tanto poder discernir las conclusiones, se construirá un modelo, basado en Salop, con dos empresas las cuales tendrán dos mercados delimitados: aquellos en los que tienen cobertura y aquellos en los que no pero que pueden acceder a ellos si invierten. Los resultados de este modelo teórico nos inducirá unas conclusiones que después podremos ampliar de manera más detallada utilizando simulaciones empleando Maple.

Todo este proceso, por su relevancia en las estructuras económicas actuales, tomará como referencia el mercado de las telecomunicaciones así como la literatura existente sobre estos mercados de la cual se hablará en el segundo punto del trabajo justo antes de empezar el modelo.

TABLA DE CONTENIDOS

0.AGRADECIMIENTOS.....	2
1.RESUMEN.....	2
2.ANTECEDENTES Y REVISIÓN DE LITERATURA.....	4
2.1 Introducción:.....	4
2.2 Marco legal.....	4
2.3 Modelos Generales.....	5
2.4 Estructura del Mercado.....	6
2.5 Competencia.....	7
2.6 Inversión.....	8
2.7 Comentarios finales.....	10
3. El MODELO.....	11
3.1 Introducción.....	11
3.2 Segunda Etapa.....	12
3.3 Primera Etapa.....	16
3.4 Primeras Conclusiones.....	18
3.5 Co-inversión.....	19
3.5.1 Segunda etapa.....	19
3.5.2 Caso particular de la primera etapa.....	22
3.5.3 Primera etapa.....	23
3.6 Conclusiones Generales Del Modelo.....	27
4.SIMULACIONES.....	27
4.1 Introducción.....	27
4.2 Simulaciones Sobre Los Niveles De Capital.....	28
4.3 Simulaciones Sobre El Nivel De Beneficios.....	34
5.CONCLUSIONES.....	37
6.BIBLIOGRAFIA.....	37
6.1 Libros.....	37
6.2 Artículos.....	38
6.3 Leyes y directivas legales.....	39
6.4 Reportes Oficiales.....	39

2.ANTECEDENTES Y REVISIÓN DE LITERATURA

2.1 Introducción:

En este apartado de la tesina de final de grado se pretende hacer un resumen, así como explorar todo aquello que se ha dicho acerca de las variables que estudiaremos en el modelo del segundo apartado teniendo siempre en mente el mercado en el cual nos movemos (el mercado de las telecomunicaciones móviles). Dichas variables serán las siguientes: Marco legal, modelos básicos, estructura del mercado, competencia, inversión dónde también se incluirá todo lo relativo a la co-inversión y finalmente unos apuntes finales.

Este apartado seguirá el mismo orden que en el que se han nombrado las variables, esta decisión radica en el hecho que la estructura del mercado condiciona la competencia que hay en él y esta competencia incentiva que haya inversión o que no la haya así como que esta solo esté dedicada a diferenciar el producto de la empresa respecto el de la competencia o que solo se dedique a expansiones del mercado, de la producción etc.

Sin embargo, antes de explorar la literatura sobre las citadas variables, hace falta nombrar el esquema legal y los modelos básicos, en otras palabras, primero hace falta ver en que marco legal se basan los mercados de las telecomunicaciones en el caso español y después, antes de explorar cada una de las variables, también hará falta señalar que modelos básicos se utilizan dentro de la economía industrial para estudiar estas variables. Especialmente, los modelos dedicados a estudiar la estructura del mercado. Por eso mismo, a continuación de esta introducción vendrá el apartado del marco legal y después el apartado sobre modelos básicos. Una vez terminado este último apartado, vendrán individualmente cada uno de los apartados de las variables en el orden que se ha explicado así por ejemplo, el apartado 2.4 será el dedicado a la revisión de la literatura que ha aportado avances en lo referente a cuáles son las estructuras que las empresas forman en los mercados de telecomunicaciones.

2.2 Marco legal

El mercado de las telecomunicaciones en el que se basa el modelo, es un mercado profundamente regulado por las autoridades puesto que muchas de las compañías existentes eran antiguos monopolios debido a que suelen ser mercados, que son ejemplos paradigmáticos de monopolios naturales.

En el estado español, las disposiciones legales por las que se rige el sector vienen marcadas desde Bruselas, puesto que la Comisión Europea tiene las competencias últimas en temas de regulación y

competencia. Basadas en las directrices de Bruselas pues, en España el sector de las telecomunicaciones está regido por la Ley 9/2014 que como puede observarse, data del 2014. Esta, como ya se ha dicho, se basa en la directrices de la Unión Europea de los años 1998 y 2002. Las presentes bases legales han servido para conformar un sector más competitivo pero que aún tiende a la centralización y al oligopolismo. Debido a esas características, el estado dispone de un regulador encargado de velar por el buen funcionamiento de este mercado, en otras palabras, que el mercado de las telecomunicaciones funcione, en la medida de lo posible, como un mercado de competencia perfecta. Este órgano regulador es la CNMC (Comisión Nacional del Mercado y la Competencia) y edita cada año el “Informe económico sectorial de las telecomunicaciones y el audiovisual”¹ dónde analiza la salud de los dos sectores desde una perspectiva anual.

2.3 Modelos Generales

Tal y como hemos explicado en la introducción, en este apartado se tratarán los modelos teóricos que se utilizan para estudiar las variables mencionadas. Antes de nombrarlos hay que explicar en que se caracterizan todos ellos y es en que son modelos basados en productos diferenciados. Esto quiere decir que a pesar de que los productos de las empresas satisfagan una misma necesidad estas intentan diferenciarlo de la competencia intentando aportar algo más que sea apreciado por los consumidores y que en última instancia les permita tener más cuota de mercado.

Un caso paradigmático de competencia con productos diferenciados es el mercado automovilístico. En él, las empresas distribuyen sus bienes (los automóviles) que satisfacen una misma necesidad (la movilidad) sin embargo, cada empresa o grupo diferencia sus productos en base a calidades, precios, características técnicas, filosofía a la hora de conducir (comportamiento deportivo o burgués) etc. En el caso de los mercados de telecomunicaciones móviles, la competencia en productos diferenciados también tiene sentido pues las diferentes firmas también diferencian sus productos. Así por ejemplo tenemos que en el caso español Vodafone ha optado en diferenciarse mediante la calidad de su red y cobertura. Movistar, más conservadora a optado por ser el valor tradicional y seguro que todos los consumidores conocen y así cada una de las empresas que compiten en el mercado español, que no olvidemos, satisfacen una misma necesidad: la comunicación entre personas.

En mercados con productos diferenciados hay dos grandes tipos de modelos. Los primeros son modelos que no se basan en un espacio físico. Entre estos tendríamos: Cournot (competencia en cantidades), Bertrand (competencia en precios) y Stackelberg (Rol entre líder y seguidor que

¹ El más reciente es del año 2016 y se contrará una referencia en la bibliografía.

pueden competir tanto en precios como en cantidades). Por otra parte, tenemos los modelos que si se basan en un espacio concreto. Aquí estarían por una parte el modelo de Hotelling que data del año 1929 y que también es conocido como modelo lineal pues se basa en un espacio representado por una línea recta (por ejemplo una calle) en la cual las empresas compiten tanto en localización como en precios y cantidades.

Hotelling también permite las llamadas “tierras ocultas” nombre con el que se conocen los mercados cautivos de las diferentes empresas. Sin embargo este modelo, dista de ser perfecto y con más de 2 empresas, aparecen equilibrios no estables en la localización de las mismas lo que impide resolver el juego. Por ese mismo motivo, en el año 1979 apareció el modelo de Salop o modelo circular, que en vez de basarse en una línea se basa en un círculo que permite localizaciones de más de 3 empresas con equilibrios estables. Salop, es el modelo utilizado en la presente tesis y en el apartado sobre el mismo, se explicarán todas las tecnicidades del modelo. De los anteriores modelos, se puede encontrar una magnífica explicación de los mismos en el libro de Tirole (1988).

2.4 Estructura del Mercado:

Dentro de este apartado encontraremos artículos que explican desde como las políticas de los gobiernos afectan a la evolución de la estructura de los mercados de telecomunicaciones hasta artículos más técnicos con gran presencia de teoría de juegos . Entre los primeros artículos destaca el de Gruber & Verboven (2001). En este artículo, los autores analizan los efectos que tienen las políticas de los gobiernos en la industria mundial de las telecomunicaciones móviles concluyendo que el diseño de políticas públicas que tengan como objeto la eficaz estructura de mercado del sector, deben tener en cuenta las limitaciones tecnológicas. Además, demuestran que la rapidez con la cuál los gobiernos permitieron la adopción de licencias con las que poder acceder a ciertos espectros radiofónicos, tubo efectos positivos en la posterior expansión de las líneas móviles. Esta adopción, apuntan los autores, ha de ser llevada de manera secuencial y si además se hacen mediante subastas, la difusión de líneas móviles es aún mayor y por tanto, la regulación genera aún más un cambio significativo en la estructura del mercado. Finalmente, los autores encuentran que la competencia, de la que se hablará en el siguiente apartado, tiene efectos positivos en la difusión de los servicios móviles.

Movidos por un interés parecido al de Grover y Verboven, los autores Li & Lyons (2012) realizan un análisis econométrico para encontrar cuales son los factores que más afectan positivamente a la difusión de una nueva tecnología en el mercado de las telecomunicaciones. Los autores, acaban encontrando que la estructura de mercado que maximiza la difusión de nuevas tecnologías es el

pentaligopolio, en otras palabras, un oligopolio formado por 5 empresas.

Los anteriores artículos eran de corte bastante empírico pero en Boyer, Lassere & Moreaux (2012) los autores crean un modelo basado en Cournot que les permite concluir que en las primeras etapas del juego que presentan, la estructura del mercado se caracteriza por una fuerte competencia entre las empresas dónde la colusión no es posible hasta etapas posteriores pero que sin embargo esta es óptima (El llamado Equilibrio Perfecto de Markov) sobretodo cuando las empresas tienen la misma dimensión. También encuentran, que la competencia es más intensa cuando solo una de las dos empresas invierte mientras que cuando las dos lo hacen, la colusión es más rentable para las empresas y por tanto, posible.

Desde instituciones oficiales, es importante mencionar el artículo que Genakos & Valletti & Verboven (2015) dónde los autores encuentran que cuando la estructura del mercado es más concentrada (hay menos empresas), los precios para los usuarios finales son mayores pero que además también se registran mayores inversiones en capital.

Finalmente el último artículo de esta sección, es el de Jeanjean & Hounghonon (2017). En este, los autores estudian el impacto de la inversión en calidad de las empresas de telecomunicaciones en la estructura de mercado. Para ello, se basan en un modelo de Salop junto con un análisis econométrico que les permite concluir que el efecto de la inversión en la estructura de mercado depende mucho de las asimetrías así pues por ejemplo en mercados simétricos la inversión cae inversamente al número de empresas que hay en ese mercado. Cabe decir, que tal como expresan los propios autores, estos resultados ya habían sido aportados teóricamente por Vives (2008) aparte de esos resultados empíricos los autores también encuentran que una caída en la inversión en capital puede que no induzca a una reducción de la calidad del servicio sino que se puede deber a una sobre-estimación de los requerimientos de inversión necesarios por parte de la empresa.

2.5 Competencia

Dentro de este apartado, encontraremos los artículos que se centran en analizar la competencia, sus características e incluso cual es el nivel de esta que maximiza la inversión. Cabe decir que muchos de ellos tienen en cuenta costes de cambio, los costes que debes pagar por cambiarte de compañía, que nosotros en nuestro modelo no tendremos en cuenta debido a que en los últimos años tanto los costes directos, como los indirectos (las permanencias) se han reducido mucho o eliminado. Dicho esto, uno de los artículos más relevantes en este campo es el de Klemperer (1988) dónde el autor demuestra que los costes de cambio inducen a unas rentas monopolísticas para la empresa lo que ciertamente, influye negativamente en la competencia y por ende provoca una reducción del

bienestar en el conjunto de la economía. Además el autor también aporta los métodos para evitar eso (como la estandarización).

Un “paper” más moderno que también tiene en cuenta costes de cambio pero que centra su atención en el mercado de las telecomunicaciones es el de López & Rey (2016). En él los investigadores hayán que cuando los costes de cambio son altos e iguales para ambas empresas, la empresa local tiene incentivos a cerrar su mercado y tratarlo como un mercado monopolístico, en otras palabras, los costes de cambio reducen la competencia si son altos pero sin embargo, la empresa local no puede llevar a cabo esta estrategia si quien paga estos costes de cambio es quien recibe la nueva línea. Debido a estos motivos, los autores reclaman que la regulación de estos mercados es necesaria y que esta se lleve a cabo mediante un coste (o carga) por llamada recibida que además fuera estándar. También reclaman que la regulación para las empresas sea diferente en el sentido que para las empresas locales (incumbentes) y que normalmente eran los antiguos monopolios, esta, fuese más estricta que para las nuevas empresas que quieren entrar en el mercado lo cuál, según los autores, favorecería la competencia del sector.

Finalmente, el último artículo que se va a tratar en este apartado es el de Jeanjean & George (2016) dónde los autores analizan la relación entre competencia e inversión pero en las industrias de las redes sin cables no de las industrias de telecomunicaciones propiamente. Sin embargo, su análisis puede ser de utilidad. En el documento pues, se concluye que hay una relación de U-inversa entre la competencia entre las empresas y la inversión lo que lleva a los autores a sugerir que los políticos deberían considerar los beneficios marginales de las empresas antes de permitir entrar a un nuevo competidor pues si los beneficios marginales de las empresas están por debajo del 35%, la introducción de una nueva compañía en el mercado, disminuirá el bienestar mientras que si están por encima del 42%, el bienestar aumentará. Por ese motivo, los autores asumen que las empresas invierten en su propia red sin considerar en ningún momento la co-inversión, tema que se desarrollará en el siguiente apartado.

2.6 Inversión:

Como se ha podido observar en los anteriores apartados, el rol de la inversión ha sido bastante estudiado. Sin embargo, normalmente se ha estudiado casos de inversión en calidad como el de Jeanjean & Hounghonon (2017) dejando de lado los efectos de las inversiones que tienen como objetivo una expansión del mercado. La literatura sobre inversiones también se ha centrado en los efectos de la competencia que tiene esta o viceversa. Un artículo que trata este último caso es el de Kim et al (2011) dónde los autores, buscan que relación tiene la entrada en el mercado de nuevos

operadores virtuales en al inversión de los operadores tradicionales de ese mercado, en el caso español, por ejemplo, cual sería el efecto en la inversión de Movistar de la entrada en el mercado de Carrefour Mobile. Los resultados del análisis son que todo depende de la regulación que establezca el gobierno. Así pues, si se permite el acceso a las redes existentes por parte de estas nuevas compañías, la inversión de las compañías tradicionales se reduce en cambio si esta provisión no es obligatoria y las empresas tradicionales pueden o no dar acceso a sus redes a las nuevas compañías, la inversión no se reduce lo cual lleva a que en el largo plazo no se vean obligadas a reducir la calidad del servicio y por tanto disminuyendo el bienestar de los individuos. Por eso, los autores concluyen que los gobiernos deberán seguir tratando con los incentivos negativos que provoca el dar acceso a estas nuevas compañías con tal de no provocar una reducción de la inversión y del bienestar.

Otro texto científico que se ha encargado de estudiar como las condiciones de entrada de las nuevas compañías pueden afectar a la inversión es el de los autores Bourreau & Dogan & Lestage (2013). En él los autores encuentran que no hay una simple regla para colocar el precio que deben pagar las empresas para acceder a un mercado encontrando también que si la regulación permite un gran grado de acceso que requiera poca inversión la entrada de empresas que ofrezcan servicios aumentará pero que en cambio, disminuirá la de aquellas que quieran tener infraestructura propia. En cambio, si la regulación permite múltiples formas de acceso a la red, las nuevas compañías tardarán más en entrar. Además, la inversión en infraestructuras también dependerá de como bajan los beneficios de las empresas puesto que si no hay mucha diferenciación en el mercado de las comercializadoras y por tanto la bajada es drástica (pues la inversión no permite diferenciarse), la inversión disminuirá.

Por los anteriores artículos se demuestra que los incentivos que genera el gobierno son de gran importancia cuando se busca la máxima inversión de las empresas lo cual queda demostrado en el artículo de Jeanjean (2013) dónde se encuentra que la competencia basada en calidad incentiva a las empresas a una inversión óptima pero que esta, está por debajo de lo que sería deseable socialmente. El fenómeno se debe a que las empresas necesitan suficiente margen de beneficios para poder acometer esta y otras inversiones ya que tal como explica el autor, este nivel de inversión que se fijan las empresas es especialmente alto en las industrias de la información, que son en las que nosotros estamos interesados. Esta necesidad de un margen adecuado hace que en los países desarrollados dónde hay una fuerte competencia en precios, los objetivos de inversión no se cumplan por lo tanto hay un “trade-off” entre la competencia basada en precios y la competencia basada en calidades así pues el autor concluye que los gobiernos deben incentivar que las empresas alcancen sus objetivos de inversión aún a costa de la competencia pues tal como reconoce el autor

esta solo es beneficiosa si las empresas consiguen alcanzar sus objetivos de inversión.

Desde otro punto de vista, Schmutzler (2013) utiliza un modelo para identificar bajo que circunstancias una mayor competencia lleva a aumentar la inversión en tecnologías que reduzcan el coste encontrando que cuando las empresas son simétricas, los efectos son ambiguos. Sin embargo, estos pueden ser positivos (más competencia, mayor inversión en reducción de costes) para las empresas que inicialmente son más competitivas. El autor también argumenta que la separación entre propiedad de la empresa y dirección de la misma hace que la relación entre competencia e inversiones en reducción de costes sea positiva así como también unos costes de entrada bajos. Finalmente, el objetivo del autor es identificar los signos de unos parámetros con tal de servir de guía para futuros trabajos empíricos como el de Garrone & Zaccagnino dónde las autoras encuentran que las variaciones en la inversión no pueden deberse, al menos de forma directa, a los cambios del nivel de competencia sin embargo, de forma indirecta, la competencia a pesar de no jugar un papel autónomo, determina la inversión de la empresa nacional y esta puede verse aumentada si el “régimen de separación” consigue aumentar la competencia. Así pues, este trabajo demuestra que a mayor entrada de empresas la inversión de las antiguas empresas monopolísticas no debería por qué verse afectada tal como nos indicaría un análisis inicial.

Antes de pasar a hablar sobre la co-inversión también habría que nombrar al menos otro artículo dónde se estudie la inversión de las empresas desde otra perspectiva con tal de tener un marco conceptual más amplio. El artículo elegido para mostrar este hecho es el de los japoneses Katsuma & Kyoko (2016) dónde se estudia el problema de cuando hacer la inversión en términos de tiempos, en otras palabras si es mejor hacerla ahora o esperar y que rol juega en este problema los derechos preferentes de compra. Las conclusiones básicas son que las empresas elijen optimamente el momento en el cual invertir y que este es especialmente optimo cuándo hay incertidumbre y es la empresa líder a la que le toca decidir.

Finalmente, vistos varios puntos de vista y estudios sobre como interactua con otras fuerzas del mercado la inversión, hace falta hablar de co-inversión. Sobre ella, en telecomunicaciones, se ha escrito poco y se ha centrado en redes fijas como por ejemplo las redes de fibra. Sin embargo, sus resultados podrían coincidir con los resultados que se podrían obtener en redes móviles. Así pues, en Bourreau & Cambini & Hoernig (2012) los autores, analizan el impacto de la co-inversión en el despliegue de las redes de nueva tecnología (fibra óptica) en el mercado. Como resultado, obtienen que la co-inversión puede no resultar efectiva si el objetivo es aumentar la cobertura del mercado pero que en cambio, lo que si que provocará la co-inversión es que las áreas que tengan cobertura sean más competitivas.

En la misma línea, y para acabar esta sección hace falta hablar de: Schneir & Xiong (2013) en

dónde se hace un análisis coste-beneficio encontrando que la co-inversión implica importantes ahorros de coste y que además la inversión de los operadores alternativos es superior por casa conectada que la del operador nacional siempre que sea el caso que este último sea el que domina el mercado.

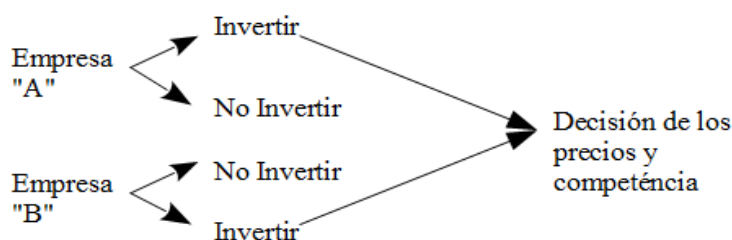
2.7 Comentarios finales.

Como se ha visto en los anteriores apartados, la economía industrial se ha encargado de estudiar abastamente las situaciones que pueden darse en los mercados. El carácter especial de los mercados de telecomunicaciones (monopolios naturales e historia) hacen que este sector y todas las variables que interceden en él también hayan sido bastamente estudiadas sobretodo con el objetivo de encontrar la mejor regulación posible con tal de aumentar el bienestar de las sociedades. En este punto cabe nombrar primero un artículo que puede servir como un primer resumen sobre que se ha dicho sobre el mercado de telecomunicaciones y un libro, que es a referencia en lo que a regulación de telecomunicaciones se refiere. El artículo es el de Peitz & Valletti & Wright (2004) y el libro el de Jean Tirole (1999)

3. EL MODELO

3.1 Introducción:

En esta sección del trabajo de final de grado, se va a definir y resolver el modelo teórico que nos permitirá llegar a algunas conclusiones acerca de la relación existente entre las decisiones de inversión en cobertura de las empresas en un entorno de competencia con productos diferenciados. Con tal de conseguir los objetivos previamente descritos, se utilizará un modelo circular, también llamado modelo de Salop (Salop, 1979) En esta representación del modelo de Salop, contaremos con dos empresas ($n=2$) que competirán en un mercado formado por dos partes diferenciadas. En la primera parte del mercado, que coincidirá con una de las mitades del modelo circular, las empresas tienen cobertura y competirán *a la Bertrand* sin que tengan necesidad de inversiones adicionales. En la segunda parte del mercado, las empresas si quieren acceder a cada uno de los clientes que se encuentran en esta parte, tendrán que llevar a cabo una inversión. Una vez hayan accedido a estos clientes, competirán por ellos de la misma manera que lo hacen en la primera parte del mercado. Las empresas toman sus decisiones en dos etapas. En la primera etapa las empresas decidirán que cantidad invertir y en la segunda, decidirán el precio. Por lo tanto, siguiendo los preceptos de la teoría de juegos, para encontrar la inversión óptima de las empresas, utilizaremos la inducción hacia atrás².



Esquema 1: Descripción esquemática del juego a resolver

Utilizar la inducción hacia atrás nos llevará irremediamente a que la explicación del modelo también sea dividida en dos apartados, en el primero explicaremos como se forman los precios de mercado y cuales serán así como también los beneficios dado un nivel de inversión exógeno. En el segundo apartado encontraremos la inversión óptima y los beneficios que se obtienen con dicha inversión. Finalmente se harán unas conclusiones.

2 Para más información ver: Gibbons(1992)

3.2 Segunda Etapa:

Como se ha explicado anteriormente, en esta segunda etapa, el objetivo es encontrar los precios que fijarán las empresas y los beneficios que obtendrán dado un nivel de inversión externo. Para llegar a ese objetivo primero debemos dibujar el modelo circular. Este modelo, tendrá longitud igual a 1 y nos ayudará a localizar al consumidor indiferente (Denominado $X_{1,2}$) que es aquel consumidor que una vez tomadas en cuenta todos los beneficios y costes resulta indiferente entre contratar los servicios de una empresa o de otra. Como se puede observar por los sub-índices, habrá dos consumidores indiferentes, pues habrá uno para cada parte del mercado que obviamente tendrán preferencias diferentes. El dibujo además nos servirá de guía para modelizar las preferencias de los individuos, la representación gráfica sería pues la siguiente:

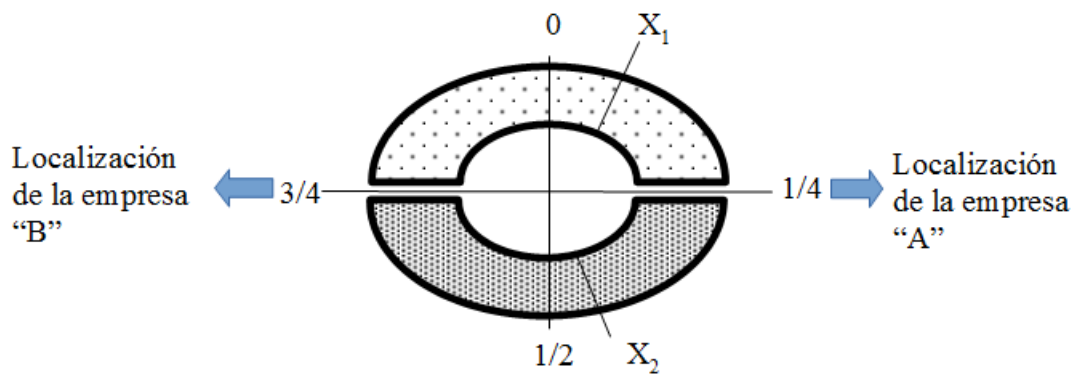


Ilustración 1: Ilustración gráfica del modelo de estudio

Al modelizar las utilidades de los individuos se tendrá que tener en cuenta que tal como se ve en la ilustración las empresas supondremos que están fijas y en las posiciones de $1/4$ y $3/4$ respectivamente. En el modelo de Salop estándar, una de las decisiones más importantes es la localización de las empresas, en nuestro modelo y debido a las cuestiones que queremos resolver, este factor no es importante, por eso supondremos que están fijas y que además están en esos puntos. Sin embargo, este supuesto es muy fuerte y podría conllevar problemas matemáticos, por eso mismo utilizaremos costes de transporte cuadráticos (t^2)³ que nos aseguran que las empresas se mantendrán en las posiciones que queremos pues tendrán incentivos a ponerse en el punto posible más alejado de la otra y esos puntos son justamente los que hemos definido en el dibujo. Dicho esto, cabe definir que son los costes de transporte y estos, se definen como una medida del grado de diferenciación

3 Para más información de por qué se deben utilizar y los problemas asociados al no utilizarlos, consultar: Tirole, Jean: The Theory of Industrial Organization pg 282-285. 1988. Mit Press

existente entre las dos empresas. Finalmente antes de pasar a la modelización tomaremos al consumidor indiferente X_1 como aquel que se encuentra en la parte del mercado dónde las empresas no requieren inversión para acceder a él mientras que por otro lado tomaremos al consumidor indiferente X_2 como aquel que se encuentra en la parte del modelo circular en la cual si las empresas quieren acceder a él, primero deberán invertir. Hechas estas consideraciones, pasemos a la modelización de las utilidades que vendrán dadas por:

$$U_{a_1} = V_0 - \left(\frac{1}{4} - x_1\right)t^2 - P_a$$

$$U_{b_1} = V_0 - \left(\frac{1}{4} + x_1\right)t^2 - P_b$$

Dónde V_0 es el valor que los consumidores dan al servicio que les proporcionan las empresas. Por otro lado la resta siguiente es la distancia que hay entre el consumidor indiferente y las empresas dónde “x” es su vez, la distancia entre el punto 0 y el consumidor indiferente. Finalmente el último termino es el precio que ponen las empresas a sus servicios. Igualando las dos utilidades, obtendremos dónde se encuentra el consumidor indiferente de esta parte del mercado:

$$x_1 = \frac{P_a - P_b}{2t^2}$$

Para la segunda parte del mercado, el proceso para obtener el consumidor indiferente será el mismo. Fíjese que en las utilidades del individuo no hay la inversión de la empresa pues esta no le da utilidad directa; simplemente le posibilita tener acceso al cliente. El consumidor indiferente tendrá que escoger entre las dos empresas una vez éstas ya hayan hecho su inversión para llegar hacia él, esta explicación justifica que no se tenga en cuenta en el cálculo del consumidor indiferente del segundo mercado. Por lo tanto las utilidades serán:

$$U_{a_2} = V_0 - \left(x_2 - \frac{1}{4}\right)t^2 - P_a$$

$$U_{b_2} = V_0 - \left(\frac{3}{4} - x_2\right)t^2 - P_b$$

Y de igual forma el consumidor indiferente en esta segunda zona del mercado estará en :

$$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{P_a - P_b}{2t^2}$$

Sabiendo dónde están los consumidores indiferentes podemos modelizar las diferentes cuotas de mercado de las empresas, a las cuotas de mercado de las empresa las llamaremos $\alpha_{a,b}$ y debido a la existencia de dos zonas en el mercado, alfa será el agregado de las cuota de la zona uno más la cuota de la zona dos, a cada una de esas sub-cuotas de mercado se les llamará $\omega_{a_1,2}, \omega_{b_1,2}$ parece

lógico empezar definiendo pues primero las sub-cuotas Omega, que, para la zona uno del mercado definiremos como:

$$\omega_{a_1} = \frac{1}{4} - x_1$$

$$\omega_{b_1} = \frac{1}{4} + x_1$$

Y para la segunda zona del mercado como:

$$\omega_{a_2} = \left(x_2 - \frac{1}{4}\right) \sigma(k_a)$$

$$\omega_{b_2} = \left(\frac{3}{4} - x_2\right) \sigma(k_b)$$

Como se puede observar, ahora si hay diferencias entre ambas cuotas de mercado. La diferencia viene pues de la aparición en las cuotas de la segunda zona del mercado de una función que multiplica a todos los elementos. Esta, será la función de inversión de las empresas Por lo tanto si no invierten nada, la cuota de mercado de las empresas en ese segundo mercado será nula. Una vez aparecida esta función de inversión debemos caracterizarla. Supondremos pues que se trata de una función cóncava, lo cual quiere decir que al principio una inversión expande mucho el mercado pero que después estos efectos se van disipando hasta ser casi nulos. Si miramos sus características matemáticas, vemos que : $k' > 0$, $k'' < 0$. Que es la representación matemática de lo anteriormente explicado.

Una vez definidas las sub-cuotas de mercado podemos pasar a definir las cuotas generales, como ya se ha explicado, estas serán : $\alpha_{a,b} = \sum \omega_{a_1, b_1, 2}$ por lo tanto:

$$\alpha_a = \frac{1}{4} - x_1 + \left(x_2 - \frac{1}{4}\right) \sigma(k_a)$$

$$\alpha_b = \frac{1}{4} + x_1 + \left(\frac{3}{4} - x_2\right) \sigma(k_b)$$

Dónde una vez sustituidos los consumidores indiferentes de las dos zonas del mercado quedaría:

$$\alpha_a = \frac{1}{4} + \frac{P_b - P_a}{2t^2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{P_b - P_a}{2t^2}\right) \sigma(k_a)$$

$$\alpha_b = \frac{1}{4} + \frac{P_a - P_b}{2t^2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{P_a - P_b}{2t^2}\right) \sigma(k_b)$$

Una vez tenemos las cuotas de mercado, podemos pasar a calcular los beneficios de la empresa que posteriormente maximizaremos para obtener los precios que pondrán las empresas. Los beneficios son definidos como ingresos menos costes. En nuestro modelo los ingresos serán la multiplicación

del precio por la cuota de mercado que tiene la empresa y los costes serán representados por una función del coste de inversión. Esta función será convexa, a diferencia de la de inversión que era cóncava, al ser convexa, esta quiere decir que al final el coste de invertir un poco mas será muy superior que en las primeras fases de la función. Matemáticamente pues: $k'' > 0$.

La idoneidad de utilizar una función convexa por el coste viene avalado por la literatura como puede verse en Armin(2003) . Caracterizados estos elementos podemos pasar a definirla matemáticamente:

$$\pi_a = P_a \left(\frac{1}{4} + \frac{P_b - P_a}{2t^2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{P_b - P_a}{2t^2} \right) \sigma(k_a) \right) - \gamma(k_a)$$

$$\pi_b = P_b \left(\frac{1}{4} + \frac{P_a - P_b}{2t^2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{P_a - P_b}{2t^2} \right) \sigma(k_b) \right) - \gamma(k_b)$$

Una vez definidos, y tal como se ha expuesto en el párrafo anterior, podemos pasar a maximizar la función respecto a los precios lo que es equivalente a hacer la derivada parcial de la función

respecto los precios. Matemáticamente pues: $\frac{\partial \pi_{a,b}}{\partial P_{a,b}}$ lo que nos da un resultado de:

$$\frac{\partial \pi_a}{\partial P_a} = \frac{1}{4} + \frac{P_b - 2P_a}{2t^2} + \frac{\sigma(k_a)}{4} + \frac{P_b \sigma(k_a) - 2P_a \sigma(k_a)}{2t^2} = 0$$

Y si hacemos lo mismo con la función de beneficios de la empresa “b” (Maximizar-la respecto su precio “P_b”) entonces:

$$\frac{\partial \pi_b}{\partial P_b} = \frac{1}{4} + \frac{P_a - 2P_b}{2t^2} + \frac{\sigma(k_b)}{4} + \frac{P_a \sigma(k_b) - 2P_b \sigma(k_b)}{2t^2} = 0$$

Una vez hecho esto, para obtener los respectivos precios solo habrá que aislarlos en las respectivas funciones, lo que nos dará que:

$$P_a = \frac{t^2}{4} + \frac{P_b}{2}$$

$$P_b = \frac{t^2}{4} + \frac{P_a}{2}$$

Como vemos, debido a que hemos supuesto que las empresas eran simétricas, los resultados son simétricos. Ahora, substituiremos los precios en los precios de las otras empresas para obtener los precios de las empresas, pues lo anterior, no eran los precios propiamente dichos sino las funciones

de reacción de las empresas respecto a los precios de la rival. Hecha esta aclaración, las substituciones tendrían que dar que:

$$P_a = \frac{t^2}{2}$$

y que por simetría (aunque algebraicamente, da lo mismo) :

$$P_b = \frac{t^2}{2}$$

Ahora que tenemos los precios que las empresas van a poner a sus servicios, que recordemos son los que les maximizan el beneficio, vamos a substituirlos en la función de beneficios para ver cual sería este y como varia cuando hay inversión. El beneficio de las empresas sería pues:

$$\pi_a = \frac{t^2(1 + \sigma(k_a))}{8} - \gamma(k_a)$$

$$\pi_b = \frac{t^2(1 + \sigma(k_b))}{8} - \gamma(k_b)$$

hecho todo esto, y tal como se describe en la introducción, podemos pasar a la primera etapa.

3.3 Primera Etapa:

Para encontrar la inversión optima habrá que maximizar la función de beneficios de las empresas respecto al capital, la función de beneficios que maximizaremos respecto al capital será la que surge una vez se ha substituido el precio por el que hemos encontrado en el apartado anterior. Así pues, las funciones de beneficios quedarían de la siguiente forma:

$$\pi_a = \frac{t^2}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{\frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{2}}{2t^2} + \frac{\sigma(k_a)}{4} + \frac{(\frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{2})\sigma(k_a)}{2t^2} \right) - \gamma(k_a)$$

$$\pi_b = \frac{t^2}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{\frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{2}}{2t^2} + \frac{\sigma(k_b)}{4} + \frac{(\frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{2})\sigma(k_b)}{2t^2} \right) - \gamma(k_b)$$

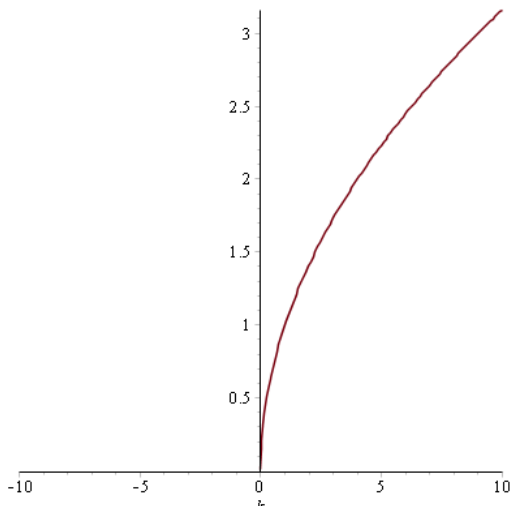
Ahora, si efectuamos la maximización respecto el capital o $\frac{\partial \pi_{a,b}}{\partial k_{a,b}}$ obtendremos que:

$$\frac{\partial \pi_a}{\partial k_a} = \frac{t^2 \sigma'(k_a)}{8} - \gamma'(k_a) = 0$$

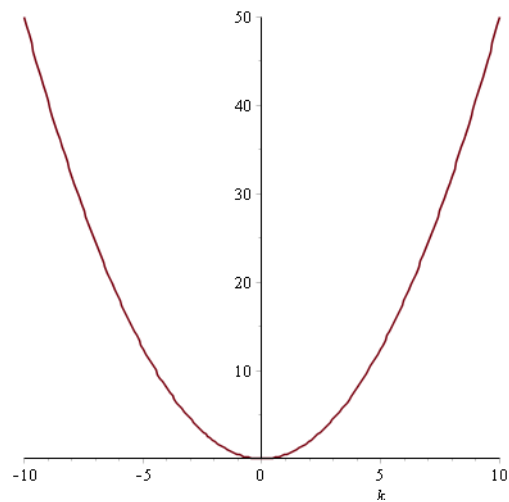
Y de igual manera para k_b .

$$\frac{\partial \pi_B}{\partial k_B} = \frac{t^2 \sigma'(k_B)}{8} - \gamma'(k_B) = 0$$

Llegados a este punto, y con tal de obtener unas conclusiones más claras en el modelo, vamos a proceder a substituir los elementos que nos representan las funciones de inversión y de coste por funciones propiamente dichas. Así pues, vamos a substituir $\sigma(k_{a,b})$ por $\sqrt{k_{a,b}}$ y $\gamma(k_{a,b})$ por $\frac{\rho k_{a,b}^2}{2}$ estas no son funciones elegidas al azar sino funciones que cumplen las características que habíamos definido sobre ellas en párrafos superiores.



Simulación 1: Simulación de la función de expansión del mercado ($\sigma_{k_{a,b}}$) dónde puede observarse que se trata de una función cóncava.



Simulación 2: Simulación dónde puede observarse la función de coste ($\gamma_{k_{a,b}}$), como puede verse, para $k > 0$ la función es convexa.

Las derivadas de las anteriores funciones son las siguientes: $\sigma'(k_{a,b}) = \frac{k_{a,b}^{-\frac{1}{2}}}{2}$; $\gamma'(k_{a,b}) = \rho k_{a,b}$.

Sustituyendo estas derivadas en las funciones de beneficio maximizadas obtendremos que:

$$\frac{\partial \pi_a}{\partial k_a} = \frac{t^2}{16 k_a^{\frac{1}{2}}} - \rho k_a = 0$$

$$\frac{\partial \pi_b}{\partial k_b} = \frac{t^2}{16 k_b^{\frac{1}{2}}} - \rho k_b = 0$$

Y hechos estos cambios, obtendremos que el capital óptimo es:

$$k_a = \left(\frac{t^2}{16\rho}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$k_b = \left(\frac{t^2}{16\rho}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Y ahora que tenemos el capital, podemos substituirlo en la función de beneficios para comparar los beneficios entre varios casos. Así pues una vez substituido y haciendo algo de álgebra, las funciones de beneficios quedan:

$$\pi_a = \frac{t^2}{8} + \frac{\left(\frac{t^2}{16\rho}\right)^{\frac{1}{3}}}{8} t^2 - \frac{\rho \left(\frac{t^2}{16\rho}\right)^{\frac{4}{3}}}{2}$$

$$\pi_b = \frac{t^2}{8} + \frac{\left(\frac{t^2}{16\rho}\right)^{\frac{1}{3}}}{8} t^2 - \frac{\rho \left(\frac{t^2}{16\rho}\right)^{\frac{4}{3}}}{2}$$

3.4 Primeras Conclusiones:

La resolución de este modelo nos permite ver cuales son las decisiones de las empresas, con lo cual en los siguientes apartados, podremos comparar estas decisiones con otras posibles decisiones y ver cual es más eficiente. En este punto lo que podemos afirmar es que las empresas invertirán, se puede demostrar que :

$$\frac{t^2}{8} + \frac{\left(\frac{t^2}{16\rho}\right)^{\frac{1}{3}}}{8} t^2 - \frac{\rho \left(\frac{t^2}{16\rho}\right)^{\frac{4}{3}}}{2} > \frac{t^2}{8}$$

Dónde $\frac{t^2}{8}$ es la función de beneficios de la primera etapa una vez substituidas las funciones de inversión y coste por 0.

Dicho esto, que pues, pasar a los siguientes apartados para conseguir que los resultados obtenidos en este, puedan ser comparados y sean más que un mero ejercicio matemático.

3.5 Co-inversión:

En este apartado vamos a ver como puede afectar un posible acuerdo de co-inversión a los niveles de capital, beneficios y precios. Para llevarlo a cabo, se dividirá el apartado en 3 sub-apartados: Segunda etapa, caso particular de la primera etapa y primera etapa. Como puede observarse, no se ha nombrado un apartado conclusiones pues a diferencia del anterior apartado que contaba con sus primeras conclusiones, las conclusiones de este apartado, están agregadas en las conclusiones generales que están disponibles en el apartado 3.6 del presente trabajo. Al principio de cada uno de los sub-apartados, se explicará en que consisten. Empecemos pues por la segunda etapa:

3.5.1 Segunda etapa:

En este caso particular de la segunda etapa, nuestro objetivo es encontrar los precios de mercado cuando las empresas co-invierten. El apartado en si, es muy similar a la segunda etapa del apartado 3.2 puesto que no hay variación sobre los supuestos de los individuos, las utilidades serán las mismas y los consumidores indiferentes serán también los mismos así pues, tenemos que para la primera zona las utilidades serán:

$$U_{a_1} = V_0 - \left(\frac{1}{4} - x_1\right)t^2 - P_a$$

$$U_{b_1} = V_0 - \left(\frac{1}{4} + x_1\right)t^2 - P_b$$

Y el consumidor indiferentes estará localizado en :

$$x_1 = \frac{P_a - P_b}{2t^2}$$

Mientras que en la segunda zona las utilidades tomarán la forma de:

$$U_{a_2} = V_0 - \left(x_2 - \frac{1}{4}\right)t^2 - P_a$$

$$U_{b_2} = V_0 - \left(\frac{3}{4} - x_2\right)t^2 - P_b$$

Y como resultado, el consumidor indiferente se situará en:

$$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{P_a - P_b}{2t^2}$$

Las cuotas de mercado de la primera región en este apartado 3.5.1 también serán las mismas a las del apartado 3.2 puesto que la inversión o co-inversión no tiene afectaciones a esta parte del mercado. Por lo tanto, las sub-cuotas del primer mercado en este apartado serán:

$$\omega_{a_1} = \frac{1}{4} + x_1$$

$$\omega_{b_1} = \frac{1}{4} - x_1$$

Sin embargo, lo que si será diferente, son las cuotas de mercado de la segunda región puesto que al haber co-inversión, esta cuota de mercado no solo dependerá de la inversión de la propia empresa sino también de la inversión que realice la empresa rival. Así pues, las cuotas de la segunda región son:

$$\omega_{a_2} = \left(x_2 - \frac{1}{4}\right) \sigma(k_a + \beta k_b)$$

$$\omega_{b_2} = \left(x_2 - \frac{1}{4}\right) \sigma(k_b + \beta k_a)$$

Dónde $\beta(0 \leq \beta < 1)$. Esto quiere decir que beta es un coeficiente entre cero y uno cuyo significado es el grado de co-inversión. En otras palabras, si beta es igual a cero no habrá co-inversión, en cambio, si es uno, la co-inversión será total y por tanto las empresas tendrán acceso a la totalidad del mercado en cobertura de la empresa rival en la segunda región. Sabiendo esto, construimos las cuotas agregadas de mercado que serán:

$$\alpha_a = \frac{1}{4} - x_1 + \left(x_2 - \frac{1}{4}\right) \sigma(k_a + \beta k_b)$$

$$\alpha_b = \frac{1}{4} + x_1 + \left(\frac{3}{4} - x_2\right) \sigma(k_b + \beta k_a)$$

Sustituyendo los consumidores indiferentes (las "x") nos queda que las cuotas de mercado son:

$$\alpha_a = \frac{1}{4} + \frac{P_b - P_a}{2t^2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{P_b - P_a}{2t^2}\right) \sigma(k_a + \beta k_b)$$

$$\alpha_b = \frac{1}{4} + \frac{P_a - P_b}{2t^2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{P_a - P_b}{2t^2}\right) \sigma(k_b + \beta k_a)$$

Y por lo tanto las funciones de beneficios quedan de la siguiente manera:

$$\pi_a = P_a \left(\frac{1}{4} + \frac{P_b - P_a}{2t^2} \right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{P_b - P_a}{2t^2} \right) \sigma(k_a + \beta k_b) - \gamma(k_a)$$

$$\pi_b = P_b \left(\frac{1}{4} + \frac{P_a - P_b}{2t^2} \right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{P_a - P_b}{2t^2} \right) \sigma(k_b + \beta k_a) - \gamma(k_b)$$

Nótese que como ya se ha explicado la co-inversión solo afecta a las cuotas de mercado y no al coste. Ahora, si queremos encontrar el precio cuando existe co-inversión maximizamos las anteriores funciones de beneficios respecto a los respectivos precios tal como hemos hecho en el apartado 3.2. y pasaremos a obtener que los precios cuándo hay co-inversión son:

$$P_a = \frac{t^2}{4} + \frac{P_b}{2}$$

$$P_b = \frac{t^2}{4} + \frac{P_a}{2}$$

Y por tanto:

$$P_a = \frac{t^2}{2}$$

$$P_b = \frac{t^2}{2}$$

Como puede observarse, los precios son los mismo que en el apartado 3.2, sobre este hecho se dará una explicación en el apartado 3.6 “Conclusiones”. Una vez obtenidos los precios, podemos pasar al siguiente apartado, dónde encontraremos la cantidad de inversión óptima teniendo en cuenta las funciones que hemos propuesto. Esto conlleva inexactitudes comparado con el mundo real pero es muy ilustrativo para demostrar que las empresas tienen incentivos a co-invertir. Es por ello, que el siguiente apartado es nombrado como un caso particular. Mas adelante en el apartado 3.5.3 ya refinaremos el modelo. Explicado esto, podemos pasar a demostrar que las empresas tienen los mencionados incentivos a la co-inversión.

3.5.2 Caso particular de la primera etapa:

Para obtener la inversión óptima y compararla con el caso de inversión unilateral para demostrar los mencionados incentivos a la co-inversión, seguiremos los mismos pasos que en apartado 3.3. Así pues, substituiremos en las funciones de beneficios que hemos formulado en el apartado 3.5.2 el

precio que también se ha encontrado en el anterior apartado obteniendo que las funciones de beneficios son:

$$\pi_a = \frac{t^2}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{\frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{2}}{2t^2} + \frac{\sigma(k_a + \beta k_b)}{4} + \frac{(\frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{2})\sigma(k_a + \beta k_b)}{2t^2} \right) - \gamma(k_a)$$

$$\pi_b = \frac{t^2}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{\frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{2}}{2t^2} + \frac{\sigma(k_b + \beta k_a)}{4} + \frac{(\frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{2})\sigma(k_b + \beta k_a)}{2t^2} \right) - \gamma(k_b)$$

Realizando la maximización sobre el capital $\frac{\partial \pi_{a,b}}{\partial k_{a,b}}$ obtendremos que:

$$\frac{\partial \pi_a}{\partial k_a} = \frac{t^2 \sigma'(k_a)}{8} - \gamma'(k_a) = 0 \quad \text{y:}$$

$$\frac{\partial \pi_B}{\partial k_B} = \frac{t^2 \sigma'(k_B)}{8} - \gamma'(k_B) = 0$$

Por lo cual, si sustituimos las derivadas del capital y del coste por las mismas funciones que se han

explicado en el apartado 3.3 ($\sigma'(k_{a,b}) = \frac{k_{a,b}^{-\frac{1}{2}}}{2}$; $\gamma'(k_{a,b}) = \rho k_{a,b}$) obtendremos que el capital

óptimo cuándo hay co-inversión es:

$$k_a = \left(\frac{t^2}{16\rho} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$k_b = \left(\frac{t^2}{16\rho} \right)^{\frac{2}{3}}$$

Que el capital óptimo sea el mismo cuando hay co-inversión que cuando no la hay no quiere decir que los beneficios sean los mismos, pues estos dependen, en este apartado, del agregado de la inversión. Por lo tanto, los beneficios en co-inversión son:

$$\pi_a = \frac{t^2}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{\left(\frac{t^2}{16\rho} \right)^{\frac{1}{3}} (1+\beta)}{4} \right) - \frac{\rho \left(\frac{t^2}{16\rho} \right)^{\frac{4}{3}}}{2}$$

$$\pi_b = \frac{t^2}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{\left(\frac{t^2}{16\rho} \right)^{\frac{1}{3}} (1+\beta)}{4} \right) - \frac{\rho \left(\frac{t^2}{16\rho} \right)^{\frac{4}{3}}}{2}$$

Obtenidas las funciones de beneficios de esta caso en particular podemos demostrar mediante una

simple comparación que:

$$\frac{t^2}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{\left(\frac{t^2}{16\rho}\right)^{\frac{1}{3}}(1+\beta)}{4} \right) - \frac{\rho \left(\frac{t^2}{16\rho}\right)^{\frac{4}{3}}}{2} > \frac{t^2}{8} + \frac{\left(\frac{t^2}{16\rho}\right)^{\frac{1}{3}}}{8} t^2 - \frac{\rho \left(\frac{t^2}{16\rho}\right)^{\frac{4}{3}}}{2}$$

O expresado en palabras, que el beneficio de las empresas cuando co-invierten es superior que cuando no lo hacen. Puede observarse pues, que la parte izquierda de la expresión son los beneficios con co-inversión mientras que a la derecha están los beneficios sin co-inversión o con inversión unilateral. La diferencia entre ambas, como puede verse, es la expresión $(1+\beta)$ Dónde, como ya se ha explicado en anteriores apartados, beta es un factor de la intensidad de la co-inversión. Por lo tanto, si este es cero puede demostrarse que los beneficios son iguales a los beneficios con inversión unilateral, lo cuál por otra parte era esperable. Lo importante por eso, es que si este factor es mayor que cero ($\beta > 0$), y por tanto existe co-inversión, aunque esta sea muy pequeña o por ejemplo este delimitada a zonas de la segunda región muy concretas (pensemos a nivel más general que por ejemplo que las compañías solo firmen acuerdos de co-inversión en ciertas ciudades) los beneficios de las empresas son mayores. Por tanto, demostramos aquello que nos habíamos propuesto al inicio del apartado: Las empresas tienen incentivos a co-invertir.

A continuación, como ya se ha explicado al final del anterior apartado (3.5.1) se perfeccionará el modelo con tal de intentar obtener resultados más acordes con el mundo real.

3.5.3 Primera etapa:

En el anterior punto, hemos demostrado como las empresas tienen incentivos a co-invertir y de hecho a co-invertir en un alto grado. Sin embargo, cuando la co-inversión tiene lugar las empresas no suelen mirar solo individualmente sino que miran el agregado. En otras palabras normalmente maximizan los beneficios conjuntos y esto es lo que vamos a hacer en este apartado, hacer que las empresas maximizen respecto al capital pero en vez de su únicos beneficios, los beneficios agregados. Para hacer eso, deberemos construir unas nuevas funciones de beneficios que tengan en cuenta este hecho que sin embargo, no afectarán al precio que será el mismo que el encontrado en el apartado 3.51. pues como ha podido verse en aquel, el precio por razones que serán explicadas en el apartado 3.6 no se ve afectado por la inversión en capital. Debido a eso, la nuevas funciones de beneficios individuales serán:

$$\pi_a = \frac{t^2}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{\frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{2}}{2t^2} + \frac{\sigma(k_a + \beta k_b)}{4} + \frac{(\frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{2})\sigma(k_a + \beta k_b)}{2t^2} \right) - \gamma(k_a)$$

$$\pi_b = \frac{t^2}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{\frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{2}}{2t^2} + \frac{\sigma(k_b + \beta k_a)}{4} + \frac{(\frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{2})\sigma(k_b + \beta k_a)}{2t^2} \right) - \gamma(k_b)$$

Puede observarse como por una parte el precio ya ha sido substituido. Entonces las funciones quedarían:

$$\pi_a = \frac{t^2}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{\sigma(k_a + \beta k_b)}{4} \right) - \gamma(k_a)$$

$$\pi_b = \frac{t^2}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{\sigma(k_b + \beta k_a)}{4} \right) - \gamma(k_b)$$

Ahora, las agregaremos para después maximizarlas tal como hemos dicho en la introducción de este apartado. La nueva función la denominaremos Π_i y por tanto: $\Pi_i = \sum \pi_a \pi_b$. Esto quiere decir que:

$$\Pi_i = \frac{t^2}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{\sigma(k_a + \beta k_b)}{4} \right) + \frac{t^2}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{\sigma(k_b + \beta k_a)}{4} \right) - \gamma(k_b) - \gamma(k_a)$$

Formulada esta función, podemos proceder a maximizarla primero respecto el capital de la empresa

“a” y después de la empresa “b”; $\frac{\partial \Pi_i}{\partial k_{a,b}}$ por tanto:

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial k_a} = \frac{t^2 \sigma'(k_a)}{8} + \frac{t^2 \sigma'(\beta k_a)}{8} - \gamma'(k_a) = 0$$

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial k_b} = \frac{t^2 \sigma'(k_b)}{8} + \frac{t^2 \sigma'(\beta k_b)}{8} - \gamma'(k_b) = 0$$

Si substituímos las derivadas del capital y del coste por las mismas funciones que se han explicado

en el apartado 3.3 y 3.5.2 ($\sigma'(k_{a,b}) = \frac{k_{a,b}^{-\frac{1}{2}}}{2}$; $\gamma'(k_{a,b}) = \rho k_{a,b}$) y además utilizamos las

herramientas algebraicas para aislar el capital de ambas funciones obtendremos que:

$$k_a = \left(\frac{t^2(1+\beta)}{16\rho} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$k_b = \left(\frac{t^2(1+\beta)}{16\rho} \right)^{\frac{2}{3}}$$

Y sustituyendo los anteriores valores en las funciones de beneficios individuales obtendremos que:

$$\pi_a = \frac{t^2}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{\left(\frac{t^2(1+\beta)}{16\rho} \right)^{\frac{1}{3}} (1+\beta)}{4} \right) - \frac{\rho \left(\frac{t^2}{16\rho} \right)^{\frac{4}{3}}}{2}$$

$$\pi_b = \frac{t^2}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{\left(\frac{t^2(1+\beta)}{16\rho} \right)^{\frac{1}{3}} (1+\beta)}{4} \right) - \frac{\rho \left(\frac{t^2}{16\rho} \right)^{\frac{4}{3}}}{2}$$

Lo primero que puede observarse en este apartado es que el capital individual es superior si hay co-inversión en contra de lo que podría pensarse en un primer momento. Este hecho se debe a que en el fondo, el capital es capital disponible, o en otras palabras, capital que la empresa puede utilizar para conseguir cobertura. Al haber co-inversión este capital disponible se multiplica por el factor de la intensidad de la co-inversión pues el acuerdo de co-inversión hace que las empresas tengan disponible como capital propio, que pueden utilizar para tener cobertura en otras áreas del mercado, el capital que ha invertido la otra empresa.

Debido a esta explicación, la intuición de que hay más capital con co-inversión puede no ser cierta, para comprobarlo podemos comparar primero analíticamente las dos situaciones para después en posteriores apartados hacer las simulaciones. Para la comparación analítica utilizaremos los niveles de capital en inversión unilateral del apartado 3.3 y los niveles en co-inversión del apartado 3.5.3. Antes de empezar la comparación por eso, hace falta contruir la expresión que determine el capital total en la economía. En el caso de inversión unilateral esta expresión estará dada por el sumatorio

de los capitales de las empresas, por tanto: $K_1 = \sum k_{a,b} = \left(\frac{t^2}{16\rho} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{t^2}{16\rho} \right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{t^2}{8\rho} \right)^{\frac{2}{3}}$;

$$K_1 = \left(\frac{t^2}{8\rho} \right)^{\frac{2}{3}}$$

Dónde K_1 es el nivel de capital agregado o total con inversión unilateral. En co-inversión sin embargo, la expresión de inversión agregada será diferente pues esta, se le tendrá que dividir el sumatorio $(1+\beta)$. Esto es debido a que si no se hace, la co-inversión se contabilizaría por partida doble pues como hemos explicado en el anterior apartado, en co-inversión el capital de las empresas no es completamente propio pues si existe tal acuerdo, parte del capital que utilicen para dar cobertura será propiedad de la empresa rival y viceversa. Por eso, si simplemente se agregasen las funciones habría capital que se contaría por duplicado. El sumatorio $(1+\beta)$ palia y corrige este

error. Explicado esto, el capital agregado del segundo periodo es:

$$K_2 = \sum k_{a_2, b_2} = \frac{\left(\frac{t^2(1+\beta)}{16\rho}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{t^2(1+\beta)}{16\rho}\right)^{\frac{2}{3}}}{(1+\beta)} = \frac{\left(\frac{t^2(1+\beta)}{8\rho}\right)^{\frac{2}{3}}}{(1+\beta)} \text{ por tanto;}$$

$$K_2: \frac{\left(\frac{t^2(1+\beta)}{8\rho}\right)^{\frac{2}{3}}}{(1+\beta)}$$

Se puede observar que si hay co-inversión total y por tanto $\beta=1$ entonces: $K_2 < K_1$
Matemáticamente una vez substituido beta por 1 queda:

$$K_2 = \frac{\left(\frac{2t^2}{8\rho}\right)^{\frac{2}{3}}}{2} < \left(\frac{t^2}{8\rho}\right)^{\frac{2}{3}} = K_1$$

Con lo que el denominador “2” al ser superior que $\frac{2}{3}$ que es la cantidad resultante de $\beta=1$ por “t” cuando esta variable es igual a 1 (con tal de simplificar los cálculos) hace que $K_2 < K_1$. El supuesto de que “t”, en otras palabras, los costes de transportes sean igual a 1 cuando hay co-inversión y cuando esta no se produce con tal de que los resultados sean comparables, es un supuesto realista, pues a diferencia de estudios como el de Jeanjean & Hounghonon (2017) dónde como ya se ha explicado en el punto 2 los autores se centran en el rol de la inversión como forma de diferenciación de las empresas, en nuestro modelo la inversión no esta destinada a ese fin sino a expandir el mercado siendo todo lo demás “ceteris paribus” o en otras palabras constante, es decir que la calidad del capital es el mismo para las dos empresas. Debido a eso, la inversión y si esta es compartida o individual no debería tener efectos en la variable de diferenciación principal de las empresas que tal como se ha explicado en la introducción de este apartado son los costes de transporte. Sin embargo en el apartado 4 de simulaciones podemos jugar con las variables.

3.6 Conclusiones Generales Del Modelo:

La primera conclusión del modelo ya se ha explicado en apartado 3.4 “Primeras conclusiones”; Las empresas invertirán puesto que les es más beneficioso invertir que no hacerlo aún teniendo en cuenta el coste. Una vez visto todo el modelo, lo que también queda demostrado es que la co-inversión genera más beneficios a las empresas y por tanto eso quiere decir que las empresas estarán incentivadas a llegar a estos acuerdos lo que además aumentará el bienestar general de la economía

pues el excedente del productor aumenta sin que el consumidor se vea afectado negativamente (aumentar los beneficios de las empresas sin aumentos del precio y bajadas de cobertura).

Como se acaba de nombrar, la co-inversión, como algunos podrían esperar, no representa precios más bajos. Esto, es debido al hecho de que las empresas deben fijar un precio para todo el mercado no solo un precio para la región del mercado que esta sujeta a las variaciones de la inversión. Por eso, el precio no captura el esfuerzo de inversión de las empresas pero como se ha podido demostrar mediante la diferencia de los resultados de los apartados 3.5.2 y 3.3, la inversión si que tiene efectos en los beneficios de la empresas tal como se ha discutido en el párrafo anterior.

Un gobierno preocupado por la distribución de la renta o que simplemente su masa de votantes sean consumidores y no productores podría obligar a las empresas a que bajasen los precios al llegar a acuerdos de co-inversión. Sin embargo, es probable que esto provoque que las empresas no llegasen a estos acuerdos y por tanto el bienestar se reduciría.

Finalmente, en apartados posteriores se procederá a hacer simulaciones con los resultados obtenidos e indicar mejor posibles líneas de política económica

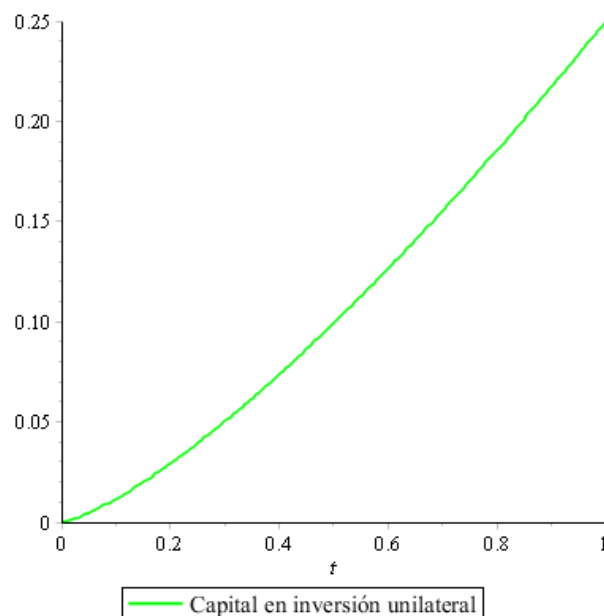
4.SIMULACIONES

4.1 Introducción:

En este apartado del trabajo se harán las simulaciones a partir de los datos obtenidos del modelo que nos permitirán profundizar en los resultados y obtener conclusiones más densas. El primer punto de este apartado estará dedicado a las simulaciones sobre las cantidades de capital, mientras que el segundo estará dedicado a las simulaciones sobre los niveles de beneficios. Después de cada simulación se hará una explicación de la misma, motivo por el cual no habrá sub-apartado de conclusiones en este apartado.

4.2 Simulaciones Sobre Los Niveles De Capital:

Primero empezaremos con las simulaciones sobre los niveles de capital en inversión unilateral, después analizaremos los niveles en co-inversión y finalmente los compararemos. Primero pues, los niveles en unilateral:

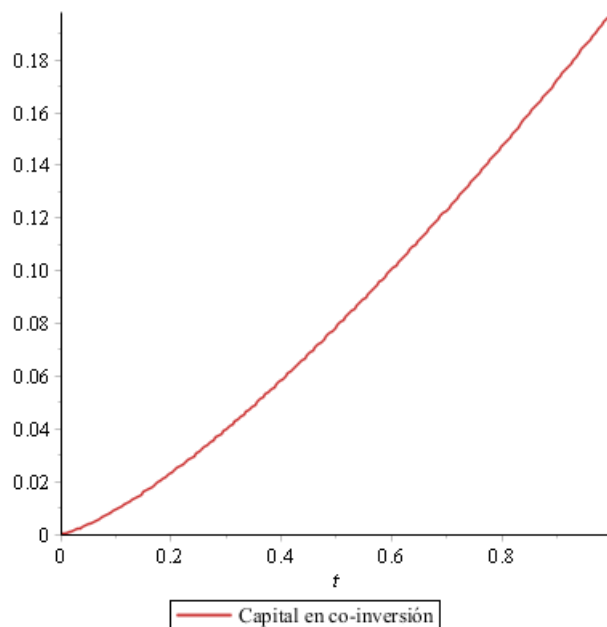


Simulación 3: Nivel de capital en inversión unilateral.

La posterior simulación corresponde pues a: $K_1 = \left(\frac{t^2}{8\rho}\right)^{\frac{2}{3}}$ dónde se puede observar como el nivel de k queda en el eje de ordenadas se encuentran los niveles de capital mientras que en el de

coordenadas se encuentran los costes de transporte. Se concluye pues, que a mayor coste de transporte, o mayor diferenciación de las empresas, mayores son los niveles de capital en inversión unilateral. Cabe apuntar que para realizar tal simulación se a tomado como constantes igual a uno la variable rho que aparece en el denominador de la expresión del capital.

Ahora toca fijarnos en los niveles de capital, cuando las empresas co-invierten. Como en el anterior caso, en la primera simulación de co-inversión, en el eje de coordenadas estarán los costes de transporte mientras en las ordenadas estarán los diferentes niveles de capital. También se tendrá en cuenta la variable rho igual a uno con tal que sean comparables. Finalmente la simulación será hecha con también la variable beta, recordemos, el grado de co-inversión igual a uno, con lo cual, esto querrá decir que la co-inversión es total. Posteriormente se realizarán análisis con las variables cambiadas. Dicho esto, el nivel de capital en co-inversión es:

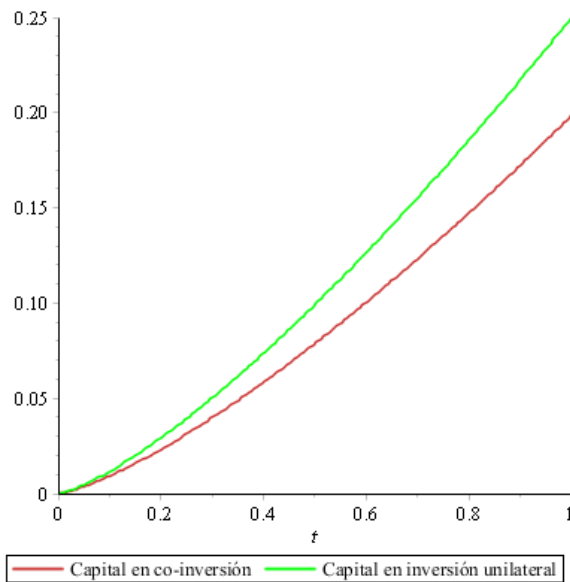


Simulación 4: Niveles de capital con co-inversión.

Puede observarse que al igual que en el caso anterior, cuando el capital es fruto de la co-inversión y

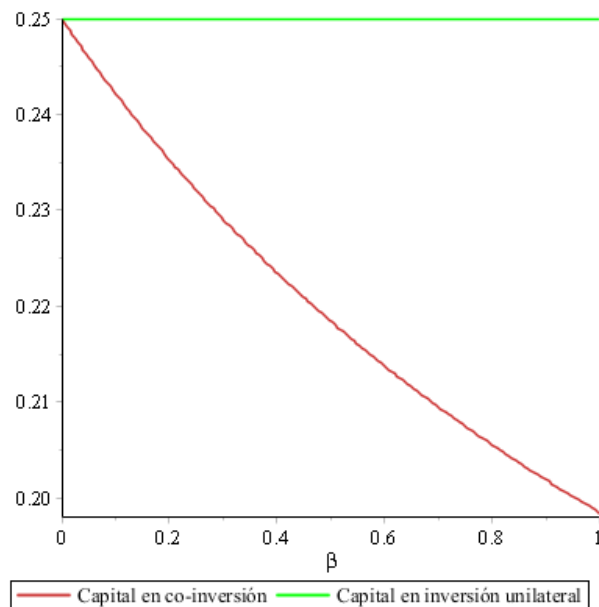
por tanto es igual a: $K_2: \frac{\left(\frac{t^2(1+\beta)}{8\rho}\right)^{\frac{2}{3}}}{(1+\beta)}$ la relación entre costes de transporte y capital es positiva: A

mayor diferenciación mayor capital. Sin embargo si nos fijamos y comparamos con el caso anterior, veremos que los niveles de capital son menores. Tal fenómeno se describe en la siguiente simulación:



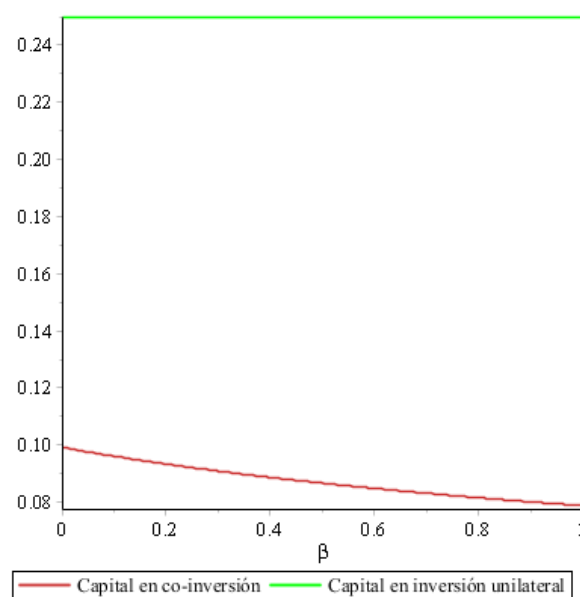
Simulación 5: Comparativa entre los niveles de capital dónde el naranja corresponde al capital en co-inversión y el verde al capital en inversión unilateral.

La simulación demuestra pues la intuición que el análisis matemático del punto 3.5.3 nos había dado y es que los niveles de capital. Sin embargo, que pasaría si la variable que variase fuese el acuerdo de co-inversión? Pues tendríamos que:



Simulación 6: Comparativa entre los niveles de capital en inversión unilateral e co-inversión cuando la variable del eje de coordenadas es beta.

Por tanto, también con rho igual a 1 u una t normalizada a 1 y por tanto una diferenciación máxima (que es lo que intentan siempre las empresas, diferenciarse lo máximo posible de sus rivales, exceptuando los productos falsificados) se observa que a mayor co-inversión, menores niveles de capital. Si además hacemos el mismo análisis pero con costes de transportes diferenciados entre las dos modalidades de inversión dónde en el caso de inversión unilateral estos sean más altos que en co-inversión, debido a que el consumidor puede percibir que cuando existe co-inversión la diferenciación entre las compañías es menor, veremos que los niveles de capital con co-inversión son significativamente más bajo, con lo cual podemos deducir lo mismo que Jeanjean & Hounghonon (2017) y que también habíamos apuntado en el punto 3.5.3 y es que es probable que los menores niveles de capital sean debidos a que previamente había habido un exceso en la inversión de capital. En el caso de la simulación que demuestra esto, y que se podrá observar en la siguiente página, se ha considerado que los costes de transporte son iguales 1 si la inversión se hace de manera unilateral y iguales a 0.5 si esta, se hace de forma conjunta. Se observa pues lo siguiente:

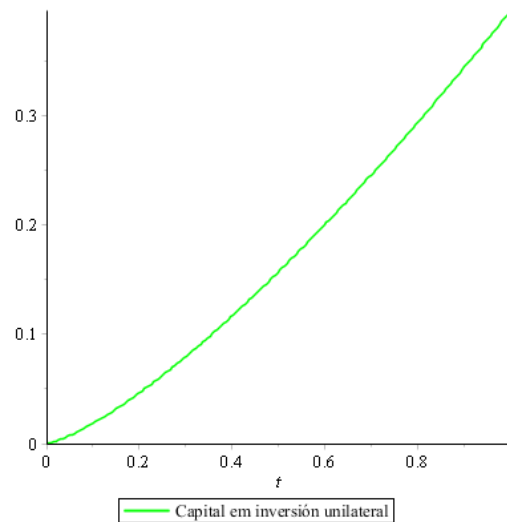


Simulación 7: Comparativa entre los niveles de capital en inversión unilateral y co-inversión cuando la variable del eje de coordenadas es beta. y con costes de transporte diferenciados.

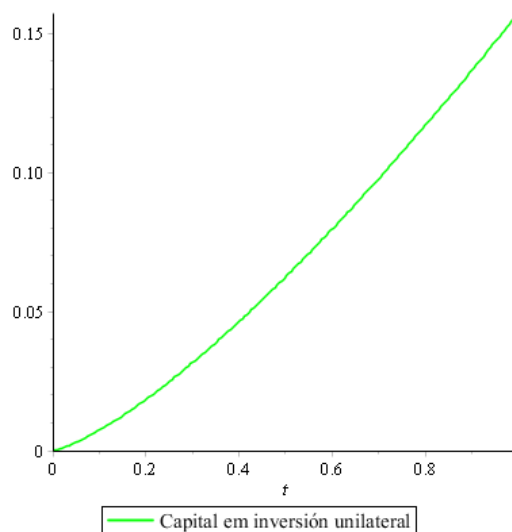
Finalmente, para acabar el apartado de las simulaciones sobre el capital, vamos a explorar el rol de la variable rho, que en las anteriores simulaciones siempre ha sido tomada como constante normalizada. Pues bien rho, es una variable que nos permite para capturar efectos exógenos que

pueden afectar a los niveles de capital.

Tales efectos podrían ser por ejemplo la dificultad de la instalación de este capital. Así pues si tomamos como referencia de capital en inversión unilateral veremos que:



Simulación 8: Como varían los niveles de capital en referencia a t cuando ρ es 0.5.



Simulación 9: Como varían los niveles de capital respecto a t cuando ρ es 2.

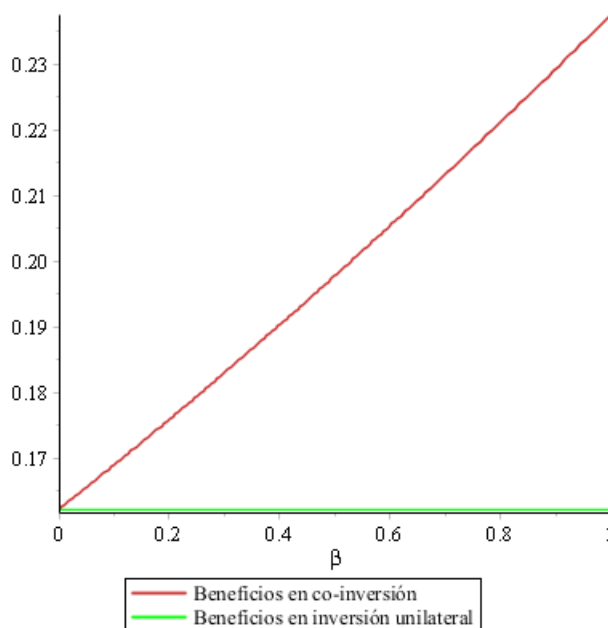
Y por tanto, se deduce que cuando ρ tiende a 0, los niveles de capital son superiores, mientras que cuando tiende a infinito, los niveles de capital son inferiores. Si lo aplicamos al ejemplo expuesto se podría interpretar como que a menor dificultad de instalación o utilización más capital habrá mientras que si esta dificultad es superior, la cantidad de capital será inferior. Estos resultados son

también aplicable al caso de co-inversión pues como puede observarse en la página número 30, en el capital agregado en co-inversión, la variable rho, también se sitúa en el denominador, al igual que el caso de inversión unilateral.

Una vez hechas las simulaciones sobre el capital, toca pasar a las simulaciones sobre los beneficios.

4.3 Simulaciones Sobre El Nivel De Beneficios:

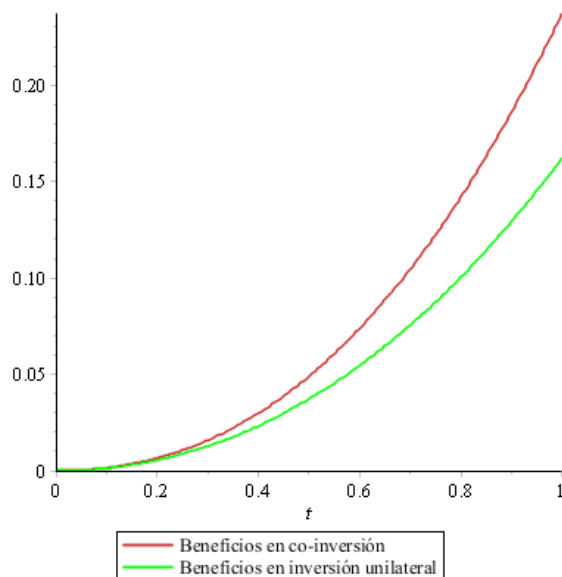
Como ya se ha explicado en la introducción, en este apartado se detallarán las simulaciones sobre los beneficios de las empresas para poder extraer más conclusiones. El método utilizado será similar al del apartado anterior, pero aquí, pasaremos directamente a hacer las comparativas. Así pues la primera:



Simulación 10: Comparativa de los niveles de beneficios respecto el grado de co-inversión. En verde los beneficios en inversión unilateral y en naranja los beneficios en co-inversión

Dónde se muestra como los beneficios en co-inversión son siempre mayores que los beneficios en inversión unilateral. En este último caso, también se han tomado las variables rho y "t" como dadas y se han normalizado a uno.

Sin embargo, la anterior simulación no nos induce nada sobre que rol asumen los costes de cambio, pues como se ha comentado, la variable “ t ” se ha normalizado a uno. Por eso, si queremos ver mejor como interactuá esta variable en especial con los beneficios de las empresas y si debido a eso la decisión de las empresas de si co-invierten o por si lo contrario, no lo hacen puede cambiar, elaboraremos la siguiente simulación:



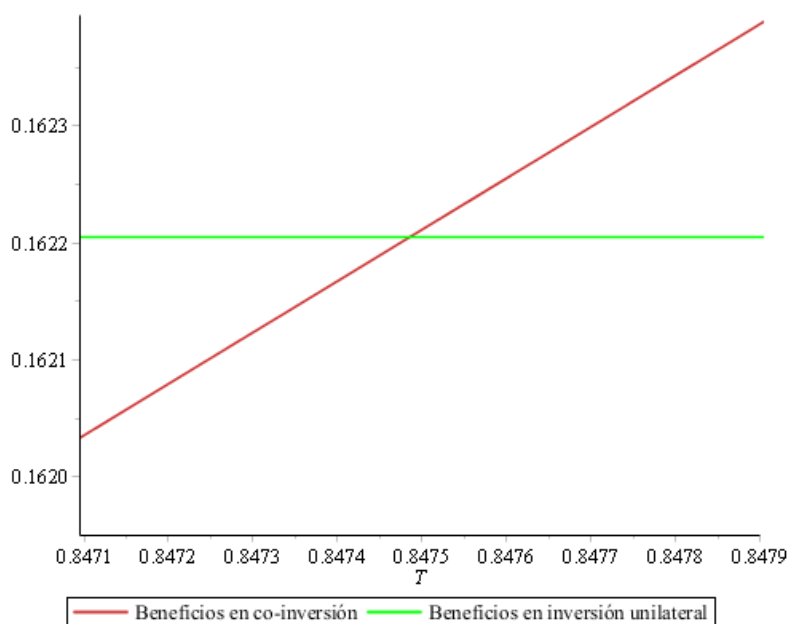
Simulación 11: Comparativa de los niveles de beneficios (en el eje de ordenadas) respecto a la diferenciación de las empresas.

En ella, se puede observar como, dada esta vez la beta como constante y normalizada también a uno (y por tanto con la co-inversión al máximo, que es el grado al cual las empresas tienen incentivos a llegar debido a los mayores beneficios que lleva asociados) y continuando con la variable rho también normalizada a uno, a mayores costes de transporte, a mayor diferenciación, los beneficios son mayores (en consonancia los los valores de capital del anterior apartado) y además mayores ganancias de la co-inversión.

Por tanto, cuando la co-inversión es máxima y las empresas consiguen diferenciarse lo máximo posible entre ellas, los beneficios que obtienen son máximos. Sin embargo, en el apartado de las simulaciones del capital hemos argumentado que la co-inversión podría hacer percibir a los consumidores que las empresas son menos distintas que si invierten por separado. Entonces, alguien podría preguntarse que nivel de diferenciación es el mínimo necesario para que si las empresas co-invierten tengan mas beneficios que cuando no co-invierten. Para poder estudiar este fenómeno se tomarán como dadas las variables rho y beta y como en casos anteriores serán normalizadas a 1.

Además también se hará una distinción entre costes de transporte, estos serán tomados como dados y normalizados a uno en el caso de que hubiese una inversión unilateral. Se ha decidido así debido a que lo más probable es que si las empresas controlan su propia inversión consigan diferenciarse al máximo de la empresa rival.

Por el contrario, los costes de transporte en co-inversión serán aquellos que serán simulados en comparación con los beneficios. Estos costes de transporte, estarán representados por la letra T. Explicado el proceso, podemos pasar a ver los resultados de la simulación:

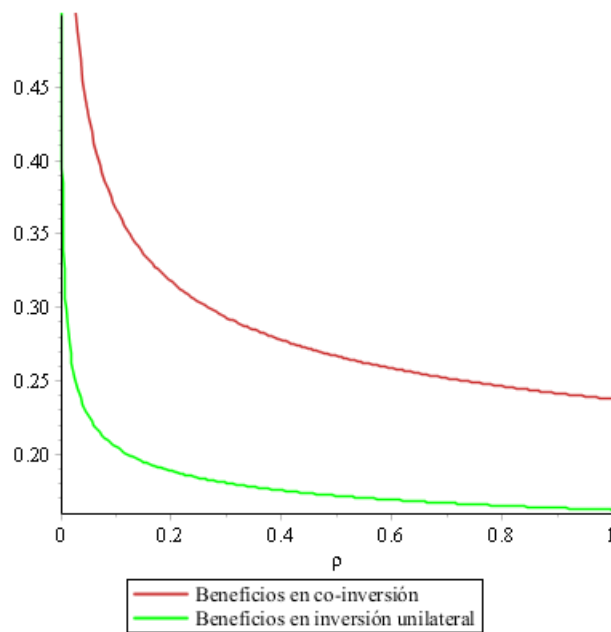


Simulación 12: Compartaiva de los niveles de beneficios con costes de transporte diferenciados.

Puede observarse pues, que para que la co-inversión sea beneficiosa para las empresas y por tanto óptima, los costes de transporte no pueden diferenciarse mas de un 15 por ciento entre los dos periodos. En otras palabras, si la diferenciación en el primera parte del mercado es máxima y al acceder a las zonas sin cobertura, las empresas deciden co-invertir, deben procurar que la diferenciación entre ambas no caiga en más de un 15%, si esto fuera así y los consumidores las percibiesen demasiado iguales, la co-inversión no sería óptima.

Finalmente, podemos acabar este apartado, con explorar como afectan los niveles rho a los beneficios, esta vez por eso, a diferencia del apartado anterior, creemos que seria más oportuno ver como simplemente inter-relacionan los diferentes niveles de rho con los niveles de beneficios. Para ello, se tomarán como constantes normalizadas beta y "t" y se simulará como varían los beneficios

tanto en inversión como co-inversión respecto a rho. La simulación resultante es:



Simulación 13: Variación de los niveles de beneficios respecto a rho.

Como puede observarse pues, la relación que se establece entre rho y los beneficios es decreciente, a mayores niveles de rho, menores beneficios. Este hecho es consistente con los resultados obtenidos en las simulaciones de rho con el capital donde se observaba que los bajos niveles de rho implicaban niveles de capital más altos. También es consistente con el ejemplo puesto, si una variable exógena como la dificultad en el montaje del capital aumenta es lógico pensar que los niveles de capital de esa empresa disminuirán debido probablemente a que por ejemplo el capital tardara más en entrar en funcionamiento.

Hechas las simulaciones, podemos pasar al último apartado del trabajo de fin de grado: Las conclusiones.

5.CONCLUSIONES.

El objetivo de este trabajo, era encontrar si la co-inversión es óptima y el resultado del mismo, es que si que lo es y esta se convierte en un equilibrio pareto superior menos en aquellos casos dónde la diferenciación entre las empresas se reduce en aproximadamente un 15% como fruto del acuerdo de inversión entre las empresas. Así pues, la co-inversión es óptima debido a que tal como se han demostrado en los puntos 3.5.3 y 4.2 permite un aumento de los beneficios de las empresas sin perjudicar a los consumidores (Pues el precio no se ve alterado y los consumidores siguen teniendo acceso a los servicios que ofrecen las compañías) con lo cuál, la co-inversión consigue que el bienestar total de la economía crezca debido al aumento del excedente del productor.

Sin embargo, se podría pensar que el aumento del bienestar no es tal debido al descenso que se produce en los niveles de capital cuando se produce la co-inversión lo que, a su vez, podría perjudicar un posible futuro crecimiento económico. Ante esta posibilidad, nuestro modelo muestra que lo más probable es que este descenso del capital se deba a que con inversión unilateral las empresas sobre-invierten y al negociar el acuerdo de co-inversión, los niveles de capital se ajustan con tal de evitar duplicidades y ahorrar costes.

Por todo lo anterior, creemos que este modelo puede contribuir, junto a otros expuestos en el inicio del trabajo, a que los representantes políticos tomen las medidas adecuadas y ayuden a que el mercado tenga los incentivos adecuados, con el objetivo de aumentar el bienestar de la economía.

Sin embargo, el gobierno no puede caer en el error de obligar a las empresas a invertir más con la idea de aumentar dicho bienestar pues tal como se demuestra en esta tesis las empresas tienen "per se" incentivos a expandirse en el mercado. Debido a esto, es probable que la obligación por parte del gobierno de que las empresas inviertan en expansiones de mercado, pueda producir efectos indeseados tal como ocurre cuando este obliga a las empresas a compartir redes (kim et al (2011)).

Finalmente, añadir que sería interesante que futuros trabajos académicos explorasen cual es la estructura óptima de mercado cuando se producen expansiones en el mercado, habiendo co-inversión. Además, en nuestro modelo, en aras de la simplificación solo se ha explorado el caso con empresas simétricas así pues podría ser que con empresas asimétricas los resultados fueran distintos.

6.BIBLIOGRAFIA

6.1 Libros:

- Tirole, Jean: The Theory of Industrial Organization. 1988. Mit Press.
- Gibbons, Robert: A primer in game theory. 1992. Financial Times Prentice Hall
- Tirole, Jean: Competition in telecommunications. 1999. Mit Press

6.2 Artículos:

- Bourreau, Marc & Cambini, Carlo & Hoernig Steffen. 2012. Ex ante regulation and co-investment in the transition to next generation acces, *Telecommunications Policy*, 36, 399-406.
- Bourreau, Marc & Dogan, Pinar & Lestage Romain. 2013. Level of acces and infrastructure investment in network industries, *Journal of Regulation Economics*, 46, 237-260.
- Boyer, Marcel & Lassere, Pierre & Moreaux, Michel. 2012. A dynamic duopoly investment game without commitment under uncertain market expansion. *International Journal of Industrial Organization*, 30, 663-681.
- Garrone, Paola & Zaccagnino, Michele. 2015. Seeking links between competition and investments. *Telecommunicatios Policy*, 39, 388-405.
- Gernakos, Christos & Valletti, Tomasso & Verboven, Frank. 2015. Evaluating market consolidation in mobile communications. *CERRE report publication*. Disponible online en: <http://www.cerre.eu/publications/evaluating-market-consolidation-mobile-communications> (Visitado en 18/5/2016)
- Gruber, Harald & Verboven, Frank. 2001. The evolution of markets under entry and standards regulation-the case of global mobile telecommunications. *Internacional Journal of Industrial organization*, 19, 1189-1212.
- Jeanjean, François. 2013. Incentives to invest in improving the quality in the telecommunications industry, *Cineses Business Review*, 12(4), 223-241.
- Jeanjean, François & Hounghonon, George Vivien. 2016. What level of competition intensity maximises investment in the wireless industry?, *Telecommunications Policy*, 40, 774-790.

- Jeanjean, François & Hounghonon, George Vivien. 2017. Market structure and investment in the mobile industry, *Information Economics and Policy*, 38, 12-22.
- Katsumasa, Nishide & Kyoko Yagi. 2016. Investment under regime uncertainty: Impact of competition and preemption, *International journal of Industrial Organization*, 45. 47-58.
- Kim et al. 2011. Acces regulation and infrastructure investment in the mobile telecommunications industry, *Telecommunications policy*, 35, 907-919.
- Klemperer, Paul. 1988. Markets with consumers switching cost, *The Quarterly Journal of Economics*, 102 (2), 375-394.
- Li, Yan & Lyons, Bruce. 2012. Market structure and investment in the mobile industry, *International Journal of Industrial Organization*, 30, 697-707.
- López, Ángel & Rey, Patrick. 2016. Foreclosing competition through high access charges and price discrimination, *The Journal of Industrial Economics*, 64(3), 436-465.
- Peitz, Martin & Valletti, Tomasso & Wright Julian. 2004. Competition in telecommunications: an introduction, *Information Economics and Policy*, 16, 315-321.
- Schmutzler, Armin. 2013. Competition and investment a unified approach, *International journal of Industrial Organization*, 31, 477-487.
- Schneir Rendon, Juan & Xiong, Yumpeng. 2013. Economic implications of a co-investment scheme for FTTH/PON architectures, *Telecommunications Policy*, 37, 849-860.
- Vives, Xavier. 2008. Innovation and competitive pressure, *Journal of Industrial Economics*, 56, 419-469.

6.3 Leyes y directivas legales:

- Ley 9/2014 General de telecomunicaciones. Disponible online en: <https://www.boe.es/buscar/pdf/2014/BOE-A-2014-4950-consolidado.pdf>
- Comunicación sobre la aplicación de las normas de competencia a los acuerdos de acceso en el sector de las telecomunicaciones. C 265/2. 22.8.98 . Disponible en: http://www.minhfp.gob.es/Documentacion/Publico/SGT/LEYES/DEFENSA_COMPETENCIA/IIID30_27838.htm (Visitado en 18/5/2016)
- Directrices de la Comisión sobre análisis del mercado y evaluación del peso significativo en el mercado dentro del marco regulador comunitario de las redes y los servicios de comunicaciones electrónicas. C 165/6. 11.7.2002. Disponible en: [http://eur-lex.europa.eu/legal-content/ES/TXT/?uri=celex:52002XC0711\(02\)](http://eur-lex.europa.eu/legal-content/ES/TXT/?uri=celex:52002XC0711(02)) (Visitado en 18/5/2016)

6.4 Reportes Oficiales:

- Informe Económico Sectorial de las Telecomunicaciones y el Audiovisual. 2016. CNMC. Disponible en: <http://data.cnmc.es/datagraph/files/Informe%20Telecos%20y%20Audiovisual%202016.pdf> (Visitado en 18/5/2016)