TEORIA K PER C^*-ÀLGEBRES

La successió exacta cíclica de sis termes

Autor
Eduard Vilalta Vila

Tutor
Dr. Francesc Perera Domènech

2018
Universitat Autònoma de Barcelona

Resum

Aquest treball té com a objectiu introduir el lector a la teoria K per C^*-àlgebres demostrant-ne dos dels seus resultats centrals: La periodicitat de Bott i la subsegüent successió exacta cíclica de sis termes.

De manera similar a la teoria K algebraica, a la teoria K per C^*-àlgebres es construeix una família de functors K_n de la categoria de C^*-àlgebres a la de grups abelians. Aquests functors, que assignen a cada C^*-àlgebra A una família de grups abelians $K_n(A)$, permeten deduir propietats estructurals de l'àlgebra. Per construir-los, cal destacar que l'enfoc que es dóna difereix lleugerament de l'original, fet que permet fer més concisa l'exposició.

A l'hora de calcular els K-grups, la periodicitat de Bott permet reduir-nos a calcular només els grups K_0 i K_1. D'altra banda, la successió exacta cíclia de sis termes és una eina molt útil per calcular K_0 i K_1 de l'àlgebra en termes dels corresponents grups d'un ideal i del seu quocient respectiu.

Agraïments

Vull expressar tot el meu reconeixement al meu tutor, el Dr. Francesc Perera, per introduir-me al món de les C^*-àlgebres i per les seves inestimables aportacions, comentaris crítics i, en general, pel seu suport i ajuda durant tota la redacció del treball.

També m'agradaria expressar el meu més profund agraïment a tots els professors del departament, per la seva professionalitat i dedicació que m'ha permés disfrutar durant els últims quatre anys d'aquesta magnífica carrera. En especial, vull agrair al Dr. Ramon Antoine les incomptables hores dedicades, juntament amb el meu tutor, a la lectura d'articles que de ben segur em resultaran útils al llarg de la meva vida acadèmica.

Finalment, dono gràcies a la meva família i amics, sense el suport dels quals no hagués estat possible escriure aquest treball.

Índex

Introducció

Degut a la seva riquesa i varietat d'aplicacions, l'estudi i classificació de les C^*-àlgebres gaudeix d'un moment dolç dins de la recerca en àlgebres d'operadors. Aquestes estructures, definides formalment l'any 1943 per Gelfand i Naimark, són una generalització de les conegudes àlgebres de von Neumann, proposades pel mateix von Neumann l'any 1929 com a models de la Mecànica Quàntica.

Usualment, les C^*-àlgebres es defineixen com àlgebres de Banach tancades per una certa norma $\|\cdot\|$ i involució $*$ relacionades per la igualtat $\|aa^*\| = \|a\|^2$, també coneguda com a C^*-igualtat. Tot i així, la celebrada construcció de Gelfand-Naimark-Segal de l'any 1943 dóna una caracterització de qualsevol C^*-àlgebra com a sub-àlgebra de $B(H)$, tancada per la norma i la involució, per algun espai de Hilbert H. També sabem, pel conegut Teorema de Gelfand, que *tota C^*-àlgebra commutativa és isomètricament isomorfa a l'àlgebra $C_0(X)$ per algun espai X Hausdorff i localment compacte.*

Com a conseqüència d'aquest darrer resultat, les C^*-àlgebres no commutatives es pensen sovint com àlgebres de funcions sobre un espai que, de fet, no existeix. Un dels grans èxits d'aquest punt de vista, anomenat *topologia no commutativa*, és la generalització de la teoria K topològica a la teoria K per C^*-àlgebres, focus principal d'aquest treball.

A grans trets, en teoria K per C^*-àlgebres es defineix, tal i com es fa en teoria K algebraica, una família de functors K_n de la categoria de C^*-àlgebres a la de grups abelians. En particular, a tota C^*-àlgebra A se li assignen una família de grups abelians, coneguts com els seus K-grups, que denotem per $K_n(A)$.

Ara bé, com a conseqüència de dos dels seus resultats centrals, la teoria K per C^*-àlgebres presenta un gran avantatge respecte la teoria K algebraica: La calculabilitat dels grups K_n.

El primer d'aquests dos resultats, conegut com la periodicitat de Bott, s'hereta de la teoria K topològica i ens assegura que, de fet, només hi ha dos K-grups mòdul isomorfia, el grup de Grothendieck $K_0(A)$ i el grup de Whitehead topològic $K_1(A)$.

El segon d'aquests resultats, l'anomenada successió exacta cíclica de sis termes, ens permet reduir-nos, a l'hora de calcular explícitament els K-grups d'una C^*-àlgebra A, a només calcular els K-grups d'un ideal de A i del seu quocient respectiu.

Utilitzant aquests dos fets i altres resultats del treball, podem usar teoria K per deduir propietats estructurals de l'àlgebra que tractem. Per exemple, sabem que els K-grups de tot parell de C^*-àlgebres homotòpiques són isomorfs, i que el grup $K_0(A)$ d'una C^*-àlgebra A separable és numerable.

Gràcies a totes aquestes qualitats, la teoria K per C^*-àlgebres ha resultat ser molt fructífera i, des de la classificació per part de George Elliott de les AF-àlgebres l'any 1976, s'ha convertit en una eina determinant per l'estudi efectiu d'aquestes.

Així doncs, l'objectiu del treball és doble: Per una banda, pretén servir de breu introducció al vast món de les C^*-àlgebres, i en concret de la teoria K, suposant únicament que el lector està familiaritzat amb els conceptes d'espai de Hilbert i operador. De l'altra, demostrar l'anomenada periodicitat de Bott i derivar-ne la successió exacta cíclica de sis termes, resultat essencial per realitzar càlculs concrets.

Per aconseguir aquests propòsits, l'escrit està estructurat en cinc capítols. En el Capítol 1 s'enuncien resultats i definicions necessàries per la comprensió dels capítols posteriors. En els Capítols 2 i 3 s'introduexien els K-functors i es demostren les propietats functorials d'aquests, com ara l'exactitud escindida i l'estabilitat. Finalment, en els Capítols 4 i 5 es defineixen l'índex i l'aplicació exponencial que, juntament amb el Teorema de Bott demostrat també al Capítol 5, permeten construir la successió exacta cíclica de sis termes.

Addicionalment, en els Capítols 3, 4 i 5 s'inclouen seccions que, tot i no estar directament relacionades amb l'obtenció de la successio exacta cíclica, informen sobre altres aspectes de la teoria K. Per exemple, a la Secció 4.2 es compara l'índex de Fredholm amb l'índex de la teoria K, i a la Secció 5.4 s'utilitzen les anomenades *dimension drop algebras* per construir C^*-àlgebres tals que els seus grups K_0 i K_1 siguin qualsevol parell de grups abelians finitament generats. Aquest resultat és, de fet, el primer pas per demostrar un teorema més general, que permet construir una C^*-àlgebra separable tal que els seus K-grups associats siguin qualsevol parell de grups abelians numerables.

Cal destacar que, encara que l'estructura que es segueix és en gran mesura la utilitzada en la majoria de llibres consultats, en el Capítol 3 s'introdueix la notació K_n'. Aquesta nova notació ens permet, juntament amb resultats propis, demostrar les propietats dels functors K_n d'un sol cop, fet que representa una millora respecte l'esquema de [9, 11], on es distingeixen els casos $n = 0$ i $n = 1$ abans de passar al cas general.

També és important ressaltar que, tret de menció explícita, les demostracions dels exemples i els resultats del treball són pròpies. En particular, la majoria dels exemples són exercicis de [9].

Com acostuma a passar en matemàtiques, l'estructura proposada del treball és només una de les moltes maneres de llegir-lo. Per exemple, es recomana a tots aquells lectors que ja estiguin familiaritzats amb el concepte de C^*-àlgebra a començar la lectura pel Capítol 2 i redirigir-se al Capítol 1 només en cas de dubte.

Si, en canvi, aquest és el primer contacte del lector amb les C^*-àlgebres, pot resultar molt il·lustratiu començar a llegir des del Capítol 1 però ometent totes les demostracions del treball. En aquest cas es recomana, més concretament, ometre les demostracions dels Teoremes 3.2.10, 4.1.6 i 5.2.1 que, tot i ser instructives, poden resultar feixuges.

Capítol 1

Preàmbul

De cara a que el treball sigui autocontingut, en aquest primer capítol es fa esment de definicions i resultats previs necessaris per la comprensió dels capítols posteriors. A més a més, es fa un resum breu sobre el càlcul funcional en les C^*-àlgebres que, tot i que no s'utilitza en aquest treball, té una importància cabdal en el seu estudi.

La majoria de les demostracions dels resultats llistats a continuació es poden trobar a [4, 7, 10].

1.1 Introducció a les C^*-àlgebres

Definició 1.1.1. Sigui A una àlgebra de Banach sobre $\mathbb{C}$ amb una norma $\|\cdot\|$ i una involució *, anti-multiplicativa i lineal conjugada. Direm que A és una C^*-àlgebra si es compleix la següent igualtat, també coneguda com a C^*-igualtat:

$$\|aa^*\| = \|a\|^2 \quad \text{per a tot } a \in A$$

Anomenarem sub-C^*-àlgebres a les sub-àlgebres de A tancades per la norma i per la involució *, i ideal de A a tot ideal bilateral tancat de A, com a àlgebra, tancat per la involució.

Exemples 1.1.2.

1. $\mathbb{C}$ és una C^*-àlgebra amb la norma usual i la conjugació com a involució.
2. Donat un espai de Hilbert H, l'àlgebra d'operadors acotats $B(H)$ és una C^*-àlgebra amb la norma i involució usuals.
3. De manera anàloga al cas anterior, es pot veure que l'ideal $\mathcal{K}(H)$ format pels operadors compactes, és a dir, els operadors que són límit d'operadors de rang finit, és una C^*-àlgebra amb la norma i involució de $B(H)$.
4. Sigui A una C^*-àlgebra. Llavors, l'àlgebra de funcions contínues $f\colon [0,1] \to A$, que denotem per $C([0,1], A)$, és una C^*-àlgebra amb la norma del suprem i la involució punt a punt.
5. Donat un espai X localment compacte i Hausdorff, l'espai de funcions contínues $f\colon X \to \mathbb{C}$ que s'anul·len a l'infinit[1], que denotem per $C_0(X)$, és una C^*-àlgebra amb la involució i norma anteriors.
   Per exemple, si $X = \mathbb{R}$, aquestes són les funcions tals que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

[1] Recordem que diem que una funció contínua $f\colon X \to \mathbb{C}$ s'anul·la a l'infinit si per tot $\epsilon > 0$ es compleix que el conjunt $\{x \in X \mid |f(x)| \geq \epsilon\}$ és compacte.

Com és d'esperar, direm que una aplicació ϕ entre dues C^*-àlgebres A i B és un *-morfisme si és un morfisme de A a B com a àlgebres i, a més a més, en conserva la involució, és a dir, $\phi(a^*) = \phi(a)^*$ per a tot $a \in A$.

Una de les conseqüències més immediates, però no del tot trivial, de la C^*-igualtat és que tots els *-morfismes són decreixents en norma i, per tant, continus. En particular, tots els *-isomorfismes són isomètrics.

Observem també que, de manera anàloga a les àlgebres de Banach, un *-morfisme entre C^*-àlgebres unitàries pot o no conservar la unitat. En cas de fer-ho, s'anomena *-morfisme unitari. Tot i així, quan el context sigui prou clar, ometrem l'adjectiu unitari.

Encara que la definició de C^*-àlgebra que s'utilitzarà durant tot aquest treball és la donada a la Definició 1.1.1, en molts casos és útil fer-ne servir una d'alternativa, que ve donada pel Teorema de Gelfand-Naimark.

Teorema 1.1.3 (Gelfand-Naimark). *Per a tota C^*-àlgebra A, existeix un espai de Hilbert H tal que A és isomètricament isomorfa a una sub-C^*-àlgebra de $B(H)$.*

Exemple 1.1.4. Donada una C^*-àlgebra A i $n \in \mathbb{N}^*$, podem considerar l'àlgebra de les matrius amb entrades de A de mida n, que denotarem per $M_n(A)$. Definint de manera adequada una involució i una norma sobre aquesta àlgebra, $M_n(A)$ cobra l'estructura de C^*-àlgebra:

- Com a involució, prenem l'aplicació transposar i involucionar component a component per la involució de A.
- D'altra banda, sabem pel darrer Teorema que existeix un espai de Hilbert H i un *-morfisme injectiu φ de A cap a $B(H)$. Definim la norma $\|a\|$ de $M_n(A)$ com la norma de $\varphi_n(a) \in B(H^n)$ on φ_n és el *-morfisme que aplica φ component a component.

Definició 1.1.5. Donat un ideal bilateral I de A, definim el quocient de A per I com

$$A/I = \{a + I \mid a \in A\}$$

Amb aquesta definició, A/I és una C^*-àlgebra amb la norma $\|a\|_{A/I} := \inf_{x \in I} \|a + x\|_A$.

1.1.1 Unitificació

Com ja s'ha observat en algun dels exemples, és habitual que una C^*-àlgebra no tingui unitat. Tot i així, existeix un procediment que ens permet estendre qualsevol C^*-àlgebra A, unitària o no, a una C^*-àlgebra $\tilde{A}$ que sempre té unitat.

Aquest procés s'anomena unitificació de A, explicitat a continuació:

Definició 1.1.6. Donada una C^*-àlgebra A, definim sobre $A \times \mathbb{C}$ la següent norma

$$\|(a, \alpha)\|_{\tilde{A}} = \max \left\{ \sup_{x \in A, \|x\|=1} \{\|ax + \alpha x\|_A\}, |\alpha| \right\}$$

Llavors, amb les operacions suma i involució component a component i el producte $(a, \lambda)(b, \mu) = (ab + \mu a + \lambda b, \lambda\mu)$, $A \times \mathbb{C}$ és una C^*-àlgebra unitària amb unitat $1_{\tilde{A}} := (0, 1)$, que anomenarem $\tilde{A}$.

Escriurem els elements de $\tilde{A}$ com $a + \lambda 1_{\tilde{A}}$.

Un dels conceptes més importants del treball és el de successió exacta, definit a l'Apèndix C. En aquest sentit, el primer resultat on apareix una successió exacta és el següent Lema.

Lema 1.1.7. *Sigui i la inclusió natural de A a $\tilde{A}$, π la projecció a $\mathbb{C}$ i $\lambda(\alpha) := \alpha 1_{\tilde{A}}$. La construcció anterior fa que la successió*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} \tilde{A} \underset{\lambda}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

sigui escindidament exacta.

Així doncs, A és un ideal de $\tilde{A}$ i tot element $b \in \tilde{A}$ es pot escriure com a suma d'un element $a \in A$ i un element $\alpha \in \mathbb{C}1_{\tilde{A}}$. En aquest darrer element se l'anomena *part escalar de* b, i es denota per $s(b) := \lambda \circ \pi(b)$.

És també important destacar que si A ja tenia una unitat 1_A, l'element $p_1 = 1_A - 1_{\tilde{A}}$ és una projecció, tal i com es defineix a 1.2.1, i podem escriure tot element de $\tilde{A}$ com $a + \alpha p_1$ amb $a \in A$ i $\alpha \in \mathbb{C}$.

Usant aquest element, es pot també veure que $h : \tilde{A} \to A \oplus \mathbb{C}$ definit per $h(a + \alpha 1_{\tilde{A}}) = (a + \alpha 1_A, \alpha)$ és un *-isomorfisme.

Definició 1.1.8. Siguin A i B dues C^*-àlgebres i φ un *-morfisme entre elles. Definim la unitificació de φ com la següent aplicació:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} \colon \tilde{A} &\longrightarrow \tilde{B} \\ a + \alpha 1_{\tilde{A}} &\mapsto \varphi(a) + \alpha 1_{\tilde{B}} \end{aligned}$$

1.2 Espectre i elements diferenciats

Encara que els exemples de $\mathbb{C}$ i $M_n(\mathbb{C})$ puguin semblar trivials, algunes de les tècniques utilitzades en l'estudi de les C^*-àlgebres són, en certa mesura, generalitzacions de les tècniques d'estudi utilitzades en aquests exemples tant coneguts. En particular, es té la següent definició:

Definició 1.2.1. Sigui A una C^*-àlgebra i x un element de A. Definim l'espectre de x, que denotarem per $\mathrm{sp}(x)$, com el conjunt de tots els nombres complexos λ tals que $x - \lambda 1_{\tilde{A}}$ no és invertible a $\tilde{A}$.

Molts dels elements diferenciats d'una C^*-àlgebra estan intrínsecament relacionats amb el seu espectre i, en alguns casos, li deuen el seu nom. De cara al nostre estudi, diferenciarem els següents elements:

Donada una C^*-àlgebra A i un element $a \in A$, diem que a és

- *normal* si $aa^* = a^*a$.
- *positiu* si existeix $x \in A$ tal que $a = x^*x$ o, equivalentment, si $\mathrm{sp}(a) \subseteq \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ i a és normal. Anomenarem A^+ al conjunt dels elements positius de A.
- *unitari* si $aa^* = a^*a = 1$ o, equivalentment, si $\mathrm{sp}(a) \subseteq \mathbb{T}$ i a és normal. Anomenarem $U(A)$ al conjunt dels unitaris[2] de A.
- una *projecció* si $a = a^* = a^2$ o, equivalentment, si $\mathrm{sp}(a) \subseteq \{0, 1\}$ i a és normal. Anomenarem $P(A)$ al conjunt de les projeccions de A.
- *invertible* si existeix un element a^{-1} tal que $aa^{-1} = 1$. Anomenarem $GL(A)$ al conjunt dels invertibles de A.

[2]Com és d'esperar, aquesta definició només té sentit si A és unitària.

D'aquests elements, les projeccions i els unitaris tindran especial importància en la construcció de $K_0(A)$ i $K_1(A)$ respectivament.

Definició 1.2.2. Siguin A una C^*-àlgebra unitària i $U(A)$ el conjunt dels elements unitaris de A. Anomenem conjunt d'unitaris normalitzats, que denotarem per $U^+(A)$, al subconjunt d'elements de $U(A)$ que tenen part escalar de norma 1.

1.2.1 La relació homotòpica

Una de les relacions més usades en l'estudi de les C^*-àlgebres, i en la teoria K en particular, s'hereta de l'estudi d'espais topològics: La relació homotòpica.

Definició 1.2.3. Sigui A una C^*-àlgebra i B un subconjunt de A. Diem que dos elements x, y de A estan relacionats homotòpicament a B, i escrivim $x \sim_h y$, si existeix un camí continu, amb la topologia de la norma de A, entre x i y a B.

En teoria K, la relació homotòpica és especialment important en la construcció de K_1 mitjançant unitaris. Un dels lemes recurrents en el tractament de K_1 és el Lema de Whitehead, enunciat a continuació:

Lema 1.2.4. *Sigui A una C^*-àlgebra i u, v unitaris de $\tilde{A}$. Llavors, els següents elements són dos a dos homotòpics a $U(M_2(\tilde{A}))$:*

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} uv & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} vu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$$

Donat el conjunt d'unitaris normalitzats, $U^+(A)$, destaquem que tota part escalar d'un element unitari u d'una C^*-àlgebra unitària A pot ser normalitzat multiplicant-lo per $\pi(u)^{-1}1_A$. El Lema anterior ens assegura, en particular, que si u i v són unitaris normalitzats homotòpics, també podem normalitzar les homotopies anteriors.

Definició 1.2.5. Sigui A una C^*-àlgebra unitària. Denotem per $U_0(A)$ al conjunt d'elements unitaris homotòpics a 1.

A més del Lema de Whitehead, també utilitzarem diversos resultats que es basen en les particularitats d'alguns dels elements diferenciats definits anteriorment. Resumim aquests fets en forma de tres lemes:

Lema 1.2.6 (Homotopia i projeccions)**.** *Sigui A una C^*-àlgebra unitària i p, q dues projeccions de A. Llavors,*

- *si $\|p - q\| < 1$, tenim que $p \sim_h q$ a $P(A)$.*
- *p i q estan relacionats homotòpicament si i només si existeix una homotopia d'unitaris u_t tal que $u_0 = 1$ i $p = u_1 q u_1^*$.*

Lema 1.2.7 (Homotopia i unitaris)**.** *Sigui A una C^*-àlgebra unitària i u, v dos unitaris de A. Llavors,*

- *si $\|u - v\| < 2$, es té $u \sim_h v$ a $U(A)$.*
- *si $u \sim_h v$ a $GL(A)$, llavors $u \sim_h v$ a $U(A)$.*

A més a més, donada una altra C^*-àlgebra B i un morfisme exhaustiu ϕ entre A i B, es compleix que $\phi(U_0(A)) = U_0(B)$.

Lema 1.2.8 (Homotopia i invertibles). *Sigui A una C^*-àlgebra unitària i x, y dos elements de A. Si x és invertible i y és tal que $\|x-y\| < 1/\|x^{-1}\|$, llavors $x+t(y-x)$ són invertibles per tot $t \in [0,1]$.*

En particular, $x \sim_h y$ a $GL(A)$.

Destaquem també que la relació homotópica es pot estendre a *-morfismes i C^*-àlgebres.

Definició 1.2.9. Siguin φ_0, φ_1 dos *-morfismes entre dues C^*-àlgebres A i B. Direm que φ_0 està relacionat homotòpicament amb φ_1, i escrivim $\varphi_0 \sim_h \varphi_1$, si existeix una assignació continua $t \longmapsto \varphi_t$ de $[0,1]$ als *-morfismes de A a B tal que per a tot element $a \in A$ es té que $t \longmapsto \varphi_t(a)$ és una homotopia entre $\varphi_0(a)$ i $\varphi_1(a)$.

Similarment, direm que dues C^*-àlgebres A i B estan relacionades homotòpicament, i ho denotem $A \sim_h B$, si existeixen dos *-morfismes $\phi : A \to B$ i $\varphi : B \to A$ tals que $\phi \circ \varphi \sim_h id_B$ i $\varphi \circ \phi \sim_h id_A$.

1.2.2 Càlcul funcional

Com ja s'ha comentat a la introducció d'aquest capítol, el càlcul funcional és una de les eines més importants en l'estudi de les C^*-àlgebres. Aquest fet és en gran mesura degut als següents resultats:

Teorema 1.2.10. *Sigui A una C^*-àlgebra, $a \in \tilde{A}$ un element normal i $C^*(a,1) \subset \tilde{A}$ la sub-C^*-àlgebra més petita que conté a i 1.*

Llavors, existeix un isomorfisme isomètric γ entre $C(\mathrm{sp}(a))$ i $C^*(a,1)$ tal que $\gamma(z \mapsto z) = a$.

Comentari 1.2.11. Com a conseqüència del Teorema anterior, sorgeix la següent notació:

Sigui $f(\cdot) \in C(\mathrm{sp}(a))$. Denotarem per $f(a)$ a la imatge per γ de $f(\cdot)$

En particular, podem considerar els elements e^a de $\tilde{A}$ per a tot a normal i $\sqrt{b}$ per a tot b positiu.

Teorema 1.2.12. *Per tot element normal a d'una C^*-àlgebra A es té que $\mathrm{sp}(f(a)) = f(\mathrm{sp}(a))$ per a tota funció contínua sobre $\mathrm{sp}(a)$.*

Exemple 1.2.13. Sigui A una C^*-àlgebra. Llavors, si existeix un element normal $a \in A$ d'espectre no connex, tenim que A conté una projecció diferent de 0 i 1.

En efecte, sigui $C \subset$ sp(a) una component connexa. Llavors, la funció χ_C definida com $\chi_C(z) = 1$ si $z \in C$ i 0 altrament és una aplicació contínua que pertany a $C(\mathrm{sp}(a))$.

Observem, a més a més, que $f^2 = \bar{f} = f$. Per tant, amb la notació del comentari anterior, tenim que $f(a)$ és una projecció.

És clar que aquesta no pot ser ni 0 ni 1, ja que aquests elements corresponen a les funcions constants 0 i 1 respectivament.

Capítol 2

El grup de Grothendieck K_0

Comencem fent un resum de relacions i propietats de les projeccions. A continuació, asignarem un grup a cada C^*-àlgebra unitària A, que anomenarem $K_0(A)$, i un morfisme de grups, $K_0(\phi)$, a cada C^*-morfisme ϕ. Finalment, estudiarem el comportament functorial de K_0 i el generalitzarem al cas no unitari.

2.1 Projeccions

Com ja s'ha comentat a 1.2, les projeccions són d'especial importància en l'estudi de les C^*-àlgebres. Per tractar-les, és convenient generalitzar relacions ja conegudes a $M_n(\mathbb{C})$ a una C^*-àlgebra arbitrària A.

Recordant que $P(A)$ denota el conjunt de projeccions, definim dues relacions:

- *Relació unitària*: Siguin $p, q \in P(A)$. Direm que p està relacionada unitàriament amb q, en símbols $p \sim_u q$, si existeix $u \in U(\tilde{A})$ tal que $p = u^*qu$.

- *Relació de Murray-von Neumann*: Donats $p, q \in A$, p i q compleixen la relació de Murray-von Neumann, en símbols $p \sim q$, si existeix $v \in A$ tal que $p = vv^*$ i $q = v^*v$.

  Anomenem isometries parcials als elements $v \in M_n(A)$ tals que v^*v és una projecció[1].

Encara que la relació unitària pugui semblar molt natural en un principi, cal destacar que aquesta relació utilitza, en el cas no unitari, elements que no són de la C^*-àlgebra que estem tractant.

En canvi, la relació de Murray-von Neumann utilitza sempre elements de A i, com es veurà a la Subsecció 2.1.1, és més feble que la unitària.

Tot i així, es pot veure al Comentari 2.1.5 que aquestes dues relacions són equivalents a $M_n(\mathbb{C})$.

Lema 2.1.1. *Per a tota C^*-àlgebra unitària A, la relació unitària i de Murray-von Neumann són d'equivalència.*

Demostració. Només s'escriu la demostració per a la relació de Murray-von Neumann, doncs la relació unitària és clarament una relació d'equivalència.

[1] El motiu per donar-li aquest nom a v es desenvolupa més endavant, a l'Exemple 2.2.12

Siguin $k \in \mathbb{N}^*$ i p, q dues projeccions de $M_k(A)$ tals que $p = vv^*$ i $q = v^*v$ per a un cert $v \in M_k(A)$. Llavors, definint $t = v^*$, es tenen les següents igualtats:

$$p = p^2 = p^*p = pp^*$$
$$p = t^*t\,, q = tt^*$$

del que se segueix que la relació de Murray-von Neumann és reflexiva i simètrica.

Sigui doncs $r \in P_k(A)$ tal que $r = w^*w$ i $q = ww^*$ per algun $w \in M_k(A)$ i la projecció q anterior. Comencem calculant z^*z on $z = (1 - vv^*)v$:

$$z^*z = v^*(1-p)(1-p)v = q - v^*pv = q - q^2 = 0$$

Per tant, $v = vv^*v$ i, fent un argument anàleg per w, també tenim $w = ww^*w$.

Usant aquest resultat podem veure que $p \sim r$ per la isometria parcial vw i, en conseqüència, que la relació de Murray-von Neumann és transitiva i, per tant, d'equivalència:

$$(vw)(vw)^* = vww^*v^* = vqv^* = (vv^*v)v^* = vv^* = p$$
$$(vw)^*(vw) = w^*v^*vw = w^*qw = (w^*ww^*)w = w^*w = r$$

□

2.1.1 Propietats generals

Ja hem comentat que la relació unitària pot involucrar elements que no són de A. En el cas unitari però, tenim la següent propietat:

Proposició 2.1.2. *Sigui A una C^*-àlgebra unitària. Llavors, donats $p, q \in P(A)$, $p \sim_u q$ si i només si $p = u^*qu$ amb $u \in U(A)$.*

Recordem que a 1.2.1 ja havíem definit la relació d'homotopia, $\sim_h$, que també es pot aplicar a $P(A)$. Així doncs, tenim tres relacions sobre les projeccions de A i cal estudiar com interactuen entre elles. En aquest sentit, es tenen les següents Proposicions:

Proposició 2.1.3. *Siguin p, q dues projeccions d'una C^*-àlgebra A:*

- *Si $p \sim_h q$ llavors $p \sim_u q$*
- *Si $p \sim_u q$ llavors $p \sim q$*

Proposició 2.1.4. *Siguin p, q dues projeccions d'una C^*-àlgebra A:*

- Si $p \sim q$ llavors $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_u \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- Si $p \sim_u q$ llavors $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Comentari 2.1.5. L'anterior proposició ens permet demostrar, en particular, que la relació de Murray-von Neumann i la relació unitària són equivalents a $M_n(\mathbb{C})$, com ja havíem dit abans.

2.2 El grup $K_0(A)$ per a una C^*-àlgebra A unitària

2.2.1 El monoide $D(A)$

Definició 2.2.1. Siguin $P_n(A) = P(M_n(A))$ i $P_\infty(A) = \cup_{n\in\mathbb{N}} P_n(A)$. Definim sobre $P_\infty(A)$ la següent operació $\oplus$ i relació $\sim_0$:

- $p \oplus q = \operatorname{diag}(p,q)$ per a tot $p,q \in P_\infty(A)$
- $p \sim_0 q \iff p = vv^*, q = v^*v$, on v és una matriu rectangular del tamany adequat.

Destaquem que la relació $\sim_0$ no és la relació de Murray-von Neumann, sinó una generalització d'aquesta, ja que en aquest cas p i q poden tenir mides diferents.

Comentari 2.2.2. Seguint un argument anàleg al Lema 2.1.1, es pot demostrar que la relació $\sim_0$ és una relació d'equivalència.

Com s'ha dit al començament, un dels objectius d'aquest capítol és construir per a tota C^*-àlgebra unitària A un grup abelià $K_0(A)$. La següent proposició, la demostració de la qual és un exercici fàcil a partir de les definicions, ens permet donar estructura a $P_\infty(A)/{\sim_0}$ i definir el monoide commutatiu $D(A)$.

Recordem abans la definició de monoide:

Definició 2.2.3. Sigui S un conjunt i $\cdot$ una operació de $S \times S \to S$ associativa. Diem que S és un monoide amb $\cdot$ si existeix un element $e \in S$ tal que $e \cdot x = x \cdot e = x$ per a tot $x \in S$.

Si l'aplicació $\cdot$ també és commutativa, S s'anomena monoide commutatiu i escrivim la seva operació com $x \cdot y =: x + y$ denotant el neutre per 0.

Proposició 2.2.4. *Sigui A una C^*-àlgebra i siguin $p, q, p', q', r \in P_\infty(A)$ qualsevols. Llavors,*

1. $p \oplus 0_n \sim_0 p$ per a tot $n \in \mathbb{N}^*$
2. Si $p \sim_0 p'$ i $q \sim_0 q'$, $p \oplus q \sim_0 p' \oplus q'$
3. $p \oplus q \sim_0 q \oplus p$
4. $p \oplus (q \oplus r) \sim_0 (p \oplus q) \oplus r$
5. Si $p, q \in P_n(A)$ són ortogonals, $p + q \in P_\infty(A)$ i $p + q \sim_0 p \oplus q$

Definició 2.2.5. Donada una C^*-àlgebra A, definim $D(A)$ com el següent monoide commutatiu

$$D(A) := (P_\infty(A)/{\sim_0}, \oplus)$$

Comentari 2.2.6. $D(A)$ és un monoide commutatiu en virtut de la Proposició 2.2.4.

2.2.2 El grup $K_0(A)$

Definició 2.2.7. Sigui A una C^*-àlgebra unitària. Definim $K_0(A)$ com el grup de Grothendieck de $D(A)$, és a dir,

$$K_0(A) := G(D(A))$$

on G és la construcció de Grothendieck.

Definim també $[\ ]_0 := g \circ \pi_D$, on π_D és la projecció de $P_\infty(A)$ a $D(A)$ i g és l'aplicació de Grothendieck[2].

[2] Veure Apèndix A per més informació sobre la construcció de Grothendieck.

Cal destacar que, com a conseqüència de les Proposicions 2.1.4 i 2.2.4, les classes d'equivalència $\sim_h$, $\sim_u$ i $\sim$ són les mateixes a $K_0(A)$. Aquest fet ens serà útil més endavant pel càlcul explícit de K_0.

Com és d'esperar, el grup $K_0(A)$ hereta les propietats llistades a la Proposició 2.2.4, que utilitzarem per donar una construcció explícita de $K_0(A)$.

Per aquest motiu, ometem la demostració del Lema següent.

Lema 2.2.8. *Sigui A una C^*-àlgebra unitària i p, q dues projeccions de $P_\infty(A)$. Llavors,*

1. $[p \oplus q]_0 = [p]_0 + [q]_0$
2. $[0_n] = 0 \in K_0(A)$ per a tot $n \in \mathbb{N}$
3. $[p]_0 + [q]_0 = [q]_0 + [p]_0$
4. Si $p \sim_h q$, $[p]_0 = [q]_0$
5. Si $pq = 0$, $[p + q]_0 = [p]_0 + [q]_0$

Proposició 2.2.9. *Donada una C^*-àlgebra unitària A, es té la següent igualtat:*

$$K_0(A) = \{[p]_0 - [q]_0 \mid p, q \in P_\infty(A)\}$$

A més, $[p]_0 = [q]_0$ si i només si existeix $r \in P_\infty(A)$ tal que $p \oplus r \sim_0 q \oplus r$.

Demostració. La igualtat de l'enunciat prové de la construcció de Grothendieck. Per tant, només demostrem la doble implicació:

La implicació cap a l'esquerra se segueix trivialment de la propietat 1 del Lema 2.2.8.

Suposem ara que $[p]_0 = [q]_0$. Com que $[\ ]_0 = g \circ \pi_D$, sabem també per la definició de g i la relació $\sim_G$ de l'Apèndix A que existeix $r \in P_\infty(A)$ tal que $\pi_D(p) \oplus \pi_D(r) = \pi_D(q) \oplus \pi_D(r)$, del que se segueix que $p \oplus r \sim_0 q \oplus r$. □

Comentari 2.2.10. A la relació $p \oplus r \sim_0 q \oplus r$ se l'anomena relació d'estabilitat, que escrivim $\sim_s$.

A més a més, si $r \in P_n(A)$, es té que $(1_n - r)$ és una projecció ortogonal a r. Per tant, tenim la següent equivalència

$$\begin{aligned} p \oplus 1_n = p \oplus (1_n - r + r) &\sim_0 (p \oplus r) \oplus (1_n - r) \\ &\sim_0 (q \oplus r) \oplus (1_n - r) \sim_0 q \oplus 1_n \end{aligned}$$

Un cop obtinguda la construcció explícita del grup K_0 unitari, podem començar a calcular alguns exemples. Encara que aquests siguin els primers, en el càlcul de $K_0(\mathbb{C})$ es pot entreveure que certs morfismes de $P_\infty(\mathbb{C})$ a un grup G es poden estendre a morfismes de $K_0(\mathbb{C})$ a G, resultat desenvolupat amb més generalitat al Lema 2.2.13.

D'altra banda, el càlcul de $K_0(B(H))$ l'utilitzarem per obtenir els K-grups de C^*-àlgebres més complicades, com ara l'àlgebra de Calkin o la de Toeplitz, dels Exemples 5.3.3 i 5.3.4 respectivament.

Exemple 2.2.11. $K_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$

Per a tota projecció $p \in P_n(\mathbb{C})$, sabem per àlgebra lineal que existeix un únic k natural i una matriu unitària $u \in U_n(\mathbb{C})$ tal que $upu^* = 1_k \oplus 0_{n-k}$. Definim doncs la següent aplicació:

$$\begin{aligned} \dim : \quad P_\infty(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathbb{N} \\ p &\longmapsto k \end{aligned}$$

Per tant, per veure $K_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$, és suficient demostrar que $[p]_0 = [q]_0$ si i només si $\dim(p) = \dim(q)$.

D'altra banda, sabem per la Proposició 2.2.9 que $[p]_0 = [q]_0$ si i només si existeix $r \in P_\infty(\mathbb{C})$ tal que $p \oplus r \sim_0 q \oplus r$. Per la Proposició 2.1.4, això passa si i només si $p \oplus r \oplus 0_N \sim_u q \oplus r \oplus 0_M$ per a $N, M \in \mathbb{N}$ adients. Ara bé, pel comentari fet al principi de l'exemple, dues projeccions estan relacionades unitàriament si i només si la seva imatge per dim és la mateixa. Per tant, es té el següent:

$$\dim(p \oplus r) = \dim(p \oplus r \oplus 0_N) = \dim(q \oplus r \oplus 0_M) = \dim(q \oplus r)$$

Com que dim és trivialment additiva amb l'operació $\oplus$, se segueix que $[p]_0 = [q]_0$ si i només si $\dim(p) = \dim(q)$, fet que acaba la prova.

Cal destacar que podem reproduir l'argument anterior per a $M_n(\mathbb{C})$ per a tot $n \in \mathbb{N}$, així obtenint $K_0(M_n(\mathbb{C})) \cong \mathbb{Z}$. Aquest fet, com es veurà al Lema 3.1.14, no és casualitat.

Exemple 2.2.12. $K_0(B(H)) \cong \{0\}$ per a tot espai de Hilbert H separable i de dimensió infinita

Per demostrar l'anterior isomorfisme cal només veure que $p \sim q$ si i només si $\dim(p(H)) = \dim(q(H))$.

En efecte, un cop vist això dos elements de $p, q \in P_\infty(B(H))$ es troben en la mateixa classe d'equivalència a $D(B(H))$ si i només si $p \oplus 0_N \sim q \oplus 0_M$ per alguns $N, M \in \mathbb{N}$ adients, fet que passa, segons la doble implicació anterior, si i només si $\dim((p \oplus 0_N)(H)) = \dim(p(H)) = \dim(q(H)) = \dim((q \oplus 0_M)(H))$. Com que la dimensió és additiva, se segueix que $D(B(H)) \cong \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ i $K_0(B(H)) = G(D(B(H))) \cong 0$.

Veiem doncs la doble implicació anterior:

Si $p \sim q$, existeix una isometria parcial v tal que $p = v^*v$ i $q = vv^*$. Prenent $\phi = v|_{p(H)}$, és clar que ϕ és un isomorfisme entre $p(H)$ i $q(H)$ i, en particular, $\dim(p(H)) = \dim(q(H))$. Per exemple, si $x = v^*v(y)$ és tal que $\phi(x) = 0$, es té que $0 = v^*(v(x)) = p^2(y) = p(y)$ i, en conseqüència, $x = 0$.

D'altra banda, si $\dim(p(H)) = \dim(q(H))$, la separabilitat de H ens assegura que existeix un isomorfisme δ entre $p(H)$ i $q(H)$. Estenent δ a H trivialment definint v com $v := \delta \chi_{p(H)}$, és un càlcul directe que v és la isometria parcial que busquem.

2.2.3 El functor K_0 unitari

Ens interessa ara tractar de transformar els *-morfismes $\phi : A \to B$ entre C^*-àlgebres a morfismes de grups $K_0(\phi) : K_0(A) \to K_0(B)$. Per fer-ho, utilitzarem el següent resultat:

Lema 2.2.13. (Propietat universal de K_0) *Sigui A una C^*-àlgebra unitària i ϕ una aplicació additiva per $\oplus$ de $P_\infty(A)$ a un grup G tal que $\phi(0_n) = 0$ i $\phi(p) = \phi(q)$ si $p \sim_h q$. Llavors, existeix un únic morfisme $\delta : K_0(A) \to G$ que fa el següent diagrama commutatiu:*

$$\begin{tikzcd} P_\infty(A) \arrow[d, "{[\,]_0}"'] \arrow[dr, "\phi"] & \\ K_0(A) \arrow[r, "\delta"'] & G \end{tikzcd}$$

Demostració. Ja hem vist a la Proposició 2.2.9 que tot element de $K_0(A)$ es pot escriure com $[p]_0 - [q]_0$. Per tant, tot morfisme sobre $K_0(A)$ queda unívocament determinat per les imatges dels elements $[p]_0$.

Observem doncs que la commutativitat del diagrama ens diu que per a tot $p \in P_\infty(A)$ es té que $\delta([p]_0) = \phi(p)$, del que se segueix que, si δ és morfisme, ha de ser únic. Comprovem que δ està ben definit i és un morfisme:

Siguin $p, q \in P_\infty(A)$ tals que $[p]_0 = [q]_0$. Sabem, per la Proposició 2.1.4 i la Proposició 2.2.9, que això passa si i només si $p \oplus r \oplus 0_N \sim_h q \oplus r \oplus 0_M$ per a $r \in P_\infty(A)$ i $N, M \in \mathbb{N}$ adequats.

Com que ϕ porta a la mateixa imatge les projeccions homotòpiques, és additiva per $\oplus$ i porta els zeros 0_n al zero, tenim la següent igualtat:

$$\begin{aligned}\delta([p]_0) + \phi(r) &= \phi(p \oplus r) = \phi(p \oplus r) + 0 = \phi(p \oplus r \oplus 0_N) \\ &= \phi(q \oplus r \oplus 0_M) = \delta([q]_0) + \phi(r)\end{aligned}$$

Com que G és un grup, es té que $\delta([p]_0) = \delta([q]_0)$.

Se segueix de la commutativitat del diagrama que δ és morfisme. $\square$

Observem que donat $\phi : A \to B$ un *-morfisme, aquest es pot estendre component a component a un *-morfisme de $M_n(A)$ a $M_n(B)$. A més a més, com que tot *-morfisme porta projeccions a projeccions, l'aplicació $\bar{\phi} : P_\infty(A) \to P_\infty(B)$ induïda per ϕ, que d'ara en endavant també anomenarem ϕ per reduir la notació, està ben definida i és clarament additiva amb l'operació $\oplus$.

Per tant, podem definir l'aplicació additiva $\varphi = [\ ]_{0,B} \circ \phi$ i, per la propietat universal de K_0, existeix un únic morfisme δ que fa el següent diagrama commutatiu:

$$\begin{tikzcd} P_\infty(A) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "{[\,]_{0,A}}"'] & P_\infty(B) \arrow[d, "{[\,]_{0,B}}"] \\ K_0(A) \arrow[r, "\delta"'] & K_0(B) \end{tikzcd}$$

Definició 2.2.14. Siguin A, B dues C^*-àlgebres unitàries i ϕ un *-morfisme entre elles. Definim $K_0(\phi)$ com a l'únic morfisme δ entre $K_0(A)$ i $K_0(B)$ que fa que l'anterior diagrama commuti.

Tenim doncs un mètode per convertir C^*-àlgebres unitàries a grups abelians i morfismes entre C^*-àlgebres unitàries a morfismes de grups abelians. Aquest fet, juntament amb el següent Lema, ens permet definir K_0 com un functor[3].

Lema 2.2.15. *Utilitzant la notació introduïda a l'Apèndix B, K_0 és un functor covariant entre la categoria de C^*-àlgebres unitàries i la de grups abelians que porta els zeros als zeros.*

Demostració. És clar que $K_0(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{K_0(A)}$ i $K_0(0_{A,B}) = 0_{K_0(A),K_0(B)}$ per a tota parella de C^*-àlgebres unitàries A i B. Per tant, només queda comprovar que K_0 preserva la composició.

Siguin doncs A, B i C tres C^*-àlgebres unitàries i $\varphi : A \to B$, $\phi : B \to C$ *-morfismes. Llavors, per a tot $p \in P_\infty(A)$ es té la següent igualtat:

$$K_0(\phi \circ \varphi)([p]_0) = [\phi \circ \varphi(p)]_0 = K_0(\phi)([\varphi(p)]_0) = (K_0(\phi) \circ K_0(\varphi))([p]_0)$$

Per tant, com que tot morfisme sobre $K_0(A)$ queda unívocament determinat per la imatge dels elements $[p]_0$, K_0 preserva la composició. $\square$

Encara que no es fa servir en aquest treball, es denota per $K_{00}(A)$ la construcció anterior aplicada a una C^*-àlgebra no unitària. Aquesta distinció es deu al fet que el functor K_{00} no és escindidament exacte, propietat de gran utilitat en el càlcul explícit de K_0.

Així doncs, cal redefinir K_0 en el cas d'una C^*-àlgebra arbitrària, conservant les propietats i construcció estudiades anteriorment.

[3]Consultar Apèndix B per una breu introducció a la Teoria de Categories

2.3 El grup K_0 per a una C^*-àlgebra general

Durant tot aquest apartat utilitzarem la notació introduïda a 1.1.1 per tractar la successió escindida obtinguda quan unitifiquem una C^*-àlgebra.

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} \tilde{A} \underset{\lambda}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

El següent Lema ens permet generalitzar K_0 i conservar, tal i com volíem, la construcció en el cas unitari.

Lema 2.3.1. *Sigui A una C^*-àlgebra unitària. La successió escindida obtinguda en adjuntar una unitat indueix la següent successió escindida de grups*

$$0 \longrightarrow K_0(A) \xrightarrow{K_0(i)} K_0(\tilde{A}) \underset{K_0(\lambda)}{\overset{K_0(\pi)}{\rightleftarrows}} K_0(\mathbb{C}) \longrightarrow 0$$

Demostració. Recordem que a la Secció 1.1.1 havíem donat, en el cas unitari, un isomorfisme explícit entre $\tilde{A}$ i $A \oplus \mathbb{C}$, $h(a + \alpha 1_{\tilde{A}}) := (a + \alpha 1_A, \alpha)$. Així doncs, tenim el següent diagrama(no commutatiu):

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, leftrightarrow, "\mathrm{id}_A"] & \tilde{A} \arrow[r, shift left, "\pi"] \arrow[d, leftrightarrow, "h"] & \mathbb{C} \arrow[l, shift left, "\lambda"] \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow, "\mathrm{id}_{\mathbb{C}}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, shift left, "i_A"] & A \oplus \mathbb{C} \arrow[l, shift left, "\pi_A"] \arrow[r, shift left, "\pi_{\mathbb{C}}"] & \mathbb{C} \arrow[l, shift left, "i_{\mathbb{C}}"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Per veure que la successió escindida d'unitificació induex a la successió escindida de l'enunciat, utilitzarem que $i_A, i_{\mathbb{C}}$ i λ de l'anterior diagrama són seccions i aplicarem les propietats vistes al Lema 2.2.15:

1. $K_0(i)$ és injectiu: En efecte, doncs $\pi_A \circ h \circ i = \mathrm{id}_A$ i, com que K_0 preserva la composició, $K_0(\pi_A) \circ K_0(h) \circ K_0(i) = \mathrm{id}_{K_0(A)}$. Per tant, l'únic element $x \in K_0(A)$ tal que $K_0(i)(x) = 0$ és el zero.

2. $\mathrm{Im}(K_0(i)) \subset \mathrm{Ker}(K_0(\pi))$: Cal només observar que $\pi \circ i = 0$ i aplicar que K_0 és un functor que envia els zeros al zero.

3. $\mathrm{Ker}(K_0(\pi)) \subset \mathrm{Im}(K_0(i))$: Seguint el diagrama anterior, es té que $\mathrm{id}_{\tilde{A}} = i \circ \pi_A \circ h + h^{-1} \circ i_{\mathbb{C}} \circ \pi$ amb $i \circ \pi_A \circ h$ ortogonal a $h^{-1} \circ i_{\mathbb{C}} \circ \pi$. Per tant, pel Lema 2.2.8 , $\mathrm{id}_{K_0(\tilde{A})} = K_0(i) \circ K_0(\pi_A) \circ K_0(h) + K_0(h^{-1}) \circ K_0(i_{\mathbb{C}}) \circ K_0(\pi)$. Així doncs, si $x \in K_0(\tilde{A})$ és tal que $K_0(\pi)(x) = 0$, tenim $x = K_0(i)((K_0(\pi_A) \circ K_0(h))(x)) \in Im(K_0(i))$.

4. $K_0(\pi)$ és exhaustiu i $K_0(\lambda)$ és una secció: Observem que $\pi \circ \lambda = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ i, en conseqüència, $K_0(\pi) \circ K_0(\lambda) = \mathrm{id}_{K_0(\mathbb{C})}$. L'exhaustivitat de $K_0(\pi)$ ve de l'exhaustivitat de π.

□

Comentari 2.3.2. Destaquem que $K_0(\pi)$ està definit per a tota C^*-àlgebra A, ja que $\tilde{A}$ i $\mathbb{C}$ són C^*-àlgebres unitàries. Observem també que, com a corol·lari del Lema anterior, tenim que $\ker(K_0(\pi)) \cong K_0(A)$ quan A és unitària.

Definició 2.3.3. Sigui A una C^*-àlgebra. Denotarem per $K_0(A)$ al nucli de l'aplicació $K_0(\pi)$.

Com a conseqüència de les observacions del Comentari 2.3.2, aquesta definició de $K_0(A)$ compleix totes les propietats que havíem imposat al final de la Subsecció 2.2.3. A més a més, observem que si p és una projecció de $P_n(A)$ es té que $K_0(\pi)([p]_0) = [\pi(p)]_0 = 0$, del que se segueix $[p]_0 \in K_0(A)$.

De manera anàloga a la definició de K_0 unitari, donem una representació estàndar del grup $K_0(A)$ genèric.

Proposició 2.3.4. *Donada una C^*-àlgebra A, es té la següent igualtat*

$$K_0(A) = \{[p]_0 - [s(p)]_0 \mid p \in P_\infty(\tilde{A})\}$$

on s és l'aplicació escalar definida a 1.1.1.

Corol·lari 2.3.5. *Per a tot element x no nul de $K_0(A)$ existeixen $n \in \mathbb{N}$ i $p \in P_{2n}(\tilde{A})$ tals que $x = [p]_0 - [1_n \oplus 0_n]_0$.*

Demostració. Sabem, per la Proposició 2.3.4, que tot element x no nul de $K_0(A)$ es pot escriure com $x = [q]_0 - [s(q)]_0$ amb $q \in P_m(\tilde{A})$ per algun $m \in \mathbb{N}$.

Com que $s(q) \in P_m(\mathbb{C}1_{\tilde{A}})$, sabem per resultats d'àlgebra lineal que $s(q) \sim_u 1_k \oplus 0_{m-k}$ per a algun $k \in \mathbb{N}$. Per tant, prenent $n > \max\{k, m-k\}$, es té la següent igualtat:

$$\begin{aligned} x &= [q]_0 - [s(q)]_0 \\ &= [q]_0 + [1_{n-k} \oplus 0_{n+k-m}]_0 - [1_{n-k} \oplus 0_{n+k-m}]_0 - [1_k \oplus 0_{m-k}]_0 \\ &= [q \oplus 1_{n-k} \oplus 0_{n+k-m}]_0 - [1_n \oplus 0_n]_0 \end{aligned}$$

Prenent $p = q \oplus 1_{n-k} \oplus 0_{n+k-m}$, hem acabat. □

Exemple 2.3.6. Si A és separable, $K_0(A)$ és numerable

Sigui $k \in \mathbb{N}$ fixat. Sabem pel Lema 1.2.6 que si dues projeccions $p, q \in P_k(A)$ es troben a distància inferior a 1, existeix una homotopia entre p i q. Per tant, considerem la base $\{B(p,1) \cap P_k(A)\}_{p \in P_k(A)}$ de $P_k(A)$ on $B(p,1)$ és la bola centrada en p de radi 1.

Com que A és un espai mètric, la propietat de separabilitat és equivalent a complir el segon axioma de numerabilitat i, com que $P_k(A)$ és un subespai topològic de A, $P_k(A)$ també el verifica. Així doncs, la base anteriorment definida té una sub-família numerable $\{B(p_{n,k},1) \cap P_k(A)\}_{n \in \mathbb{N}}$ que continua essent base de $P_k(A)$.

Aplicant l'anterior raonament a $P_m(A)$ per a tot m i usant que $\{[x]_0 \mid x \in B(p,1) \cap P_m(A)\} = \{[p]_0\}$ per a tot $p \in P_m(A)$, obtenim que $K_0(A)$ és numerable[4], fet que acaba la prova.

Definició 2.3.7. Siguin A, B dues C^*-àlgebres i φ un *-morfisme entre elles. Definim $K_0(\varphi)$ com la següent aplicació

$$\begin{aligned} K_0(\varphi)\colon K_0(A) &\longrightarrow K_0(B) \\ [p]_0 - [s(p)]_0 &\mapsto [\tilde{\varphi}(p)]_0 - [s(\tilde{\varphi}(p))]_0 \end{aligned}$$

Lema 2.3.8. *$K_0(\varphi)$ està ben definit i és l'únic morfisme que fa el següent diagrama commutatiu*

$$\begin{tikzcd} K_0(A) \arrow[r, "K_0(i_A)"] \arrow[d, "K_0(\varphi)"] & K_0(\tilde{A}) \arrow[r, "K_0(\pi)"] \arrow[d, "K_0(\tilde{\varphi})"] & K_0(\mathbb{C}) \arrow[d, "id_{K_0(\mathbb{C})}"] \\ K_0(B) \arrow[r, "K_0(i_B)"'] & K_0(\tilde{B}) \arrow[r, "K_0(\pi)"'] & K_0(\mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

on $K_0(i_A)$ i $K_0(i_B)$ són les inclusions de $K_0(A)$ i $K_0(B)$ a $K_0(\tilde{A})$ i $K_0(\tilde{B})$ com a subgrups.

[4] Ja que la unió numerable de conjunts numerables és numerable

Demostració. Comencem destacant que el morfisme s commuta amb $\tilde{\varphi}$, doncs per a tota projecció $p \in P_\infty(\tilde{A})$ es té que $\tilde{\varphi}(s(p)) = \tilde{\varphi}(\pi(p)1_{\tilde{A}}) = \pi(p)1_{\tilde{B}} = s(\tilde{\varphi}(\pi(p)1_{\tilde{A}})) = s(\tilde{\varphi}(p))$.

Així doncs, l'aplicació $K_0(\varphi)$ definida anteriorment és una restricció de $K_0(\tilde{\varphi})$ sobre $K_0(A)$ i, com que és clar que $\mathrm{Im}(K_0(\varphi)) \subset K_0(B)$, tenim que $K_0(\varphi)$ és un morfisme ben definit.

Sigui doncs $[p]_0 - [s(p)]_0$ un element de $K_0(A)$ qualsevol. Llavors, per tal que el diagrama de l'enunciat sigui commutatiu cal que es compleixi la següent igualtat:

$$K_0(\varphi)([p]_0 - [s(p)]_0) = (K_0(\tilde{\varphi}) \circ K_0(i_A))([p]_0 - [s(p)]_0) = [\tilde{\varphi}(p)]_0 - [s(\tilde{\varphi}(p))]_0$$

Per tant, $K_0(\varphi)$ és l'únic morfisme que fa que el diagrama commuti. □

Finalment, es torna a escriure el Lema 2.2.15 per a la construcció generalitzada de K_0.

Lema 2.3.9. *K_0 és un functor covariant entre la categoria de C^*-àlgebres i grups abelians que porta els zeros als zeros.*

Capítol 3

Els K-functors d'ordre superior

En aquest capítol s'estudien les propietats functorials del functor suspensió S i es construeixen els functors K_n d'ordre superior basant-se en la construcció de K_1. Es veu també el primer dels dos resultats principals d'isomorfia d'aquest treball, $K_1 \cong K_0 \circ S$, que s'utilitza per obtenir les propietats functorials de K_n.

3.1 El functor suspensió

Definició 3.1.1. Donada una C^*-àlgebra A, definim el seu con, CA, i la seva suspensió, SA, com les següents C^*-àlgebres:

$$CA = \{f \in C([0,1], A) \ | \ f(0) = 0\}$$
$$SA = \{f \in C([0,1], A) \ | \ f(0) = f(1) = 0\}$$

Observem que donat un *-morfisme ϕ entre dues C^*-àlgebres A i B, podem definir un altre *-morfisme, $S\phi$, entre SA i SB:

$$\begin{aligned} S\phi : \quad SA &\longrightarrow SB \\ f &\longmapsto \phi \circ f \end{aligned}$$

Lema 3.1.2. *S és un functor covariant que porta els zeros als zeros.*

Un cop definit el functor S, ens centrem ara en les seves propietats functorials. Més en particular, volem veure que S és un functor exacte. Per demostrar-ho però, cal un Lema previ.

Lema 3.1.3. *Siguin A una C^*-àlgebra i X un espai topològic localment compacte i Hausdorff. Llavors, el conjunt FA generat per combinacions lineals de les funcions $f \cdot a$, definides per $(f \cdot a)(x) = f(x)a$ amb $f \in C_0(X)$ i $a \in A$, és dens a $C_0(X, A)$.*

Demostració. Seguim la demostració del Lema 10.1.1 de [9]:

Sigui $X^+ = X \cup \{\infty\}$ la compactificació de X, f una funció de $C_0(X, A)$ i ϵ un real positiu. Llavors, per la compacitat de X^+, sabem que existeix un recobriment obert $U_1, \cdots, U_n$ de X^+ tal que $\|f(x) - f(x')\| \leq \epsilon$ si $x, x' \in U_i$ per algun i.

Prenem ara uns elements $x_j \in U_j$ tals que $x_j = \infty$ si $\infty \in U_j$. Llavors, donada una partició de la unitat h_j subordinada a U_j, tenim que

$$\|f(x) - \sum_{j=1}^{n} f(x_j)h_j(x)\| \leq \sum_{j=1}^{n} h_j(x)\|f(x) - f(x_j)\| \leq \epsilon \sum_{j=1}^{n} h_j(x) = \epsilon$$

Així doncs, com que $f(x_j) = 0$ quan $\infty \in U_j$, el sumatori $\sum_{j=1}^{n} f(x_j)h_j(x)$ és una combinació lineal on els termes no nuls $f(x_j)h_j(x)$ compleixen que $h_j \in C_0(X, A)$.

Per tant, $\sum_{j=1}^{n} f(x_j)h_j(x)$ pertany al conjunt FA i, en conseqüència, aquest és dens a $C_0(X, A)$. □

Lema 3.1.4. *S preserva l'exactitud de les següents successions:*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} A/I \longrightarrow 0$$

on i és la inclusió natural i π el pas al quocient.

Demostració. Tal i com també s'observa a la Proposició 10.1.2 de [9], l'única part no trivial d'aquesta demostració consisteix en comprovar que $S\pi$ és exhaustiva. Per veure-ho, recordem que qualsevol morfisme de C^*-àlgebres és, en particular, continu.

Per tant, cal només veure que la imatge de $S\pi$ conté un conjunt dens de $S(A/I)$.

Així doncs, sigui $F(A/I)$ el conjunt dens de $S(A/I)$ definit al Lema 3.1.3 i $f \cdot b$ un element de $F(A/I)$ amb $b \in A/I$ qualsevol. Llavors, sabem per l'exhaustivitat de π que existeix un element $a \in A$ tal que $\pi(a) = b$ i, en conseqüència, que $S\pi(f \cdot a) = f \cdot b$.

Com que els elements de $F(A/I)$ són combinacions lineals d'elements de la forma $f \cdot b$, se segueix que la imatge de $S\pi$ conté $F(A/I)$ i, en conseqüència, que $S\pi$ és exacte. □

3.1.1 Els grups $K_n^{'}$

Atès que K_0 i S són functors, té sentit considerar la família $(K_0 \circ S^n)_{n\in\mathbb{N}}$, amb el conveni $S^0 = \mathrm{Id}$ i on S^n es defineix recursivament com $S^n = S \circ S^{n-1}$. La següent definició no és estàndard i només és per facilitar la notació.

Definició 3.1.5. Sigui $n \in \mathbb{N}$. Denotarem per $K_n^{'}$ al functor $K_0 \circ S^n$.

Ens disposem ara a estudiar les propietats dels functors $K_n^{'}$, doncs seran les mateixes que els functors K_n. D'aquestes, destaquem la Proposició 3.1.12 (exactitud escindida), un dels motius pels quals no hem adoptat el functor K_{00} com a K_0 genèric.

Comentari 3.1.6. Observem que $SA \cong \{f \in C(\mathbb{T}, A) \mid f(1) = 0\}$, fet que ens permet interpretar els elements de SA com deformacions contínues del cercle unitat que passen pel 0.

Aquesta nova interpretació s'utilitzarà en les proves d'algunes propietats de $K_n^{'}$, i ens serà molt útil per a la demostració del Teorema 3.2.10.

Proposició 3.1.7. *Siguin A, B dues C^*-àlgebres i φ_0, φ_1 dos *-morfismes entre elles. Si $\varphi_0 \sim_h \varphi_1$, llavors $K_n^{'}(\varphi_0) = K_n^{'}(\varphi_1)$ per a tot $n \in \mathbb{N}$.*

Demostració. Com a conseqüència del Comentari 3.1.6, i un abús de notació, escriurem

$$SA = \{f \in C(\mathbb{T}, A) \mid f(1) = 0\}$$

durant tota la prova.

Siguin $n \in \mathbb{N}$ fix i $q \in P_\infty(\widetilde{S^n A})$. Veurem que es compleix la següent igualtat

$$K_0(\widetilde{S^n\varphi_0})([q]_0) = K_0(\widetilde{S^n\varphi_1})([q]_0)$$

Sigui doncs $t \mapsto \varphi_t$ l'homotopia entre φ_0 i φ_1. Definim

$$q_t := \widetilde{S^n\varphi_t}(q)$$

Com que per a tot $t \in [0,1]$ tenim que $S^n\varphi_t$ i $\widetilde{S^n\varphi_t}$ són morfismes, se segueix que $q_t \in P_\infty(\widetilde{S^nB})$ per a tot t. Així doncs, ens cal només comprovar que l'assignació $t \mapsto q_t$ és contínua, ja que llavors tindrem $[q_0]_0 = [q_1]_0$, que és la igualtat que voliem demostrar.

Recordem de la Secció 1.1.1 que podem escriure $q = p + \alpha 1_{\widetilde{S^nA},k}$ amb $p \in M_k(S^nA)$ i $\alpha \in M_k(\mathbb{C})$ per a un cert $k \in \mathbb{N}$. Per tant, definint $p_t := S^n\varphi_t(p)$, tenim la següent expressió per q_t

$$q_t = \widetilde{S^n\varphi_t}(p + \alpha 1_{\widetilde{S^nA},k}) = S^n\varphi_t(p) + \alpha 1_{\widetilde{S^nB},k} = p_t + \alpha 1_{\widetilde{S^nB},k}$$

D'aquesta expressió se segueix que $t \mapsto q_t$ és contínua si i només si $t \mapsto p_t$ ho és, ja que α és constant per a tot t. Veiem doncs que p_t és contínua:

Sigui δ_p la següent aplicació

$$\begin{aligned} \delta_p \colon [0,1] \times \mathbb{T}^n &\longrightarrow A \\ (t,(z_1,\cdots,z_n)) &\mapsto p_t(z_1)\cdots(z_n) \end{aligned}$$

Observem que per a tota parella $(t_1,\xi_1),(t_2,\xi_2) \in [0,1] \times \mathbb{T}^n$ es té la següent desigualtat

$$\begin{aligned} \|\delta_p(t_1,\xi_1) - \delta_p(t_2,\xi_2)\| &= \|\delta_p(t_1,\xi_1) - \delta_p(t_2,\xi_1) + \delta_p(t_2,\xi_1) - \delta_p(t_2,\xi_2)\| \\ &\leq \|\varphi_{t_1}(p(\xi_1)) - \varphi_{t_2}(p(\xi_1))\| + \|\varphi_{t_2}(p(\xi_1) - p(\xi_2))\| \\ &\leq \|\varphi_{t_1}(p(\xi_1)) - \varphi_{t_2}(p(\xi_1))\| + \|p(\xi_1) - p(\xi_2)\| \end{aligned}$$

Per tant, com que p és contínua i $t \mapsto q_t$ és una homotopia, se segueix de l'anterior desigualtat que δ_p és contínua i, com que té suport compacte, és uniformement contínua.

Així doncs, $t \mapsto p_t$ és contínua i $t \mapsto q_t$ també, fet que implica que $K_0(\widetilde{S^n\varphi_0}) = K_0(\widetilde{S^n\varphi_1})$ i, com que $K_0(S^n\varphi_0)$ i $K_0(S^n\varphi_1)$ són restriccions dels anteriors morfismes, tenim $K_0(S^n\varphi_0) = K_0(S^n\varphi_1)$, fet que acaba la prova. □

Corol·lari 3.1.8. *Si dues C^*-àlgebres A i B estan relacionades homotòpicament, llavors $K_n^{'}(A) \cong K_n^{'}(B)$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. En particular, si existeix algun nombre natural m tal que $K_m^{'}(A) \ncong K_m^{'}(B)$, es té que $A \ncong B$.*

L'anterior Proposició és molt natural en el sentit que tota la construcció de K_0 ha estat mòdul homotopia. Per tant, era d'esperar que dues C^*-àlgebres homotòpiques tinguessin els mateixos K-grups.

En particular, podem utilitzar aquest fet en espais ja coneguts, com ara en el següent exemple.

Exemple 3.1.9. Per a tot espai topològic X, definim $C(X)$ com l'àlgebra de les funcions contínues entre X i $\mathbb{C}$. Llavors, es té que

$$\begin{aligned} K_0^{'}(C(X)) &\cong \mathbb{Z} \\ K_1^{'}(C(X)) &\cong K_1^{'}(\mathbb{C}) \end{aligned}$$

per a tot espai X compacte[1], Hausdorff i contràctil.

En efecte, pel Corol·lari anterior i l'Exemple 2.2.11, és suficient comprovar que $C(X)$ està homotòpicament relacionat amb $\mathbb{C}$. Ho veiem utilitzant el mateix argument que a l'Exemple 3.3.6 de [9]:

Recordem que un espai X compacte i Hausdorff és contràctil si es pot contraure de manera contínua a un punt, és a dir, si existeix un punt x_0 i una aplicació contínua $c\colon X \times [0,1] \to X$ tal que $c(x,0) = x$ i $c(x,1) = x_0$ per a tot $x \in X$.

[1] Notem que X és compacte si i només si $C(X) = C_0(X)$.

Observem doncs que la família de morfismes $\gamma_t : C(X) \to C(X)$ tals que $\gamma_t(f)(x) = f(c(x,t))$ formen una homotopia $t \mapsto \gamma_t$ entre $\gamma_0(f) = \mathrm{id}_{C(X)}$ i $\gamma_1(f) = f(x_0)$. Això és degut al fet que c i f són contínues per a tot f i, en conseqüència, que es tingui $f(c(x,t)) \sim_h f(x)$.

Per tant, el parell d'aplicacions següents són una homotopia entre $C(X)$ i $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned} C(X) \longrightarrow \mathbb{C} &\longrightarrow C(X) \\ f \longmapsto f(x_0)& \\ z &\longmapsto z1_{C(X)} \end{aligned}$$

del que se segueix que $K_0^{'}(C(X)) \cong \mathbb{Z}$ i $K_1^{'}(C(X)) \cong K_1^{'}(\mathbb{C})$.

Un cop vist que els functors $K_n^{'}$ transformen homotopies en igualtats, donem un Lema tècnic que ens permetrà reduir, tant en notació com en dificultat, les proves de les propietats d'exactitud de $K_n^{'}$.

Més concretament, el Lema ens permet reduir-nos a l'estudi del comportament de K_0 amb successions exactes que només involucren ideals i quocients d'una C^*-àlgebra.

Lema 3.1.10. *Les següents afirmacions són equivalents:*

1. *Per a tota successió exacta* $0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\phi} B \longrightarrow 0$ *i per tot* $n \in \mathbb{N}$, *la successió* $K_n^{'}(I) \xrightarrow{K_n^{'}(\varphi)} K_n^{'}(A) \xrightarrow{K_n^{'}(\phi)} K_n^{'}(B)$ *és exacta.*
2. *Per a tota* C^**-àlgebra* A *i tot ideal* $I \subset A$, *la successió* $K_0(I) \xrightarrow{K_0(i)} K_0(A) \xrightarrow{K_0(\pi)} K_0(A/I)$ *és exacta.*

Demostració. L'afirmació 1 implica trivialment l'afirmació 2. Veiem la implicació contrària:

Comencem observant que el següent diagrama té totes les files exactes i que és commutatiu per a tot $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S^n(I) \arrow[r, "S^n(\varphi)"] \arrow[d, leftrightarrow] & S^n(A) \arrow[r, "S^n(\phi)"] \arrow[d, leftrightarrow, "\mathrm{id}_{S^n(A)}"] & S^n(B) \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & 0 \\
0 \arrow[r] & S^n(\mathrm{Im}(\varphi)) \arrow[r, "S^n(i_0)"] \arrow[d, leftrightarrow] & S^n(A) \arrow[r, "S^n(\pi_0)"] \arrow[d, leftrightarrow, "\mathrm{id}_{S^n(A)}"] & S^n(A/\mathrm{Im}(\varphi)) \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Im}(S^n(i_0)) \arrow[r, "i_n"] & S^n(A) \arrow[r, "\pi_n"] & S^n(A)/\mathrm{Im}(S^n(i_0)) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

on i_n i π_n són les inclusions naturals i passos al quocient corresponents en cada cas.

En efecte, és clar per $n = 0$ que la primera fila commuta amb la segona, que els elements de cada columna són isomorfs entre ells i que les dues files són exactes. A més a més, la segona i tercera fila són iguals en aquest cas.

Per $n > 0$, la functorialitat i l'exactitud de S del Lema 3.1.4 ens asseguren que la primera i segona fila commuten i que aquesta última és exacta. Per tant, la primera fila també és exacta i, aplicant la commutativitat i exactitud vistes per $n = 0$, tenim que la segona i tercera fila també són exactes i commuten.

Així doncs, com que K_0 és un functor covariant i l'anterior diagrama és commutatiu, tenim el següent diagrama commutatiu

$$\begin{tikzcd}
K_n^{'}(I) \arrow[r, "K_n^{'}(\varphi)"] \arrow[d, leftrightarrow] & K_n^{'}(A) \arrow[r, "K_n^{'}(\phi)"] \arrow[d, leftrightarrow, "\mathrm{id}_{\mathrm{K}_\mathrm{n}^{'}(\mathrm{A})}"] & K_n^{'}(B) \arrow[d, leftrightarrow] \\
K_0(\mathrm{Im}(\mathrm{S}^\mathrm{n}(\mathrm{i}_0))) \arrow[r, "K_0(i_n)"] & K_0(S^n(A)) \arrow[r, "K_0(\pi_n)"] & K_0(S^n(A)/\mathrm{Im}(\mathrm{S}^\mathrm{n}(\mathrm{i}_0)))
\end{tikzcd}$$

Per tant, demostrar l'exactitud de la primera fila del diagrama anterior és equivalent a demostrar la de la segona, que sabem que és exacta per hipòtesi. □

Proposició 3.1.11. *Tota successió exacta curta*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\phi} B \longrightarrow 0$$

de C^*-àlgebres indueix per cada $n \in \mathbb{N}$ la següent successió exacta

$$K_n^{'}(I) \xrightarrow{K_n^{'}(\varphi)} K_n^{'}(A) \xrightarrow{K_n^{'}(\phi)} K_n^{'}(B)$$

Demostració. Seguim, un cop feta la reducció, la demostració del Teorema 6.3.2 de [11]:

Sabem pel Lema 3.1.10 que és suficient demostrar el resultat sota les hipòtesis llistades a continuació:

1. I és un ideal de A i $\varphi = i$ on i és la inclusió natural.

2. B és el quocient A/I i $\phi = \pi$ on π és el pas al quocient.

3. $n = 0$

Per tant, cal només comprovar que $\ker(K_0(\pi)) \subset \mathrm{Im}(K_0(i))$, ja que l'altra inclusió és clara. Per veure-ho, adaptem l'argument del Teorema 6.3.2. de [11].

Sigui doncs $q = [p]_0 - [s(p)]_0 \in \ker(K_0(\pi))$ amb $p \in P_m(\tilde{A})$. Sabem pel Comentari 2.2.10 i la Proposició 2.1.4 que es té la següent igualtat:

$$u(\tilde{\pi}(p) \oplus 1_n \oplus 0_k)u^* = \tilde{\pi}(s(p)) \oplus 1_n \oplus 0_k = s(p) \oplus 1_n \oplus 0_k$$

per a $u \in U_N(\widetilde{A/I})$ amb $N = k + n + m$ i $k, n \in \mathbb{N}$ adequats.

Pels Lemes 1.2.4 i 1.2.7, existeix un *lift* $w \in U_0(M_{2N}(\tilde{A}))$ de $u \oplus u^*$. Així doncs podem definir la següent projecció:

$$r = w(p \oplus 1_n \oplus 0_{k+N})w^* \in P_\infty(\tilde{A})$$

A més a més, sabem per construcció que $\tilde{\pi}(r) \in M_\infty(\mathbb{C}1_A)$ i, en conseqüència, $r \in M_\infty(\tilde{I})$. Per tant, com que $[r]_0 - [s(r)]_0 \in \mathrm{Im}(K_0(i))$ i $r \sim_u p \oplus 1_n \oplus 0_k$, tenim que $[p]_0 - [s(p)]_0 \in \mathrm{Im}(K_0(i))$:

$$\begin{aligned}
[p]_0 - [s(p)]_0 &= [p \oplus 1_n \oplus 0_k]_0 - [s(p) \oplus 1_n \oplus 0_k]_0 \\
&= [r]_0 - [s(r)]_0 \in \mathrm{Im}(K_0(i))
\end{aligned}$$

□

Proposició 3.1.12. *Tota successió escindidament exacta*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \underset{\lambda}{\overset{\phi}{\rightleftarrows}} B \longrightarrow 0$$

de C^*-àlgebres indueix per cada $n \in \mathbb{N}$ la següent successió escindidament exacta

$$0 \longrightarrow K_n'(I) \xrightarrow{K_n'(\varphi)} K_n'(A) \underset{K_n'(\lambda)}{\overset{K_n'(\phi)}{\rightleftarrows}} K_n'(B) \longrightarrow 0$$

Demostració. Sigui A una C^*-àlgebra i I un ideal de A. Es pot veure, fent una prova anàloga a la del Lema 3.1.10, que per demostrar la Proposició és suficient veure que les següents successions són escindidament exactes:

$$0 \longrightarrow K_0(I) \xrightarrow{K_0(i)} K_0(A) \underset{K_0(\lambda)}{\overset{K_0(\pi)}{\rightleftarrows}} K_0(A/I) \longrightarrow 0$$

on i és la inclusió natural, π és el pas al quocient i λ és una secció.

La part restant de la prova és una adaptació de la Proposició 4.3.3. de [9].

Comencem observant que, per la functorialitat de K_0, es dóna la següent igualtat:

$$\mathrm{id}_{K_0(A/I)} = K_0(\pi \circ \lambda) = K_0(\pi) \circ K_0(\lambda)$$

Així doncs, $K_0(\pi)$ és exhaustiva i $K_0(\lambda)$ n'és una secció. Veiem que $K_0(i)$ és injectiva o, equivalentment, que $\ker(K_0(i)) = \{0\}$:

Sigui $[p]_0 - [s(p)]_0 \in \ker(K_0(i))$. Pel Comentari 2.2.10 i la Proposició 2.1.4, sabem que existeixen $n, m \in \mathbb{N}$ tals que es compleix la següent relació

$$p \oplus 1_n \oplus 0_m \sim_u s(p) \oplus 1_n \oplus 0_m = s(p \oplus 1_n \oplus 0_m)$$

Per tant, definint $p' = p \oplus 1_n \oplus 0_m$, podem trobar un unitari $u \in U_\infty(\tilde{A})$ tal que $up'u^* = s(p')$.

Sigui $v = \tilde{\lambda} \circ \tilde{\pi}(u^*)u$. Observem, de manera anàloga a la demostració de la Proposició 3.1.11, que es dóna la següent igualtat:

$$\tilde{\pi}(v) = ((\tilde{\pi} \circ \tilde{\lambda}) \circ \tilde{\pi}(u^*))\tilde{\pi}(u) = \tilde{\pi}(u^*u) = 1 \in M_\infty(\mathbb{C}1_{\tilde{A}})$$

Així doncs, $v \in M_\infty(\tilde{I})$ i és un càlcul directe que $vp'v^* = s(p')$, del que se segueix que $p' \sim_u s(p')$ a $M_\infty(\tilde{I})$ i, en conseqüència, $[p]_0 - [s(p)]_0 = 0$ a $K_0(I)$.

Finalment, l'exactitud a $K_0(A)$ prové de la Proposició 3.1.11. □

Lema 3.1.13. *Donades dues C^*-àlgebres A i B, la següent igualtat es compleix per a tot n natural*

$$K_n'(A \oplus B) \cong K_n'(A) \oplus K_n'(B)$$

Demostració. Per a tot parell de C^*-àlgebres A i B es té que la següent successió és escindidament exacta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i_A} A \oplus B \underset{i_B}{\overset{\pi_B}{\rightleftarrows}} B \longrightarrow 0$$

Per tant, per la Proposició 3.1.12, tenim que la següent successió de grups abelians també és escindidament exacta

$$0 \longrightarrow K_n'(A) \xrightarrow{K_n'(i_A)} K_n'(A \oplus B) \underset{K_n'(i_B)}{\overset{K_n'(\pi_B)}{\rightleftarrows}} K_n'(B) \longrightarrow 0$$

Així doncs, usant la Proposició 4.3. de [6], també coneguda com a Lema d'escisió, tenim que $K_n'(A \oplus B) \cong K_n'(A) \oplus K_n'(B)$, tal i com voliem veure. $\square$

A la Secció 1.1.1 hem vist que $\tilde{A} \cong A \oplus \mathbb{C}$ quan A és unitària. Per tant, el Lema anterior implica que per calcular $K_n'(\tilde{A})$ cal només calcular $K_n'(A)$ i $K_n'(\mathbb{C})$:

$$K_n'(\tilde{A}) \cong K_n'(A) \oplus K_n'(\mathbb{C})$$

En particular, sabem per l'Exemple 2.2.11 que $K_0(\tilde{A}) \cong K_0(A) \oplus \mathbb{Z}$.

Lema 3.1.14. *Per a tota C^*-àlgebra A es compleix $K_n'(M_m(A)) \cong K_n'(A)$ per a tot $n, m \in \mathbb{N}$.*

3.2 Els grups K_n

3.2.1 El grup de Whitehead K_1

En certs aspectes, la construcció de K_1 és més simple que la de K_0, ja que no es requereix la construcció de Grothendieck ni la distinció del cas unitari i no unitari. Tot i així, caldrà donar importància a certs matisos que s'usaran amb freqüència a partir d'ara, com per exemple el Comentari 3.2.5.

Definició 3.2.1. Sigui A una C^*-àlgebra unitària i $U_\infty(A) = \cup_{n\in\mathbb{N}} U_n(A)$. Definim sobre $U_\infty(A)$ la següent operació i relació:

- $u \oplus v = \mathrm{diag}(u, v)$
- Per a $u \in U_n(A)$ i $v \in U_m(A)$, escrivim $u \sim_1 v$ si i només si existeix $N \geq n, m$ tal que $u \oplus 1_{N-n} \sim_h v \oplus 1_{N-m}$ a $U_N(A)$.

De manera anàloga a la construcció de K_0, denotarem per $[u]_1$ a les classes de $U_\infty(\tilde{A})/\sim_1$.

Lema 3.2.2. *Per a tota C^*-àlgebra A, el quocient $U_\infty(\tilde{A})/\sim_1$ té estructura de grup abelià amb la suma $[u]_1 + [v]_1 = [u \oplus v]_1$ i neutre $[1]_1$.*

Demostració. Comencem observant que, per la definició de $\sim_1$, $[1]_1$ és el neutre de $U_\infty(\tilde{A})/\sim_1$. Demostrem les altres propietats en un format breu:

1. *$+$ està ben definida i és abeliana*: Siguin $u \in U_n(A)$ i $v \in U_m(A)$ tals que $[u]_1 = [v]_1$, és a dir, que existeix $N \in \mathbb{N}$ tal que $u \oplus 1_{N-n} \sim_h v \oplus 1_{N-m}$. Llavors, per a tot $w \in U_\infty(\tilde{A})$, tenim les següents igualtats:

$$[u]_1 + [w]_1 = [u \oplus w]_1 = [u \oplus w]_1 + [1_{N-n}]_1 = [w \oplus u]_1 + [1_{N-n}]_1 = [w \oplus u \oplus 1_{N-n}]_1$$
$$[v]_1 + [w]_1 = [v \oplus w]_1 = [v \oplus w]_1 + [1_{N-m}]_1 = [w \oplus v]_1 + [1_{N-m}]_1 = [w \oplus v \oplus 1_{N-m}]_1$$

on la penúltima igualtat de cada fila és conseqüència del Lema 1.2.4.

Per tant, com que $u \oplus 1_{N-n} \sim_h v \oplus 1_{N-m}$, també es té que $w \oplus u \oplus 1_{N-n} \sim_h w \oplus v \oplus 1_{N-m}$ i, en conseqüència, $[u]_1 + [w]_1 = [v]_1 + [w]_1 = [w]_1 + [v]_1$.

2. *Tot element* $[u]_1 \in U_\infty(\tilde{A})/\sim_1$ *té un invers*: Tornant a utilitzar el Lema 1.2.4, sabem que $u \oplus u^* \sim_h 1_M$ amb $M \in \mathbb{N}$ adequat. Per tant, $[u]_1 + [u^*]_1 = [1_M]_1 = 0$.

3. $+$ *és associativa*: Com que $[1_k]_1 = 0$ per a tot $k \in \mathbb{N}$, per a tota tupla $([u]_1, [v]_1, [w]_1)$ d'elements de $U_\infty(\tilde{A})/\sim_1$ podem suposar que els seus representants tenen la mateixa mida. Aplicant altre cop el Lema 1.2.4, és clar que $+$ és associativa.

□

Definició 3.2.3. Donada una C^*-àlgebra A, anomenem $K_1(A)$ al grup abelià $(U_\infty(\tilde{A})/{\sim_1}, +)$.

Tal i com hem fet després de definir el grup $K_0(A)$, comencem fent el càlcul del grup K_1 de $\mathbb{C}$ i $B(H)$.

Exemple 3.2.4. $K_1(\mathbb{C}) \cong 0$ i $K_1(B(H)) \cong 0$ amb H un espai de Hilbert de dimensió infinita i separable

Sabem per un exercici de l'assignatura *Equacions Diferencials I* que per a tota matriu complexa $B \in M_n(\mathbb{C})$ amb $\det(B) \neq 0$, existeix una matriu $A \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $e^A = B$. A més a més, si B és unitària, podem escollir $A = iH$ amb H una matriu hermítica. Així doncs, per a tot element unitari $u \in M_n(\mathbb{C})$ existeix una funció contínua $\delta_u : t \longmapsto e^{tA_u}$ tal que $\delta_u(1) = u$ i $\delta_u(0) = \mathrm{Id}_n$. Per tant, $U_\infty(\mathbb{C})/\sim_1 = \{\mathrm{Id}\}$ i $K_1(\mathbb{C}) \cong 0$, tal i com voliem veure.

Aquesta demostració també es podria haver fet usant l'isomorfisme de $C(\mathrm{sp}(u))$ a $C^*(u, 1)$ i observant que tot element unitari u amb $\mathrm{sp}(u) \neq \mathbb{T}$ està relacionat homotòpicament amb 1. Per veure'n els detalls, consultar [9].

Utilitzant aquest últim fet, i altres resultats que se'n deriven, es pot veure que tot element de $B(H)$ és homotòpic a 1 i, en conseqüència, que $K_1(B(H)) \cong 0$.

Comentari 3.2.5. Destaquem que per a tot element $x \in K_1(A)$ existeix $n \in \mathbb{N}$ i $u \in U_n^+(\tilde{A})$ tal que x es pot escriure com $x = [u]_1$, on $U_n^+(\tilde{A})$ és el conjunt d'unitaris normalitzats de la Definició 1.2.2.

En efecte, com que la projecció π de $\tilde{A}$ cap a $\mathbb{C}$ és un $*$-morfisme, tenim que $\pi(x) \in U_n(\mathbb{C})$ i, per l'exemple anterior, sabem que existeix una homotopia unitària $\phi(t)$ de $\pi(x)$ a 1_n.

Definint u com $\phi(0)^* x = \pi(x)^* x$, és clar que $x \sim_h u$ amb $\pi(u) = \pi(\phi(0)^* x) = \pi(x)^* \pi(x) = 1_n$.

En particular, com a conseqüència del Lema 1.2.4, per a tot element x de $K_1(A)$ es pot trobar un representant $u \in U_n^+(\tilde{A})$ i un unitari $v \in U_k^+(\tilde{A})$ tal que $x = [u]_1$ i $u \oplus v \sim_h 1_{n+k}$ a $U_{n+k}(\tilde{A})$.

Lema 3.2.6. *(Propietat universal de K_1) Sigui A una C^*-àlgebra, G un grup abelià i ϕ una aplicació additiva de $U_\infty(\tilde{A})$ a G tal que $\phi([1_n]_1) = 0$ i $\phi(u) = \phi(v)$ si $u \sim_h v$. Llavors, existeix un únic morfisme δ tal que el següent diagrama és commutatiu:*

$$\begin{tikzcd}
U_\infty(\tilde{A}) \arrow[d, "{[\,]_1}"'] \arrow[dr, "\phi"] & \\
K_1(A) \arrow[r, "\delta"'] & G
\end{tikzcd}$$

Demostració. Cal només observar que, donat δ que compleixi les condicions de l'enunciat, la commutativitat del diagrama implica $\delta([u]_1) = \phi(u)$ per a tot $u \in U_\infty(\tilde{A})$ i, per tant, δ és únic sempre i quan estigui ben definit.

Per veure que δ està ben definit, s'utilitza un argument anàleg a la Proposició 2.2.13. □

Aquest fet ens porta, tal i com també s'ha fet a la construcció de K_0, a donar la següent definició:

Definició 3.2.7. Siguin A i B dues C^*-àlgebres i φ un *-morfisme entre elles. Denotem per $K_1(\varphi)$ l'únic morfisme entre $K_1(A)$ i $K_1(B)$ que fa que el següent diagrama commuti:

$$\begin{tikzcd} U_\infty(\tilde{A}) \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] \arrow[d, "{[\,]_{1,A}}"'] & U_\infty(\tilde{B}) \arrow[d, "{[\,]_{1,B}}"] \\ K_1(A) \arrow[r, "K_1(\varphi)"'] & K_1(B) \end{tikzcd}$$

Lema 3.2.8. *K_1 és un functor covariant de la categoria de C^*-àlgebres a la categoria de grups abelians que porta els zeros als zeros.*

Ens disposem ara a demostrar el primer dels dos teoremes d'isomorfia d'aquest treball. Abans peró, cal demostrar el següent Lema, que també ens sera útil més endavant.

Lema 3.2.9. *Sigui A una C^*-àlgebra i y una homotopia a $U_{2n}^+(\tilde{A})$ que commuta amb $1_n \oplus 0_n$. Llavors, $y = a \oplus b$ amb a i b homotopies a $U_n^+(\tilde{A})$.*

En particular, si y és una homotopia constant, és a dir, un element de $U_{2n}^+(\tilde{A})$, podem escriure $y = a \oplus b$ amb $a, b \in U_n^+(\tilde{A})$.

Demostració. Comencem escrivint y en forma matricial

$$y\colon t \mapsto y_t = \begin{pmatrix} a_t & c_t \\ d_t & b_t \end{pmatrix}$$

on $a_t, b_t, c_t, d_t \in M_n(\tilde{A})$ per tot t.

Com que y commuta amb $1_n \oplus 0_n$, es compleix la següent igualtat per tot $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= (1_n \oplus 0_n)y_t - y_t(1_n \oplus 0_n) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_t & c_t \\ d_t & b_t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_t & c_t \\ d_t & b_t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c_t \\ d_t & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

del que se segueix que $c \equiv 0$ i $d \equiv 0$.

Per tant, com que per a tot $t \in [0,1]$ sabem que y_t és un element unitari amb part escalar 1_{2n}, tenim que $y = a \oplus b$ on $a_t, b_t \in U_n^+(\tilde{A})$.

Recordant que la norma de $M_{2n}(\tilde{A})$ ve donada per la norma de $B(H^{2n})$ per algun espai de Hilbert H, és clar que $a \oplus 0_n$ i $0_n \oplus b$ són assignacions contínues, ja que y ho és i la norma de $B(H^{2n})$ és la norma del suprem.

Així doncs, a i b també són contínues, fet que acaba la prova. $\square$

Teorema 3.2.10. *Per a tota C^*-àlgebra A existeix un isomorfisme θ_A natural entre $K_0(SA)$ i $K_1(A)$, és a dir, tal que per a tot *-morfisme $\varphi : A \to B$ el següent diagrama és commutatiu:*

$$\begin{tikzcd} K_1(A) \arrow[r, "K_1(\varphi)"] \arrow[d, "\theta_A"'] & K_1(B) \arrow[d, "\theta_B"] \\ K_0(SA) \arrow[r, "K_1'(\varphi)"'] & K_0(SB) \end{tikzcd}$$

Demostració. Comencem deduint, de forma heurística, una definició de θ_A:

Sigui $u \in U_n^+(\tilde{A})$. Sabem, per la Proposició 2.3.4, que s'ha de tenir la següent igualtat:

$$\theta_A([u]_1) = [\hat{p}]_0 - [s(\hat{p})]_0$$

per algun $\hat{p} \in P_n(\widetilde{SA})$.

En particular, si $u \in U_0(\tilde{A})$, cal que $\theta_A([u]_1) = 0$ i sabem pel Lema 2.1.4 que existeix $w \in U_{2n}^+(\widetilde{SA})$ tal que $wpw^* = s(p)$ on $p := \hat{p} \oplus 0_n$. Així doncs, si $u \in U_0(\tilde{A})$, hem de poder escriure $\theta_A([u]_1)$ com

$$\theta_A([u]_1) = [wpw^*]_0 - [s(p)]_0 \quad \textit{on} \quad p = \hat{p} \oplus 0_n,\, \hat{p} \in P_n(\widetilde{SA}),\, w \in U_{2n}^+(\widetilde{SA})$$

Ens interessa doncs relaxar les hipòtesis sobre w o p per tal d'obtenir, per a tot $[u]_1 \in K_1(A)$, una expressió de $\theta_A([u]_1)$ similar a l'anterior:

Recordant que $w \in U_{2n}^+(\widetilde{SA})$ si i només si $w : t \mapsto w_t$ és una homotopia a $\widetilde{A}$ tal que $\pi_{\mathbb{C}}(w_t) = 1_{2n}$ i $w_0 = w_1 = 1_{2n}$, prenem w tal que $w_1 \neq 1_{2n}$. D'aquesta manera, $p \nsim_u s(p)$ i l'expressió heurística no serà identicament nul·la.

Per tant, com que volem que θ_A sigui un isomorfisme, volem escollir una homotopia w a $\tilde{A}$ tal que $w_0 = 1_{2n}$ i que sigui diferent per a cada u. Així doncs, és natural escollir w com a una homotopia entre 1_{2n} i $u \oplus u^*$, que sabem que existeix i que compleix totes les propietats anteriorment mencionades pel Lema 1.2.4.

Finalment, com que genèricament es tindrà $w \notin U_{2n}^+(\widetilde{SA})$ i volem $wpw^* \in M_{2n}(\widetilde{SA})$, cal imposar la següent igualtat:

$$\begin{aligned} \hat{p}_0 \oplus 0_n = p_0 = w_0 p_0 w_0^* &= w_1 p_1 w_1^* \\ &= (u \oplus u^*)(\hat{p}_0 \oplus 0_n)(u \oplus u^*)^* = (u\hat{p}_0 u^*) \oplus 0_n \end{aligned}$$

Per tant, prenem $p \equiv 1_n \oplus 0_n =: p_n$, que és la projecció més simple que compleix la igualtat anterior.

Definim, per a tot $u \in U_n^+(\tilde{A})$, l'aplicació θ_A

$$\theta_A([u]_1) = [wp_n w^*]_0 - [p_n]_0$$

on w és una homotopia unitària entre 1_{2n} i $u \oplus u^*$.[2]

Cal doncs veure que θ_A està ben definida, que és morfimse i que és bijectiva, atès que és clar que fa que el diagrama de l'enunciat sigui commutatiu.

La part restant de demostració és una versió adaptada del Teorema 7.2.5 de [11]:

1. *θ_A està ben definida:* Siguin $u \in U_n(\tilde{A})$ i $v \in U_m(\tilde{A})$. Siguin també w i r homotopies de 1_{2n} i 1_{2m} a $u \oplus u^*$ i $v \oplus v^*$ respectivament. Denotarem per $u_N = u \oplus 1_N$ i $v_M = v \oplus 1_M$.

Si $[u]_1 = [v]_1$ o, equivalentment, $u_N \sim_h v_M$ per a uns certs $N, M \in \mathbb{N}$ tals que $n + N = m + M$, existeix una homotopia $\alpha : t \mapsto \alpha_t$ a $U_{n+N}^+(\tilde{A})$ tal que $\alpha_0 = u_N$ i $\alpha_1 = v_M$.

Comencem observant que, tal i com passa a $M_n(\mathbb{C})$, existeixen matrius unitàries que permuten files i columnes. En particular, existeixen matrius unitàries $P_u, P_v \in U_\infty(\mathbb{C})$ tals que es compleixen les següents igualtats:

$$\begin{aligned} P_u\,(u \oplus u^* \oplus 1_N \oplus 1_N)\,P_u^* &= (u \oplus 1_N) \oplus (u^* \oplus 1_N) = u_N \oplus u_N^* \\ P_v\,(v \oplus v^* \oplus 1_M \oplus 1_M)\,P_v^* &= (v \oplus 1_M) \oplus (v^* \oplus 1_M) = v_M \oplus v_M^* \end{aligned}$$

Siguin doncs $w_N = P_u\,(w \oplus 1_{2N})\,P_u^*$ i $r_M = P_v\,(r \oplus 1_{2M})\,P_v^*$. És clar que aquestes aplicacions són homotopies a $U_{2(n+N)}^+(\tilde{A})$ de $1_{2(N+n)}$ a $u_N \oplus u_N^*$ i $v_M \oplus v_M^*$ respectivament.

[2] Aquesta definició de θ_A és molt natural si ja es coneixia l'aplicació índex, tractada al Capítol 4.

A més a més, com que sabem per l'Exemple 3.2.4 que es té $P_u \sim_h \mathrm{Id}$ i $P_v \sim_h \mathrm{Id}$, tenim el següent resultat:

$$\begin{aligned} w_N p_{n+N} w_N^* &\sim_h (w \oplus 1_{2N})\,(P_u^* p_{n+N} P_u)\,(w^* \oplus 1_{2N}) \\ &= (w \oplus 1_{2N})\,(p_n \oplus p_N)\,(w^* \oplus 1_{2N}) = (w p_n w^*) \oplus p_N \\ r_M p_{m+M} r_M^* &\sim_h (r \oplus 1_{2M})\,(P_v^* p_{m+M} P_v)\,(r^* \oplus 1_{2M}) \\ &= (r \oplus 1_{2M})\,(p_m \oplus p_M)\,(r^* \oplus 1_{2M}) = (r p_m r^*) \oplus p_M \end{aligned}$$

Per tant, per veure $\theta_A([u]_1) = [wp_nw^*]_0 - [p_n]_0 = [rp_mr^*]_0 - [p_m]_0 = \theta_A([v]_1)$ cal només comprovar $w_N p_{n+N} w_N^* \sim r_M p_{m+M} r_M^*$, on $n+N = m+N$:

Sigui $X := w_N(u_N^*\alpha \oplus u_N\alpha^*)r_M^*$. Llavors, si $X_t, w_{N,t}, r_{M,t}$ denoten el valor de X, w_N, r_M en un instant $t \in [0,1]$ respectivament, observem que X compleix les següents propietats:

$$\begin{aligned} X_0 &= w_{N,0}(u_N^*\alpha_0 \oplus u_N\alpha_0^*)r_{M,0}^* \\ &= 1_{2(N+n)}(u_N^*u_N \oplus u_Nu_N^*)1_{2(N+n)} = 1_{2(N+n)} \\ X_1 &= w_{N,1}(u_N^*\alpha_1 \oplus u_N\alpha_1^*)r_{M,1}^* \\ &= (u_N \oplus u_N^*)(u_N^*v_M \oplus u_Nv_M^*)(v_M^* \oplus v_M) = 1_{2(N+n)} \\ \pi_{\mathbb{C}}(X_t) &= 1_{2(N+n)} \end{aligned}$$

Per tant, $X \in U^+_{2(N+n)}(\widetilde{SA})$ i tenim la següent igualtat a $P_\infty(\widetilde{SA})$

$$\begin{aligned} X(r_M p_{m+M} r_M^*)X^* &= w_N(u_N^*\alpha \oplus u_N\alpha^*)p_{n+N}(u_N\alpha^* \oplus u_N^*\alpha)w_N^* \\ &= w_N p_{n+N} w_N^* \end{aligned}$$

Així doncs, $w_N p_{n+N} w_N^* \sim_u r_M p_{m+M} r_M^*$ i, en conseqüència, es té $\theta_A([u]_1) = \theta_A([v]_1)$.

2. *θ_A és morfisme:* Donats $u, v \in U^+_\infty(\tilde{A})$, volem veure que $\theta_A([u \oplus v]_1]) = \theta_A([u]_1) + \theta_A([v]_1)$.

De fet, sabem pel punt 1. que és suficient veure l'anterior igualtat per u, v unitaris de la mateixa mida, que anomenarem n.

Per tant, siguin w, r homotopies de $u \oplus u^*$ i $v \oplus v^*$ a 1_{2n} respectivament.

Utilitzant el mateix argument que a l'apartat anterior, existeix una matriu $P \in M_{4n}(\mathbb{C}1_{\tilde{A}})$ tal que

$$P\left((u \oplus u^*) \oplus (v \oplus v^*)\right)P^* = (u \oplus v) \oplus (u^* \oplus v^*)$$

Per tant, $s := P(w \oplus r)P^*$ és una homotopia de $(u \oplus v) \oplus (u^* \oplus v^*)$ a 1_{4n}.

També sabem, tal i com s'ha comentat a l'apartat 1., que $P \sim_h 1_{4n}$, del que se segueix la següent relació

$$\begin{aligned} sp_{2n}s^* &\sim_h (w \oplus r)P^*p_{2n}P(w^* \oplus r^*) \\ &= (w \oplus r)(p_n \oplus p_n)(w^* \oplus r^*) = (wp_nw^*) \oplus (rp_nr^*) \end{aligned}$$

Utilitzant aquesta homotopia és clar que θ_A és un morfisme.

3. *θ_A és injectiva:* Siguin $u, v \in U_n^+(\tilde{A})$ tals que $\theta_A([u]_1) = \theta_A([v]_1)$. Seguint amb la notació del primer apartat, es té la següent igualtat:

$$[wp_nw^*]_0 = [rp_nr^*]_0$$

Per tant, usant la Proposició 2.1.3, sabem que $wp_nw^* \oplus 1_k \sim_u rp_nr^* \oplus 1_k$ per a algun $k \in \mathbb{N}$.

Ara bé, hem vist abans que també es tenen les següents relacions

$$w_N p_{n+N} w_N^* \sim_h (w p_n w^*) \oplus p_N$$
$$r_N p_{n+N} r_N^* \sim_h (r p_n r^*) \oplus p_N$$

per a tot $N \in \mathbb{N}$, del que se segueix que $w_k p_{n+k} w_k^* \sim_u r_k p_{n+k} r_k^*$.

Sigui doncs $x \in U^+_{2(n+k)}(\widetilde{SA})$ tal que

$$x w_k p_{n+k} w_k^* x^* = r_k p_{n+k} r_k^*$$

o, equivalentment, tal que $p_{n+k}\,(w_k^* x^* r_k) = (w_k^* x^* r_k)\,p_{n+k}$.

Definint $y = w_k^* x^* r_k$, podem aplicar el Lema 3.2.9 per obtenir que $y = a \oplus b$ on $a : t \mapsto a_t$ i $b : t \mapsto b_t$ són homotopies a $U^+_{n+k}(\tilde{A})$.

Observem a més que $x_0 = x_1 = 1_{2(n+k)}$ i que els valors de y en $t = 0$ i $t = 1$ són els següents

$$y_0 = w_{k,0}^* x_0^* r_{k,0}^* = 1_{2(n+k)} = 1_{n+k} \oplus 1_{n+k}$$
$$y_1 = w_{k,1}^* x_1^* r_{k,1} = (u_k^* \oplus u_k)\,1_{2(n+k)}\,(v_k \oplus v_k^*) = (u^* v \oplus 1_k) \oplus (u v^* \oplus 1_k)$$

Per tant, $a_0 = 1_{n+k}$ i $a_1 = u^* v \oplus 1_k$ i, en conseqüència, es té que $(u \oplus 1_k)a$ és una homotopia a $U^+_{n+k}(\tilde{A})$ entre $u \oplus 1_k$ i $v \oplus 1_k$. Per la construcció de $K_1(A)$ tenim $[u]_1 = [v]_1$.

Així doncs, si $u, v \in U_\infty(\tilde{A})$ tals que $\theta_A([u]_1) = \theta_A([v]_1)$, podem ampliar tant u com v afegint 1's a les seves diagonals per tal que u i v tinguin la mateixa mida i, com que ja hem vist que θ_A està ben definida, que tinguin la mateixa imatge.

Utilitzant el resultat per a unitaris amb la mateixa mida n, tenim que $[u]_1 = [v_1]$, del que se segueix que θ_A és injectiva.

4. *θ_A és exhaustiva:* Sigui $x \in K_0(SA)$. Sabem pel Corol·lari 2.3.5 que existeixen $n \in \mathbb{N}$ i $q \in P_{2n}(\widetilde{SA})$ tal que $x = [q]_0 - [p_n]_0$.

Com ja s'ha comentat a l'obtenció heurística de θ_A, tenim que $q \in P_{2n}(\widetilde{SA})$ si i només si $q : t \mapsto q_t$ és una homotopia a $P_{2n}(\tilde{A})$ tal que $q_0 = q_1 \in M_{2n}(\mathbb{C})$ i $\pi_{\mathbb{C}}(q_t)$ és constant per tot t. En particular, com que $\pi_{\mathbb{C}}(q) = p_n$, sabem que $q_t \sim_h p_n$ per a tot $t \in [0,1]$ i, per la Proposició 2.1.3, es compleix, per a cada t, la següent igualtat:

$$q_t = w_t p_n w_t^*$$

on $w : t \mapsto w_t$ és una homotopia a $U^+_{2n}(\tilde{A})$ amb $w_0 = 1_{2n}$ donada pel Lema 1.2.6.

Observem que de l'anterior igualtat se segueix que $p_n w_1 = q_1 w_1 = w_1 p_n$ i, tornant a utilitzar el Lema 3.2.9, tenim que $w_1 = u \oplus v$ amb $u, v \in U^+_n(\tilde{A})$.

Sigui r una homotopia a $U^+_{2n}(\tilde{A})$ entre 1_{2n} a $u \oplus u^*$ tal que $\theta_A([u]_1) = [r p_n r^*]_0 - [p_n]_0$. Veurem que es compleix la següent relació:

$$q \sim_0 r p_n r^*$$

Sigui doncs $W = w \oplus w^*$ i $a : t \mapsto a_t$ una homotopia a $U^+_{3n}(\tilde{A})$ de 1_{3n} a $v^* \oplus 1_n \oplus v$, que sabem que existeix pel Lema 1.2.4 i l'existència de matrius que permuten files i columnes.

Com que es compleix $p_n \oplus 0_{2n} = (1_n \oplus a)(p_n \oplus 0_{2n})(1_n \oplus a^*)$, tenim la següent igualtat:

$$\begin{aligned} q \oplus 0_{2n} &= W(p_n \oplus 0_{2n})W^* = W(1_n \oplus a)(p_n \oplus 0_{2n})(1_n \oplus a^*)W^* \\ &= W(1_n \oplus a)(r^* \oplus 1_{2n})(r p_n r^* \oplus 0_{2n})(r \oplus 1_{2n})(1_n \oplus a^*)W^* \end{aligned}$$

Definint $Y := W(1_n \oplus a)(r^* \oplus 1_{2n})$ és una comprovació directa que $Y \in U^+_{4n}(\widetilde{SA})$, del que se segueix que $q \oplus 0_{2n} \sim_u r p_n r^* \oplus 0_{2n}$ i, en conseqüència, es té que $q \sim_0 r p_n r^*$, fet que acaba la prova. □

Donada una C^*-àlgebra A, és usual utilitzar la definició de K_1, i no pas l'isomorfisme donat al Teorema anterior, per calcular explícitament $K_1(A)$. Tot i així, existeixen situacions on utilitzar aquest isomorfisme pot ser profitós:

Exemple 3.2.11. $K_0(C_0(0,1)) \cong 0$

Cal només observar que $C_0((0,1)) = S\mathbb{C}$ i aplicar el Teorema 3.2.10 i l'Exemple 3.2.4.

3.2.2 Els functors K_n

Definició 3.2.12. Per a tota C^*-àlgebra A, definim

$$K_n(A) := K_1(S^{n-1}A)$$

Teorema 3.2.13. *$K_n(A) \cong K_n^{'}(A)$ per a tot $n \in \mathbb{N}$ amb $n > 0$.*

Demostració. Recordem que $K_n(A) = K_1(S^{n-1}A)$ i que $K_n^{'} = K_0(S^nA) = K_0(S(S^{n-1}A))$ per a tot $n \geq 1$.

Per tant, sabem pel Teorema 3.2.10 que existeix un isomorfisme entre $K_1(S^{n-1}A)$ i $K_0(S(S^{n-1}A))$. □

Com ja s'ha comentat al principi d'aquest Capítol, la definició dels functors $K_n^{'}$ no és estàndar. Tot i així, aquesta definició ens ha permés demostrar, gràcies al Lema 3.1.10 i el Teorema 3.2.10, les propietats de K_n comprovant, únicament, les de K_0.

Si, per altra banda, haguessim primer donat la definició de K_n, hagués fet falta demostrar les propietats de K_0 i K_1 per separat, tal i com es fa als Capítols 7 i 8 de [11] i de [9] respectivament.

Resumim doncs les propietats de K_n sense donar cap demostració, ja que són una conseqüència directa de la naturalitat de l'aplicació θ_A del Teorema 3.2.10 i dels isomorfismes del Teorema 3.2.13.

Proposició 3.2.14. *Siguin A i B C^*-àlgebres. Llavors,*

1. Si φ_0 i φ_1 són dos *-morfismes tals que $\varphi_0 \sim_h \varphi_1$, $K_n(\varphi_0) = K_n(\varphi_1)$.
2. K_n és mig exacte
3. K_n és escindidament exacte
4. $K_n(A \oplus B) \cong K_n(A) \oplus K_n(B)$
5. $K_n(M_m(A)) \cong K_n(A)$ per a tot $n, m \in \mathbb{N}$

Finalment, acabem aquesta Subsecció calculant tots els K-grups de la C^*-àlgebra $\mathbb{T}^nA$. Més endavant, quan haguem demostrat la periodicitat de Bott, tornarem a visitar aquest Exemple per donar una millor expressió de $K_1(\mathbb{T}^nA)$.

També farem servir aquest resultat, juntament amb els càlculs dels K-grups de $B(H)$, per la obtenció dels K-grups de l'àlgebra de Toeplitz.

Exemple 3.2.15. $K_m(\mathbb{T}^nA)$ on $\mathbb{T}B = C(\mathbb{T}, B)$ per a tota C^*-àlgebra B

Sigui $i : S(A) \to \mathbb{T}A$ la inclusió natural, $ev_1 : \mathbb{T}A \to A$ l'avaluació en el 1 i $c : A \to \mathbb{T}A$ la inclusió constant. Per a tota C^*-àlgebra A i tot $n \in \mathbb{N}$, la successió

$$0 \longrightarrow S(\mathbb{T}^{n-1}A) \xrightarrow{i} \mathbb{T}^nA \underset{c}{\overset{ev_1}{\rightleftarrows}} \mathbb{T}^{n-1}A \longrightarrow 0$$

és escindidament exacta.

Per tant, per la propietat 3 de la Proposició 3.2.14, es té que la següent successió és escindidament exacta

$$0 \longrightarrow K_m(S(\mathbb{T}^{n-1}A)) \longrightarrow K_m(\mathbb{T}^n A) \rightleftarrows K_m(\mathbb{T}^{n-1}A) \longrightarrow 0$$

Atés que els K-grups són abelians, sabem pel Lema d'escisió i el Teorema 3.2.10 que es compleixen els següents isomorfismes

$$K_m(\mathbb{T}^n A) \cong K_m(\mathbb{T}^{n-1}A) \oplus K_m(S(\mathbb{T}^{n-1}A)) \cong K_m(\mathbb{T}^{n-1}A) \oplus K_{m+1}(\mathbb{T}^{n-1}A)$$

De cara a reduir la notació, definim $NA := \bigoplus_{n=1}^{N} A$ per a tot grup, C^*-àlgebra i $N \in \mathbb{N}$. Comencem calculant $K_m(\mathbb{T}^2 A)$:

$$\begin{aligned} K_m(\mathbb{T}^2 A) &\cong K_m(\mathbb{T}A) \oplus K_{m+1}(\mathbb{T}A) \\ &\cong K_m(A) \oplus K_{m+1}(A) \oplus K_{m+1}(A) \oplus K_{m+2}(A) \end{aligned}$$

Usant la propietat 4 de la Proposició 3.2.14, tenim la següent igualtat

$$\begin{aligned} K_m(\mathbb{T}^2 A) &\cong K_m(A) \oplus 2K_{m+1}(A) \oplus K_{m+2}(A) \\ &\cong K_m(A) \oplus K_{m+1}(2A) \oplus K_{m+2}(A) \end{aligned}$$

Se segueix d'un argument per inducció, i un abús de notació, que $K_m(\mathbb{T}^n A)$ es pot calcular utilitzant una fórmula ja coneguda:

$$x^m(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{i+m}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$K_m(\mathbb{T}^n A) \cong \bigoplus_{i=0}^{n} \binom{n}{i} K_{m+i}(A) \cong \bigoplus_{i=0}^{n} K_{m+i}\left(\binom{n}{i} A\right)$$

En particular, per $A = \mathbb{C}$, $n = 1$ i $m = 0$, obtenim

$$K_0(C(\mathbb{T})) \cong K_0(\mathbb{C}) \oplus K_1(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$$

3.3 Continuïtat de K_0 i K_1

En aquesta secció, de caire informatiu, resumim els resultats més importants que es deriven de la continuïtat dels functors K_0 i K_1.

Proposició 3.3.1. *Sigui*

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \cdots$$

una successió de C^*-àlgebres.

Llavors, tenim que $K_0(\varinjlim A_i) \cong \varinjlim K_0(A_i)$ i $K_1(\varinjlim A_i) \cong \varinjlim K_1(A_i)$ on $\varinjlim A_i$ és el límit inductiu del sistema, definit a l'Apèndix D.

3.3.1 AF-àlgebres

Un dels resultats clàssics de la teoria K per C^*-àlgebres és la classificació d'Elliott de les anomenades AF-àlgebres. Encara que aquesta classificació utilitza conceptes no definits en aquest treball, com per exemple el de grup ordenat, l'anterior Proposició ens permet dur a terme el primer pas: Calcular-ne el grup K_0.

Per més informació sobre la classificació d'Elliott i les proves d'aquesta Subsecció, es pot consultar el Capítol 7 de [9] o l'article original [2].

Teorema 3.3.2 (Proposició 7.1.5. de [9])**.** *Sigui A una C^*-àlgebra de dimensió finita com a $\mathbb{C}$-espai vectorial. Llavors, A és $*$-isomorfa a*

$$M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{n_r}(\mathbb{C})$$

Definició 3.3.3. Sigui A una C^*-àlgebra. Diem que A és AF(aproximadament finit-dimensional) si és el límit inductiu d'una successió de C^*-àlgebres de dimensió finita.

Lema 3.3.4. *Donada una AF-àlgebra A, el seu grup $K_0(A)$ associat és el límit inductiu d'una successió*

$$\mathbb{Z}^{n_1} \xrightarrow{\delta_1} \mathbb{Z}^{n_2} \xrightarrow{\delta_2} \mathbb{Z}^{n_3} \xrightarrow{\delta_3} \cdots$$

Aquests límits s'anomenen grups de dimensió[3].

3.3.2 Àlgebres de rotació irracional

Un altre exemple on s'observa la importància de la continuïtat de K_0 i K_1 és en el càlcul de les àlgebres de rotació irracional, una família de C^*-àlgebres simples i separables que no són AF.

Encara que existeixen diverses definicions equivalents d'àlgebra de rotació irracional, a continuació en donem una de les més simples.

Altres definicions es poden trobar a la Secció 12.3 de [11].

Definició 3.3.5. Sigui B una C^*-àlgebra unitària i $u, v \in U(B)$ tals que $vu = e^{2i\pi\theta}uv$ amb $\theta \in (0,1)$ un nombre irracional. Anomenem àlgebra de rotació irracional, i la denotem per A_θ, a la C^*-àlgebra generada per u i v, és a dir, a $C^*(u,v)$.

Usualment, els K-grups de A_θ s'acostumen a calcular utilitzant l'anomenada successió de Pimsner-Voiculescu, com per exemple es fa a la mateixa secció de [11].

Tot i així, Elliott i Evans van demostrar a [3] que tota àlgebra de rotació irracional és límit inductiu d'una successió de les anomenades *circle algebras*.

Definició 3.3.6. Diem que una C^*-àlgebra A és una *circle algebra* si és $*$-isomorfa a una C^*-àlgebra de la forma $\oplus_{j=1}^r M_{n_j}(C(\mathbb{T}))$.

Més en particular, el que es demostra a [3] és que A_θ és límit inductiu d'un sistema que té per blocs $A_i = M_{n_{i,1}}(C(\mathbb{T})) \oplus M_{n_{i,2}}(C(\mathbb{T}))$.

Per tant, com a conseqüència dels Exemples 3.2.15 i 5.2.16, tenim que $K_0(A_\theta) \cong K_1(A_\theta) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ per tot irracional $\theta \in (0,1)$.

[3]Formalment, tant els grups de dimensió com el seu sistema associat estan *ordenats*. Tot i així, com que en aquest treball no hem definit aquesta noció, la ometem.

Capítol 4

Índex i la successió exacta llarga de la teoria K

Com s'ha comentat a la introducció, un dels objectius principals d'aquest treball és determinar una successió cíclica i exacta de sis termes per a cada successió exacta curta de C^*-àlgebres.

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\phi} B \longrightarrow 0$$

Un dels resultats centrals per la construcció d'aquesta successió és determinar un morfisme δ_1 tal que la següent successió sigui exacta:

$$\begin{tikzcd}
K_1(I) \arrow[r, "K_1(\varphi)"] & K_1(A) \arrow[r, "K_1(\phi)"] & K_1(B) \arrow[d, "\delta_1"] \\
K_0(B) & K_0(A) \arrow[l, "K_0(\phi)"] & K_0(I) \arrow[l, "K_0(\varphi)"]
\end{tikzcd}$$

Aquesta aplicació s'anomena índex i es construeix a continuació.

4.1 Índex

Recordem que, tal i com hem fet a la demostració del Lema 3.1.10, en tota successió exacta i curta podem suposar que el primer terme és un ideal del segon i el tercer el quocient dels dos anteriors.

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} A/I \longrightarrow 0$$

Així doncs, d'ara en endavant treballarem sota aquestes hipótesis, ja que ens permetran donar una definició de l'índex més concisa que les comentades al Lema 4.1.5.

Comentari 4.1.1. Com a conseqüència del Lema 1.2.7 i el Comentari 3.2.5, per a tot element $[u]_1 \in K_1(A/I)$ amb $u \in U_n^+(\widetilde{A/I})$ podem trobar unitaris $v \in U_k^+(\widetilde{A/I})$ i $w \in U_0(M_{n+k}(\tilde{A}))$ tals que $\tilde{\pi}(w) = u \oplus v$.

En particular, es pot pendre u^* com a v.

Definició 4.1.2. Siguin $[u]_1 \in K_1(A/I)$ amb $u \in U_n^+(\widetilde{A/I})$ i $v \in U_k^+(\widetilde{A/I})$ tals que $u \oplus v \sim_h 1_{n+k}$. Definim l'índex com l'aplicació $\delta_1 : K_1(A/I) \to K_0(I)$ tal que

$$\delta_1([u]_1) = [w(1_n \oplus 0_k)w^*]_0 - [1_n \oplus 0_k]_0$$

on w és un *lift* unitari de $u \oplus v$.

Comentari 4.1.3. Sigui $0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\phi} B \longrightarrow 0$ una successió exacta i $\rho_I : \mathrm{Im}(\varphi) \to I$ i $\rho_B : B \to A/\mathrm{Im}(\varphi)$ isomorfismes. Quan només estiguem interessats en les propietats de δ_1 com a aplicació (sense utilitzar-ne la definició explícita), anomenarem δ_1 a $K_0(\rho_I) \circ \delta_1 \circ K_1(\rho_B)$.

Lema 4.1.4. *Per a tota successió exacta* $0 \longrightarrow I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} A/I \longrightarrow 0$, δ_1 *és un morfisme de grups ben definit.*

Demostració. Recordem que, per l'exactitud de la successió d'unitificació, una projecció x és de $P_\infty(\tilde{I})$ si i només si $\tilde{\pi}(x) \in P_\infty(\mathbb{C})$. Per tant, com que per a tot $u \in U_k^+(\widetilde{A/I})$ es tenen les següents igualtats

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi}(w(1_n \oplus 0_k)w^*) &= \tilde{\pi}(w)(1_n \oplus 0_k)\tilde{\pi}(w)^* \\
&= (u \oplus v)(1_n \oplus 0_k)(u^* \oplus v^*) = uu^* = 1_n \\
s(w(1_n \oplus 0_k)w^*) &= s(w)s(1_n \oplus 0_k)s(w)^* \\
&= 1_{n+k}(1_n \oplus 0_k)1_{n+k} = 1_n \oplus 0_k
\end{aligned}$$

tenim que $[w(1_n \oplus 0_k)w^*]_0 \in K_0(\tilde{I})$ i $\delta_1([u]_1) \in K_0(I)$.

La demostració que δ_1 no depèn de w, de les mides n, k i l'elecció de u i v és anàloga a la del Teorema 3.2.10.[1] $\square$

Encara que la definició de δ_1 serà suficient per construir la successió exacta i cíclica de sis termes, és important destacar que aquesta aplicació es pot també definir de dues maneres diferents sense suposar que I és un ideal de A.

Enunciem a continuació el Lema que resumeix aquestes definicions sense donar-ne una demostració, que es pot trobar al Capítol 9 de [9].

Lema 4.1.5. *Sigui* $0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\phi} B \longrightarrow 0$ *una successió exacta i sigui* $u \in U_n(\tilde{B})$. *Tenim les següents igualtats:*

- $\delta_1([u]_1) = [p]_0 - [s(p)]_0$ on $p \in P_{2n}(\tilde{I})$ tal que $\tilde{\varphi}(p) = v(1_n \oplus 0_n)v^*$ i v una isometria parcial tal que $\tilde{\phi}(v) = u \oplus u^*$.
- $\delta_1([u]_1) = [p]_0 - [q]_0$ on $p, q \in P_m(\tilde{I})$ tal que $\tilde{\varphi}(p) = 1_m - vv^*, \tilde{\varphi}(q) = 1_m - v^*v$ i $v \in U_m(\tilde{A})$ tal que $\tilde{\phi}(v) = u \oplus 0_{m-n}$.

Teorema 4.1.6. *Per a tota successió exacta* $0 \longrightarrow I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} A/I \longrightarrow 0$, *la successió*

$$\begin{tikzcd}
K_1(I) \arrow[r, "K_1(i)"] & K_1(A) \arrow[r, "K_1(\pi)"] & K_1(A/I) \arrow[d, "\delta_1"] \\
K_0(A/I) & K_0(A) \arrow[l, "K_0(\pi)"] & K_0(I) \arrow[l, "K_0(i)"]
\end{tikzcd}$$

és exacta.

[1] Per veure la prova en detall consultar [11].

Demostració. Seguim la demostració del Teorema 8.2.1. de [11]:

Comencem destacant que, per la Proposició 3.2.14, cal només provar l'exactitud a $K_0(I)$ i $K_1(A/I)$ o, equivalentment, demostrar les següents inclusions:

1. $\mathrm{Im}(\delta_1) \subset \ker(K_0(i))$
2. $\mathrm{Im}(K_1(\pi)) \subset \ker(\delta_1)$
3. $\ker(\delta_1) \subset \mathrm{Im}(K_1(\pi))$
4. $\ker(K_0(i)) \subset \mathrm{Im}(\delta_1)$

Les demostrem en l'ordre anterior:

1. Sigui $y = \delta_1([v]_1)$ amb $[v]_1 \in K_1(A/I)$. Per la definició de δ_1 tenim la següent igualtat

$$y = [w(1_n \oplus 0_k)w^*]_0 - [1_n \oplus 0_k]_0$$

on w és un ***lift*** unitari de $v \oplus s \sim_h 1_{n+k}$ per a s i k adequats.

En particular, $w \in U^+_{n+k}(\tilde{A})$ i, en conseqüència, $w(1_n \oplus 0_k)w^* \sim_u 1_n \oplus 0_k$ a $U^+_{n+k}(\tilde{A})$. Per tant, tenim $K_0(i)(y) = 0$.

2. Sigui $x = [\tilde{\pi}(u)]_1$ on $u \in U^+_n(\tilde{A})$. Observem que $w = u \oplus u^*$ és un ***lift*** per $\tilde{\pi}$ de $\tilde{\pi}(u) \oplus \tilde{\pi}(u)^* \sim 1_{2n}$. Així doncs, aplicant δ_1 a x obtenim que $\delta_1(x) = 0$. En efecte:

$$\delta_1(x) = [w(1_n \oplus 0_n)w^*]_0 - [1_n \oplus 0_n]_0 = [uu^* \oplus 0_n]_0 - [1_n \oplus 0_n]_0 = 0$$

3. Sigui $u \in U^+_m(\widetilde{A/I})$ tal que $[u]_1 \in \ker(\delta_1)$ i $w \in U^+_{2m}(\tilde{A})$ un ***lift*** de $u \oplus u^*$. Com que $\delta_1([u]_1) = 0$, tenim la següent igualtat a $K_0(I)$:

$$[q]_0 - [1_m \oplus 0_m]_0 = 0$$

on $q = w(1_m \oplus 0_m)w^*$.

Per tant, per la Proposició 2.1.4, existeix $k \in \mathbb{N}$ tal que es compleix la relació

$$q_k := q \oplus 1_k \oplus 0_n \sim_u (1_m \oplus 0_m) \oplus (1_k \oplus 0_n) =: s_k$$

on $n = k + 2m$.

Com és d'esperar, la relació unitària es conserva per pas a l'ortogonal, és a dir, es té $1_{2n} - q_k \sim_u 1_{2n} - s_k$. Així doncs, sabem, per la Proposició 2.1.3, que existeix una isometria parcial $v \in M_{2n}(\tilde{I})$ tal que es compleixen les següents igualtats:

$$\begin{aligned} vv^* &= 1_{2n} - q_k \\ v^*v &= 1_{2n} - s_k \end{aligned}$$

A més a més, utilitzant la igualtat $vv^*v = v$ demostrada al Lema 2.1.1, també es tenen les següents propietats sobre $\tilde{\pi}(v)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}(v) &= \tilde{\pi}(v)\tilde{\pi}(v^*v) =: \tilde{\pi}(v)(0_m \oplus r_1) \\ \tilde{\pi}(v) &= \tilde{\pi}(vv^*)\tilde{\pi}(v) = \tilde{\pi}((1_{2m} - q) \oplus (0_k \oplus 1_n))\tilde{\pi}(v) \\ &= ((1_{2m} - uu^* \oplus 0_m) \oplus (0_k \oplus 1_n))\tilde{\pi}(v) \\ &=: (0_m \oplus r_2)\tilde{\pi}(v) \end{aligned}$$

on $r_1, r_2 \in P_{2n-m}(\mathbb{C}1_{\tilde{A}})$.

Fent servir aquestes dues últimes igualtats és clar que $\tilde{\pi}(v) = 0_m \oplus X$ on $X \in M_{2n-m}(\mathbb{C}1_{\tilde{A}})$.

Per tant, definint $W := qw \oplus v \in U_{2(n+m)}(\tilde{A})$, existeix una matriu complexa U de mida $(2n+m) \times (2n+m)$ tal que $\tilde{\pi}(W) = u \oplus U$. Ho veiem:

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}(W) &= \tilde{\pi}(qw) \oplus \tilde{\pi}(v) = (u \oplus u^*)(1_m \oplus 0_m) \oplus (0_m \oplus X) \\ &= u \oplus (0_m \oplus 0_m \oplus X) =: u \oplus U \end{aligned}$$

D'aquest darrer fet se segueix la següent igualtat a $K_1(A/I)$:

$$K_1(\pi)([W]_1) = [u]_1 + [U]_1$$

Ara bé, com que $U_\infty(\mathbb{C}) \subset U_\infty(\widetilde{A/I})$, sabem per l'exemple 3.2.4 que $U \sim_h 1_{2n+m}$ a $U_\infty(\widetilde{A/I})$. Per tant, tenim que $K_1(\pi)([W]_1) = [u]_1$ i, en conseqüència, que $[u]_1 \in \mathrm{Im}(K_1(\pi))$.

4. Sigui $x = [p]_0 - [1_n \oplus 0_n]_0$ amb $p \in P_{2n}(\tilde{I})$ un element de $\ker(K_0(i))$. Per la Proposició 2.1.4, existeix $k \in \mathbb{N}$ tal que es compleixen les següents relacions a $P_\infty(\tilde{A})$

$$\begin{aligned} p \oplus 1_k &\sim (1_n \oplus 0_n) \oplus 1_k \\ p_k := p \oplus 1_k \oplus 0_m &\sim (1_n \oplus 0_n) \oplus 1_k \oplus 0_m =: s_k \end{aligned}$$

on $m = 3(2n+k)$.

Tal i com també hem fet al Teorema 3.2.10, prenem una matriu complexa $P \in M_{3(2n+k)}(\mathbb{C})$ que commuti les files i les columnes de s_k, és a dir, tal que

$$P s_k P^* = 1_{n+k} \oplus 0_{n+m}$$

Així doncs, definint $q := P p_k P^*$, tenim que $q \sim_h 1_{n+k} \oplus 0_{n+m}$ i, per la Proposició 2.1.3, existeix $w \in U_\infty^+(\tilde{A})$ tal que

$$w^* q w = 1_{n+k} \oplus 0_{n+m}$$

A més a més, observem que $\tilde{\pi}(w)$ commuta amb $1_{n+k} \oplus 0_{n+m}$. En efecte:

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}(w)(1_{n+k} \oplus 0_{n+m})\tilde{\pi}(w^*) &= \tilde{\pi}(q) = \tilde{\pi}(P)\tilde{\pi}(p_k)\tilde{\pi}(P^*) \\ &= P s_k P^* = 1_{n+k} \oplus 0_{n+m} \end{aligned}$$

del que se segueix, pel Lema 3.2.9, que $\tilde{\pi}(w) = a \oplus b$ amb $a \in U_{n+k}^+(\tilde{A})$.

Observem també que $a \oplus b \sim_h 1_{n+k} \oplus 0_{n+m}$ i que w és un *lift* unitari de $a \oplus b$, del que se segueix la següent igualtat

$$\delta_1(\tilde{\pi}(a)) = [w(1_{n+k} \oplus 0_{n+m})w^*]_0 - [1_{n+k} \oplus 0_{n+m}]_0 = [q]_0 - [1_{n+k} \oplus 0_{n+m}]_0 = x$$

Per tant, $x \in \mathrm{Im}(\delta_1)$, fet que acaba la demostració d'aquest apartat i tota la prova. □

Comentari 4.1.7. Donada una successió exacta $0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\phi} B \longrightarrow 0$, les propietats functorials de K_0 i K_1 impliquen que, utilitzant la notació per δ_1 del Comentari 4.1.3, la successió

$$\begin{tikzcd} K_1(I) \arrow[r, "K_1(\varphi)"] & K_1(A) \arrow[r, "K_1(\phi)"] & K_1(B) \arrow[d, "\delta_1"] \\ K_0(B) & K_0(A) \arrow[l, "K_0(\phi)"'] & K_0(I) \arrow[l, "K_0(\varphi)"'] \end{tikzcd}$$

és exacta.

Gràcies al Comentari anterior, podem ara relacionar les successions exactes induïdes per K_0 i K_1, que en un principi podien semblar independents l'una de l'altra.

Encara que la utilitat d'aquest fet no es pot comparar amb la de la successió exacta i cíclica de sis termes definida a la Secció 5.3, comencem a poder calcular K-grups amb més facilitat que abans.

Exemple 4.1.8. $K_0(C_0(\mathbb{R}^2)) \cong K_1(C(\mathbb{T}))$

Sigui $i : C_0(\mathbb{D}\backslash\mathbb{T}) \to C(\mathbb{D})$ la inclusió natural i $r : C(\mathbb{D}) \to C(\mathbb{T})$ l'aplicació restricció. És clar que la successió

$$0 \longrightarrow C_0(\mathbb{D}\backslash\mathbb{T}) \xrightarrow{i} C(\mathbb{D}) \xrightarrow{r} C(\mathbb{T}) \longrightarrow 0$$

és exacta.

Per tant, com a conseqüència del Teorema 4.1.6, es té que l'aplicació $\delta_1 : K_1(C(\mathbb{T})) \to K_0(C_0(\mathbb{D}\backslash\mathbb{T}))$ compleix les següents igualtats:

$$\ker(\delta_1) = \mathrm{Im}(K_1(r))$$
$$\mathrm{Im}(\delta_1) = \ker(K_0(i))$$

Ara bé, usant que $\mathbb{D}$ és contràctil i l'Exemple 3.1.9, sabem que $K_1(C(\mathbb{D})) = 0$. D'aquest fet es segueix que $\ker(\delta_1) = 0$.

També sabem que $K_0(C(\mathbb{D})) \cong \mathbb{Z}$ i recordem que a l'Exemple 3.2.15 ja havíem vist que $K_0(C(\mathbb{T})) \cong \mathbb{Z}$. Per tant, tenim que $K_0(r)$ és injectiu i, en conseqüència, que $\ker(K_0(i)) = K_0(C_0(\mathbb{D}\backslash\mathbb{T}))$.

Així doncs, δ_1 és un isomorfisme i $K_1(C(\mathbb{T})) \cong K_0(C_0(\mathbb{D}\backslash\mathbb{T}))$. Usant que $C_0(\mathbb{D}\backslash\mathbb{T}) \cong C_0(\mathbb{R}^2)$, tenim el resultat que buscàvem.

4.2 Índex de Fredholm

Recordem del Teorema 1.1.3 que tota C^*-àlgebra és isomètricament isomorfa a una sub-C^*-àlgebra de $B(H)$ per algun espai de Hilbert H convenient. En particular, podem calcular a certs elements de $B(H)$ el seu índex de Fredholm, més conegut en la teoria d'equacions integrals.

L'objectiu d'aquesta secció és resumir els resultats que permeten veure que, de fet, l'índex de la teoria K generalitza l'índex de Fredholm. A més a més, també definim dues C^*-àlgebres relacionades amb aquest índex, l'àlgebra de Calkin i la de Toeplitz, de les que calcularem els seus K-grups més endavant, a la Secció 5.3.

De cara a que el treball sigui autocontingut però, comencem donant la definició d'operador de Fredholm i l'enunciat del Teorema d'Atkinson.

Les definicions i resultats no relacionats amb la teoria K són de [8], mentre que la demostració de la Proposició 4.2.5 es pot trobar a la Proposició 9.4.2 de [9].

Definició 4.2.1. Sigui H un espai de Hilbert de dimensió infinita i separable. Direm que un operador $T \in B(H)$ és de Fredholm si $T(H)$ és tancat, $\dim(\ker(T)) < \infty$ i $\dim(\ker(T^*)) < \infty$.

Definim també l'índex de Fredholm de T, que denotarem per $\mathrm{index}(T)$, com la diferència

$$\dim(\ker(T)) - \dim(\ker(T^*))$$

Per tal de reduir la notació, d'ara en endavant H serà sempre un espai de Hilbert, de dimensió infinita i separable, i $\mathcal{K}$ serà l'àlgebra d'operadors compactes definida als Exemples 1.1.2. Notem que $\mathcal{K}$ és un ideal tancat de $B(H)$.

Definició 4.2.2. Definim l'àlgebra de Calkin de H, que denotarem per $Q(H)$, com el quocient $Q(H) = B(H)/\mathcal{K}$.

Comentari 4.2.3. De manera anàloga al càlcul de l'Exemple 2.2.11, es pot comprovar que l'aplicació $K_0(\mathrm{Tr})\colon K_0(\mathcal{K}) \to \mathbb{Z}$ definida per $K_0(\mathrm{Tr})([T]_0) = \dim(T(H))$ és un isomorfisme.

A més a més, com a conseqüència del Lema 3.2.14 i del fet, no trivial, que $\mathcal{K}$ és límit inductiu de matrius sobre $\mathbb{C}$, també sabem que $K_1(\mathcal{K}) \cong K_1(\mathbb{C}) \cong \{0\}$.

Teorema 4.2.4 (Atkinson)**.** *Sigui T un operador de $B(H)$. Llavors, les següents condicions són equivalents:*

- *T és un operador de Fredholm.*
- *La classe de T a $Q(H)$ és invertible.*
- *Existeix un operador $S \in B(H)$ tal que $1 - TS \in \mathcal{K}$ i $1 - ST \in \mathcal{K}$.*

Proposició 4.2.5. *Per a tot operador de Fredholm T, tenim la següent igualtat*

$$\mathrm{index}(T) = (K_0(\mathrm{Tr}) \circ \delta_1)([\pi(T)]_1)$$

on π és la projecció de $B(H)$ a $Q(H)$, $[\pi(T)]_1 = [U]_1$ amb U unitari tal que $U \sim_h \pi(T)$ i $\delta_1$és l'índex associat a la successió exacta següent

$$0 \to \mathcal{K} \xrightarrow{i} B(H) \xrightarrow{\pi} Q(H) \to 0$$

Acabem aquest apartat definint l'àlgebra de Toeplitz i provant-ne una propietat que, tal i com ja s'observa a [9], és de gran importància pel càlcul dels seus K-grups.

Definició 4.2.6. Sigui $S\colon l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})$ l'operador de decalatge sobre $l^2(\mathbb{N})$ definit per

$$S(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (0, x_1, x_2, \cdots)$$

Anomenarem àlgebra de Toeplitz, que denotarem per $\mathcal{T}$, a la sub-C^*-àlgebra més petita de $B(l^2(\mathbb{N}))$ que conté S.

Comentari 4.2.7. De la definició de S, és clar que $S^*(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (x_2, x_3, x_4, \cdots)$.

Destaquem també que $\mathcal{K}$ és un ideal de $\mathcal{T}$. Aquest fet és conseqüència del Teorema 3.3.3. de [8].

Lema 4.2.8. *Sigui S l'operador de decalatge. Llavors, $C^*([S]) = \mathcal{T}/\mathcal{K} \cong C(\mathbb{T})$ on $\mathcal{K}$ és l'espai d'operadors compactes de $l^2(\mathbb{N})$.*

Demostració. Seguim la demostració de l'Exemple 9.4.4 de [9]:

Sigui $x = (x_1, x_2, x_3, \cdots) \in l^2(\mathbb{N})$. Comencem observant la següent igualtat

$$(x_1, 0, 0, \cdots) = (x_1, x_2, x_3, \cdots) - S((x_2, x_3, x_4 \cdots)) = x - SS^*x$$

Per tant, $I - SS^*$ és l'operador que projecta tot element a la seva primera coordenada i, en conseqüència, tenim que $I - SS^* \in \mathcal{K}$.

En particular, la classe $[I - SS^*]$ és zero a $Q(l^2(\mathbb{N}))$ i $[I] = [S][S]^*$, del que se segueix que $[S]$ és un element unitari de $Q(H)$.

Així doncs, si demostrem que $\mathrm{sp}([S]) = \mathbb{T}$ haurem acabat, ja que $C^*(S) = \mathcal{T}$ i sabem pel Teorema 1.1.3 que $C^*(1, S) = C^*(S) \cong C(\mathrm{sp}(S))$. Ho veiem:

Notem que S és un operador de Fredholm, ja que $S(l^2(\mathbb{N}))$ és tancat, $\ker(S) = \{0\}$ i $\ker(S^*) = \langle e_1 \rangle$, on e_1 és el primer vector de la base de $l^2(\mathbb{N})$. Per tant, $\mathrm{index}(S) = -1$ i $\pi(S) = [S]$ no pots ser nul, ja que en cas de ser-ho tindriem $\mathrm{index}(S) = 0$ per la Proposició 4.2.5.

Utilitzant, com a l'Exemple 3.2.4, que tot element unitari no homotòpic a la identitat té espectre $\mathbb{T}$, hem acabat. □

4.3 La successió exacta llarga de la teoria K

De manera anàloga a la teoria K algebraica, tota successió exacta i curta de C^*-àlgebres indueix una successió exacta llarga de K-grups.

Encara que la periodicitat de Bott, demostrada al capítol 5, ens estalvia l'ús d'aquestes successions, en aquest apartat construim per a tot $n \in \mathbb{N}$ una successió exacta que utilitza els functors $K_0, \cdots, K_n$, ja que aquesta ens permet, en alguns casos, entreveure l'isomorfisme $K_0 \cong K_1 \circ S$.

Definició 4.3.1. Sigui $0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\phi} B \longrightarrow 0$ una successió exacta de C^*-àlgebres i δ_n' l'índex associat a la successió

$$0 \longrightarrow S^{n-1}I \xrightarrow{S^{n-1}\varphi} S^{n-1}A \xrightarrow{S^{n-1}\phi} S^{n-1}B \longrightarrow 0$$

Definim $\delta_n := \theta_I^{-1} \circ \delta_n'$ on θ_I és l'isomorfisme de $K_n(I)$ a $K_n'(I)$ establert al Teorema 3.2.13.

Proposició 4.3.2. *Sigui* $0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\phi} B \longrightarrow 0$ *una successió exacta de* C^**-àlgebres. Llavors, la següent successió és exacta*

$$\begin{tikzcd}
K_n(I) \arrow[r, "K_n(\varphi)"] & K_n(A) \arrow[r, "K_n(\phi)"] & K_n(B) \arrow[d, "\delta_n"] \\
K_{n-1}(B) \arrow[d, "\delta_{n-1}"'] & K_{n-1}(A) \arrow[l, "K_{n-1}(\phi)"'] & K_{n-1}(I) \arrow[l, "K_{n-1}(\varphi)"'] \\
\cdots & \cdots & \cdots \arrow[d, "\delta_1"] \\
K_0(B) & K_0(A) \arrow[l, "K_0(\phi)"'] & K_0(I) \arrow[l, "K_0(\varphi)"']
\end{tikzcd}$$

Demostració. Se segueix de la definició de δ_n i del Teorema 4.1.6. $\square$

Capítol 5

La periodicitat de Bott i la successió exacta cíclica de sis termes

En el treball es demostren tres resultats centrals, essent el primer el Teorema 3.2.10, $K_0 \circ S \cong K_1$. En aquest últim capítol es demostren els dos restants.

Aquests resultats són la periodicitat de Bott, $K_1 \circ S \cong K_0$, i la construcció d'una successió exacta i cíclica per a tota successió exacta de C^*-àlgebres mitjançant l'aplicació exponencial, també definida en aquest capítol.

5.1 L'aplicació de Bott

La demostració de la periodicitat de Bott que es dóna en aquest capítol és l'original donada per Atiyah, tal i com es fa en els llibres [9, 11].

Com també es comenta a [1], aquest resultat és vàlid per àlgebres de Banach locals.

De cara a construir i treballar amb l'aplicació de Bott, és convenient donar una definició alternativa de $M_n(\widetilde{SA})$, explicitada en el següent Lema.

Com que el resultat és clar fent servir les definicions d'unitificació i suspensió, ometem la seva demostració.

Lema 5.1.1. *Donada una C^*-àlgebra A, es té el següent isomorfisme*

$$M_n(\widetilde{SA}) \cong \{f \in C(\mathbb{T}, M_n(\tilde{A})) \mid f(1) \in M_n(\mathbb{C}1_{\tilde{A}})\}$$

Si A és unitària, també tenim $M_n(\widetilde{SA}) \cong \{f \in C(\mathbb{T}, M_n(A)) \mid f(1) \in M_n(\mathbb{C}1_A)\}$.

Comentari 5.1.2. D'ara en endavant treballarem amb la nova definició de $M_n(\widetilde{SA})$. En particular, tenim

$$U_n(\widetilde{SA}) = \{f \in C(\mathbb{T}, U_n(\tilde{A})) \mid f(1) \in M_n(\mathbb{C}1_{\tilde{A}})\}$$

i l'anàleg corresponent quan A és unitària.

Definició 5.1.3. Sigui A una C^*-àlgebra unitària i p una projecció de $P_n(A)$. Definim el llaç de la projecció p, que denotem $f_p : \mathbb{T} \to A$, com

$$f_p(z) = zp + (1_n - p)$$

Comentari 5.1.4. Amb la definició de $U_n(\widetilde{SA})$, és clar que $f_p \in U_n(\widetilde{SA})$ per a tot $p \in P_n(A)$.

Així doncs, tenim ara una aplicació de $P_n(A)$ a $U_n(\widetilde{SA})$ i ens agradaria que aquesta induís una aplicació de $K_0(A)$ a $K_1(SA)$. Per veure-ho, utilitzarem la Propietat Universal de $K_0(A)$ definida al Lema 2.2.13.

Proposició 5.1.5. *Per a tota C^*-àlgebra unitària A, l'aplicació $\beta_A\colon K_0(A) \to K_1(SA)$ donada per $\beta_A([p]_0) = [f_p]_1$ està ben definida i és un morfisme.*

Demostració. Sigui $\gamma_A\colon P_\infty(A) \to K_1(A)$ definida per $\gamma_A(p) = [f_p]_1$. Comencem observant que $\gamma_A(p) \oplus \gamma_A(q) = \gamma_A(p \oplus q)$. En efecte, si $p \in P_n(A)$ i $q \in P_m(A)$, tenim la següent igualtat:

$$\begin{aligned}(\gamma_A(p) \oplus \gamma_A(q))(z) &= (f_p \oplus f_q)(z) = (zp + (1_n - p)) \oplus (zq + (1_n - q)) \\ &= z(p \oplus q) + (1_{2n} - p \oplus q) = f_{p\oplus q}(z) = \gamma_A(p \oplus q)(z)\end{aligned}$$

A més a més, donades dues projeccions p, q de $P_n(A)$, és clar que si tenim $p \sim_h q$ a $P_n(A)$, llavors $f_p \sim_h f_q$ a $U_n(\widetilde{SA})$, és a dir, $[f_p]_1 = [f_q]_1$ a $K_1(SA)$.

Per tant, com que $f_0 = 1$, sabem per la Proposició 2.2.13 que β_A és un morfisme de grups ben definit de $K_0(A)$ a $K_1(SA)$. □

Comentari 5.1.6. Sigui $[p]_0 - [q]_0$ un element qualsevol de $K_0(A)$. Llavors, la seva imatge per β_A és

$$\begin{aligned}\beta_A([p]_0 - [q]_0) &= \beta_A([p]_0) - \beta_A([q]_0) = [f_p]_1 - [f_q]_1 \\ &= [f_p]_1 + [f_q^*]_1 = [f_p \oplus f_q^*]_1\end{aligned}$$

Utilitzant el Lema 1.2.4, deduïm que

$$\beta_A([p]_0 - [q]_0) = [f_p \oplus f_q^*]_1 = [f_p f_q^*]_1$$

on $f_p f_q^*$ és la funció producte.

Definició 5.1.7. Donada una C^*-àlgebra A, anomenem aplicació de Bott, que denotem per β_A, al morfisme definit a l'anterior Proposició.

Un cop definida l'aplicació de Bott, comencem observant que β_A és natural. Aquest fet ens permetrà, com a conseqüència del Comentari 5.1.9, reduir-nos al cas unitari.

Lema 5.1.8. *Siguin A i B dues C^*-àlgebres unitàries i $\varphi\colon A \to B$ un $*$-morfisme entre elles. Llavors, el següent diagrama és commutatitu*

$$\begin{tikzcd} K_0(A) \arrow[r, "K_0(\varphi)"] \arrow[d, "\beta_A"'] & K_0(B) \arrow[d, "\beta_B"] \\ K_1(SA) \arrow[r, "K_1(S\varphi)"'] & K_1(SB) \end{tikzcd}$$

Demostració. Sigui p una projecció de $P_n(A)$. Cal només comprovar que les imatges de $[p]_0$ per $\beta_B \circ K_0(\varphi)$ i $K_1(S\varphi) \circ \beta_A$ són iguals:

$$\begin{aligned}(\beta_B \circ K_0(\varphi))([p]_0) &= \beta_B([\varphi(p)]_0) = [f_{\varphi(p)}]_1 \\ (K_1(S\varphi) \circ \beta_A)([p]_0) &= K_1(S\varphi)([f_p]_1) = [\widetilde{S\varphi}(f_p)]_1 = [f_{\tilde{\varphi}(p)}]_1\end{aligned}$$

Per tant, el diagrama és commutatiu. □

Comentari 5.1.9. Donada una C^*-àlgebra A, no necessariament unitària, es pot fer un raonament anàleg al del Lema 2.3.8 per demostrar que l'aplicació $\beta_A\colon K_0(A) \to K_1(SA)$ definida per

$$\beta_A([p]_0 - [s(p)]_0) = [f_p f_{s(p)}^*]_1$$

és l'únic morfisme tal que el següent diagrama és commutatiu

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_0(A) \arrow[r] \arrow[d, "\beta_A"] & K_0(\tilde{A}) \arrow[r, shift left] \arrow[d, "\beta_{\tilde{A}}"] & K_0(\mathbb{C}) \arrow[r] \arrow[l, shift left] \arrow[d, "\beta_{\mathbb{C}}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_1(SA) \arrow[r] & K_1(S\tilde{A}) \arrow[r, shift left] & K_1(S\mathbb{C}) \arrow[r] \arrow[l, shift left] & 0
\end{tikzcd}$$

Per aquest motiu, anomenarem aplicació de Bott al morfisme β_A definit anteriorment quan A no sigui unitària.

5.2 El Teorema de periodicitat de Bott

En aquest apartat ens disposem a demostrar el Teorema de la periodicitat de Bott, enunciat a continuació.

Teorema 5.2.1. *Per a tota C^*-àlgebra A, els grups $K_0(A)$ i $K_1(SA) = K_2(A)$ són isomorfs i l'aplicació de Bott β_A n'és un isomorfisme.*

Com a primera observació, destaquem que, com a conseqüència del Comentari 5.1.9 i el Lema dels Cinc, ens podem reduir al cas A unitari i, per tant, a la definició de β_A per aquest cas.

Com ja hem comentat anteriorment, el resultat i la prova d'aquest Teorema són vàlids en casos més generals que C^*-àlgebres. En particular, no es treballa a $U_n(\widetilde{SA})$, sinó al conjunt $\mathrm{Inv}_0(n)$.

Definició 5.2.2. Sigui A una C^*-àlgebra unitària. Per a cada $n \in \mathbb{N}$ definim

$$\mathrm{Inv}_0^n := C(\mathbb{T}, \mathrm{GL}_0(M_n A))$$

on $\mathrm{GL}_0(M_n A)$ és el subconjunt de $M_n A$ que té per elements les matrius invertibles homotòpiques a 1_n.

Com que la prova que es dona de la periodicitat de Bott es basa en igualtats mòdul homotopia a Inv_0^n, cal primer comprovar que quan es treballa a $U_n(\widetilde{SA})$ les homotopies que obtindrem es poden passar a homotopies d'unitaris. Aquest fet ens l'assegura el següent Lema:

Lema 5.2.3. *Sigui A una C^*-àlgebra unitària i $f, g \in U_n(\widetilde{SA})$. Tenim:*

- $U_n(\widetilde{SA}) \subset \mathrm{Inv}_0^n$
- *Si* $f \sim_h g$ *a* Inv_0^n, *llavors* $f \sim_h g$ *a* $U_n(\widetilde{SA})$

Demostració. Comencem demostrant la inclusió $U_n(\widetilde{SA}) \subset \mathrm{Inv}_0^n$

$$\begin{aligned}
U_n(\widetilde{SA}) &= \{f \in C(\mathbb{T}, U_n(A)) \mid f(1) \in U_n(\mathbb{C}1_A)\} \subset \{f \in C(\mathbb{T}, U_n(A)) \mid f(1) \sim_h 1_n\} \\
&\subset \{f \in C(\mathbb{T}, GL(M_n(A))) \mid f(1) \sim_h 1_n\} = \{f \in C(\mathbb{T}, GL(M_n(A))) \mid f(z) \sim_h 1_n\} \\
&= \mathrm{Inv}_0^n
\end{aligned}$$

on el segon pas és conseqüència de l'Exemple 3.2.4.

Per veure el segon punt, veiem primer, utilitzant el mateix argument que el Lema 11.2.2 de [9], que si $f \sim_h g$ a Inv_0^n, llavors $f \sim_h g$ a $GL(M_n(\widetilde{SA}))$.

En efecte, sigui $t \mapsto f_t$ la homotopia a Inv_0^n on $f_0 = f$ i $f_1 = g$, i sigui també $t \mapsto a_t$ la homotopia entre $a_0 = f(1) \in M_n(\mathbb{C}1_A)$ i $a_1 = g(1) \in M_n(\mathbb{C}1_A)$ a $GL(M_n(\mathbb{C}1_A))$ donada per l'Exemple 3.2.4. Considerem la següent aplicació:

$$t \mapsto g_t(z) := a_t f_t(1)^{-1} f_t(z)$$

Observem que per a tot t tenim que $g(1) = a_t \in M_n(\mathbb{C}1_A)$ i, en conseqüència, que g_t és de $GL(M_n(\widetilde{SA}))$. A més a més, com que f_t i a_t són assignacions contínues, g_t també ho és.

Per tant, g_t és una homotopia entre $g_0 = f$ i $g_1 = g$ a $GL(M_n(\widetilde{SA}))$.

Finalment, sabem pel Lema 1.2.7 que si $f \sim_h g$ a $GL(M_n(\widetilde{SA}))$, llavors $f \sim_h g$ a $U_n(\widetilde{SA})$, fet que acaba la prova. $\square$

A més de treballar sobre Inv_0^n, també utilitzarem la notació de [9] per fer referència als següents conjunts:

Definició 5.2.4. Donada una C^*-àlgebra unitària A, anomenem

- Llaços polinomials de grau m sobre matrius de mida n:

$$\mathrm{Pol}_m^n := \{f \in \mathrm{Inv}_0^n \mid f(z) = \sum_{i=0}^{m} a_i z^i \text{ on } a_0, \cdots, a_m \in M_n(A)\}$$

- Llaços trigonomètrics de grau m sobre matrius de mida n:

$$\mathrm{Trig}_m^n := \{f \in \mathrm{Inv}_0^n \mid f(z) = \sum_{i=-m}^{m} a_i z^i \text{ on } a_{-m}, \cdots, a_m \in M_n(A)\}$$

- Llaços de projeccions de mida n:

$$\mathrm{Proj}^n := \{f_p \mid p \in P_n(A)\}$$

Comentari 5.2.5. Com que Pol_m^n, Trig_m^n i Proj^n són subconjunts de Inv_0^n, sabem pel Lema 5.2.3 que totes les homotopies entre unitaris que puguem construir en aquests es podran transformar en homotopies a $U_n(\widetilde{SA})$.

5.2.1 Exhaustivitat de l'aplicació de Bott

Tant en aquesta Subsecció com en la següent, on seguim l'estructura i les demostracions del Capítol 9 de [11], A serà una C^*-àlgebra unitària.

Lema 5.2.6. *Siguin $n, k \in \mathbb{N}$ tals que $k \leq n$ i $p_k = 1_k \oplus 0_{n-k}$. Llavors, $f_{p_k} \sim_h z^k \cdot 1 \oplus 1_{n-1}$ a $U_n(\widetilde{SA})$.*

Demostració. Comencem observant que $f_1 = z \cdot 1$ i que $f_0 = 1$. Per tant, tenim que

$$f_{p_k} = (f_1 \oplus \cdots \oplus f_1) \oplus f_{0_{n-k}} = (z \cdot 1 \oplus \cdots \oplus z \cdot 1) \oplus 1_{n-k}$$

Com que $z \in \mathbb{T}$, sabem que $z \cdot 1 \in U(\widetilde{SA})$. Així doncs, aplicant el Lema de Whitehead obtenim la homotopia $z \oplus z \sim_h z^2 \oplus 1$ a $U_2(\widetilde{SA})$.

Utilitzant aquest fet iterativament, deduïm que

$$f_{p_k} = (z \cdot 1 \oplus \cdots \oplus z \cdot 1) \oplus 1_{n-k} \sim_h (z \cdot 1 \oplus \cdots \oplus z \cdot 1 \oplus z^2 \cdot 1) \oplus 1_{n+1-k}$$
$$\sim_h \cdots \sim_h z^k \oplus 1_{n-1}$$

on les homotopies són a $U_n(\widetilde{SA})$. □

Lema 5.2.7. *Per tot $n \in \mathbb{N}$ i tot llaç $f \in \mathrm{Inv}_0^n$ existeix un natural $m(n) \in \mathbb{N}$ i un llaç trigonomètrica $h \in \mathrm{Trig}^n_{m(n)}$ tal que h aproxima uniformement f i, a més a més, $f \sim_h h$.*

Demostració. Sigui $n \in \mathbb{N}$ fixat, $f \in \mathrm{Inv}_0^n$ i ϵ un real positiu. Comencem observant que els oberts $O(a) = \{z \in \mathbb{T} \mid \sup_{\mathbb{T}} \|f(z) - a\| < \epsilon\}$ són un recobriment de $\mathbb{T}$ per a tot $\epsilon > 0$.

Com que $\mathbb{T}$ és compacte, existeixen un nombre finit d'elements $a_1, \cdots, a_m \in A$ tals que $\mathbb{T} = \cup_i O(a_i)$. A més a més, com que $\mathbb{T}$ també és una subvarietat de $\mathbb{C}$, sabem que existeix una partició de la unitat $\{\rho_i\}_{i=1}^m$ subordinada al recobriment anterior[1].

Utilitzant ara el Teorema de Weiestrass, sabem que per cada $i \in \{1, \cdots, m\}$ existeix una successió de funcions trigonomètriques $\{\delta_k^i\}_{k \in \mathbb{N}}$ tals que aproximen uniformement a ρ_i.

Per tant, definint la funció $h_k := \sum_{i=1}^m a_i \delta_k^i$, que pertany clarament a Trig^n_m, tenim les següents desigualtats per a un $k \in \mathbb{N}$ suficientment gran:

$$\begin{aligned}
\|f(z) - \sum_{i=1}^m a_i \delta_k^i(z)\| &= \| \left(\sum_{i=1}^m \rho_i(z) \right) f(z) - \sum_{i=1}^m a_i \delta_k^i(z) \| \\
&\leq \| \left(\sum_{i=1}^m \rho_i(z) \right) f(z) - \sum_{i=1}^m a_i \rho_i(z) \| + \| \sum_{i=1}^m a_i \rho_i(z) - \sum_{i=1}^m a_i \delta_k^i(z) \| \\
&\leq \| \sum_{i=1}^m \rho_i(z)(f(z) - a_i) \| + \sum_{i=1}^m \|a_i\| |\rho_i(z) - \delta_k^i(z)| < 2\epsilon
\end{aligned}$$

per tot $z \in \mathbb{T}$.

En efecte, el primer terme de la suma és menor que ϵ perquè cada terme del sumatori és o bé 0 o bé menor que $\rho_i(z)\epsilon$ per la construcció de $O(a)$.

D'altra banda, podem fer el segon terme de la suma tant petit com vulguem ja que $\{\delta_k^i\}_{k \in \mathbb{N}}$ aproximen uniformement a ρ_i.

Aplicant el Lema 1.2.8 per un ϵ prou petit, hem acabat. □

Lema 5.2.8. *Per tots $n, m \in \mathbb{N}$ existeix una funció contínua*

$$\mu_m^n \colon \mathrm{Pol}_m^n \to \mathrm{Pol}_1^{mn+n}$$

tal que $\mu_m^n(f) \sim_h f \oplus 1_{mn}$ a Pol_k^{mn+n} per tot polinomi $f \in \mathrm{Pol}_k^n$ amb $k \leq m$.

Demostració. La prova que s'escriu a continuació és la corresponent al Lema 11.2.5 de [9]:

Sigui $f \in \mathrm{Pol}_m^n$ tal que $f(z) = \sum_{i=0}^m a_i z^i$. Llavors, definim $\mu_m^n(f)$ de la següent manera

$$\mu_m^n(f)(z) := \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{m-1} & a_m \\ -z1_n & 1_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -z1_n & 1_n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -z1_n & 1_n \end{pmatrix} \in M_{m+1}(M_n(A)) \cong M_{mn+n}(A)$$

[1]Recordem que això vol dir que $\mathrm{suport}(\rho_i) \subset O(a_i)$ i que $\sum_i \rho_i(z) = 1$ per tot $z \in \mathbb{T}$.

A més a més, donats dos llaços polinomials $f, f' \in \mathrm{Pol}_m^n$, podem utilitzar la definició de la norma de $M_n(A)$ per obtenir una cota per $\|\mu_m^n(f)(z) - \mu_m^n(f')(z)\|$ és

$$\|\mu_m^n(f)(z) - \mu_m^n(f')(z)\| \leq \sum_{i=0}^{m} \|a_i - a_i'\|$$

En particular, μ_m^n és contínua.

Per tant, queda només comprovar que $\mu_m^n(f)(1) \sim_h 1_{nm+n}$, que $\mu_m^n(f)(z) \in GL_{nm+n}(A)$ i que $\mu_m^n(f) \sim_h f \oplus 1_{mn}$. Per fer-ho, comencem definint la successió $g_k(z) = \sum_{j=k}^m a_j z^{j-k}$ per $k \leq m$ i les dues matrius

$$G = \begin{pmatrix} 1_n & -g_1 & -g_2 & \cdots & -g_m \\ 0 & 1_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1_n \end{pmatrix}, \quad H(z) = \begin{pmatrix} 1_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ z1_n & 1_n & 0 & \cdots & 0 \\ z^2 1_n & z1_n & 1_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ z^m 1_n & z^{m-1} 1_n & z^{m-2} 1_n & \cdots & 1_n \end{pmatrix}$$

Fent ara el producte de matrius, un pot comprovar que

$$G\mu_m^n(f)H = \begin{pmatrix} f & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1_n \end{pmatrix} = f \oplus 1_{mn}$$

D'altra banda, és fàcilment demostrable per inducció que G i $H(z)$ són invertibles i que $G, H(z) \sim_h 1_{nm+n}$ a Pol_m^{mn+n} per tot z.

Així doncs, com que $f(z) \oplus 1_{mn}$ també és invertible per tot z, se segueix que $\mu_m^n(f)(z) \in GL_{nm+n}(A)$ i que

$$f \oplus 1_{mn} = G\mu_m^n(f)H \sim_h \mu_m^n(f)$$

fet que acaba la prova. □

Lema 5.2.9. *Per a tot llaç lineal $f \in \mathrm{Pol}_1^n$ existeix un llaç de projeccions $\gamma(f) \in \mathrm{Proj}^n$ tal que $\gamma(f) \sim_h f$ a Pol_1^n. A més a més, l'assignació $f \mapsto \gamma(f)$ és contínua i $\gamma(f_p) = f_p$ per tot $p \in P_n(A)$.*

Demostració. Recordem que donada una projecció $p \in P_n(A)$, el seu llaç és

$$f_p(z) = 1_n + p(z-1)$$

Sigui $f \in \mathrm{Pol}_1^n$ un llaç lineal de la forma $f(z) = a + bz$ on $a, b \in M_n(A)$. Pel recordatori anterior, ens interessa trobar una homotopia entre f i un llaç de la forma $1_n + c(z-1)$ amb $c \in M_n(A)$ homòtop a una projecció.

Per fer-ho, comencem observant que $f(1) = a + b \sim_h 1_n$ a $GL_n(A)$. Per tant, tenim les següents igualtats

$$\begin{aligned} f^{-1}(1)f(z) &= f^{-1}(1)(a+bz) = f^{-1}(1)(f(1) + b(z-1)) \\ &= 1_n + (f^{-1}b)(z-1) =: 1_n + c(z-1) =: g(z) \end{aligned}$$

i, a més a més, que $f \sim_h g$.

Fent servir eines de càlcul funcional que no hem tractat en aquest treball, es pot veure que $c \sim_h p$ amb $p \in P_n(A)$. D'aquest fet es segueix, d'una manera no trivial, que $f_p \sim_h f$ a Pol_1^n.

Tota la prova en detall es pot trobar al Lema 9.2.7 de [11]. □

Proposició 5.2.10. *L'aplicació de Bott és exhaustiva.*

Demostració. La prova es basa en utilitzar totes les homotopies que hem vist anteriorment:

Sigui $n \in \mathbb{N}$ fixat i $[f]_1 \in K_1(SA)$ tal que $f \in U_n(SA)$. Pel Lema 5.2.7, sabem que existeix un llaç trigonomètric h tal que

$$f \sim_h h \text{ a } \mathrm{Inv}_0^n$$

Recordem que en el Lema 5.2.6 havíem vist que $z^N \oplus 1_M \sim_h f_{p_N}$ per a tot $N \leq M$ i, en conseqüència, que $z^{-N} \oplus 1_M \sim_h f_{p_N}^*$.

Definint $g = hz^N$ on $-N$ és el coeficient de grau menor de h, tenim que g és un llaç polinomial i podem aplicar el l'anterior observació per obtenir que

$$gz^{-N} \oplus 1_M = (g \oplus 1_M)\left(z^{-N} \oplus 1_M\right) \sim_h (g \oplus 1_M)\left(f_{p_N}^*\right) = (g \oplus 1_M)f_{p_N}^*$$

on M és tal que $N \leq M$ i $P_N = 1_N \oplus 0_{M-N}$.

A més a més, utilitzant ara els Lemes 5.2.8 i 5.2.9, tenim la següent homotopia a Inv_0^n:

$$g \oplus 1_{mn} \sim_h \mu_m^n(g) \sim_h \gamma(\mu_m^n(g)) = f_p$$

per a una certa projecció p.

Així doncs, com que $f_p \oplus 1_M = f_p \oplus f_{0_M} = f_{p \oplus 0_M}$ per tot $M \in \mathbb{N}$, tenim la següent cadena d'homotopies a Inv_0^n

$$f \oplus 1_{M'} \sim_h gz^{-N} \oplus 1_{M'} \sim_h (g \oplus 1_{M'})f_{p_N}^* \sim_h (f_p \oplus 1_M)f_{p_N}^* = f_{p \oplus 0_M} f_{p_N}^*$$

on $M' = M + mn$.

Per tant, utilitzant el Lema 5.2.3, se segueix que tot element de $K_1(SA)$ té antiimatge. En efecte,

$$\beta_A([p]_0 - [p_N]_0) = [f_p f_{p_N}^*]_1 = [f \oplus 1_M]_1 = [f]_1$$

□

5.2.2 Injectivitat de l'aplicació de Bott i alguns exemples

La injectivitat de l'aplicació de Bott és molt més curta de provar que la seva exhaustivitat, ja que tenim a la nostra disposició tots les eines desenvolupades a l'apartat anterior. Per poder fer la demostració, només ens fan falta una definició i dos lemes.

Lema 5.2.11. *L'aplicació* $\pi\colon \mathrm{Proj}^n \to P_n(A)$ *definida per* $\pi(f_p) = p$ *és contínua per tot* $n \in \mathbb{N}$.

Demostració. Siguin $n \in \mathbb{N}$ fixat i $p, q \in P_n(A)$. Llavors, tenim la següent igualtat

$$\|f_p - f_q\| = \sup_{z \in \mathbb{T}} \|1_n + p(z-1) - 1_n - q(z-1)\| = \sup_{z \in \mathbb{T}} \|(p-q)(z-1)\| = 2\|p-q\|$$

Per tant, π és contínua. □

Definició 5.2.12. Sigui B una C^*-àlgebra i $\gamma\colon t \mapsto \gamma_t$ una homotopia de B. Diem que γ és poligonal si és lineal en t a trossos.

Lema 5.2.13. *Sigui A una C^*-àlgebra i $x\colon t \mapsto x_t$ una homotopia a Inv_0^n. Llavors, x es pot aproximar uniformement per una homotopia poligonal $y\colon t \mapsto y_t$ amb $y_t \in \mathrm{Trig}_N^n$ per un cert N.*

En particular, si $x_0, x_1 \in \mathrm{Trig}_N^n$, es té que $y_0 = x_0$ i $y_1 = x_1$.

Demostració. Comencem observant que x és uniformement contínua. Per tant, donat un nombre positiu ϵ que acotarem més endavant, existeix un nombre $M \in \mathbb{N}$ tal que es compleix la següent implicació

$$|t - t'| < \frac{1}{M} \implies \|x_t - x_{t'}\| < \frac{\epsilon}{2}$$

Així doncs, donats $t_m = \frac{m}{M}$, sabem pel Lema 5.2.7 que existeixen un nombre $N \in \mathbb{N}$ prou gran i $h_m \in \mathrm{Trig}_N^n$ tals que $\|x_{t_m} - h_m\| < \frac{\epsilon}{2}$ per tot m.

En cas que $x_0, x_1 \in \mathrm{Trig}_N^n$, prenem $h_0 = x_0$ i $h_M = x_1$.

D'altra banda, observem que els camins $\sigma \mapsto (1-\sigma)h_{m-1} + \sigma h_m$ són clarament homotopies de h_{m-1} a h_m. Per tant, definim l'homotopia poligonal y com la concatenació dels camins anteriors.

En particular, observem que $(1-\sigma)h_{m-1}(1) + \sigma h_m(1) \sim_h 1_n$ per tot σ i m.

Finalment, cal només observar que, per ϵ prou petit, y_s és de Trig_N^n per tot $s \in [0,1]$. En efecte, prenent $\epsilon < \min_t \frac{1}{\|x_t^{-1}\|}$ i donat s tal que $y_s = (1-\sigma)h_{m-1} + \sigma h_m$ per un certs σ i m, tenim la següent desigualtat:

$$\begin{aligned}
\|y_s - x_{t_m}\| &= \|(1-\sigma)h_{m-1} + \sigma h_m + (1-\sigma+\sigma)x_{t_m}\| \\
&\leq (1-\sigma)\|h_{m-1} - x_{t_m}\| + \sigma\|h_m - x_{t_m}\| \\
&\leq (1-\sigma)(\|h_{m-1} - x_{t_{m-1}}\| + \|x_{t_{m-1}} - x_{t_m}\|) + \sigma\frac{\epsilon}{2} \\
&\leq (1-\sigma)\epsilon + \sigma\frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon \leq \frac{1}{\|x_{t_m}^{-1}\|}
\end{aligned}$$

del que se segueix, pel Lema 1.2.8, que y_s és invertible.

Com que és clar que $(1-\sigma)h_{m-1}+\sigma h_m$ és sempre un llaç trigonomètric, deduïm que $y_s \in \mathrm{Trig}_N^n$. □

Proposició 5.2.14. *L'aplicació de Bott és injectiva.*

Demostració. Siguin $p, q \in P_n(A)$ tal que $\beta_A([p]_0 - [q]_0) = 0$, és a dir, tals que $[f_p f_q^*]_1 = 0$. Llavors, possiblement afegint uns quants zeros diagonalment a p i q, tenim que $f_p \sim_h f_q$ i, pel Lema anterior, que existeix una homotopia $y_t \in \mathrm{Trig}_N^n$ tal que

$$f_p = y_0 \sim_h y_1 = f_q$$

Multiplicant per z^N, la homotopia anterior passa a ser de llaços polinòmics. Per tant, utilitzant el Lema 5.2.6, tenim que

$$f_{p\oplus p_N} \sim_h z^N f_p \sim_h z^N f_q \sim_h f_{q\oplus p_N}$$

on totes les homotopies continuen sent de llaços polinòmics. Així doncs, podem aplicar ara el Lema 5.2.8 per deduir que hi ha una homotopia de llaços lineals entre $f_{p\oplus p_N}$ i $f_{q\oplus p_N}$.

Utilitzant l'aplicació γ del Lema 5.2.9, deduïm que hi ha una homotopia $t \mapsto f_{p_t}$ de $f_0 = f_{p\oplus p_N}$ a $f_1 = f_{q\oplus p_N}$. Com que sabem pel Lema 5.2.11 que l'assignació $f_p \mapsto p$ és contínua, la homotopia anterior passa a ser una homotopia entre les projeccions $p \oplus p_N$ i $q \oplus p_N$.

Per tant, tenim que $[p \oplus p_N]_0 = [q \oplus p_N]_0$ i, en conseqüència, que $[p]_0 = [q]_0$, fet que acaba la prova. □

Aquesta última Proposició acaba la demostració de la periodicitat de Bott. Aquesta ens permet, en particular, donar millors expressions a K-grups que havíem calculat de forma recursiva, com ara el grup K_1 de $S\mathbb{C}$ i els K-grups de $\mathbb{T}^n A$.

Exemple 5.2.15. El grup K_1 de $S\mathbb{C}$

Tal i com ja s'ha vist a l'Exemple 3.2.11, tenim que $C_0(0,1) = S\mathbb{C}$. Per tant, utilitzant el que ja havíem vist i el Teorema 5.2.1, podem calcular K_0 i K_1 de $S\mathbb{C}$:

$$K_0(C_0(0,1)) = K_0(S\mathbb{C}) \cong K_1(S\mathbb{C}) = 0$$
$$K_1(C_0(0,1)) = K_1(S\mathbb{C}) = K_2(\mathbb{C}) \cong K_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$$

Exemple 5.2.16. Els K-grups de $\mathbb{T}^n A$

A l'Exemple 3.2.15 hem obtingut la següent família d'isomorfismes

$$K_m(\mathbb{T}^n A) \cong \bigoplus_{i=0}^{n} \binom{n}{i} K_{m+i}(A) \cong \bigoplus_{i=0}^{n} K_{m+i}\left(\binom{n}{i} A\right)$$

on la notació $sK_{m+i}(A)$ amb $s \in \mathbb{N}$ indica la suma directa de s còpies de $K_{m+i}(A)$, és a dir, $sK_{m+i}(A) \cong (K_{m+i}(A))^s$.

Utilitzant el Teorema 5.2.1 obtenim, per a tot $m \in \mathbb{N}$, les següents fórmules

$$K_{2m}(\mathbb{T}^n A) \cong K_0(\mathbb{T}^n A) \cong \left(\bigoplus_{i \le n, \text{senar}} \binom{n}{i} K_1(A)\right) \oplus \left(\bigoplus_{i \le n, \text{parell}} \binom{n}{i} K_0(A)\right)$$
$$K_{2m+1}(\mathbb{T}^n A) \cong K_1(\mathbb{T}^n A) \cong \left(\bigoplus_{i \le n, \text{parell}} \binom{n}{i} K_1(A)\right) \oplus \left(\bigoplus_{i \le n, \text{senar}} \binom{n}{i} K_0(A)\right)$$

Com que sabem que $\sum_{i \le n, \text{senar}} \binom{n}{i} = 2^{n-1}$ i que $\sum_{i \le n, \text{parell}} \binom{n}{i} = 2^{n-1}$, obtenim una expressió per $K_0(\mathbb{T}^n A)$ i $K_1(\mathbb{T}^n A)$

$$K_0(\mathbb{T}^n A) \cong \left(2^{n-1} K_0(A)\right) \oplus \left(2^{n-1} K_1(A)\right)$$
$$K_1(\mathbb{T}^n A) \cong \left(2^{n-1} K_0(A)\right) \oplus \left(2^{n-1} K_1(A)\right) \cong K_0(\mathbb{T}^n A)$$

Finalment, si $A = \mathbb{C}$, es té que $K_0(\mathbb{T}^n \mathbb{C}) \cong K_1(\mathbb{T}^n \mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}^{2^{n-1}}$.

5.3 L'aplicació exponencial i la successió exacta cíclica de sis termes

Sigui $0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\phi} B \longrightarrow 0$ una successió exacta de C^*-àlgebres. Recordem que a la Secció 4.3 havíem construït la successió exacta i llarga

$$\begin{tikzcd}
K_2(B) \arrow[d, "\delta_2"] & \cdots \arrow[l, "K_2(\phi)"'] & \cdots \\
K_1(I) \arrow[r, "K_1(\varphi)"] & K_1(A) \arrow[r, "K_1(\phi)"] & K_1(B) \arrow[d, "\delta_1"] \\
K_0(B) & K_0(A) \arrow[l, "K_0(\phi)"'] & K_0(I) \arrow[l, "K_0(\varphi)"']
\end{tikzcd}$$

Utilitzant ara l'isomorfisme $\beta_B : K_0(B) \to K_2(B)$ donat pel Teorema 5.2.1, podem tancar aquest diagrama

$$\begin{tikzcd}
K_2(B) \arrow[d, "\delta_2"] & & \\
K_1(I) \arrow[r, "K_1(\varphi)"] & K_1(A) \arrow[r, "K_1(\phi)"] & K_1(B) \arrow[d, "\delta_1"] \\
K_0(B) \arrow[uu, bend left=60, "\beta_B"] & K_0(A) \arrow[l, "K_0(\phi)"'] & K_0(I) \arrow[l, "K_0(\varphi)"']
\end{tikzcd}$$

Definició 5.3.1. Anomenem aplicació exponencial, que denotarem per δ_0, a la composició $\delta_2 \circ \beta_B : K_0(B) \to K_1(I)$.

Teorema 5.3.2. *Per a tota successió exacta* $0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\phi} B \longrightarrow 0$*, la successió cíclica*

$$\begin{tikzcd}
K_1(I) \arrow[r, "K_1(\varphi)"] & K_1(A) \arrow[r, "K_1(\phi)"] & K_1(B) \arrow[d, "\delta_1"] \\
K_0(B) \arrow[u, "\delta_0"] & K_0(A) \arrow[l, "K_0(\phi)"'] & K_0(I) \arrow[l, "K_0(\varphi)"']
\end{tikzcd}$$

és exacta.

Demostració. Com és usual, ens reduïm, sense pèrdua de generalitat, al cas on $B = A/I$ amb $\phi = \pi$ el pas al quocient i I és un ideal de A amb $\varphi = i$ la inclusió natural.

Pel Teorema 4.1.6, cal només comprovar l'exactitud a $K_0(A/I)$ i $K_1(I)$. Per fer-ho, observem que, pel Lema 5.1.8 i el Teorema 3.2.10, el següent diagrama és commutatiu

$$\begin{tikzcd}
K_0(A) \arrow[r, "K_0(\pi)"] \arrow[d, leftrightarrow, "\beta_A"'] & K_0(A/I) \arrow[r, "\delta_0"] \arrow[d, leftrightarrow, "\beta_{A/I}"'] & K_1(I) \arrow[r, "K_1(i)"] \arrow[d, leftrightarrow, "\theta_I"] & K_1(A) \arrow[d, leftrightarrow, "\theta_A"] \\
K_1(SA) \arrow[r, "K_1(S\pi)"] & K_1(S(A/I)) \arrow[r, "\delta_1"] & K_0(SI) \arrow[r, "K_0(Si)"] & K_0(SA)
\end{tikzcd}$$

Com que les aplicacions de les columnes són totes isomorfismes i la segona fila és exacta pel Teorema 4.1.6, la primera fila també ho és. □

Exemple 5.3.3. L'àlgebra de Calkin d'un espai de Hilbert H de dimensió infinita i separable

Recordem que l'algebra de Calkin es defineix com $Q(H) = B(H)/\mathcal{K}$ on $\mathcal{K}$ és l'àlgebra d'operadors compactes de $B(H)$. Per tant, tenim la següent successió exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{\ i\ } B(H) \xrightarrow{\ \pi\ } Q(H) \longrightarrow 0$$

Pel Teorema 5.3.2, l'anterior successió indueix a la successió exacta cíclica

$$\begin{tikzcd}
K_1(\mathcal{K}) \arrow[r, "K_1(i)"] & K_1(B(H)) \arrow[r, "K_1(\pi)"] & K_1(Q(H)) \arrow[d, "\delta_1"] \\
K_0(Q(H)) \arrow[u, "\delta_0"] & K_0(B(H)) \arrow[l, "K_0(\pi)"'] & K_0(\mathcal{K}) \arrow[l, "K_0(i)"']
\end{tikzcd}$$

Com que sabem pels Exemples 2.2.12 i 3.2.4 que $K_0(B(H)) \cong \{0\}$ i $K_1(B(H)) \cong \{0\}$, les aplicacions δ_0 i δ_1 són isomorfismes.

Utilitzant ara els resultats $K_0(\mathcal{K}) \cong \mathbb{Z}$ i $K_1(\mathcal{K}) \cong \{0\}$ del Comentari 4.2.3, deduïm que $K_0(Q(H)) \cong 0$ i $K_1(Q(H)) \cong \mathbb{Z}$.

Exemple 5.3.4. L'àlgebra de Toeplitz

Sabem pel Lema 4.2.8 que $\mathcal{T}/\mathcal{K} \cong C(\mathbb{T})$. Llavors, donat $\pi\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}/\mathcal{K}$ el pas al quocient i ϕ l'isomorfisme entre $\mathcal{T}/\mathcal{K}$ i $C(\mathbb{T})$, tenim la successió exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{\ i\ } \mathcal{T} \xrightarrow{\ \varphi\ } C(\mathbb{T}) \longrightarrow 0$$

on $\varphi = \phi \circ \pi$.

Tornant a utilitzar el Teorema 5.3.2, sabem pel Comentari 4.2.3 i l'Exemple 5.2.16 que tenim la successió cíclia següent

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "K_1(i)"] & K_1(\mathcal{T}) \arrow[r, "K_1(\varphi)"] & \mathbb{Z} \arrow[d, "\delta_1"] \\
\mathbb{Z} \arrow[u, "\delta_0"] & K_0(\mathcal{T}) \arrow[l, "K_0(\varphi)"'] & \mathbb{Z} \arrow[l, "K_0(i)"']
\end{tikzcd}$$

on les aplicacions estan escrites mòdul composar amb isomorfismes.

En particular, observem que $K_1(\varphi)$ és injectiva i $K_0(\varphi)$ és exhaustiva.

D'altra banda, sabem pel Lema 4.1.5 que

$$\delta_1([\varphi(S)]_1) = [I - SS^*]_0 - [I - SS^*]_0 = -[I - SS^*]_0$$

Per tant, com que sabem pel Lema 4.2.8 que $K_0(\mathrm{Tr})(-[I - SS^*]_0) = -1$ i -1 genera $\mathbb{Z}$, també tenim que δ_1 és bijectiva.

En conseqüència, $\ker(K_0(i)) = \mathbb{Z}$ i $\mathrm{Im}(K_0(i)) = 0$. Com que la successió és exacta a $K_0(\mathcal{T})$, se segueix que $K_0(\varphi)$ és també injectiva i $K_0(\mathcal{T}) \cong \mathbb{Z}$.

Finalment, com que δ_1 és injectiva, tenim que $\mathrm{Im}(K_1(\varphi)) = 0$ però, com que $K_1(\varphi)$ és injectiva, això passa si i només si $K_1(\mathcal{T}) \cong 0$.

A continuació enunciem una Proposició que justifica el nom d'aplicació exponencial. Com que la prova, que es pot trobar a la Proposició 12.2.2 de [9], utilitza eines de càlcul funcional que no hem tractat en aquest treball, la ometem.

Proposició 5.3.5. *Sigui*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\ \varphi\ } A \xrightarrow{\ \phi\ } B \longrightarrow 0$$

una successió exacta. Llavors, donat un element $[p]_0 - [s(p)]_0 \in K_0(B)$ *amb* $p \in P_n(\tilde{B})$*, existeix un element autoadjunt* $a \in M_n(\tilde{A})$ *tal que* $\tilde{\phi}(a) = p$.

Prenent $u \in U_n(\tilde{I})$ *l'únic element tal que* $\tilde{\varphi}(u) = e^{2\pi i a}$*, tenim que* $\delta_0([p]_0 - [s(p)]_0) = [u]_1$.

Comentari 5.3.6. Recordem que hem definit l'exponencial d'un element autoadjunt a la Subsecció 1.2.2.

5.4 Grups abelians finitament generats i *dimension drop algebras*

En aquesta última secció del treball veurem que és possible construir per a tot parell de grups abelians finitament generats, G_0 i G_1, una C^*-àlgebra A tal que $K_0(A) \cong G_0$ i $K_1(A) \cong G_1$.

Aquest resultat és el primer pas per demostrar un Teorema més general, que permet construir una C^*-àlgebra separable tal que els seus K-grups associats siguin qualsevol parell de grups abelians numerables.

Tot i així, per motius d'extensió del treball, ometem la demostració d'aquest darrer Teorema, que es pot trobar al Capítol 13 de [9].

5.4.1 Blocs lliures

De cara a construir una C^*-àlgebra amb les propietats anteriors, comencem recordant el Teorema de classificació de grups abelians finitament generats, que correspon al Teorema 2.1. de [5].

Teorema 5.4.1. *Sigui G un grup abelià finitament generat. Llavors, existeixen constants enteres $n, k > 0$ i $n_1, \cdots, n_k$ tals que*

$$G \cong \mathbb{Z}^n \oplus (\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}) \oplus \cdots \oplus (\mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z})$$

on $\mathbb{Z}^n$ i $(\mathbb{Z}/n_1) \oplus \cdots \oplus (\mathbb{Z}/n_k)$ s'anomenen la part lliure i la part de torsió de G respectivament.

Prenem ara G_0 i G_1 grups abelians finitament generats amb parts lliure i de torsió G_0^L, G_0^T i G_1^L, G_1^T respectivament.

Llavors, com a conseqüència de l'anterior Teorema i les propietats de K_0 i K_1 llistades a la Proposició 3.2.14, per construir una C^*-àlgebra A amb $K_0(A) \cong G_0$ i $K_1(A) \cong G_1$ serà suficient trobar quatre C^*-àlgebres, que anomenarem blocs, tals que

$$K_i(A_i^L) \cong G_i^L, \quad K_i(A_i^T) \cong G_i^T$$

i tots els seus altres K-grups siguin isomorfs a $\{0\}$.

En efecte, definint A com $A = A_0^L \oplus A_1^L \oplus A_0^T \oplus A_1^T$, tindrem que

$$\begin{aligned} K_0(A) &\cong K_0\left(A_0^L\right) \oplus K_0\left(A_1^L\right) \oplus K_0\left(A_0^T\right) \oplus K_0\left(A_1^T\right) \\ &\cong G_0^L \oplus \{0\} \oplus G_0^T \oplus \{0\} \cong G_0 \\ K_1(A) &\cong K_1\left(A_0^L\right) \oplus K_1\left(A_1^L\right) \oplus K_1\left(A_0^T\right) \oplus K_1\left(A_1^T\right) \\ &\cong \{0\} \oplus G_1^L \oplus \{0\} \oplus G_1^T \cong G_1 \end{aligned}$$

D'altra banda, recordem que ja havíem vist als Exemples 2.2.11 i 3.2.4 que $K_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$ i $K_1(\mathbb{C}) \cong \{0\}$. Per tant, si $G_0^L = \mathbb{Z}^{n_0}$ i $G_1^L = \mathbb{Z}^{n_1}$, definim els blocs lliures A_0^L i A_1^L com

$$\begin{aligned} A_0^L &= \mathbb{C} \oplus \overset{n_0}{\cdots} \oplus \mathbb{C} \\ A_1^L &= S\mathbb{C} \oplus \overset{n_1}{\cdots} \oplus S\mathbb{C} \end{aligned}$$

5.4.2 Blocs de torsió

Un cop construits els blocs lliures, ens cal ara trobar una família de C^*-àlgebres D_n tals que $K_0(D_n) \cong \{0\}$ i $K_1(D_n) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Encara que es coneixen varies famílies amb aquesta propietat, com ara les àlgebres de Cuntz definides al Capítol 12 de [11], prenem la família de les *dimension drop algebras*, definides a continuació.

Definició 5.4.2. Per a tot $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, definim D_n com la C^*-àlgebra formada per les funcions contínues $f \in C([0, 1], M_n(\mathbb{C}))$ tals que $f(0) = 0$ i $f(1) \in \mathbb{C}1_n$.

Comentari 5.4.3. Observem que $S(M_n(\mathbb{C}))$ és un ideal de D_n. Per tant, es té la següent successió exacta

$$0 \longrightarrow SM_n(\mathbb{C}) \xrightarrow{i} D_n \xrightarrow{ev_1} \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

on i és la inclusió natural i ev_1 és l'avaluació en el 1.

Així doncs, com a conseqüència del Teorema 5.3.2, la successió

$$\begin{tikzcd}
K_0(SM_n(\mathbb{C})) \arrow[r, "K_0(i)"] & K_0(D_n) \arrow[r, "K_0(ev_1)"] & K_0(\mathbb{C}) \arrow[d, "\delta_0"] \\
K_1(\mathbb{C}) \arrow[u, "\delta_1"] & K_1(D_n) \arrow[l, "K_1(ev_1)"] & K_1(SM_n(\mathbb{C})) \arrow[l, "K_1(i)"]
\end{tikzcd}$$

també és exacta.

Proposició 5.4.4. *Per a cada $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, els grups $K_0(D_n)$ i $K_1(D_n)$ són isomorfs a 0 i $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ respectivament.*

Demostració. Donarem la idea de la demostració, ometent algun detall que es pot trobar a la Secció 13.1 de [9].

Utilitzant l'Observació anterior i els Exemples 2.2.11 i 3.2.4, es té la següent successió exacta

$$0 \longrightarrow K_0(D_n) \xrightarrow{K_0(\pi)} K_0(\mathbb{C}) \xrightarrow{\delta_0} K_1(SM_n(\mathbb{C})) \xrightarrow{K_1(i)} K_1(D_n) \longrightarrow 0$$

Per tant, com que sabem que $K_0(\mathbb{C})$ i $K_1(SM_n(\mathbb{C}))$ són isomorfs a $\mathbb{Z}$, cal només provar que δ_0 amb aquesta identificació és l'aplicació multiplicar per n:

Donada p una projecció unidimensional de $M_n(\mathbb{C})$, sabem que $[p]_0$ és un generador de $K_0(M_n(\mathbb{C}))$. Llavors, definint els elements $u_n, v_n \in U(S(\widetilde{M_n}(\mathbb{C})))$ com

$$\begin{aligned} u_n(t) &= e^{2\pi i t} 1_n \\ v_n(t) &= e^{2\pi i t} p + (1_n - p) \end{aligned}$$

es pot veure que $n[v_n]_1 = [u_n]_1$.

Finalment, utilitzant la fórmula de la Proposició 5.3.5, es dedueix que $\delta_0([1_{\mathbb{C}}]_0) = -[u_n]_1 = -n[v_n]_1$ i, en conseqüència, que δ_0 és injectiva i que és la multiplicació per n.

Per tant, $K_0(D_n) = 0$ i $K_1(D_n) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. □

Concloem aquesta Secció enunciant el Teorema que resumeix els resultats anteriors:

Teorema 5.4.5. *Siguin G_0 i G_1 dos grups abelians finitament generats i $\{n_{i,0}\}_{i=0}^{k}, \{n_{j,1}\}_{j=0}^{m} \subset \mathbb{N}$ tals que*

$$\begin{aligned} G_0 &\cong \mathbb{Z}^{n_{0,0}} \oplus (\mathbb{Z}/n_{1,0}\mathbb{Z}) \oplus \cdots \oplus (\mathbb{Z}/n_{k,0}\mathbb{Z}) \\ G_1 &\cong \mathbb{Z}^{n_{0,1}} \oplus (\mathbb{Z}/n_{1,1}\mathbb{Z}) \oplus \cdots \oplus (\mathbb{Z}/n_{m,1}\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Llavors, definint la C^*-àlgebra $A = A_0^L \oplus A_1^L \oplus A_0^T \oplus A_1^T$ amb

$$\begin{aligned} A_0^L &= \mathbb{C} \oplus \overset{n_{0,0}}{\cdots} \oplus \mathbb{C} \quad , \quad A_1^L = S\mathbb{C} \oplus \overset{n_{0,1}}{\cdots} \oplus S\mathbb{C} \\ A_0^T &= SD_{n_{1,0}} \oplus \cdots \oplus SD_{n_{k,0}} \quad , \quad A_1^T = D_{n_{1,1}} \oplus \cdots \oplus D_{n_{m,1}} \end{aligned}$$

tenim que $K_0(A) \cong G_0$ i $K_1(A) \cong G_1$.

Bibliografia

[1] B. Blackadar. *K-Theory for Operator Algebras.* Mathematical Sciences Research Institute, 1986.

[2] G.A. Elliott. On the Classification of Inductive Limits of Sequences of Semisimple Finite-Dimensional Algebras. *Journal of Algebra*, 38(1):29–44, 1976.

[3] G.A. Elliott and D.E. Evans. The Structure of the Irrational Rotation C^*-Algebra. *Annals of Mathematics*, 138(3):477–501, 1993.

[4] K.R. Goodearl. *Notes on Real and Complex C^*-Algebras.* Shiva Mathematics. Birkhäuser Boston, 1980.

[5] T.W. Hungerford. *Algebra.* Number 73 in Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1996.

[6] S. Mac Lane. *Homology.* Classics in Mathematics. Springer, 1963.

[7] G. J. Murphy. *C^*-Algebras and Operator Theory.* Academic Press, 1990.

[8] G.K. Pedersen. *Analysis Now.* 118. Springer-Verlag New York, 1989.

[9] M. Rørdam, F. Larsen, and N. Laustsen. *An Introduction to K-Theory for C*-Algebras.* Cambridge University Press, 2000.

[10] K. Strung. An Invitation to C^*-algebras. Per aparèixer a Advanced Courses in Mathematics, CRM Barcelona. Birkhäuser, 2018.

[11] N.E. Wegge-Olsen. *K-Theory and C*-Algebras: A Friendly Approach.* Oxford University Press, 1993.

Apèndix A

Construcció de Grothendieck

Donat un monoide commutatiu S, ens interessa construir un grup abelià $G(S)$ que reprodueixi algunes de les propietats que es poden observar en el cas $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Més concretament, volem que es compleixin les següents propietats:

1. Existeix un morfisme de monoides commutatius $g\colon S \to G(S)$, és a dir, que $G(S)$ contingui, en cert sentit, a S.

2. Per a tot morfisme $f\colon S \to P$ amb P un grup abelià, existeix un únic morfisme de grups $f' : G(S) \to P$ tal que $f' \circ g = f$.

El grup $G(S)$ sempre existeix i s'anomena el grup de Grothendieck de S:

Definició. Sigui S un monoide commutatiu. Definim la relació de Grothendieck, en símbols $\sim_G$, com la següent relació sobre $S \times S$:

$$(x_1, y_1) \sim_G (x_2, y_2) \text{ si i només si existeix } z \in S \text{ tal que } x_1 + y_2 + z = x_2 + y_1 + z$$

Lema. *La relació de Grothendieck és d'equivalència.*

Demostració. En comprovem les propietats:

1. Reflexiva: Donat $x \in S$ i $z \in S$ qualssevol, $x + x + z = x + x + z$. Per tant, $(x, x) \sim_G (x, x)$.

2. Simètrica: Com que S és un monoide commutatiu, per tot parell $x, y \in S$ i $z \in S$ es compleix que $x + y + z = y + x + z$. Per tant, $(x, y) \sim_G (y, x)$.

3. Transitiva: Suposem $(x_1, y_1) \sim_G (x_2, y_2)$ i $(x_2, y_2) \sim_G (x_3, y_3)$. Llavors, existeixen elements z_1 i z_2 tals que es compleixen les següents igualtats

$$x_1 + y_2 + z_1 = x_2 + y_1 + z_1$$
$$x_2 + y_3 + z_2 = x_3 + y_2 + z_2$$

Sumant-les, s'obté

$$x_1 + y_3 + (x_2 + y_2 + z_1 + z_2) = x_3 + y_1 + (x_2 + y_2 + z_1 + z_2)$$

del que se segueix que $(x_1, y_1) \sim_G (x_3, y_3)$.

$\square$

Definició. Sigui S un monoide commutatiu. Definim el grup de Grothendieck de S, que denotarem $G(S)$, com el quocient $S \times S/\sim_G$.

Escriurem, momentàniament, els elements de $G(S)$ com $[x, y]_G$

Lema. *Per a tot S monoide abelià amb operació $+$, el grup de Grothendieck és un grup abelià amb l'operació $+$ component a component.*

Demostració. Comencem veient que l'operació està ben definida.

Siguin $x, y, x', y' \in S$ tals que $[x, y]_G = [x', y']_G$ i $[a, b]_G$ qualsevol. Llavors, existeix $z \in S$ tal que es compleix la següent igualtat

$$x + y' + z = y + x' + z$$

Sumant $a + b$ als dos costats tenim

$$(x + a) + (y' + b) + z = (y + b) + (x' + a) + z$$

i, en conseqüència, que $[x + a, y + b]_G = [x' + a, y' + b]_G$.

A més a més, donat un element $[x, y]_G \in G(S)$, es pot veure que $[y, x]_G + [x, y]_G = [0, 0]_G$. Per tant, tot element de $G(S)$ té un invers i és clar que $[0, 0]_G$ és l'únic element neutre d'aquesta operació.

Les altres propietats de grup s'hereten de S. □

Comentari. Com a conseqüència del Lema anterior, escriurem 0 en comptes de $[0, 0]_G$ i denotarem les altres classes d'equivalència $[x, y]_G$ com $x - y$.

Comencem comprovant que es compleix la propietat 1. de les dues llistades al començament d'aquest apèndix:

Definició. Sigui S un monoide commutatiu i $G(S)$ el seu grup de Grothendieck. Anomenarem aplicació de Grothendieck al morfisme $g : S \to G(S)$ tal que $g(x) = [x + y, y]$, on y és un element qualsevol de S.

Comentari. Amb la notació anterior, g és independent de l'elecció de y i, si S és cancel·latiu, tenim que $g(x) = [x + y, y] = (x + y) - y = x$ per a tot $x \in S$. Per tant, g és injectiva si S és cancel·latiu[1].

Amb aquesta definició, podem veure que també es compleix la propietat 2.

Proposició. *Donat S un monoide, A un grup abelià i $f : S \to A$ un morfisme, existeix un únic morfisme de grups $f' : G(S) \to A$ tal que $f' \circ g = f$ on g és l'aplicació de Grothendieck.*

Demostració. Definint $f'(x - y) = f(x) - f(y)$, la demostració és anàloga a la de la Proposició 2.2.13. □

[1] De fet, g és injectiva si i només si S és cancel·latiu.

Apèndix B

Categories i functors

En aquest apèndix es fa una breu i informal introducció a la teoria de categories. Per una introducció més detallada, es pot consultar [5].

Definició. Una categoria $\mathscr{C}$ consta de dues classes, juntament amb una família de funcions:

1. $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$: Una classe d'elements que anomenem objectes.

2. $\mathrm{Mor}(\mathscr{C})$: Una classe de conjunts disjunts, un per cada parella d'elements A, B de $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$. A aquests conjunts els denotem per $\mathrm{Mor}(A, B)$ i anomenem morfismes de A a B als seus elements.

A més a més, per tot triplet d'objectes (A, B, C), existeix una correspondència associativa

$$c\colon \mathrm{Mor}(B, C) \times \mathrm{Mor}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Mor}(A, C)$$

que anomenarem composició i escriurem $c(g, f) =: g \circ f$.

Per cada objecte A també es demana que existeixi un morfisme $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Mor}(A, A)$ tal que per a tot parell d'objectes (B, C) i tots els morfismes $g \in \mathrm{Mor}(A, B)$ i $f \in \mathrm{Mor}(C, A)$ es compleixi $g \circ \mathrm{id}_A = g$ i $\mathrm{id}_A \circ f = f$.

Exemples.

1. Set és una categoria que té com a objectes els conjunts, com a morfismes les aplicacions entre conjunts i la composició usual.

2. Les categories Gr i Ab, que tenen com a objectes els grups i els grups abelians respectivament i els morfismes de grups com a morfismes.

3. La categoria $\mathrm{C}^* - \mathrm{alg}$, amb les C^*-àlgebres com a objectes, els $*$-morfismes com a morfismes i la composició usual.

Definició. Donada una categoria $\mathscr{C}$, direm que $\mathscr{C}'$ és una subcategoria de $\mathscr{C}$ si $\mathscr{C}'$ és una categoria tal que tots els objectes i morfismes de $\mathscr{C}'$ són objectes i morfismes de $\mathscr{C}$, i la composició a $\mathscr{C}'$ és la mateixa que la de $\mathscr{C}$.

Exemple. Ab i C^*-alg són subcategories de Gr.

Una vegada definit el que són les categories, ens interessa estudiar les relacions entre elles. Per fer-ho, es defineix el concepte de functor covariant.

Definició. Siguin $\mathscr{C}$ i $\mathscr{D}$ dues categories. Un functor covariant F està format per un parell de correspondències, que també denotem per F:

1. Una correspondència de $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ a $\mathrm{Ob}(\mathscr{D})$ que porta cada objecte A de $\mathscr{C}$ a un objecte $F(A)$ de $\mathscr{D}$.

2. Una correspondència tal que, per a tot parell d'objectes A, B de $\mathscr{C}$, porta els morfismes g de $\mathrm{Mor}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ a morfismes $F(g)$ de $\mathrm{Mor}(F(A), F(B))$ i que, a més a més, compleix les següents propietats:

   (a) $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_A$ per a tot A objecte de $\mathscr{C}$.

   (b) $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ per a tot parell de morfismes que es puguin composar.

Comentari. Si a la definició anterior es canvia la propietat 2 de manera que F porta morfismes de $\mathrm{Mor}(A, B)$ a $\mathrm{Mor}(F(B), F(A))$ i que $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$, diem que F és un functor contravariant.

Definició. Siguin $\mathscr{C}$ i $\mathscr{D}$ subcategories de Ab. Diem que un functor covariant F de $\mathscr{C}$ a $\mathscr{D}$ porta els zeros als zeros si per a tot parell d'objectes A, B de $\mathscr{C}$ es compleix que $F(0_{A,B}) = 0_{F(A),F(B)}$ on $0_{A,B}$ és l'aplicació que porta tot element de A al zero de B.

De manera anàloga, diem que un functor contravariant porta els zeros als zeros si $F(0_{A,B}) = 0_{F(B),F(A)}$.

Apèndix C

Successions exactes

Encara que el concepte de successió exacta es pot definir en categories més generals, com ara la de mòduls [5], ens centrem en definir successions exactes sobre les estructures tractades en aquest treball.

Definició. Siguin $\{A_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ una família de C^*-àlgebres (resp. de grups abelians) i $\{\varphi_i\colon A_{i-1}\to A_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ $*$-morfismes entre elles (resp. morfismes de grups).

Diem que la successió

$$\cdots \xrightarrow{\varphi_{k-1}} A_{k-1} \xrightarrow{\varphi_k} A_k \xrightarrow{\varphi_{k+1}} A_{k+1} \xrightarrow{\varphi_{k+2}} \cdots$$

és exacta a A_k si $\ker(\varphi_{k+1}) = \operatorname{Im}(\varphi_k)$.

Diem que la successió és exacta si ho és a A_k per tot $k\in\mathbb{Z}$.

Comentari. En el cas que existeixi $k\in\mathbb{N}$ tal que $A_m=\{0\}$ per a tot $m>k$ i $m<0$, escriurem l'anterior successió com

$$0 \longrightarrow A_0 \xrightarrow{\varphi_1} A_1 \xrightarrow{\varphi_2} \cdots \xrightarrow{\varphi_{k-1}} A_{k-1} \xrightarrow{\varphi_k} A_k \longrightarrow 0$$

Observem que aquesta és exacta a A_0 si i només si φ_1 és injectiva i que és exacta a A_k si i només si φ_k és exhaustiva.

Definició. Direm que una successió exacta és curta si té la forma $0\to A\to B\to C\to 0$.

Exemple. Sigui $\varphi_1\colon \mathbb{Z}/2\to\mathbb{Z}/4$ definida per $\varphi_1(1)=2$ i sigui $\varphi_2\colon\mathbb{Z}/4\to\mathbb{Z}/2$ definida per $\varphi_2(1)=1$. Llavors, la successió

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{\varphi_1} \mathbb{Z}/4 \xrightarrow{\varphi_2} \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0$$

és exacta i curta.

Definició. Direm que una successió exacta curta $0\to A\to B\xrightarrow{h} C\to 0$ és escindida si existeix un morfisme secció $s\colon C\to B$, és a dir, si existeix un morfisme s tal que $h\circ s=\mathrm{id}_C$.

Exemple. Siguin A i B dues C^*-àlgebres o dos grups abelians i siguin $i_A\colon A\to A\oplus B$ i $\pi_B\colon A\oplus B\to B$ els *-morfismes inclusió de A i projecció en B respectivament. Llavors, la successió

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i_A} A\oplus B \underset{i_B}{\overset{\pi_B}{\rightleftarrows}} B \longrightarrow 0$$

és escindidament exacta.

Apèndix D

Límits inductius i C^*-àlgebres

Donada una successió d'anells i morfismes

$$R_1 \xrightarrow{\varphi_1} R_2 \xrightarrow{\varphi_2} R_3 \xrightarrow{\varphi_3} \cdots$$

volem fabricar un anell "límit" R.

Més en particular, definint els morfismes $\varphi_{j,i} := \varphi_j \circ \cdots \circ \varphi_i$ per $j \geq i$, ens interessa construir un anell R i morfismes $\varphi_{i,\infty}\colon R_i \to R$ tals que el següent diagrama sigui commutatiu

$$\begin{tikzcd} R_i \arrow[r, "\varphi_{j,i}"] \arrow[dr, "\varphi_{i,\infty}"'] & R_j \arrow[d, "\varphi_{j,\infty}"] \\ & R \end{tikzcd}$$

per a tot $i, j \in \mathbb{N}$ amb $j \geq i$.

A més a més, també estem interessats en que R sigui universal. És a dir, si S és un anell i tenim morfismes $\phi_{i,\infty}\colon R_i \to S$ tals que $\phi_{j,\infty} \circ \varphi_{j,i} = \phi_{i,\infty}$ si $j \geq i$, llavors volem un únic morfisme $\tau\colon R \to S$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} R_i \arrow[d, "\varphi_{i,\infty}"'] \arrow[dr, "\phi_{i,\infty}"] & \\ R \arrow[r, "\tau"'] & S \end{tikzcd}$$

sigui commutatiu per a tot $i \in \mathbb{N}$.

Proposició. *L'anell R, que anomenem límit inductiu (o colímit) del sistema (R_i, φ_i), sempre existeix.*

Demostració. Sigui $R' = \sqcup_{i=1}^{\infty} R_i$ la unió disjunta dels R_i's. Definim sobre R' la relació $\sim$ següent:

Donats $r, s \in R'$ amb $r \in R_i$ i $s \in R_j$, escrivim $r \sim s$ si existeix $k \geq \max\{i, j\}$ tal que $\varphi_{k,i}(r) = \varphi_{k,j}(s)$.

Definint $R := R'/\!\sim$, deixem com a exercici pel lector comprovar que aquest anell compleix les dues propietats que volíem. $\square$

Comentari. Canviant *anells* per *grups abelians* a les anteriors propietats, es pot veure de manera anàloga a l'anterior demostració que sempre existeix el límit inductiu G d'un sistema (G_i, φ_i), on G_i són grups abelians i φ_i són morfismes de grups.

Tant per anells com per grups, escriurem $R = \varinjlim R_i$ i $G = \varinjlim G_i$.

Un cop definit el límit inductiu per anells i grups abelians, volem definir el mateix concepte per C^*-àlgebres. Sigui doncs

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \cdots$$

una successió de C^*-àlgebres i A_0 el límit del sistema (A_i, φ_i) com a anells, també conegut com a límit algebraic.

Comentari. El límit algebraic A_0 és una $*$-àlgebra.

Proposició (Proposició 16.2. de [4]). *Sobre el conjunt A_0 definim la seminorma*

$$\|\bar{x}\| = \inf\{\|\varphi_{ij}(x)\| \mid j \geq i\}, \quad x \in A_i$$

Llavors, prenent l'ideal bilateral $N = \{x \in A \mid \|x\| = 0\}$, tenim que A_0/N és una $*$-àlgebra normada.

Definició. Anomenem límit inductiu, o C^*-àlgebra límit, del sistema (A_i, φ_i) a la compleció de la $*$-àlgebra normada A_0/N.

Escriurem $\lim\limits_{\to} A_i$ per fer referència a aquesta C^*-àlgebra.