
This is the **published version** of the bachelor thesis:

Mora i Abelaira, Gal·la; De Bianchi, Silvia, dir.; Roqué, Xavier, dir. Grete Hermann i els fonaments de la mecànica quàntica. 2021. (1281 Grau en Física)

This version is available at <https://ddd.uab.cat/record/258844>

under the terms of the  license



Universitat Autònoma de Barcelona
Facultat de Ciències
Departament de Física

Treball de Final de Grau en Física

Grete Hermann i els Fonaments de la
Mecànica Quàntica

Gal·la Mora i Abelaira

Supervisat per Dr. Silvia de Bianchi i Dr. Xavier Roqué Rodríguez

15 de gener de 2021

ÍNDEX

1	Introducció.....	7
1.1	Objectius.....	8
1.2	Metodologia.....	9
2	Hermann a Göttingen: context acadèmic i vital de les seves aportacions.....	11
2.1	Göttingen com a centre de ciència i matemàtiques.....	11
2.2	Grete Hermann entre 1933 i 1935.....	14
2.3	Causalitat i determinisme a principis del segle XX.....	20
3	Determinisme i mecànica quàntica (1933).....	23
4	Fonaments filosòfico-naturals de la mecànica quàntica (1935).....	26
4.1	La prova de von Neumann.....	26
4.2	Revisió de la llei de la causalitat.....	31
5	Conclusions.....	34
	Bibliografia.....	36
	Annex – Correspondència.....	38
	Grete Hermann a Paul A. M. Dirac (9.11.1933).....	38
	Gustav Heckmann a Grete Hermann (17.12.1933).....	39
	Grete Hermann a la seva mare [Auguste Hermann (née. Leipoldt)] (5.3.1934).....	40
	Grete Hermann a la seva mare [Auguste Hermann (née. Leipoldt)] (16.6.1934).....	41

1 INTRODUCCIÓ

La figura de Grete Hermann (1901–1984) ha esdevingut recentment un dels focus d'interès de la història i la filosofia de la física, amb la publicació de dos volums dedicats a la seva obra i la seva correspondència: *Grete Hermann – Between Physics and Philosophy* (Crull & Bacciagaluppi, 2017) i *Grete Henry-Hermann: Philosophie–Mathematik–Quantenmechanik* (Herrmann, 2019)¹. Hermann es va formar i va treballar en matemàtiques, física i filosofia, i especialment en la intersecció dels tres àmbits. La seva tesi doctoral, supervisada per Emmy Noether, constitueix la base de l'àlgebra computacional, i els resultats que hi va provar encara s'utilitzen en les matemàtiques modernes. Tanmateix, l'atenció que ha rebut Hermann es deu principalment a la seva contribució als fonaments de la mecànica quàntica. Als anys 1930, Hermann va escriure dos articles on argumentava que la prova de la no existència de variables ocultes de John von Neumann (1955)² contenia un error fonamental. Aquesta remarca va ser ignorada fins que, tres dècades més tard, John Bell va assenyalar el mateix error (Bell, 1966).

Les anàlisis posteriors dels treballs de von Neumann i Bell, emmarcades en el debat sobre variables ocultes, han recuperat les observacions de Hermann. El punt de vista més comú, construït per (Jammer, 1974) i consolidat a (Mermin, 1993), considera que, en efecte, la prova de von Neumann conté un error evident, detectat per Hermann i Bell. Però una interpretació possiblement més acurada d'aquesta demostració ha donat lloc al relat de (Bub, 2011) i (Dieks, 2017), que argumenten que la demostració de von Neumann és correcta pel que fa al tipus concret de variables ocultes que considerava.

No obstant, la contribució física i filosòfica de Hermann va més enllà d'aquesta remarca sobre el text de von Neumann. Com a filòsofa neo-Kantiana, el seu objectiu era conciliar la teoria quàntica amb l'idealisme transcendental de Kant. Més concretament, va defensar la llei de la causalitat, que tractava com a un element essencial de qualsevol teoria física. Inicialment, Hermann va associar el concepte de predictibilitat de resultats de mesura a la llei de la causalitat;

¹ Kay Herrmann (amb dues *r*) no té cap relació amb Grete Hermann.

² També s'ha consultat l'original en alemany (von Neumann, 1932).

de manera que, si el primer es perdia, aquesta llei deixava de ser vàlida. Com que les variables ocultes podrien contenir la informació necessària per garantir la predictibilitat dels resultats de mesura, Hermann va defensar d'aquest tipus de teoria. Així, l'objectiu del seu primer article va ser provar que diferents formulacions de la mecànica quàntica (concretament les de W. Heisenberg, P. A. M. Dirac i J. von Neumann) no exclouïen l'existència de variables ocultes. És en aquest context que Hermann va trobar el possible error de von Neumann.

Tot i això, l'enfoc de Hermann va canviar substancialment després d'una estada a Leipzig i de nombroses discussions amb físics com Heisenberg i C. F. von Weizsäcker. En el seu segon article, va trobar una manera de garantir la causalitat en el marc de la teoria quàntica modificant la noció de causalitat. En comptes de buscar la predictibilitat dins la mecànica quàntica per mitjà de variables ocultes, Hermann va acceptar que el formalisme quàntic era complet, i, en canvi, va deslligar la noció de predictibilitat de la de causalitat. En efecte, va proposar una nova definició de causalitat que, com va demostrar, és compatible amb els resultats de la mecànica quàntica.

1.1 Objectius

En aquest treball s'analitza la refutació que va fer Hermann de la prova de John von Neumann sobre la no existència de variables ocultes. S'estudia principalment la segona versió d'aquesta refutació, que l'autora va incloure al seu segon article. També s'investiga l'evolució del raonament de Hermann pel que fa a la seva concepció de la llei de la causalitat. Finalment, es mostra que els arguments de Hermann segueixen vigents en el debat actual sobre la causalitat i la mecànica quàntica.

Per tal d'entendre la contribució de Hermann, es contextualitza l'autora com a personatge històric dins el panorama científic de principis del segle XX a Alemanya. Concretament, es fa referència a la situació de les dones que es dedicaven a la física i a les matemàtiques. A més, s'emmarquen les idees de Hermann en el context filosòfic del neo-Kantisme, per situar el seu punt de vista.

Amb relació a l'evolució de la noció de causalitat, que marca el fil conductor de l'argument de Hermann, resulta essencial reconstruir la història acadèmica de l'autora a partir de la seva correspondència entre els anys 1933 i 1935, en què va escriure, respectivament, els dos articles rellevants per a aquest treball³.

1.2 Metodologia

Aquest és un treball de física i història. La metodologia que s'ha seguit en la seva elaboració conté una etapa de “treball de camp”, que inclou la definició del tema, l'anàlisi bibliogràfica i la traducció de correspondència.

La definició del tema és una fase de recerca i lectura d'articles i llibres sobre l'autora i el seu context històric i filosòfic. A partir d'aquesta lectura, es destria una aportació rellevant de Hermann a la mecànica quàntica—la seva refutació de la prova de von Neumann—i també la motivació de l'autora—conciliar la llei de la causalitat i la mecànica quàntica—que dóna sentit al conjunt del seu treball.

Una vegada acotada la part de la vida i obra de Grete Hermann que es vol estudiar, es passa a una segona fase de recerca bibliogràfica que consisteix a seleccionar la bibliografia específica sobre els aspectes que es volen tractar, així com la correspondència que cal tenir en compte. L'objectiu és adquirir una visió global del que ja s'ha investigat, per tal de conèixer els punts de vista principals sobre els articles de Hermann rellevants per al treball.

³ Aquests articles, que donen nom a la tercera i quarta secció d'aquest treball, es troben traduïts a l'anglès al volum esmentat anteriorment (Crull & Bacciagaluppi, 2017). El primer es titula *Determinism and Quantum Mechanics* (Hermann, 2017a) (original en alemany *Determinismus und Quantenmechanik*, publicat com a (Hermann, 2019) dins el volum de Kay Herrmann (2019)). El segon es titula *Natural-Philosophical Foundations of Quantum Mechanics* (Hermann, 2017b) (original en alemany *Die naturphilosophischen Grundlagen der Quantenmechanik* (Hermann, 1935a), també consultable a (Herrmann, 2019)).

La correspondència original de Hermann és en alemany i la major part encara no ha estat traduïda; tanmateix, resulta essencial per entendre el desenvolupament de les seves idees, el procés de creació dels seus treballs, i la seva relació amb la comunitat científica. Les traduccions s'han fet primer de l'alemany a l'anglès i després de l'anglès al català, i han estat revisades pels tutors del treball.

Aquesta feina permet reunir el material que s'analitza i que constitueix el nucli de la memòria.

2 HERMANN A GÖTTINGEN: CONTEXT ACADÈMIC I VITAL DE LES SEVES APORTACIONS

2.1 Göttingen com a centre de ciència i matemàtiques

La Universitat de Göttingen va jugar un paper primordial a la carrera de Grete Hermann. En aquesta secció es narra l'evolució d'aquesta universitat durant els anys previs a que Hermann s'hi matriculés, amb l'objectiu de justificar l'aparició dels treballs de l'autora dins d'un context acadèmic favorable que portava temps consolidant-se. La referència principal que s'ha consultat ha estat el llibre *Iris Runge: A life at the crossroads of mathematics, science and history*, de Tobies Renate (2012). El llibre tracta sobre la matemàtica Iris Runge, que va estudiar a Göttingen a principis del segle XX. La descripció que s'hi troba sobre la ciència a la Universitat de Göttingen, i també sobre la situació de les dones que estudiaven ciència a Alemanya durant aquell temps, és extrapolable a altres universitats, com ara la de Leipzig, també rellevant per a la trajectòria de Hermann.

La reconversió de la Universitat de Göttingen en el centre de referència acadèmic que havia estat en temps anteriors va ser promoguda pel matemàtic Felix Klein (1849-1925), quan ja era reconegut pels seus treballs en Geometria, concretament des del 1886 i fins la seva jubilació al 1913. Anys enrere, havien estudiat a Göttingen científics i matemàtics que han marcat el desenvolupament d'aquestes disciplines, com ara C. F. Gauss, B. Riemann i P. G. Dirichlet (Tobies, 2012, pp. 43, 44). Mitjançant una gestió estratègica de finançament provinent del govern i de la indústria, Klein va atraure científics i matemàtics rellevants, com ara David Hilbert (1862-1943) (Ídem, pp. 46, 47). Així, el renom de Göttingen va anar augmentant tant a nivell nacional com internacional fins al seu declivi a partir de l'any 1933. Amb aquest creixement, la Universitat de Göttingen es va convertir en el centre on es completaven més doctorats en matemàtiques i també en altres disciplines científiques a Alemanya (Ídem, pp. 57, 58). Un dels atractius principals de la universitat era que s'hi promovia la interdisciplinarietat entre diferents branques de la ciència, i que s'hi feien grans esforços per desenvolupar les matemàtiques aplicades. L'any 1892 Klein va crear, juntament amb Heinrich Weber (1842-1913), la Societat Matemàtica de Göttingen, que agrupava matemàtics, físics i astrònoms. El

mateix any va reestructurar l'Acadèmia de Ciències de Göttingen. A més, Klein va reformar el pla d'estudis per tal de coordinar física amb matemàtiques i introduir les matemàtiques aplicades (Ídem, pp. 47, 48).

Hilbert havia estudiat a la Universitat de Königsberg, on va conèixer Hermann Minkowski (1864-1909), també matemàtic, conegut per la seva formulació de la relativitat especial. Des del 1885 i fins que es va jubilar, l'any 1930, Hilbert va ser catedràtic a Göttingen. Allà va fer la major part de la seva notable contribució en matemàtiques i física. Va tenir John von Neumann com a assistent i entre els seus estudiants de doctorat hi va haver Felix Bernstein, Hermann Weyl i Richard Courant. Entre el 1902 i el 1939 va dirigir la revista matemàtica de referència *Mathematische Annalen*. Una de les proves de la interdisciplinarietat que regnava a Göttingen era el fet que Hilbert, centrat a aplicar les matemàtiques a la física teòrica, fos encarregat de fer classes de física; mentre que el físic Woldemar Voigt (1850-1919), que necessàriament dominava les matemàtiques, feia les classes d'anàlisi vectorial. Hilbert va aconseguir que la universitat oferís una càtedra en matemàtiques a Minkowski, que la va acceptar (Ídem, pp. 55, 57).

Una altra important figura intel·lectual de Göttingen va ser Leonard Nelson (1882-1927). Havia estudiat matemàtiques i filosofia a Heidelberg i a Berlín, i va defensar la seva tesi doctoral l'any 1904 a Göttingen sota la supervisió del filòsof Julius Baumann. Els seus punts de vista polèmics com a filòsof neo-Kantià li van provocar enfrontaments amb filòsofs i simpaties amb matemàtics, concretament amb Hilbert. Ensenyava amb el rigor característic de les matemàtiques i es va preocupar per la fonamentació de les matemàtiques, fet que el va portar a buscar arguments filosòfics que recolzessin el sistema axiomàtic de Hilbert (Ídem, pp. 92, 93). Però les seves discrepàncies amb la resta de filòsofs de la facultat, li van ocasionar molts problemes per aconseguir un càrrec dins la universitat. D'altra banda, va desenvolupar una ètica que tenia marcades implicacions en la vida quotidiana (exigia als seus seguidors el vegetarianisme, la renúncia a l'església i la implicació en política, per exemple). Nelson va influir considerablement en Grete Hermann, que va ser la seva assistent durant un temps, però Hermann va mantenir sempre una certa distància amb les idees de Nelson perquè volia conservar la seva independència intel·lectual (Hansen-Schaberg, 2017, pp. 7, 8).

Com a conseqüència d'un viatge a Amèrica el 1893, Klein va impulsar l'entrada de les dones a la universitat, que des de llavors van poder accedir-hi com a oients, demanant permís a cada professor per anar a les classes. Això va permetre que obtinguessin també un doctorat, amb un permís especial del Ministeri de Cultura de Prússia (Tobies, 2012, pp. 48, 49). Emmy Noether (1882-1935), supervisora de la tesi de Hermann, havia estudiat matemàtiques a l'Institut d'Erlangen, on el seu pare, Max Noether, feia classes. Hi havia assistit com a oient, com també va fer a la Universitat de Göttingen. L'any 1907 va defensar la seva tesi doctoral sobre teoria d'invariants a Erlangen, on va passar set anys fent classes sense cap retribució i de manera no oficial. Amb el suport de Hilbert, Noether es va incorporar a l'Institut de Matemàtiques de Göttingen l'any 1915, tot i que no va ser acceptada com a investigadora ni com a professora titular. A Prússia, fins el 1920 el professorat estava exclusivament format per homes i Noether va passar quatre anys fent classes en nom de Hilbert, fins que va ser habilitada com a *Privatdozent* gràcies a la intervenció de Hilbert i Einstein.

No va ser fins el 1907 que es va permetre que les dones es matricuessin oficialment com a estudiants. Uns anys abans que Hermann, Iris Runge (1888-1966), filla de l'analista Carl Runge⁴, va estudiar a Göttingen i va pertànyer al cercle de Nelson. De fet, havia estat assistent de Nelson abans que ho fos Hermann (Tobies, 2012, p. 92). Runge va anar a Göttingen primer com a oient i a partir de l'any 1907 com a estudiant de matemàtiques, de manera que va ser de les primeres dones amb formació universitària a Alemanya. Hermann s'hi va matricular l'any 1921.

El perfil de dones que accedien a la universitat a Prússia en aquella època corresponia en el 45% dels casos a filles de pare acadèmic (això només es donava en el 27% dels casos en homes) (Tobies, 2012, p. 5), com va ser el cas d'Iris Runge i Emmy Noether. El pare de Hermann, en canvi, no pertanyia a l'acadèmia (Hansen-Schaberg, 2017, p. 4). Tant Runge com Hermann venien de família protestant, igual que la major part de dones que anaven a la universitat; això es deu en part a que la major part de Prússia era protestant a l'època i en part a que el catolicisme s'oposava més a la idea que les dones cursessin estudis universitaris. Al 1930 gairebé el 90%

⁴ Conegut pels mètodes Runge-Kutta d'anàlisi numèrica.

de graduades en matemàtiques es dedicava a l'ensenyament secundari (Tobies, 2012, pp. 4, 5). La major part dels estudiants de la generació anterior a la de Hermann es preparaven també per a aquesta professió, ja que la carrera acadèmica no era una opció garantida; no obstant, als anys 1930 la situació ja no era així en el cas dels homes: les oportunitats dins l'acadèmia, concretament a Göttingen, havien augmentat considerablement gràcies als esforços de Klein (Tobies, 2012, p. 7).

A partir de l'any 1933, a causa del règim Nacional Socialista, molts científics van haver d'exiliar-se. La major part de dirigents de Göttingen eren jueus, i molts van haver de deixar el seu càrrec, entre ells Hermann Weyl, Edmund Landau i Emmy Noether. La universitat se'n va ressentir notablement i l'activitat intel·lectual es va veure reduïda significativament durant els anys següents. Una situació molt similar es va donar a la Universitat de Leipzig, on Hermann va passar uns mesos al 1934 abans d'exiliar-se per ser activa políticament i estar en contra de les polítiques nazis.

2.2 Grete Hermann entre 1933 i 1935

Grete Hermann es va matricular a la Universitat de Göttingen de matemàtiques, física i filosofia el 1921. Va defensar la seva tesi doctoral l'any 1925 (títol en alemany *Die Frage der endlich vielen Schritte in der Theorie der Polynomideale*, en anglès *The Question of Finitely Many Steps in Polynomial Ideal Theory*). Malgrat que Emmy Noether li va proposar de seguir col·laborant en temes d'àlgebra abstracta com a assistent, Hermann es va interessar per la filosofia, i va estudiar l'idealisme transcendental com a assistent de Leonard Nelson. Durant uns anys es va dedicar a l'estudi del neo-Kantisme, fins que els nous descobriments en mecànica quàntica van atraure el seu interès. Alguns d'aquests avenços qüestionaven punts fonamentals de la concepció neo-Kantiana de les teories físiques. Hermann es va proposar estudiar els fonaments de la mecànica quàntica amb l'objectiu de conciliar aquesta nova teoria amb les seves concepcions filosòfiques.

La seva feina en aquest àmbit es va materialitzar en dos articles, escrits, respectivament, el 1933 i el 1935 (Hermann, 2017a, 2017b). El primer article era desconegut, fins que va ser descobert

fa uns anys a l'arxiu de P. A. M. Dirac, a qui Hermann havia enviat una còpia manuscrita juntament amb la següent carta:

Dec al vostre llibre sobre els principis de la mecànica quàntica el coneixement de la coherència i la bellesa d'aquesta teoria; una bellesa que, segons em sembla, només queda realment expressada en la natura simbòlica i abstracta de la vostra presentació. Les idees que m'heu aportat, per les quals estic agraïda, alhora han despertat en mi el desig de conèixer la vostra opinió sobre alguns pensaments que han esdevingut cada vegada més predominants durant el meu estudi de la mecànica quàntica.

Tinc un gran interès filosòfic en la tan discutida qüestió del determinisme. Tanmateix, voldria posposar la discussió filosòfica de la qüestió fins que hagi estat aclarida la reivindicació feta per nombrosos físics que l'indeterminisme en el context de recerca en física està justificat científicament. Mentre estudiava mecànica quàntica, em centrava doncs en la qüestió – purament física – de fins a quin punt aquesta teoria exclou la possibilitat de predir els resultats de certes mesures i per tant requereix una tractament purament estadístic.

Us envio el producte de les meves reflexions al document adjunt i us estaria molt agraïda si poguéssiu fer-li un cop d'ull i donar-me la vostra opinió dels temes tractats i, sobretot, la vostra crítica sobre les idees que s'hi han desenvolupat a partir del vostre llibre.

(Hermann a Dirac, 9.11.1933)⁵

Aquesta carta resumeix el punt de vista de Hermann pel que fa al determinisme i a la mecànica quàntica al novembre de 1933, posició que va canviar significativament en els següents mesos. Hermann feia referència al llibre *The Principles of Quantum Mechanics* (Dirac, 1930) (traduït a l'alemany l'any 1930 com *Die Prinzipien der Quantenmechanik*), tot i que va llegir també altres presentacions de la teoria. Convé destacar l'interès que va manifestar pel debat sobre el determinisme: el primer que volia analitzar era l'aparent justificació física de l'indeterminisme. L'objectiu del seu primer article era demostrar que la mecànica quàntica no era incompatible amb el determinisme. Observem també que per a Hermann el determinisme, en termes físics,

⁵ Traducció catalana pròpia de l'original, publicada per Herrmann (2019, p. 435).

es traduïa en poder predir tots els resultats de mesura. Pel que fa a aquesta carta, no se n'ha trobat cap resposta escrita per part de Dirac.

Hermann va enviar el seu treball a altres acadèmics, entre ells el filòsof Gustav Heckmann, que també havia treballat a Göttingen amb Leonard Nelson. Exiliat a causa de la situació política, va respondre a Hermann des de Copenhague al desembre de 1933:

T'agraeixo molt que m'hagis enviat el teu assaig. No puc *estudiar-lo* a causa del meu horari actual. I com que és inútil fullejar-lo, el deixaré estar fins al gener; llavors tindrè una mica de temps. Per ara, només unes paraules sobre l'opinió de Heisenberg. Vaig parlar-hi abans d'ahir durant més d'una hora.

Es prenen el teu assaig de manera absolutament i completament *seriosa* i en els dies que era aquí, H[eisenberg] juntament amb Bohr i un estudiant de H[eisenberg], Weizsäcker, volien escriure't una resposta conjunta. En aquell moment no vaig pensar en Dirac, que també era aquí; però potser H[eisenberg] i Bohr no sospitaven que ell també havia rebut el teu assaig. [Citant a Heisenberg] 'En essència, certament s'equivoca', però '[és] una dona fabulosament intel·ligent'. 'Quan durant la meua classe una dona es va posar dempeus i va començar a parlar en un to de veu més aviat contundent, vaig pensar: per l'amor de Déu, on ens portarà això. Però vaig quedar bastant sorprès per la claredat amb què podia analitzar-ho tot'. Altrament creu, com tu mateixa, que encara has d'aprendre més física; estudia els 4 assaigs de Bohr—te n'ha parlat. Hei[senberg] parla amb una terminologia filosòfica tan imprecisa que faria pujar-se per les parets a un Friesià. Si entengués l'idealisme transcendent, llavors segur que s'adonaria de la possibilitat de trobar la clau també per resoldre les dificultats filosòfiques que sorgeixen de la mecànica quàntica. Li vaig parlar de l'idealisme transcendent. Va dir que realment hauria de parlar amb Weizsäcker sobre aquestes coses: ha pensat molt sobre la filosofia natural. Bé, en aquest cas més val que ho facis tu (Dr Weizsäcker, Kopenhagen- Hellerup, A. N. Hansensallé 21). Weizsäcker està treballant amb Bohr ara. Tu i Dora sempre trobareu una porta oberta i una orella oberta amb Heisenberg. Utilitza-la, abans de picar a la porta feta de fusta més vella: la de Bohr. Hei[senberg] va parlar també sobre una certa resignació, difícil d'adquirir, davant la física: un simplement ha de renunciar al desig de dir alguna cosa sobre els *processos reals* a l'àtom—llavors un pot treballar de manera més fructífera. Creu que les teves consideracions filosòfiques serien més fructíferes si arribessis a aquest punt de vista

sobre la teoria atòmica. ‘Costa molt, arribar-hi. Grete H[ermann] sembla que encara no hi ha arribat, com tampoc Schrödinger’. Jo no entenc aquest punt de vista, potser tu pots veure el que vol dir.

Em fa molt feliç que el teu assaig hagi atret l’atenció de Bohr i Hei[senberg]. No els donis treva amb l’idealisme transcendent!

(Heckmann a Hermann, 17.12.1933)⁶

Segons aquesta carta, Heisenberg era també a Copenhague (seu de l’Institut de Física Teòrica dirigit per Bohr), i tant Heisenberg com Bohr i von Weizsäcker havien llegit l’article que els havia enviat Hermann. A més, es plantejaven respondre-li conjuntament. Pel que deia Heckmann, és difícil discernir si Dirac havia llegit o no la carta i el treball que li havia enviat Hermann.

D’altra banda, els comentaris de Heisenberg sobre Hermann mostren que Hermann havia participat en alguna classe de Heisenberg, probablement a Göttingen. Aquests comentaris transcrits per Heckmann deixen veure clarament el tracte discriminatori que rebia Hermann pel fet de ser dona: es considerava sorprenent que pogués ser tant brillant! Al seu llibre, Heisenberg, recordant aquestes discussions, va fer referència a Hermann com a “jove filòsofa”, quan ella era de fet més gran que ell i, a més, s’havia doctorat en matemàtiques (Heisenberg, 1971).

Heckmann va esmentar el filòsof post-Kantià J. F. Fries, que havia influït en Nelson i Hermann. Les idees Friesianes eren presents en el debat sobre determinisme i mecànica quàntica d’aquell temps. Mantenint el to informal, Heckmann va recomanar a Hermann que parlés amb von Weizsäcker, que estava especialment interessat en aquestes qüestions filosòfiques, i li va assegurar que Heisenberg estava disposat a escoltar-la, abans que es dirigís a Bohr.

Von Weizsäcker es va adreçar a Hermann en nom de Bohr en una carta que data també del 17 de desembre, per donar una resposta al seu treball, tal com havia anunciat Heckmann. Von Weizsäcker havia estat treballant amb Heisenberg i Bohr, a Leipzig i a Copenhague, i tenia com a objectiu “entendre les qüestions filosòfiques fonamentals de la nova física”. En aquesta llarga

⁶ Traducció catalana pròpia de la versió anglesa, traduïda de l’alemany per E. Crull i G. Bacciagaluppi (2017, pp. 221, 222).

carta, va començar donant la raó a Hermann respecte a que el determinisme no es pot descartar exclusivament a partir del formalisme de la mecànica quàntica. Ara bé, com ell mateix va resumir, a la carta argumentava a favor de la impredictibilitat de resultats de mesura que sorgeix de la teoria quàntica, i també hi defensava que una reintroducció del determinisme suposaria una contradicció amb el concepte de mesura. Va acabar la carta dient que passaria per Berlín entre el 10 i el 15 de gener, i que voldria aprofitar la oportunitat per discutir verbalment les qüestions tractades a la carta. (Weizsäcker a Hermann, 17.12.1933)⁷

Com veurem, Hermann, al seu primer article, defensava la possibilitat d'existència de variables ocultes que garantissin la predictibilitat dels resultats. En unes anotacions que va afegir a la carta, Hermann va remarcar que, segons von Weizsäcker, l'assumpció que els observables contenen tota la informació relativa a un procés atòmic (i que per tant no hi ha variables ocultes) no es deriva del formalisme quàntic, sinó del concepte de "mesura". Aquest canvi de plantejament, que consisteix a deixar de buscar la compatibilitat entre formalisme i variables ocultes, i analitzar arguments físics respecte la natura i el procés d'una mesura, marca la diferència entre el primer i el segon article de Hermann.

La trobada que va proposar von Weizsäcker va tenir lloc al gener de 1934. Hermann va resumir la discussió que hi van tenir en una llarga carta a von Weizsäcker que va escriure entre el 14 i el 17 de gener⁸. En ella va intentar expressar els punts d'acord i de desacord sobre la qüestió de l'indeterminisme. En la seva resposta⁹, datada del 30 de gener, von Weizsäcker va esmentar que Heisenberg havia escrit dient que Hermann seria a Leipzig durant un temps, i que si hi anava al semestre d'estiu ell (von Weizsäcker) també hi seria. D'aquesta manera podria aprendre més d'ella sobre la filosofia de Fries i Nelson, a banda de discutir sobre física. Tanmateix, Hermann va arribar a Leipzig poc després, probablement al mes de febrer, segons es pot deduir d'una carta que va escriure a la seva mare des d'allà el dia 5 de març:

Aquí el semestre acaba, Heisenberg serà fora durant unes setmanes. Les discussions amb ell, doncs, resten interrompudes de moment. La setmana passada les vam mantenir

⁷ Veure (Herrmann, 2019, pp. 439–444).

⁸ Veure (Herrmann, 2019, pp. 445–452).

⁹ Veure (Herrmann, 2019, pp. 455, 456).

intensivament, amb la intenció per les dues parts de forçar una certa conclusió en termes de contingut. Fins a un cert punt ho hem aconseguit, tot i que no ens hem posat d'acord en tot el problema causal, sinó només aparentment en els temes físics involucrats. El conflicte ha passat ara al camp filosòfic, on pretenc tractar-lo amb més profunditat. Em quedaré aquí de moment per treballar els resultats amb tranquil·litat i, si és possible, parlar de nou amb Heisenberg quan torni.

(Hermann a la seva mare, 5.3.1934)¹⁰

Durant la seva estada a Leipzig, Hermann va escriure nombroses cartes dirigides a la seva mare, on explicava l'evolució del seu treball. Resulta sorprenent, tenint en compte que no hi ha indicis que la mare de Hermann formés part de la comunitat intel·lectual, el fet que Hermann hi parlés explícitament dels temes que estava estudiant. Aquest fet pot suggerir un cert aïllament en el context acadèmic. D'aquesta correspondència deduïm que les discussions amb Heisenberg van impulsar els avenços que va fer en la seva feina. És especialment interessant la següent carta:

La meva feina aquí ha portat a una veritable conclusió. Les llargues discussions amb Heisenberg han acabat amb un acord complet i—ara n'estic convençuda—certament amistós en mecànica quàntica. Que sigui possible *mantenir una discussió com aquesta fins que la veritat surti a la llum i decideixi*, és quelcom que trobo tan alliberador i satisfactori cada vegada que realment s'aconsegueix, malgrat que jo essencialment pressuposi aquesta possibilitat en tota discussió. El cost d'aquest arranjament l'he cobert bàsicament jo. Heisenberg tenia raó en el punt crucial sobre el que discutíem. És difícil explicar-te l'afirmació que estava en joc. Però això no és el que importa ara. En qualsevol cas, després d'un bon esforç, he entès com Heisenberg i, amb ell, els que es dediquen a la mecànica quàntica que realment entenen el seu tema, van arribar a aquesta tesi, fins a quin punt està justificada, i en quin tret característic de la mecànica quàntica es basa.—Però ara, no t'alegris gaire de la meva derrota, encara té un resultat sorprenent per a mi en termes de gestió de l'asserció de Heisenberg que he esmentat[,] i he arribat a enregistrar i desafiar les meves preocupacions sobre ella perquè l'atac de la mecànica quàntica a la llei causal es deriva d'aquesta asserció—ja t'he escrit sobre això; però probablement no te'n recordes. Deixa-ho estar, no tornaré a començar. És anar massa lluny. T'ho diré només en termes

¹⁰ Traducció pròpia de l'original (Herrmann, 2019, p. 463).

humans, el que em va passar: primer uns dies de serioses preocupacions—en relació a la concessió, que havia hagut de fer a Heisenberg: quin és el problema de la llei de la causalitat? Queda realment refutada? On és l'error a la deducció de Kant i Fries? D'aquest error no vaig trobar ni en trobo cap rastre. Llavors de sobte un dia ho vaig veure clar: aquesta deducció no es veu gens afectada pel que havia concedit a Heisenberg. És cert que he de canviar el meu punt de vista en un aspecte molt concret; però en un aspecte en què el canvi en la meua visió filosòfica és simple i comprensible. Si l'aplico consistentment, puc mantenir la llei de la causalitat en les seves parts essencials, sí, molt més que això: puc demostrar que els mateixos físics també l'apliquen en aquesta versió a la mecànica quàntica, fins i tot amb gran claredat, en tota fase. Vaig anar a Heisenberg amb aquest resultat, i el va acceptar sense reserva! Què hi dius ara?

(Hermann a la seva mare 16.6.1934)¹¹

D'aquestes línies es desprèn que finalment Hermann va acceptar el punt de vista de Heisenberg sobre la impredictibilitat inevitable que implicava el formalisme quàntic. Malgrat aquesta derrota, Heisenberg va donar la raó a Hermann quan va proposar una nova versió de la llei de la causalitat, compatible amb la mecànica quàntica. Aquest punt de vista és el que l'autora desenvolupa al seu segon article, publicat al març de 1935, on recollia els resultats dels mesos de discussions previs.

Més endavant, en rebre l'article imprès, Heisenberg va enviar una carta a Hermann recordant aquelles converses i recomanant que enviés el treball a altres físics, entre els quals a Bohr i a Einstein, que hi estarien interessats. (Heisenberg a Hermann 28.6.1935)¹²

2.3 Causalitat i determinisme a principis del segle XX

Grete Hermann va estudiar la filosofia de Kant i va treballar en l'idealisme transcendent sota la supervisió del filòsof neo-Kantià Leonard Nelson. Amb el desenvolupament de la teoria quàntica van trontollar algunes de les idees fonamentals d'aquesta tendència filosòfica, que

¹¹ Traducció pròpia de l'original (Herrmann, 2019, p. 467).

¹² Veure (Herrmann, 2019, p. 489).

estava tan estesa i establerta a Alemanya a principis del segle XX. Concretament, estava en joc la noció clàssica de la causalitat, que arrossegava amb ella el concepte de determinisme. Tot seguit es traça un esbós del context filosòfic que va empènyer Hermann a voler conciliar el concepte de causalitat de l'idealisme transcendental de Kant amb la mecànica quàntica.

Una teoria física es diu determinista si accepta el principi de la causalitat. Aquesta definició, que han pres implícitament altres autors, reflecteix de manera senzilla el problema filosòfic i físic que volem estudiar. D'aquesta manera, el problema del determinisme en les teories físiques es pot reduir al problema de la causalitat. Es pot observar que aquesta noció de determinisme queda restringida a l'àmbit epistemològic, no pretén tenir validesa o implicacions en la metafísica o la moral. Autors que han comentat aquesta part de la teoria de Kant, com ara Hans Cassirer, l'anomenen determinisme crític (Cassirer, 1956, p. 24), per diferenciar-lo del determinisme metafísic.

Pel que fa al concepte de causa i al principi de causalitat, Kant en va donar diverses explicacions, que al seu torn han rebut nombroses interpretacions. Els següents fragments provenen de la *Crítica de la raó pura* i s'il·lustren amb les aportacions d'altres autors amb l'objectiu de recrear el context filosòfic en què va néixer la teoria quàntica. “El concepte de causa significa un tipus especial de síntesi, de tal manera que a partir d'una cosa A es produeix quelcom ben diferent B, seguint una norma.” A partir d'aquesta definició Kant va enunciar la seva versió de principi de la causalitat, que va anomenar Principi de Successió en el Temps¹³: “Totes les alteracions tenen lloc en conformitat amb la llei de connexió de causa i efecte” (Buchdahl, 1965, p. 187).

En aquest context, el físic i filòsof Henry Margenau parlava d'una “causalitat universal” (Margenau, 1967, p. 718). El sentit que donava a aquesta expressió era que si una teoria física accepta aquest principi (i per tant és determinista) aleshores tot allò susceptible de ser explicat per aquesta teoria també és susceptible de tenir una descripció causal (s'hi pot aplicar la llei de connexió de causa i efecte).

¹³ Dins la Segona Analogia.

Analitzant amb més profunditat els textos i arguments de Kant, els seus comentaristes han arribat a la interpretació que, per a l'autor, el principi de la causalitat no fa referència als objectes en sí sinó més aviat a la manera en què nosaltres podem conèixer aquests objectes. És per això que desenvolupa una categoria de la causalitat, com a condició per adquirir qualsevol coneixement físic.

Segons Eric Watkins (2004, p. 237) la Segona Analogia de Kant estableix que una causa ha de produir la successió d'estats en una substància com al seu efecte, però l'argument no requereix explícitament que aquesta causa sigui un esdeveniment, ni que tingui lloc abans i no simultàniament amb el seu efecte, ni que tingui cap característica concreta. Simplement ha de determinar els estats successius d'una substància. Com veurem, el nou plantejament que va fer Hermann de la causalitat anava també en aquesta línia.

Segons Cassirer (1956, p. 60), la causalitat permet ordenar els fenòmens de la natura, és una metodologia de la física que permet relacionar mesures, lleis i principis i crear un sistema (o estructura) de coneixement físic, en lloc d'un simple agregat d'observacions aïllades. En la seva anàlisi sobre la causalitat i la mecànica quàntica, Cassirer observa que fins i tot les interpretacions més revolucionàries de la teoria quàntica des del punt de vista físic són reticents a renunciar a la llei dels esdeveniments com a metodologia per fer física. Posa com a exemple Bohr, que no negava la validesa de la llei causal ja que era necessària per a cada interpretació dels resultats de mesura (Cassirer, 1956, p. 115).

El punt de vista i els arguments de Hermann recullen les idees filosòfiques que s'han presentat en aquesta secció pel que fa a la causalitat, i constitueixen el fil conductor dels seus treballs.

3 DETERMINISME I MECÀNICA QUÀNTICA (1933)

Fruit de la seva inquietud filosòfica en relació amb les interpretacions indeterministes de la mecànica quàntica, Hermann va estudiar els textos de referència sobre aquesta teoria. A partir d'aquest primer estudi, va escriure un article manuscrit d'unes catorze pàgines, de títol original en alemany *Determinismus und Quantenmechanik* (Herrmann, 2019), que data del 1933. Els editors del volum *Grete Hermann – Between Physics and Philosophy*, E. Crull i G. Bacciagaluppi, hi van incloure la seva traducció del manuscrit (Hermann, 2017a). Aquesta versió ha estat utilitzada en aquesta secció per analitzar el punt de vista inicial de Hermann sobre la causalitat.

El treball de Hermann comença amb dues cites de físics que representaven els dos punts de vista que hi havia a l'època pel que fa a la interpretació de la teoria quàntica. D'una banda fa referència a Max Born (1929), com a defensor de la interpretació probabilista, tendència acceptada principalment pels seguidors de l'escola de Copenhague. Born considerava que el formalisme quàntic no deixava espai per al determinisme i que l'única esperança que restava per als seus defensors era una refutació experimental futura del propi contingut de la mecànica quàntica. De l'altra, Hermann cita Max von Laue (1932), que defensava el determinisme i expressava la reticència a “declarar una capitulació fonamental en l'epistemologia”. Von Laue es negava a acceptar que el formalisme quàntic impliqués per sí mateix l'indeterminisme.

Hermann va comparar els punts de vista citats i va prendre la posició del segon. Ella mateixa deia: “l'interès que tinc per la llei de la causalitat és de caire filosòfic” (2017a, p. 223). No obstant això, la discussió que segueix estava al nivell dels darrers avenços en física, ja que en aquell moment el debat físic i filosòfic anava lligat fins al punt de ser indiscernible. Enllaçant amb el corrent de pensament del seu temps, l'autora deia:

[Aquest interès] sorgeix de les intuïcions de la filosofia crítica desenvolupada per Kant, Fries i Nelson. Segons aquesta escola, la racionalitat humana té un coneixement a priori de la validesa de la llei de la causalitat – un coneixement que s'aplica en l'experiència però

que no pot ser ni justificat ni refutat amb observacions o experiments. (Hermann, 2017a, pp. 223, 224)

D'aquestes línies convé destacar el caràcter a priori que s'atorgava a la llei de la causalitat i el fet que, tot i tenir una aplicació pràctica, la seva validesa no es podia provar experimentalment, segons la filosofia crítica. Com va observar Hermann, la mecànica quàntica, en la major part de les seves formulacions, incloïa processos no determinats causalment, de manera que es contradeïa la natura a priori de la llei de la causalitat. A més, va remarcar, “aquesta refutació de la llei de la causalitat s'ha donat partint d'observacions i experiments” (2017a, p. 224), de manera que també es contradeïa el punt de vista filosòfic que defensava que no es podia justificar ni refutar aquesta llei per mitjà de l'experiència.

En aquest punt del seu treball, Hermann considerava la següent relació entre causa i predictibilitat: un esdeveniment imprevisible no té causa. La formulació concreta que en fa és la següent:

Si la mecànica quàntica posa de manifest que el resultat d'una mesura física concreta no es pot predir amb un error arbitràriament petit—encara que potser no evanescent— independentment del nivell de coneixement de les condicions inicials i les lleis de la natura, aleshores la llei de la causalitat perd la seva validesa com a principi de coneixement de la natura; i per tant l'indeterminisme regna en la natura. Per tant ens podem restringir a la següent qüestió, lliure del concepte de causalitat: La mecànica quàntica ha determinat un límit insuperable en la predictibilitat dels processos naturals en aquest sentit?

(Hermann, 2017a, p. 224)

Observem que relacionant causa i predictibilitat es va deslliurar del primer concepte per posar la pregunta en termes de física quàntica. Si, malgrat acceptar un petit error, existia aquest límit infranquejable aleshores no hi havia causalitat ni determinisme. Aquest límit feia referència, com ella mateixa va desenvolupar a continuació, a les relacions d'incertesa de Heisenberg, però té el seu anàleg a altres formulacions de la mecànica quàntica. La reducció de la causalitat a la predictibilitat és el punt clau per entendre el raonament de Hermann, ja que el seu punt de vista va canviar radicalment i en el seu segon article va deslligar aquests dos conceptes.

Ara bé, en aquest primer treball, per tal de ser coherent amb les seves idees filosòfiques, Hermann havia de trobar una refutació formal, i no experimental, de la impredictibilitat que s'atribuïa a la teoria quàntica. Amb aquest objectiu, l'autora va dedicar la resta de l'article a analitzar proves teòriques del caràcter indeterminista de la mecànica quàntica, que si resultaven ser certes invalidaven la causalitat en l'àmbit filosòfic. A cada una d'elles hi va trobar punts on fallaven. Va concloure el seu primer treball sense haver donat una prova definitiva a favor del determinisme, però demostrant que hi havia lloc per a una interpretació determinista en el marc general de la teoria quàntica sense haver de renunciar a característiques fonamentals d'aquesta teoria.

4 FONAMENTS FILÒSOFICO-NATURALS DE LA MECÀNICA QUÀNTICA (1935)

Al seu segon article¹⁴, Hermann (2017b) acceptava la completesa de la teoria quàntica, canviant de parer respecte la seva posició inicial. En comptes de voler demostrar la incompletesa de la mecànica quàntica, l'autora va proposar modificar la concepció clàssica de llei de la causalitat.

Tot i el seu canvi de plantejament, Hermann va incloure en el seu segon treball una versió revisada del manuscrit anterior, que buscava desmuntar les demostracions de la completesa de la teoria quàntica. Aquesta part del treball, que conté la refutació revisada de la prova de von Neumann, no contribuïa directament als resultats que volia provar¹⁵. Per aquest motiu, Hermann va posar aquesta secció en una tipografia més petita, indicant que els fragments en aquesta lletra contenien arguments físics difícils i que no eren imprescindibles per entendre la resta de l'article (2017b, p. 247). D'altra banda, cal remarcar que Hermann va publicar inicialment aquest treball a la revista filosòfica *Abhandlungen der Fries'schen Schule*. La versió abreujada que va aparèixer a *Die Naturwissenschaften*, revista científica de referència, no incloïa la secció sobre von Neumann, que és la que hauria causat més impacte a la comunitat científica.

4.1 La prova de von Neumann

L'anàlisi de la refutació de la demostració de von Neumann es troba al capítol titulat "El cercle a la prova de Neumann". Hermann considerava que, malgrat que la deducció matemàtica era correcta, von Neumann assumia una hipòtesi equivalent al resultat que volia demostrar (2017b, p. 251). En essència, el raonament de Hermann segueix la mateixa línia que el que havia fet al

¹⁴ Títol original *Die naturphilosophischen Grundlagen der Quantenmechanik* (Hermann, 1935b), títol en anglès *Natural-philosophical foundations of quantum mechanics* (2017b). En aquesta secció s'ha utilitzat la traducció anglesa, i se n'han traduït fragments al català.

¹⁵ Encara que Hermann no ho reconegué, constitueix una aportació rellevant a la física quàntica i mostra la profunda comprensió que n'havia adquirit a partir de l'estudi i interpretació de les principals formulacions de la teoria.

seu treball anterior sobre aquesta mateixa prova. Tanmateix, la nova formulació és més clara, i la conclusió permet entendre millor les diferències en l'enfoc de Hermann i von Neumann. L'argument de Hermann és el següent:

Sigui un conjunt de sistemes físics qualsevol donat, i siguin \mathfrak{R} i \mathfrak{S} quantitats físiques que poden ser mesurades als sistemes d'aquest conjunt: per valor esperat de \mathfrak{R} , $\text{Exp}(\mathfrak{R})$ s'entén el valor mitjà dels resultats de mesura que sorgeixen d'una \mathfrak{R} -mesura a tots els sistemes del conjunt, per tant el valor que cal esperar com a resultat probable d'una \mathfrak{R} -mesura a qualsevol element del conjunt sense més especificació. Per a la funció valor esperat $\text{Exp}(\mathfrak{R})$ així definida per mitjà d'un conjunt de sistemes físics, que assigna un nombre a cada quantitat física, Neumann assumeix que $\text{Exp}(\mathfrak{R} + \mathfrak{S}) = \text{Exp}(\mathfrak{R}) + \text{Exp}(\mathfrak{S})$. En paraules: el valor esperat d'una suma de quantitats físiques és igual a la suma dels valors esperats de les dues quantitats. La prova de Neumann es manté o cau amb aquesta assumpció.

Per a la física clàssica aquesta assumpció és trivial. També ho és per aquelles característiques de la mecànica quàntica que no es limiten mútuament pel que fa a la seva mesurabilitat, per tant entre les quals no hi ha relacions d'incertesa. Per a dues quantitats tals, el valor de la seva suma no és més que la suma dels valors que cada una pren per separat, de la qual cosa se segueix immediatament la mateixa relació per als valors mitjans d'aquestes magnituds. La relació, tanmateix, no és evident per a les quantitats de la mecànica quàntica entre les quals hi ha relacions d'incertesa, i de fet per la raó que la suma de dues tals quantitats no és immediatament definida en absolut: com que una mesura precisa d'una d'elles exclou la de l'altra, de manera que les dues quantitats no poden tenir simultàniament valors precisos, la definició usual de la definició de suma de quantitats no és aplicable. És només fent una volta per certs operadors matemàtics assignats a aquestes quantitats que el formalisme introdueix el concepte de suma també per aquestes quantitats.

Tanmateix, pel concepte mal definit de suma de dues quantitats que no són simultàniament mesurables, la fórmula donada anteriorment requereix una prova. Neumann la desenvolupa en dos passos.

(Hermann, 2017b, pp. 251, 252)

L'assumpció que Hermann retreu a von Neumann és que la suma dels valors esperats de dos observables sigui igual al valor esperat de la suma dels observables, en el cas d'observables no mesurables simultàniament. Tot i que Hermann identifica en l'argument de von Neumann una prova que tracta el cas en què la suma de valors esperats no era ben definida, l'autora conclou que aquesta prova tampoc aconsegueix justificar l'assumpció.

L'observació de Hermann va passar desapercebuda durant anys, fins que John Bell va refutar la mateixa demostració el 1966. A la seva anàlisi, no tan detallada com la de Hermann, remarca que von Neumann s'equivocava en assumir l'additivitat de valors esperats en el cas d'operadors no commutatius. L'argument de Bell es basa en la no additivitat de valors propis d'operadors no commutatius. Això denota una lectura poc acurada del text de von Neumann, que de fet té en compte aquesta no additivitat de valors propis, com reconeix Hermann (2017a, p. 233). Tanmateix, històricament, a partir de l'article de Bell s'ha considerat que la prova de von Neumann contenia aquest error trivial, i el descobriment dels textos de Hermann ha significat reconèixer que l'error ja s'havia trobat anys enrere (Jammer, 1974; Mermin, 1993).

Un punt de vista recent desenvolupat per Dennis Dieks (2017)¹⁶ defensa que tant Bell com Hermann van mal interpretar aquesta demostració, tot i que l'anàlisi de Hermann és més propera al raonament de von Neumann.

D'una banda, Dieks considera que el que Hermann pren com una assumpció sobre $\mathfrak{R} + \mathfrak{S}$, concretament, que la suma dels valors esperats sigui el valor esperat de la suma, es dedueix de la mateixa definició de $\mathfrak{R} + \mathfrak{S}$. D'altra banda, s'oposa a l'autora quan intenta justificar que von Neumann buscava provar aquesta assumpció. Segons Dieks, von Neumann no va esmentar mai una tal prova, corroborant la interpretació que diu que no la necessitava perquè partia d'una definició. (2017, pp. 21, 22)

Si bé és cert que al text de von Neumann no es fa referència explícita a la necessitat de provar aquesta "assumpció", també cal remarcar que von Neumann dedica un bon nombre de pàgines

¹⁶ Basat en (Bub, 2011).

a justificar les seves hipòtesis i definicions. Aquesta feina prèvia al nucli de la demostració és el que pot haver portat Hermann a parlar de prova de l'assumpció sobre valors esperats. Deixant de banda la terminologia que fa servir cada autor, en aquestes pàgines von Neumann defineix la suma de quantitats físiques, $\mathfrak{R} + \mathfrak{S}$, també en el cas en què no són simultàniament mesurables, i la seva definició permet arribar a l'additivitat dels valors esperats. A més, il·lustra amb un exemple¹⁷ (al qual Hermann fa referència en el manuscrit de 1933) el cas de quantitats no mesurables simultàniament. Dieks observa que inicialment von Neumann defineix la suma de quantitats físiques i en dedueix l'expressió per a la suma de valors esperats, i que només posteriorment relaciona aquestes quantitats amb els operadors associats segons el formalisme quàntic. En tot cas, Dieks emfatitza que la clau del raonament de von Neumann és considerar l'additivitat de valors esperats de quantitats, i no l'additivitat dels valors propis associats als operadors. En aquesta línia, el segon article de Hermann és més proper al punt de vista de von Neumann, ja que està escrit principalment en termes d'observables. Malgrat això, Hermann considerava que no n'hi havia prou amb la definició de suma de quantitats per arribar a la suma de valors esperats.

La discrepància té la seva arrel, com Hermann va deixar veure al final del seu primer article i va confirmar al final del segon, en la bijecció entre observables i operadors. Von Neumann assumia aquesta bijecció sense més discussió, com a postulat del formalisme de Hilbert.

¹⁷ “Per exemple, l'operador energia de la teoria de Heisenberg d'un electró movent-se en un camp de potencial $V(x, y, z)$,

$$H_0 = \frac{(P^x)^2 + (P^y)^2 + (P^z)^2}{2m} + V(Q^x, Q^y, Q^z)$$

és la suma de dos operadors no commutatius:

$$R = \frac{(P^x)^2 + (P^y)^2 + (P^z)^2}{2m}, S = V(Q^x, Q^y, Q^z)$$

Mentre que la mesura de la quantitat \mathfrak{R} pertanyent a R és una mesura de moment, i la de la quantitat \mathfrak{S} pertanyent a S una mesura de coordenades, mesurem la quantitat $\mathfrak{R} + \mathfrak{S}$ pertanyent a $H_0 = R + S$ d'una manera totalment diferent: per exemple, mesurant la freqüència de les ratlles espectrals emeses per aquest electró (lligat), ja que aquestes línies determinen (a causa de la relació de freqüències de Bohr) els nivells d'energia, i.e., els valors de $\mathfrak{R} + \mathfrak{S}$. Tanmateix, en totes circumstàncies, $\text{Exp}(\mathfrak{R} + \mathfrak{S}) = \text{Exp}(\mathfrak{R}) + \text{Exp}(\mathfrak{S})$.”

(von Neumann, 1955, pp. 309, 310)

D'aquesta manera, havent definit prèviament la suma d'observables $\mathfrak{R} + \mathfrak{S}$, l'autor només relacionava aquesta suma amb l'operador que denota per $R + S$, sense assumir la mesurabilitat simultània dels observables (von Neumann, 1955, p. 314). Hermann, en canvi, considerava que calia deixar de banda aquest postulat si es buscava una teoria que inclogués variables ocultes¹⁸, de manera que la prova de von Neumann només servia per als casos en què totes quantitats físiques tinguessin un únic operador associat. La conclusió de Hermann pel que fa a aquesta secció era la següent:

D'altra banda, amb el punt de vista del càlcul de Neumann es podria argumentar en contra d'això, que [en aquest càlcul] és un requeriment axiomàtic que totes les quantitats físiques siguin unívocament associades amb certs operadors hermítics a un espai de Hilbert, i que a través del descobriment de noves característiques que invaliden els límits actuals de la predictibilitat, aquesta associació seria inevitablement trencada. En efecte, qualsevol descobriment que fos representable en càlcul d'operadors tindria els seus continguts especificats només per mitjà de la forma de funcions d'ona, que per a quantitats no simultàniament mesurables exhibeix la difuminació requerida per les relacions d'incertesa, i que troba aplicació només per mitjà de la interpretació probabilística.

(Hermann, 2017b, pp. 252, 253)

És a dir, si s'acceptava el formalisme quàntic exactament com estava en aquell moment, concretament pel que fa a la relació entre operadors i quantitats físiques, aleshores la prova de von Neumann era correcta. Ara bé, aquesta prova no contemplava les modificacions del formalisme que requerien les teories de variables ocultes.

Von Neumann va concloure dient que en el cas de teories amb variables ocultes es perdria la bijecció entre variables i operadors. I com que aquest era un postulat de l'espai de Hilbert, que fins al moment havia estat recolzat per l'experiència, no semblava probable que el determinisme es pogués fer espai altra vegada.

¹⁸ Hermann no va desenvolupar aquesta idea, però Dieks explica com es trenca l'associació entre observables i operadors que fa von Neumann si es consideren variables ocultes (Dieks, 2017, p. 13).

Aquestes dues perspectives no es contradieien, ja que tots dos acceptaven que dins del formalisme no hi cabien variables ocultes. El que Hermann potser buscava en la prova de von Neumann era una demostració més forta que intentés descartar les variables ocultes tenint en compte també variacions del marc teòric de la mecànica quàntica. No obstant, Hermann, després de les discussions amb Heisenberg i von Weizsäcker, va acceptar finalment el formalisme quàntic tal com era i va optar per redefinir el concepte de causalitat tenint en compte els resultats de la mecànica quàntica.

4.2 Revisió de la llei de la causalitat

Havent acceptat la completesa de la teoria quàntica, Hermann va argumentar que aquesta teoria era compatible amb una noció de causalitat, i que, per tant, era innecessari seguir buscant contradiccions amb el formalisme. Aquesta noció de causalitat diferia de la concepció clàssica, que només es podria recuperar modificant el formalisme; tanmateix, la nova versió de la causalitat encaixava amb el neo-Kantisme, de manera que s'assolia l'objectiu de Hermann.

El punt clau d'aquesta redefinició de la causalitat consisteix a renunciar a la predictibilitat que clàssicament hi anava associada i quedar-se únicament amb la idea de causalitat com a ordenació temporal necessària d'esdeveniments. Aquest punt de vista és contrari al que defensava Hermann al manuscrit de 1933, ja que inicialment reduïa el problema de la causalitat al de la predictibilitat. En el nou plantejament, Hermann considerava que la causalitat només feia referència a la successió (temporal) necessària de les causes i els seus efectes. En aquest sentit, tot esdeveniment té una única causa, també dins del marc de la teoria quàntica. Segons Hermann, aquesta causa només es pot reconstruir a posteriori partint de l'esdeveniment resultant. (Hermann, 2017b, p. 262)

Per exemple, si es considera una partícula tal que el seu estat quàntic és una superposició de dos estats, no es pot predir el resultat de la mesura d'aquest estat, segons les lleis de la mecànica quàntica. Ara bé, segons el raonament de Hermann, una vegada feta la mesura, tant si s'obté un dels dos possibles resultats com si s'obté l'altre, es pot reconstruir la història causal des de l'estat inicial de la partícula.

A partir de l'aclariment de la llei de la causalitat, Hermann va poder aclarir també la qüestió del determinisme: si es considera que el determinisme consisteix a poder donar una explicació causal, en el nou sentit d'aquest terme, de tots els processos de la natura, aleshores el determinisme és compatible amb la mecànica quàntica. En canvi, aquesta compatibilitat es perd si s'exigeix que es pugui predir el desenvolupament de processos naturals a partir de condicions inicials.

Els arguments de Hermann segueixen presents en el debat actual sobre determinisme i mecànica quàntica. Autors contemporanis com Hasok Chang i Nancy Cartwright defensen, com Hermann, que es pot tenir una causalitat compatible amb la mecànica quàntica, i proposen un model de propagació causal (1993)¹⁹. Chang i Cartwright també tracten les relacions causals com successions d'esdeveniments entre causes i efectes. Tanmateix, el procés de propagació causal no és continu en el seu model, en el sentit que entre dos esdeveniments no sempre hi ha un altre esdeveniment rellevant causalment. Segons els autors, el procés causal es propaga a través de buits (“gaps”) en l'espai-temps. (1993, pp. 178–180)

En el model de Hermann, en canvi, aquests buits s'eviten combinant dues nocions de causalitat. Hermann considerava que en el procés de mesura hi ha etapes on cal fer servir la causalitat clàssica i altres on cal tenir en compte només la versió més àmplia que ella mateixa havia definit. L'autora argumentava que tot procés d'observació comença i acaba a una escala macroscòpica, ja que és on es poden preparar els experiments i interpretar els resultats, i que, per tant, tota explicació causal ha d'encaixar d'alguna manera amb aquesta escala. El canvi de definició que proposava Hermann coincidia amb el canvi d'escala física, de manera que cada noció de causalitat havia de ser compatible amb la teoria física de referència que explicava millor els fenòmens de cada escala; en el cas estudiat, la mecànica clàssica o la mecànica quàntica.

¹⁹De fet, en aquest article, els autors proposen dos models causals. En aquesta secció només es té en compte el primer model, ja que el segon contempla causes supralumíniques.

El model de Chang i Cartwright, en pretendre donar una única explicació causal per al conjunt de l'experiment, presenta buits on no es pot explicar el procés causal. La proposta de Hermann es podria utilitzar per millorar el model de Chang i Cartwright aplicant-hi la idea de combinar nocions de causalitat, la qual cosa mostra que el raonament de Hermann segueix tenint rellevància filosòfica.

5 CONCLUSIONS

El treball de Grete Hermann en la fonamentació de la mecànica quàntica va ser fruit d'un context acadèmic favorable. La formació interdisciplinària que va rebre a la Universitat de Göttingen va ser possible gràcies als esforços que s'havien fet per reconvertir Göttingen en el centre d'excel·lència acadèmica que havia estat. El desenvolupament de la Universitat de Göttingen no va ser un cas aïllat: la resta d'universitats alemanyes va presenciar també un període de grans avenços al començament del segle XX. Aquest teixit universitari afavoria els intercanvis entre acadèmics, malgrat que es va veure considerablement afectat per la situació política a partir del 1933. Tot i això, les discussions i els intercanvis epistolars de Hermann amb altres científics van jugar un paper clau en l'evolució del seu treball entre 1933 i 1935. Destaquen la seva correspondència amb C. F. von Weizsäcker i les discussions amb W. Heisenberg, que la van portar a posicionar-se a favor de la completesa del formalisme quàntic, malgrat que inicialment havia adoptat la posició contrària a causa de les seves idees filosòfiques.

Com a filòsofa neo-Kantiana i influïda per les idees de Nelson, Hermann va estudiar la teoria quàntica amb l'objectiu de conciliar aquesta teoria amb el neo-Kantisme. El problema que preocupava l'autora era la compatibilitat de la llei de la causalitat amb la mecànica quàntica. En el seu primer treball (1933) la seva estratègia consistia a desmuntar proves contra l'existència de variables ocultes, de tal manera que la mecànica quàntica es pogués considerar incompleta i així es pogués mantenir la noció clàssica de causalitat. Després de la seva estada a Leipzig, i havent adoptat el punt de vista de Heisenberg pel que fa a la completesa de la teoria quàntica, Hermann va canviar d'estratègia i va escriure el seu segon article (1935), on va donar una definició alternativa de causalitat que era compatible amb el formalisme quàntic. Aquesta definició prescindia del concepte de predictibilitat i imposava només que les relacions causals fossin successions ordenades d'esdeveniments. En alguns casos, Hermann també va argumentar que era necessari combinar el concepte clàssic de causalitat amb aquesta definició més àmplia.

La refutació de la prova de John von Neumann sobre la no existència de variables ocultes, que Hermann va fer amb la motivació inicial d'evitar que la mecànica quàntica es considerés

completa, és present a les discussions contemporànies sobre el text de von Neumann. Cronològicament, la crítica de Hermann va ser de les primeres (o la primera), però va ser ignorada durant anys per diversos motius, entre ells la poca importància que ella mateixa li va atorgar. Pel que fa a les seves idees sobre la causalitat, la definició que va proposar es pot comparar amb models actuals sobre la propagació causal, fet que mostra una comprensió acurada de les relacions causals en el context de la mecànica quàntica.

Hermann va pertànyer a una de les primeres generacions de dones que es van poder matricular oficialment a la universitat a Alemanya, i va ser un dels escassos casos que van arribar a doctorar-se en matemàtiques. De la seva correspondència es desprèn el tracte discriminatori que rebia dins la comunitat científica, i les cartes que enviava a la seva mare suggereixen un cert aïllament en el context universitari. Tanmateix, això no va impedir que escrivís uns textos a l'alçada del debat del seu temps i rellevants pel debat actual sobre causalitat i mecànica quàntica.

BIBLIOGRAFIA

- Bell, J. S. (1966). On the problem of hidden variables in quantum mechanics. *Reviews of Modern Physics*, 38(3), 447–452.
- Bub, J. (2011). Is Von Neumann’s “no hidden variables” proof silly? In H. Halvorson (Ed.), *Deep Beauty: Understanding the Quantum World Through Mathematical Innovation* (pp. 393–408). Cambridge: Cambridge University Press.
- Buchdahl, G. (1965). Causality, Causal Laws and Scientific Theory in the Philosophy of Kant. *The British Journal for the Philosophy of Science*, 16(63), 187–208.
- Cassirer, E. (1956). *Determinism and Indeterminism in Modern Physics. Historical and Systematic Studies of the Problem of Causality*. New Haven: Yale University Press; London: Oxford University Press.
- Chang, H., & Cartwright, N. (1993). Causality and realism in the EPR experiment. *Erkenntnis*, 38, 169–190.
- Crull, E., & Bacciagaluppi, G. (2017). *Grete Hermann - Between Physics and Philosophy* (Elise Crull & G. Bacciagaluppi (eds.)). Dordrecht: Springer.
- Dieks, D. (2017). Von Neumann’s impossibility proof: Mathematics in the service of rhetorics. *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 60, 136–148.
- Dirac, P. A. M. (1930). *The Principles of Quantum Mechanics*. Oxford: Clarendon Press.
- Hansen-Schaberg, I. (2017). A Biographical Sketch of Prof. Dr Grete Henry-Hermann (1901–1984). In Elise Crull & G. Bacciagaluppi (Eds.), *Grete Hermann - Between Physics and Philosophy* (pp. 3–16). Dordrecht: Springer.
- Heisenberg, W. (1971). *Physics and Beyond: Encounters and Conversations*. New York: Harper & Row.
- Hermann, G. (1935a). Die naturphilosophischen Grundlagen der Quantenmechanik. *Abhandlungen Der Fries’schen Schule*, 6(2), 75–152.
- Hermann, G. (1935b). Die naturphilosophischen Grundlagen der Quantenmechanik. *Die Naturwissenschaften*, 23(42), 718–721.
- Hermann, G. (2017a). Determinism and Quantum Mechanics. In Elise Crull & G. Bacciagaluppi (Eds. & Trans.), *Grete Hermann - Between Physics and Philosophy* (pp. 223–237). Dordrecht: Springer.

- Hermann, G. (2017b). Natural-Philosophical Foundations of Quantum Mechanics. In Elise Crull & G. Bacciagaluppi (Eds. & Trans.), *Grete Hermann - Between Physics and Philosophy* (pp. 239–278). Dordrecht: Springer.
- Hermann, G. (2019). *Determinismus und Quantenmechanik (1933)* (pp. 185–203). Wiesbaden: Springer VS.
- Herrmann, K. (2019). *Grete Henry-Hermann: Philosophie – Mathematik – Quantenmechanik* (K. Herrmann (ed.)). Wiesbaden: Springer VS.
- Jammer, M. (1974). *The Philosophy of Quantum Mechanics*. New York: John Wiley and Sons.
- Margenau, H. (1967). Quantum Mechanics, Free Will, and Determinism. *The Journal of Philosophy*, 64(21), 714–725.
- Mermin, N. D. (1993). Hidden variables and the two theorems of John Bell. *Reviews of Modern Physics*, 65(3), 803 –.
- Tobies, R. (2012). *Iris Runge: A life at the crossroads of mathematics, science, and industry*. Basel: Springer.
- von Neumann, J. (1932). *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Berlin: Springer.
- von Neumann, J. (1955). *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Princeton: Princeton University Press.
- Watkins, E. (2004). *Kant and the Metaphysics of Causality*. Cambridge: Cambridge University Press.

ANNEX – CORRESPONDÈNCIA

Grete Hermann a Paul A. M. Dirac (9.11.1933)²⁰

Dr. Grete Hermann.

Berlin, 9.11.33.
C 2, Burgstr. 3 vorn IV r.

Herrn Prof. Dr. P.A.M. Dirac,
St. John's College, Cambridge.

Sehr verehrter Herr Professor!

Ihrem Buch über die Prinzipien der Quantenmechanik verdanke ich das Verständnis für die Geschlossenheit und Schönheit dieser Theorie, einer Schönheit, die, wie mir scheint, in der abstrakt symbolischen Art Ihrer Darstellung überhaupt erst richtig zur Geltung kommt. Die starken Anregungen, die ich von Ihnen erhalten habe und für die ich Ihnen dankbar bin, haben zugleich in mir den Wunsch geweckt, Ihre Meinung über einige Gedankengänge kennen zu lernen, die sich mir beim Studium der Quantenmechanik mehr und mehr aufgedrängt haben.

Es handelt sich um die viel diskutierte Frage des Determinismus, an der ich ein starkes philosophisches Interesse habe. Ich möchte aber die philosophische Erörterung der Frage so lange zurückstellen, wie der von seiten zahlreicher Physiker erhobene Anspruch, den Indeterminismus im Rahmen der physikalischen Forschung wissenschaftlich begründet zu haben, nicht geklärt ist. Mich beschäftigte daher beim Studium der Quantenmechanik die – rein physikalische – Frage, wie weit diese Theorie die Möglichkeit der Vorausberechnung gewisser Messungsergebnisse ausschliesst und daher eine nur statistische Betrachtung erzwingt.

Das Ergebnis meiner Überlegungen lege ich Ihnen in dem beiliegenden Schriftstück vor und habe die sehr grosse Bitte an Sie, dass Sie einen Blick hineinwerfen und mich Ihre Meinung zu den angeschnittenen Fragen und vor allem Ihre Kritik zu den im Anschluss an Ihr Buch entwickelten Gedanken wissen lassen.

Mit verbindlichem Gruss und aufrichtigem Dank für
die von Ihnen erhaltene Anregung und Belehrung

Ihre sehr ergebene
Dr. Grete Hermann

²⁰ Reproducció de la carta publicada per (Herrmann, 2019, p. 435).

Gustav Heckmann a Grete Hermann (17.12.1933)²¹

Copenhagen
17/12.33.

Dear Grete!

I thank you heartily for sending me your paper. I am unable to study it given my current daily schedule. And since it is futile to comb over it, I shall let it lie until January; then I have some time. For now, just a few words about Heisenberg's judgement. I spoke to him the day before yesterday for over an hour.

They take your paper absolutely and completely seriously and in the days while he is still here, H[eisenberg] together with Bohr and a student of H[eisenberg]'s, Weizsäcker, wanted to jointly draw up an answer to you. At the moment I did not think about Dirac, who was also here; but maybe H[eisenberg] and Bohr did not suspect that he had also received your paper. [Quoting Heisenberg:] 'In substance, she is certainly wrong', but 'a fabulously clever woman'. 'When during my lecture a woman stood up a[nd] began speaking in a rather sharp voice, I thought: for Heaven's sake, what will this come to. But I was quite astonished by the clarity with which she could analyse everything'. Otherwise he thinks, as you do, that you must learn still more physics; study the 4 papers by Bohr—he has told you about them. Hei[senberg] speaks with such imprecise phil[osophical] terminology that it would make a Friesian climb the walls. If he understood transc[endental] idealism, then he would surely realise the possibility of finding the key also to solving the philos[ophical] difficulties arising from quantum m[echanics]. I told him about transc[endental] id[ealism]. He said I should really talk with Weizsäcker about these things: he has thought a lot about natural philosophy. Well, you had better do that then (Dr Weizsäcker, Kopenhagen- Hellerup, A. N. Hansensallé 21). Weizs[äcker] is working with Bohr at present. You and Dora will always find an open door and an open ear with Heisenberg. Use it yet, ere you knock at the harder door made of older wood: that of Bohr. Hei[senberg] spoke also about a certain difficult-to-acquire resignedness in the face of physics: one just has to give up the wish to state something about real processes in the atom—then one is able to work more fruitfully. Also your philos[ophical] considerations would be more fruitful once in regard to atomic theory you had managed to fight your way to this st[an]dp[oin]t. 'It requires a great deal of strength to get there in the first place. Grete H[ermann] seems not to have quite got there yet, also Schrödinger has not yet arrived there'. I do not understand this st[an]dp[oin]t, perhaps you can see what he means.

It makes me very happy that you have acquired the considerable regard of Bohr and Hei[senberg] with your paper. Get onto them with the transc[endental] id[ealism]!

Niels Bohr's address: Institut for teoretisk Fysik, Kop[enhagen], Blegdamsvej 15.

Dirac looked radiantly cheerful.

Hopefully you too.

Warmly
Gustav.

²¹ Reproducció de (Crull & Bacciagaluppi, 2017, pp. 221, 222), carta original publicada per Herrmann (2019, pp. 437, 438).

Grete Hermann a la seva mare [Auguste Hermann (née. Leipoldt)] (5.3.1934)²²

5. III. 34

Hier ist das Semester zu Ende, Heisenberg ist für einige Wochen fort. Die Diskussionen mit ihm sind also erst mal abgebrochen. In der vorigen Woche haben wir sie noch intensiv geführt, von beiden Seiten mit der Absicht, einen gewissen inhaltlichen Abschluss zu erzwingen. Einigermaßen ist das auch gelungen, wenn wir auch nicht einig geworden sind über das ganze Kausalproblem, so doch anscheinend über die physikalischen Fragen, die damit zusammenhängen. Der Gegensatz hat sich ins philosophische Gebiet verschoben, wo ich nun weiter anzupacken gedenke. Ich bleibe vorläufig hier, um das bisherige Ergebnis in Ruhe zu verarbeiten, und, wenn's geht, nach Heisenberg's Rückkehr noch einmal mit ihm durchzusprechen.

²² Reproducció de (Herrmann, 2019, p. 463).

Grete Hermann a la seva mare [Auguste Hermann (née. Leipoldt)] (16.6.1934)²³

16. VI. 34 (Leipzig)

Meine Arbeit hier hat zu einem wirklichen Abschluss geführt. Die langen Diskussionen mit Heisenberg haben mit einer vollständigen u. – davon bin ich jetzt überzeugt – sicher freundlichen Einigung über die Situation in der Quantenmechanik geendet. Dass es möglich ist, einen solchen Streitfall auszutragen, bis die Wahrheit ans Licht tritt und entscheide[t], das ist mir – so sehr ich für jeden Streitfall grundsätzlich diese Möglichkeit voraussetze – in jedem Fall, wo es wirklich gelingt, von Neuem ein so befreiendes und beglückendes Erlebnis, dass es mich stark erfüllt. Die Kosten der Einigung hatte im Wesentlichen ich zu tragen. Heisenberg hat in dem entscheidenden Punkt, über den wir gestritten haben, Recht behalten. Es ist schwer, Dir die Behauptung zu formulieren, um die es ging. Aber darauf kommt es jetzt auch nicht so an. Jedenfalls habe ich, nach ziemlicher Schinderei verstanden, wie Heisenberg u. mit ihm die, ihr Fach wirklich verstehenden Quantenmechaniker zu seiner These gekommen sind, in wiefern sie berechtigt ist, und auf welchem charakteristischen Zug der Quantenmechanik sie beruht. – Nun aber, freue Dich nicht zu früh über meine Niederlage, sie hat noch einen mir selber überraschenden Ausgang zur Auseinandersetzung mit der erwähnten Heisenberg'schen Behauptung[,] u. zum Anmelden und Durchfechten meiner Bedenken gegen sie bin ich gekommen, weil von dieser Behauptung aus der quantenmechanische Angriff gegen das Kausalgesetz geführt wird – darüber habe ich Dir früher schon mal geschrieben; aber Du wirst es wohl nicht mehr wissen. Lass es nur, ich fang nicht noch mal an. Es führt doch zu weit. Ich erzähle dir jetzt nur in menschlichen Tönen, was mir dabei passiert ist: zunächst ein paar Tage schwere Bedenken – auf Grund des Zugeständnisses, das ich Heisenberg zu machen hatte: was ist nun los mit dem Kausalgesetz? Ist es wirklich widerlegt? Wo soll denn der Fehler in der Deduktion von Kant und Fries stecken? Von einem solchen Fehler fand und fand ich nichts. Dann plötzlich eines Tages Einsicht: Diese Deduktion wird durch das, was ich Heisenberg zugestanden habe, überhaupt nicht angetastet. Ich muss zwar meine Auffassung an einer ganz bestimmten Stelle ändern; aber an einer Stelle, an der sich die Änderung in meiner philosophischen Ansicht einfach und verständlich einfügt. Führe ich sie da konsequent durch, dann kann ich das Kausalgesetz in seinen mir wesentlichen Stücken aufrecht erhalten, Ja, weit mehr als das: ich kann zeigen, dass die Physiker selber es in dieser Fassung auch in der Quantenmechanik, da sogar mit besonders schöner Deutlichkeit, auf Schritt und Tritt anwenden. Mit diesem Ergebnis bin ich zu Heisenberg gegangen, u. er hat es ohne Einschränkung anerkannt! Was sagst du nun dazu?

²³ Reproducció de (Herrmann, 2019, p. 467).