
This is the **published version** of the bachelor thesis:

El Haji Lamdaghri, Adil. *Control Óptimo para Supresión de Poblaciones de Mosquitos usando la Técnica del Insecto Estéril*. Treball de Final de Grau (Universitat Autònoma de Barcelona), 2026 (Grau en Enginyeria Electrònica de Telecomunicació)

This version is available at <https://ddd.uab.cat/record/336123>

under the terms of the  license.



TREBALL DE FI DE GRAU

GRAU EN ENGINYERIA ELECTRÒNICA DE TELECOMUNICACIÓ

CONTROL ÓPTIMO PARA SUPRESIÓN DE POBLACIONES DE MOSQUITOS USANDO LA TÉCNICA DEL INSECTO ESTÉRIL

Adil El Haji Lamdaghri

DIRECTOR: Asier Ibeas

DEPARTAMENT DE TELECOMUNICACIÓ I ENGINYERIA DE SISTEMES

UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA

Bellaterra, 18 de Junio de 2026

Abstract

This bachelor's thesis addresses the optimization of release protocols for the Sterile Insect Technique (SIT) in mosquito vector control, building on the optimal control model of Almeida *et al.* (2022) for *Aedes polynesiensis*. The optimal solution, of *bang-singular-bang* structure, is computationally reproduced and verified, and in the process a calibration inconsistency in the reference is detected and documented. Five release strategies are then compared: only those that optimize the allocation of effort (the L^1 -optimal control, the L^2 variant and the optimal impulsive scheme) reach the suppression threshold, whereas the common heuristics (constant and periodic release) fail to do so under the same budget. The sensitivity analysis shows that the optimal cost is *fragile* to parametric uncertainty (up to +70 % under ± 20 % variations), which limits its open-loop applicability. To address this fragility, a closed-loop control policy is trained by reinforcement learning (PPO) with domain randomization. This policy sustains a 90 % success rate under ± 30 % uncertainty and reaches full suppression under nominal conditions, at a cost 58 % above the open-loop optimum, trading a larger budget for robustness that the open-loop solution does not provide. All the developed code, together with the numerical experiments and figures, will be made publicly available in an open repository for independent verification of the results.

Keywords: sterile insect technique, optimal control, Pontryagin's maximum principle, reinforcement learning, robustness, *Aedes polynesiensis*.

Resumen

Este Trabajo de Fin de Grado aborda la optimización de los protocolos de liberación de la Técnica del Insecto Estéril (SIT) para el control de mosquitos vectores, partiendo del modelo de control óptimo de Almeida *et al.* (2022) para *Aedes polynesiensis*. Se reproduce y verifica computacionalmente la solución óptima, de estructura *bang-singular-bang*, y, en el proceso, se detecta y documenta una incoherencia de calibración en la referencia. A continuación se comparan cinco estrategias de liberación: solo las que optimizan el reparto del esfuerzo (óptima L^1 , variante L^2 y esquema impulsivo óptimo) alcanzan el umbral de supresión, mientras que las heurísticas habituales (constante y periódica) no lo logran con el mismo presupuesto. El análisis de sensibilidad revela que el coste óptimo es *frágil* a la incertidumbre paramétrica (hasta un +70 % ante variaciones del ± 20 %), lo que limita su aplicabilidad en lazo abierto. Para abordar esta fragilidad, se entrena una política de control en lazo cerrado mediante aprendizaje por refuerzo (PPO) con *domain randomization*. Esta política mantiene un 90 % de éxito bajo un ± 30 % de incertidumbre y alcanza la supresión completa en condiciones nominales, con un coste un 58 % superior al óptimo en lazo abierto, a cambio de una robustez que la solución en lazo abierto no ofrece. Todo el código desarrollado, junto con los experimentos numéricos y las figuras, se publicará en un repositorio abierto para la verificación independiente de los resultados.

Palabras clave: técnica del insecto estéril, control óptimo, principio del máximo de Pontryagin, aprendizaje por refuerzo, robustez, *Aedes polynesiensis*.

Índice general

Abstract	I
Resumen	III
Índice de figuras	X
Índice de tablas	XII
1. Introducción	1
1.1. Objetivos	4
1.2. Planificación	4
1.3. Estructura de la memoria	5
1.4. Declaración de uso de Inteligencia Artificial	6
2. Modelado matemático	7
2.1. Del principio biológico al modelo matemático	7
2.2. Modelado matemático de la dinámica poblacional	8
2.2.1. Separación de escalas temporales y reducción de orden	10
2.3. Teoría de control óptimo aplicada a la SIT	12
2.3.1. El Principio del Máximo de Pontryagin (PMP)	13
2.3.2. El arco singular y la estructura <i>bang-singular-bang</i>	14
2.4. Estado del arte y limitaciones de los enfoques actuales	15
2.5. Síntesis: Parámetros del modelo de referencia	15

3. Implementación Computacional	19
3.1. Entorno de desarrollo	19
3.1.1. Librerías	19
3.1.2. Hardware y reproducibilidad	20
3.1.3. Disponibilidad del código	20
3.2. Módulo de simulación	20
3.2.1. Integrador y tolerancias	21
3.2.2. Implementación de $f(F, M_s)$: tratamiento de la singularidad	21
3.3. Módulo de optimización	22
3.3.1. Formulación NLP en GEKKO	22
3.3.2. Algoritmo alternativo de bisección	23
3.3.3. Limitaciones de convergencia	25
3.4. Verificación numérica	25
3.4.1. Calibración de la capacidad de carga K	26
3.4.2. Comparación S1 vs. S2	26
3.4.3. Estructura de la solución óptima	27
3.4.4. Comparación del funcional de coste	29
3.4.5. Análisis de convergencia	31
3.4.6. Verificación del problema con norma L^2	32
4. Estrategias de Control y Resultados	35
4.1. Estrategia 1: Liberación Óptima Continua (L^1)	35
4.1.1. Resultados	36
4.2. Estrategia 2: Liberación Constante	37
4.2.1. Resultados	37
4.3. Estrategia 3: Liberación Periódica Impulsiva	38
4.3.1. Resultados	38
4.4. Estrategia 4: Variante del Funcional de Costo (L^2)	40

4.4.1. Resultados	40
4.5. Estrategia 5: Esquema de Liberación Impulsiva Óptima	41
4.5.1. Resultados	41
4.5.2. Impulsivización de la acción óptima	42
4.6. Análisis Comparativo	44
4.7. Análisis de Sensibilidad	45
4.8. Compromiso de diseño: tiempo frente a capacidad	47
4.9. Una política de control por aprendizaje por refuerzo	49
5. Conclusiones	53
5.1. Conclusiones del Trabajo	53
5.2. Líneas de Trabajo Futuro	55
A. Código Fuente y Tablas de Parámetros	57
A.1. Módulo de Simulación	57
A.2. Módulo de Control Óptimo	59
A.3. Algoritmo de Bisección	60
A.4. Entorno de Aprendizaje por Refuerzo	61
A.5. Tablas de Parámetros Completas	63
A.6. Reproducibilidad	64
Bibliografía	65

Índice de figuras

2.1.	Diagrama de compartimentos del modelo poblacional bajo intervención SIT. Las flechas sólidas negras representan los flujos proporcionales de maduración entre estadios; la flecha azul cerrada, el ciclo reproductivo no lineal condicionado por la capacidad de carga; y las flechas grises punteadas, las mermas poblacionales por mortalidad y la competencia por el apareamiento. La interacción de M_s no es un flujo de biomasa directo, sino una modulación probabilística del reclutamiento de hembras. La señal $u(t)$, que representa la tasa de liberación de machos estériles, es la única entrada exógena del sistema.	9
3.1.	Trayectorias de $F(t)$ en los sistemas S1 y S2 bajo el control óptimo.	27
3.2.	Solución óptima <i>bang-singular-bang</i> para $T = 150$ días.	28
3.3.	Estudio de convergencia: valor del funcional $J(u^*)$ obtenido por GEKKO/APOPT (panel izquierdo) y tiempo de cómputo (panel derecho) en función del número de nodos de colocación N . $J(u^*)$ se estabiliza con variaciones inferiores al 1 % entre $N = 50$ y $N = 400$, mientras que el coste computacional escala aproximadamente como $O(N^2)$	32
3.4.	Solución óptima con norma L^2 para $T = 150$ días y $c = 1$: trayectoria $F^*(t)$ (izquierda) y control $u^*(t)$ (derecha). El control es continuo y no alcanza la cota $U_{\text{máx}}$	33
4.1.	Estrategia óptima L^1 : trayectorias de estado y control para $T = 150$ días.	36
4.2.	Estrategia de liberación constante: trayectorias comparadas con la estrategia óptima L^1	37
4.3.	Estrategia de liberación periódica impulsiva para distintos periodos τ , comparada con la estrategia óptima L^1	39
4.4.	Comparación de las soluciones óptimas L^1 y L^2 : trayectorias de control y estado.	40

4.5. Esquema impulsivo óptimo: magnitudes de cada lote c_k y trayectoria de la población de hembras $F(t)$	42
4.6. Impulsivización de la acción óptima: trayectorias $F(t)$ de la óptima continua L^1 y de la impulsivizada para $\tau = 3, 7$ y 14 d, todas al mismo presupuesto que la óptima. Cuanto mayor es el período, más se aleja $F(T)$ del umbral $\varepsilon = \bar{F}/4$	44
4.7. Comparación de trayectorias $F(t)$ de las cinco estrategias de control.	45
4.8. Análisis de sensibilidad: impacto relativo de los parámetros biológicos sobre el coste óptimo $J_{L^1}(u^*)$	46
4.9. Palanca temporal (capacidad fija $U_{\text{máx}} = 5000$) para el objetivo $\varepsilon = \bar{F}/10$. Superado $T^* \approx 164$ d, aumentar T solo alarga la espera inicial: el arco singular y el coste no cambian.	48
4.10. Palanca de capacidad (horizonte fijo $T = 250$ d) para el objetivo $\varepsilon = \bar{F}/10$. Con capacidad escasa el control se satura en $U_{\text{máx}}$ (régimen limitado por capacidad); por encima de $U^* \approx 8800$ el control es interior y la capacidad adicional no reduce el coste.	49
4.11. Compromiso coste–robustez de la política RL al variar el peso de la penalización terminal. Cada punto es la media sobre las semillas (barras: desv. típica del éxito); la línea roja marca el óptimo frágil en lazo abierto.	50
4.12. Política RL en lazo cerrado (tres semillas, peso alto) frente al óptimo en lazo abierto de Almeida. La RL actúa de forma continua desde $t = 0$; el óptimo espera y concentra el esfuerzo en el arco singular. Ambas alcanzan $\varepsilon = \bar{F}/4$	51

Índice de tablas

1.1. Planificación temporal del TFG por fases.	5
2.1. Parámetros biológicos del modelo de referencia.	16
3.1. Librerías empleadas y su función en la implementación.	20
3.2. Validación estructural de los instantes de conmutación.	29
3.3. Comparación del funcional óptimo $J(u^*)$ con la referencia.	30
3.4. Convergencia de $J(u^*)$ por GEKKO/APOPT y tiempo de cómputo en función del número de nodos de colocación N . Parámetros: $T = 150$, $U_{\text{máx}} = 5000$, $\varepsilon = \bar{F}/4$, $\nu_E = 0,05$, $K = 18258$. La columna ΔJ mide la diferencia relativa de cada fila respecto a $N = 400$	31
4.1. Métricas de la estrategia óptima L^1 para distintos horizontes temporales. $U_{\text{máx}} = 5000$, $\varepsilon = \bar{F}/4$	36
4.2. Métricas de la estrategia de liberación constante.	38
4.3. Métricas de la estrategia periódica impulsiva para distintos períodos de liberación. $T = 150$, $U_{\text{máx}} = 5000$, mismo coste total que la estrategia óptima.	39
4.4. Comparación de métricas entre las formulaciones L^1 y L^2 . $T = 150$, $U_{\text{máx}} = 5000$, $\varepsilon = \bar{F}/4$	41
4.5. Comparación entre la liberación periódica uniforme y la impulsiva óptima para $\tau = 7$ días. $T = 150$, $\varepsilon = \bar{F}/4$	42
4.6. Impulsivización de la acción óptima: $u^*(t)$ se reparte en impulsos de período τ con $c_k = \int u^*$ por intervalo, al mismo presupuesto que la óptima continua. La última fila es la impulsiva óptima de lotes (SLSQP) de la Sección 4.5, como referencia. $T = 150$, $U_{\text{máx}} = 5000$, $\varepsilon = \bar{F}/4$	43

4.7. Comparativa global de las cinco estrategias de control. $T = 150$ días, $U_{\text{máx}} = 5000$, $\varepsilon = \bar{F}/4$	44
4.8. Análisis de sensibilidad: variación del coste óptimo $J_{L^1}(u^*)$ ante perturbaciones de $\pm 20\%$ en los parámetros biológicos. $T = 150$, $U_{\text{máx}} = 5000$, $\varepsilon = \bar{F}/4$	46
5.1. Evaluación del cumplimiento de los objetivos específicos del TFG.	55
A.1. Hiperparámetros del agente de aprendizaje por refuerzo (Sección 4.9), en la configuración con mejor robustez del barrido.	62
A.2. Parámetros biológicos completos del modelo S1/S2.	63
A.3. Parámetros de simulación para los experimentos del Capítulo 4.	64

Capítulo 1

Introducción

Los mosquitos de los géneros *Aedes* y *Anopheles* son uno de los principales vectores de transmisión de varias de las enfermedades infecciosas más prevalentes a nivel mundial, entre ellas el dengue, el zika, el chikungunya y la malaria [1]. La transmisión se produce cuando una hembra infectada pica a un huésped humano durante la ingesta de sangre e inocula patógenos (virus o parásitos) directamente en el torrente sanguíneo. Las enfermedades transmitidas por vectores, entre los que se incluyen mosquitos, garrapatas y flebótomos, representan aproximadamente el 17 % de todas las enfermedades infecciosas humanas causando más de 700 000 muertes anuales a nivel global [2, 1]. Entre las más relevantes, la malaria registró en 2023 unos 263 millones de casos en 85 países endémicos [1], mientras que el dengue acumula entre 100 y 400 millones de infecciones anuales según estimaciones de la OMS [1]. Dentro de esta carga epidemiológica, los mosquitos son el vector biológico que causa más muertes [1]. La situación es especialmente grave en las regiones tropicales y subtropicales, donde las condiciones climáticas (temperaturas cálidas, humedad elevada y precipitaciones abundantes) favorecen la reproducción y dispersión de estas especies [2]. A esto se suma el efecto de la urbanización acelerada y el cambio climático, que han agravado el problema durante las últimas décadas ampliando el rango geográfico de los vectores e incrementando la frecuencia e intensidad de los brotes [2, 3].

Tradicionalmente, las estrategias convencionales de control vectorial se han apoyado en dos métodos: el manejo ambiental y la intervención química. El primero busca reducir los focos de cría mediante la eliminación o modificación de los hábitats acuáticos donde se desarrollan las fases inmaduras del mosquito. El segundo, de alcance más extenso, se basa en insecticidas sintéticos aplicados mediante tres modalidades: el rociado residual intradomiciliario (IRS) consiste en tratar las paredes y superficies interiores de las viviendas con un insecticida persistente, de modo que el mosquito recibe una dosis letal al posarse sobre ellas; su efecto se conserva entre seis y diez meses tras una sola aplicación. Las redes tratadas con insecticida de larga duración (LLINs) son mosquiteras impregnadas que se cuelgan sobre el lugar de descanso actuando como barrera física

y, al mismo tiempo, matan o repelen a los mosquitos que se posan en ellas; conservan su eficacia durante unos tres años y resisten hasta veinte lavados. Por último, la fumigación espacial dispersa el insecticida en el aire en forma de microgotas y se aplica como medida reactiva durante los brotes epidémicos para abatir con rapidez a los mosquitos adultos en vuelo. Sin embargo, además de tener un efecto transitorio, esta técnica carece de especificidad ecológica, lo que conlleva un riesgo perjudicial a otras especies no objetivo [1, 4].

Ante estas limitaciones, la investigación en control vectorial ha explorado alternativas biológicas que permitan una supresión demográfica más sostenible. Actualmente hay tres metodologías que han dado buenos resultados en campo: la técnica del insecto estéril (SIT¹), la técnica del insecto incompatible mediante *Wolbachia* (IIT²) y el uso de hongos entomopatógenos.

La **técnica del insecto estéril (SIT)** consiste en la cría y liberación masiva de machos esterilizados por radiación [5, 6]. Las hembras de la especie vectora suelen copular una única vez en su ciclo vital [5, 1], por lo que el apareamiento con un macho estéril hace que todos sus huevos resulten inviables. Esta técnica ha sido aplicada con éxito en entornos muy diversos, desde La Habana [7] hasta áreas urbanas de Grecia [8].

La **técnica del insecto incompatible (IIT)** emplea la bacteria endosimbionte *Wolbachia* para inducir mortalidad embrionaria y bloquear la replicación de arbovirus en el mosquito [9, 10]. En el ensayo clínico aleatorizado por conglomerados realizado en Yogyakarta (Indonesia), el despliegue de mosquitos portadores de la cepa *wMel* logró una eficacia protectora del 77 % (IC 95 %: 65–85) frente al dengue virológicamente confirmado, con una cobertura de *Wolbachia* superior al 95 % sostenida durante más de tres años [11]. Intervenciones equivalentes en Colombia han replicado reducciones de incidencia en el mismo orden de magnitud [12].

Ambas técnicas pueden aplicarse de forma combinada (IIT-SIT): se liberan machos infectados con *Wolbachia* que, además, se esterilizan con una dosis baja de radiación. La irradiación evita que una hembra infectada liberada por error llegue a establecer una población de reemplazo, de modo que la estrategia suma el efecto supresor de la SIT a la incompatibilidad inducida por *Wolbachia* de la IIT. Esta variante se ha evaluado a escala operativa en Singapur, donde el programa *Project Wolbachia-Singapore* (liberación de machos de *Aedes aegypti* con la cepa *wAlbB*) redujo la población silvestre en torno a un 77 % tras doce meses de intervención sostenida, con descensos de la incidencia del dengue de entre el 56 y el 88 % según la zona [9].

Y por último, los **hongos entomopatógenos biopesticidas**, como las cepas transgénicas de *Metarhizium pingshaense*, actúan mediante esporas que se transfieren a las hembras durante la cópula y causan una infección letal [13, 1]. Aunque los ensayos en Burkina Faso frente a poblaciones de *Anopheles* con alta resistencia química son prometedores, esta aproximación

¹*Sterile Insect Technique.*

²*Incompatible Insect Technique.*

biotecnológica sigue en fase de validación.

De las tres alternativas, la SIT es la más adecuada como marco para el diseño de estrategias de control. Su especificidad biológica hace que no tenga impacto tóxico sobre organismos no objetivo ni polinizadores [6]. Al ser autolimitante, tampoco genera presión de selección de resistencias, y evita los problemas éticos asociados a biotecnologías autónomas como los impulsos genéticos (*gene drives*) [14]. Estas propiedades, junto con el hecho de que su dinámica se deja modelar con herramientas matemáticas conocidas, hacen que la SIT sea la opción adecuada para trabajar en optimización de protocolos de liberación.

La escalabilidad de los programas SIT es, sin embargo, un reto logístico y económico importante. La cría masiva, la separación por sexos, la irradiación y la liberación continuada de millones de mosquitos exigen una inversión sostenida que hace inviable mantener protocolos empíricos de liberación constante. Esto implica que las estrategias estáticas son, a la larga, ineficientes. Se necesita por tanto una herramienta metodológica que optimice el proceso global: que maximice la supresión poblacional y a la vez contenga los costes de producción y despliegue.

La ingeniería de sistemas aporta el marco para abordarlo. La dinámica poblacional del vector puede formularse como un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales en el que la tasa de liberación de machos estériles actúa como variable de control exógena. Este planteamiento traslada el problema biológico al terreno matemático y permite aplicar la teoría del control óptimo para diseñar estrategias de intervención dinámicas y eficientes en el uso de recursos.

Este trabajo parte del modelo matemático y del problema de control óptimo formulados por Almeida *et al.* [5], cuyos parámetros biológicos están calibrados sobre datos de campo de *Aedes polynesiensis* en la Polinesia Francesa [15]; esa es, por tanto, la especie sobre la que se concretan el modelo y las simulaciones de esta memoria. En una primera fase se reproducen y verifican computacionalmente los resultados teóricos del artículo de referencia, y se evalúa la eficiencia de la estrategia óptima comparándola con distintos protocolos de liberación y con criterios de optimización alternativos. Para acercar el estudio a condiciones operativas reales, el alcance se amplía en tres direcciones. La primera estudia el modelo bajo un comportamiento impulsivo, que simula la liberación de mosquitos en lotes discretos y periódicos en lugar de una liberación continua idealizada. La segunda realiza un análisis de sensibilidad respecto a los parámetros del modelo, para evaluar la robustez de las estrategias de control frente a las incertidumbres del entorno real (por ejemplo, fluctuaciones en las tasas biológicas de mortalidad o apareamiento debidas al clima). La tercera, a partir de la fragilidad que revela ese análisis, propone una estrategia de control en lazo cerrado entrenada mediante aprendizaje por refuerzo, que busca mantener la supresión cuando los parámetros reales se desvían de los nominales.

1.1. Objetivos

El objetivo principal del trabajo es reproducir y extender los resultados del modelo de control óptimo de liberación de mosquitos estériles propuesto por Almeida *et al.* [5], evaluar su eficiencia frente a estrategias de control alternativas y proponer una estrategia robusta frente a la incertidumbre paramétrica.

Para alcanzar este objetivo, se plantean las siguientes metas:

1. Estudiar y reproducir el modelo matemático de dinámica poblacional del *Aedes polynesiensis* bajo la acción de la SIT, basado en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs).
2. Formular el problema de control óptimo asociado y analizar las condiciones de optimalidad derivadas en el artículo de referencia.
3. Implementar en código la solución óptima y verificar que se reproducen los resultados numéricos de Almeida *et al.*
4. Comparar la estrategia óptima con dos protocolos de liberación convencionales (liberación constante y liberación periódica) y con una variante del funcional de coste (L^2 frente a L^1), evaluando la eficiencia de cada una en coste total y tiempo de supresión poblacional.
5. Extender el modelo de liberación continua a un esquema de liberación impulsiva, en el que los mosquitos se liberan en lotes discretos a intervalos regulares, y analizar su impacto sobre la dinámica poblacional y el coste de la intervención.
6. Realizar un análisis de sensibilidad sobre los parámetros biológicos del modelo (tasas de mortalidad, natalidad y capacidad de carga) para evaluar la robustez de las estrategias frente a variaciones del entorno.
7. Proponer y evaluar una estrategia de control en lazo cerrado, entrenada mediante aprendizaje por refuerzo con *domain randomization*, que mantenga la supresión bajo incertidumbre en los parámetros biológicos.

1.2. Planificación

El desarrollo del trabajo sigue una metodología por fases, en la que cada etapa se apoya en los resultados de la anterior. La duración estimada es de cuatro meses, de marzo a junio de 2026, como se resume en la Tabla 1.1.

Tabla 1.1: Planificación temporal del TFG por fases.

Mes	Fases y actividades principales	Hito principal
Marzo	Fase 1: Revisión bibliográfica y estado del arte. Estudio de la biología del <i>Aedes polynesiensis</i> , revisión de la literatura sobre SIT y análisis del modelo de referencia de Almeida <i>et al.</i>	Bibliografía consolidada y modelo de referencia comprendido.
Abril	Fases 2-3: Modelado matemático y análisis de control óptimo. Reproducción del sistema de EDOs, estudio de las condiciones de optimalidad y desarrollo del entorno de simulación.	Modelo implementado y resultados de referencia verificados.
Mayo	Fase 4: Estrategias de control y resultados (Capítulo 4). Comparación de la estrategia óptima frente a liberación constante, periódica y variante L^2 ; extensión a liberación impulsiva (uniforme y óptima); análisis de sensibilidad paramétrica; estudio del espacio de diseño (horizonte frente a capacidad) y diseño de una política de control en lazo cerrado por aprendizaje por refuerzo (PPO con <i>domain randomization</i>).	Resultados numéricos y gráficos finales; política RL entrenada y evaluada.
Junio	Fase 5: Redacción y cierre. Análisis de resultados y redacción de la memoria final.	Entrega oficial del Trabajo de Fin de Grado.

1.3. Estructura de la memoria

La memoria se organiza en cinco capítulos y un anexo.

El **Capítulo 2** revisa los modelos matemáticos de dinámica poblacional de mosquitos y las aplicaciones de la teoría de control al problema SIT, y plantea el marco teórico sobre el que se apoya el modelo adoptado.

El **Capítulo 3** describe la implementación computacional del modelo, con el entorno de simulación desarrollado, y verifica los resultados numéricos del artículo de referencia [5].

El **Capítulo 4** es la parte experimental del trabajo. Para cada estrategia de control considerada (liberación óptima, liberación constante, liberación periódica, variante L^2 y esquema de liberación impulsiva) se presenta el planteamiento, la implementación y los resultados de simulación, lo que hace posible comparar unas con otras. También se incluye un análisis de sensibilidad sobre los parámetros biológicos del modelo, un estudio del espacio de diseño (horizonte frente a capacidad) y una política de control en lazo cerrado entrenada por aprendizaje por refuerzo.

El **Capítulo 5** recoge las conclusiones del trabajo y las líneas de trabajo futuro.

Por último se incluye la bibliografía y el Anexo, que contiene el código fuente desarrollado y las tablas de parámetros biológicos utilizados en las simulaciones.

1.4. Declaración de uso de Inteligencia Artificial

En cumplimiento de la normativa académica y de los principios de transparencia en la investigación, en este apartado se declara el uso de herramientas basadas en Inteligencia Artificial (IA) generativa durante el desarrollo de este Trabajo de Fin de Grado.

Estas herramientas se han usado como apoyo en tareas auxiliares, concretamente:

- **Búsqueda bibliográfica:** ayuda en la exploración preliminar de la literatura y en la identificación de artículos relevantes para el estado del arte.
- **Síntesis de información:** apoyo en la lectura analítica mediante resúmenes de los artículos referenciados, que han facilitado la extracción y organización de ideas clave.
- **Revisión ortotipográfica y de formato:** corrección de errores gramaticales y ortográficos, y ayuda con el formateo del documento en $\text{\LaTeX}$.

Ninguna herramienta de IA ha sido utilizada para la generación de datos, la alteración de resultados, la toma de decisiones analíticas ni la elaboración de las conclusiones. El diseño de la investigación, el desarrollo de los modelos, la simulación de los controladores y la autoría intelectual del contenido de esta memoria son responsabilidad exclusiva del autor.

Capítulo 2

Modelado matemático

El capítulo anterior estableció el contexto epidemiológico del problema y justificó la elección de la SIT como herramienta de control. Este capítulo construye el marco matemático que combina la dinámica poblacional natural del mosquito con el efecto de la intervención SIT, introducida como una entrada exógena al sistema.

El desarrollo comienza explicitando el vínculo entre el principio biológico de la técnica y el término matemático que lo modeliza. A continuación, se formula el modelo dinámico completo del ciclo de vida del mosquito y se reduce a un sistema bidimensional mediante separación de escalas temporales. Sobre este modelo reducido se plantean los problemas de control óptimo bajo las normas L^1 y L^2 , caracterizando la estructura de la solución a través del Principio del Máximo de Pontryagin. Finalmente, se sitúa el trabajo en la literatura existente para identificar las aportaciones metodológicas de esta memoria.

2.1. Del principio biológico al modelo matemático

Antes de plantear las ecuaciones del modelo, conviene describir el mecanismo biológico que justifica la intervención. La SIT funciona gracias al comportamiento monoándrico de las hembras: copulan una única vez en su ciclo vital. Si ese apareamiento se produce con un macho irradiado, la progenie es inviable y se pierde un relevo generacional completo. Al liberar machos estériles en gran número, se introduce una competencia artificial por el apareamiento, y la probabilidad de que una hembra silvestre se cruce con un macho fértil pasa de ser uno a ser una fracción que depende de la densidad relativa de ambos grupos.

Este mecanismo se traduce analíticamente en el factor:

$$\frac{M}{M + \gamma_s M_s},$$

que aparecerá en la ecuación de reclutamiento de hembras, donde M representa la densidad de machos silvestres, M_s la de machos estériles liberados artificialmente, y $\gamma_s \in (0, 1]$ el parámetro de competitividad relativa de los machos estériles frente a los silvestres. Este factor actúa como una probabilidad: en ausencia de machos estériles ($M_s = 0$), el cociente vale 1 y la población se reproduce a su ritmo natural. A medida que M_s aumenta, la tasa efectiva de reproducción decrece.

2.2. Modelado matemático de la dinámica poblacional

El modelo matemático parte de una observación biológica: el ciclo de vida del mosquito se divide en dos fases ecológicamente diferenciadas, cada una con dinámica propia:

- **Fase acuática:** Comprende los estadios de huevo, larva y pupa. La población depende de la disponibilidad de hábitats acuáticos (charcos, recipientes con agua estancada) y está fuertemente limitada por la capacidad de carga del medio.
- **Fase aérea:** Corresponde al mosquito adulto alado, ya diferenciado en machos y hembras. Es la fase responsable de la reproducción y, en el caso de las hembras, de la transmisión de enfermedades durante la ingesta de sangre.

A partir de esta división, y separando los machos silvestres de los estériles introducidos por la SIT, la población del ecosistema se describe mediante cuatro variables de estado interconectadas, cuya topología se ilustra en la Figura 2.1:

- $E(t)$: Densidad de población en la fase acuática (huevos, larvas y pupas).
- $M(t)$: Densidad de machos adultos silvestres (fértil).
- $F(t)$: Densidad de hembras adultas fertilizadas.
- $M_s(t)$: Densidad de machos estériles liberados artificialmente.

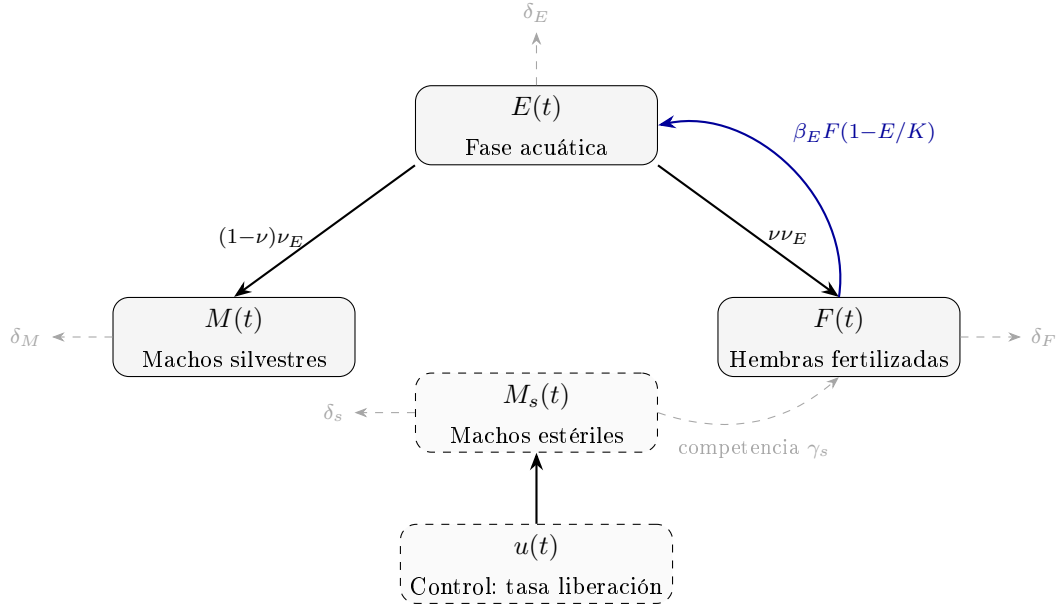


Figura 2.1: Diagrama de compartimentos del modelo poblacional bajo intervención SIT. Las flechas sólidas negras representan los flujos proporcionales de maduración entre estadios; la flecha azul cerrada, el ciclo reproductivo no lineal condicionado por la capacidad de carga; y las flechas grises punteadas, las mermas poblacionales por mortalidad y la competencia por el apareamiento. La interacción de M_s no es un flujo de biomasa directo, sino una modulación probabilística del reclutamiento de hembras. La señal $u(t)$, que representa la tasa de liberación de machos estériles, es la única entrada exógena del sistema.

La traducción matemática de los balances de masa ilustrados en el diagrama (2.1) da lugar al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales no lineales, formulado por Strugarek *et al.* [15] y adoptado como base teórica por Almeida *et al.* [5]. Este modelo completo de cuatro estados, que en adelante se denotará **S2**, es:

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = \beta_E F \left(1 - \frac{E}{K}\right) - (\nu_E + \delta_E)E, \\ \frac{dM}{dt} = (1 - \nu)\nu_E E - \delta_M M, \\ \frac{dF}{dt} = \nu\nu_E E \frac{M}{M + \gamma_s M_s} - \delta_F F, \\ \frac{dM_s}{dt} = u(t) - \delta_s M_s, \end{cases} \quad (2.1)$$

donde β_E es la tasa a la que una hembra pone huevos por unidad de tiempo; K , la cantidad máxima de individuos en fase acuática que el entorno puede sostener (charcos, recipientes con agua estancada y similares); ν_E , la fracción diaria de larvas que completan la metamorfosis y emergen como adultos alados; ν , la proporción de esos adultos que son hembras; y δ_i , la tasa de

mortalidad natural de cada grupo poblacional ($i \in \{E, M, F, s\}$). Por último, $u(t)$ es la única palanca de intervención del modelo: representa el número de machos estériles que la biofábrica libera por unidad de tiempo en el instante t . Cuanto mayor sea $u(t)$, más intensa es la presión sobre la población silvestre; cuanto menor, menor el coste logístico de la operación. Optimizar $u(t)$ es, precisamente, el objetivo central de este trabajo.

2.2.1. Separación de escalas temporales y reducción de orden

La aproximación de estado cuasi-estacionario (QSSA) [16] consiste en suponer que los compartimentos acuático (E) y de machos silvestres (M), más rápidos que la población de hembras (F), se equilibran de forma casi instantánea frente a sus variaciones, lo que permite imponer $\dot{E} = 0$ y $\dot{M} = 0$. Hay que precisar hasta qué punto se cumple esa hipótesis. Con los parámetros de la Tabla 2.1 (2.5), los tiempos de residencia característicos son de $1/(\nu_E + \delta_E) \approx 12,5$ días en la fase acuática y $1/\delta_M = 10$ días para los machos, frente a los $1/\delta_F = 25$ días de vida media de las hembras: una separación de apenas un factor de dos a dos y media, lejos del orden de magnitud que haría la QSSA asintóticamente exacta. La reducción se adopta, por tanto, como una aproximación de trabajo. Almeida *et al.* [5] la justifican con esta misma hipótesis de escalas, remiten a trabajos previos para su fundamentación y no acotan el error de forma analítica; su validez se sostiene, en cambio, sobre dos hechos contrastables: el modelo reducido conserva los equilibrios y sus propiedades de estabilidad, y las trayectorias de F en ambos sistemas difieren, como máximo, 0,32 % bajo el control óptimo, como se comprueba en la verificación numérica del 3. Bajo esta aproximación, $\dot{E} = 0$ y $\dot{M} = 0$ dan los equilibrios dependientes del estado lento F :

$$E^*(F) = \frac{\beta_E F}{\frac{\beta_E F}{K} + \nu_E + \delta_E}, \quad M^*(F) = \frac{(1 - \nu)\nu_E}{\delta_M} E^*(F). \quad (2.2)$$

Sustituyendo las expresiones (2.2) en la dinámica de las hembras, se obtiene el modelo reducido bidimensional [5], que se denotará **S1** y constituye el núcleo de la optimización en este trabajo:

$$\begin{cases} \frac{dF}{dt} = f(F, M_s), \\ \frac{dM_s}{dt} = u(t) - \delta_s M_s, \end{cases} \quad (2.3)$$

donde la función no lineal de reclutamiento $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, definida para $(F, M_s) \neq (0, 0)$, es:

$$f(F, M_s) = \frac{\nu(1 - \nu)\beta_E^2 \nu_E^2 F^2}{\left(\frac{\beta_E F}{K} + \nu_E + \delta_E\right) \left[(1 - \nu)\nu_E \beta_E F + \delta_M \gamma_s M_s \left(\frac{\beta_E F}{K} + \nu_E + \delta_E\right)\right]} - \delta_F F. \quad (2.4)$$

El sistema no lineal (2.3) admite exactamente dos equilibrios: la extinción $(0, 0)$ y la persistencia $(\bar{F}, 0)$. Con liberación nula ($u = 0$), el equilibrio de persistencia es asintóticamente estable y el de extinción inestable, de modo que la dinámica natural reconstruye siempre la población hacia $\bar{F}$. El modelo prescinde del efecto Allee¹ de búsqueda de pareja a baja densidad, una simplificación admisible cuando se parte de poblaciones grandes como las que se consideran aquí [5]. La supresión no es, por tanto, espontánea, sino que exige mantener una cantidad suficiente de machos estériles en el medio para que la competencia por el apareamiento reduzca el reclutamiento de hembras mientras dura la intervención.

El control no puede llevar la población a cero en tiempo finito, ya que $F(t) > 0$ para todo t [5]. Por ello el éxito se define mediante un umbral de seguridad ε , pequeño frente al equilibrio natural ($0 < \varepsilon \ll \bar{F}$): la intervención tiene éxito si la densidad de hembras al final del horizonte queda por debajo de ese umbral, esto es, $F(T) \leq \varepsilon$. Conceptualmente, ε no es una fracción del equilibrio natural, sino una densidad vectorial objetivo de carácter *absoluto*: la densidad por debajo de la cual la transmisión de la enfermedad deja de sostenerse [17]. El valor concreto que se adopta en este trabajo, $\varepsilon = \bar{F}/4$ (una reducción del 75 %), no responde a un umbral epidemiológico determinado: es una elección de caso de estudio de Almeida *et al.* [5], adoptada aquí para permitir la comparación numérica directa con sus resultados. Otros objetivos igualmente legítimos, como una supresión del 90 % ($\varepsilon = \bar{F}/10$), se exploran en el Capítulo 4. En la solución óptima, la restricción se alcanza con igualdad, $F(T) = \varepsilon$, ya que rebajar la población por debajo de ε obligaría a liberar más mosquitos de los necesarios.

Determinar la secuencia óptima de liberaciones exige algo más que intuición o ensayo y error. El problema se enmarca en la teoría de control óptimo, una rama matemática que calcula la trayectoria exacta de actuación que lleva un sistema de un estado inicial a uno objetivo minimizando un coste. Aplicada aquí, proporciona la función $u^*(t)$ ² que garantiza el colapso de la población con el menor número total de mosquitos estériles liberados por la biofábrica.

¹El *efecto Allee* es la correlación positiva entre la densidad de una población y su tasa de crecimiento per cápita: por debajo de cierta densidad los individuos se reproducen *peor*, en contra de lo que supone el modelo logístico clásico. En insectos, su mecanismo dominante es el de *búsqueda de pareja* (*mate-finding*): a densidades muy bajas, a una hembra le resulta difícil encontrar un macho fértil con el que aparearse, lo que deprime el reclutamiento. En el sistema de partida [15] este efecto se introduce mediante un término exponencial adicional en la ecuación de las hembras; Almeida *et al.* [5] lo desprecian por ser relevante solo a tamaños poblacionales pequeños, mientras que aquí se parte de poblaciones grandes que se desean reducir.

²El asterisco denota la solución *óptima*: mientras que $u(t)$ representa cualquier política de liberación admisible, $u^*(t)$ es la que minimiza el coste del problema de control óptimo. Se caracteriza formalmente más adelante en este capítulo mediante el Principio del Máximo de Pontryagin.

2.3. Teoría de control óptimo aplicada a la SIT

Se recurre a la teoría de control óptimo para determinar la política de liberación $u(t)$ que alcanza el objetivo de supresión con el menor esfuerzo logístico posible. El horizonte temporal $T > 0$ es el tiempo del que dispone la campaña para reducir la densidad de hembras por debajo de ε ; disponer de más tiempo nunca encarece la intervención, aunque —como se precisa en la Sección 2.3.2— por encima de un horizonte crítico el número total de mosquitos necesarios deja de disminuir y se mantiene constante. La tasa máxima de liberación $U_{\text{máx}} > 0$ refleja la capacidad productiva de la biofábrica: cuántos machos estériles puede producir y liberar por unidad de tiempo. Ambas constantes delimitan el conjunto de controles admisibles:³

$$\mathcal{U}_{\text{ad}} := \{u \in L^\infty(0, T) : 0 \leq u(t) \leq U_{\text{máx}} \text{ para casi todo } t \in [0, T]\}. \quad (2.5)$$

El funcional de coste determina la estructura de la solución. Se formulan dos alternativas, ambas sujetas a la restricción terminal $F(T) \leq \varepsilon$:

Minimización del volumen total (Norma L^1) Busca minimizar el número absoluto de mosquitos estériles liberados durante toda la campaña. Este problema se denota $(P_{T,U,\varepsilon}^{(S1)})$: el problema de control óptimo sobre el sistema reducido S1, parametrizado por el horizonte temporal T , la tasa máxima de liberación $U_{\text{máx}}$ (abreviada U en el subíndice) y el umbral terminal ε . Su formulación es:

$$(P_{T,U,\varepsilon}^{(S1)}) : \quad \min_{u \in \mathcal{U}_{\text{ad}}} J_1(u) = \int_0^T u(t) dt \quad \text{s.t.} \quad (2.3), \quad F(T) \leq \varepsilon. \quad (2.6)$$

La dependencia lineal en u induce una solución de tipo *bang-singular-bang* [5]: la liberación alterna entre la tasa máxima $U_{\text{máx}}$ y el apagado completo, enlazadas por un arco singular en el que $u(t)$ toma valores intermedios.

Penalización del esfuerzo cuadrático (Norma L^2) Busca suavizar el perfil temporal de liberaciones para evitar conmutaciones abruptas que dificulten la planificación de la biofábrica:

$$\min_{u \in \mathcal{U}_{\text{ad}}} J_2(u) = \int_0^T \frac{c}{2} u(t)^2 dt \quad \text{s.t.} \quad (2.3), \quad F(T) \leq \varepsilon, \quad (2.7)$$

donde $c > 0$ es el peso que regula el equilibrio entre reducir mosquitos rápido y no sobrecargar la producción. A diferencia del criterio L^1 , la penalización cuadrática descarta los arcos singulares y genera políticas de liberación continuas [5].

³El espacio $L^\infty(0, T)$ es el conjunto de funciones medibles y esencialmente acotadas en $[0, T]$: garantiza que la señal $u(t)$ tenga siempre un valor finito y no presente picos de amplitud infinita. La condición *para casi todo* t indica que la cota puede incumplirse, a lo sumo, en un conjunto de instantes de medida nula (duración temporal cero), irrelevante tanto para la integral de coste como para la dinámica del sistema.

2.3.1. El Principio del Máximo de Pontryagin (PMP)

Para caracterizar analíticamente la solución L^1 se aplica el Principio del Máximo de Pontryagin (PMP) [18]. Se introducen los coestados $\lambda_1(t)$ y $\lambda_2(t)$: variables auxiliares que miden, en cada instante, cuánto afecta al coste total una variación marginal en F y en M_s respectivamente. El Hamiltoniano combina el coste de la intervención con la dinámica del sistema (2.3), ponderada por los coestados:

$$\mathcal{H}(F, M_s, u, \lambda_1, \lambda_2) = u + \lambda_1 f(F, M_s) + \lambda_2 (u - \delta_s M_s). \quad (2.8)$$

El PMP transforma el problema en un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales. Las dos primeras son las ecuaciones de estado, con condición inicial conocida; las dos últimas son las ecuaciones de coestado, con condición en $t = T$:

$$\begin{cases} \dot{F} = f(F, M_s), & F(0) = \bar{F}, \\ \dot{M}_s = u(t) - \delta_s M_s, & M_s(0) = 0, \\ \dot{\lambda}_1 = -\lambda_1 \frac{\partial f}{\partial F}(F, M_s), & \lambda_1(T) \geq 0, \\ \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 \frac{\partial f}{\partial M_s}(F, M_s) + \lambda_2 \delta_s, & \lambda_2(T) = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Junto a la condición de signo $\lambda_1(T) \geq 0$ que figura en el sistema, la restricción terminal $F(T) \leq \varepsilon$ impone una condición de holgura complementaria:

$$\lambda_1(T) (F(T) - \varepsilon) = 0. \quad (2.10)$$

La condición $\lambda_2(T) = 0$ se debe a que $M_s(T)$ no está fijado. La holgura complementaria (2.10) distingue dos escenarios: si la restricción terminal no llega a activarse ($F(T) < \varepsilon$), el coestado se anula en el extremo ($\lambda_1(T) = 0$); si se activa ($F(T) = \varepsilon$), entonces $\lambda_1(T)$ puede ser estrictamente positivo. En el óptimo de coste L^1 la restricción se satura, $F(T) = \varepsilon$, y por tanto $\lambda_1(T) > 0$: rebajar la población por debajo de ε añadiría coste sin aportar beneficio. Este sistema no puede integrarse hacia adelante en el tiempo: el estado parte de $t = 0$ pero el coestado solo se conoce en $t = T$, lo que obliga a resolver ambas mitades simultáneamente.

El PMP exige además que $u^*(t)$ minimice $\mathcal{H}$ en cada instante. Extrayendo los términos que contienen u :

$$\mathcal{H} = (1 + \lambda_2(t)) u + \lambda_1 f(F, M_s) - \lambda_2 \delta_s M_s. \quad (2.11)$$

El resto de términos no dependen de u , de modo que minimizar $\mathcal{H}$ equivale a minimizar $(1 + \lambda_2) u$ sobre $[0, U_{\text{máx}}]$. Al ser lineal en u , el mínimo se alcanza siempre en un extremo del intervalo, salvo cuando el coeficiente es nulo. Ese coeficiente recibe el nombre de función de conmutación:

$$\phi(t) := 1 + \lambda_2(t). \quad (2.12)$$

Si $\phi(t) > 0$, el mínimo de $(1 + \lambda_2)u$ se alcanza en $u = 0$. Si $\phi(t) < 0$, en $u = U_{\text{máx}}$. Si $\phi(t) = 0$ en un intervalo entero, el Hamiltoniano no depende de u en primer orden y el control toma un valor intermedio $u_{\text{sing}}(t)$, determinado imponiendo $\dot{\phi}(t) = 0$ [5]. La política óptima queda:

$$u^*(t) = \begin{cases} U_{\text{máx}} & \text{si } \phi(t) < 0 \quad (\text{arco } \textit{bang-on}), \\ u_{\text{sing}}(t) & \text{si } \phi(t) = 0 \quad (\text{arco singular}), \\ 0 & \text{si } \phi(t) > 0 \quad (\text{arco } \textit{bang-off}). \end{cases} \quad (2.13)$$

2.3.2. El arco singular y la estructura *bang-singular-bang*

El arco singular se produce en el intervalo $[t_0, t_1]$ donde la función de conmutación se mantiene en cero ($\phi(t) \equiv 0$). Derivando sucesivamente esta condición en el tiempo y sustituyendo las dinámicas del sistema, se obtiene una expresión en lazo cerrado para el control singular [5]:

$$u_{\text{sing}}(t) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial M_s^2} \right)^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial M_s} \frac{\partial f}{\partial F} + \delta_s M_s \frac{\partial^2 f}{\partial M_s^2} - f \frac{\partial^2 f}{\partial M_s \partial F} \right) \Bigg|_{(F(t), M_s(t))}. \quad (2.14)$$

La validez de este arco como mínimo local requiere cumplir la Condición Generalizada de Legendre-Clebsch (GLC) [18], cuya verificación requiere resolver el sistema numéricamente.

El arco singular forma parte de la solución siempre que el horizonte sea suficientemente amplio, pero la forma de las fases que lo rodean depende de cuánto tiempo tenga la campaña. El Teorema 3.3 de Almeida *et al.* [5] establece la existencia de un tiempo mínimo $T^* > 0$, que depende de la tasa máxima $U_{\text{máx}}$ y del umbral ε , y que separa dos regímenes:

- **Horizonte ajustado** ($T < T^*$): la campaña tiene poco margen y el control puede arrancar con una fase de choque a tasa máxima ($u^* = U_{\text{máx}}$) antes de entrar en el arco singular y apagarse al final. En este régimen la solución óptima no es necesariamente única.
- **Horizonte holgado** ($T \geq T^*$): desaparece la fase de choque inicial. El control empieza en cero durante una fase de espera $[0, t_0]$, entra en el arco singular $u_{\text{sing}} \in (0, U_{\text{máx}})$ en $[t_0, t_1]$ y vuelve a cero en $(t_1, T]$, tramo en el que los machos estériles ya liberados sostienen la caída hasta cumplir $F(T) \leq \varepsilon$. La solución es única y el coste total deja de depender del horizonte: ampliar T solo alarga la fase de espera inicial, sin cambiar el número de mosquitos liberados.

El caso de estudio de esta memoria ($T = 150$ días) pertenece al segundo régimen; el valor $T^* \approx 104$ días para la parametrización adoptada se obtiene en la verificación numérica (3).

Aunque el horizonte holgado reparte el control en tres tramos, el problema de diseño es más sencillo de lo que parece. Durante el arco singular no hace falta decidir cuánto liberar: el propio

control u_{sing} viene dado por la fórmula (2.14), que lo fija en cada instante según el estado de la población. Por eso, de entre las infinitas formas posibles de repartir las liberaciones a lo largo del tiempo, basta con determinar los dos momentos en que el control cambia de fase, t_0 y t_1 ; una vez fijados, toda la estrategia de liberación queda determinada.

2.4. Estado del arte y limitaciones de los enfoques actuales

El modelado matemático de la SIT parte del trabajo de Esteva y Yang [19], que plantearon un modelo poblacional para *Aedes aegypti* bajo liberación continua. Thome *et al.* [20] añadieron insecticidas como segunda variable de control. Dumont y Tchuente [21] estudiaron el caso del Chikungunya comparando liberación continua e impulsiva. Strugarek *et al.* [15] establecieron los umbrales críticos de supresión y sentaron las bases del modelo utilizado en este trabajo.

Sobre ese modelo, Almeida *et al.* [5] demostraron que la solución óptima con coste L^1 tiene estructura *bang-singular-bang* en lazo abierto y horizonte finito. Bliman *et al.* [22] abordaron el mismo problema con coste cuadrático y horizonte infinito, tanto en lazo abierto como cerrado, priorizando la estabilidad asintótica frente a la restricción terminal. El cambio de norma elimina los arcos singulares y produce controles continuos. Join *et al.* [6] propusieron un controlador proporcional inteligente sin modelo (*model-free*), con liberación impulsiva bisemanal y alta robustez paramétrica, pero sin garantías de optimalidad estructural y con la exigencia de retroalimentación del estado en tiempo real.

Este trabajo se sitúa en el marco del control óptimo basado en modelo y contribuye en tres direcciones. Primero, compara las soluciones bajo normas L^1 y L^2 , cuantificando el coste de suavizar el perfil de liberación. Segundo, formula la liberación impulsiva periódica como un problema de optimización explícito. Tercero, proporciona una implementación computacional reproducible validada contra las referencias teóricas. La formulación detallada de estas extensiones se desarrolla en el Capítulo 4.

2.5. Síntesis: Parámetros del modelo de referencia

Los parámetros numéricos adoptados para el resto del trabajo corresponden a datos experimentales de *Aedes polynesiensis* compilados por Strugarek *et al.* [15] (Tabla 2.1).

Tabla 2.1: Parámetros biológicos del modelo adoptados de Almeida *et al.* [5], a partir de datos experimentales de *Aedes polynesiensis* recopilados por Strugarek *et al.* [15].

Parámetro	Descripción	Valor	Unidades
β_E	Tasa de oviposición	10	día ⁻¹
ν_E	Tasa de emergencia de adultos	0,05	día ⁻¹
δ_E	Tasa de mortalidad en fase acuática	0,03	día ⁻¹
δ_M	Tasa de mortalidad de machos silvestres	0,1	día ⁻¹
δ_F	Tasa de mortalidad de hembras	0,04	día ⁻¹
δ_s	Tasa de mortalidad de machos estériles	0,12	día ⁻¹
ν	Probabilidad de emergencia como hembra	0,49	–
γ_s	Competitividad reproductiva de machos estériles	1,0	–
K	Capacidad de carga del entorno acuático [†]	18 258	individuos

[†] K es un parámetro sitio-específico, no una constante biológica, y Almeida *et al.* [5] no lo publican. El valor $K = 18\,258$ se calibra para reproducir la densidad inicial $\bar{F} = 11\,037$ que sí declaran; la derivación y el contraste con la calibración alternativa $K = 22\,200$ [15, 6] se detallan en la Sección 3.4.1.

Con esta parametrización, el número básico de descendencia entomológica [5] vale:

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\nu \beta_E \nu_E}{\delta_F (\nu_E + \delta_E)} = \frac{0,49 \times 10 \times 0,05}{0,04 \times (0,05 + 0,03)} \approx 76,56. \quad (2.15)$$

Este número es, para la población de insectos, el análogo del número reproductivo básico que se emplea en epidemiología: indica cuántas hembras adultas engendra una sola hembra a lo largo de toda su vida, contando solo las que llegan a adultas y en condiciones ideales, sin competencia por los recursos ni intervención. Funciona como un multiplicador entre generaciones: si $\mathcal{R}_0 > 1$ la población crece y si $\mathcal{R}_0 < 1$ se extingue. El valor obtenido, $\mathcal{R}_0 \approx 76,56$, significa que cada hembra deja tras de sí unas setenta y seis hijas adultas en promedio; ese empuje reproductivo explica por qué el vector persiste de forma natural y por qué suprimirlo exige una intervención sostenida.

A partir de este valor se obtiene el equilibrio de persistencia $(\bar{E}, \bar{M}, \bar{F})$, calculado mediante (2.2):

$$\bar{E} = K \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right), \quad \bar{M} = \frac{(1 - \nu) \nu_E}{\delta_M} \bar{E}, \quad \bar{F} = \frac{\nu \nu_E}{\delta_F} \bar{E}. \quad (2.16)$$

Para $K = 18\,258$ individuos, este equilibrio fija la condición inicial de la campaña en $\bar{F} \approx 11\,037$ hembras, en concordancia con las simulaciones de referencia de Almeida *et al.* [5]. El umbral de supresión se fija en $\varepsilon = \bar{F}/4 \approx 2\,759$ hembras, siguiendo el mismo valor de referencia; como se ha señalado en la Sección 2.2, esta cifra es una densidad objetivo absoluta y no una proporción del equilibrio. Con ello, el problema queda completamente definido por la terna $(T, U_{\text{máx}}, \varepsilon)$, cuya implementación se aborda en los capítulos siguientes.

Capítulo 3

Implementación Computacional

Este capítulo describe la implementación en Python del modelo poblacional y del problema de control óptimo del Capítulo 2. El objetivo es doble: reproducir los resultados numéricos de Almeida *et al.* [5] para validar la implementación, y disponer de una base computacional reutilizable para las extensiones del Capítulo 4. El código se organiza en dos módulos independientes (simulación y optimización) que comparten la parametrización y pueden combinarse para evaluar cualquier estrategia de liberación.

3.1. Entorno de desarrollo

Antes de entrar en los módulos de cálculo, esta sección recoge el entorno en el que se ha desarrollado y ejecutado el trabajo: las librerías empleadas, el hardware de las simulaciones y las condiciones de reproducibilidad del código.

3.1.1. Librerías

La implementación se desarrolla en *Python 3.12* con las librerías recogidas en la Tabla 3.1. La única decisión que merece justificación explícita es el uso de GEKKO como motor de optimización: dado que Almeida *et al.* [5] resuelven el problema con el mismo solver APOPT [23] a través de esta misma librería [24], mantener la misma cadena de herramientas permite comparar directamente los valores del funcional y los tiempos de cómputo sin que las diferencias puedan atribuirse a cambios metodológicos.

Tabla 3.1: Librerías empleadas y su función en la implementación.

Librería	Versión	Función
NumPy	2.4.4	Operaciones numéricas y gestión de arrays
SciPy	1.17.1	Integración de EDOs (<code>solve_ivp</code> , RK45)
GEKKO	1.3.2	Resolución del problema de control óptimo (solver APOPT) [23, 24]
Matplotlib	3.10.9	Visualización de resultados

3.1.2. Hardware y reproducibilidad

Las simulaciones se han ejecutado en un servidor *AMD EPYC 7453 (28 núcleos, 462 GiB RAM, Ubuntu 22.04.5 LTS)*. Los tiempos de referencia de Almeida *et al.* [5] corresponden a un Intel Core i5 de 8.^a generación, un hardware sustancialmente más modesto, por lo que los valores absolutos no son comparables entre sí. Lo que sí tiene sentido contrastar es cómo escala el tiempo de cómputo al aumentar el número de nodos de colocación N : esa relación depende del algoritmo, no de la máquina, y es la que se analiza en la Sección 3.4.

3.1.3. Disponibilidad del código

El código fuente completo, junto con los scripts necesarios para reproducir las figuras y tablas de esta memoria, se publicará en GitHub¹ tras la defensa del trabajo. La publicación del código sigue la práctica habitual en matemática aplicada y biología computacional, donde revistas como *Journal of Differential Equations*, *Scientific Reports* o *PLOS Neglected Tropical Diseases* recomiendan que los autores pongan a disposición el software empleado en sus análisis.

3.2. Módulo de simulación

El módulo de simulación integra numéricamente las ecuaciones del modelo ante una función de liberación dada y sirve de base para evaluar después cualquier estrategia de control. A continuación se describen el integrador y las tolerancias empleadas, y el tratamiento de la singularidad que aparece en la función de reclutamiento $f(F, M_s)$ cuando la población tiende a cero.

¹<https://github.com/adilelhaji/sit-control>

3.2.1. Integrador y tolerancias

La integración numérica de los dos sistemas introducidos en el Capítulo 2, el modelo completo de cuatro estados (S2) y su reducción bidimensional (S1), se realiza con `solve_ivp` de SciPy, usando el método Runge-Kutta de orden 4–5 con paso adaptativo (RK45)². Las tolerancias relativa y absoluta se fijan en 10^{-8} , lo que con variables del orden de $\bar{F} \sim 10^4$ produce un error absoluto por paso de orden 10^{-4} .

La corrección del integrador sobre el caso autónomo $u \equiv 0$ se verifica en la Sección 3.4.

3.2.2. Implementación de $f(F, M_s)$: tratamiento de la singularidad

La función de reclutamiento $f(F, M_s)$ de la ec. (2.4) es un cociente: numerador y denominador dependen de F y M_s , y cuando ambas variables tienden a cero el denominador también tiende a cero. En principio, esto no es un problema, porque el cociente tiene un límite bien definido que vale cero; pero en la práctica, sí lo es. Durante la búsqueda del óptimo, GEKKO prueba combinaciones de variables que pueden acercarse mucho a ese punto, y un denominador de valor 10^{-15} o similar provoca que la simulación devuelva un resultado erróneo o que el solver se interrumpa.

Para evitarlo, cuando el denominador cae por debajo de 10^{-12} se abandona la expresión completa y se sustituye por $f \approx -\delta_F F$. Puesto que si la población es prácticamente nula, la única dinámica relevante es la mortalidad natural de las hembras, que es exactamente lo que recoge esa expresión. La sustitución no introduce error en la solución real porque la Proposición 2.1 de Almeida *et al.* [5] garantiza que $F(t) > 0$ para todo $t \geq 0$, de modo que el denominador solo alcanza valores próximos a cero en puntos candidatos internos del solver, nunca en la trayectoria física. El Listado 3.1 recoge la implementación de la función $f(F, M_s)$ con este tratamiento de la singularidad.

²El método RK45 combina dos fórmulas de Runge-Kutta, una de orden 4 y otra de orden 5, integrando el sistema con ambas en cada paso. La diferencia entre los dos resultados sirve como estimación del error local: si es demasiado grande el paso se reduce; si es muy pequeña se amplía. Esto permite avanzar con pasos largos donde la solución varía poco y acortarlos donde cambia rápido, sin que el usuario tenga que fijar el tamaño manualmente. Esta adaptación del paso es justo lo que conviene en un sistema con dos escalas temporales como el de este trabajo, donde la dinámica acuática y de machos es más rápida que la de las hembras: el integrador acorta el paso en los tramos de variación rápida sin necesidad de un método implícito, ya que la separación de escalas es moderada (Sección 2.2.1) y la reducción a S1 elimina los modos más rápidos.

Lista 3.1: Versión simplificada de la función de reclutamiento $f(F, M_s)$ con tratamiento de la singularidad en el origen (los parámetros se pasan como tupla; la implementación completa usa objetos `BiologicalParameters`).

```

1      def f(F, Ms, params):
2          bE, nuE, dE, dM, dF, ds, nu, gs, K = params
3          denom_E = bE * F / K + nuE + dE
4          num_f = nu * (1 - nu) * bE**2 * nuE**2 * F**2
5          denom_f = denom_E * ((1 - nu) * nuE * bE * F
6          + dM * gs * Ms * denom_E)
7          if abs(denom_f) < 1e-12:
8              return -dF * F
9          return num_f / denom_f - dF * F

```

3.3. Módulo de optimización

El módulo de optimización calcula la política de liberación óptima $u^*(t)$ que resuelve el problema de control del Capítulo 2. Se abordan dos enfoques distintos: una formulación como problema de programación no lineal resuelta con GEKKO y un algoritmo de bisección que explota la estructura analítica de la solución. La sección termina analizando las limitaciones de convergencia de cada enfoque. La variante de liberación impulsiva discreta, en la que se optimizan las cantidades de cada lote, se resuelve con un tercer método (programación cuadrática secuencial, SLSQP), que se describe al introducir esa estrategia en el Capítulo 4.

3.3.1. Formulación NLP en GEKKO

Para resolver el problema $(P_{T,U,\varepsilon}^{(S1)})$ con GEKKO se muestrea el horizonte $[0, T]$ en N nodos con el mismo distanciamiento, se aproximan las derivadas mediante colocación en elementos finitos y el sistema resultante se pasa a APOPT [23] como un problema de programación no lineal (NLP). Se usa $N = 300$ nodos, la misma malla que en Almeida *et al.* [5], lo que facilita la comparación directa; el efecto de variar N sobre el funcional y el tiempo de cómputo se estudia en la Sección 3.4.

En este trabajo aparecen dos tolerancias numéricas con nombres parecidos pero roles distintos. La tolerancia $RTOL = 10^{-6}$ que se le pasa a GEKKO controla cuándo el solver NLP da el problema por convergido; no tiene nada que ver con la precisión de la integración de las EDOs. Las tolerancias 10^{-8} de la Sección 3.2.1 son las del integrador RK45, que se usa exclusivamente fuera de GEKKO para verificar las trayectorias. Ambas coexisten en el código pero actúan en capas independientes.

El Listado 3.2 muestra la configuración completa.

Lista 3.2: Configuración del problema de control óptimo en GEKKO.

```

1      m = GEKKO(remote=False)
2      m.time = np.linspace(0, T, N)
3
4      # Variables de estado
5      F = m.Var(value=F_bar, lb=0)
6      Ms = m.Var(value=0, lb=0)
7
8      # Variable de control: warm-start en rampa (evita el minimo
9      trivial u=0)
10     u_init = np.where(m.time < T/2, 0,
11                        U_max/2 * (m.time - T/2) / (T/2))
12     u = m.MV(value=u_init, lb=0, ub=U_max)
13     u.STATUS = 1
14
15     # Ecuaciones del sistema S1
16     m.Equation(F.dt() == f_gekko(F, Ms, params, m))
17     m.Equation(Ms.dt() == u - delta_s * Ms)
18
19     # Restriccion terminal: solo activa en el ultimo nodo
20     p = np.zeros(N); p[-1] = 1
21     final = m.Param(value=p)
22     m.Equation(F * final <= epsilon)
23
24     # Funcional de coste L1: total de mosquitos liberados
25     m.Minimize(m.integral(u))
26
27     # Configuracion del solver
28     m.options.SOLVER = 1      # APOPT
29     m.options.IMODE = 6      # Control optimo dinamico
30     m.options.RTOL = 1e-6    # Tolerancia relativa del NLP
31     m.solve(dispatch=False)

```

3.3.2. Algoritmo alternativo de bisección

El Teorema 3.3 de Almeida *et al.* [5] demuestra que, para horizontes largos, la solución óptima tiene siempre la misma forma: el control vale cero durante $(0, t_0)$, sigue el perfil singular en (t_0, t_1) y vuelve a cero hasta T . El umbral que separa ese régimen es el tiempo mínimo T^* introducido en la Sección 2.3.2: por encima de él el optimizador es único y el coste total ya no cambia con T , porque el horizonte de más se absorbe alargando la espera inicial t_0 sin tocar la parte activa

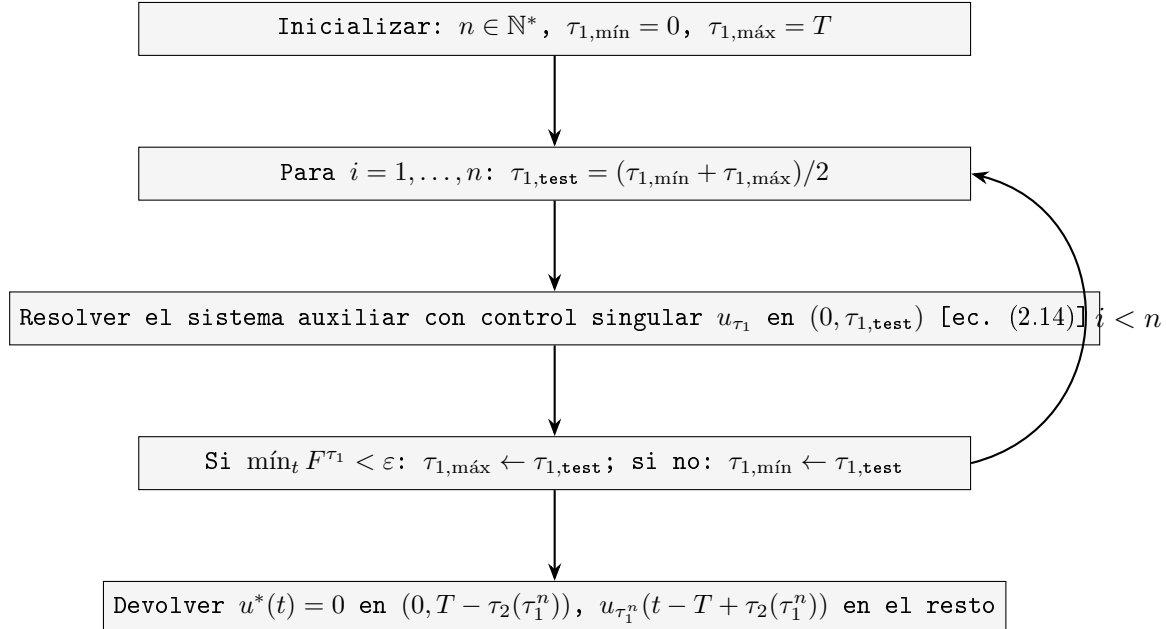
de la campaña. Para los parámetros de este trabajo $T^* \approx 104$ días (Sección 3.4).

La parte activa es el arco singular, y se describe con dos tiempos. El primero, $\tau_1 = t_1 - t_0$, es su duración: cuánto tiempo se libera de forma efectiva. El segundo, $\tau_2 = T - t_0$, mide desde que arranca la liberación hasta el final del horizonte, que es justo cuando la población de hembras toca su mínimo. Como el optimizador es único, basta con dar con la duración τ_1 correcta: el problema se reduce a buscar el $\tau_1 \in [0, T)$ para el que el mínimo de la trayectoria de hembras, $\psi(\tau_1) = \min_t F^{\tau_1}(t)$, calculada integrando el sistema reducido (2.3) con el control singular (2.14), queda exactamente en el umbral ε . Fijado τ_1 , los instantes de conmutación se recuperan de inmediato: $t_0 = T - \tau_2$ y $t_1 = t_0 + \tau_1$.

Para encontrar ese valor se aplica bisección: se evalúa $\psi(\tau_1)$ en el punto medio del intervalo de búsqueda y se descarta la mitad que no puede contener la solución, repitiendo hasta que el intervalo es suficientemente pequeño. El procedimiento queda recogido en el Algoritmo 1, adaptado de la Sección 3.2 del artículo.

En la práctica, este algoritmo cumple dos funciones. Al ser completamente independiente de GEKKO, permite cruzar resultados: si ambos métodos coinciden en el valor del funcional de coste $J(u^*)$, hay buenas razones para confiar en la solución óptima $u^*(t)$. Además, como se verá en la Sección 3.3.3, el solver NLP falla para umbrales muy exigentes ($\varepsilon = \bar{F}/10^4$) o mallas de colocación finas ($N \geq 800$) del artículo; en esos casos, la bisección no solo encuentra la solución sino que lo hace en una fracción del tiempo.

Algoritmo 1 Método de bisección para $(P_{T,U,\varepsilon}^{(S1)})$, adaptado de la Figura 2 de Almeida *et al.* [5].



3.3.3. Limitaciones de convergencia

APOPT presenta dos condiciones de fallo documentadas por Almeida *et al.* [5]: el caso $\varepsilon = \bar{F}/10^4$ con $T = 600$ días, y mallas con $N \geq 800$ nodos para cualquier umbral. El funcional de coste L^1 es no convexo y admite múltiples mínimos locales; el solver queda atrapado en uno de ellos. La bisección evita este problema porque no busca el óptimo numéricamente: parte de la estructura analítica del Teorema 3.3 [5] y, para mallas grandes, es varios órdenes de magnitud más rápida (Tabla 3.4).

La bisección interviene en dos situaciones. En el régimen bien planteado ($T > T^*$), que es el de los resultados de la Sección 3.4, se usa como método de referencia: GEKKO converge, pero a un mínimo local por la no convexidad del problema, mientras que la bisección, al imponer la estructura del Teorema 3.3 de Almeida *et al.* [5], alcanza el óptimo global. Por separado, cuando APOPT directamente no converge (los casos $\varepsilon = \bar{F}/10^4$ o $N \geq 800$), el código conmuta a la bisección como única alternativa viable. La implementación sigue, por lo demás, los parámetros por defecto de GEKKO del artículo [5].

3.4. Verificación numérica

Esta sección comprueba que la implementación reproduce los resultados numéricos de Almeida *et al.* [5] antes de usarla para cualquier análisis propio:

- La calibración de la capacidad de carga K a partir del valor publicado $\bar{F} = 11037$ (Sección 3.4.1).
- La equivalencia dinámica entre los sistemas S1 y S2 bajo control óptimo, validando la reducción por QSSA (Sección 3.4.2, véase la Figura 1 de Almeida *et al.* [5]).
- La estructura cualitativa de la solución óptima y los instantes de conmutación, comparados con la Tabla 3 del artículo (Sección 3.4.3).
- La concordancia de los valores del funcional de coste con la Tabla 2 del artículo (Sección 3.4.4).
- El escalado de los tiempos de cómputo con el número de nodos, replicando la Tabla 4 del artículo (Sección 3.4.5).
- La variante con norma L^2 , comprobando que produce un control continuo sin arcos singulares, tal como predice la teoría (Sección 3.4.6).

3.4.1. Calibración de la capacidad de carga K

La Tabla 1 en [5] recoge los parámetros biológicos del modelo pero no publica un valor numérico para la capacidad de carga K . Esto no es una omisión: K no es una constante biológica, sino un parámetro de calibración específico del sitio de estudio. Strugarek *et al.* [15] lo define explícitamente así en su Sección 4.1, derivándolo de la estimación de la población masculina M_+^* obtenida mediante experimentos de marcado-suelta-recaptura (MRR) en el área de campo:

$$K = \frac{M_+^* \delta_M}{(1 - \nu) \nu_E \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0 (1 - e^{-\beta M_+^*})} \right)}, \quad (3.1)$$

donde β y $\mathcal{R}_0$ son parámetros del modelo con efecto Allee³. Como consecuencia, distintos trabajos que citan la misma fuente biológica adoptan distintos valores de K según el escenario de calibración (véase la Sección 5.2 de Join *et al.* [6], que emplea $K = 22200$).

Para reproducir las simulaciones de Almeida *et al.* [5] debemos determinar el K implícito en sus resultados. Las Tablas 2, 3 y 4 del artículo declaran explícitamente $\bar{F} = 11037$ con $\nu_E = 0,05$. Combinando este dato con la fórmula del equilibrio de persistencia (Proposición 2.1 del artículo),

$$\bar{F} = \frac{\nu \nu_E}{\delta_F} K \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right), \quad \mathcal{R}_0 = \frac{\nu \beta_E \nu_E}{\delta_F (\nu_E + \delta_E)}, \quad (3.2)$$

con los parámetros de la Tabla 1 [5] se obtiene $\mathcal{R}_0 \approx 76,5625$ y por tanto

$$K = \frac{\delta_F \bar{F}}{\nu \nu_E (1 - 1/\mathcal{R}_0)} = \frac{0,04 \cdot 11037}{0,49 \cdot 0,05 \cdot 0,98694} \approx 18258. \quad (3.3)$$

La implementación adopta $K = 18258$ por defecto, valor que reproduce $\bar{F} = 11037$ con error inferior a una unidad y, por lo tanto, permite contrastar los funcionales de coste de las Tablas 2–4 del artículo [5] sobre la misma base numérica. El valor alternativo $K = 22200$ de Join *et al.* [6] corresponde a una calibración de campo distinta y se conserva en el código como un presente documentado para análisis de sensibilidad.

3.4.2. Comparación S1 vs. S2

El modelo S1 se obtiene de S2 mediante la aproximación cuasi-estacionaria (QSSA) de los compartimentos E y M (Sección 2.2 de Almeida *et al.* [5]). El control óptimo se calcula sobre S1 (analíticamente más tratable) pero en la práctica se aplicaría a la dinámica completa S2, por lo que hay que cuantificar la degradación introducida por la reducción del modelo. Las Proposiciones 2.1 y 2.3 del artículo de Almeida *et al.* [5] garantizan que ambos sistemas comparten

³La fórmula de calibración (3.1) procede del modelo con efecto Allee de Strugarek *et al.* [15]; de ahí que aparezcan β y $\mathcal{R}_0$, ausentes del modelo empleado en este trabajo.

los equilibrios y que sus trayectorias bajo control óptimo son próximas; la Figura 1 de Almeida *et al.* [5] lo ilustra visualmente para un control constante y un control impulsivo periódico.

Para verificar esta proximidad numéricamente, se calcula $u^*(t)$ optimizando S1 mediante bisección (obteniendo $F_{S1}(T) = \varepsilon$ por construcción) y se aplica ese mismo control sin modificación a S2. El resultado para $T = 150$, $U_{\max} = 5000$, $\varepsilon = \bar{F}/4$, $\nu_E = 0,05$ es $F_{S2}(T) = 2767,66$, un 0,31 % por encima del objetivo $\varepsilon = 2759,24$. El error máximo a lo largo de toda la trayectoria es del 0,32 % y el medio del 0,07 %. Ambas trayectorias son visualmente indistinguibles (Figura 3.1), de manera análoga a la Figura 1 de referencia [5]: el error introducido por la reducción del modelo es irrelevante frente a cualquier incertidumbre paramétrica biológica [15].

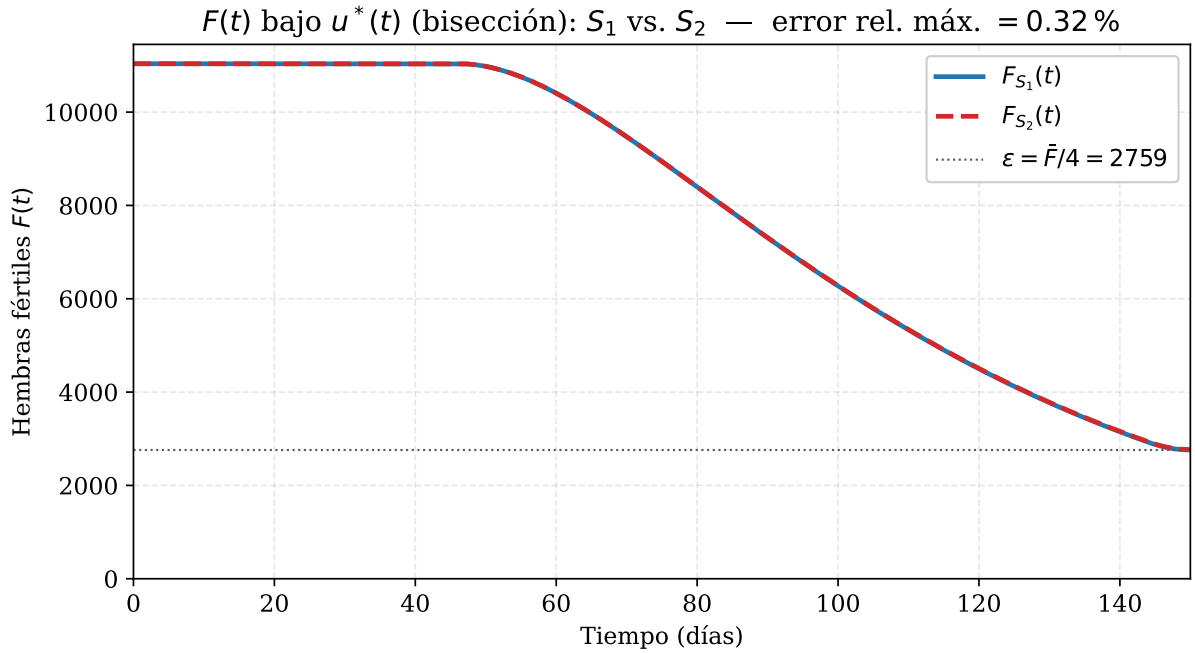


Figura 3.1: Trayectorias de $F(t)$ para los sistemas S1 y S2 bajo el control óptimo calculado con S1 ($T = 150$, $U_{\max} = 5000$, $\varepsilon = \bar{F}/4$, $\nu_E = 0,05$, $K = 18258$). El error relativo máximo entre ambas trayectorias es del 0,32 %. Reproduce cualitativamente la Figura 1 de Almeida *et al.* [5].

3.4.3. Estructura de la solución óptima

El Teorema 3.3 de Almeida *et al.* [5] predice que, para $T > T^*$, el control óptimo sigue una estructura *bang-singular-bang*: el control vale cero en $[0, T - \tau_2]$, sigue un perfil singular en $[T - \tau_2, T - \tau_2 + \tau_1]$ y vuelve a cero en $[T - \tau_2 + \tau_1, T]$. La Figura 3.2 muestra que la implementación reproduce esta estructura para $T = 150$, en correspondencia con la Figura 4 del artículo [5].

El control arranca en cero, no en $U_{\max}$, lo que es coherente con la regla de conmutación (2.13): el valor $U_{\max}$ solo se activa cuando la función de conmutación se vuelve negativa, y en este régimen

($T = 150 > T^* \approx 104 \text{ d}^4$) eso no llega a ocurrir. La fase inicial de choque a $U_{\max}$ solo aparece para $T < T^*$, como se explica en la Sección 2.3.2.

Solución óptima por bisección: $T = 150 \text{ d}$, $\tau_1 = 97.85 \text{ d}$, $\tau_2 = 103.75 \text{ d}$, $J^* = 1.328e + 05$

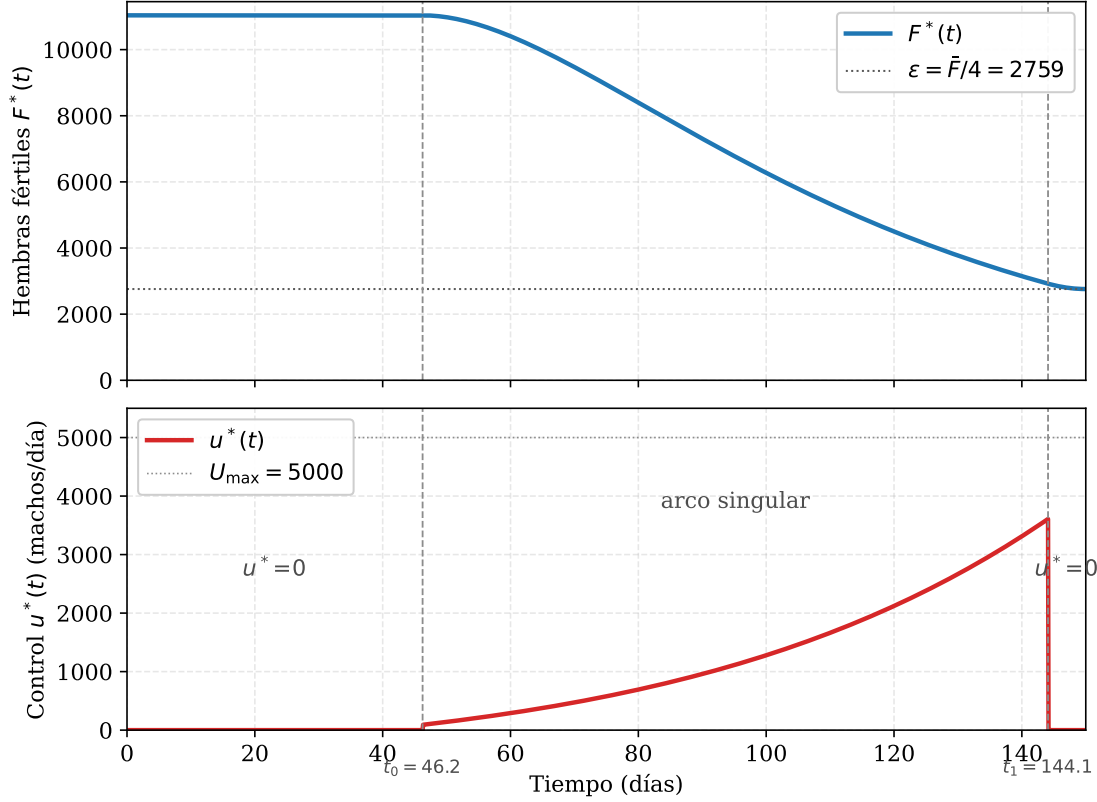


Figura 3.2: Solución óptima para $T = 150$ días, $K = 18258$: trayectoria $F^*(t)$ (izquierda) y control $u^*(t)$ (derecha) con estructura *bang-singular-bang*. El control permanece a cero en $[0, t_0]$ con $t_0 = 46,25 \text{ d}$, sigue el arco singular en $[t_0, t_1]$ con duración $\tau_1 = 97,85 \text{ d}$, y vuelve a cero en $[t_1, T]$ con $t_1 = 144,10 \text{ d}$. La población alcanza $\varepsilon = \bar{F}/4$ en $t = T = 150 \text{ d}$. El parámetro $\tau_2 = T - t_0 = 103,75 \text{ d}$ coincide con $T_{\text{opt}}(S1) = 104 \text{ d}$ de la Tabla 3 del artículo. Reproduce cualitativamente la Figura 4 del artículo [5].

Más allá de la inspección visual, los instantes de conmutación proporcionan una validación cuantitativa independiente del valor del funcional. La Tabla 3 en [5] publica el tiempo óptimo $T_{\text{opt}}(S1) = 104 \text{ d}$ para $\nu_E = 0,05$, $\varepsilon = \bar{F}/4$, $U_{\max} = 5000$. La Tabla 3.2 compara este valor con los obtenidos por la implementación.

⁴La abreviatura «d» denota días.

Tabla 3.2: Validación estructural: comparación de los instantes de conmutación con la Tabla 3 de Almeida *et al.* [5]. Parámetros: $T = 150$, $U_{\text{máx}} = 5000$, $\varepsilon = \bar{F}/4$, $\nu_E = 0,05$, $K = 18258$. $T_{\text{opt}} = \tau_2 = T - t_0$ es el horizonte temporal mínimo para resolver el problema con arco singular (Teorema 3.3).

Parámetro estructural	Almeida 2022	Este trabajo	Diferencia
Inicio del arco singular t_0	—	46,25 d	—
Fin del arco singular t_1	—	144,10 d	—
Duración del arco singular τ_1	—	97,85 d	—
$T_{\text{opt}}(S1) = \tau_2$	104 d	103,75 d	< 1 d

La coincidencia de τ_2 con $T_{\text{opt}}(S1)$ con menos de un día de discrepancia confirma que la implementación reproduce la estructura del control óptimo en los instantes que el artículo publica explícitamente. Los valores de t_0 , t_1 y τ_1 no aparecen tabulados en el artículo pero son consistentes con la inspección visual de su Figura 4.

3.4.4. Comparación del funcional de coste

La Tabla 3.3 compara los valores de $J(u^*)$ obtenidos con los de la Tabla 2 de Almeida *et al.* [5], para $\nu_E = 0,05$, $\varepsilon = \bar{F}/4$, $U_{\text{máx}} = 5000$ y la calibración $K = 18258$ justificada en la Sección 3.4.1. Para $T \in \{150, 200\} > T^* \approx 104$ d se emplea el algoritmo de bisección, que garantiza el óptimo global explotando la estructura del Teorema 3.3 [5]; para $T = 60 < T^*$, el artículo no proporciona valor de referencia tabulado y la bisección no es aplicable: se incluye únicamente el resultado de GEKKO para ilustrar el régimen de tiempo corto.

Tabla 3.3: Comparación de $J(u^*)$ con los valores de la Tabla 2 de Almeida *et al.* [5] para $T > T^*$. Parámetros: $U_{\text{máx}} = 5000$, $\varepsilon = \bar{F}/4$, $\nu_E = 0,05$, $K = 18258$ (calibrado a partir de $\bar{F} = 11037$). Para $T \in \{150, 200\}$ se usa bisección; para $T = 60 < T^*$, el artículo no tabula referencia y la bisección no es aplicable (—).

T	S2 — Al- meida	S1 — Al- meida	Bisección (este traba- jo)	GEKKO (este traba- jo)	Error rel.
60	—	—	—	$1,778 \times 10^5$	—
150	$1,47 \times 10^5$	$1,46 \times 10^5$	$1,328 \times 10^5$	$1,688 \times 10^5$	−9,0 %
200	$1,47 \times 10^5$	$1,46 \times 10^5$	$1,328 \times 10^5$	$1,687 \times 10^5$	−9,0 %

De la tabla se desprenden tres observaciones:

(i) **Invariancia respecto a T para $T > T^*$.** La bisección produce $J^*(T = 150)$ y $J^*(T = 200)$ idénticos hasta la cuarta cifra significativa ($1,3284 \times 10^5$ vs $1,3284 \times 10^5$), confirmando la predicción del Teorema 3.3 [5]: para $T > T^*$ el coste óptimo es independiente del horizonte.

(ii) **Bisección por debajo de Almeida (−9,0 %).** El valor calculado por bisección es menor que el reportado en el artículo [5], pero el origen de esa diferencia no es numérico. La fórmula del control singular procede del Principio del Máximo de Pontryagin (Lema 4.6 del artículo) y la restricción terminal se satisface de forma exacta ($F(T) = \varepsilon$, comprobada re-simulando el control en lazo abierto). Además, recalculando el coste con tolerancias del integrador entre 10^{-8} y 10^{-2} , e incluso con paso fijo, deja J prácticamente inalterado (variación inferior al 0,1 %): la precisión del integrador no interviene. El margen procede de la calibración de la capacidad de carga K , que Almeida *et al.* no publican de forma explícita (Sección 3.4.1). El coste es muy sensible a este parámetro y, bajo la relación de persistencia (3.2), no es posible reproducir a la vez los dos valores que declara el artículo: con $K = 18258$ se recupera su densidad inicial $\bar{F} = 11037$, pero el coste resulta $J = 1,33 \times 10^5$; para recuperar su coste $J = 1,46 \times 10^5$ se necesita $K \approx 20050$, que en cambio produce $\bar{F} \approx 12120$. Una tercera evidencia, independiente del coste, apunta en la misma dirección: el propio anclaje de campo de Almeida (una población inicial de $M^* = 69 \times 74 = 5106$ machos silvestres en el atolón de Tetiaroa) implica, a través de las relaciones de equilibrio (2.16), $\bar{F} \approx 12264$ (y $K \approx 20289$). Tanto su dato de campo como su coste apuntan, pues, a $\bar{F} \approx 12200$, mientras que el $\bar{F} = 11037$ que publican en las cabeceras de sus tablas es el valor discordante. El margen del 9 % refleja, por tanto, esta incoherencia interna de calibración en la referencia, y no un defecto de la implementación ni la precisión del cálculo.

(iii) **Gap GEKKO–bisección (+27 %).** La diferencia sistemática entre GEKKO ($\sim 1,69 \times$

10^5) y la bisección ($\sim 1,33 \times 10^5$) cuantifica la no convexidad del problema: el solver NLP general queda atrapado en un mínimo local que está ~ 27 % por encima del óptimo global encontrado por el algoritmo estructural. Este fenómeno se analiza con más detalle en la Sección 3.4.5.

Nota 1 (Dos calibraciones de K en la literatura). *Como se señala en la Sección 2.5, K no es una constante biológica sino un parámetro sitio-específico derivado de experimentos de marcado-suelta-recaptura [15]. Por ello, distintos trabajos que parten de la misma fuente biológica adoptan valores diferentes: Almeida et al. [5] no publica K explícitamente, pero sus Tablas 2–4 son consistentes con $K = 18258$ ($\bar{F} = 11037$), mientras que Join, Almeida & Fliess [6] emplean $K = 22200$ para una calibración de campo distinta. El presente trabajo adopta $K = 18258$ como valor por defecto, en línea con la elección del Capítulo 2, y conserva $K = 22200$ como preset alternativo en `parameters.py` (`join2026`), permitiendo reproducir ambos escenarios y validar el código contra cada referencia de forma independiente.*

3.4.5. Análisis de convergencia

La Tabla 3.4 replica la Tabla 4 del artículo [5], estudiando cómo varían $J(u^*)$ y el tiempo de cómputo al aumentar el número de nodos N . Los tiempos de referencia corresponden a un Intel Core i5 de 8.^a generación; los de este trabajo se obtienen en el servidor descrito en la Sección 3.1.2, por lo que la comparación se limita al escalado relativo, no a los valores absolutos.

Tabla 3.4: Convergencia de $J(u^*)$ por GEKKO/APOPT y tiempo de cómputo en función del número de nodos de colocación N . Parámetros: $T = 150$, $U_{\text{máx}} = 5000$, $\varepsilon = \bar{F}/4$, $\nu_E = 0,05$, $K = 18258$. La columna ΔJ mide la diferencia relativa de cada fila respecto a $N = 400$.

N	$J(u^*)$	t_{comp} (s)	t_{ref} (s) [5]	ΔJ
50	$1,6747 \times 10^5$	0,23	2,05	−0,84 %
100	$1,6828 \times 10^5$	0,58	6,00	−0,36 %
200	$1,6868 \times 10^5$	3,01	29,40	−0,12 %
400	$1,6889 \times 10^5$	7,20	113,00	—

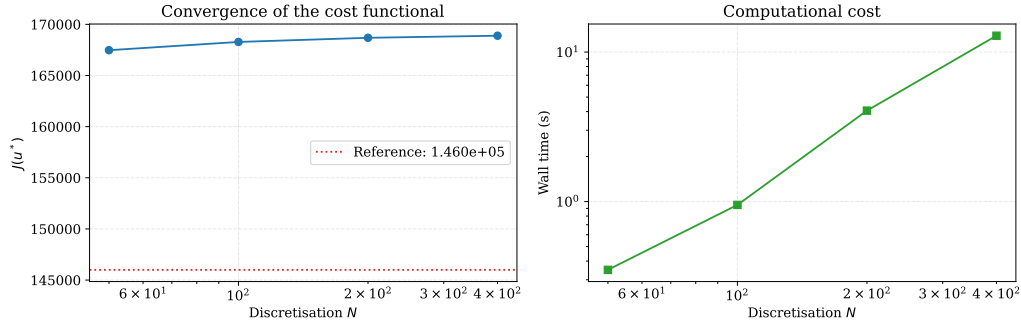


Figura 3.3: Estudio de convergencia: valor del funcional $J(u^*)$ obtenido por GEKKO/APOPT (panel izquierdo) y tiempo de cómputo (panel derecho) en función del número de nodos de colocación N . $J(u^*)$ se estabiliza con variaciones inferiores al 1 % entre $N = 50$ y $N = 400$, mientras que el coste computacional escala aproximadamente como $O(N^2)$.

La Figura 3.3 ilustra este comportamiento: los valores de $J(u^*)$ varían menos de un 1 % entre $N = 50$ y $N = 400$: APOPT converge rápidamente al mismo mínimo local independientemente de la resolución, lo que confirma que la limitación no es numérica sino estructural (véase Sección 3.3.3). Los tiempos de cómputo escalan aproximadamente como $O(N^2)$ (en línea con lo esperado para colocación directa) y son entre 9 y 16 veces inferiores a los de referencia debido a la mayor potencia del servidor empleado.

En contraste, el algoritmo de bisección obtiene $J^* = 1,328 \times 10^5$ en menos de 0,5s para cualquier T ; el mínimo local de GEKKO con $N = 400$ queda un 27 % por encima de ese óptimo. Este resultado ilustra la ventaja del enfoque analítico: explotar la estructura del Teorema 3.3 [5] elimina tanto la dependencia de la discretización como el riesgo de convergencia a mínimos locales. Además, el *gap* GEKKO–bisección no es un defecto de la implementación sino evidencia empírica de la no convexidad del problema de control SIT con coste L^1 : el Hamiltoniano *bang-singular-bang* produce un paisaje de coste con múltiples cuencas de atracción que un solver NLP genérico basado en colocación directa no distingue, mientras que el algoritmo de bisección, al imponer *a priori* la estructura del PMP, alcanza el óptimo global por construcción. Este hecho justifica metodológicamente la decisión de Almeida *et al.* [5] de diseñar un algoritmo *ad hoc* en lugar de recurrir directamente a un solver NLP de propósito general.

3.4.6. Verificación del problema con norma L^2

El Capítulo 2 formula también la variante con coste cuadrático (2.7). A diferencia del caso L^1 , no se dispone de valores tabulados de Almeida *et al.* [5] como referencia, ya que su artículo solo caracteriza la solución L^2 de forma cualitativa. La verificación consiste, por tanto, en comprobar que la implementación reproduce el comportamiento que predice la teoría: un control continuo,

sin arcos singulares ni conmutaciones bruscas.

Al resolver (2.7) con GEKKO para $T = 150$, $U_{\max} = 5000$, $\varepsilon = \bar{F}/4$ y peso $c = 1$, el solver converge y la restricción terminal se satura de forma exacta ($F(T) = \varepsilon = 2759,24$). El control óptimo resultante (Figura 3.4) es continuo: su valor máximo (≈ 4621) no llega a la cota $U_{\max} = 5000$, permanece en el interior del intervalo admisible durante casi todo el horizonte (solo un 0,3 % del tiempo se aproxima a cero) y varía de forma suave entre nodos, sin los saltos propios de una señal bang-bang.

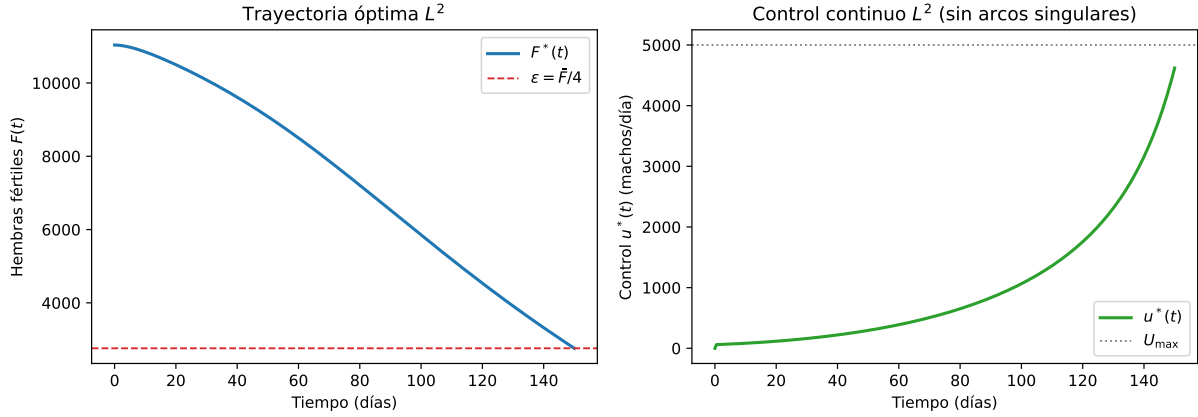


Figura 3.4: Solución óptima con norma L^2 para $T = 150$ días y $c = 1$: trayectoria $F^*(t)$ (izquierda) y control $u^*(t)$ (derecha). El control es continuo y no alcanza la cota $U_{\max}$.

Este perfil contrasta con la estructura *bang-singular-bang* del caso L^1 (Sección 3.4.3), que alterna tramos a cero con un arco singular. La penalización cuadrática elimina esos arcos y genera una liberación gradual, en línea con la caracterización analítica del Capítulo 2 y con los resultados de Bliman *et al.* [22], que obtienen controles continuos al emplear un coste cuadrático.

Con esto se cierra la parte de implementación. Se ha descrito el entorno de simulación, organizado en un módulo de integración y otro de optimización, y se ha verificado que reproduce los resultados de Almeida *et al.* [5]: la estructura *bang-singular-bang* de la solución óptima, los instantes de conmutación, el funcional de coste y su escalado con el número de nodos, y el carácter continuo de la variante L^2 . En el camino se documentó, además, la incoherencia de calibración de la capacidad de carga K . El software funciona como debe y queda listo como herramienta para probar otras estrategias de liberación, que es lo que aborda el Capítulo 4.

Capítulo 4

Estrategias de Control y Resultados

Este capítulo presenta y evalúa las cinco estrategias de control estudiadas en este trabajo. Para cada una se describe el planteamiento matemático, la implementación computacional y los resultados de simulación obtenidos. El capítulo concluye con un análisis comparativo sistemático y un análisis de sensibilidad paramétrica que evalúa la robustez de las estrategias ante variaciones de los parámetros biológicos del modelo.

A lo largo del capítulo se utilizan los parámetros de referencia de la Tabla 2.1 y las condiciones iniciales del equilibrio de persistencia. Salvo indicación contraria, el horizonte temporal es $T = 150$ días, la capacidad máxima de liberación es $U_{\text{máx}} = 5000$ mosquitos/día y el objetivo de supresión es $\varepsilon = \bar{F}/4 \approx 2759$ hembras, entendido (como se definió en el Capítulo 2) como una densidad objetivo absoluta y no como una proporción del equilibrio.

4.1. Estrategia 1: Liberación Óptima Continua (L^1)

La estrategia óptima continua determina la función de liberación $u^*(t)$ que minimiza el total acumulado de mosquitos estériles liberados durante el horizonte $[0, T]$, sujeto a alcanzar el objetivo de supresión $F(T) \leq \varepsilon$. El problema de control óptimo correspondiente, formulado en norma L^1 , es:

$$\min_{u \in \mathcal{U}} J_{L^1}(u) = \int_0^T u(t) dt, \quad (4.1)$$

sujeto al sistema S1 (2.3), con $u(t) \in [0, U]$ para todo $t \in [0, T]$ y $F(T) \leq \varepsilon$. Como se establece en el Capítulo 2, la solución óptima adopta una estructura *bang-singular-bang*: un arco inicial de liberación nula, seguido de un arco singular y un arco final de liberación nula.

4.1.1. Resultados

La Figura 4.1 muestra las trayectorias $F^*(t)$ y $u^*(t)$ de la solución óptima para $T = 150$ días.

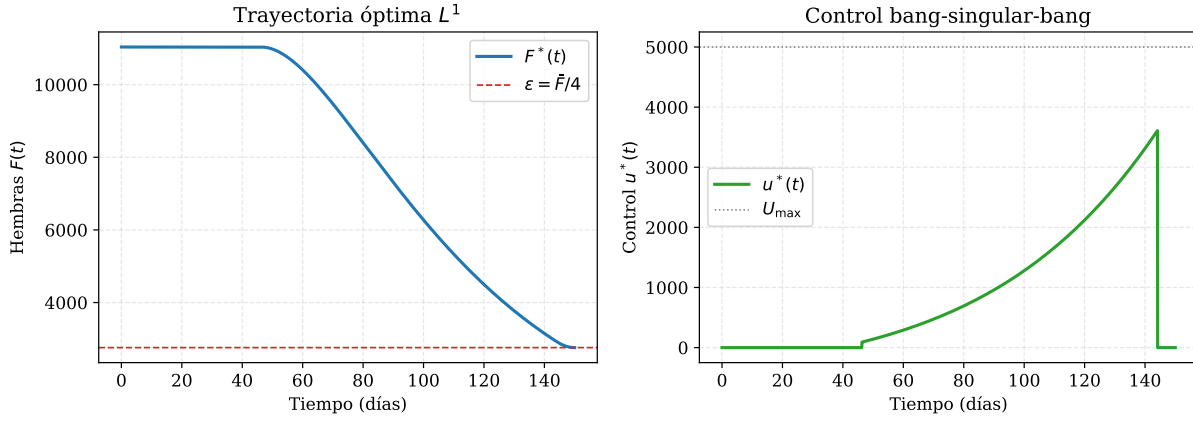


Figura 4.1: Estrategia óptima L^1 : trayectorias de estado y control para $T = 150$ días.

Tabla 4.1: Métricas de la estrategia óptima L^1 para distintos horizontes temporales. $U_{\max} = 5000$, $\varepsilon = \bar{F}/4$.

T (días)	$J_{L^1}(u^*)$	t_ε (días)	$F(T)/\bar{F}$
60	No aplicable ($T < T^* \approx 104$ d, régimen de horizonte corto)		
150	$1,328 \times 10^5$	150	0,250
200	$1,328 \times 10^5$	200	0,250

La Tabla 4.1 recoge estas métricas para distintos horizontes temporales. Para $T > T^* \approx 104$ días el coste óptimo es prácticamente invariante con el horizonte ($J_{L^1} \approx 1,33 \times 10^5$ en $T = 150$ y $T = 200$), lo que confirma la predicción del Teorema 3.3 [5] reproducida en el Capítulo 3: el tiempo adicional se absorbe alargando la fase de espera inicial, sin alterar la parte activa de la campaña. En los dos casos la población alcanza el umbral exactamente al final del horizonte ($F(T) = \varepsilon$). El caso $T = 60$ queda por debajo de T^* , en el régimen de horizonte corto, donde la estructura *bang-singular-bang* de la bisección no es aplicable.

4.2. Estrategia 2: Liberación Constante

La estrategia de liberación constante consiste en liberar una cantidad fija de mosquitos estériles por unidad de tiempo durante todo el horizonte de control:

$$u(t) = u_c, \quad \forall t \in [0, T], \quad (4.2)$$

donde $u_c > 0$ es un parámetro a determinar. Para garantizar la comparabilidad con la estrategia óptima, se ajusta u_c de modo que el coste total sea igual al de la solución óptima: $u_c \cdot T = J_{L^1}(u^*)$.

4.2.1. Resultados

La Figura 4.2 compara la trayectoria de la liberación constante con la de la estrategia óptima, y la Tabla 4.2 recoge sus métricas.

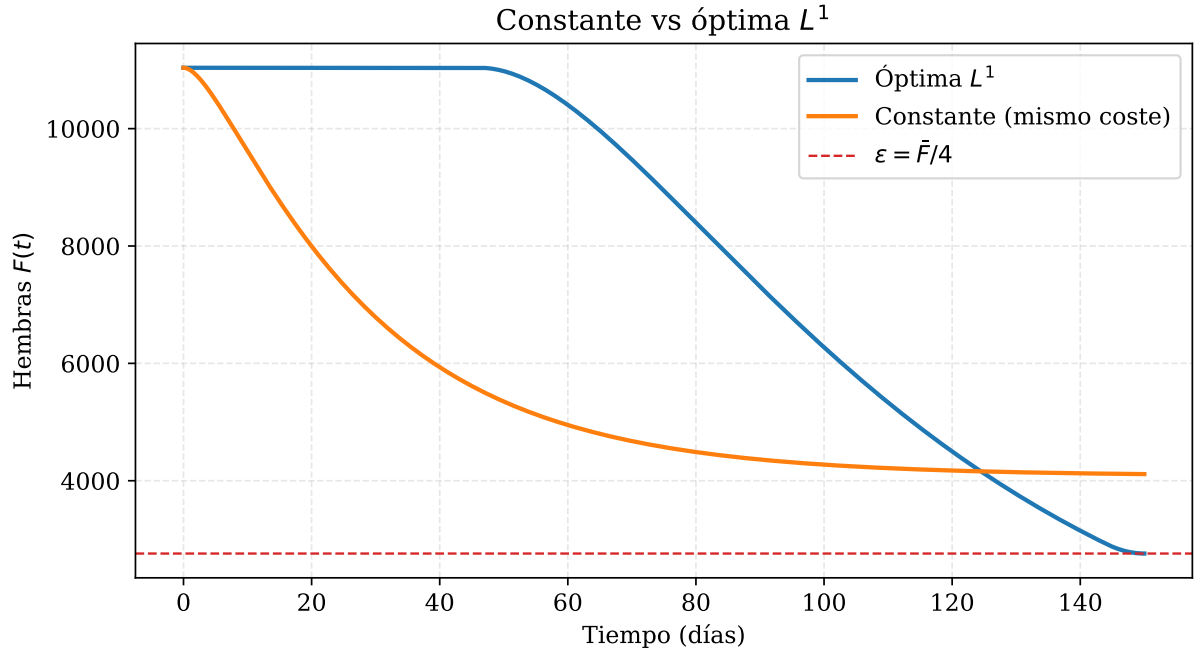


Figura 4.2: Estrategia de liberación constante: trayectorias comparadas con la estrategia óptima L^1 .

Tabla 4.2: Métricas de la estrategia de liberación constante.

T (días)	$J(u_c)$	t_ε (días)	$F(T)/\bar{F}$
60	No aplicable ($T < T^*$, sin óptimo de referencia)		
150	$1,328 \times 10^5$	no alcanza	0,373
200	$1,328 \times 10^5$	no alcanza	0,443

Con el mismo presupuesto total que la estrategia óptima ($J \approx 1,33 \times 10^5$), la liberación constante *no alcanza* el umbral de supresión: termina en $F(T) \approx 0,37 \bar{F}$ para $T = 150$ y en $0,44 \bar{F}$ para $T = 200$, ambos muy por encima de $\varepsilon = 0,25 \bar{F}$. Repartir el mismo esfuerzo de forma uniforme es netamente menos eficaz que concentrarlo en el arco singular óptimo: la dosis se desperdicia al principio, cuando la población aún es alta, y resulta insuficiente al final.

4.3. Estrategia 3: Liberación Periódica Impulsiva

La estrategia de liberación periódica impulsiva modela la realidad operativa de los programas SIT, en los que los mosquitos se liberan en lotes discretos a intervalos regulares. Se define un período de liberación $\tau > 0$ (en días) y una cantidad por lote $c > 0$, de modo que:

$$u(t) = c \sum_{k=0}^{N_\tau} \delta(t - k\tau), \quad (4.3)$$

donde $N_\tau = \lfloor T/\tau \rfloor$ es el número total de liberaciones y $\delta(\cdot)$ es la función delta de Dirac. En la implementación numérica, los impulsos se aproximan como pulsos de duración Δt y amplitud $c/\Delta t$, donde Δt es el paso de integración. Se estudian períodos de liberación de $\tau \in \{3, 7, 14\}$ días, que corresponden respectivamente a liberaciones cada tres días, semanales y quincenales.

La cantidad por lote c se elige de modo que el total liberado por la campaña (c por el número de lotes) iguale el presupuesto óptimo $J_{L^1}(u^*)$ en el mismo horizonte. Así, la periódica se compara con la óptima a igualdad de presupuesto y lo único que cambia es cómo se reparten las liberaciones en el tiempo.

4.3.1. Resultados

La Figura 4.3 muestra las trayectorias para los distintos períodos τ , y la Tabla 4.3 recoge sus métricas.

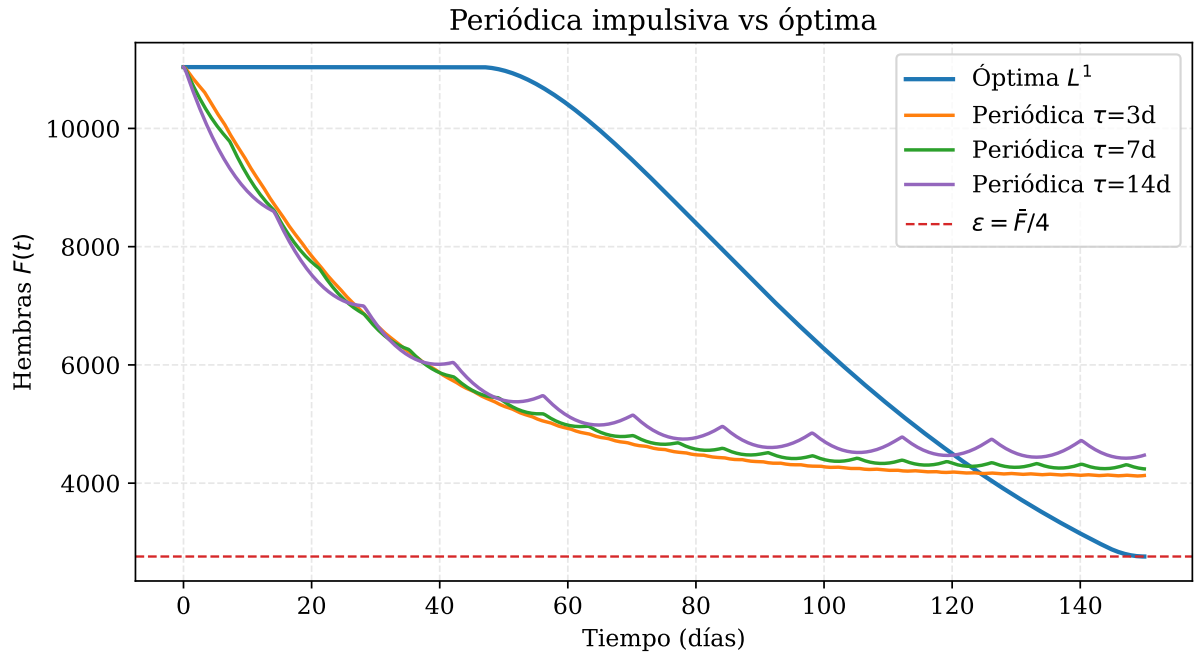


Figura 4.3: Estrategia de liberación periódica impulsiva para distintos periodos τ , comparada con la estrategia óptima L^1 .

Tabla 4.3: Métricas de la estrategia periódica impulsiva para distintos periodos de liberación. $T = 150$, $U_{\max} = 5000$, mismo coste total que la estrategia óptima.

τ (días)	$J(u)$	t_ε (días)	$F(T)/\bar{F}$
3	$1,328 \times 10^5$	no alcanza	0,374
7	$1,328 \times 10^5$	no alcanza	0,384
14	$1,328 \times 10^5$	no alcanza	0,406

Al igual que la liberación constante, la periódica con el mismo presupuesto no alcanza el umbral, y su rendimiento empeora al aumentar el período: de $F(T) = 0,374 \bar{F}$ con $\tau = 3$ días a $0,406 \bar{F}$ con $\tau = 14$ días. Cuanto más espaciados están los lotes, más se aleja el perfil del arco singular óptimo y mayor es la población residual al final del horizonte. Aun así, la diferencia frente a la constante es pequeña: liberar en lotes o de forma continua influye poco; lo decisivo es repartir bien el esfuerzo, como confirma la comparación de la Sección 4.6.

4.4. Estrategia 4: Variante del Funcional de Costo (L^2)

La variante L^2 modifica el criterio de optimización sustituyendo la norma L^1 por la norma L^2 en el funcional de costo:

$$\min_{u \in \mathcal{U}} J_{L^2}(u) = \int_0^T \frac{c}{2} u(t)^2 dt, \quad (4.4)$$

sujeto a las mismas restricciones dinámicas y terminales que el problema (4.1), donde $c > 0$ es el peso de la penalización. La norma L^2 penaliza de forma cuadrática los picos de liberación, favoreciendo soluciones más suaves y sostenidas en el tiempo frente a la estructura discontinua *bang-singular-bang* característica del problema L^1 . Esta variante es analizada por Almeida *et al.* en la Sección 5 de su trabajo [5]. Como los dos funcionales no son directamente comparables ($J_{L^1} = \int u$ frente a $J_{L^2} = \int (c/2) u^2$), la comparación se hace sobre el número total de mosquitos liberados $\int u dt$: los resultados de esta sección muestran que la solución L^2 libera un total un 13,6 % superior al del óptimo L^1 , repartido de forma continua en lugar de concentrado en un arco singular. Esta cifra corresponde al peso $c = 1$ empleado en la verificación del Capítulo 3: el total liberado depende de c (un peso mayor suaviza aún más el perfil a costa de liberar más mosquitos), por lo que el 13,6 % es específico de esta elección y no una constante de la formulación L^2 .

4.4.1. Resultados

La Figura 4.4 compara las soluciones óptimas L^1 y L^2 , y la Tabla 4.4 resume sus métricas.

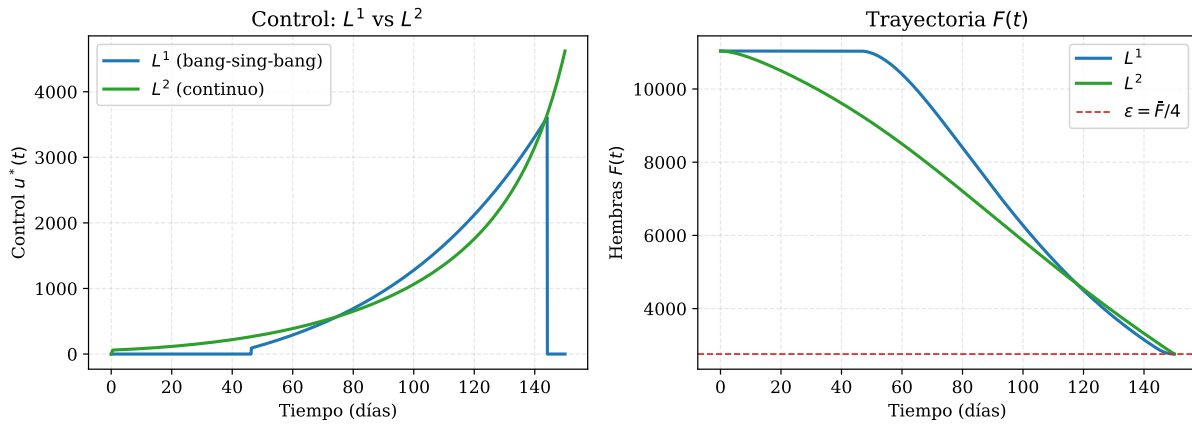


Figura 4.4: Comparación de las soluciones óptimas L^1 y L^2 : trayectorias de control y estado.

Tabla 4.4: Comparación de métricas entre las formulaciones L^1 y L^2 . $T = 150$, $U_{\text{máx}} = 5000$, $\varepsilon = \bar{F}/4$.

Funcional	Total $\int u \, dt$	liberado	t_ε (días)	Suavidad de $u^*(t)$
L^1	$1,328 \times 10^5$		150	Discontinua
L^2	$1,508 \times 10^5$		150	Continua

4.5. Estrategia 5: Esquema de Liberación Impulsiva Óptima

El esquema de liberación impulsiva óptima extiende el problema de control óptimo continuo hacia un contexto discreto, más acorde con la realidad logística de los programas SIT. Se fija un período de liberación τ y se optimizan las cantidades por lote $\{c_k\}_{k=0}^{N_\tau}$ que minimizan el total de mosquitos liberados sujeto al objetivo de supresión:

$$\min_{\{c_k\}} \sum_{k=0}^{N_\tau} c_k, \quad (4.5)$$

sujeto a la dinámica del sistema S1 entre impulsos y la restricción terminal $F(T) \leq \varepsilon$, con $c_k \geq 0$ para todo k . Este problema se resuelve con el método SLSQP (programación cuadrática secuencial), que optimiza directamente el vector de cantidades por lote $\{c_k\}$ e impone la supresión como restricción de desigualdad. Cada impulso se aproxima como un pulso rectangular de corta duración y la trayectoria entre liberaciones se integra con el mismo simulador del sistema S1 empleado en el resto del capítulo.

A diferencia de la estrategia periódica de la Sección 4.3, donde todos los lotes tienen la misma magnitud, aquí los lotes se optimizan individualmente, lo que permite adaptar el esfuerzo de liberación a la dinámica del sistema en cada instante.

4.5.1. Resultados

La Figura 4.5 muestra las magnitudes óptimas de cada lote y la trayectoria resultante, y la Tabla 4.5 la compara con la periódica uniforme.

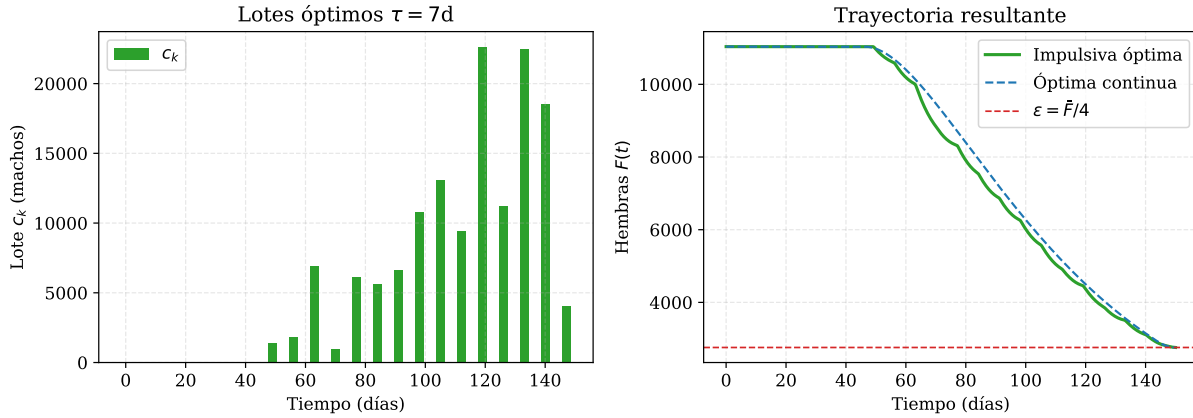


Figura 4.5: Esquema impulsivo óptimo: magnitudes de cada lote c_k y trayectoria de la población de hembras $F(t)$.

Tabla 4.5: Comparación entre la liberación periódica uniforme y la impulsiva óptima para $\tau = 7$ días. $T = 150$, $\varepsilon = \bar{F}/4$.

Esquema	$\sum c_k$	t_ε (días)	$F(T)/\bar{F}$
Periódica uniforme ($\tau = 7$)	$1,328 \times 10^5$	no alcanza	0,384
Impulsiva óptima ($\tau = 7$)	$1,389 \times 10^5$	148,8	0,250

Optimizar individualmente cada lote cambia el resultado de forma cualitativa. La periódica uniforme con el presupuesto del óptimo continuo no llega a suprimir ($F(T) = 0,384 \bar{F}$); en cambio, la impulsiva óptima sí alcanza el umbral ($F(T) = \varepsilon$) concentrando los lotes donde resultan más efectivos. El precio es un total liberado un 4,6 % por encima del óptimo continuo ($1,39 \times 10^5$ frente a $1,33 \times 10^5$): esa diferencia es la penalización por discretizar la liberación en lotes cada siete días, y sitúa a la impulsiva óptima entre el óptimo continuo y las heurísticas uniformes. El problema impulsivo no es convexo (la supresión $F(T) \leq \varepsilon$ depende de forma no lineal de los lotes $\{c_k\}$), por lo que el SLSQP solo garantiza un óptimo local; con la inicialización uniforme estándar converge de forma reproducible al valor reportado.

4.5.2. Impulsivización de la acción óptima

Una alternativa al esquema anterior es no optimizar los lotes desde cero, sino partir de la solución óptima continua $u^*(t)$: se divide el horizonte en intervalos de período τ y se asigna

a cada uno un único impulso cuya masa iguala el esfuerzo óptimo gastado en ese intervalo, $c_k = \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} u^*(t) dt$. Por construcción, el presupuesto total coincide con el de la óptima continua ($J_{L^1} \approx 1,33 \times 10^5$), de modo que la comparación se hace a igualdad de coste.

La Tabla 4.6 y la Figura 4.6 recogen el resultado. Al discretizar el esfuerzo óptimo, la población final queda algo por encima del umbral, y la desviación crece con el período: $F(T) = 0,252 \bar{F}$ con $\tau = 3$ d (apenas un 0,8 % por encima de ε), $0,260 \bar{F}$ con $\tau = 7$ d y $0,289 \bar{F}$ con $\tau = 14$ d. Con el mismo presupuesto que la óptima continua, impulsivizar su acción casi alcanza la supresión, tanto más cuanto más corto es el período.

La comparación con la impulsiva óptima de lotes (Sección 4.5, que ajusta cada c_k con SLSQP) es directa: aquella alcanza el umbral exacto ($F(T) = \varepsilon$) pero gastando un 4,6 % más ($1,39 \times 10^5$), mientras que impulsivizar la óptima se queda a un 4 % de ε (para $\tau = 7$ d) sin gastar un mosquito de más. Ambas vías producen resultados muy parecidos: optimizar cada lote solo refina marginalmente el reparto del esfuerzo óptimo en impulsos, y para períodos finos las dos son prácticamente equivalentes.

Tabla 4.6: Impulsivización de la acción óptima: $u^*(t)$ se reparte en impulsos de período τ con $c_k = \int u^*$ por intervalo, al mismo presupuesto que la óptima continua. La última fila es la impulsiva óptima de lotes (SLSQP) de la Sección 4.5, como referencia. $T = 150$, $U_{\text{máx}} = 5000$, $\varepsilon = \bar{F}/4$.

Esquema	Total $\sum c_k$	liberado $F(T)/\bar{F}$
Impulsivización de u^* ($\tau = 3$ d)	$1,325 \times 10^5$	0,252
Impulsivización de u^* ($\tau = 7$ d)	$1,327 \times 10^5$	0,260
Impulsivización de u^* ($\tau = 14$ d)	$1,328 \times 10^5$	0,289
Impulsiva óptima SLSQP ($\tau = 7$ d)	$1,389 \times 10^5$	0,250

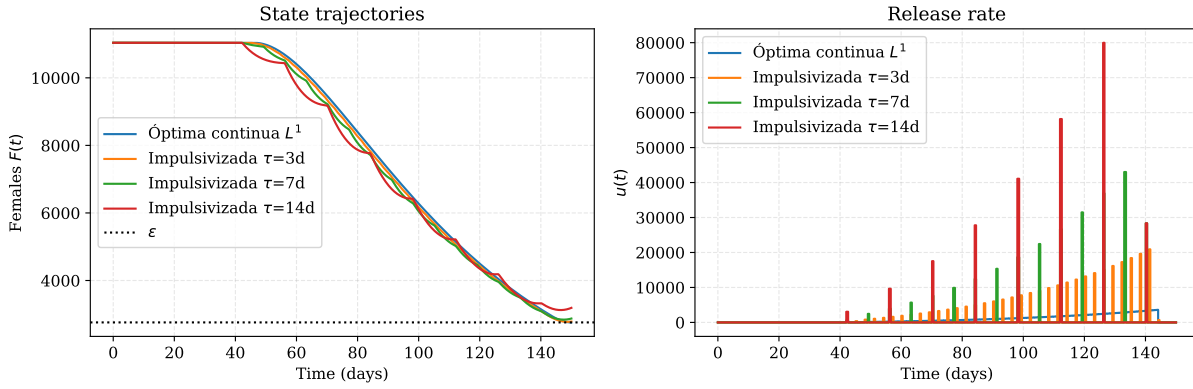


Figura 4.6: Impulsivización de la acción óptima: trayectorias $F(t)$ de la óptima continua L^1 y de la impulsivizada para $\tau = 3, 7$ y 14 d, todas al mismo presupuesto que la óptima. Cuanto mayor es el período, más se aleja $F(T)$ del umbral $\varepsilon = \bar{F}/4$.

4.6. Análisis Comparativo

La Tabla 4.7 resume las métricas principales de las cinco estrategias estudiadas bajo las mismas condiciones de simulación, permitiendo una comparación directa de su eficiencia.

Tabla 4.7: Comparativa global de las cinco estrategias de control. $T = 150$ días, $U_{\max} = 5000$, $\varepsilon = \bar{F}/4$.

Estrategia	Total liberado $\int u dt$	t_ε (días)	$F(T)/\bar{F}$
Óptima continua L^1	$1,328 \times 10^5$	150	0,250
Constante	$1,328 \times 10^5$	no alcanza	0,373
Periódica ($\tau = 7$ días)	$1,328 \times 10^5$	no alcanza	0,384
Óptima L^2	$1,508 \times 10^5$	150	0,250
Impulsiva óptima ($\tau = 7$)	$1,389 \times 10^5$	148,8	0,250

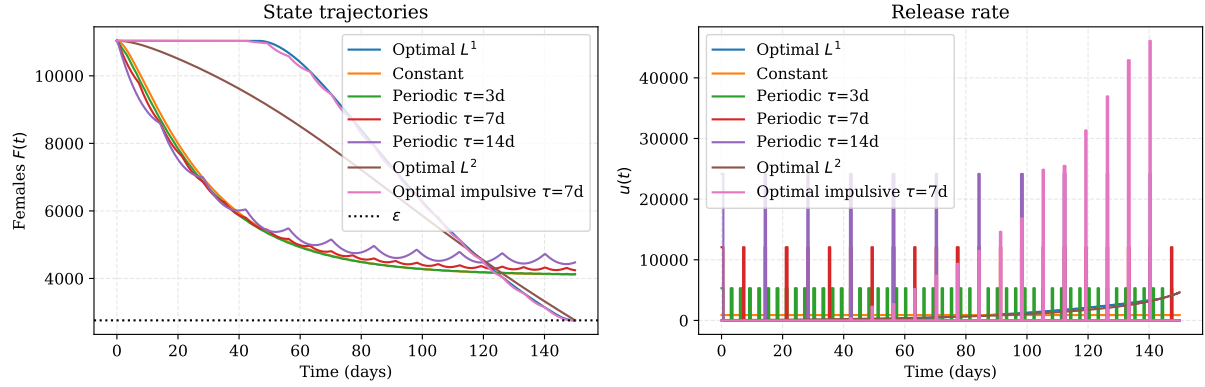


Figura 4.7: Comparación de trayectorias $F(t)$ de las cinco estrategias de control.

La Figura 4.7 superpone las trayectorias $F(t)$ de las cinco estrategias. La comparación muestra que solo tres de las cinco estrategias alcanzan el umbral $F(T) = \varepsilon$: las dos óptimas (L^1 y L^2) y la impulsiva óptima. La constante y la periódica, con el mismo presupuesto que el óptimo, se quedan en torno a $0,38 \bar{F}$, lejos del objetivo. Entre las que sí suprimen, el óptimo continuo L^1 es el más barato ($1,33 \times 10^5$ mosquitos liberados); la impulsiva óptima lo iguala en supresión pagando un 4,6 % más, y la L^2 un 13,6 % más a cambio de un control suave y sin conmutaciones. Lo determinante, por tanto, es repartir el esfuerzo de forma óptima, con independencia de que la liberación sea continua o discreta: cuando se optimiza, tanto el esquema continuo como el impulsivo logran la supresión; cuando se reparte de forma uniforme, no.

4.7. Análisis de Sensibilidad

El análisis de sensibilidad evalúa cómo varía el rendimiento de las estrategias ante perturbaciones en los parámetros biológicos del modelo. Se estudia el impacto de variaciones del $\pm 20\%$ sobre tres parámetros: la tasa de mortalidad de hembras δ_F , la tasa de eclosión ν_E y la capacidad de carga K . En todos los casos el umbral ε se mantiene fijo en su valor nominal absoluto ($\varepsilon = 2759$ hembras): lo que cambia es la biología supuesta, no la meta epidemiológica. Esta convención determina la magnitud de las variaciones de coste; reescalar ε con cada equilibrio $\bar{F}$ perturbado las reduciría notablemente. La Tabla 4.8 recoge las variaciones del coste óptimo y la Figura 4.8 las representa gráficamente.

Tabla 4.8: Análisis de sensibilidad: variación del coste óptimo $J_{L^1}(u^*)$ ante perturbaciones de $\pm 20\%$ en los parámetros biológicos. $T = 150$, $U_{\max} = 5000$, $\varepsilon = \bar{F}/4$.

Parámetro	Variación	$J_{L^1}(u^*)$	t_ε (días)	$\Delta J/J_0$ (%)
δ_F	-20 %	$2,267 \times 10^5$	150	+70,5
	+20 %	$0,845 \times 10^5$	150	-36,5
ν_E	-20 %	$0,747 \times 10^5$	150	-43,8
	+20 %	$2,078 \times 10^5$	150	+56,3
K	-20 %	$0,752 \times 10^5$	150	-43,4
	+20 %	$2,066 \times 10^5$	150	+55,4

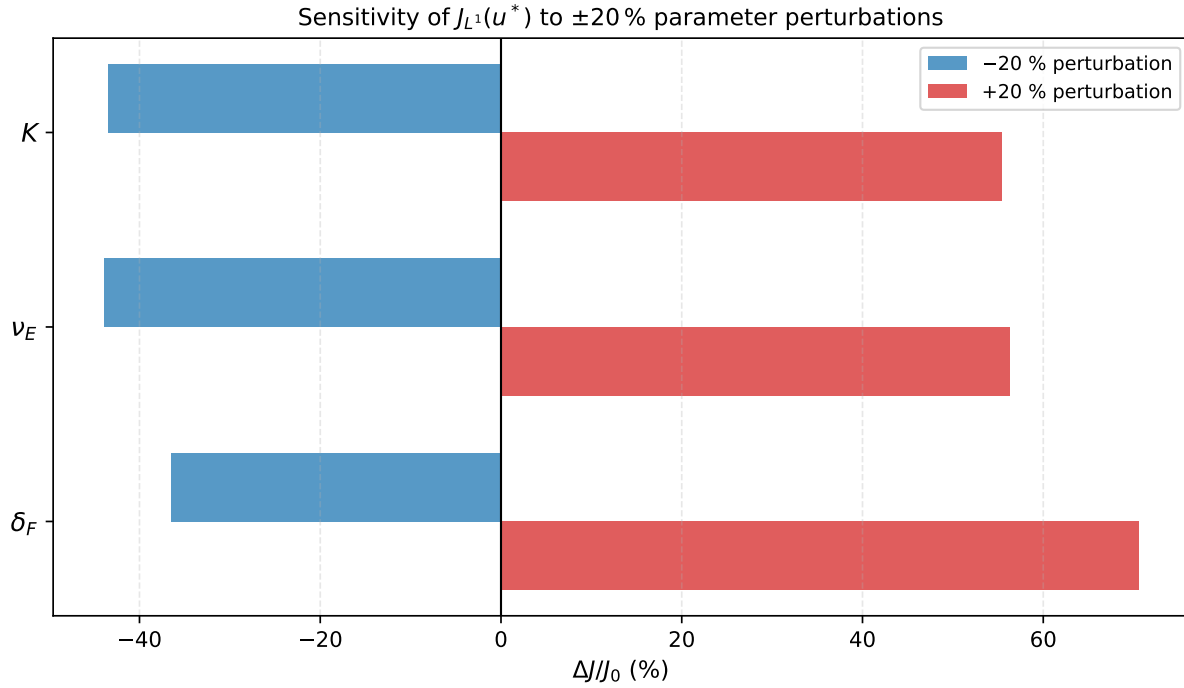


Figura 4.8: Análisis de sensibilidad: impacto relativo de los parámetros biológicos sobre el coste óptimo $J_{L^1}(u^*)$.

El coste óptimo es muy sensible a los tres parámetros: una perturbación del 20 % produce variaciones de entre el 36 y el 70 %. El parámetro más crítico es la mortalidad de hembras δ_F : reducirla un 20 % dispara el coste un 70,5 %, porque unas hembras más longevas exigen mucho más esfuerzo para llevar la población hasta el umbral. La tasa de emergencia ν_E y la capacidad de carga K tienen un efecto parecido entre sí (en torno al $\pm 55\%$) y en el sentido esperado: más

adultos emergentes o mayor capacidad del medio implican una población mayor y, por tanto, una campaña más cara. Todos los signos son coherentes con la intuición biológica.

El fuerte impacto de ν_E merece una matización. Almeida *et al.* [5] observan que este parámetro apenas influye en el total de mosquitos liberados, en aparente contradicción con el ± 56 % obtenido aquí. La diferencia es de convención, no de fondo: su análisis mantiene el objetivo relativo $\varepsilon = \bar{F}/4$, que se reajusta automáticamente al variar ν_E (una emergencia menor reduce a la vez la población inicial y el umbral), mientras que en este análisis ε se fija en términos absolutos. Al imponer el mismo objetivo relativo, nuestras propias simulaciones reducen la sensibilidad a ν_E a un orden moderado, en línea con su observación; la fuerte dependencia reportada en la Tabla 4.8 es, por tanto, consecuencia directa de tratar ε como una meta epidemiológica absoluta.

Esta sensibilidad tiene una consecuencia práctica importante. Como el control óptimo se calcula en lazo abierto a partir de unos parámetros nominales, un error de calibración, especialmente en K , que es difícil de medir en campo, se traduce en un coste real muy alejado del previsto. La misma fragilidad ya se observó en el Capítulo 3 al comparar con los valores de referencia. Este es el principal argumento a favor de un control en lazo cerrado, capaz de corregir sobre la marcha las desviaciones del modelo, que se explora en las dos secciones siguientes.

4.8. Compromiso de diseño: tiempo frente a capacidad

Las estrategias anteriores se evaluaron con el objetivo de referencia $\varepsilon = \bar{F}/4$ (una supresión del 75 %). Conviene añadir una breve reflexión de diseño para un objetivo más exigente, del orden del 90 % ($\varepsilon = \bar{F}/10$), habitual en la evaluación de programas aplicados de control vectorial. Alcanzarlo plantea una disyuntiva operativa: el gestor del programa dispone de dos palancas (el horizonte temporal T de la campaña y la capacidad máxima de liberación $U_{\text{máx}}$ de la biofábrica) y conviene saber cómo afecta cada una a la solución óptima.

Alargar el horizonte con la capacidad fija ($U_{\text{máx}} = 5000$) no cambia la naturaleza de la solución (Figura 4.9). Una vez superado el horizonte mínimo $T^* \approx 164$ d, aumentar T no altera ni el tipo de control ni el coste: el arco singular activo y el total liberado ($\approx 4,4 \times 10^5$, unas tres veces el del objetivo del 75 %) permanecen invariantes, y el único efecto es alargar la fase de espera inicial.

Aumentar la capacidad con el horizonte fijo, sí modifica la estructura del control (Figura 4.10). Con capacidad escasa el control se satura en $U_{\text{máx}}$ durante un tramo prolongado (régimen *limitado por capacidad*); con capacidad amplia, discurre por el interior del intervalo admisible (arco singular puro). El arco singular tiene un valor de pico intrínseco (≈ 8800 individuos/día, fijado por la dinámica de la población y no por $U_{\text{máx}}$): por encima de esa capacidad crítica $U^* \approx 8800$, ampliar la biofábrica no aporta nada. Pasar de $U_{\text{máx}} = 5000$ a U^* reduce el coste de forma

moderada ($\approx 5\%$) y acorta el horizonte mínimo, pero después se satura.

El arco singular (la parte activa de la intervención) es intrínseco: lo fija el estado de la población a través de la realimentación (2.14), no las palancas operativas, que solo gobiernan la viabilidad del objetivo y la duración de las fases de espera. El objetivo del 90 % resulta más caro (casi triplicando) y más lento (T^* pasa de ≈ 104 a ≈ 164 d) que el del 75 %, lo que ilustra el coste marginal creciente de una supresión profunda. Por debajo de T^* la estructura transita al régimen de choque inicial del Teorema 3.3 [5], que el método estructural de bisección no resuelve y queda fuera de esta discusión. Esta dependencia de la solución óptima respecto del objetivo y de la calibración (ya advertida en el análisis de sensibilidad, Sección 4.7) refuerza el argumento a favor de un control en lazo cerrado que se desarrolla a continuación.

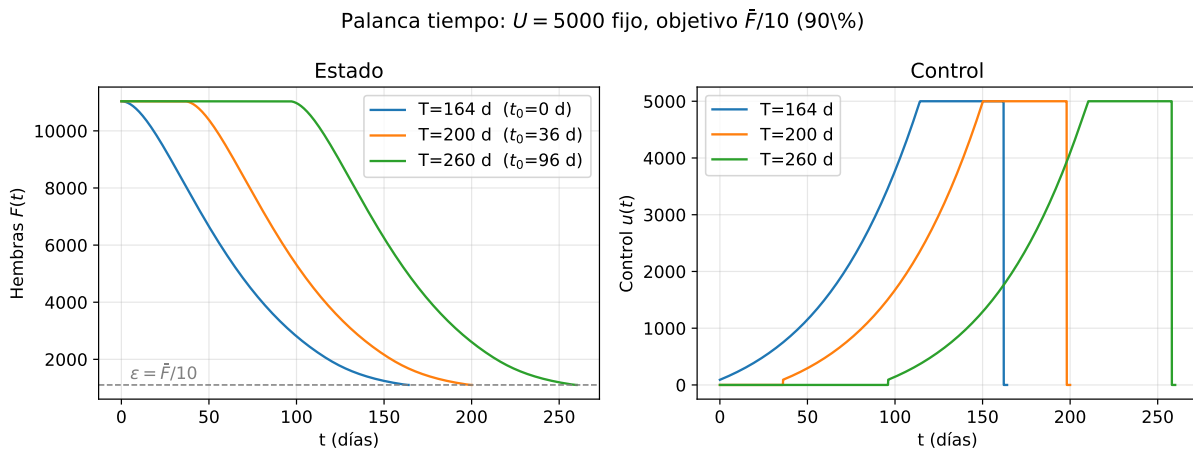


Figura 4.9: Palanca temporal (capacidad fija $U_{\text{máx}} = 5000$) para el objetivo $\varepsilon = \bar{F}/10$. Superado $T^* \approx 164$ d, aumentar T solo alarga la espera inicial: el arco singular y el coste no cambian.

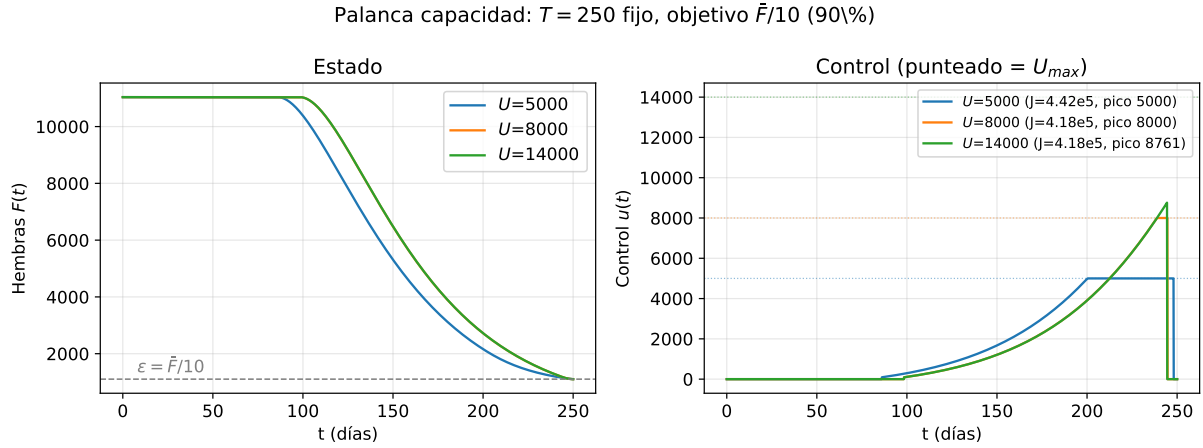


Figura 4.10: Palanca de capacidad (horizonte fijo $T = 250$ d) para el objetivo $\varepsilon = \bar{F}/10$. Con capacidad escasa el control se satura en $U_{\max}$ (régimen limitado por capacidad); por encima de $U^* \approx 8800$ el control es interior y la capacidad adicional no reduce el coste.

4.9. Una política de control por aprendizaje por refuerzo

El análisis de sensibilidad de la Sección 4.7 dejó una conclusión clara: la estrategia óptima de Almeida *et al.* [5] es frágil (se calcula una sola vez en lazo abierto con parámetros nominales y no corrige las desviaciones del modelo real). La literatura ofrece una alternativa robusta, el control sin modelo de Join *et al.* [6], pero a costa de saturar las liberaciones (hasta 10^6 mosquitos, con un coste “difícil de soportar” que los propios autores reconocen) y sin ninguna noción de optimalidad. ¿Puede un controlador en lazo cerrado ser a la vez robusto y consciente del coste? Esta sección explora esa vía con aprendizaje por refuerzo (RL)¹ (un enfoque que, hasta donde alcanza la bibliografía revisada, no se ha aplicado nunca al diseño de la política de liberación de la SIT, y constituye, por tanto, una aportación metodológica).

Planteamiento. El problema se formula como un proceso de decisión de Markov sobre el sistema reducido S1: el estado observado es (F, M_s) normalizado, la acción es la tasa de liberación $u \in [0, U_{\max}]$ y la recompensa penaliza cada mosquito liberado más una penalización terminal si $F(T) > \varepsilon$ (el mismo objetivo absoluto de coste mínimo de la memoria). Para forzar la robustez se entrena con *domain randomization*² [25]: en cada episodio se perturban aleatoriamente $\pm 30\%$ los

¹Reinforcement Learning es una rama de la inteligencia artificial y el control óptimo que formaliza el problema de aprendizaje a través de la interacción de un agente con un entorno dinámico, modelado matemáticamente como un Proceso de Decisión de Markov (MDP).

²Domain Randomization es una técnica de regularización en el aprendizaje por refuerzo orientada a maximizar la robustez del agente. Consiste en perturbar aleatoriamente las propiedades físicas o los parámetros del entorno de simulación en cada ciclo de entrenamiento dentro de un rango predefinido. Al exponer al agente a una amplia

cuatro parámetros más influyentes según el análisis de sensibilidad (β_E , δ_F , ν_E , K). Se entrena con el algoritmo PPO³ de Schulman *et al.* [26] (implementado en Stable-Baselines3 de Raffin *et al.* [27]), explorando una rejilla de 40 configuraciones de hiperparámetros (cinco semillas cada una, 200 entrenamientos en total) sobre el servidor de cómputo.

Compromiso coste–robustez. El peso de la penalización terminal gobierna un compromiso claro entre coste y robustez (Figura 4.11). Aumentándolo, la política aprende a suprimir de forma más conservadora: la tasa de éxito bajo ± 30 % de incertidumbre sube del 41 % (coste $1,60 \times 10^5$) al 90 % (coste $2,1 \times 10^5$), de manera monótona. La mejor configuración alcanza un $90,5 \pm 2,0$ % de éxito bajo ± 30 % y supresión completa (100 %) en condiciones nominales en las cinco semillas entrenadas, con un coste medio de $\approx 2,1 \times 10^5$ (un 58 % por encima del óptimo en lazo abierto, $1,33 \times 10^5$). Ese sobrecoste es el precio de la robustez en lazo cerrado; y sigue estando muy por debajo de la saturación a 10^6 del controlador sin modelo de Join *et al.*

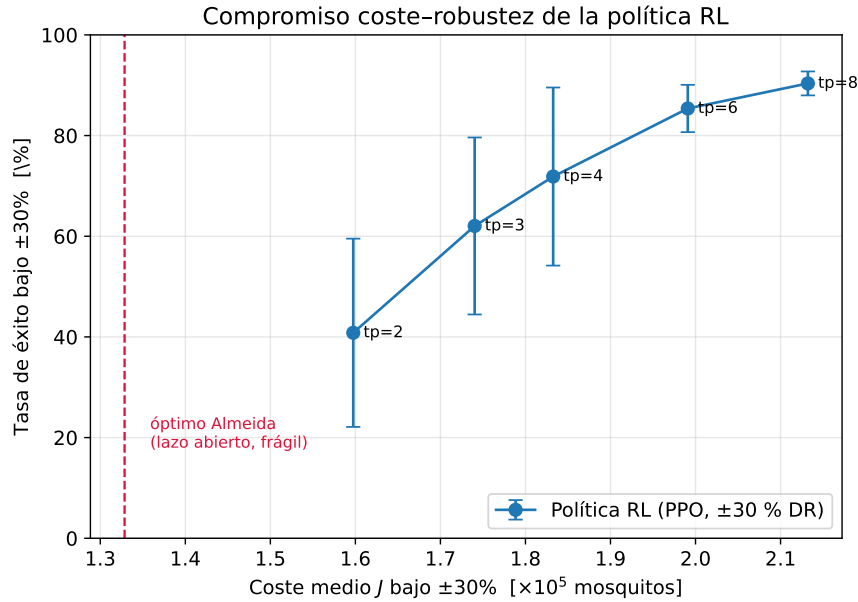


Figura 4.11: Compromiso coste–robustez de la política RL al variar el peso de la penalización terminal. Cada punto es la media sobre las semillas (barras: desv. típica del éxito); la línea roja marca el óptimo frágil en lazo abierto.

variedad de entornos dinámicos, se evita el sobreajuste a los valores nominales y se mitiga el problema de la discrepancia entre el modelo simulado y la realidad logística o biológica (efecto conocido como *reality gap*).

³Proximal Policy Optimization es un algoritmo de aprendizaje por refuerzo de la familia de gradiente de política (*policy gradient*). Fue desarrollado por OpenAI en 2017 y se ha convertido en el estándar de la industria debido a su estabilidad y eficiencia computacional.

Estructura de la política. La política aprendida es cualitativamente distinta de la solución óptima (Figura 4.12). Frente a la estructura *bang-singular-bang* de Almeida *et al.* [5] (que espera sin liberar hasta $t \approx 46$ d y entonces dispara el arco singular), el agente RL actúa desde el primer día con un perfil suave y continuo: una ráfaga inicial, una fase sostenida y una rampa final que lleva la población hasta el umbral. Es una respuesta de realimentación: el control se decide en cada instante a partir del estado observado, lo que explica su robustez frente a parámetros que no coinciden con los nominales. Ambas trayectorias alcanzan ε , pero por caminos opuestos: el óptimo es rígido; la política RL, aunque subóptima, se adapta.

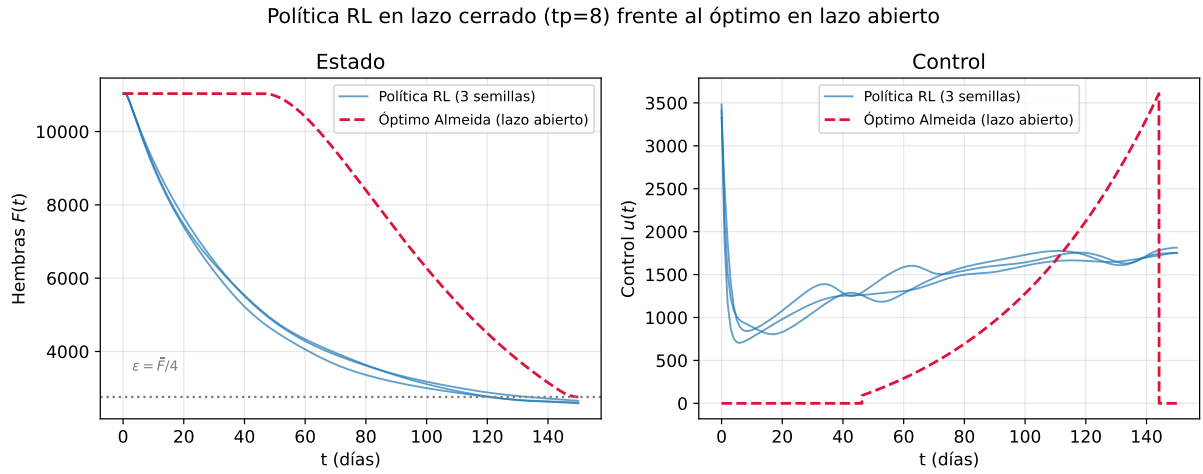


Figura 4.12: Política RL en lazo cerrado (tres semillas, peso alto) frente al óptimo en lazo abierto de Almeida. La RL actúa de forma continua desde $t = 0$; el óptimo espera y concentra el esfuerzo en el arco singular. Ambas alcanzan $\varepsilon = \bar{F}/4$.

Limitaciones y hallazgos. El resultado es una prueba de concepto, no un método cerrado, con límites claros. Primero, el sobrecoste (+58 %) es alto: la robustez tiene un coste. Segundo, un 100 % de éxito bajo ± 30 % es inalcanzable con una política fija, porque las perturbaciones más adversas (p.ej. δ_F baja) encarecen la supresión hasta un 70 % (Sección 4.7) y exigirían sobreliberar en todos los escenarios. Tercero (y contra intuitivo), el barrido reveló que el entrenamiento solo converge de forma fiable con *tasa de aprendizaje constante* y penalización alta; el decaimiento del *learning rate* y entrenar el doble de iteraciones, lejos de ayudar, degradaron la convergencia. La estabilidad del entrenamiento entre semillas es, por tanto, una cuestión abierta. Cuarto, por coste de cómputo el entorno de RL integra con Euler explícito ($\Delta t = 1$ d) —una evaluación del modelo por paso, frente al RK45 adaptativo del resto de la memoria—, lo que abarata los millones de pasos del entrenamiento. El esquema es menos fino, pero el error de discretización sobre $F(T)$ es inferior al 0,6 % en todo el rango $u \in [0, U_{\text{máx}}]$, de modo que no afecta a los resultados de coste ni robustez. Aun así, la dirección queda demostrada: un agente RL entrenado con domain randomization aprende una política en lazo cerrado robusta a la incertidumbre paramétrica,

situándose entre el óptimo frágil y el control sin modelo (ciego al coste). Su desarrollo como controlador desplegable (con estimación del estado real y validación *sim-to-real*) se plantea como línea de trabajo futuro.

Capítulo 5

Conclusiones

Este capítulo sintetiza las aportaciones principales del trabajo, evalúa el grado de cumplimiento de los objetivos planteados en el Capítulo 1 y propone líneas de investigación futura que amplían el alcance de los resultados obtenidos.

5.1. Conclusiones del Trabajo

Este Trabajo de Fin de Grado ha abordado la optimización de los protocolos de liberación de mosquitos estériles en el marco de la Técnica del Insecto Estéril (SIT), tomando como referencia el modelo biomatemático y el problema de control óptimo formulados por Almeida *et al.* [5]. Los resultados obtenidos permiten extraer las siguientes conclusiones:

Sobre la verificación del modelo de referencia. La implementación computacional desarrollada ha permitido reproducir los resultados numéricos de Almeida *et al.* con una precisión consistente con la discretización temporal empleada. El modelo simplificado S1 constituye una aproximación válida del modelo completo S2 bajo los parámetros biológicos de referencia, tal como se demuestra en el Capítulo 3. La estructura *bang-singular-bang* de la solución óptima, predicha analíticamente en el trabajo de referencia, ha sido confirmada computacionalmente. La reproducción del coste óptimo ($J \approx 1,33 \times 10^5$) destapó además una incoherencia en la calibración de la referencia: Almeida *et al.* no publican la capacidad de carga K , y ni su densidad inicial declarada ni su coste tabulado son mutuamente consistentes con su propio anclaje de campo (Sección 3.4.4); el margen del 9 % frente a su coste responde a esa incoherencia, no a la implementación.

Sobre la comparación de estrategias. Del análisis comparativo se concluye que solo las estrategias que optimizan el reparto del esfuerzo (la óptima continua L^1 , la variante L^2 y la impulsiva óptima) alcanzan el umbral de supresión ε . Las heurísticas de uso común, liberación

constante y periódica uniforme, con el mismo presupuesto que el óptimo ($J \approx 1,33 \times 10^5$ mosquitos) no llegan a suprimir: terminan en torno a $0,38 \bar{F}$, muy por encima del objetivo. El factor determinante no es que la liberación sea continua o discreta, sino concentrar el esfuerzo en el momento óptimo.

Sobre la variante L^2 . La formulación con funcional L^2 produce un control continuo y sin conmutaciones, ventajoso cuando la capacidad de producción diaria es limitada, pero libera un 13,6 % más de mosquitos que el óptimo L^1 ($1,51 \times 10^5$ frente a $1,33 \times 10^5$): ese es el precio de suavizar el perfil de liberación.

Sobre el esquema impulsivo óptimo. Optimizar individualmente cada lote permite alcanzar el umbral con un coste de $1,39 \times 10^5$ (solo un 4,6 % por encima del óptimo continuo) superando a la periódica uniforme del mismo período, que no suprime. Es, por tanto, la opción logísticamente más realista que sí cumple el objetivo.

Sobre la fragilidad del óptimo en lazo abierto. El análisis de sensibilidad no indica robustez, sino lo contrario: el coste óptimo es muy sensible a los parámetros biológicos. Una perturbación del ± 20 % lo altera entre un 36 y un 70 %, y el parámetro más crítico es la mortalidad de hembras δ_F (reducirla un 20 % dispara el coste un 70,5 %). Como el control se calcula una sola vez en lazo abierto con parámetros nominales, esta fragilidad es la principal limitación práctica de la estrategia de referencia, y es la que motiva las dos extensiones que cierran el Capítulo 4.

Síntesis de los experimentos. El trabajo recorre un itinerario completo: reproduce y verifica el control óptimo de Almeida *et al.* [5], cuantifica su ventaja frente a las heurísticas habituales y expone su principal debilidad (la fragilidad ante la incertidumbre paramétrica). Sobre ese diagnóstico se construyen las dos respuestas que cierran el Capítulo 4: el estudio del espacio de diseño (Sección 4.8), que muestra cómo escalar el objetivo de supresión jugando con horizonte y capacidad, y una política de control por aprendizaje por refuerzo (Sección 4.9) que, entrenada con *domain randomization*, sostiene un 90 % de éxito bajo ± 30 % de incertidumbre y la supresión completa en condiciones nominales, a cambio de un sobrecoste del 58 %. En la SIT, optimalidad y robustez se compran por separado: el óptimo en lazo abierto es barato pero rígido, y dotar al programa de robustez (por capacidad, por realimentación o por aprendizaje) tiene un coste que este trabajo cuantifica.

La Tabla 5.1 evalúa el grado de cumplimiento de los objetivos específicos planteados en la Sección 1.1.

Tabla 5.1: Evaluación del cumplimiento de los objetivos específicos del TFG.

#	Objetivo	Estado
1	Estudiar y reproducir el modelo matemático de dinámica poblacional del <i>Aedes polynesiensis</i> bajo la acción de la SIT.	Completado
2	Formular el problema de control óptimo y analizar las condiciones de optimalidad del trabajo de referencia.	Completado
3	Implementar y verificar computacionalmente la solución óptima.	Completado
4	Comparar la estrategia óptima frente a liberación constante, periódica y variante L^2 .	Completado
5	Extender el modelo hacia un esquema de liberación impulsiva óptima.	Completado
6	Análisis de sensibilidad sobre los parámetros biológicos del modelo.	Completado
7	Proponer y evaluar una estrategia de control en lazo cerrado robusta mediante aprendizaje por refuerzo.	Completado (prueba de concepto)

5.2. Líneas de Trabajo Futuro

De este trabajo se derivan varias líneas de investigación:

Control en lazo cerrado. La estrategia óptima de Almeida *et al.* [5] es de lazo abierto: el protocolo de liberación se calcula una única vez en base al estado inicial y se ejecuta sin retroalimentación. Una extensión natural consiste en diseñar un controlador de lazo cerrado en el que la tasa de liberación $u(t)$ se ajuste dinámicamente en función del estado actual de la población silvestre $F(t)$. Este enfoque, estudiado por Bliman *et al.* [22], permitiría corregir desviaciones causadas por errores en la estimación inicial de la población o por perturbaciones externas (como la re-invasión desde áreas adyacentes), mejorando la robustez del programa de control.

Incorporación de estacionalidad. El modelo de Almeida *et al.* [5] asume parámetros biológicos constantes a lo largo del tiempo. En regiones endémicas, los parámetros de natalidad

y mortalidad varían estacionalmente con la temperatura y las precipitaciones. Incorporar esta variabilidad temporal en el modelo permitiría identificar las ventanas temporales óptimas para iniciar los programas de liberación y maximizar la eficiencia de la intervención.

Extensión espacial. El modelo actual es puramente temporal y no considera la distribución espacial de la población de mosquitos. La incorporación de una dimensión espacial mediante modelos de reacción-difusión o modelos multiparche permitiría abordar preguntas relevantes para la práctica, como la localización óptima de los puntos de liberación o el efecto de la re-invasión desde zonas no tratadas.

Análisis de robustez ante incertidumbre estocástica. El modelo dinámico adoptado es determinista. Una extensión estocástica (mediante ecuaciones diferenciales estocásticas o modelos de Markov) permitiría cuantificar el riesgo de fracaso del programa de supresión ante fluctuaciones aleatorias en la dinámica poblacional, especialmente relevantes cuando la población se acerca al umbral de extinción.

Validación con programas reales. Los parámetros de este trabajo proceden de un único sitio: el atolón de Tetiaroa, en la Polinesia Francesa, donde Strugarek *et al.* [15] los calibraron con experimentos de marcado-suelta-recaptura. Validar el modelo con datos de programas de control a gran escala, como el *Project Wolbachia* de Singapur [9], mostraría si las estrategias siguen funcionando fuera de ese sitio.

Apéndice A

Código Fuente y Tablas de Parámetros

Este anexo contiene el código fuente de los módulos principales desarrollados en Python para la simulación y optimización de las estrategias de control estudiadas en este trabajo, así como las tablas de parámetros biológicos completas utilizadas en las simulaciones.

A.1. Módulo de Simulación

El siguiente código implementa el módulo de simulación basado en `solve_ivp` para los modelos S1 y S2.

Lista A.1: Modulo de simulacion: integracion numerica de los modelos S1 y S2.

```
1 import numpy as np
2 from scipy.integrate import solve_ivp
3
4 # Parametros biologicos de referencia (Almeida et al., 2022, Tabla 1)
5 PARAMS = {
6     'beta_E' : 10.0,      # Tasa de oviposicion (dia^-1)
7     'delta_E' : 0.03,     # Mortalidad de huevos (dia^-1)
8     'delta_M' : 0.10,     # Mortalidad de machos silvestres (dia^-1)
9     'delta_F' : 0.04,     # Mortalidad de hembras (dia^-1)
10    'delta_s' : 0.12,     # Mortalidad de machos esteriles (dia^-1)
11    'nu_E'    : 0.05,     # Tasa de eclosion (dia^-1)
12    'nu'      : 0.49,     # Proporcion de pupas -> hembras
13    'gamma_s' : 1.00,     # Competitividad de machos esteriles
14    'K'       : 18258,    # Capacidad de carga (calibrada a F_bar=11037)
15 }
16
17 def model_S1(t, y, u_func, p):
```

```

18     """Sistema simplificado S1: variables F y Ms (reduccion QSSA de S2).
19         """
20     F, Ms = y
21     u = u_func(t)
22     # Equilibrios cuasi-estacionarios E*(F) y M*(F)
23     E_star = (p['beta_E'] * F
24               / (p['beta_E'] * F / p['K'] + p['nu_E'] + p['delta_E']))
25     M_star = (1 - p['nu']) * p['nu_E'] / p['delta_M'] * E_star
26     # Funcion no lineal de reclutamiento f(F, Ms)
27     dF = (p['nu'] * p['nu_E'] * E_star
28          * M_star / (M_star + p['gamma_s'] * Ms) - p['delta_F'] * F)
29     dMs = u - p['delta_s'] * Ms
30     return [dF, dMs]
31
32 def model_S2(t, y, u_func, p):
33     """Sistema completo S2: variables E, M, F, Ms."""
34     E, M, F, Ms = y
35     u = u_func(t)
36     dE = (p['beta_E'] * F * (1 - E / p['K'])
37          - (p['nu_E'] + p['delta_E']) * E)
38     dM = (1 - p['nu']) * p['nu_E'] * E - p['delta_M'] * M
39     dF = (p['nu'] * p['nu_E'] * E
40          * M / (M + p['gamma_s'] * Ms) - p['delta_F'] * F)
41     dMs = u - p['delta_s'] * Ms
42     return [dE, dM, dF, dMs]
43
44 def simulate(model, y0, T, u_func, p, n_points=300):
45     """Integra el modelo en [0, T] con la estrategia u_func dada."""
46     t_span = (0, T)
47     t_eval = np.linspace(0, T, n_points)
48     sol = solve_ivp(
49         fun=lambda t, y: model(t, y, u_func, p),
50         t_span=t_span,
51         y0=y0,
52         method='RK45',
53         t_eval=t_eval,
54         rtol=1e-8,
55         atol=1e-8
56     )
57     return sol

```

A.2. Módulo de Control Óptimo

Lista A.2: Modulo de control optimo: resolucion del problema L^1 con GEKKO.

```

1 from gekko import GEKKO
2 import numpy as np
3
4 def solve_optimal_L1(T, U, epsilon, F0, p, n_points=300):
5     """
6     Resuelve el problema de control optimo L1:
7         min J = integral_0^T u(t) dt
8         s.t. sistema S1, u in [0, U], F(T) <= epsilon
9     """
10    m = GEKKO(remote=False)
11    m.time = np.linspace(0, T, n_points)
12
13    # Variables de estado
14    F = m.Var(value=F0, lb=0)
15    Ms = m.Var(value=0, lb=0)
16
17    # Variable de control
18    u = m.MV(value=0, lb=0, ub=U)
19    u.STATUS = 1
20
21    # Parametros del modelo
22    delta_s = p['delta_s']
23    delta_F = p['delta_F']
24    nu = p['nu']
25    nu_E = p['nu_E']
26    gamma_s = p['gamma_s']
27    beta_E = p['beta_E']
28    delta_E = p['delta_E']
29    delta_M = p['delta_M']
30    K = p['K']
31
32    # Ecuaciones dinamicas (S1): equilibrios QSSA E*(F), M*(F)
33    E_star = beta_E * F / (beta_E * F / K + nu_E + delta_E)
34    M_star = (1 - nu) * nu_E / delta_M * E_star
35    m.Equation(F.dt() == nu * nu_E * E_star
36               * M_star / (M_star + gamma_s * Ms) - delta_F *
37               F)
38    m.Equation(Ms.dt() == u - delta_s * Ms)
39
40    # Restriccion terminal F(T) <= epsilon (solo en el ultimo nodo)

```

```

40     final = np.zeros(n_points); final[-1] = 1
41     final = m.Param(value=final)
42     m.Equation(F * final <= epsilon)
43
44     # Funcional de costo L1: total de mosquitos liberados
45     m.Minimize(m.integral(u))
46
47     # Opciones del solver
48     m.options.IMODE = 6    # Control optimo
49     m.options.SOLVER = 1   # APOPT
50     m.options.MAX_ITER = 500
51
52     m.solve(dispatch=False)
53
54     return (np.array(u.value),
55            np.array(F.value),
56            np.array(Ms.value),
57            m.options.OBJFCNVAL)

```

A.3. Algoritmo de Bisección

Versión simplificada del algoritmo de bisección que calcula el óptimo estructural *bang-singular-bang* sin recurrir a un solver no lineal (Sección 3.3.2), explotando el Teorema 3.3 de Almeida *et al.* [5].

Lista A.3: Biseccion sobre la duracion del arco singular tau1.

```

1  import numpy as np
2
3  def solve_by_bisection(p, T, U, epsilon, n_iter=60):
4      """
5      Optimo estructural L1 (Almeida 2022, Teorema 3.3). Para  $T > T^*$ , el
6      control optimo es: 0 en  $[0, t_0]$ , arco singular en  $[t_0, t_1]$  y 0 en
7       $[t_1, T]$ . Basta hallar la duracion del arco singular tau1 tal que el
8      minimo de la trayectoria de hembras toque exactamente epsilon.
9      """
10     lo, hi = 0.0, T
11     for _ in range(n_iter):
12         tau1 = 0.5 * (lo + hi)
13         # integra S1 con el control singular de duracion tau1 y
14         # devuelve el minimo de F(t) alcanzado en  $[0, T]$ 
15         F_min = min_F_with_singular_arc(p, T, U, tau1)

```

```

16         if F_min < epsilon:
17             hi = tau1    # sobra esfuerzo  -> arco mas corto
18         else:
19             lo = tau1    # falta esfuerzo  -> arco mas largo
20     # de tau1 se reconstruyen los instantes de conmutacion t0, t1 y el
21     # control u*(t) mediante la formula (9) en lazo cerrado
22     return tau1

```

A.4. Entorno de Aprendizaje por Refuerzo

El siguiente código resume el entorno `SITEnv` que formula el problema sobre el sistema S1 como un proceso de decisión de Markov, con domain randomization para la robustez (Sección 4.9). La Tabla A.1 recoge los hiperparámetros del agente.

Lista A.4: Entorno `SITEnv`: estado, accion, recompensa y domain randomization.

```

1 import gymnasium as gym
2 import numpy as np
3
4 class SITEnv(gym.Env):
5     """
6     Modelo S1 como MDP para entrenar la politica PPO (control por RL,
7     Cap. 4).
8     Observacion : (F/F_bar, Ms/escala, t/T)    -- normalizada
9     Accion       : u in [0, 1]  ->  escalada a [0, U_max]
10    Recompensa   : -u*dt (coste L1) + penalizacion terminal si F(T) >
11                  eps
12    Robustez     : domain randomization +-30% en (beta_E, delta_F, nu_E
13                  , K)
14    """
15    def reset(self):
16        # cada parametro x factor uniforme en [0.7, 1.3]  (+-30%)
17        self.p = perturb(self.nominal, low=0.7, high=1.3,
18                        names=('beta_E', 'delta_F', 'nu_E', 'K'))
19        self.state = np.array([self.p.F_bar, 0.0])
20        self.t = 0.0
21        return self._obs()
22
23    def step(self, action):
24        u = float(np.clip(action, 0.0, 1.0)) * self.U_max
25        F, Ms = self.state
26        F = max(F + self.dt * f(F, Ms, self.p), 0.0)    # dinamica S1

```

```

(Euler)
24 Ms = max(Ms + self.dt * (u - self.p.delta_s * Ms), 0.0)
25 self.state = np.array([F, Ms]); self.t += self.dt
26 reward = -u * self.dt # coste de
    liberacion
27 done = self.t >= self.T
28 if done and F > self.epsilon: # penalizacion
    (hinge)
29 e = (F - self.epsilon) / self.F_bar
30 reward -= self.w * (e + e**2) * (self.U_max * self.T)
31 return self._obs(), reward, done, False, {}

```

Tabla A.1: Hiperparámetros del agente de aprendizaje por refuerzo (Sección 4.9), en la configuración con mejor robustez del barrido.

Hiperparámetro	Valor
Algoritmo	PPO [26] (Stable-Baselines3 [27])
Pasos de entrenamiento	1×10^6
Entornos paralelos	24
Arquitectura de red (MLP)	[64, 64, 64]
Tasa de aprendizaje	3×10^{-4} (constante)
Tamaño de minibatch	256
Pasos por actualización / épocas	2048 / 10
Descuento γ / GAE λ	0,99 / 0,95
Recorte (<i>clip range</i>)	0,2
Coefficiente de entropía	0,005
Normalización de recompensa	VecNormalize
Domain randomization [25]	± 30 % en $\beta_E, \delta_F, \nu_E, K$
Peso de la penalización terminal	8
Umbral de supresión ε	fijo ($\bar{F}/4$, absoluto)

A.5. Tablas de Parámetros Completas

La Tabla A.2 recoge todos los parámetros biológicos del modelo con sus valores nominales. Los rangos de $\pm 20\%$ solo se indican para los tres parámetros sometidos al análisis de sensibilidad (Sección 4.7): la mortalidad de hembras δ_F , la tasa de eclosión ν_E y la capacidad de carga K ; el resto se mantiene en su valor nominal. La capacidad de carga se fija en el valor calibrado $K = 18\,258$ (Sección 3.4.1), no en el alternativo $K = 22\,200$ de campo.

Tabla A.2: Parámetros biológicos completos del modelo S1/S2. Fuente: Almeida *et al.* [5], Strugarek *et al.* [15].

Par.	Descripción	Valor nominal	-20 %	+20 %
β_E	Tasa de oviposición	10.0 día ⁻¹	—	—
δ_E	Mortalidad de huevos	0.03 día ⁻¹	—	—
δ_M	Mortalidad de machos silvestres	0.10 día ⁻¹	—	—
δ_F	Mortalidad de hembras	0.04 día ⁻¹	0.032	0.048
δ_s	Mortalidad de machos estériles	0.12 día ⁻¹	—	—
ν_E	Tasa de eclosión	0.05 día ⁻¹	0.04	0.06
ν	Proporción pupas $\rightarrow$ hembras	0.49 —	—	—
γ_s	Competitividad de machos estériles	1.00 —	—	—
K	Capacidad de carga	18 258	14 606	21 910

La Tabla A.3 recoge los parámetros de simulación utilizados en los experimentos del Capítulo 4.

Tabla A.3: Parámetros de simulación para los experimentos del Capítulo 4.

Parámetro	Descripción	Valor
T	Horizonte temporal	150 días
$U_{\text{máx}}$	Capacidad máxima de liberación diaria	5000 mosquitos/día
ε	Objetivo de supresión	$\bar{F}/4$
N	Puntos de discretización temporal	300
τ	Período de liberación periódica	3, 7, 14 días
Tolerancia rel.	Error relativo del integrador RK45	10^{-8}
Tolerancia abs.	Error absoluto del integrador RK45	10^{-8}

A.6. Reproducibilidad

El código fuente completo (el simulador, los módulos de optimización [GEKKO, bisección y el esquema impulsivo por SLSQP], el entorno de aprendizaje por refuerzo y los scripts de los experimentos) está disponible en el repositorio público <https://github.com/adilelhaji/sit-control>. Las cinco estrategias del Capítulo 4 se reproducen con `scripts/run_strategies.py`; la política de aprendizaje por refuerzo de la Sección 4.9 se entrena con `scripts/run_rl_training.py` y se evalúa con `scripts/run_rl_evaluation.py`, y el barrido completo de hiperparámetros que selecciona la configuración de la Tabla A.1 se reproduce con `scripts/rl_sweep.sh`.

Bibliografía

- [1] B. Pant, E. Bilgo, A. Mitra, S. Safdar, A. Diabaté, R. St. Leger, and A. B. Gumel, “Could malaria mosquitoes be controlled by periodic releases of transgenic mosquitocidal *Metarhizium pingshaense* fungus? a mathematical modeling approach,” *Applied Mathematical Modelling*, 2025, article 116540.
- [2] World Health Organization, “Vector-borne diseases,” Fact Sheet. <https://www.who.int/news-room/fact-sheets/detail/vector-borne-diseases>, Sep. 2024, accedido: marzo 2026.
- [3] T. van der Deure, D. Nogués-Bravo, L. L. Njotto, and A.-S. Stensgaard, “Climate change favors African malaria vector mosquitoes,” *Global Change Biology*, vol. 31, 2025.
- [4] G. Kumar, R. Baharia, K. Singh, S. K. Gupta, S. Joy, A. Sharma, and M. Rahi, “Addressing challenges in vector control: a review of current strategies and the imperative for novel tools in india’s combat against vector-borne diseases,” *BMJ Public Health*, vol. 2, no. 1, p. e000342, 2024.
- [5] L. Almeida, M. Duprez, Y. Privat, and N. Vauchelet, “Optimal control strategies for the sterile mosquitoes technique,” *Journal of Differential Equations*, vol. 311, pp. 229–266, 2022.
- [6] C. Join, L. Almeida, and M. Fliess, “Sterile mosquito release via intelligent proportional controllers,” in *The 6th International Symposium on Complex Systems (ISCS 2026)*, La Rochelle, France, 2026.
- [7] R. Gato *et al.*, “Sterile insect technique: Successful suppression of an *Aedes aegypti* field population in cuba,” *Insects*, vol. 12, no. 469, 2021.
- [8] G. Balatsos *et al.*, “Sterile insect technique (sit) field trial targeting the suppression of *Aedes albopictus* in greece,” *Parasite*, vol. 31, p. 17, 2024.
- [9] J. T. Lim *et al.*, “Dengue suppression by male Wolbachia-infected mosquitoes,” *New England Journal of Medicine*, 2026.
- [10] R. Moretti *et al.*, “Exploiting *Wolbachia* as a tool for mosquito-borne disease control: Pursuing efficacy, safety, and sustainability,” *Pathogens*, vol. 14, no. 3, p. 285, 2025.
- [11] A. Utarini *et al.*, “Efficacy of *Wolbachia*-infected mosquito deployments for the control of dengue,” *New England Journal of Medicine*, vol. 384, pp. 2177–2186, 2021.
- [12] I. D. Velez *et al.*, “Reduced dengue incidence following city-wide *Wolbachia* mosquito releases throughout three colombian cities: Interrupted time series analysis and a prospective case-control study,” *PLoS Neglected Tropical Diseases*, vol. 17, p. e0011713, 2023.

- [13] B. Lovett *et al.*, “Transgenic *Metarhizium* rapidly kills mosquitoes in a malaria-endemic region of burkina faso,” *Science*, vol. 364, no. 6443, pp. 894–897, 2019.
- [14] R. D. Moreno *et al.*, “Gene drives, mosquitoes, and ecosystems: an interdisciplinary approach to emerging ethical concerns,” *Frontiers in Environmental Science*, vol. 11, p. 1254219, 2024.
- [15] M. Strugarek, H. Bossin, and Y. Dumont, “On the use of the sterile insect release technique to reduce or eliminate mosquito populations,” *Applied Mathematical Modelling*, vol. 68, pp. 443–470, 2019.
- [16] J. D. Murray, *Mathematical Biology: I. An Introduction*, 3rd ed. New York: Springer, 2002.
- [17] D. A. Focks, R. J. Brenner, J. Hayes, and E. Daniels, “Transmission thresholds for dengue in terms of *Aedes aegypti* pupae per person with discussion of their utility in source reduction efforts,” *American Journal of Tropical Medicine and Hygiene*, vol. 62, no. 1, pp. 11–18, 2000.
- [18] S. Lenhart and J. T. Workman, *Optimal Control Applied to Biological Models*. Chapman and Hall/CRC, 2007.
- [19] L. Esteva and H. M. Yang, “Mathematical model to assess the control of *Aedes aegypti* mosquitoes by the sterile insect technique,” *Mathematical Biosciences*, vol. 198, no. 2, pp. 132–147, 2005.
- [20] R. C. A. Thomé, H. M. Yang, and L. Esteva, “Optimal control of aedes aegypti mosquitoes by the sterile insect technique and insecticide,” *Mathematical Biosciences*, vol. 223, no. 1, pp. 12–23, 2010.
- [21] Y. Dumont and J. M. Tchuente, “Mathematical studies on the sterile insect technique for the Chikungunya disease and *Aedes albopictus*,” *Journal of Mathematical Biology*, vol. 65, no. 5, pp. 809–854, 2012.
- [22] P.-A. Bliman *et al.*, “Open-loop and closed-loop control strategies for the sterile insect technique,” *Mathematical Biosciences*, vol. 337, p. 108605, 2021.
- [23] J. Hedengren, J. Mojica, W. Cole, and T. Edgar, “APOPT: MINLP solver for differential and algebraic systems with benchmark testing,” in *Proceedings of the INFORMS National Meeting*, Phoenix, AZ, USA, 2012.
- [24] L. Beal, D. Hill, R. Martin, and J. Hedengren, “Gekko optimization suite,” *Processes*, vol. 6, no. 8, p. 106, 2018.
- [25] J. Tobin, R. Fong, A. Ray, J. Schneider, W. Zaremba, and P. Abbeel, “Domain randomization for transferring deep neural networks from simulation to the real world,” in *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, 2017, pp. 23–30.
- [26] J. Schulman, F. Wolski, P. Dhariwal, A. Radford, and O. Klimov, “Proximal policy optimization algorithms,” *arXiv preprint arXiv:1707.06347*, 2017.
- [27] A. Raffin, A. Hill, A. Gleave, A. Kanervisto, M. Ernestus, and N. Dormann, “Stable-baselines3: Reliable reinforcement learning implementations,” *Journal of Machine Learning Research*, vol. 22, no. 268, pp. 1–8, 2021.