

La dispersió Møller i els inicis de l'electrodinàmica quàntica*

Xavier Roqué

Seminari d'Història de les Ciències
Facultat de Ciències
Universitat Autònoma de Barcelona
E-08193 Bellaterra

* Treball de recerca per al mestratge en Història de les Ciències.
Director: Manuel García Doncel. Bellaterra, maig 1991.

Aquest treball de recerca va ser defensat el 24 de maig de 1991 a la Sala de Graus de la Facultat de Ciències UAB, davant el tribunal format per Manuel G. Doncel, Antoni Malet i Antoni Méndez, obtenint la qualificació de matrícula d'honor.

Índex

Introducció	5
Abreviatures de fonts d'arxiu	9
1. L'inici de la carrera científica de Møller	11
1. 1. Christian Møller	11
1. 2. Primers treballs científics	15
2. El mètode de Møller	21
2. 1. Les bases del mètode	23
2. 2. Tractaments anteriors de la interacció entre dos electrons	33
2. 3. Primers resultats i valoracions del mètode	42
3. La fórmula de Møller	51
3. 1. El procés d'elaboració	52
3. 2. La deducció de la fórmula	59
3. 3. La relació de la fórmula amb l'electrodinàmica quàntica	69
4. La contrastació experimental de la fórmula de Møller	75
4. 1. La dispersió d'electrons circa 1930	76
4. 2. Els experiments de Champion	87
4. 3. Experiments posteriors	101
Conclusions	109
Bibliografia	113

Introducció

L'electrodinàmica quàntica és una teoria quàntica i relativista d'electrons, fotons i les seves interaccions. Com a element característic inclou una *segona quantificació*: el camp electromagnètic i les funcions d'ona són substituïts per operadors, que satisfan certes regles de commutació. La teoria va néixer a mitjans dels anys vint, quan la mecànica quàntica esdevenia la teoria que coneixem actualment, però només després de la segona guerra mundial, mitjançant el que tècnicament es coneix per *renormalització*, va rebre una formulació coherent i satisfactòria.¹ L'èxit de la teoria renormalitzada fou espectacular: quantitats com el moment magnètic de l'electró, o la magnitud del “Lamb shift”, van ser calculades amb una precisió sense precedents.

Durant el període anterior a 1947 la teoria s'havia enfrontat amb greus dificultats, que havien generat un sentiment d'intensitat variable però generalitzat de crisi. Els problemes més importants de l'electrodinàmica quàntica anterior a la renormalització eren les divergències en quantitats fonamentals, com ara l'energia pròpia de l'electró, el desplaçament de les línies espectrals, o la polarització del buit, i el fracàs en l'aplicació a la radiació còsmica, un dels fenòmens més investigats durant les dècades de 1930 i 1940. Per a alguns dels seus creadors, aquestes dificultats presagiaven la imminència i la necessitat d'una revolució conceptual.

La distinció entre aquests dos períodes té sentit per diverses raons. La més evident, limitant la nostra atenció a la teoria, és la diferent consideració que mereix. Renunciant a alguns dels objectius que l'havien motivada inicialment, com la deducció de les masses de l'electró i el protó, l'electrodinàmica quàntica es revelà finalment menys dolenta del que s'havia cregut durant anys, i va començar a descriure amb precisió noves mesures experimentals. S'ha argu-

¹Difícilment es pot parlar d'una electrodinàmica quàntica al voltant de 1930. Les diferents versions de la teoria coincidien en la necessitat de quantitzar el camp electromagnètic, però divergien en l'oportunitat de fer el mateix amb el camp de matèria. Quan parlem d'electrodinàmica quàntica amb anterioritat a la renormalització, entendrem una teoria on el camp electromagnètic està quantitzat, però no necessàriament el de matèria.

mentat convincentment que aquest canvi no va ser provocat tant per la superioritat tècnica dels experiments realitzats després de la guerra, o pel desconeixement de la idea de renormalització de massa que Kramers havia introduït ja el 1937, com per una modificació en les expectatives de la teoria, per la renúncia a elaborar una teoria completa i el reconeixement que una teoria limitada podia tanmateix ser correcta.² Però no només factors interns fan apropiada la distinció, que es justifica també per la gran transformació que experimenta la ciència en general, i la física en particular, entre els períodes considerats. El final de la guerra marca l'inici de la *big science*: el poder de la ciència s'ha manifestat amb claredat durant la guerra, i el context institucional en què es desenvolupa es modifica enormement.

Molts dels processos bàsics que descriu l'electrodinàmica quàntica van ser calculats en primera aproximació durant el període crític de la teoria. A més dels fenòmens de frenat per radiació (*bremstrahlung*) i creació i anihilació de parelles, d'aplicació directa a la radiació còsmica, aquest és el cas de les col·lisions fotó-electró (fórmula de Klein-Nishina, 1928), electró-electró (fórmula de Møller, 1932) i electró-positró (fórmula de Bhabha, 1936). Actualment, aquests processos es dedueixen fàcilment mitjançant les millores formals introduïdes després de la guerra, i representen exemples paradigmàtics d'*aplicació* i *contrastació* de la teoria. Però era també així en la seva etapa inicial, com s'ha suposat implícitament?³

Considerarem aquesta qüestió en un cas concret. A finals de 1930 un jove físic danès, Christian Møller, va idear un mètode per tractar la col·lisió entre dos electrons relativistes. Durant els dos anys següents Møller va treballar en la seva tesi doctoral, on analitzava teòricament en base al mètode el pas

²Cfr. Rieger [1989], p. 323: "By 1947, I claim, the *old expectations about the aims that QED [quantum electrodynamics] should achieve, had changed considerably*. While in the late 1930s there might still have been a hope in ultimately deriving α , etc., from QED, this possibility was certainly absent after the war, because people had recognized that at high energies, QED was 'incomplete': electrons, positrons, and photons, the objects of QED, could transform into other particles, e. g., mesons, which were not described by QED. The old expectations, the remnants of classical unified field theory programs, had been the obstacle to accepting or pursuing the idea of renormalization, since renormalization meant that the the electron charge and mass were experimental parameters not to be deduced from the theory itself".

³Cfr. per exemple H. M. Giorgi, "Effective quantum field theories", p. 449: "Perhaps the most impressive successes of early quantum field theory were the calculations of scattering probabilities for a variety of processes... They were in reasonable agreement with experiment" (a Paul Davies (ed.) *The new physics*, Cambridge University Press 1990).

d'electrons ràpids a través de la matèria. Com a cas particular, hi considerava la interacció entre dos electrons lliures, que avui coneixem per *dispersió Møller*, donant la fórmula que la descriu correctament en primera aproximació. Aquest treball és una anàlisi històrica de la fórmula de Møller, i de la seva relació amb l'electrodinàmica quàntica.

Ens interessa establir els termes d'aquesta relació en un doble sentit. L'estat provisional i poc satisfactori de la teoria en els seus inicis fa que ens preguntem en primer lloc: com va ser deduïda la fórmula de Møller? Amb quina intenció i en quin context va calcular Møller la dispersió entre dos electrons? Fins ara s'ha considerat que la fórmula de Møller representava de fet una aplicació de l'electrodinàmica quàntica. El recurs en la deducció al principi de correspondència i a arguments quàntics no relativistes ens farà reconsiderar aquesta caracterització.

I d'altra banda: es va intentar de contrastar la fórmula? Amb quina intenció i en quin context es van desenvolupar els experiments? Quina era la significació d'aquests experiments per l'electrodinàmica quàntica anterior a la renormalització? L'escassa literatura secundària ha destacat el paper de la radiació còsmica en la contrastació de la teoria.⁴ És cert que alguns dels fenòmens esmentats, especialment el frenat per radiació, eren de gran importància per determinar la naturalesa de la radiació còsmica, i que físics molt compromesos amb la teoria, com Oppenheimer o Heisenberg, van dedicar grans esforços a la comprensió d'aquest fenomen. Però s'ha suposat equivocadament que les altes energies de la radiació còsmica la convertien en el medi òptim per contrastar les fórmules de dispersió, quan totes elles ho eren més fàcilment mitjançant les radiacions radioactives.⁵ En el cas de la fórmula de Møller, aquesta era l'única possibilitat: la fórmula perd les seves característiques essencials a energies molt altes.

La major part de l'estudi està dedicada a mostrar que la resposta a aquestes qüestions és negativa. Møller va deduir la seva fórmula al marge de l'electrodinàmica quàntica, interessat per l'extensió relativista de l'anàlisi del

⁴Cfr. Cassidy (1981), Galison [1987].

⁵Darrigol [1982] afirma per exemple: "Les formules donnant les probabilités de diffusion dans la théorie de Dirac... furent soumises au verdict de l'expérience dans le domaine des énergies relativistes, grâce à la source naturelle de particules très énergétiques que constituaient les rayons cosmiques. L'histoire de la confrontation des calculs d'électrodynamique et des données de la physique des rayons cosmiques est complexe en raison des difficultés expérimentales diverses et des problèmes d'identification des particules en présence" (Darrigol [1982], p. 14).

pas de partícules carregades a través de la matèria, i pràcticament no s'intentà de contrastar la fórmula durant el període crític. L'estudi, doncs, revela no tant la forma en què la teoria va ser aplicada, com la forma en què es va desenvolupar un tractament alternatiu que evitava les dificultats que atravessava. Però el tractament donat a la dispersió Møller abans de la renormalització planteja d'aquesta manera noves qüestions, a les quals dediquem la resta de l'estudi: com esdevingué aquest fenomen una aplicació exemplar de la teoria, i una de les seves bases experimentals?

Agraïments. El tema d'aquest treball de recerca em fou suggerit pel professor Manuel G. Doncel, per la qual cosa li estic molt agraït, així com pel seu constant suport i encoratjament. Agraïxo també els comentaris d'Antoni Malet, Karl v. Meyenn, Luis Navarro i Anna Maria Oller, a diferents versions preliminars del treball. Pel permís per usar i citar material d'arxiu, expresso el meu reconeixement al Center for History of Physics de l'American Institute of Physics, Nova York; l'Arxiu Niels Bohr, Copenhaguen; als Master, Fellows i Scholars del St. John's College, Cambridge; i a la biblioteca de la Universitat de Cornell, Ithaca.

Agraïxo també el suport del Ministerio de Educación y Ciencia a través d'una Beca per a la Formació de Professorat i Personal Investigador, així com el de la DGICYT, programa de recerca n. PS88-0020.

Abreviatures de fonts d'arxiu*

AHQP	Archive for the History of Quantum Physics. Seguit d'un guió i un número indica el rotlle de microfilm.
AHQP/BSC	Archive for the History of Quantum Physics. Bohr Scientific Correspondence.
AHQP/EHR	Archive for the History of Quantum Physics. Ehrenfest Archive.
AHQP/OHI	Archive for the History of Quantum Physics. Oral History Interviews.
CTF	F. C. Champion's Tutorial File, St. John's College, Cambridge.
Møller-Kuhn (1963)	Entrevista de Thomas S. Kuhn a Møller, 29 juliol 1963 (AHQP/OHI-4).
MP	Møller Papers, Niels Bohr Archive, Copenhaguen.
Møller-Weiner (1971)	Entrevista de Charles Weiner a Møller, 25 i 26 agost 1971 (Oral History Interviews, AIP Center for the History of Physics).
PBI	Hermann, v. Meÿenn i Weisskopf [1979]: <i>Wolfgang Pauli. Wissenschaftlicher Briefwechsel I.</i>
PBII	v. Meÿenn [1985]: <i>Wolfgang Pauli. Wissenschaftlicher Briefwechsel II.</i>

* S'inclou la correspondència de Pauli malgrat que està editada.

1. L'inici de la carrera científica de Møller

1. 1. Christian Møller

Christian Møller va néixer el 22 de desembre de 1904 a Hundslev, un poble de l'illa d'Als, a Dinamarca. Els seus pares eren Jørgen Møller, un petit empresari, i Marie Terkelsen, que morí prematurament el 1905. Als es troba a Schleswig, una regió molt propera a l'actual frontera amb Alemanya que havia format part de Prússia durant el segle XIX, i Møller aprengué de nen la llengua alemanya, que dominava en ingressar a la universitat.

Després de cursar l'ensenyament secundari a Sønderborg, el nucli habitat més important d'Als, Møller ingressà el 1923 a la Universitat de Copenhagen, indecís entre seguir la carrera de matemàtiques o la de física. Els primers cursos eren comuns —matemàtiques, física, química i astronomia— i Møller va poder ajornar la decisió un any i mig. Les classes es donaven a l'Escola Tècnica Superior de la Universitat, i eren també comuns als estudiants d'enginyeria. Møller, que havia considerat la possibilitat de dedicar-se a l'enginyeria donades les dificultats de trobar un lloc de treball a la Universitat, es decidí finalment per la física.

El setembre de 1926, després de passar el semestre d'estiu a la Universitat d'Hamburg, Møller va arribar per primera vegada a l'Institut de Física Teòrica de la Universitat de Copenhagen. L'Institut havia estat inaugurat només cinc anys abans, el 1921, però en aquest curt període de temps havia ja esdevingut, sota la direcció de Bohr, un dels centres més importants de la física teòrica. El geni i la gran capacitat dialèctica de Bohr feien de l'Institut un centre d'investigació privilegiat, que durant els anys vint i trenta va atreure els físics teòrics més destacats i els estudiants més prometedors. L'Institut de Bohr era en aquest sentit un veritable centre de recerca internacional, precursor directe dels instituts d'investigació actuals.¹ Naturalment, Møller havia sentit parlar de Bohr, que era ja aleshores ben conegut fora dels cercles científics. El primer

¹Cfr. v. Meÿenn, Stolzenburg i Sexl [1985], pp. 275 i ss., Aaserud [1990].

contacte entre ells, accidental, va impressionar vivament el jove Møller:²

I was sitting in the library and studying one of Einstein's papers when he came around; he looked into what I was reading, and then he started a private lecture, walking around as he used to do. It was very hard to follow, because first of all, well, he talked about a difficult subject, and also as you remember, it was acoustically hard to hear all he was saying. And he was walking around, so one had to rotate on one's axis, following. . . It was the famous paper on general relativity from 1916 I was studying, and he told me about the importance of Einstein's work, how it had changed our notions of space and time. But then he said, "Well, you see, all these things are now cleared up, and you should start to study quantum mechanics, because there are many things to be cleared up yet, and probably the transformation of our thinking, I mean the revolution on our epistemology, will be much deeper in quantum theory than in relativity theory." So I followed his advice, and started to study [quantum mechanics].

A l'Institut, Møller va assistir als cursos d'electrodinàmica que hi donava Heisenberg, en aquells moments professor visitant, i als d'òptica i espectroscòpia del professor H. M. Hansen. Els cursos regulars incloïen electrodinàmica, mecànica estadística, relativitat i mecànica analítica. Però l'element més important de la formació a l'Institut, com a d'altres centres, eren els colloquis setmanals, on participava sempre algun dels destacats visitants que eren atrets a Copenhaguen per la presència de Bohr. Als colloquis es tractaven els desenvolupaments més recents de la física teòrica, i Bohr garantia l'interès de la discussió:³ "Bohr always was the man who made this discussions so exciting. It was extraordinary how he could go on for hours and hours to try to clarify things". Els estudiants participaven també en seminaris més reduïts en què havien d'exposar algun article recent a suggerència de Bohr, que normalment assistia a aquestes exposicions. El nombre d'estudiants era molt reduït —uns cinc—, i cada un d'ells n'havia de preparar dues o tres per curs.

²Møller-Kuhn (1963), p. 3. El material entre parèntesis quadrats ha estat afegit pels editors de l'entrevista. S'ha conservat les peculiaritats de l'expressió oral, així com les de l'anglès de Møller.

³*Ibid.*, p. 7.

La mecànica quàntica estava encara en procés d'elaboració quan Møller va arribar a l'Institut. A finals de 1926 Dirac elaborà a Copenhaguen, al mateix temps que Jordan, la teoria de transformacions, que contribuí decisivament a la clarificació conceptual de la nova teoria, en mostrar la plena equivalència entre la mecànica matricial de Heisenberg i la mecànica ondulatoria de Schrödinger. Naturalment, encara no hi havia llibres de text que tractessin la nova teoria, i els estudiants havien d'estudiar-la a partir dels articles originals. Møller l'assimilà tanmateix ràpidament, i a principis de 1928 va poder exposar fins i tot a un dels seminaris la teoria de l'electró de Dirac:⁴ “The paper had just arrived in the library. . . I was the first one who talked about the Dirac theory of the electron”. Segons Møller, Yoshio Nishina, que poc després calcularia juntament amb Oskar Klein la dispersió electró-fotó mitjançant la nova equació de l'electró, va conèixer-la en aquest col·loqui:⁵ “I was reporting Dirac's paper on the theory of the electron, which nobody else knew at that time, and I remember that Klein and Nishina, who were here and who later worked together with Klein on the Klein-Nishina formula, they were much interested in this”.

El títol previ al de doctor era el de *magister*, que s'obtenia presentant un treball de recerca i sotmetent-se a un examen que incloïa una part experimental, a càrrec de Hansen, i una de teòrica, a càrrec de Bohr. Møller esdevingué *magister* el 1929, en ser-li acceptat un article que havia guanyat anteriorment una medalla d'or de la Universitat. El treball tractava de l'analogia entre mecànica i òptica, un dels elements que havia conduït Schrödinger a la mecànica ondulatoria.⁶

Durant els seus estudis, Møller havia estat guanyant 150 corones mensuals ajudant Bohr amb els seus manuscrits i traduïnt-ne algun a l'alemany, “because he thought I knew German rather well, although I know that my translation

⁴*Ibid.*, p. 5. Møller afirma a la mateixa entrevista que està “absolutament cert” d'haver estat el primer d'exposar als col·loquis la teoria de l'electró de Dirac.

⁵Møller-Weiner (1971), p. 2. La frase és incoherent, però a l'entrevista amb Kuhn Møller dona a entendre que només va introduir en l'equació a Nishina: “I remember that I came to talk with Nishina about the Dirac equation. He had not studied this paper yet, and I told him about what I had got out of it. Soon after, he and Klein started to make the famous calculations on the Klein-Nishina formula” (Møller-Kuhn 1963, p. 5).

⁶Møller hi estenia aquesta analogia, que Hamilton havia desenvolupat només per cossos isòtrops, al cas de cossos anisòtrops, introduïnt una mètrica especial que permetia tractar ambdós casos de la mateixa manera. Només després va assabentar-se Møller que la mètrica que havia introduït era una mètrica coneguda, la mètrica de Finsler.

was completely changed by Bohr himself”. Però sabia que les oportunitats de fer carrera a la universitat eren escasses, i estava preparat per haver de fer de professor a un *gymnasium*. Møller va considerar anys després que el fet que s’interessés en aquells moments per la dispersió d’electrons relativistes va ser crític per la seva carrera:⁷

But fortunately, I got hold of something which became rather interesting, and Bohr was interested in that, and this was of course under the influence of the atmosphere in the Institute, that I got this opportunity. I had written a few papers, not very exciting papers, and then finally I came to this scattering business, scattering of fast electrons. That was actually not before I had taken the magister degree. But rather quickly Bohr was able to supply a little more money for me, and he asked me to start to give some lectures on relativity.

El problema de la dispersió va tenir certament una importància decisiva en el desenvolupament de la carrera de Møller, però aquesta apreciació probablement l’exagera. Els articles “no molt interessants” esmentats, que examinarem a continuació, havien estat de fet publicats a revistes importants i Møller, com veurem, no va interessar-se pel “scattering business” sinó a finals de 1930. En aquells moments era ja ajudant (*Assistent*) a l’Institut i rebia 300 corones mensuals. És més probable que Bohr li hagués ofert ja abans aquesta plaça havent-se adonat de la seva capacitat. Quan Klein va deixar Copenhaguen a finals de 1930 per ocupar una càtedra a Estocolm, Møller estava en condicions d’assumir els seus cursos de relativitat especial i general i esdevingué professor associat (*Lektor*), amb un sou de 500 corones mensuals.⁸

⁷Møller-Weiner (1971), p. 11.

⁸Møller restà vinculat a la Universitat de Copenhaguen tota la seva carrera. Va ser professor associat fins el 1940; de 1940 a 1943, professor titular (*Dozent*), i a partir de aquell any, fins a la seva jubilació el 1975, catedràtic (*Professor*) de física matemàtica. Møller esdevingué un físic teòric de prestigi, conegut per les seves aportacions a la teoria de la matriu S, a la teoria de mesons de les forces nuclears, i a la relativitat general, així com pel seu llibre de text sobre relativitat (Møller [1952]). Va participar en l’establiment del CERN primer com a assistent en la fase preliminar de disseny del sincro-ciclotró (novembre 1951), i després com a director del Theory Group, càrrec en el que va substituir a Bohr el setembre de 1954, i que va ocupar fins el 1957, en què després de cinc anys d’activitat, el grup va ser traslladat a Ginebra. Això motivà la fundació per part dels països escandinaus de l’Institut Nòrdic per a la Física Atòmica Teòrica (Nordisk Institut for Teoretisk Atomfysik, NORDITA), amb

1. 2. Primers treballs científics

El maig de 1929 va aparèixer a *Zeitschrift für Physik* el primer article de Møller, “El fenomen de la desintegració radioactiva considerant la teoria de la relativitat”.⁹ Amb el que *a posteriori* podem reconèixer com a tret característic dels seus primers treballs científics, Møller tractava en ell d’incloure consideracions relativistes en un problema que ja havia estat considerat satisfactòriament segons la mecànica quàntica.

La llei bàsica de la desintegració radioactiva va ser enunciada el 1900 per Rutherford, que el 1903, junt amb F. Soddy, va basar en ella la teoria de les transformacions successives, que explicava les sèries de desintegració.¹⁰ La llei posseïa un gran valor heurístic, però la falta d’una explicació subjacent, en termes deterministes, del seu caràcter estadístic, era considerat l’aspecte menys satisfactori de la teoria. Vàries hipòtesis van ser concebudes per explicar la desintegració i el seu caràcter probabilista des de posicions clàssiques. En la que més va arribar a desenvolupar-se, la desintegració depenia de la coincidència fortuïta d’un elevat nombre de constituents atòmics en certa posició crítica durant un breu interval de temps. Tot i que hipòtesis com aquesta van arribar a ser considerades molt prometedores, van ser ràpidament desplaçades després que el fenomen fos comprès en base a la mecànica quàntica.¹¹ El

seu a Copenhagen, que Møller dirigí des de la seva fundació, l’1 d’octubre de 1957, fins el 1971. Møller va seguir vinculat al CERN durant aquest període, com a membre del Scientific Policy Committee (1959–1972). Va ser també el primer president de la Societat Internacional per a la Relativitat i la Gravitació (1971–1974), constituïda a Copenhagen. Møller va morir a Copenhagen el 14 de gener de 1980. Cfr. Goenner (1980), Kuhn *et al.* [1965], i Study Team for Cern History [1987].

⁹Møller (1929), “Der Vorgang des radioaktiven Zerfalls unter Berücksichtigung der Relativitätstheorie”.

¹⁰Rutherford, “A radioactive substance emitted from Thorium compounds”, *Phil. Mag.* **49** (1900), 1–14; Rutherford i Soddy, “Radioactive change”, *Phil. Mag.* **6** (1903), 576–591.

¹¹Com en altres casos, aquestes hipòtesis van desaparèixer de la literatura i són ara molt poc conegudes. El model citat es troba a F. A. Lindemann, “Note on the relation between the life of radioactive substances and the range of the α rays emitted”, *Phil. Mag.* **30** (1915), 560–563. Lindemann va ser molt probablement inspirat per A. Debierne, que el 1912 havia ja discutit la mateixa hipòtesi, junt amb la d’una causa exterior, i la de que el destí de cada àtom estigués predeterminat (“Sur les transformations radioactives”, a *Les Idées Modernes sur la Constitution de la Matière*, París 1913, pp. 304–331). Madame Curie, en la seva intervenció al segon congrès Solvay (Brusselles, octubre de 1913), preferia assignar la causa de la desintegració a un element extern, “une sorte de mécanisme de déclenchement qui dépend d’une cause extérieure à l’atome” (“Sur la loi fondamentale des transformations radioactives”, a *La Structure de la Matière*, París 1921, pp. 66–71). Debierne, que ja havia

1928 G. Gamow a Göttingen, i R. W. Gurney i E. U. Condon a Princeton, van interpretar gairebé simultàniament el fenomen, mitjançant la nova teoria, com un cas d'“efecte túnel”. La teoria quàntica, pel seu propi caràcter, feia innecessaris els mecanismes suggerits anteriorment per explicar la desintegració:¹² “The statistical nature of the quantum mechanics gives directly disintegration as a chance phenomenon without any special hypothesis”.

En el seu article, Møller mostrava “com han de realitzar-se els càlculs de Gamow i Kudar pel cas unidimensional mitjançant la consideració de la teoria de la relativitat”.¹³ Møller, que com hem vist coneixia bé la teoria de l'electró de Dirac des de la seva aparició, no dubtava en preferir-la sobre l'altra equació relativista que es trobava a la seva disposició, coneguda com a equació de

mostrat les seves preferències per la hipòtesi que adoptà Lindemann, va desenvolupar-la en més detall poc després (“Considerations sur le mécanisme des transformations radioactives et la constitution des atomes”, *Ann. Physique* **4** (1915), 323). El 1920, després que hagués estat perfeccionada per H. T. Wolff mitjançant la inclusió de la condició de Bohr pel moment angular (“Betrachtungen über den radioaktiven Zerfall des Atomkernes”, *Phys. Zs.* **21** (1920), 175–178) Soddy veia en ella el germen de “una explicació satisfactòria i altament suggestiva” (F. Soddy, *Ann. Reports to the Chem. Soc.* **17** (1921), p. 234, segons Trenn, *Radioactivity and atomic theory*, Londres 1975, p. 472).

¹²Gurney i Condon, “Quantum mechanics and radioactive disintegration”, *Phys. Rev.* **33** (febrer 1929), 127–140; p. 127. Veure també Gamow, “Zur Quantentheorie des Atomkernes”, *Zs. Phys.* **51** (1928), 204.

¹³Møller (1929), p. 451: “Es wird gezeigt, wie die Rechnungen von Gamow und Kudar für den eindimensionalen Fall mit Berücksichtigung der Relativitätstheorie durchzuführen sind”. J. Kudar havia estès els càlculs de Gamow al cas d'una barrera de potencial rectangular (“Zur Quantenmechanik der Radioaktivität”, *Zs. Phys.* **53** (1929), 95).

Klein-Gordon.¹⁴ La teoria de Dirac havia despertat grans expectatives, i els problemes d'interpretació que poc després l'afectarien no s'havien manifestat encara amb tota claredat; la predisposició de Møller era doncs perfectament comprensible. A l'aplicació de l'equació de Dirac no s'oposava el fet que la partícula α fos de càrrega positiva, “ja que els arguments aduïts per Dirac per a establir la seva teoria no són només plausibles en el cas de les càrregues elementals negatives”,¹⁵ sinó el fet, pràcticament cert en aquells moments, que la partícula α no tenia espí. Probablement Møller va haver d'aplicar les dues equacions per comprovar que les diferències en els resultats obtinguts eren irrelevants. En l'article va optar per exposar el desenvolupament del càlcul segons la teoria de Dirac, indicant només ocasionalment com procediria segons la teoria de Klein-Gordon.

Seguint el raonament de Kudar, Møller considerava el cas unidimensional de dues barreres de potencial rectangulars, pel que intentava obtenir solucions a l'equació de Dirac en forma d'ones planes esmorteïdes

$$\psi' = e^{-\frac{2\pi i}{\hbar}Et} \cdot \psi(x), \quad E = E_0 - \frac{i\hbar\lambda}{4\pi},$$

on λ és la constant d'amortiment i E_0 l'energia de la partícula considerada. Les solucions generals contenien constants que havien de ser determinades en la forma habitual imposant condicions de contorn, el que suposava un càlcul laboriós però no excessivament complex. Møller obtenia com a resultat que

¹⁴Al capítol següent tractarem en més detall de l'equació de Dirac, com a una de les bases de la fórmula de Møller. L'anomenada *equació de Klein-Gordon*

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right)\psi = 0,$$

que en realitat va ser deduïda independentment per varis físics entre abril i setembre de 1926, és l'equació escalar que s'obté a partir de l'hamiltonià clàssic per una partícula relativista $H^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4$, associant en la forma usual els operadors $i\hbar(\partial/\partial t)$ i $(\hbar/i)\nabla_i = (\hbar/i)(\partial/\partial x^i)$ a l'energia E i el moment p_i , respectivament. Aquesta equació fou l'objecte de nombrosos articles durant 1926 i part de 1927. Entre d'altres atractius, podia ser considerada com una generalització natural de l'equació d'Schrödinger (un dels físics que l'havien proposada independentment). Però aquest aspecte positiu es veia desvirtuat pel seu fracàs en l'explicació de la estructura fina, que va ser reconegut immediatament. L'aparició de l'equació de Dirac va marginar-la fins el 1934, quan va ser reinterpretada per Pauli i Weisskopf com a equació de camp per partícules carregades sense espí. Kragh (1981) conté una excellent avaluació històrica de l'equació de Klein-Gordon.

¹⁵Møller (1929), p. 451: “... da die Argumente, welche Dirac zur Aufstellung seiner Theorie veranlaßten, nicht notwendig nur für die negativen Elementarteilchen stichhaltig sind”.

la relació entre la constant de desintegració i l'energia de la partícula emesa experimentava una petita correcció, que de forma característica augmentava a mida que disminuïa la velocitat de la partícula; també mostrava l'existència d'un error en els càlculs de Kudar. Tanmateix, com reconeixia finalment, “el model usat és massa bast per extreure'n conclusions quantitatives”.¹⁶

Aquest primer article produeix la impressió que Møller no està tant interessat en el fenomen de la desintegració, com en la possibilitat d'introduir en la seva interpretació consideracions relativistes. L'article representa un exercici brillant i una mostra del domini que ja havia assolit Møller de la teoria de Dirac.

El segon article de Møller va aparèixer un any després de l'anterior, el maig de 1930, i va ser publicat, com aquest, per la prestigiosa *Zeitschrift für Physik*. Com veurem, un dels elements essencials en la deducció de la fórmula de Møller era la teoria de pertorbacions de Born. Max Born havia introduït aquest mètode d'aproximació, que permetia tractar els fenòmens de col·lisió segons la mecànica quàntica, el 1926, en un article fonamental en què oferia a més una interpretació probabilista de la funció d'ona.¹⁷ La “teoria de col·lisions de Born” va ser assimilada ràpidament, i aviat es féu indispensable en les aplicacions de la teoria. En el seu segon article, Møller aplicà el mètode d'aproximacions de Born a un problema de dispersió: “Teoria de la dispersió anòmala de partícules α en el seu pas a través d'elements lleugers”.¹⁸ Møller va signar l'article a Copenhaguen el febrer de 1930, i el 22 de març va aparèixer una comunicació preliminar breu a *Nature*, titulada simplement “Scattering of α -particles by light atoms”.¹⁹

Des del 1923 s'havien observat a Cambridge, al laboratori Cavendish, desviacions de la fórmula de Rutherford per la dispersió de partícules α , que s'havia intentat explicar des de la mecànica clàssica. Per això, es suposava una desviació del potencial coulombià prop del nucli, o bé es dotava d'estructura a la partícula α , en lloc de considerar-la puntual.²⁰ Amb la introducció de la mecànica quàntica no es podia obviar la necessitat de plantejar aquestes

¹⁶Møller (1929), p. 466: “Für quantitative Aussagen ist jedoch das benutzte Modell zu grob”.

¹⁷Born, “Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge”, *Zs. Phys.* **37** (1926), 863–877.

¹⁸Møller (1930b), “Zur Theorie der anomalen Zerstreung von α -Teilchen beim Durchgang durch leitende Elemente”.

¹⁹Møller (1930a).

²⁰Veure les referències a Møller (1930b).

hipòtesis, ja que en la mecànica quàntica una carga puntual és dispersada per un centre de força coulombià segons la mateixa fórmula de Rutherford.²¹

Møller aplicà al problema el model senzill de potencial nuclear introduït per Gamow, i Condon i Gurney, per a explicar la desintegració, obtenint una explicació qualitativa del fenomen. El càlcul es basava en la mecànica quàntica d'Schrödinger, i el seu interès primari en aquest context està en l'ús del mètode de Born en primera aproximació. Les qüestions de la validesa del procediment, i la seva aplicabilitat al problema que estava considerant, apareixien recurrentment a l'article, i eren encara objecte d'un afegit a la correcció.

Al final de l'article Møller s'interessava per les aproximacions d'ordre superior: "Falta encara demostrar que les aproximacions superiors del procediment de Born poden ser menyspreades. Espero tornar més endavant sobre aquest punt".²² En el seu següent article, en efecte, completat l'octubre de 1930, Møller va ocupar-se del tema: "Sobre les aproximacions superiors del mètode de col·lisions de Born".²³ Møller descrivia a la primera part un mètode general per avaluar aproximacions d'ordre superior en el mètode de Born. Per això resultava convenient treballar a la representació de moments (*Impulsraum*) en lloc de a la representació de coordenades (*Koordinatenraum*), com havia indicat Dirac.²⁴ A la segona part, Møller aplicava les consideracions anteriors a la dispersió de partícules α , calculant explícitament la segona aproximació, i obtenint un resultat negatiu: "[La segona aproximació] és, per a totes les velocitats [de partícules α] que es donen a la Natura, del mateix ordre de magnitud que la primera aproximació, de forma que el mètode de Born s'ha de considerar inapropiat pels raigs α ".²⁵

²¹Com va demostrar Gregor Wentzel el 1927, en una de les primeres aplicacions del mètode de Born ("Zwei Bemerkungen über die Zerstreuung korpuskularen Strahlen als Beugungerscheinung", *Zs. Phys.* **40** (1926), 590–593). Veure també J. R. Oppenheimer, "On the quantum theory of the problem of the two bodies", *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **23** (1925–1927), 422–431, i "Bemerkung zur Zerstreuung der α -Teilchen" *Zs. Phys.* **43** (1927), 413–415. El mateix problema va ser considerat posteriorment en forma més general per W. Gordon, "Über den Stoß zweier Punktladungen nach der Wellenmechanik", *Zs. Phys.* **48** (1928), 180–191, i N. F. Mott, "The solution of the wave equation for the scattering of particles by a Coulombian centre of field", *Proc. Roy. Soc.* **118** (1928), 542–549.

²²Møller(1930b), p. 68: "Es fehlt auch noch der Beweis, daß die höheren Näherungen des Bornschen Verfahrens vernachlässigt werden können. Auf diesen Punkt hoffe ich später zurückzukommen".

²³Møller (1930c), "Über die höheren Näherungen der Bornschen Stoßmethode".

²⁴Dirac, "Über die Quantenmechanik der Stoßvorgänge", *Zs. Phys.* **44** (1927), 585–595.

²⁵Møller (1930c), p. 513: "Diese wird bei allen in der Natur vorkommenden Gesch-

Møller considerava al final de l'article la dispersió d'electrons per àtoms neutres, i els límits d'aplicabilitat del mètode de Born a la dispersió de raigs catòdics, "ja que en tots els càlculs un s'ha acontentat fins ara amb la primera aproximació".²⁶ De la seva anàlisi deduïa com a criteri d'aplicació de la primera aproximació la condició

$$\frac{\pi Z e^2}{h v} \ll 1$$

(Z número atòmic de l'element dispersor, v velocitat dels electrons incidents). D'aquesta expressió es deduïa directament que només per elements lleugers i energies relativament altes tractant-se de raigs catòdics (20–40 kV), era suficient amb seguretat la primera aproximació, condició que no es verificava en cap dels dos experiments que Møller comentava a continuació. Tanmateix, Mott havia mostrat que la primera aproximació era suficient en ambdós casos per obtenir un acord amb les mesures dins dels marges d'error. Møller considerava que la discrepància provenia del mètode experimental, i de la manca de mesures per distintes velocitats dels raigs incidents, de les que depenia críticament el seu criteri de validesa. L'article conclouïa amb una suggerència experimental: "En altres paraules, es tracta de provar si la intensitat és només funció de $v \sin \theta/2$ ".²⁷

Finalitzada la redacció d'aquest article, Møller treballaria durant els dos anys següents en la seva tesi doctoral. D'aquest treball, recollit en els dos articles que Møller va publicar en aquest període, ens en ocupem a continuació.

windigkeiten von derselben Größenordnung wie die erste Näherung, so daß die Bornsche Methode für α -Strahlen als ungeeignet betrachtet werden muß".

²⁶ *Ibid.*, p. 513: "Es mag jedoch auch von Interesse sein, die Grenzen der Anwendbarkeit der Bornschen Methode auf Streuung von Kathodenstrahlen abzuschätzen, weil man sich bisher bei sämtlichen diesbezüglichen Rechnungen mit der ersten Näherung begnügt hat".

²⁷ "Es handelt sich mit anderen Worten darum, zu prüfen, ob die Intensität eine Funktion von $v \sin \theta/2$ allein ist", p. 532.

2. El mètode de Møller

El 20 de setembre de 1930 un estudiant rus de 22 anys, Lev Landau, arribava a Copenhaguen procedent de Cambridge per passar-hi dos mesos.¹ Møller es trobava aleshores completant el darrer dels articles “no massa interessants” amb què havia iniciat la seva carrera. Landau havia conegut Møller l’abril del mateix any, quan havia visitat Copenhaguen per primera vegada; la seva presència a Copenhaguen l’octubre va ser, segons Møller, “absolutely crucial [...] because he [...] brought me into the scattering problem”.²

El problema de la col·lisió entre dos electrons relativistes va ser l’objecte de l’únic article que Møller publicà el 1931: “La col·lisió de dues partícules, considerant el retardament de les forces”.³ Møller hi presentava un mètode que permetia tractar la interacció entre dues partícules relativistes en primer ordre de teoria de perturbacions, o primera aproximació de Born. Les “observacions absolutament essencials” que Møller agraiïa a Landau al final de l’article, però que no precisava, eren probablement dues.⁴ La primera es referia a la possibilitat de generalitzar relativísticament un mètode desenvolupat per Hans Bethe en un article recent. L’article de Bethe, “Teoria del pas de raigs corpusculars ràpids a través de la matèria”, havia aparegut a mitjans de 1930, i tindria una gran influència posterior.⁵ Bethe hi tractava exhaustivament segons *la mecànica quàntica* els fenòmens associats al pas de partícules ràpides a través de la matèria. La segona observació de Landau es referia a la simetria del resultat final, malgrat l’aparença asimètrica del mètode emprat.⁶

[Landau] recommended me to read a paper by Bethe. That was

¹Veure el llibre de registre de l’Institut de Copenhaguen (AHQP-35).

²Møller-Weiner (1971), p. 13.

³Møller (1931), “Über den Stoß zweier Teilchen unter Berücksichtigung der Retardation der Kräfte”.

⁴*Ibid.*, p. 795: “Ich [bin] auch Herrn Landau für einige für das Zustandekommen dieser Arbeit ganz wesentliche Bemerkungen zu großem Dank verpflichtet”.

⁵Bethe (1930), “Zur Theorie des Durchgangs schneller Korpuskularstrahlen durch Materie”. Cfr. Galison [1987].

⁶Møller-Weiner (1971), p. 13.

the non-relativistic scattering. Then I noticed that the way he had formulated it could be formally at least generalized to relativistic treatment, and I talked with Landau about this, and he said, ‘Yes, that is fine,’ and he remarked that the method which looked very unsymmetrical between the two particles, he remarked that the final result was symmetrical in the two particles. And this gave me great confidence of course in the value of this result.

L’anàlisi relativista del pas de partícules carregades a través de la matèria no era una qüestió d’interès purament teòric. L’intens debat sobre la constitució de la radiació còsmica que s’extengué pràcticament sense interrupció entre 1928 (primers indicis que la radiació podia ser de naturalesa corpuscular) i 1937 (descobriment del “mesotró”), es trobava en els primers anys de la dècada de 1930 en un dels seus moments més àlgids. La possibilitat que electrons d’alta energia formessin part de la radiació primària incident, feia necessari conèixer les interaccions que experimentaven en el seu pas a través de la matèria. Però l’aplicació dels seus càlculs a la radiació còsmica interessaria Møller només després d’haver desenvolupat el seu mètode. Inicialment, el seu interès per aquest fenomen era de caràcter més fonamental, i es limitava a la possibilitat de generalitzar-ne el tractament teòric mitjançant la inclusió de la relativitat, de la mateixa manera que havia analitzat la desintegració radiactiva en el seu primer article.

El títol de la tesi de Møller, que es basava de forma essencial en l’article de 1931, era el mateix que el de l’article de Bethe, canviant només “raigs corpusculars” per “electrons”. Què va afegir Møller al tractament, completíssim, de Bethe?

Bethe had treated the collisions and stopping phenomena in the non-relativistic case. He had written the matrix element for the transition in such a way that it looked as if one particle in its transition creates a charge distribution which then acts on the other through a Coulomb potential. And then the rather obvious idea came to do it relativistically; instead of using the Coulomb static potential, to introduce a retarded potential corresponding to the charge *and* current which corresponds to such a transition.⁷

⁷Møller-Kuhn (1963), p. 15.

Møller, en poques paraules, havia generalitzat relativísticament l'anàlisi de Bethe. Ell mateix descriuria posteriorment el seu tractament com una generalització relativista del mètode de Born, assenyalant-ne una de les bases. Aquesta caracterització simple, però, ha de ser precisada. Per això examinem a continuació les bases, més o menys explícites, del treball de Møller.

2. 1. Les bases del mètode

El mètode de Møller es basava de forma essencial en tres fonaments teòrics ben diferenciats: el mètode de pertorbacions de Born, l'equació de Dirac, i el principi de correspondència.

El *mètode de pertorbacions de Born* és un mètode d'aproximació que permet de considerar des de la mecànica quàntica fenòmens aperiòdics, com ara col·lisions. Max Born l'introduí el 1926 en un article que ha esdevingut clàssic, en el qual oferia a més la interpretació probabilista de la funció d'ona.⁸ N'hi ha prou aquí amb dir que la teoria de col·lisions de Born va ser incorporada ràpidament a la teoria quàntica, i contribuï significativament a estendre les seves aplicacions. El 1930 el seu ús suposava fins i tot un suport addicional pel raonament de Møller.

La necessitat d'incloure la relativitat dins el marc de la nova teoria quàntica s'havia manifestat amb claredat als seus creadors des del primer moment. És ben sabut que Schrödinger intentà inicialment d'obtenir una equació relativista. Intentos similars d'incloure la relativitat, fins i tot la relativitat general, en la mecànica quàntica, foren nombrosos durant 1926 i 1927.⁹ L'anomenada equació de Klein-Gordon, el més reeixit d'aquests intents, fracassà tanmateix en la seva aplicació a l'àtom d'hidrogen.¹⁰ Dirac va proposar el gener de 1928 una nova ecuació que, malgrat les dificultats d'interpretació, va impressionar per la senzillesa formal del seu plantejament, i per incloure l'espí de forma natural.¹¹ L'*equació de Dirac* era de primer ordre —el que es considerava essencial per la teoria de transformacions i havia estat un dels factors determinants del treball de Dirac— i descrivia l'electró mitjançant funcions d'ona a

⁸Born, "Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge", *Zs. Phys.* **37** (1926), 863–877.

⁹Vegi's especialment Kragh (1981), p. 38.

¹⁰Vegi's la nota 14 del capítol anterior.

¹¹Dirac (1928a, b). Sobre la gènesi de l'equació de Dirac, vegi's Kragh *op. cit.*, Moyer (1981a); sobre el seu impacte pot veure's Moyer (1981b, c). L'anàlisi més completa de l'obra i la personalitat de Dirac es troba a la seva biografia apareguda recentment, Kragh [1990].

quatre components.¹² La principal dificultat de la equació, les seves solucions d'energia negativa, va ser reconeguda immediatament, però no sembla haver representat inicialment un problema greu.¹³

L'equació de Dirac va ser aplicada immediatament a l'àtom d'hidrogen per Walter Gordon, que a mitjans de febrer havia deduït ja la fórmula de Sommerfeld per l'estructura fina.¹⁴ El març, C. G. Darwin va tractar el mateix problema mitjançant una versió de la teoria de Dirac més propera al formalisme de la mecànica ondulatoria.¹⁵ La teoria va conduir a nous resultats en ser aplicada a fenòmens de dispersió. L'efecte Compton, la dispersió d'un fotó per un electró, fou tractat a Copenhaguen per Oscar Klein i Yoshio Nishina, que l'agost publicaven una nota a *Nature* que contenia ja la coneguda fórmula de Klein-Nishina.¹⁶ L'abril de 1929 Neville Mott va tractar mitjançant la nova teoria la dispersió d'electrons en nuclis.¹⁷

Møller, com ja hem assenyalat al capítol anterior, assimilà ràpidament la nova teoria de Dirac, i l'aplicà ja al seu primer article. A finals de 1930 les dificultats d'interpretació dels estats d'energia negativa eren percebudes clara-

¹²Com explicava Pauli a Kramers abans que aparegués l'article de Dirac, "l'essencial del nou treball d'espí de Dirac és que introdueix equacions diferencials de *primer* ordre (en lloc de les habituals de segon ordre), i precisament *quatre* equacions simultànies per *quatre* funcions ψ " (Pauli a Kramers, 7 febrer 1928, PBI [183]: "In der neuen Diracschen Spin-Arbeit ist das wesentliche, daß er Differential Gleichungen *erster* Ordnung (statt der üblichen 2. Ordnung) einführt, und zwar *vier* simultane Gleichungen für *vier* ψ -Funktionen").

¹³Cfr. Kragh (1981), p. 63: "The problem of negative energy states was there during the entire period of quantum mechanics, but it was taken seriously only after 1930. Even if the undesirable existence of negative energies cannot have escaped detection, physicists totally ignored them. They were dismissed as 'unphysical', not recognized as being problems of relevance". El problema, però, no era de poca entitat. A Kragh [1990], després d'indicar que els problemes en la confrontació amb l'experiència no van afectar seriosament l'equació, diu Kragh: "The real difficulties for the theory were connected with the physical interpretation of its mathematical structure, in particular, with the negative energy solutions" (p. 65).

¹⁴Gordon, "Die Energieniveaus des Wasserstoffatoms nach der Diracschen Quantentheorie des Elektrons", *Zs. Phys.* **48** (1928), 11–14.

¹⁵Darwin, "The Wave Equations of the Electron", *Proc. Roy. Soc.* **118** (1928), 654–680.

¹⁶Klein i Nishina, "The scattering of light by free electrons according to Dirac's new relativistic dynamics", *Nature* **122** (15 set 1928), 398–399. Veure també la comunicació extensa dels seus resultats: "Über die Streuung von Strahlung durch freie Elektronen nach der neuen relativistischen Quantendynamik von Dirac", *Zs. Phys.* **52** (1929), 853–868.

¹⁷Mott, "The Scattering of Fast Electrons by Atomic Nuclei", *Proc. Roy. Soc.* **124** (1929), 425–442. Kragh [1990] resumeix la qüestió: "In particular, [Dirac equation] proved successful in the study of relativistic scattering processes, first investigated by Mott in Cambridge and Klein, Nishina and Møller in Copenhagen" (p. 64).

ment, però l'èxit de les primeres aplicacions de l'equació i la seva "necessitat" formal feia que pocs físics en dubtessin seriosament.¹⁸

El *principi de correspondència* constitueix l'element més subtil, i alhora el més característic, del treball de Møller. La seva importància escapa fàcilment, per la naturalitat amb què és introduït, a una lectura superficial. Basant la seva anàlisi en aquest principi, Møller seguia els seus mestres: Bohr, que l'havia creat, i Klein, que havia reconsiderat la seva aplicació en la nova mecànica quàntica el 1927.

Els antecedents del principi de correspondència es troben en la suposició fonamental, ja expressada per Planck el 1906, que la teoria quàntica conté la mecànica clàssica com a cas límit.¹⁹ En la formulació més primitiva de Bohr, al primer article de la famosa trilogia sobre la constitució d'àtoms i molècules de 1913, aquesta relació formal s'exemplificava en el cas d'un electró en la seva òrbita: Bohr identificava la freqüència clàssica de rotació d'un electró amb la freqüència de la radiació emesa en la transició entre els estats $n + 1$ i n , per valors grans de n .

En la primera elaboració completa que en féu Bohr, el 1918, el principi era una regla heurística que permetia deduir les freqüències, intensitats i polarització de les línies espectrals en base al moviment dels electrons en les seves òrbites. En aquesta forma el principi va tenir una importància cabdal en el desenvolupament de la teoria quàntica i en la creació de la nova mecànica quàntica, que ha estat suficientment reconeguda.²⁰ Amb la introducció de

¹⁸A finals de 1928 Klein va plantejar amb claredat el problema de les solucions d'energia negativa de l'equació de Dirac, en tractar segons la nova teoria la reflexió d'electrons en una barrera de potencial. Per valors prou alts del potencial, els electrons que traspassaven la barrera posseïen una energia cinètica negativa, resultat que aviat va ser conegut com a *paradoxa de Klein* ("Die Reflexion von Elektronen an einem Potentialsprung nach der relativistischen Dynamik von Dirac", *Zs. Phys.* **53** (1929), 157–165 [reb. 24 desembre 1928]). A principis de 1930 el físic suec Ivar Waller mostrà que els estats d'energia negativa havien de ser considerats necessàriament en la deducció de la fórmula de Klein-Nishina, i que eren els únics que intervenien el límit clàssic ($h\nu \ll mc^2$) si s'havia de recuperar la fórmula clàssica de dispersió ("Die Streuung von Strahlung durch gebundene und freie Elektronen nach der Diracschen relativistischen Wellenmechanik", *Zs. Phys.* **61** (1930), 837–851). Cfr. també I. Tamm, "Über die Wechselwirkung der freien Elektronen mit der Strahlung nach der Diracschen Theorie des Elektrons und nach der Quantenelektrodynamik", *Zs. Phys.* **62** (1930), 545–568 [reb. 7 abril 1930].

¹⁹Cfr. Jammer, *The conceptual development of quantum mechanics*, McGraw Hill 1966, pp. 109–118; Meyer-Abich, *Korrespondenz, Individualität und Komplementarität*, Wiesbaden: Franz Steiner 1965.

²⁰Cfr. Jammer, *op. cit.*, p. 116: "The correspondence principle turned out to be a most

les regles de quantificació de Heisenberg el principi va perdre aquest paper director fonamental.

A finals de 1926, Klein va mostrar la significació del principi per la nova mecànica quàntica, en un article essencial per comprendre les bases conceptuals del mètode de Møller:²¹ “Electrodinàmica i mecànica ondulatoria des del punt de vista del principi de correspondència”. Recollint l’essència del principi de Bohr, Klein l’adaptava a la seva aplicació a aquestes dues teories. En la versió de Klein, el principi esdevé un mètode per transposar quànticament expressions clàssiques; l’element central a aquesta reformulació són les densitats de càrrega i corrent.²²

Donat que volem aquí relacionar directament la mecànica ondulatoria amb les equacions de camp electromagnètiques, suposarem que els fenòmens electromagnètics corresponents a les magnituds ρ_n i \mathbf{j}_n donen, en el sentit del principi de correspondència, una expressió quantitativa de les accions observables relacionades amb la presència d’un àtom a l’estat estacionari en qüestió [representat per n].

El problema d’avaluar quànticament les expressions clàssiques pels potencials i els camps electromagnètics era reduït d’aquesta manera al de trobar una expressió per les densitats de càrrega i corrent. Klein exposava al seu article varis exemples d’aquest procediment: el cas d’un electró en un camp central, la pertorbació d’un àtom per un camp extern, i l’efecte Compton, entre d’altres.

Les expressions mecànico-ondulatories per les densitats de càrrega i corrent esdevenen el punt privilegiat de contacte entre les expressions clàssiques i les seves versions quàntiques. Aquesta transposició i avaluació en un marc conceptual diferent és caracteritzada en l’article de Klein per una paraula clau de

versatile and productive conceptual device for the further development of the older quantum theory—and... even for the establishment of modern quantum mechanics”.

²¹Klein (1927), “Elektrodynamik und Wellenmechanik vom Standpunkt des Korrespondenzprinzips”.

²²*Ibid.*, p. 419: “Indem wir hier die Wellenmechanik in direkter Verbindung mit den elektromagnetischen Feldgleichungen zu verwerten suchen, werden wir annehmen, daß die den Größen ρ_n und \mathbf{j}_n entsprechenden elektromagnetischen Erscheinungen im Sinne des Bohrschen Korrespondenzprinzips einen quantitativen Ausdruck geben für die an die Anwesenheit eines Atoms in dem betreffenden stationären Zustand geknüpften beobachtbaren Wirkungen”.

difícil traducció, “korrespondenzmäßig”, que ve a dir “segons el principi de correspondència”. El que es caracteritza de “korrespondenzmäßig” és la manera de considerar les equacions de Maxwell en la mecànica ondulatoria, o la manera d’avaluar en la nova teoria expressions ben conegudes de l’electromagnetisme clàssic, com l’equació de continuïtat o la relació dels camps amb els potencials. Així, després d’introduir les equacions pel camp electromagnètic “en la teoria de l’electró de Lorentz”

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (2)$$

i la “lleï de conservació de l’electricitat”

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (3)$$

assenyala Klein:²³ “Si ara volem avaluar equacions de la forma [(1)] amb ajut de la mecànica ondulatoria segons el principi de correspondència, és necessari sobretot formar a partir de les solucions a l’equació d’ona expressions que satisfacin la relació [(3)]”.

Møller va seguir Klein en el seu ús del terme *korrespondenzmäßig* i en la generalització d’expressions quàntiques no relativistes a través de les densitats de càrrega i corrent. Però la relació crítica del mètode amb el principi de correspondència no és mai molt explícita. En l’article en què Møller presenta el mètode es parla només de “generalització analògica de la teoria de Born” (“sinnngemäße Verallgemeinerung der Bornschen Stoßtheorie”, p. 787), o de “fer plausible” la generalització relativista. Møller cita l’article de Klein només per observar que el seu càlcul de la probabilitat de transició té “certa similitud” (“gewisse Ähnlichkeit”, p. 788) amb el mètode de Klein per avaluar la radiació emesa per un àtom. En l’article que contenia l’exposició més elaborada del mètode i la seva aplicació al càlcul del frenat d’electrons relativistes, Møller caracteritzava més explícitament el seu mètode de “korrespondenzmäßig”, però només una vegada.²⁴ En la resta de l’article seguia referint-se a general-

²³*Ibid.*, p. 413: “Wenn wir nun Gleichungen von der Form [(1)] mit Hilfe der Wellenmechanik korrespondenzmäßig verwenden wollen, ist es vor allem notwendig, aus den Lösungen der Wellengleichung Ausdrücke zu bilden, welche die Beziehung [(3)] erfüllen”.

²⁴Møller (1932), p. 533: “El procediment basat en el principi de correspondència emprat aquí per tractar els efectes relativistes, és en principi un procediment d’aproximació, en què la interacció entre l’àtom i l’electró incident és tractada com una pertorbació” (“Das

itzacions plausibles o analògiques. L'aplicació del principi era exemplificada magistralment, però no s'aprofundia en la seva valoració.

Com veurem més endavant, els comentadors del mètode de Møller sí van veure-hi una dependència crítica d'arguments de correspondència, i van subratllar la importància d'aquest aspecte del seu treball. Presumiblement, perquè en aquells moments els intents de quantificar el camp electromagnètic s'enfrontaven amb greus dificultats, que portaven a alguns a presagiar una revolució conceptual, i a d'altres a recórrer a la vella noció de correspondència, que tant havia guiat la teoria quàntica en les seves primeres formulacions.²⁵ És difícil precisar fins a quin punt aquest ús del principi de correspondència representava una alternativa real als intents de quantificació del camp, com els de Heisenberg i Pauli, o només una solució provisional. La resposta de Møller a una pregunta de Kuhn en aquest sentit sembla clarament distorsionada pels desenvolupaments posteriors:²⁶

I think one looked upon [the correspondence principle approach] as a preliminary thing. I mean something like the Heisenberg-Pauli theory would always appear as something more fundamental. But it didn't give so many new results, Schwinger and Feynman came along, and there you really got something new, which you could not get by simple correspondence methods. But otherwise, all these formulas, I mean the Delbrück scattering and the Klein-Nishina formula and scattering between fast particles and electrons and positrons, as Bhabha did, could be done by these correspondence methods. But certainly, I think we all had the feeling that the field is something real and must also be treated like a quantum mechanical system by means of q-numbers and with commutation relations and so on. It was the way to go.

Aquests eren els fonaments de l'anàlisi de Møller, els elements bàsics del mètode que elaborà entre octubre de 1930 i maig de 1931, data de submissió de

hier benutzte korrespondenzmäßige Verfahren zur Behandlung der Relativitätseffekte ist prinzipiell ein Näherungsverfahren, wo die Wechselwirkung zwischen dem Atom und dem einfallenden Elektron als Störung behandelt wird").

²⁵Alguns historiadors han parlat ja d'una revalorització del principi de correspondència *circa* 1931: Darrigol (1986), Meÿenn [1989], Rüter [1989].

²⁶Møller-Kuhn (1963), p. 12.

l'article en què l'exposava. No sabem res del seu procés d'elaboració. Møller era encara relativament desconegut fora de Copenhaguen, i no se'n conserva correspondència pertanyent a aquest període. Seria precisament la publicació d'aquest article la que suposaria per a Møller un increment notable dels seus contactes amb d'altres físics. La nostra anàlisi s'ha de limitar doncs a l'article publicat.

Møller hi descriu en primer lloc el procediment quàntic que ha de generalitzar, no només per facilitar-ne la introducció, sinó també per “fer plausible” la generalització. En la teoria de Born, una col·lisió es descriu com la transició entre dos estats estacionaris del sistema total. En el cas de la col·lisió entre dues partícules es considera, com indica Møller, que ocupen inicialment certs estats estacionaris $|\psi_1\rangle$ i $|\psi_2\rangle$, representats en la forma habitual mitjançant ones planes,

$$|\psi_1\rangle = a_1 e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1 - \omega_1 t)} = e^{-i\omega_1 t} |\varphi_1(\mathbf{r}_1)\rangle,$$

$$|\psi_2\rangle = e^{-i\omega_2 t} |\varphi_2(\mathbf{r}_2)\rangle,$$

on $\mathbf{k} = \mathbf{p}/\hbar$ i $\omega = E/\hbar$.²⁷ La interacció entre les partícules 1 i 2 determina la seva transició a certs estats estacionaris finals, $|\psi_{1'}\rangle$ y $|\psi_{2'}\rangle$, que es representen de forma anàloga als inicials. Segons la teoria de Born, la probabilitat que es produeixi aquesta transició ve donada, en primera aproximació, pel mòdul quadrat de l'element de matriu

$$\Phi = \langle \varphi_{1'}, \varphi_{2'} | V(\mathbf{r}) | \varphi_1, \varphi_2 \rangle,$$

on $V(\mathbf{r})$ és el potencial que descriu la interacció.

Bethe havia avaluat aquest element de matriu mitjançant el que aparentment només era una observació matemàtica enginyosa, però que suggeria una interpretació física interessant. L'element de matriu

$$\langle \varphi_{1'} | V | \varphi_1 \rangle,$$

que, en la representació d'ones planes i en el cas d'interacció coulombiana, s'escriu explícitament

$$\int d^3 r_1 \frac{e}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_{1'}) \cdot \mathbf{r}_1},$$

pot ser interpretat com el potencial escalar $V'(\mathbf{r}_2)$ creat per la distribució de càrrega

$$\rho = e \cdot e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_{1'}) \cdot \mathbf{r}_1}.$$

²⁷Møller no utilitza aquesta notació a (1931), però sí ho fa a (1932).

El potencial V' es pot ara calcular directament a partir de l'equació de potencial, $\Delta V' = -4\pi\rho$, de solució general ben coneguda en termes de ρ , i es pot escriure

$$\Phi = \langle \varphi_{2'} | V' | \varphi_2 \rangle,$$

que s'interpreta de forma evident com l'acció sobre la partícula 2 d'una pertorbació V' .

D'aquesta manera la interacció entre dues partícules és analitzada com la successió de dues transicions: el corrent associat a la transició “espontània” de la partícula 1 determina la transició de la partícula 2. Com explica Møller:²⁸

Aquest resultat de la teoria de col·lisions de Born pot expressar-se doncs de la manera següent: a una certa transició de la partícula 1 correspon una certa densitat de càrrega ρ , que indueix, per l'equació de potencial, un cert potencial escalar. Aquest potencial actua com a pertorbació sobre la partícula 2, i origina una transició d'aquesta partícula a un altre estat.

La interacció s'analitza així com la successió de dos processos en què només hi ha implicada una partícula, el que facilita l'anàlisi i obre el camí a un tractament relativista, que Møller desenvolupa a continuació.

El mètode de Møller consisteix en la generalització relativista de l'argument que acabem d'exposar, en base al principi de correspondència. Els estats estacionaris que ocupen les partícules —que Møller considera distingibles— abans i després de la col·lisió són descrits novament mitjançant ones planes, però que ara són solucions de l'equació de Dirac,

$$\psi_1 = u(s_1) e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1 - \omega_1 t)} = e^{-i\omega_1 t} \varphi_1(\mathbf{r}_1),$$

$$\psi_2 = e^{-i\omega_2 t} \varphi_2(\mathbf{r}_2).$$

Les amplituds $u(s)$ són “funcions d'ona a quatre components que determinen la direcció de l'espí”.²⁹ Møller assenyala que per cada valor de l'impuls \mathbf{p} d'una

²⁸Møller (1931), p. 787: “Dieses Resultat der Bornschen Stoßtheorie kann man also folgendermaßen ausdrücken: Zu einem bestimmten Übergang des Teilchens 1 gehört eine bestimmte Ladungsdichte ρ , welche ein durch die Potentialgleichung bestimmtes skalares Potential induziert. Dieses Potential wirkt als Störung auf das Teilchen 2 und bewirkt einen Übergang dieses Teilchens in einen anderen Zustand.”

²⁹*Ibid.*, p. 788: “Die Amplituden [u] sind vierkomponentige Größen, welche die Richtung des Spins bestimmen”. Seguint la convenció habitual, represento per $u(s)$ les amplituds de les solucions d'energia positiva de l'equació de Dirac; Møller les representa per $a(s)$.

partícula hi ha dues solucions pròpies, corresponents als valors possibles de la variable d'espí s ; prescindeix així, com aclareix simplement en una nota, de les solucions d'energia negativa.³⁰ Aquesta postura davant els estats d'energia negativa, d'interpretació incerta, era general fins el 1930, malgrat l'evidència creixent que aquests estats constituïen una part essencial de la teoria. L'actitud de Møller, en qualsevol cas, estava justificada perquè limitava el seu tractament a la interacció d'electrons.

La noció de correspondència de Klein s'ha d'aplicar ara críticament per obtenir una expressió per la probabilitat de transició. Møller parteix de les densitats de càrrega i corrent associades a la transició de la partícula 1 segons la teoria de Dirac,³¹

$$\begin{aligned}\rho &= -e_1 \psi_1^\dagger \psi_1, \\ \mathbf{j} &= e_1 \psi_1^\dagger \vec{\alpha}^{(1)} \psi_1.\end{aligned}$$

Els potencials associats a aquestes densitats poden determinar-se directament a partir de l'expressió general pels potencials creats per una distribució de càrrega i corrent (potencials de Liénard-Wiechert). Møller indica simplement que les equacions de potencial

$$\begin{aligned}\Delta\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -4\pi\rho, \\ \Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j},\end{aligned}$$

“es poden resoldre directament”, obtenint-se

$$\begin{aligned}\phi &= -\frac{h^2 e_1}{\pi} \frac{\psi_1^\dagger \psi_1}{(p_1 - p_{1'})^2}, \\ \mathbf{A} &= \frac{h^2 e_1}{\pi} \frac{\psi_1^\dagger \vec{\alpha}^{(1)} \psi_1}{(p_1 - p_{1'})^2},\end{aligned}$$

on $p = (E/c, \mathbf{p})$ representa el quadrimoment.³²

³⁰*Ibid.*, p. 788: “Wir sehen hier ab von den Lösungen mit negativer Energie”.

³¹El superíndex a les matrius de Dirac $\vec{\alpha}$ indica que actuen només sobre les funcions d'ona associades a la partícula corresponent, en aquest cas la partícula 1.

³²Møller no utilitza quadriectors, sinó que escriu explícitament les seves components escalar i vectorial. Però al text s'hi refereix sovint, i els he usat per transcriure algunes de les seves expressions.

Aquest potencial és tractat com una pertorbació que actua sobre la partícula 2, que satisfà segons Dirac l'equació

$$(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - ic\hbar\vec{\alpha}^{(2)} \cdot \vec{\nabla} + \beta m_2 c^2)\psi_2 = -e_2(\phi + \vec{\alpha}^{(2)} \cdot \mathbf{A})\psi_2.$$

La probabilitat que es produeixi una transició $(1, 2) \rightarrow (1', 2')$ en la unitat de temps ve donada aleshores, “segons fórmules ben conegudes de la teoria de pertorbacions”,³³ per

$$P(1, 2 \rightarrow 1', 2') = \frac{4\pi^2}{h} |\Phi|^2 \delta(E_1 + E_2 - E_{1'} - E_{2'}), \quad (4)$$

on

$$\Phi = \langle \varphi_{2'} | U(\mathbf{r}_2) | \varphi_2 \rangle = \int \varphi_{2'}^\dagger U(\mathbf{r}_2) \varphi_2 d^3\mathbf{r}_2,$$

i $U(\mathbf{r}_2)$ és la *part espacial* de la funció pertorbativa, $-e_2(\phi + \vec{\alpha}^{(2)} \cdot \mathbf{A})$.

Tenint en compte la representació en forma d'ones planes, l'element de matriu s'escriu

$$\Phi = \frac{e_1 e_2 h^2}{\pi} \int \varphi_{2'}^\dagger \frac{u_{1'}^\dagger u_1 - \vec{\alpha}^{(2)} \cdot (u_{1'}^\dagger \vec{\alpha}^{(1)} u_1)}{(p_1 - p_{1'})^2} e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_{1'}) \cdot \mathbf{r}_2} \varphi_2 d^3\mathbf{r}_2.$$

Si la funció delta de l'expressió (4) assegura la conservació de l'energia, integrant l'expressió anterior s'obté la conservació del moment. Per això només s'ha d'observar que per definició de la funció delta es pot escriure

$$\int e^{i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_{1'} - \mathbf{k}_{2'}) \cdot \mathbf{r}_2} d^3\mathbf{r}_2 = h^3 \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_{1'} - \mathbf{p}_{2'}), \quad (5)$$

de forma que finalment s'obté per l'element de matriu³⁴

$$\Phi = \frac{e_1 e_2 h^2}{\pi} \frac{u_{2'}^\dagger u_2 u_{1'}^\dagger u_1 - (u_{2'}^\dagger \vec{\alpha}^{(2)} u_2) \cdot (u_{1'}^\dagger \vec{\alpha}^{(1)} u_1)}{(p_1 - p_{1'})^2} h^3 \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_{1'} - \mathbf{p}_{2'}). \quad (6)$$

Aquesta expressió descriu ja essencialment la interacció. Møller es complau en reconèixer-ne directament la invariància relativista i la simetria, especialment satisfactòria donada l'asimetria del mètode. Discuteix després el significat dels diferents termes i la relació amb tractaments anteriors del mateix

³³Møller (1931), p. 789: “Nach wohlbekanntem Formel der Störungstheorie”.

³⁴Introduïnt la notació γ^μ , amb $\gamma^0 = \beta$ i $\vec{\gamma} = \gamma^0 \cdot \vec{\alpha}$, i observant que $u_{1'}^\dagger u_1 = \bar{u}_{1'} \gamma^0 u_1$ i que $u_{1'}^\dagger \vec{\alpha}^{(1)} u_1 = \bar{u}_{1'} \vec{\gamma} u_1$, el terme intermig és

$$\frac{\bar{u}_{2'} \gamma^\mu u_2 \bar{u}_{1'} \gamma_\mu u_1}{(p_{1'} - p_1)^2},$$

el mateix que escriuríem avui directament per la interacció entre dues partícules de Dirac *distingibles*.

problema. Abans del de Møller, hi havia hagut altres intents de trobar una expressió per la interacció entre dos electrons en base a l'equació de Dirac, que examinem a continuació. La seva anàlisi ressaltava les particularitats del tractament de Møller, i mostra com es va intentar de resoldre el problema des de l'electrodinàmica quàntica.

2. 2. Tractaments anteriors de la interacció entre dos electrons

Donat l'èxit de la teoria de l'electró de Dirac en la seva immediata aplicació a l'àtom d'hidrogen, i la seva recepció entusiasta, no és estrany que poc després s'intentés aplicar-la també a l'àtom d'heli, de dos electrons. El juny del 1926, Heisenberg havia sol·lucionat l'àtom d'heli segons la mecànica quàntica, mitjançant l'aplicació de l'equació d'Schrödinger al problema de varis cossos.³⁵ El físic anglès J. A. Gaunt, aleshores professor de física al Trinity College, a Cambridge, va aplicar a mitjans de 1928 l'equació de Dirac a l'àtom d'heli. El caràcter fonamental de la nova equació justificava un replantejament del problema: “Schrödinger’s equation is likely to be supplanted as the foundation of wave-mechanics by the equation recently put forward by Dirac... Apart altogether from the above criticisms of Heisenberg, it seemed expedient to proceed to the theory of an atom with two electrons on the basis of the new equation”.³⁶

Per obtenir una expressió per l'energia d'interacció entre dos electrons, Gaunt partia de l'expressió proposada per Heisenberg, suprimint aquells termes de l'energia d'interacció que considerava inclosos directament a l'equació de Dirac, i substituïnt als altres el moment magnètic $\frac{e}{mc}\mathbf{s}$ i la velocitat \mathbf{v} de l'electró, per $-\frac{e\hbar}{4\pi mc}\vec{\sigma}$ i $\frac{1}{m}\mathbf{p}$ respectivament, d'acord amb la teoria de Dirac. Però l'expressió que Gaunt suggeria finalment per l'energia *exacta* d'interacció entre dos electrons s'obtenia d'una forma molt més directa i poc rigorosa. Gaunt obtenia l'energia d'interacció magnètica a partir de l'energia associada, en la teoria de Dirac, al moviment d'un electró en un camp magnètic de potencial vector \mathbf{A} , $-e\vec{\alpha}\cdot\mathbf{A}$. Aquest potencial vector era el creat per l'altre electró, i Gaunt recorria a les expressions per la densitat de càrrega i corrent associades a una funció d'ona ψ en la teoria de Dirac, $-e\psi^\dagger\psi$ i $ec\psi^\dagger\vec{\alpha}\psi$. La similitud

³⁵Heisenberg, “Merkkörperproblem und Resonanz in der Quantenmechanik”, *Zs. Phys.* **38** (1926), 411–426 [reb. 11 juny 1926]; “Über die Spektren von Atomsystemen mit zwei Elektronen”, *Zs. Phys.* **39** (1926), 499–518 [reb. 24 juliol 1926].

³⁶Gaunt (1929a), p. 513. Veure també Gaunt (1929b).

amb el mètode de Møller acabava aquí, perquè Gaunt simplificava molt la resolució del problema, limitant-se a observar que de la mateixa manera que s'atribuïa un potencial escalar $-e/r$ a la càrrega d'un electró, podia associar-se a l'electró en moviment el potencial vector $\mathbf{A} = e\vec{\alpha}/r$. Així s'obtenia per l'energia d'interacció

$$E = \frac{e^2}{r}(1 - \vec{\alpha}^1 \cdot \vec{\alpha}^2). \quad (7)$$

L'equació de Gaunt es podia deduir directament a partir de l'energia d'interacció magnètica entre dos electrons,

$$E = \frac{e^2}{r} \left(1 - \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{c^2} \right),$$

associant les matrius $\vec{\alpha}$ de Dirac a \mathbf{v}/c . Posteriorment, el treball de Gaunt va ser sovint caracteritzat d'aquesta manera.

El tractament de Møller contenia el de Gaunt. Per mostrar-ho, Møller només havia de suprimir el terme $(E'_1 - E_1)^2$ del denominador de l'expressió (6) per l'element de matriu, que havia escrit explícitament

$$(p'_1 - p_1)^2 = (\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1)^2 - (E'_1 - E_1)^2.$$

Amb això les fórmules que havia obtingut, entre elles l'expressió per l'element de matriu, “es redueixen a les que s'obtenen quan es tracta la col·lisió segons l'equació d'ona pel problema de dos cossos introduïda per Gaunt”.³⁷ Però d'aquesta manera no només es perd naturalment la invariància relativista, sinó que “es prescindeix evidentment del retardament”, l'influx del qual “és a la majoria dels casos del mateix ordre de magnitud que la interacció d'espí”.³⁸ La no consideració del retardament va ser immediatament considerada com un dels defectes importants de l'expressió de Gaunt.

³⁷Møller (1931), p. 791: “...reduzieren sich ... auf diejenigen, welche man erhält, wenn man den Stoß nach der von Gaunt aufgestellten Wellengleichung für das Zweikörperproblem behandelt”.

³⁸*Ibid.*, p. 791: “Das Streichen des erwähnten Gliedes in (9) bedeutet offenbar, daß man von der Retardation absieht. Der Einfluß der Retardation ist aber in den meisten Fällen von derselben Größenordnung wie die Spinwechselwirkung”. Es pot veure que suprimir aquest terme representa prescindir del retardament observant que prové directament de les solucions a les equacions dels potencials en termes de les densitats de càrrega i corrent (potencials de Liénard-Wiechert). Només prenent el valor retardat de les densitats de càrrega i corrent pot aparèixer el terme en energies —que figura a una exponencial en el temps— en fer la integració espacial que prescriu la solució general.

En el context del seu treball conjunt sobre la quantificació del camp electromagnètic, Heisenberg i Pauli, havien arribat independentment al potencial d'interacció de Gaunt. El 30 de novembre de 1928 Gregory Breit, que aleshores treballava amb Pauli a Zuric, escrivia a Ehrenfest:³⁹ “Pauli i Heisenberg han proposat una equació per a dos electrons similar a l'equació de Dirac:

$$\left\{ p_0 + \frac{e}{c}A_0^I + \frac{e}{c}A_0^{II} + \sum \alpha_k^I(p_k^I + \frac{e}{c}A_k^I) + \sum \alpha_k^{II}(p_k^{II} + \frac{e}{c}A_k^{II}) + \alpha_4^I mc + \alpha_4^{II} mc - \frac{e^2}{r}(1 - \sum \alpha_k^I \alpha_k^{II}) \right\} \phi = 0 \quad (8)$$

on el darrer terme representa la interacció magnètica. Pot ser deduïda mitjançant el mètode de quantificació de les amplituds o bé interpretant les α com a velocitats”. Però Breit, a la mateixa carta, feia més que comunicar els resultats de Heisenberg i Pauli: ell mateix estava contribuint significativament al problema de dos electrons, i acabava de deduir una equació que tenia en compte el retardament. L'anomenada *equació de Breit* representa l'intent més important de descriure la interacció entre dos electrons en base a l'equació de Dirac previ al treball de Møller.

Gregory Breit (1899–1981), un físic d'origen rus format als Estats Units, va dedicar varis treballs a l'anàlisi de la interacció entre dos electrons entre 1929 i 1932. Breit s'havia interessat des de la seva aparició per l'equació de Dirac, especialment per la qüestió de la seva interpretació física.⁴⁰ El 1928, després de dos anys dedicats a experiments per la producció d'altres tensions, Breit, possiblement influït per Ehrenfest, va creure arribat el moment de tornar a interessar-se en la teoria. Durant aquest temps només havia considerat la teoria “esporàdicament” (“spasmodisch”), i ara desitjava conèixer a fons els principis de la nova mecànica quàntica viatjant a Europa. El maig de 1928 Breit va deixar els experiments en mans de Merle Tuve, el seu col·laborador, decidit, com va escriure a Ehrenfest el 21 de maig, a ocupar-se només de la

³⁹Breit a Ehrenfest, 30 novembre 1928 (AHQP/EHR-18): “Pauli und Heisenberg haben eine Gleichung für zwei Elektronen aufgestellt die ähnlich der Diracgleichung ist... wo der letzte Term die Magnetische Wechselwirkung bedeutet. Man kann die entweder durch die Methode der Quantelung der Amplituden oder durch die Interpretation von den α 's als Geschwindigkeiten deuten”.

⁴⁰Veure Breit, “An interpretation of Dirac's theory of the electron”, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **14** (1928), 553. Com afirma en aquest article, Breit va mantenir correspondència amb Dirac malgrat que cap carta entre ells no està catalogada als AHQP.

teoria a partir d'aquell moment.⁴¹

Breit tenia intenció d'iniciar a Leiden la seva estada a Europa, però Ehrenfest va recomanar-li de treballar a Zuric amb Pauli. Seguint el seu consell, Breit arribà a Zuric a finals d'agost, i s'hi va estar la resta de l'any. Breit no havia esmentat en la correspondència amb Ehrenfest prèvia al seu viatge cap problema teòric que l'interessés especialment. Pauli l'introduí en el problema de la interacció entre dos electrons, que ell i Heisenberg havien estat considerant recentment en el context dels seus intents de quantitzar el camp electromagnètic. Breit va obtenir en primer lloc a partir de l'equació (8) una expressió per l'energia de l'àtom d'heli molt semblant a la de Heisenberg. Els dubtes sobre la interpretació física d'alguns dels termes i sobre la correcció de la deducció de l'energia d'interacció, van fer que aquests resultats no fossin publicats. Breit va intentar aleshores de considerar el retardament, el que aconseguí, a menys d'un terme d'interpretació dubtosa:⁴² “He intentat després considerar també el retardament, sempre en la mateixa aproximació, $(v/c)^2$. Amb la interpretació de α_k^I , α_k^{II} com a components de la velocitat, això funciona amb l'ajut del vell treball (1920) de Darwin. El resultat conté només un terme incompreensible. Potser es podria comprovar en l'estructura de l'ortoheli”.

Breit va intentar a continuació, empès per Pauli, de considerar el retardament sense haver de recórrer a cap aproximació:⁴³ “Pauli m'ha empès després a la consideració exacta del retardament. Fins fa un parell de dies encara teníem esperances, però ara ho hem deixat córrer. Ell i Heisenberg ja ho havien provat a la primavera”. Tot i que aquest intent fracassà, Breit va impressionar molt favorablement Pauli, que el 24 de desembre escrivia a Ehrenfest:⁴⁴ “Em va alegrar molt que m'enviés el senyor Breit cap a Zuric, ja

⁴¹Breit a Ehrenfest, 21 maig 1928 (AHQP/EHR-18): “Von jetzt an werde ich mich nur mit Theorie beschäftigen”.

⁴²Breit a Ehrenfest, 30 novembre 1928 (AHQP/EHR-18): “Ich habe dann auch versucht die Retardierung in immer derselben Näherung $(v/c)^2$ zu berücksichtigen. Mit der Interpretation von α_k^I , α_k^{II} als Geschwindigkeits Komponenten ging das mit Hilfe der alten (1920) Arbeit von Darwin. Das Resultat hat dann nur einen unverständlichen Term. Vielleicht kann man ihn in der Orthohelium Struktur nachprüfen”.

⁴³*Ibid.*: “Dann hat mich Pauli auf die exakte Berücksichtigung der Retardierung aufgezogen. Bis vor ein Paar Tagen hatten wir noch Hoffnung, aber jetzt haben wir es aufgegeben. Er und Heisenberg haben es im Frühjahr schon probiert”. A la mateixa carta Breit expressava la intenció de deixar Zuric a mitjans de gener, però la carta de Pauli que es cita a continuació dóna a entendre que ho va fer a finals de desembre.

⁴⁴Pauli a Ehrenfest, 24 desembre 1928 (PBI, [212]): “Ich war sehr froh, daß Sie mir Herrn

que en vaig quedar extraordinàriament satisfet. Tanmateix, encara m'alegraria més si m'enviés aviat un altre home tan capaç, que no se m'escapés després d'un parell de setmanes per anar-se'n a caçar 5 milions (no de dòlars, sinó) de volts a Amèrica!”.

Breit, ja als Estats Units, va completar la seva anàlisi i va publicar els resultats.⁴⁵ Com havia assenyalat en la carta a Ehrenfest, Breit proposava “una equació d'ona aproximada que té en compte termes d'ordre $(v/c)^2$ en la interacció entre dos electrons”. L'equació es deduïa a partir de l'hamiltonià clàssic de Darwin per la interacció entre dos electrons, que tenia en compte el retardament dels potencials.⁴⁶ L'hamiltonià de Darwin conté termes que descriuen els dos electrons lliures, la seva interacció amb un camp extern, i finalment el terme que pròpiament representa la interacció entre ells

$$H_{int} = \frac{e_1 e_2}{r} - \frac{e_1 e_2}{2c^2 m_1 m_2} \left[\frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{r} + \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}}{r^3} \frac{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}}{r} \right], \quad (9)$$

on els índexs 1 i 2 distingeixen els electrons, i $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. El primer terme descriu evidentment la interacció electrostàtica; el segon és el terme característic associat al retardament.

La forma de l'hamiltonià de Darwin suggeria a Breit de descriure la interacció entre els electrons *en la teoria de Dirac* mitjançant l'operador

$$H_{int} = \frac{e^2}{r} \left[1 - \frac{\vec{\alpha}^{(1)} \cdot \vec{\alpha}^{(2)}}{2} - \frac{\vec{\alpha}^{(1)} \cdot \mathbf{r}}{2r^2} \frac{\vec{\alpha}^{(2)} \cdot \mathbf{r}}{r} \right]. \quad (10)$$

La base d'aquesta transcripció era la relació

$$\frac{d\mathbf{r}}{c dt} = -\vec{\alpha},$$

que havia estat “comunicada a l'autor per carta pel Dr. P. A. M. Dirac l'estiu de 1928”.⁴⁷ Breit observava que si no es tenia en compte l'efecte del retardament,

Breit nach Zürich geschickt haben, denn ich war mit ihm außerordentlich zufrieden. Noch froher wäre ich aber, wenn Sie mir bald einen ebenso tüchtigen Mann schicken würden, der mir nicht nach ein paar Wochen wieder davonläuft, um in Amerika 5 Millionen (nicht Dollars, sondern) Volt nachzujägen”. Sembla ser que Breit havia tornat a interessar-se per la producció d'alts voltatges.

⁴⁵Breit (1929), rebut el 31 de maig de 1929.

⁴⁶Darwin, “The dynamical motions of charged particles”, *Phil. Mag.* **39** (1920), 537–551. La fórmula citada es troba a la p. 546, fórmula (15).

⁴⁷Breit (1929), p. 555.

i es consideraven només les interaccions coulombiana i magnètica, s'obtenia en lloc de (10) l'expressió

$$H_{int} = \frac{e^2}{r} [1 - \vec{\alpha}^{(1)} \cdot \vec{\alpha}^{(2)}], \quad (11)$$

“the equation used by Gaunt and Eddington, and claimed by them to be correct”.⁴⁸ La comparació amb l'experiència es deixava per un article posterior, que Breit no elaborà immediatament, i que publicà gairebé un any després.

L'anàlisi de Breit es basava, com les anteriors de Heisenberg i Gaunt, en models clàssics de la interacció entre els electrons, però tenia sobre aquelles l'avantatge d'incloure l'efecte del retardament. L'aspecte més innovador de l'equació de Breit, però, era que podia deduir-se de “la nova teoria de Heisenberg i Pauli dels camps d'ona”, fins a termes de primer ordre en la interacció de Coulomb. El gener de 1929, poc després que Breit hagués deixat Zuric, Heisenberg va trobar la manera de superar, mitjançant un artifici formal, els problemes que havien aturat els seus intents conjunts amb Pauli de construir una teoria quàntica del camp electromagnètic. Donat que Heisenberg sortia l'1 de març cap als Estats Units, l'article on exposaven la seva “dinàmica quàntica dels camps d'ona” va haver de ser elaborat ràpidament, i la major part del treball va recaure en Pauli. L'article estava acabat a mitjans de març.⁴⁹

El viatge de Heisenberg va fer possible que Breit, que ja havia conegut Pauli a Zuric, tingués l'ocasió de treballar també amb l'altre autor de la teoria, aquest cop sense haver de creuar l'Atlàntic. Breit es trobà amb Heisenberg a Boston i Chicago, i va discutir amb ell la nova teoria i la seva possible aplicació al problema que estava considerant.⁵⁰ D'aquesta manera va poder incloure al seu article un apartat en el que deduïa l'hamiltonià d'interacció (10) a partir de l'electrodinàmica quàntica de Heisenberg i Pauli. En carta a Ehrenfest del 16 de juliol resumia així el treball que acabava de completar:⁵¹

⁴⁸*Ibid.*, p. 557. Arthur Eddington havia seguit el tractament de Gaunt en l'article citat per Breit, “The charge of an electron”, *Proc. Roy. Soc. A* **122** (1929), 358–369.

⁴⁹Heisenberg i Pauli (1929). Cfr. PBI, pp. 482 i ss., Darrigol (1984), pp. 479–487.

⁵⁰Breit a Ehrenfest, 16 juliol 1929 (AHQP/EHR-18): “Heisenberg habe ich in Boston und auch in Chicago aufgesucht und bei ihm gearbeitet”.

⁵¹*Ibid.* (el subratllat és meu): “Die quantisierten Wellen von Heisenberg-Pauli geben in einem gewissen Sinn dasselbe Resultat in der $(v/c)^2$ -Näherung das man *nach dem Korrespondenzprinzip* im Konfigurationsraum erhält. Für das He-Problem meinen Heisenberg Pauli und Oppenheimer, ist diese Gleichung genügend, aber *für die exakte Lösung des Zweielek-*

Les ones quantitzades de Heisenberg-Pauli donen en cert sentit el mateix resultat que s'obté *segons el principi de correspondència* a l'espai de configuració, en l'aproximació $(v/c)^2$. Heisenberg, Pauli i Oppenheimer creuen que aquesta equació és suficient pel problema de l'heli, però *per la solució exacta del problema de dos electrons no dona res de bó*. L'aproximació $(v/c)^3$ dona resultats ben poc raonables, que potser estan relacionats amb la dificultat $\pm m$ de Dirac.

L'optimisme inicial de Breit, que tenia per molt probable que l'equació que havia deduït fos correcta, havia disminuït considerablement quan un any després va publicar l'article en què aplicava l'equació a l'heli. En ell només deia de la seva equació que “[it] appeared at the time as a likely one, but it was impossible to give a rigorous derivation”.⁵² Els dubtes no provenien de la confrontació de l'equació amb l'experiència, sinó del desenvolupament ulterior de la teoria de Heisenberg i Pauli. A finals de gener de 1929 un jove J. Robert Oppenheimer, que realitzava el seu segon viatge d'estudis per Europa, va arribar a Zuric seguint, com abans Breit, els consells d'Ehrenfest. Oppenheimer va considerar amb Pauli la qüestió de l'energia pròpia de l'electró, un dels aspectes menys satisfactoris del primer article de Heisenberg i Pauli, “que podria arruïnar completament els resultats teòrics fins i tot en l'ordre $(v/c)^2$ ”.⁵³ L'estiu de 1929, ja als Estats Units, Oppenheimer va completar una anàlisi de les equacions de Heisenberg i Pauli a l'espai de configuració, que mostrava l'equivalència amb l'equació d'Schrödinger pel problema de varis cossos en el límit no relativista.

La motivació principal de l'article d'Oppenheimer, però, era veure en quina mesura el problema de l'autoenergia de l'electró, que ja es donava a la teoria clàssica, persistia en la nova teoria. Oppenheimer mostrava amb claredat que “és impossible, en la teoria present, d'eliminar la interacció d'una càrrega amb el seu propi camp”, i a més “que la teoria condueix a falses prediccions quan és aplicada al càlcul dels nivells d'energia i la freqüència de les línies

tronenproblems gibt es doch nichts Gutes. Die Näherung $(v/c)^3$ gibt ganz unvernünftige Resultate, die vielleicht mit der Diracschen $\pm m$ Schwierigkeit in Verband stehen”.

⁵²Breit (1930), p. 383.

⁵³El 16 de març Pauli havia escrit a Klein, referint-se al mateix article (PBI [218]): “Vieles in dieser Arbeit ist sehr verbesserungsbedürftig... vor allem: es besteht die große Gefahr, daß die Selbstenergie der Elektronen bereits in Größen der Ordnung $(v/c)^2$ die theoretischen Ergebnisse vollständig ruinieren werden”.

d'absorció i emissió d'un àtom".⁵⁴ Segons la teoria, els nivells d'energia de l'àtom no només estaven infinitament desplaçats de les seves posicions segons la teoria de Bohr, sinó que les diferències d'energia entre nivells contigus eren també infinites. A la seva conclusió, Oppenheimer descartava l'aplicabilitat de la teoria a problemes estrictament relativistes, aquells pels que havia estat creada: "We have treated these difficulties in some detail, because they show that the present theory will not be applicable to any problem where relativistic effects are important, where, that is, we cannot be guided throughout by the limiting case $c \rightarrow \infty$ ".⁵⁵

Oppenheimer era més explícit que Breit quan mostrava que l'equació de Breit només podia deduir-se prescindint dels termes d'energia pròpia. Quan Breit va publicar l'article en què aplicava la seva fórmula al càlcul de l'estructura fina de l'heli, els efectes del treball d'Oppenheimer eren ben manifestos:⁵⁶ "The same problem has been treated by Oppenheimer [(1929)] who showed that even to higher powers of e^2 the writer's equation [(10)] could be derived if certain infinite terms of the interaction energy are systematically neglected. However, Oppenheimer also shows that a strict application of the wave field theory leads to infinite relative displacements of the atomic energy levels". Breit relacionava el fracàs de la mecànica quàntica en la descripció de la interacció electromagnètica entre dues partícules amb dues dificultats. La primera d'elles, la qüestió de si l'electró tenia dimensions o podia ser considerat una partícula puntual, havia estat ja considerada en la teoria clàssica. L'altra, els "salts de Dirac" als nivells d'energia negativa, era molt més característica del moment de redacció de l'article. La conclusió de Breit era pessimista:⁵⁷ "Neither of these questions can be answered at present and it seems that no satisfactory purely theoretical solution of the two electron problem can be obtained before this is done". L'electrodinàmica quàntica de Heisenberg i Pauli, el tractament més general i fonamental que havia rebut la teoria, donava doncs poques esperances que el problema que Møller consideraria pocs mesos després fos soluble.

⁵⁴Oppenheimer (1929), p. 461: "it is impossible on the present theory to eliminate the interaction of a charge with its own field, and that the theory leads to false predictions when it is applied to compute the energy levels and the frequency of the absorption and emission lines of an atom".

⁵⁵*Ibid.*, p. 477.

⁵⁶Breit (1930), p. 384.

⁵⁷*Ibid.*, p. 384.

Dos anys després, en un article sobre “Quantum theory of dispersion” per *Review of Modern Physics*, Breit seria més concluent.⁵⁸ Mentre preferia justificar el mètode de correspondència de Klein mitjançant “the theory of the light quanta”, Breit observava que aquesta teoria “has not gone so far much beyond the justification of the correspondence method and... it cannot claim to be logically consistent on account of the well-known divergence difficulties”.⁵⁹ Breit recomenava el mètode de correspondència de Klein per la seva simplicitat i eficàcia.⁶⁰

Klein’s formulation appears at the present time, therefore, as a particularly clear way of stating our knowledge about the probabilities of spontaneous emission and of scattering. Although it does not aspire to the same degree of finish as the theory of light quanta it is highly recommended by its simplicity and it is likely to be correct quite independently of the theory of light quanta. In practical applications it has the additional advantages of avoiding too complicated calculations and of enabling one to visualize the phenomena in terms of charge and current distributions.

Quan Breit comentava el seu treball sobre la interacció entre dos electrons, les apreciacions negatives d’Oppenheimer encara eren presents:⁶¹

The interaction between two particles can also be treated according to quantum electrodynamics, and it is possible to explain by this means the interactions of the electron spins of two particles as well as the orbital and orbit spin interactions. It should be remembered, however, that the divergence difficulties of the theory make it impossible, according to Oppenheimer, to arrive at a unique interpretation of the results.

Després d’haver estat molt implicat durant més de dos anys amb el problema de dos electrons i amb l’aplicació de la teoria de Heisenberg i Pauli, Breit conclouia: “It will be seen from the above review of the work on the two electron problem that the theory of light quanta is not a very satisfactory tool for its discussion.

⁵⁸Breit (1932), (1933).

⁵⁹Breit (1933), p. 129.

⁶⁰*Ibid.*, p. 129.

⁶¹*Ibid.*, p. 131.

Results can be obtained, but without additional physical considerations they are not unique".⁶²

El 1931, Møller citava només el treball de Breit a una nota, comentant l'aplicació que n'havia fet Hugh C. Wolfe, un National Research Fellow que treballà a Caltech amb Oppenheimer entre 1929 i 1931. Wolfe va considerar a finals de 1930 la dispersió d'electrons d'alta velocitat en hidrogen com a test de l'energia d'interacció entre dos electrons, comparant la fórmula corresponent a la simple interacció electrostàtica, la fórmula de Gaunt i la fórmula de Breit. Wolfe deia de la fórmula de Breit que era "la millor justificada teòricament", i destacava la seva relació amb la teoria de Heisenberg-Pauli. Però afegia que en la seva aplicació a l'heli no donava millors resultats que la de Gaunt, d'aquí l'interès "de trobar una altra aplicació d'aquestes fórmules, on sigui possible determinar quina dóna resultats en millor acord amb l'experiència".⁶³

Wolfe va calcular la secció eficaç segons els tres potencials d'interacció, però no va arribar a contrastar experimentalment les expressions que havia deduït per manca de dades. Al darrer capítol veurem per què cap el 1930 les dades experimentals relatives a la dispersió entre electrons lliures eren molt escasses.

2. 3. Primers resultats i valoracions del mètode

Després de la breu referència als tractaments de Gaunt i Breit, Møller utilitza l'expressió (6) per la probabilitat de transició per calcular la secció eficaç diferencial. Per això considera $\mathbf{p}_2 = 0$, dirigeix l'eix Z segons l'impuls de la partícula incident, i introdueix coordenades polars a l'espai $\mathbf{p}_{1'}$, de forma que

$$d^3\mathbf{p}_{1'} = |\mathbf{p}_{1'}| d\mathbf{p}_{1'} \sin\theta d\theta d\varphi = |\mathbf{p}_{1'}| \frac{E_{1'}}{c} dE_{1'} \sin\theta d\theta d\varphi.$$

Møller calcula la secció eficaç a partir de la probabilitat de transició, dividint pel nombre de cossos dispersors, $u_2^\dagger u_2 V$ (V , volum de l'espai \mathbf{r}_2) i pel flux de partícules incidents, $-c u_1^\dagger \vec{\alpha}^{(1)} u_1$. L'expressió que obté finalment, després d'integrar sobre $\mathbf{p}_{2'}$ i $E_{1'}$, i sumar sobre els espins finals ($s_{1'}$ i $s_{2'}$), és⁶⁴

⁶²*Ibid.*, p. 136.

⁶³Wolfe (1931), p. 592: "It is, therefore, of interest to find another place to use this formulas, where it may be possible to determine which gives results in better agreement with experiment".

⁶⁴Per integrar sobre $\mathbf{p}_{2'}$ Møller observa que d'acord amb el teorema de Fourier (expressió 5)

$$\int d^3\mathbf{p}_{2'} \left| \int e^{\frac{2\pi i}{h}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_{1'} - \mathbf{p}_{2'}) \cdot \mathbf{r}_2} d^3\mathbf{r}_2 \right|^2 = h^3 \int d^3\mathbf{r}_2 = h^3 V,$$

$$d\sigma(\theta) = \frac{4|\mathbf{p}_{1'}|E_1 h^6 e_1^2 e_2^2}{c^2} \sum_{s_1 s_2} (s_1 s_2 \mathbf{p}_1 | A | s_1' s_2' \mathbf{p}_{1'}) \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (12)$$

on

$$(s_1 s_2 \mathbf{p}_1 | A | s_1' s_2' \mathbf{p}_{1'}) = \frac{1}{(u_2^\dagger u_2)(-cu_1^\dagger \alpha_z^1 u_1)} \left| \frac{u_2^\dagger u_2 u_1^\dagger u_1 - (u_2^\dagger \vec{\alpha}^{(2)} u_2) \cdot (u_1^\dagger \vec{\alpha}^{(1)} u_1)}{(p_1 - p_{1'})^2} \right|^2, \quad (13)$$

i les magnituds $\mathbf{p}_{1'}$, $\mathbf{p}_{2'}$, $E_{1'}$ i $E_{2'}$ tenen els valors que els corresponen d'acord amb les lleis de conservació. Møller afegeix només que si les partícules incidents i les dispersores no estan polaritzades, s'ha de promitjar (12) sobre els spins inicials. Si es tracta de partícules idèntiques, com ara electrons, la indistingibilitat pot ser considerada “en la forma usual”.

Aquesta expressió conté un error “que ningú no va descobrir, i que vaig corregir al segon article”.⁶⁵ Møller havia integrat separatament sobre $\mathbf{p}_{2'}$ i $E_{1'}$ sense tenir en compte que les dues magnituds estan relacionades. H. J. Bhabha descobriria anys després que mancava un factor 2, en aplicar el mètode de Møller a l'anàlisi de la col·lisió positró-electró.⁶⁶

Møller observa que els càlculs es poden desenvolupar exactament,⁶⁷ però “en el cas general donen expressions bastant complicades”. Es limita per tant a la consideració dels casos límit no relativista i ultrarelativista.

En el límit no relativista es considera que la velocitat dels electrons incidents permet desenvolupar en $\beta = v/c$. Møller indica que menyspreant termes d'ordre superior a β^2 s'obté aleshores per la secció eficaç

$$d\sigma(\theta) = \frac{e^4 \sin 2\theta 2d\theta d\varphi}{m^2 v^4} \left\{ \frac{1}{\sin^4 \theta} + \frac{1}{\cos^4 \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} - \frac{\beta^2}{4} \left[\frac{4}{\sin^4 \theta} + \frac{3}{\cos^4 \theta} - \frac{2}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} - \frac{5}{\cos^2 \theta} \right] \right\}, \quad (14)$$

i que la mateixa expressió s'obté en aquesta aproximació usant l'equació de Breit, segons el càlcul de Wolfe. Per mostrar l'equivalència, donat que han

on V és el volum de l'espai \mathbf{r}_2 .

⁶⁵Møller-Weiner (1971), p. 13. Veure Møller (1932), p. 565n.

⁶⁶Bhabha a Møller, 13 i 29 octubre 1935 (MP).

⁶⁷Møller assenyala a una nota que “[els càlculs] es desenvolupen exactament igual que a Wolfe [(1931)], la diferència està únicament en l'expressió dels elements de matriu de la interacció” (“[Die Rechnungen] verlaufen ganz wie bei Wolfe (l. c.), der Unterschied liegt nur in dem Ausdruck für die Matrixelemente der Wechselwirkung”, p. 793).

usat diferents variables d'integració (Wolfe integra sobre $W' = E_{1'} + E_{2'}$ i $\mathbf{p}' = \mathbf{p}_{1'} + \mathbf{p}_{2'}$), s'ha de multiplicar l'expressió de Wolfe⁶⁸

$$d\sigma(\theta) = \frac{e^4 \sin 2\theta 2d\theta d\varphi}{m^2 v^4} \left\{ \frac{1}{\sin^4 \theta} + \frac{1}{\cos^4 \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} - \frac{\beta^2}{4} \left[\frac{4}{\sin^4 \theta} + \frac{2}{\cos^4 \theta} - \frac{3}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \right] \right\}, \quad (15)$$

pel jacobià de la transformació, que fins l'ordre β^2 és $1 - \beta^2 \sin^2 \theta / 4$, com indica Møller.

Si es reproduïen els càlculs s'obté en efecte el resultat de Møller, a menys del terme $\frac{5}{\cos^2 \theta}$, que és substituït per $\frac{3}{\cos^2 \theta}$. Donat que Møller subratlla l'equivalència dels resultats, el més probable és que es tractés simplement d'un error d'impremta. Møller caracteritza la seva fórmula (14) com “la generalització d'una fórmula de Mott, que considera l'intercanvi però no la relativitat”.⁶⁹ La fórmula de Mott resulta en aquest límit de suprimir simplement el terme en β^2

$$d\sigma(\theta) = \frac{e^4 \sin 2\theta 2d\theta d\varphi}{m^2 v^4} \left\{ \frac{1}{\sin^4 \theta} + \frac{1}{\cos^4 \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \right\}. \quad (16)$$

Suprimint encara el darrer terme d'aquesta expressió s'obté la fórmula clàssica de dispersió⁷⁰

$$d\sigma(\theta) = \frac{e^4 \sin 2\theta 2d\theta d\varphi}{m^2 v^4} \left\{ \frac{1}{\sin^4 \theta} + \frac{1}{\cos^4 \theta} \right\}. \quad (17)$$

Møller calcula a continuació el quocient F entre la seva expressió per la secció eficaç i la secció eficaç clàssica, obtenint

$$F = A(\theta) + B(\theta),$$

⁶⁸Wolfe (1931), eq. (18) III. S'ha corregit un error trivial d'aquesta expressió.

⁶⁹Møller (1931), p. 794: “[14] ist die Verallgemeinerung einer Formel von Mott, welche den Austausch, aber nicht die Relativität berücksichtigt”. Møller cita l'article en què Neville Mott havia considerat per primer cop la indistingibilitat en el càlcul de la col·lisió entre dos electrons, obtenint un terme addicional a la fórmula clàssica de dispersió (Mott 1930). Veure p. 85.

⁷⁰Darwin, “Collisions of α particles with light atoms”, *Phil. Mag.* **27** (1914), 499–506. Darwin generalitzava en aquest treball l'anàlisi de Rutherford de la col·lisió d'una partícula α amb un nucli (“The scattering of α and β particles by matter and the structure of the atom”, *Phil. Mag.* **21** (1911), 669), introduïnt la massa reduïda del sistema. D'aquesta manera podia considerar el pas de partícules α a través d'heli.

$$A(\theta) = (1 - \beta^2) \left(1 - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\sin^4 \theta + \cos^4 \theta} \right) - \frac{3\beta^2}{2} \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\sin^4 \theta + \cos^4 \theta},$$

$$B(\theta) = \frac{\beta^2 \sin^2 \theta (1 + \mathbf{3} \sin^2 \theta \cos^2 \theta)}{4 \sin^4 \theta + \cos^4 \theta}.$$

Reproduïnt aquest càlcul es comprova fàcilment que el **3** en negreta a $B(\theta)$ correspon al numerador del darrer terme de (14).⁷¹ Això confirma que Møller havia calculat correctament el límit no relativista. En aquest cas, sorprèn que Møller no esmentés aquest error a la seva correspondència fins a finals de 1931, en cartes a Heisenberg (4 de desembre) i Champion (7 de desembre).⁷² Møller havia tingut anteriorment altres ocasions d'assenyalar l'error. El 30 de setembre havia enviat a Bethe una separata de l'article, demanant-li'n una de Bethe (1930), l'important treball de Bethe sobre el frenat de partícules ràpides segons la teoria de Schrödinger. No s'hi troba cap menció, com tampoc a la primera carta que Møller va enviar a Champion, el 4 de novembre. El més probable és que Møller no se n'adonés fins que no va disposar de la fórmula general (una primera versió equivocada), i la va comparar amb els límits que havia calculat anteriorment. Així ho suggereix el fet que Møller esmentés l'error per primera vegada a les mateixes cartes que contenien aquesta primera versió de la fórmula general.

En el límit ultrarelativista ($\gamma \gg 1$), per angles de dispersió θ tals que $\sin^2 \theta \gg 1/\gamma$, Møller obté

$$d\sigma(\theta) = \frac{e^4 \sin 2\theta d\theta d\varphi}{4m^2v^4} (\tan^4 \theta + \tan^2 \theta), \quad (18)$$

que compara amb l'expressió corresponent deduïda a partir de l'equació de Breit⁷³

$$d\sigma(\theta) = \frac{e^4 \sin 2\theta d\theta d\varphi}{4m^2v^4} (\tan^4 \theta + \tan^2 \theta \cdot \sin^4 \theta).$$

⁷¹S'observa a més que també aquesta fórmula conté un error: s'ha corregit el factor del darrer terme d' $A(\theta)$, que a l'article de Møller és $\frac{3\beta^2}{4}$ (p. 794).

⁷²Cfr. AHQP-59. Møller hi indicava l'error explícitament, però es tractava de cartes mecanografiades i a les còpies sobre paper carbó que van ser microfilmades i incorporades a l'arxiu no hi figuren les fórmules. L'esborrany de la carta a Champion, que també es conserva, sí conté la correcció. F. Clive Champion, un físic experimental del laboratori Cavendish, seria el primer de contrastar la fórmula de Møller.

⁷³Wolfe (1931) no donava el límit ultrarelativista. Møller hagué de calcular-lo a partir de la complicada fórmula general que Wolfe obtenia a partir de l'hamiltonià de Breit (Wolfe 1931, eq. (21) III).

Møller comenta només que segons aquesta expressió la dependència angular de la secció eficaç difereix essencialment de la d'electrons lents.

La fórmula (18) per la secció eficaç ultrarelativista no era correcta. Com en el cas límit anterior, Møller només s'adonà de l'error quan va disposar de la fórmula general definitiva. Sabem indirectament d'aquest error, ja que Møller no va tractar aquest cas al seu següent article; només en fa referència a la correspondència amb Heisenberg. A finals de 1931 Heisenberg, que s'havia interessat per la radiació còsmica a principis de 1930, preparava un article en què discutiria els experiments més importants sobre radiació còsmica segons les teories existents, per veure en quins punts havia acord amb les previsions teòriques, i en quins el desacord era tan gran que "s'havia d'estar preparat per sorpreses importants".⁷⁴ Heisenberg hi tractava el pas d'electrons i raigs γ d'alta energia a través de la matèria, i s'interessà en els resultats de Møller pel cas ultrarelativista. L'intercanvi de correspondència resultant conté moltes dades d'interès sobre l'evolució del treball de Møller, que usarem al capítol següent.

Aquí ens interessa la darrera d'aquestes cartes. A primers de febrer de 1932, Møller va comunicar a Heisenberg la versió correcta de la seva fórmula de dispersió, que havia obtingut dies abans. Aquesta carta no es conserva, però és evident pel context que Heisenberg acabava de rebre-la quan el 15 de febrer va respondre a Møller:⁷⁵ "Moltes gràcies per la seva carta! El seu resultat actual em satisfà molt. La seva fórmula

$$d\sigma(\theta) = \frac{e^4 d\theta d\varphi}{m^2 c^4} (\tan^3 \theta + \tan \theta) \quad (19)$$

és *exactament* la fórmula clàssica". Després de mostrar de forma molt senzilla com s'obté clàssicament aquest resultat, Heisenberg afegia:⁷⁶ "Que la seva

⁷⁴Heisenberg (1932). A la introducció indicava Heisenberg (p. 430): "Die vorliegende Untersuchung verfolgt die Absicht, die wichtigsten Experimente über Höhenstrahlung vom Standpunkt der bisherigen Theorien ausführlich zu diskutieren und festzustellen, an welchen Punkten die Experimente der theoretischen Erwartung ungefähr entsprechen und wo so große Abweichungen auftreten, daß man auf wichtige Überraschungen gefaßt sein muß".

⁷⁵Heisenberg a Møller, 15 febrer 1932: "Vielen Dank für Ihren Brief! Ihr jetziges Resultat ist mir sehr befriedigend. Ihr Formel [veure text] ist *genau* die klassische Formel". Heisenberg feia a continuació un senzill càlcul "en un parell de línies" per mostrar-li-ho, el mateix que havia inclòs a l'article que acabava d'enviar (1932).

⁷⁶*Ibid.*: "Dass Ihre Formel identisch ist mit der klassischen, ist mir sehr sympatisch, da die klassische Formel die Übergangseffekte gut erklärt, Ihre bisherige aber gar nichts. Leider hab ich meine Arbeit schon abgeschickt, ich werde sie noch zu ändern versuchen".

fórmula sigui idèntica a la clàssica és per a mi molt simpàtic, ja que la fórmula clàssica explica bé els efectes de transició, però la que tenia fins ara gairebé no ho feia. Per desgràcia ja he enviat el meu treball; miraré encara de modificar-lo”. Heisenberg es referia a l'article sobre radiació còsmica, que havia estat rebut als *Annalen der Physik* el 13 de febrer. Heisenberg va poder indicar finalment al seu article que el resultat de Møller equivalia al clàssic:⁷⁷ “Møller [(1931)] ha tractat la col·lisió entre dos electrons lliures segons el mètode de Born considerant el retardament i obtingut (després de corregir un error de càlcul del treball citat, per la comunicació escrita del qual estic molt agraït al senyor Møller) exactament el resultat clàssic [(19)]”.

Prèviament a aquesta resolució satisfactòria, el desacord entre ambdós càlculs havia fet dubtar seriosament Heisenberg de l'aplicabilitat del mètode de Møller a electrons de molt alta energia. Les objeccions de Heisenberg van ser decisives perquè Møller desistís finalment d'aplicar els seus càlculs a la radiació còsmica, com era la seva intenció original.⁷⁸ Møller l'expressava clarament al final de l'article que estem considerant, l'últim paràgraf del qual considerava la possibilitat de comprovar experimentalment la secció eficaç ultrarelativista. Møller observava que aquest cas extrem no es podia assolir mitjançant electrons accelerats artificialment, però “hauria de donar-se en els electrons produïts per l'aurora boreal, i en els raigs corpusculars que acompanyen la radiació d'altura. La fórmula [(18)] seria doncs aplicable al càlcul del frenat i dispersió [de la radiació còsmica], sobre el que espero tornar més endavant”.⁷⁹

A mitjans de 1931 Møller disposava d'aquesta manera d'un mètode que

⁷⁷Heisenberg (1932), p. 433: “Møller [(1931)] hat den Stoß zweier freier Elektronen nach der Bornschen Methode unter Berücksichtigung der Retardierung behandelt und (nach Verbesserung eines Rechenfehlers in der zitierten Arbeit, für dessen briefliche Mitteilung ich Hrn. Møller zu großem Dank verpflichtet bin) genau das klassische Resultat [(19)] erhalten”.

⁷⁸Veure la primera secció del capítol següent.

⁷⁹Møller (1931), p. 795: “[Dieser extreme Fall] dürfte aber bei den Nordlicht erzeugenden Elektronen und bei den Korpuskularstrahlen, welche die Höhenstrahlung begleiten, realisiert sein. Die Formel [(18)] wäre also bei der Berechnung der Bremsung und Streuung [der Höhenstrahlung] anzuwenden, worauf ich später zurückzukommen hoffe”. Møller parla en termes molt generals d'una “radiació corpuscular”, reflectint la incertesa respecte la seva naturalesa i sobre la constitució de la radiació còsmica en general. El terme “radiació d'altura” (*Höhenstrahlung*) era el més comú en llengua alemanya des de les primeres investigacions del fenomen, en la primera dècada del segle. Durant els anys trenta aquesta era encara la denominació més usual, però el terme va ser desplaçat finalment pel de “radiació còsmica”, introduït per Millikan el 1925.

donava, si més no en els seus casos límits, resultats prometedors. Si l'aplicava al càlcul del frenat d'electrons relativistes, podia esperar obtenir resultats útils per a l'anàlisi de la radiació còsmica, un dels camps de recerca més actius en aquells moments. Amb aquestes perspectives hagué d'iniciar Møller el treball que el portaria a completar, en menys d'un any, l'article més extens i important dels que havia publicat fins aquell moment. Al següent capítol examinem la seva gènesi, i especialment la de la fórmula de dispersió entre electrons lliures que conté. Abans, però, considerem breuement algunes de les primeres reaccions a l'article que acabem d'analitzar.

El recurs al principi de correspondència va ser aviat considerat com un dels elements característics del treball de Møller. Poc després de la seva aparició, Léon Rosenfeld mostrà amb claredat aquesta filiació conceptual. El setembre de 1931 Rosenfeld, que es trobava a Copenhaguen des de finals de febrer, havia conclòs un tractament del problema relativista de varis cossos en base al “principi de correspondència refinat de Heisenberg”.⁸⁰ D'aquesta manera s'obtenia “una generalització del mètode emprat per Møller en el tractament relativista dels problemes de col·lisió, d'acord amb els resultats deduïts d'una altra manera per Breit”.⁸¹ El 30 de setembre Møller comentava a Bethe que “el Sr. Rosenfeld ha realitzat una generalització molt interessant del mètode emprat al meu treball, mitjançant la qual dedueix expressions relativistes totalment generals per l'intercanvi d'un número arbitrari de partícules, naturalment només en la regió en què la interacció pot considerar-se petita, és a dir, *en què té sentit el problema relativista de molts cossos segons el principi de correspondència*”.⁸²

Quan a principis de 1932 Dirac va publicar la seva alternativa a l'electrodinàmica quàntica de Heisenberg-Pauli, el mètode es relacionava també de forma més explícita que en l'article de Møller amb el principi de correspondència.⁸³ Dirac destacava el paper jugat pel principi de correspondència en

⁸⁰Rosenfeld (1931), p. 253: “Heisenbergsche Verfeinerung der Korrespondenzmethode”. Cfr. Heisenberg, “Bemerkungen zur Strahlungstheorie”, *Ann. Physik* **9** (1931), 338–346.

⁸¹Ibid., p. 253: “Man erhält eine Erweiterung der von Møller benutzten Methode zur relativistischen Behandlung des Stoßproblems, im Einklang mit den in anderer Weise abgeleiteten Resultaten von Breit”.

⁸²Møller a Bethe, 30 setembre 1931 (AHQP-59); el subratllat és meu): “Übrigens hat Herr Rosenfeld eine sehr interessante Verallgemeinerung der in meiner Arbeit benutzten Methode durchgeführt, indem er ganz allgemeinen relativistische Ausdrücke für die Wechselwirkung beliebig vieler Teilchen herleitet, natürlich nur in dem Gebiet wo die Wechselwirkung als klein betrachtet werden kann, also *wo das relativistische Mehrkörperproblem korrespondenzmäßig überhaupt einen Sinn hat*”.

⁸³Dirac, “Relativistic Quantum Mechanics”, *Proc. Roy. Soc. A* **136** (1932), 453–464.

el desenvolupament de la teoria quàntica, i comparava el mètode de Møller amb els mètodes basats en el principi de correspondència usats abans que es formulés la nova mecànica quàntica. Encara que criticava la seva manca de generalitat, Dirac qualificava el mètode de Møller com “a definite advance in the relativistic theory of the interaction of two electrons”.⁸⁴

El mètode de Møller va sorprendre per la relativa simplicitat amb què permetia tractar el problema de la dispersió d'electrons relativistes. El març de 1932 Bethe, després d'haver-se'n ocupat intensament, escrivia a Møller:⁸⁵ “Trobo meravellós que hagi pogut tractar el problema de forma tan senzilla!” En aquells moments Bethe es trobava preparant un article on el mètode de Møller era aplicat al càlcul del frenat d'electrons relativistes. Al primer paràgraf Bethe destacava la importància del mètode, així com la de la seva aplicació a la radiació còsmica: “Entretant Møller ha aclarit en un article important la qüestió de la energia d'interacció de forma molt senzilla i satisfactòria, i ara és possible donar la fórmula de frenat per electrons amb qualsevol velocitat, el que és d'importància per a la interpretació dels experiments sobre la radiació d'altura corpuscular”.⁸⁶

També Oppenheimer va reaccionar a la publicació de l'article i, juntament amb J. F. Carlson, aplicà el mètode al càlcul de la col·lisió entre un electró d'alta energia i “la hipotètica partícula elemental neutra l'existència de la qual va ser suggerida tentativament per Pauli”, referint-se al “neutró de Pauli”.⁸⁷ Oppenheimer i Carlson s'havien adonat de la potencialitat del mètode i, alhora que el descrivien breument amb precisió, en feien una valoració favorable a la introducció de l'article:⁸⁸

Cfr. Kragh [1990], pp. 132 i ss.

⁸⁴*Ibid.*, p. 455.

⁸⁵Bethe a Møller, 25 març 1932 (AHQP, mf. 59,4): “Ich finde es wunderschön, daß Sie das Problem auf so einfache Weise behandeln könnten!”.

⁸⁶Bethe (1932), p. 293: “Inzwischen hat Møller in einer wichtigen Arbeit die Frage der Wechselwirkungsenergie sehr einfach und befriedigend geklärt, und es ist nunmehr möglich, die Bremsformel für beliebig rasche Elektronen anzugeben, was für die Deutung der Experimente über die korpuskulare Höhenstrahlung von Wichtigkeit ist”.

⁸⁷Els actuals neutró i neutrí no havien estat encara distingits clarament, i la partícula neutra proposada per Pauli (l'actual neutrí) explicava tant l'estadística del nucli com l'espectre β continu. L'existència del neutró no estava confirmada, però la suggerien els experiments amb la radiació penetrant de berilli amb la qual va ser finalment identificat. Oppenheimer i Carlson no especificaven ni la massa ni l'espí del “neutró”, i consideraven “la partícula més general que satisfà l'equació d'ona proposada per Pauli”.

⁸⁸Oppenheimer i Carlson, “The impacts of fast electrons and magnetic neutrons”, *Phys.*

Quite recently Møller has given a beautiful method of treating the relativistic impact of two electrons. This method is based upon a refinement of the correspondence principle; it neglects higher powers of the interaction energy between the electrons, and the effect of radiative forces; but within these limits it is strict and unambiguous, and enables one to take account, not only of the relativistic variation of mass with the velocity of the electrons, but of the retardation of the forces between them, of the spin forces, of interchange and the exclusion principle.

El mètode, doncs, va ser acollit favorablement a pesar de les seves limitacions, i físics destacats van valorar-lo com una contribució significativa a l'anàlisi teòrica de la interacció entre dos electrons.

Rev. **41** (setembre 1932), 763–792 [reb. 18 juliol 1932], p. 765. Veure també les comunicacions prèvies amb el títol “On the range of fast electrons and neutrons” a *Phys. Rev.* **38** (1 novembre 1931), 1787–1788 [sig. 9 octubre 1931], i *Phys. Rev.* **39** (1 març 1932), 864–865 [sig. desembre 1932].

3. La fórmula de Møller

Un cop desenvolupat el mètode, Møller va extreure'n totes les conseqüències i hi va basar la seva tesi doctoral. Finalitzat l'article en què exposava el mètode, Møller hauria preguntat a Bohr:¹ “Wouldn't it be interesting to try to continue this and calculate the stopping phenomenon of relativistic particles?” El càlcul del frenat seria per Møller l'objectiu més important del seu treball durant els mesos següents, com reflexen les nombroses referències a aquest problema en la seva correspondència. De fet, només en aquest context més general tenia sentit calcular detalladament la interacció entre dos electrons lliures, un problema que no tenia en aquells moments entitat pròpia. L'interès pel frenat, en canvi, no necessitava justificació. La qüestió del frenat s'havia revelat des de principis de segle com una qüestió central per l'anàlisi de les radiacions radioactives i la constitució dels àtoms, i físics de la categoria de Thomson o el mateix Bohr l'havien tractat anteriorment.² La mesura del frenat era un medi usual d'identificació de partícules, i cap a 1930 era evident l'interès d'un càlcul relativista, que pogués contribuir a precisar la naturalesa de les partícules còsmiques.

L'aplicabilitat dels seus resultats a la radiació còsmica va ser per a Møller, en el moment d'iniciar l'estudi que formaria la seva tesi, un estímul decisiu. La investigació d'aquest fenomen havia assolit ja el 1931 una gran importància, que no faria més que augmentar els anys següents. Però la rellevància d'aquest aspecte del seu treball va disminuir progressivament a mida que avançava en els seus càlculs, que Møller concentrà finalment de forma exclusiva en la radiació β . Abans d'examinar en detall la deducció de la fórmula, analitzem el seu procés d'elaboració i aquest desplaçament simultani dels interessos de Møller, que ilustra en forma única la seva correspondència.

¹Møller-Weiner (1971), p. 18.

²Bohr mantingué un interès constant per les qüestions del frenat i del pas de partícules ràpides a través de la matèria, a les que dedicà dos dels seus primers treballs científics (1913, 1915) i un dels darrers, un número monogràfic de 144 pàgines de la revista de l'Acadèmia de Ciències danesa (1948). Veure més endavant p. 78.

3. 1. El procés d'elaboració

L'estiu de 1931 Møller es va casar amb Kirsten M. Pedersen, nascuda el 1901 a Skodsborg. A finals de l'estiu, en tornar de la seva lluna de mel, Møller va començar a treballar en l'aplicació del seu mètode al càlcul del frenat d'electrons relativistes. Aquesta era la intenció que ja havia expressat al final del seu darrer article, i que mantenia intacta quan el 30 de setembre va escriure a Bethe enviant-li una separata de l'article que acabava de publicar, i demantant-li'n una del treball de Bethe sobre el frenat de partícules ràpides, “donat que ara voldria intentar de calcular segons el mateix mètode el frenat de partícules extremadament ràpides (radiació β , radiació d'altura)”.³

Dues setmanes després, el 14 d'octubre, Møller va rebre una carta sense signar procedent de Cambridge. L'autor era F. Clive Champion, un estudiant de doctorat que treballava en una tesi experimental sobre la radiació β , que havia llegit el darrer article de Møller i s'interessava per la fórmula general de dispersió. La correspondència que s'establí a continuació entre Møller i Champion conté indicacions valuoses sobre l'estat del treball de Møller, ja que la iniciativa de Champion va fer que es convertís en la primera persona fora de Copenhaguen, llevat de Heisenberg, de conèixer els resultats de Møller a mida que els anava obtenint. Per aquesta primera carta, que va quedar sense resposta, sabem indirectament que Møller havia ja avançat “un bon tros” (“ein gutes Stück”) en els seus càlculs, com va explicar a Max Delbrück en preguntar-li pel remitent desconegut. Els comentaris que seguien feien referència exclusivament al frenat, la qüestió que més preocupava Møller. El que havia fet fins aquell moment suggeria que, degut al retardament, els electrons ràpids serien més frenats que no era d'esperar segons les teories d'Schrödinger o clàssica. Møller no disposava encara d'una expressió pel frenat, però n'adjuntava una pel número d'ions formats en hidrogen per cm de trajectòria, que discutia. Møller devia copiar a mà aquesta expressió sobre la carta mecanografiada. La còpia sobre paper carbó conservada per Møller, que és la que va ser microfilmada, no conté la fórmula. Per la resposta de Delbrück sabem que en ella la ionització primària era proporcional a γ^2 en el límit d'altres energies, el que portava Delbrück a expressar els primers dubtes sobre la correcció del càlcul,

³Møller a Bethe, 30 setembre 1931 (AHQP-59): “Da ich jetzt versuchen möchte nach derselben Methode die Bremsung extrem schneller Teilchen ($[\beta]$ Strahlen, Höhenstrahlung) zu berechnen, würde ich sehr froh sein, wenn Sie mir einen Sonderdruck Ihrer Arbeit über denselben Gegenstand nach der Schrödingerschen Theorie schicken wollten”.

donat que aquesta proporcionalitat “significaria una ionització enorme pels electrons de la radiació d’altura, mentre que Skobelzyn, Millikan i Blackett només troben una ionització aproximadament doble”.⁴ La suggerència de Delbrück, “no podria ser que el $\gamma^2 - 1$ anés darrera el Log nat?”, s’adiu amb l’expressió que finalment va obtenir Møller.⁵

El 2 de novembre Champion va tornar a escriure a Møller, però aquest cop va signar la carta i Møller va poder respondre-li el 4 de novembre. Møller, que s’interessà vivament pel treball de Champion, era optimista respecte l’estat dels càlculs, i li comunicava que esperava poder enviar-li la fórmula general “in a short time”.⁶ Com veurem tot seguit, aquest període de temps va ser d’un mes. Champion, però, no va ser l’únic en interessar-se pel treball de Møller. A finals de novembre, Møller va rebre una carta de Heisenberg, les crítiques i suggerències del qual serien decisives pel seu èxit final.

Heisenberg, que coneixia bé Møller per les seves estades freqüents a Copenhaguen, preparava en aquells moments un article sobre l’adequació del coneixement teòric de la radiació còsmica a les dades experimentals.⁷ La seva carta estava motivada per la qüestió del frenat:⁸

Fa un parell de dies ha aparegut un treball d’Oppenheimer (Phys. Review), que afirma que segons els seus càlculs [de Møller] s’obtidria per la intensitat de frenat d’electrons extremadament durs $\frac{4\pi e^4 N}{mc^2} \log E$. Això em sembla molt poc plausible, però no tinc moltes ganes de revisar tots els càlculs. Ha calculat vostè aquest problema alguna vegada? Què en resulta?

Heisenberg s’interessava així mateix per la fórmula de dispersió en el cas ultra-

⁴Møller a Delbrück, 14 octubre 1931 (AHQP-59): “das würde für Höhenstrahlungselektronen ungeheurn Ionisierung bedeuten, während Skobelzyn, Millikan und Blackett nur etwa doppelte Ionisierung finden”.

⁵*Ibid.*: “Sollte das $\gamma^2 - 1$ nicht noch mit unter den Log nat kommen?”. Veure la fórmula (93) de Møller (1932).

⁶Champion a Møller, 2 novembre 1931; Møller a Champion, 4 novembre 1931 (AHQP-59).

⁷Veure al capítol anterior p. 46.

⁸Heisenberg a Møller, 28 novembre 1931 (AHQP-59): “Es ist vor ein paar Tagen eine Arbeit von Oppenheimer erschienen, (Phys. Review), der behauptet, nach Ihrer Rechnung käme für das Bremsvermögen für äusserst harte einfallende Elektronen $\frac{4\pi e^4 N}{mc^2} \log E$ heraus. Mir scheint das s[eh]r unplausibel, ich hab aber nicht viel Lust, die ganzen Rechnungen durchzusehen. Haben Sie dieses Problem einmal gerechnet und was kommt dabei heraus?”. Heisenberg es referia a la primera comunicació prèvia del treball d’Oppenheimer i Carlson citat a la nota 88 del capítol anterior; veure-hi fórmula (1).

relativista per angles de dispersió petits, $\sin^2 \theta \leq 1/\gamma$, que Møller havia exclòs al seu article anterior en deduir el límit ultrarelativista només per angles θ tals que $\sin^2 \theta \gg 1/\gamma$.

Møller va contestar a Heisenberg el 4 de desembre. La seva resposta s'iniciava, significativament, per la segona qüestió, a la que Møller replicava amb una primera versió equivocada de la fórmula general de dispersió. La còpia microfilmada de la carta de Møller no conté fórmules, però no pot tractar-se sinó de la mateixa expressió que Møller comunicà també a Champion tres dies després, el 7 de desembre. Un esborrany manuscrit que es conserva d'aquesta carta sí conté la versió més primitiva de la secció eficaç diferencial de dispersió de Møller

$$d\sigma(\theta) = \frac{e^4 \sin 2\theta 2d\theta d\varphi 4[\gamma + 3 + (\gamma - 1) \cos \theta_{cm}](\gamma + 1)}{m^2 \gamma^4 v^4 [\gamma + 1 - (\gamma - 1) \cos \theta_{cm}] [(\gamma + 3)^2 - (\gamma - 1)^2 \cos^2 \theta_{cm}]} \mathcal{F}, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = & 2\gamma^2(\gamma + 1) \left(\frac{4}{\sin^4 \theta_{cm}} - \frac{3}{\sin^2 \theta_{cm}} \right) \\ & + \frac{(\gamma - 1)^2}{4} \left(\frac{4[1 + (\gamma + 1)^2]}{\sin^2 \theta_{cm}} + 3 - 2\gamma^2 \right) + \frac{(\gamma - 1)^4}{16} \sin^2 \theta_{cm} \quad (2) \end{aligned}$$

(θ_{cm} angle de dispersió en el sistema centre de masses, θ angle de dispersió en el sistema laboratori; γ i v es refereixen a l'electró incident). L'expressió, bastant més complicada que la correcta, es reduïa tanmateix als límits que havia calculat anteriorment, com Møller explicava tant a Heisenberg com a Champion, assenyalant de pas l'error al límit ultrarelativista que ja hem comentat.

Pel que fa a la qüestió del frenat, Møller explicava a Heisenberg que es trobava precisament fent els càlculs per l'hidrogen, i que els resultats es podrien generalitzar fàcilment a àtoms lleugers. Møller li transcrivía una expressió pel número d'ions formats per cm de trajectòria que en el límit no relativista es reduïa exactament a la calculada anteriorment per Bethe. Però no deixava d'expressar la seva incertesa respecte el significat d'alguns dels termes que hi apareixien. Un d'ells el sorprenia especialment, ja que si bé no estava en contradicció “amb els experiments existents sobre la ionització de partícules $[\beta]$ ràpides... hauria de significar un creixement increïble de la ionització de la radiació d'altura”.⁹ Møller no disposava encara d'una expressió per l'abast de les partícules.

⁹Møller a Heisenberg, 4 desembre 1931 (AHQP-59): “Obwohl das Glied [?] nicht mit den vorhandenen Experimenten über die Ionisation durch schnelle $[\beta]$ -Strahlen in Widerspruch ist... für Höhenstrahlung sollte das ja einen unglaublichen Zuwachs der Ionisation bedeuten”.

En les cartes a Heisenberg i Champion hi havia també les relacions entre els angles de dispersió als sistemes centre de masses i laboratori, θ_{cm} i θ , que Møller havia usat

$$\cos \theta_{cm} = \frac{2 - (\gamma + 3) \sin^2 \theta}{2 + (\gamma - 1) \sin^2 \theta},$$

$$\sin \theta_{cm} = \frac{(\gamma + 1) \sin 2\theta}{2 + (\gamma - 1) \sin^2 \theta}.$$

Aquestes relacions, com Heisenberg va notar immediatament, no eren correctes. Prenent com a vàlida l'expressió per $\cos \theta_{cm}$, Heisenberg obtenia pel sinus

$$\sin \theta_{cm} = \frac{\sqrt{2(\gamma + 1) \sin 2\theta}}{2 + (\gamma - 1) \sin^2 \theta},$$

d'acord amb l'expressió que ell mateix utilitzava usualment,

$$\tan \frac{\theta_{cm}}{2} = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2}} \tan \theta.$$

Aquesta era la primera consideració de la resposta que envià a Møller el 10 de desembre. La segona afectava la fórmula general i les seves implicacions per la radiació d'altura:¹⁰

La seva fórmula final per a $\phi(\theta)$ és certament extremadament interessant, però voldria notar que significaria sens dubte una contradicció extraordinària entre teoria i experiment, i mostraria que tot el mètode de càlcul amb camps retardats deixa de ser admissible. S'ha de pensar que pels electrons de la radiació d'altura γ pot ser com a mínim 1000. Però tampoc entenc de cap manera com serien possibles aquestes desviacions de la teoria clàssica.

Aquestes consideracions negatives de Heisenberg, que venien a afegir-se a les que ja havien expressat Delbrück i el mateix Møller anteriorment, van decidir Møller a deixar de costat la radiació còsmica. Les notícies que simultàniament

¹⁰Heisenberg a Møller, 10 desembre 1931 (AHQP-59): "Ihre Endformel für $\phi(\theta)$ ist ja äusserst interessant, ich möchte aber merken, dass sie zweifellos einen eklatanten Widerspruch zwischen Theorie u. Experiment bedeuten würde und zeigte, dass die ganze Berechnungsmethode mit retardierten Feldern nicht mehr zulässig ist. Man muss bedenken, dass γ für Höhenstrahlungselektronen mindestens 1000 sein kann. Aber ich verstehe auch garnicht, wie solche Abweichungen von der klassischen Theorie möglich wären".

li arribaven del Cavendish relatives a la possible comprovació de la seva fórmula mitjançant els raigs β , van fer que reconsiderés la importància d'aquesta radiació. Ambdós aspectes són expressats clarament en la resposta de Møller a la carta de Heisenberg, i permeten situar a mitjans de desembre de 1931 la reorientació final de les seves investigacions:¹¹

També jo crec que l'expressió de ϕ deixa de satisfer-se per a valors de γ tan grans com exigeix la radiació d'altura, ja que probablement el procediment d'aproximació utilitzat esdevé absurd en aquesta regió. En la regió de raigs β ràpids, en canvi, el mètode emprat hauria de ser raonable. A Cambridge estan en marxa experiments que haurien de proporcionar una prova de la fórmula de dispersió per electrons lliures, mitjançant fotografies de Wilson.

A la mateixa carta Møller deia de l'error a les relacions $\theta_{cm}-\theta$ que es tractava només d'una errata que no variava res a la fórmula de dispersió. Però Heisenberg va detectar-hi un altre error, que possiblement induí Møller a revisar els complicats càlculs, i el conduí finalment a la fórmula de dispersió correcta. Heisenberg havia trobat l'error en base a consideracions de simetria, i el comunicà a Møller el 17 de desembre: “Vosté m'escriu la fórmula

$$d\sigma(\theta) = \frac{e^4}{m^2 v^4} \frac{\sin 2\theta \, 2d\theta \, d\varphi \, 4(\gamma + 1)[\gamma + 3 + (\gamma - 1) \cos \theta_{cm}]}{\gamma^4 [\gamma + \underset{\uparrow}{1} - (\gamma - 1) \cos \theta_{cm}] [(\gamma + 3)^2 - (\gamma - 1)^2 \cos^2 \theta_{cm}]} \mathcal{F},$$

però segur que al lloc subratllat hi hauria de dir 3 en lloc de 1, ja que si no en el sistema en moviment no hi ha invariància sota $\theta_{cm} \rightarrow \theta_{cm} + \pi$.”¹²

¹¹Møller a Heisenberg, 15 desembre 1931 (AHQP-59): “Ich glaube auch, dass der Ausdruck für ϕ für so grosse Werte von γ wie es die Höhenstrahlung erfordert, gar nicht mehr gilt, da wahrscheinlich das benutzte Näherungsverfahren in diesem Gebiet sinnlos wird. Im gebiet schneller β -Strahlen dagegen dürfte die benutzte Methode vernünftig sein, es sind im Cambridge Experimente im Gang, die eine Prüfung der Streuformel für freie Elektronen mit Hilfe von Wilsonaufnahmen liefern sollen”.

¹²Heisenberg a Møller, 17 desembre 1931 (AHQP-59): “Sie schreiben mir die Formel... An der unterstrichenen Stelle muss es aber doch wohl 3 statt 1 heissen, da sonst im bewegten System keine Invarianz gegen $\theta_{cm} \rightarrow \theta_{cm} + \pi$ besteht”. Heisenberg es refereix al sistema centre de masses, que Møller havia caracteritzat com “el sistema de Lorentz en què els moments d'ambdós electrons abans de la col·lisió són oposats, és a dir... un sistema que es mou amb velocitat $[\frac{\gamma v}{\gamma+1}]$ en relació al sistema en repòs” (Møller a Heisenberg, 4 desembre 1931 (AHQP-59): “...[der] Lorentzsystem in welchem die Impulse der beiden Elektronen vor dem Stoss entgegengesetzt sind, d.h. ... [ein] System, das sich mit der Geschwindigkeit $[\frac{\gamma v}{\gamma+1}]$ in Bezug auf das ruhende System bewegt”).

Després d'aquestes cartes, es perd el fil fins el 25 de gener, quan Møller va escriure a Mott i Champion comunicant-los la fórmula de dispersió correcta. Møller i Mott es coneixien des de l'estada d'aquest a Copenhaguen el 1928, i possiblement havien coincidit al Cavendish quan Møller va acompanyar-hi Bohr el maig de 1929. Mott havia enviat a Møller una separata a finals de novembre de 1931; en la seva resposta Møller li havia explicat, entre altres coses, que havia acabat ja el càlcul de la fórmula de dispersió, afegint simplement:¹³ “If it has any interest for you, I shall report upon this another time”. La reacció immediata de Mott mostra un cop més l'interès del problema:¹⁴ “I should be MOST interested to see your results on the collision between two particles, as soon as you can conveniently send them”.

La tramesa dels resultats s'endarrerí més d'un mes, no només perquè Møller va haver de corregir l'error assenyalat per Heisenberg, sinó també perquè les vacances de Nadal van suposar un llarg parèntesi en el seu treball. Així ho dona a entendre la carta a Mott del 25 de gener:¹⁵ “I have just now come back from Holiday and have not thought on physics since before Christmas”. Quan va corregir Møller el que, en la carta que va escriure a Champion el mateix dia, qualificava de “little fault”?¹⁶ Sens dubte, després de l'observació de Heisenberg, però la carta de Heisenberg no podia haver arribat a Copenhaguen abans del 19 de desembre, i això deixa un marge de temps escàs abans de Nadal, més encara si tenim en compte que el més probable és que Møller passés les vacances a Hundslev, com acostumava a fer. És també poc plausible que, en el cas que Møller hagués obtingut la fórmula correcta abans de Nadal, hagués retardat tant la seva comunicació.

Possiblement, doncs, Møller va refer els seus càlculs en tornar de vacances, a mitjans de gener, i obtingué la fórmula de dispersió poc abans del dia 25. La nova fórmula

$$dQ(\theta) = \frac{e^4 \sin \theta_{cm} d\theta_{cm} d\varphi 8(\gamma + 1)}{m^2 \gamma^4 v^4 [(\gamma + 3)^2 - (\gamma - 1)^2 \cos^2 \theta_{cm}] \mathcal{F}} \quad (3)$$

—el factor \mathcal{F} no variava, veure (2)—, “is only simple if we introduce the

¹³Møller a Mott, 9 desembre 1931 (AHQP-59).

¹⁴Mott a Møller, 15 desembre 1931 (AHQP-59). També Mott estava especialment interessat per la possible aplicació dels resultats a la radiació còsmica: “I am especially interested in the cosmic ray case of energy $\gg mc^2$, for *small* angles”.

¹⁵Møller a Mott, 25 gener 1932 (AHQP-59).

¹⁶Møller a Champion, 25 gener 1932 (AHQP-59).

deflection angle θ_{cm} measured in [the centre of mass system]”.¹⁷ Tant en la carta a Champion com en la carta a Mott, Møller subratllava la necessitat de la simetria en $\theta_{cm} = \pi/2$, i expressava la seva confiança en haver eliminat finalment tots els errors.

Naturalment, Møller comunicà també a Heisenberg el seu nou resultat, però no ho féu immediatament. Aquesta carta no es conserva, però va ser escrita molt probablement pocs dies abans del 15 de febrer, data de la resposta de Heisenberg. Møller hi donava el límit ultrarelativista de la fórmula de dispersió, corregint l’error que havia comès en el seu article anterior.¹⁸ El resultat de Møller, que recuperava l’expressió clàssica, va satisfer molt Heisenberg que, tanmateix, seguia dubtant que el càlcul del frenat fos correcte, per la “crassa contradicció amb els experiments” que suposaria “fins i tot per electrons secundaris d’energia $\varepsilon \sim 30mc^2$ ”.¹⁹

No sabem res del desenvolupament posterior del treball de Møller. La redacció de l’extens article en què exposava els seus resultats devia ocupar-lo intensament fins a finals d’abril. L’article va ser rebut el 3 de maig als *Annalen der Physik*, que mantenien un prestigi centenari que només havia cedit en els darrers anys davant l’impuls de la més moderna *Zeitschrift für Physik*. A mitjans de juliol Møller ja havia revisat les segones proves de l’article, que no van impedir que l’article aparegués amb nombrosos errors menors, inclòs un a la fórmula de dispersió.

Møller havia realitzat el treball amb la idea que constituís la seva tesi doctoral. Bohr va aconseguir que l’article fos reconegut com a tesi, i Møller només va haver d’afegir-hi un resum en danès del seu contingut. Després d’un viatge de descans a North Zealand i una estada de dues o tres setmanes a Hundslev, Møller va tornar a Copenhaguen a mitjans d’agost per preparar el resum. El 17 d’agost pagava les taxes corresponents al “filosofiske Doktorgrad”, 160 corones (el seu sou com a professor associat era en aquells moments de 500 corones mensuals).²⁰

Møller no va finalitzar la redacció de la introducció fins l’octubre. És molt significatiu que titulés aquest resum de 20 pàgines “Visió de conjunt sobre

¹⁷Møller a Mott, 25 gener 1932 (AHQP-59).

¹⁸Veure al capítol anterior p. 45.

¹⁹Heisenberg a Møller, 15 febrer 1932 (AHQP-59): “Ihre γ^2 -Glieder für die Bremsung dagegen glaube ich Ihnen wohl nicht. Sie sind mit den Experimenten auch bei Sekundärelektronen der Energie $\varepsilon \sim 30mc^2$ in krassestem Widerspruch”.

²⁰Veure Møller a Bohr, 25 juliol 1932 (AHQP/BSC-23), i el rebut de les taxes a MP.

la teoria i comparació amb els experiments”, quan en l'article que introduïa les referències a experiments eren molt escasses.²¹ Sens dubte, això va ser degut al contacte amb Champion, que havia completat els seus experiments el juny. La tesi havia de ser defensada davant dos oponents, en un acte públic al que normalment hi assistia també la premsa, inclòs un dibuixant. Møller va defensar la seva tesi el dilluns 28 de novembre. Aquell dia, un altre aspirant a doctor ocupava la sala d'actes de la universitat, de manera que la defensa va tenir lloc al recentment construït Institut de fisiologia animal, promogut i dirigit per August Krogh. Hi van assistir unes trenta persones, entre elles el professor H. M. Hansen, i físics més joves com J. Jacobsen i J. Bøggild.

Els oponents de Møller van ser Bohr i Klein, aleshores professor a Estocolm. De la intervenció de Bohr, Møller recordaria anys després la seva extensió (“Bohr actually gave a lecture”) i una anècdota sobre l'ús del terme “clàssic”.²² En la seva intervenció, Klein va plantejar una qüestió sobre l'ús de potencials retardats, que Møller va resoldre satisfactòriament:²³

I said at some point that it did not matter if we used retarded potentials in the solution or advanced potentials or the mean measure between these two, and he said he didn't quite see that. Then I tried to — well, it was only not mentioned there and I hadn't elaborated in the paper, so I explained why I thought it was so. Then he was satisfied.

El títol de doctor no va afectar immediatament la situació professional de Møller, que va mantenir-se en el seu càrrec de professor associat a l'Institut de Física Teòrica de Copenhaguen.

3. 2. La deducció de la fórmula

L'article que formava el nucli de la tesi de Møller contenia, segons el seu títol, una “teoria del pas d'electrons ràpids a través de la matèria”. En el seu

²¹“Oversigt over Teorien og Sammenligning med Eksperimenterne”, prefaci de la tesi de Møller.

²²Møller-Weiner (1971), p. 20: “I had used the word ‘classical’ treatment, as we usually do if it is not quantum mechanics, we say classical, and he asked, ‘Do you know what the word classical means?’ Then I said, ‘Yes, I know what it means, but I think in physics we more or less use the word for everything which is a little older than the thing we just are interested in now.’”

²³*Ibid.* p. 20.

primer paràgraf, Møller precisava l'objecte de la seva anàlisi i reconeixia el caràcter provisional i aproximat del seu tractament:²⁴

L'objecte del present treball és tractar el pas de raigs β durs a través de la matèria, d'acord amb la teoria quàntica i la teoria de la relativitat. Tots els fenòmens físics relacionats amb el pas d'electrons ràpids a través de la matèria, com ara el frenat, la dispersió, la ionització i l'excitació dels àtoms, poden reduir-se a la interacció dels electrons amb els àtoms; les forces radiatives, en canvi, no hi juguen pràcticament cap paper. Una teoria d'aquests fenòmens exigeix doncs un tractament teòric-quàntic del problema relativista de varis cossos. Fins el moment no existeix cap teoria general conseqüent d'aquest problema, i hem de contentar-nos provisionalment amb obtenir un tractament aproximat adient al problema present, mitjançant les convenients generalitzacions de la teoria no relativista.

L'ambigüitat del títol, que parla genèricament d'electrons ràpids, es resol a la primera frase, on aquests electrons són identificats amb la radiació β . Les referències a la radiació còsmica, constants durant l'elaboració de l'article, han desaparegut completament en la seva versió final. Això permet a Møller d'excloure de la seva anàlisi les forces radiatives, i limitar-se a la consideració de la interacció entre les partícules β i els àtoms, és a dir, a les interaccions a dos cossos electró-electró, i electró-nucli. Per a Møller, la manca d'una “teoria general conseqüent del problema relativista de varis cossos” —és a dir, d'una electrodinàmica quàntica lliure de divergències— fa necessari tractar *provisionalment* el problema de forma aproximada. Encara que Møller no

²⁴Møller (1932), “Zur Theorie des Durchgangs schneller Elektronen durch Materie”, p. 531: “Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit den Durchgang harter β -Strahlen durch Materie in Übereinstimmung mit der Quantentheorie und der Relativitätstheorie zu behandeln. Alle physikalischen Erscheinungen, welche mit dem Durchgang von schnell bewegten Elektronen durch Materie verknüpft sind, sowie Bremsung, Streuung, Ionisation und Anregung der Atome lassen sich auf die Wechselwirkung der Elektronen mit den Atomen zurückzuführen, die Strahlungskräfte dagegen spielen praktisch keine Rolle. Eine Theorie dieser Erscheinungen erfordert daher eine quantentheoretische Behandlung des relativistischen Mehrkörperproblems. Zur Zeit gibt es noch keine konsequente allgemeine Theorie dieses Problems und man muß sich vorläufig damit begnügen, durch sinngemäße Verallgemeinerung der nichtrelativistischen Theorie eine für das gerade vorliegende Problem geeignete approximative Behandlung zu erhalten”.

presenta el seu mètode com a alternativa als intents realitzats de quantificar el camp electromagnètic, tampoc no els esmenta.

Precisat l'objecte i les limitacions de la seva anàlisi, Møller distingeix el seu mètode del de Breit pel diferent ordre d'introducció de les constants fonamentals c i h . Møller explica que un tractament quàntic i relativista consisteix en la introducció de la constant de Planck h i de la velocitat de la llum c , i que “segons que s'introdueixi primer c i després h , o bé primer h i després c , s'obtenen dos mètodes diferents de diferents àmbits de validesa, que en certs casos poden superposar-se parcialment”.²⁵ Møller expressa immediatament la convicció, molt comú en aquests moments, que en una teoria general apareixerien naturalment de forma simultània no només c i h , sinó també la càrrega i el radi de l'electró.

El primer d'aquests procediments, explica Møller, condueix al mètode de Breit, que ha introduït c escrivint en primer lloc en forma hamiltoniana les equacions de moviment clàssiques relativistes pel problema de dos cossos, i ha seguit després els principis de la mecànica quàntica no relativista. L'ús d'aquestes equacions de moviment limita la validesa del mètode de Breit a l'ordre $(v/c)^2$, on v és la velocitat de les partícules incidents. Això fa que no sigui aplicable a la radiació β , on donada la magnitud de v aquesta aproximació no és suficient. Møller tampoc no comenta la relació del tractament de Breit amb la teoria dels camps d'ona de Heisenberg i Pauli.

Møller caracteritza el seu propi mètode com aquell en què primer s'introdueix h i després c . Aquest mètode permet considerar termes d'ordre superior, però la seva aplicació està limitada en un altre sentit:²⁶ “Es tracta en efecte d'un mètode d'aproximació, en què en l'aproximació nul·la els dos sistemes en interacció, àtom i electró incident, són tractats com a sistemes completament separats. Correspon doncs exactament al mètode de Born de la teoria no relativista”.

Després d'aquesta introducció, l'article es divideix en sis apartats. En el primer, “§1. Els fonaments teòrics”, Møller presenta el seu mètode, que en

²⁵*Ibid.*, p. 531: “je nachdem man erst c und dann h oder erst h und dann c einführt, erhält man zwei verschiedene Methoden mit verschiedenen Gültigkeitsgebieten, die sich in gewissen Fällen auch teilweise überdecken können”.

²⁶*Ibid.*, p. 532: “Es handelt sich nämlich um eine Näherungsmethoden, bei der in nullter Näherung die beiden wechselwirkenden Systeme Atom und durchgehendes Elektron als vollständig getrennte Systeme behandelt worden. Sie entspricht also genau der Bornschen Methode in der nichtrelativistischen Theorie”.

el apartats segon i tercer, “§2. La secció eficaç diferencial per l’excitació dels nivells fonamentals”, “§3. La secció eficaç diferencial per l’excitació de nivells determinats”, és aplicat al càlcul de l’excitació dels electrons atòmics. Ens interessa especialment l’apartat quart, “§4. La secció eficaç diferencial per l’excitació dels nivells superiors. Dispersió d’electrons lliures”, que conté la deducció de la fórmula de dispersió. Al cinquè apartat, “§5. Frenat”, les seccions eficaces calculades en els paràgrafs anteriors permeten a Møller “resoldre sense esforç totes les qüestions relatives al frenat dels raigs β en el seu pas a través de la matèria”. Finalment, Møller tracta breument al darrer apartat, “§6. Ionització primària”, la qüestió de la ionització, que junt amb la del frenat, havia dominat la seva correspondència durant l’elaboració de l’article.²⁷

La presentació del mètode que Møller fa al primer apartat és més extensa i completa que la presentació esquemàtica de l’article anterior, però segueix sense incloure cap reflexió sobre la base conceptual del mètode. Møller dedueix a partir de la mecànica quàntica no relativista la fórmula per la probabilitat de transició $(m_1 m_2) \rightarrow (n_1 n_2)$

$$P = \frac{4\pi^2}{h} \delta(E_{m_1} + E_{m_2} - E_{n_1} - E_{n_2}) |(n_1 n_2 | U | m_1 m_2)|^2, \quad (4)$$

expressió que “adopta” en el cas relativista, precisant que “naturalment, els ‘elements de matriu’ del membre de la dreta tenen un aspecte diferent que en el cas coulombià”.²⁸ A continuació, en termes molt similars als del seu article anterior, indica que per a obtenir una “expressió relativista plausible” (“plausiblen relativistischen Ansatz”) per l’element de matriu, s’ha de partir de les densitats de càrrega i corrent associades a la transició d’una de les partícules. Aquesta és la màxima precisió amb què Møller descriu la transició al tractament relativista. Unes pàgines abans ha caracteritzat el seu procediment de “korrespondenzmäßig”, però el terme no torna a aparèixer en la resta de

²⁷*Ibid.*, “§1. Die theoretischen Grundlagen” (p. 532); “§2. Der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Anregung niedriger Niveaus” (p. 539); “§3. Der Wirkungsquerschnitt für die Anregung bestimmter Niveaus” (p. 552); “§4. Der Wirkungsquerschnitt für die Anregung hoher Niveaus. Streuung freier Elektronen” (p. 557); “§5. Bremsung. Mit Hilfe der in den vorigen Paragraphen erhaltenen Ausdrücke für die Wirkungsquerschnitte lassen sich alle Fragen bezüglich der Bremsung von β -Strahlen beim Durchgang durch Materie mühelos beantworten” (p. 570); “§6. Primäre Ionisation” (p. 582).

²⁸*Ibid.*, p. 537: “In der relativistischen Behandlung übernehmen wir die Gl [(4)], wobei natürlich die ‘Matrixelemente’ auf der rechten Seite anders aussehen als im Coulombschen Fall”.

l'article.²⁹

L'ús dels potencials retardats és ara més explícit. Møller forma les densitats de càrrega i corrent associades a la transició de la partícula 1 entre els seus estats inicial i final, $1 \rightarrow 1'$

$$\rho^{(1)} = -e \psi_{1'}^\dagger \psi_1 = -e \varphi_{1'}^\dagger \varphi_1 e^{i\omega_{11'}t}, \quad (5)$$

$$\mathbf{j}^{(1)} = ec \psi_{1'}^\dagger \vec{\alpha}^{(1)} \psi_1 = ec \varphi_{1'}^\dagger \vec{\alpha}^{(1)} \varphi_1 e^{i\omega_{11'}t} \quad (6)$$

($\omega_{11'} = \frac{2\pi}{h}(E_1 - E_{1'})$), i assenyala que els potencials escalar i vectorial corresponents venen donats en la teoria de Maxwell per

$$\Phi^{(1)}(\mathbf{r}_2) = \int \frac{[\rho^{(1)}]}{r} d^3\mathbf{r}_1, \quad (7)$$

$$\mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{r}_2) = \int \frac{[\mathbf{j}^{(1)}]}{r} d^3\mathbf{r}_1 \quad (8)$$

($r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$), on “el parèntesi quadrat vol indicar que per $\rho^{(1)}$ i $\mathbf{j}^{(1)}$ s'ha d'introduir els valors retardats, és a dir, els valors en l'instant $t - r/c$ ”.³⁰ Considerant les expressions (5), (6) per les densitats de càrrega i corrent es té

$$\Phi^{(1)}(\mathbf{r}_2) = -e e^{i\omega_{11'}t} \int \frac{\varphi_{1'}^\dagger \varphi_1}{r} e^{i\omega_{11'}\frac{r}{c}} d^3\mathbf{r}_1, \quad (9)$$

$$\mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{r}_2) = e e^{i\omega_{11'}t} \int \frac{\varphi_{1'}^\dagger \vec{\alpha}^{(1)} \varphi_1}{r} e^{i\omega_{11'}\frac{r}{c}} d^3\mathbf{r}_1. \quad (10)$$

L'operador associat a aquests potencials en la teoria de Dirac és

$$-e[\Phi^{(1)}(\mathbf{r}_2) + \vec{\alpha}^{(2)} \cdot \mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{r}_2)], \quad (11)$$

i l'element de matriu corresponent a aquest operador per la transició de la partícula 2 entre els seus estats inicial i final

$$-e \iint \psi_{2'}^\dagger [\Phi^{(1)}(\mathbf{r}_2) + \vec{\alpha}^{(2)} \cdot \mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{r}_2)] \psi_2 d^3\mathbf{r}_2, \quad (12)$$

és a dir, segons (9) i (10)

$$e^{i(\omega_{11'} + \omega_{22'})t} \iint \psi_{1'}^\dagger \psi_{2'}^\dagger \frac{e^2(1 - \vec{\alpha}^{(1)} \cdot \vec{\alpha}^{(2)})}{r} \psi_1 \psi_2 e^{i\omega_{11'}\frac{r}{c}} d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2. \quad (13)$$

²⁹Veure al capítol anterior p. 27.

³⁰*Ibid.*, p 537: “die eckige Klammer soll andeuten, daß für $\rho^{(1)}$ und $\mathbf{j}^{(1)}$ die retardierten Werte, d. h. die Werte zur Zeit $t - r/c$ einzusetzen sind”.

Aquesta expressió no és simètrica en general, però sí ho és per les úniques transicions físicament possibles. La funció delta de l'expressió (4) fa que només es donin aquelles transicions per les quals $\omega_{22'} = -\omega_{11'}$, i en aquest cas l'expressió (13) és simètrica sota l'intercanvi dels índexs 1 i 2.

Aquesta formulació del mètode té, respecte a la de l'article anterior, l'avantatge de mostrar més clarament l'origen dels diferents termes. El factor exponencial dins de la integral prové del retardament, i s'anulla quan la velocitat de la llum tendeix a infinit. Es reconeix també immediatament el terme postulat per Gaunt per descriure la interacció deguda a l'espí, $-e^2 \frac{\vec{\alpha}^{(1)} \cdot \vec{\alpha}^{(2)}}{r}$. Com indica Møller, “és satisfactori que aquest terme aparegui aquí per si mateix, quan s'exigeix invariància relativista”.³¹

Després de tractar als apartats segon i tercer l'excitació dels nivells atòmics inferiors, Møller considera al quart apartat l'excitació dels superiors, i el cas límit en què l'energia impartida per l'electró incident a l'electró atòmic és molt més gran que l'energia d'ionització. Aquest cas és el que pot ser considerat com una interacció entre electrons lliures. Els estats estacionaris que ocupen ambdós electrons abans i després de la col·lisió són descrits mitjançant solucions a l'equació de Dirac

$$\psi_1 = u(s_1) e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1 - \omega_1 t)}, \quad (14)$$

on $\mathbf{k} = \mathbf{p}/\hbar$, $\omega = E/\hbar$, i les amplituds $u(s)$ són magnituds de quatre components.³²

La secció eficaç diferencial (per àtom) per les col·lisions en què l'electró incident té després del xoc un impuls comprès entre $\mathbf{p}_{1'}$ i $\mathbf{p}_{1'} + d\mathbf{p}_{1'}$, i l'electró atòmic un de comprès entre $\mathbf{p}_{2'}$ i $\mathbf{p}_{2'} + d\mathbf{p}_{2'}$ és³³

$$d\sigma(\mathbf{p}_{1'}, \mathbf{p}_{2'}) = \frac{4\pi^2}{hJ_z^{(1)}} \delta(E_{1'} + E_{2'} - E_1 - E_2)$$

³¹*Ibid.*, p. 538: “Es ist befriedigend, daß dieses Glied hier von selbst erscheint, sobald man relativistische Invarianz fordert”.

³²A diferència de Møller, que els considera separatament, considerarem els factors de normalització inclosos en les amplituds $u(s)$ (veure nota 29 del capítol anterior).

³³Møller considera que l'electró atòmic està inicialment en repòs ($\mathbf{p}_2 = 0$), i el descriu mitjançant les solucions a l'equació de Dirac per l'àtom d'hidrogen. Al final del càlcul comprova que el resultat equival a considerar aquest electró com a lliure (p. 562). Per facilitar la comparació amb el tractament actual, considerem directament que es tracta d'un electró lliure de moment inicial no nul.

$$\frac{1}{4} \sum_{s_1 s_2} \sum_{s_1' s_2'} |(\mathbf{p}_{1' s_1'}, \mathbf{p}_{2' s_2'} | V | \mathbf{p}_1 s_1, \mathbf{p}_2 s_2)|^2 d^3 \mathbf{p}_{1'} d^3 \mathbf{p}_{2'}. \quad (15)$$

Møller obté aquesta expressió a partir de l'expressió general (4) per la probabilitat de transició en la forma habitual: dividint pel flux incident d'electrons, $J_z^{(1)}$; sumant sobre els espins finals, en els quals no estem interessats; i promitjant sobre els espins inicials, ja que es considera que el feix incident i els electrons atòmics no estan polaritzats.

L'element de matriu s'obté directament a partir de l'expressió general (13), introduint-hi les solucions a l'equació de Dirac

$$\langle 1', 2' | V | 1, 2 \rangle = e^2 \{ u_{2'}^\dagger u_2 u_1^\dagger u_1 - (u_{2'}^\dagger \vec{\alpha}^{(2)} u_2) \cdot (u_1^\dagger \vec{\alpha}^{(1)} u_1) \} f, \quad (16)$$

$$f = \int \int e^{i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_{2'}) \cdot \mathbf{r}_2} e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_{1'}) \cdot \mathbf{r}_1} \frac{1}{r} \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_{1'}}{c} r\right) d^3 \mathbf{r}_1 d^3 \mathbf{r}_2. \quad (17)$$

El sistema total ha estat representat fins aquí de forma implícita mitjançant les funcions pròpies asimètriques

$$|1'+, 2'+\rangle, |1'+, 2'-\rangle, |1'-, 2'+\rangle, |1'-, 2'-\rangle, \quad (18)$$

on $|1'+, 2'-\rangle$ representa l'estat en què l'electró 1 té un impuls $\mathbf{p}_{1'}$ i valor propi + de S_{1z} , i l'electró 2 un impuls $\mathbf{p}_{2'}$ i valor propi - de S_{2z} . Per a considerar l'intercanvi, Møller ha d'introduir funcions del sistema total *antisimètriques* sota l'intercanvi dels dos electrons. Seguint Oppenheimer, Møller adopta com a representació dels estats finals del sistema total les funcions³⁴

$$|a'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|1'+, 2'+\rangle - |2'+, 1'+\rangle],$$

$$|b'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|1'-, 2'-\rangle - |2'-, 1'-\rangle],$$

$$|c'\rangle = \frac{1}{2} [|1'+, 2'-\rangle - |2'-, 1'+\rangle + |1'-, 2'+\rangle - |2'+, 1'-\rangle],$$

$$|d'\rangle = \frac{1}{2} [|1'+, 2'-\rangle - |2'-, 1'+\rangle - |1'-, 2'+\rangle + |2'+, 1'-\rangle].$$

Els estats inicials són representats anàlogament per les funcions $|a\rangle$, $|b\rangle$, $|c\rangle$ i $|d\rangle$. Per tenir en compte l'intercanvi, Møller indica que només s'ha de substituir

³⁴Oppenheimer, "On the quantum theory of electronic impacts", *Phys. Rev.* **32** (1928), 361-376; veure-hi p. 363. Els tres primers estats són *simètrics* en espí (triplet), l'últim *antisimètric* (singlet).

a (15) la suma en s_1 , s_2 , $s_{1'}$ i $s_{2'}$ per la suma quadràtica S sobre els elements de matriu corresponents a les 16 transicions possibles entre els estats inicials, $|a\rangle$, $|b\rangle$, $|c\rangle$, $|d\rangle$ i els finals, $|a'\rangle$, $|b'\rangle$, $|c'\rangle$ i $|d'\rangle$. La matriu S és de la forma

$$S = \sum |\langle b'|V|a\rangle|^2, \quad (19)$$

i els elements de matriu que hi apareixen són tots similars. Møller en calcula només un com a exemple:

$$\begin{aligned} \langle b'|V|a\rangle = & \frac{1}{2}[\langle 1'-, 2'- |V|1+, 2+\rangle + \langle 2'-, 1'- |V|2+, 1+\rangle \\ & - \langle 1'-, 2'- |V|2+, 1+\rangle - \langle 2'-, 1'- |V|1+, 2+\rangle]. \end{aligned}$$

Els dos primers i els dos darrers termes són iguals entre si, degut a la simetria de l'element de matriu sota l'intercanvi dels dos electrons. Per tant

$$\langle b'|V|a\rangle = \langle 1'-, 2'- |V|1+, 2+\rangle - \langle 2'-, 1'- |V|1+, 2+\rangle.$$

Tenint en compte l'expressió (16) per l'element de matriu podem escriure més explícitament

$$\begin{aligned} \langle b'|V|a\rangle = & e^2 [\{u_1^\dagger u_1 u_2^\dagger u_2 - (u_1^\dagger \vec{\alpha}^{(1)} u_1) \cdot (u_2^\dagger \vec{\alpha}^{(2)} u_2)\} f \\ & - \{u_2^\dagger u_1 u_1^\dagger u_2 - (u_2^\dagger \vec{\alpha}^{(1)} u_1) \cdot (u_1^\dagger \vec{\alpha}^{(2)} u_2)\} g], \quad (20) \end{aligned}$$

on f ve donat per (17) i

$$g = \int \int e^{i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_{1'}) \cdot \mathbf{r}_2} e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_{2'}) \cdot \mathbf{r}_1} \frac{1}{r} \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_{2'}}{c} r\right) d^3 \mathbf{r}_1 d^3 \mathbf{r}_2. \quad (21)$$

Com assenyala Møller, tots els altres elements de matriu que apareixen a S són d'aquesta forma. Observem que els dos termes de l'element de matriu es distingeixen per la permutació dels moments finals: corresponen als dos diagrames de Feynman mitjançant els quals calculem actualment aquest procés. Aquesta analogia és més evident quan s'avaluen les integrals f i g ,

$$\begin{aligned} f &= \frac{h^5}{\pi(p_1 - p_{1'})^2} \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_{1'} - \mathbf{p}_{2'}), \\ g &= \frac{h^5}{\pi(p_1 - p_{2'})^2} \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_{1'} - \mathbf{p}_{2'}), \end{aligned}$$

que només es distingeixen per l'intercanvi dels índexs 1' i 2', i en les quals reconeixem el quadrimoment transferit corresponent a cada un dels diagrames.³⁵

Introduïnt la notació γ^μ , amb $\gamma^0 = \beta$ i $\vec{\gamma} = \gamma^0 \cdot \vec{\alpha}$, l'element de matriu s'escriu (prescindint dels factors)

$$\langle b' | V | a \rangle = \frac{\bar{u}_{1'} \gamma^\mu u_1 \bar{u}_{2'} \gamma_\mu u_2}{(p_1 - p_{1'})^2} - \frac{\bar{u}_{2'} \gamma^\mu u_1 \bar{u}_{1'} \gamma_\mu u_2}{(p_1 - p_{2'})^2}. \quad (22)$$

Aquest és el mateix element de matriu que escrivim avui directament a partir dels diagrames de Feynman corresponents a aquest procés.

Reunint aquests resultats la secció eficaç, expressió (15), esdevé³⁶

$$d\sigma(\mathbf{p}_{1'}, \mathbf{p}_{2'}) = \frac{4 h^9 e^4}{J_z^{(1)}} \delta^4(p_1 + p_2 - p_{1'} - p_{2'}) \frac{1}{4} S' d^3 \mathbf{p}_{1'} d^3 \mathbf{p}_{2'}, \quad (23)$$

on S' és la suma quadràtica sobre els diferents elements de matriu de la forma (22).

La secció eficaç s'interpreta ara més precisament com el nombre de col·lisions en què després del xoc *un* dels electrons té un impuls $\mathbf{p}_{1'}$ i l'*altre* un impuls $\mathbf{p}_{2'}$. Møller observa que “degut a l'intercanvi ja no podem dir quin dels electrons expel·lits és l'originàriament lligat a l'àtom, i quin és l'incident”.³⁷

³⁵Møller basa aquest càlcul en un resultat del seu article (1930c), segons el qual per a tots els valors de r es pot escriure

$$\cos\left(\omega_1 - \omega_{1'} \frac{r}{c}\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(k r)}{k^2 - \left(\frac{\omega_1 - \omega_{1'}}{c}\right)^2} 2k dk,$$

on a la integral del membre de la dreta s'ha de prendre el valor principal de Cauchy. Møller mostra que aquesta integral és equivalent a

$$\frac{1}{r} \cos\left(\omega_1 - \omega_{1'} \frac{r}{c}\right) = \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{k^2 - \left(\frac{\omega_1 - \omega_{1'}}{c}\right)^2} d^3 \mathbf{k},$$

de forma que es pot escriure

$$f = \frac{1}{2\pi^2} \int \int \int \frac{e^{i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_{2'} - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_2} e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_{1'} - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_1}}{k^2 - \left(\frac{\omega_1 - \omega_{1'}}{c}\right)^2} d^3 \mathbf{r}_1 d^3 \mathbf{r}_2 d^3 \mathbf{k}.$$

La integral s'avalua fàcilment mitjançant la funció delta de Dirac.

³⁶La diferència en un factor $1/h^3$ respecte la fórmula (62') de Møller (1932) ve donada pel factor de normalització de ψ_2 , que considerem inclòs a u_2 .

³⁷Møller (1932), p. 560: “Wir können aber wegen des Austausches gar nicht mehr sagen, welches der beiden herausfliegenden Elektronen das ursprünglich im Atom gebundene und welches das auffallende Elektron ist”.

Møller expressa a continuació la secció eficaç en funció de l'angle θ de dispersió d'un dels electrons, deixant pel final el càlcul de la suma S' . La funció delta de la secció eficaç (23) expressa la conservació de l'energia i el moment. Møller usa aquest principi per donar les diferents magnituds implicades en la secció eficaç, en funció de l'angle de dispersió θ i la velocitat v de l'electró incident. L'energia i el moment es conserven en qualsevol sistema de Lorentz, i Møller calcula la cinemàtica de la col·lisió en aquell on és més simple, el sistema centre de masses. D'aquesta manera obté per la secció eficaç en termes de θ (eq. (71'))

$$d\sigma(\theta) = \frac{\pi}{8} e^4 m^2 \sin \theta_{cm} d\theta_{cm} [(\gamma + 3)^2 - (\gamma - 1)^2 \cos^2 \theta_{cm}] \frac{1}{4} S'. \quad (24)$$

Ja només queda calcular S' . Møller observa que els elements de matriu (22) són invariants relativistes —el que la nostra notació posa de manifest immediatament— i els calcula *un per un* en el sistema centre de masses. Amb això obté finalment la fórmula de dispersió³⁸

$$d\sigma(\theta) = \frac{2\pi e^4 \sin \theta_{cm} d\theta_{cm} 2(\gamma + 1)}{m^2 \gamma^2 v^4} \cdot \left(\frac{4}{\sin^4 \theta_{cm}} - \frac{3}{\sin^2 \theta_{cm}} + \frac{(\gamma - 1)^2}{4\gamma^2} \left(1 + \frac{4}{\sin^2 \theta_{cm}} \right) \right). \quad (25)$$

Com assenyala Møller, es podrien utilitzar les relacions θ - θ_{cm} per expressar el resultat en funció de θ , però l'expressió resultant seria molt més complicada.

Møller relaciona a continuació la seva fórmula de dispersió amb resultats anteriors. En primer lloc mostra l'equivalència amb la fórmula de Mott, que té en compte l'intercanvi però no la relativitat. Fent $\gamma = 1$, es té $\theta_{cm} = 2\theta$, i la fórmula de dispersió es redueix a la fórmula de Mott³⁹

$$d\sigma(\theta) = \frac{2\pi e^4 \sin 2\theta d\theta}{m^2 v^4} \left(\frac{1}{\sin^4 \theta} + \frac{1}{\cos^4 \theta} - \frac{1}{\cos^2 \theta \sin^2 \theta} \right). \quad (26)$$

Després d'un lleugeríssim esment a la possible comprovació de la seva fórmula, que considerarem al següent capítol, Møller mostra també la relació del seu resultat amb la fórmula clàssica de Thomson i Bohr per la pèrdua d'energia,

³⁸En l'article de Møller el denominador del primer factor és $m^2 \gamma^4 v^4$ (Møller 1932, fórmula 74). Es tracta clarament d'un error d'impressió.

³⁹Veure p. 44. També aquesta fórmula està equivocada a l'article de Møller: en lloc del $\frac{1}{\cos^4 \theta}$ correcte hi apareix $\frac{1}{\cos^2 \theta}$.

efeller. Durant els primers mesos de l'estada a Roma, Bethe va interessar-se especialment pel problema de l'extensió relativista del càlcul del frenat. El primer article de Møller, naturalment, va interessar-li molt; el 25 de març Bethe escrivia a Møller:⁴² “Aquests darrers dies m’he ocupat intensament del seu important treball sobre la dispersió d’electrons amb velocitat relativista. Trobo meravellós que hagi pogut tractar el problema de forma tan senzilla!”. Bethe havia estudiat a fons l'article de Møller, i l’havia prè com a punt de partida pel càlcul del frenat, després d’haver-se assabentat indirectament, a través de Heisenberg, dels errors que Møller havia comès en els seus primers intents de calcular-lo. De fet, el motiu de la carta no era un altre que saber si Møller havia corregit aquests errors, i si pensava publicar els resultats.

La resposta de Møller s’ha perdut. Aparentment, va suggerir a Bethe que publicqués una nota breu a *Die Naturwissenschaften*, l’equivalent alemany de *Nature*, i li va anunciar el contingut i la propera aparició del seu següent article. El 30 d’abril, Bethe responia a Møller:⁴³

Per desgràcia no ha estat possible publicar la fórmula pel frenat com a nota a *Die Naturwissenschaften*, d’acord amb la seva proposta, ja que malgrat que només hi deia l’indispensable, el manuscrit superava considerablement la longitud prescrita i ha estat rebutjat. He enviat ara el treball a *Zeitschrift für Physik*, afegint-hi una curta deducció que essencialment afecta només les col·lisions d’angle de desviació petit, i encara aquestes no gaire detalladament. Espero doncs no haver-me anticipat al seu treball —al qual he fet referència degudament— i que estigui d’acord amb la forma de la meua nota.

⁴²Bethe a Møller, 25 març 1932 (AHQP-59): “Ich habe mich den letzten Tagen sehr eingehend mit Ihrer wichtigen Arbeit über die Streuung von Elektronen mit relativistischer Geschwindigkeit beschäftigt. Ich finde es wunderschön, dass Sie das Problem auf so einfache Weise behandeln konnten!”.

⁴³Bethe a Møller, 30 abril 1932 (AHQP-59): “Leider war es nicht möglich, Ihrem Vorschlag entsprechend die Bremsformel als Notiz in den Naturwissenschaften zu veröffentlichen, denn obwohl ich nur das Allernötigste sagte, überschritt das Manuskript die vorgeschriebene Länge von einer Druckspalte sehr erheblich und wurde daher abgelehnt. Jetzt habe ich die Arbeit an die Zeitschrift für Physik geschickt, ich habe dabei eine kurze Ableitung beigefügt, die sich aber im Wesentlichen nur mit den Stößen unter kleinem Ablenkungswinkel befasst und auch für diese nicht sehr ausführlich ist. Ich hoffe daher, dass ich Ihrer Arbeit – auf die ich gebührend hingewiesen habe – nicht vorgegriffen habe und dass Ihnen die Form meiner Note recht ist”.

El segon article de Møller i la nota ampliada de Bethe van ser rebuts a les revistes que havien de publicar-los amb un dia de diferència. Poc després Bethe va considerar conjuntament amb Fermi una qüestió més fonamental: quina relació hi havia entre el treball de Møller, la fórmula que havia deduït Breit anteriorment, i l'electrodinàmica quàntica? Quina era la relació lògica entre els tractaments de Møller i Breit? El treball va progressar aparentment de forma extraordinàriament ràpida, i la següent caracterització de Bethe, malgrat les reserves amb què s'ha de prendre, dóna una idea aproximada de com va ser elaborat i redactat.⁴⁴

Fermi and I wrote a paper comparing three methods of treating the relativistic electron-electron interaction —unifying electromagnetic quantum theory with relativity. The research took two days. Then he said, ‘Well, now we have solved it, now we will write a paper.’ So on the third day he himself sat down at the typewriter —there was no secretary in the institute. His procedure was to state a sentence in German —he spoke excellent German, while I spoke hardly any Italian— and I would either approve it or modify it. When he came to an equation, we would agree on it, and I would write it down in longhand. That was the paper. It was a nice paper, and even though Fermi did by far the larger part of it, it had my name on it along with his. I felt very happy about that, and I learned a lot from it. It taught me how to write a scientific paper simply and clearly. My stay in Rome came to an end much too soon.

L'electrodinàmica quàntica de l'article de Bethe i Fermi era naturalment la de Fermi, que l'havia formulat de manera més entenedora que Dirac, o Heisenberg i Pauli.⁴⁵ L'article mostrava amb concisió i claredat que el tractament de Møller era plenament compatible amb la teoria.

⁴⁴Bernstein [1979], p. 31 (segons una comunicació personal de Bethe).

⁴⁵Fermi havia publicat la seva “ellettrodinamica quantistica” el 1929 (*Rend. Lincei* **9** (1929), 881), però recentment havia exposat de forma més extensa la “teoria quàntica de la radiació” a *Review of Modern Physics*, en un article molt difós (“Quantum theory of radiation”, *Rev. Mod. Phys.* **4** (1932), 87–132). Com ja s'ha assenyalat a la introducció (nota 1), les diferents versions de l'electrodinàmica quàntica al voltant de 1930 coincidien en la quantificació del camp electromagnètic, però no en la del camp de matèria. Fermi no aplicarà el procediment de segona quantificació a les partícules fins el 1934, en la seva teoria de la desintegració β .

Malgrat això, la fórmula de Møller va rebre escassa atenció en els escassos texts dedicats a l'electrodinàmica quàntica abans de la guerra. Si l'element de matriu en què es basa la fórmula ocupa un lloc central en la reformulació de Feynman, i els llibres de text a partir de l'influent i àmpliament llegit *The theory of photons and electrons* inclouen invariablement la deducció de la fórmula i referències a la seva confrontació exitosa amb l'experiència, aquest no és el cas dels textos més importants del període anterior. Al conegut article de Pauli per la segona edició del *Handbuch der Physik* (1933), només es cita el treball de Møller a la darrera pàgina, en una nota a l'afirmació que “el fet que l'energia pròpia [de l'electró] resulti infinita segons la teoria, impedeix també un tractament relativista conseqüent del problema de varis cossos”.⁴⁶ És evident que per a Pauli el problema de l'energia pròpia infinita desmereix qualsevol aproximació al problema de la interacció entre dos electrons. La preponderància del camp de radiació a una de les primeres referències obligades de la nova teoria, *The quantum theory of radiation* de Heitler, n'excloïa la fórmula de Møller a la primera i segona edicions [1936, 1944]; significativament, aquest no era el cas de la tercera [1954].⁴⁷ El treball de Møller era també absent en un altre text molt representatiu, la *Introducció a la teoria quàntica de camps* de Wentzel [1943]. Un altre text influent però relativament menys conegut que els anteriors, la *Teoria quàntica de l'electró i la radiació* de Kramers [1938], citava només l'article de presentació del mètode de Møller (1931) en una nota, com a exemple de “com en el cas d'interacció *feble* entre electrons ràpids es pot calcular de forma rigorosament relativista”.⁴⁸

La situació després de la guerra és molt diferent. En el que possiblement representa el primer tractament sistemàtic de la teoria, *The Theory of Photons and Electrons* de Jauch i Rohrlich [1955], es dedica ja un capítol al sistema electró-electró, i hi figura en lloc prominent el “Møller scattering”.⁴⁹ La col·lisió entre dos electrons hi és considerada com un procés fonamental d'interès en si mateix. El problema s'introdueix d'una forma lògica i general molt allunyada de les introduccions fenomenològiques anteriors. En aquest

⁴⁶Pauli [1933], p. 272: “Der Umstand, daß die Selbstenergie nach der Theorie unendlich groß resultiert, verhindert auch eine konsequente relativistische Behandlung des Mehrkörperproblems”.

⁴⁷Heitler [1936]. Veure a la darrera edició “§24. The scattering of two electrons”, p. 231.

⁴⁸Kramers [1938], p. 301: “Wie man im Falle von *schwacher* Wechselwirkung zwischen schnellen Elektronen streng relativistischen rechnen kann, hat Chr. Møller gezeigt”.

⁴⁹Jauch i Rohrlich [1955]. Veure-hi capítol 12, “The electron-electron system” (els autors designen conjuntament electrons i positrons amb el terme genèric “electró”).

expressant la secció eficaç en funció de l'energia cedida per l'electró incident en la col·lisió, $Q = E_1 - E_1'$.

La fórmula no ocupa, en l'article de Møller, un lloc destacat. Un cop deduïda, Møller la utilitza, junt amb els resultats dels paràgrafs anteriors, per calcular el frenat. Tota valoració del mètode que ha emprat, o de la fórmula de dispersió que ha obtingut, la limita Møller a la breu introducció, i els judicis de valor hi són escassos: provisionalitat del mètode, caràcter aproximat... Cap esment a l'electrodinàmica quàntica. És que no tenia la fórmula de Møller cap relació amb aquesta teoria?

3. 3. La relació de la fórmula amb l'electrodinàmica quàntica

En els dos articles sobre la dispersió d'electrons relativistes que hem estat considerant, Møller no feia cap referència a les diferents versions que existien en aquells moments de l'electrodinàmica quàntica. El seu tractament de la interacció entre dos electrons s'assentava sobre altres bases teòriques, de fiabilitat més contrastada. Møller evitava d'aquesta manera la consideració dels greus problemes que afectaven la teoria quàntica del camp electromagnètic, i ignorava problemes que eren objecte d'intenses discussions en aquells moments, com ara el de l'energia pròpia de l'electró. Però la relació entre la fórmula de Møller i l'electrodinàmica quàntica no només era més directa del que la indiferència de Møller feia suposar, sinó que va ser posada de manifest molt poc després que Møller completés el segon i definitiu article sobre la dispersió d'electrons. Aquest article havia estat rebut als *Annalen der Physik* el 3 de maig. Poc més d'un mes després, el 9 de juny, es rebia a *Zeitschrift für Physik* un article de Bethe i Fermi, "Sobre la interacció entre dos electrons", on es discutia "les relacions entre les fórmules d'interacció de Breit, Møller i l'electrodinàmica quàntica".⁴⁰

Bethe s'havia interessat des de l'inici de la seva carrera pel frenat de partícules relativistes.⁴¹ Hem citat ja en diverses ocasions el seu article fonamental de 1930, on aquest fenomen era analitzat en base a la mecànica quàntica. Durant 1932, després d'haver passat l'any anterior a Cambridge, Bethe va treballar a Roma amb el grup de Fermi, com a becari de la Fundació Rock-

⁴⁰Bethe i Fermi (1932), "Über die Wechselwirkung zwischen Zwei Elektronen", p. 296: "Die Zusammenhänge zwischen den Wechselwirkungsformeln von Breit und Møller und der Quantenelektrodynamik werden diskutiert".

⁴¹Cfr. Bernstein [1979], Galison [1987].

sentit, aquesta presentació marca la pauta de la majoria de les presentacions posteriors de la “dispersió Møller”, des de textos poc posteriors al de Jauch i Rohrlich, com la “Electrodinàmica quàntica” de Källén [1958], fins als més recents.⁵⁰

Aquesta mostra incompleta de referències és suficient en qualsevol cas per justificar la nostra afirmació que l’electrodinàmica quàntica renormalitzada revaloritza la fórmula de Møller. Un dels elements més importants en l’explicació d’aquest canvi és la rellevància de la interacció entre dos electrons en l’electrodinàmica quàntica de Feynman. Al segon dels articles en què va oposar la seva aproximació “over-all space-time” a la més usual formulació hamiltoniana, Feynman havia exemplificat les seves consideracions en la interacció entre dos electrons lliures: “We begin by discussing the solution in space and time of the Schrödinger equation for particles interacting instantaneously. The results are immediately generalizable to delayed interactions of relativistic electrons and we represent in that way the laws of quantum electrodynamics”.⁵¹ L’“equació fonamental de l’electrodinàmica” que proposava Feynman “describes the effect of exchange of one quantum (therefore first order in e^2) between two electrons. It will serve as a prototype enabling us to write down the corresponding quantities involving the exchange of two or more quanta between two electrons or the interaction of an electron with itself”.⁵² La relació de la fórmula de Møller amb la nova formulació de la teoria es feia explícita poques línies després: “The calculation, from [our fundamental equation for electrodynamics], of the transition element between positive energy free electron states gives the Møller scattering, when account is taken of the Pauli principle”.⁵³

Feynman era membre en aquests moments del departament de física de la Universitat de Cornell. Com veurem al capítol següent, Lorne A. Page treballava simultàniament, i al mateix departament, en el que es considera l’experiment decisiu en la comprovació de la fórmula de Møller.

⁵⁰Per posar només un exemple, C. Itzykson i J. Zuber [1985].

⁵¹Feynman (1949), “Space-Time approach to quantum electrodynamics”, p. 769.

⁵²*Ibid.*, p. 772.

⁵³*Ibid.*, p. 773.

4. La contrastació experimental de la fórmula de Møller

Els experiments d'Ashkin, Page i Woodward publicats el 1954 són sovint citats com els més decisius dels experiments realitzats després de la guerra per contrastar la fórmula de Møller.¹ En aquells moments l'electrodinàmica quàntica havia resolt brillantment els problemes de les seves primeres formulacions, i l'aproximació de Feynman a la teoria havia donat nova rellevància a la interacció Møller. Això podria explicar el renovat interès en la fórmula al voltant de 1950, quan alguns dels nous acceleradors construïts després de la guerra van ser aplicats a distingir clarament la fórmula de Møller de les de Mott, o Rutherford.

Aquest interès contrasta marcadament amb la indiferència dels experimentadors cap a la fórmula durant l'etapa inicial de la teoria. Juntament amb els d'Ashkin, Page i Woodward, es citen també sovint els experiments que el físic anglès F. C. Champion va realitzar el 1932. Una caracterització típica diria: "After the theory of Møller indicated that deviations from the Mott formula might be expected for relativistic collisions, efforts were made to measure the scattering of fast beta-particles. Champion found good agreement with the Møller theory for 250 collisions of radium E beta-particles in nitrogen found in cloud chamber pictures".² Els experiments de Champion, però, no només van ser concebuts quan encara no existia la fórmula, sinó que, fins on sabem, van ser els únics realitzats en la dècada de 1930 per contrastar la fórmula de

¹Ashkin, Page i Woodward (1954). Per posar dos exemples significatius, Jauch i Rohrlich [1955] afirmen que els resultats de Møller "are found to be in excellent agreement with observations", referint-se a "the beautiful experiments by Ashkin, Page and Woodward" (p. 261); Mott i Massey [1933] diuen que "confirmation of [Møller formula] for incident electrons in the energy range 0.6 to 1.2 MeV has been provided by the coincidence counter experiments of Ashkin, Page and Woodward" (3a. ed., p. 818). Aquests experiments segueixen constituint la prova clàssica de les fórmules de Møller i Bhaba a baixes energies (cfr. Itzykson i Zuber [1985], p. 281).

²Scott, Hanson i Lyman (1951), p. 638.

Møller. Fins el 1941 no es produïria un altre intent, de fet dos intents successius estretament relacionats entre si, als Estats Units.

Mentre Møller treballava en la seva tesi, la possible comprovació dels seus resultats no el preocupava gaire. Només va interessar-se pels experiments a través de Champion. És possible, com assenyalava el 1971, que Møller dubtés de la significació dels seus càlculs:³

Of course, my confidence was not so big, that I was really very surprised when Champion experimentally could show that my formula was obviously in better agreement with the experiments he had done than the non-relativistic formula. . . I was rather surprised that one could by such a formal generalization get to something which was really there in nature.

Però la seva actitud no era injustificada: els experiments sobre la dispersió d'electrons relativistes eren aleshores escassos i poc decisius. Iniciem la nostra anàlisi caracteritzant la situació experimental al voltant de 1930, en el moment que tant Champion com Møller es disposaven a iniciar la seva tesi.

4. 1. La dispersió d'electrons circa 1930

Des del seu descobriment i posterior identificació amb l'electró, a principis de segle, la radiació β va constituir una font única d'electrons d'alta energia. Amb energies de l'ordre d'1 MeV, els raigs β superaven àmpliament l'energia dels electrons emesos per efecte fotoelèctric o per incandescència, de l'ordre de 10^2 eV. La presència d'electrons en la font natural de partícules de més alta energia, la radiació còsmica, era objecte de discussió a l'inici de la dècada de 1930. Les primeres anàlisis de la dispersió d'electrons relativistes es van fer doncs mitjançant partícules β , que amb una velocitat de l'ordre de $0'9c$, mostraven suficientment efectes relativistes.

La radiació β era més problemàtica que un altre producte de la desintegració radioactiva millor conegut, la radiació α . Cap el 1930, una veu significativa no podia sinó reconèixer que “the experiments on the scattering of β rays leave much to be desired”, especialment si se'ls comparava amb els relatius als raigs α .⁴ La radiació β no només era inhomogènia, sinó que era en la majoria dels casos emesa junt amb una radiació γ intensa. Això complicava

³Møller-Weiner (1971), p. 13.

⁴Rutherford, Chadwick i Ellis [1930], p. 215.

la seva detecció, ja que no existia per la radiació β cap mètode de detecció tan simple i fiable com el mètode de centelleig per comptar partícules α , i els existents es veien limitats per la presència simultània de radiació γ . A més, era difícil distingir entre les dispersions simple i múltiple —és a dir, si la desviació final d'una partícula dispersada era deguda a una única col·lisió o bé era el resultat final de diverses col·lisions successives—,⁵ així com entre les dispersions electrònica i nuclear. Aquests problemes feien que fos difícil obtenir resultats lliures d'ambigüïtat, i expliquen l'escassetesa de dades relatives a la *dispersió simple electrònica* de partícules β , l'única que descrivia la fórmula de Møller.

Tanmateix, hi havia un instrument que permetia obviar la majoria d'aquestes dificultats: la cambra de boira. Els primers prototips d'aquest instrument els havia realitzat Charles T. R. Wilson al Cavendish a finals de segle, però només durant els anys vint la càmera va esdevenir un instrument eficaç i el seu ús s'extengué àmpliament.⁶ Una càmera típica consistia en un recipient que contenia un vapor saturat per excés d'algun líquid, inicialment només aigua, posteriorment una mescla d'alcohol i aigua. Una de les parets d'aquest contenidor era un pistó mòbil, mitjançant el qual podia augmentar-se bruscament el volum de la càmera; l'expansió adiabàtica feia que el vapor es refredés i es condensés sobre els ions o partícules presents. A través d'una finestra es podia il·luminar l'interior de la càmera, i fotografiar les traces formades.

Les primeres observacions de la dispersió simple de raigs β per electrons semblen haver estat les que Walther Bothe realitzà el 1922, mitjançant una cambra de boira “construïda fins als detalls no essencials segons les prescripcions de Wilson”.⁷ La de Bothe era molt probablement la primera aplicació

⁵Aquesta distinció havia tingut una importància decisiva en l'elaboració del model atòmic de Rutherford, entre 1910 i 1911, i era un element essencial de la concepció que Rutherford va oposar a Thomson (cfr. Heilbron 1967).

⁶Wilson va publicar les primeres fotografies de traces de raigs α i β el 1911, després que el 1910 hagués reprès les seves investigacions (*Proc. Roy. Soc.* **85** (1911), 285). El 1927 va rebre el premi Nobel “for his method of making the paths of electrically charged particles visible by condensation of vapour”. A la conferència que va pronunciar en rebre el premi, Wilson explicava que l'origen de l'aparell es remuntava al setembre de 1894, en què durant una estada de poques setmanes a l'observatori que aleshores existia a Ben Nevis, la més alta de les muntanyes escoceses, havia presenciat “wonderful optical phenomena shown when the sun shone on the clouds surrounding the hill top”. Els experiments que a principis de 1895 havia realitzat amb el desig d'imitar-los al laboratori l'havien conduït als fenòmens de condensació que més endavant es mostrarien de tanta utilitat (*Nobel Lectures. Physics, 1922–1941*, Elsevier 1967, p. 194).

⁷Bothe (1922), p. 117: “Der Nebelapparat war bis auf Unwesentliches nach den Vor-

de la cambra a la “investigació estadística” de la radiació β . En les fotografies del pas de raigs β a través del gas contingut en la cambra es podien reconèixer directament les escasses col·lisions violentes (“besonders wirksamen”) d’una partícula β amb un electró atòmic.⁸ En aquestes col·lisions la partícula incident comunicava a la impactada una fracció tan considerable de la seva energia que les traces d’ambdues després de la col·lisió eren comparables. A les fotografies aquestes col·lisions apareixien com la ramificació d’una traça.

En 20 fotografies, que totalitzaven 10 m de traça, Bothe va detectar clarament vuit ramificacions, i tres més de dubtoses. Després d’anàlitzar la cinemàtica de les col·lisions, Bothe assenyalava que només podien obtenir-se detalls del “procés de col·lisió”, referint-se a la seva dinàmica, mitjançant “la investigació estadística de la freqüència de les ramificacions de diferents graus”.⁹ El nombre de fotografies era clarament insuficient per fer una anàlisi estadística, però Bothe considerava que una primera estimació era possible. La comparació amb la teoria es feia en base a un model molt simplificat de la col·lisió, segons el qual els electrons interactuen electrostàticament i la direcció de la partícula incident pràcticament no varia. L’electró impactat es mou en aquest cas després de la col·lisió en direcció perpendicular a la de la partícula incident, i s’obté fàcilment per a la seva velocitat

$$v = \frac{2e^2}{mv_0d}, \quad (1)$$

on v_0 és la velocitat de la partícula β , m la seva massa en repòs, i d el paràmetre d’impacte. Les premisses d’aquest càlcul eren les mateixes que havia usat J. J. Thomson el 1912 en el seu càlcul de la ionització produïda per una càrrega elèctrica en moviment. La anàlisi clàssica de Thomson era simple però molt efectiva, i convenientment ampliada per Bohr, el 1913 i el 1915, es convertiria en punt de referència essencial en l’anàlisi del pas de partícules carregades a través de la matèria.¹⁰ La teoria permetia calcular la freqüència de les

schriften Wilsons konstruiert”.

⁸Bothe havia prè les fotografies amb la intenció d’investigar dues qüestions més: si, com era el cas per les partícules α , també les partícules β ràpides podien ser molt desviades en col·lisions simples, i si la forma de les traces podia explicar-se completament en base a col·lisions simples successives. En ambdós casos el resultat va ser afirmatiu.

⁹*Ibid.*, p. 121: “Will man Einzelheiten über den Stoßvorgang selbst erfahren, so ist dies nur durch statistische Untersuchungen über die Häufigkeit der Verzweigungen verschiedenen Grades möglich”.

¹⁰Thomson, “Ionization by moving electrified particles”, *Phil. Mag.* **23** (1912), 449–457; Bohr (1913), (1915).

collisions en què la partícula incident perdia una energia (cinètica) Q . Per energies altes en front el potencial d'ionització, la secció eficaç per aquestes collisions era

$$d\sigma = \frac{2\pi e^4}{mv_0^2} \frac{dQ}{Q^2}, \quad (2)$$

i se'n podia deduir directament la freqüència teòrica de producció de branques de diferents energies. Fins l'aparició de fórmules més elaborades de la interacció entre dos electrons, com les de Mott i Møller, s'utilitzà aquesta expressió per confrontar les dades experimentals amb la teoria.

Bothe, però, no mesurava l'energia transferida en les collisions, sinó la velocitat dels electrons, que deduïa a partir de la relació aproximada de proporcionalitat entre el rang (longitud de la traça) i la potència quarta de la velocitat, un mètode imprecís però àmpliament utilitzat per la seva simplicitat. Per aquesta raó no esmentava la teoria de Thomson, sinó que deduïa a partir de l'expressió (1) per la velocitat de l'electró secundari una fórmula més adient a les seves mesures. Representant per n el nombre d'electrons per cm^3 d'aire, la probabilitat que una partícula β de velocitat v_0 produís un electró secundari de velocitat $> v'$ en 1 cm de la seva trajectòria era¹¹

$$nd^2\pi = n\pi \left(\frac{2e^2}{m v_0 v} \right)^2.$$

A partir d'aquesta fórmula i els valors mesurats per la velocitat dels electrons, Bothe obtenia pel nombre de ramificacions en 10 m de traça un valor esperat de 12, en un acord que qualificava de "satisfactori" amb el valor experimental (de 8 a 11), "considerant l'escàs nombre de casos observats".¹²

El 1923 el mateix creador de la cambra, Wilson, va publicar un estudi detallat dels raigs X i β que no anava gaire més lluny en les seves conclusions.¹³ Wilson havia ja fotografiat traces d'aquestes radiacions el 1914, però la guerra

¹¹Dividint aquesta expressió per n i introduïnt-hi $Q = \frac{1}{2}mv^2$, energia de l'electró secundari, s'obté la secció eficaç per la producció d'un electró secundari d'energia més gran que Q ,

$$\sigma = \frac{2\pi e^4}{mv_0^2} \frac{1}{Q},$$

que pot deduir-se directament de la teoria de Thomson.

¹²Bothe (1922), p. 121: "die Übereinstimmung mit der gefundenen Zahl (8 bis 11) ist befriedigend in Anbetracht der geringen Zahl beobachteter Fälle".

¹³Wilson, "Investigations on X-rays and β -rays by the cloud method", *Proc. Roy. Soc. A* **104** (agost 1923), "Part I. X-rays" 1-24; "Part II. β -rays" 192-212 [reb. 23 juny 1923].

havia interromput el seu treball. La majoria de les fotografies que analitzava a l'article les havia pres entre el desembre de 1921 i el juliol de 1922. A la part corresponent a la radiació β Wilson descrivia acuradament l'aspecte de les traces, discutia la ionització al llarg de les seves trajectòries, la relació rang-velocitat, la influència de les desviacions nuclears, i en un dels apartats tractava també el fenomen de les "traces ramificades". Wilson, que no precisava les fonts de radiació β que havia usat, mesurava l'energia de la radiació mitjançant la mateixa relació aproximada entre el rang i l'energia que havia usat Bothe. Però a diferència d'aquest, Wilson comparava els seus resultats per la probabilitat que una branca excedís un certa longitud, amb la teoria de Thomson, observant que tot i correctes en ordre de magnitud, eren menors dels predits per la teoria.¹⁴ A les conclusions es parlava només d'un "acord general" amb la teoria. L'escassa significació dels resultats de Bothe i Wilson no es devia al mètode emprat, que permetria posteriorment comparacions més precises i conclusives amb la teoria, sinó al baix nombre de fotografies analitzades i a la poca fiabilitat de les mesures de la velocitat.

Hem d'esperar al 1929 per trobar una altra referència a l'observació experimental de la dispersió electrònica de radiació β . Malcolm C. Henderson va publicar aquest any els resultats del seu estudi de la dispersió de partícules β en gasos lleugers mitjançant una cambra d'ionització.¹⁵ Henderson s'havia doctorat recentment a la Universitat de Cambridge amb una tesi sobre el mateix tema, d'on provenia part del material de l'article. El problema que l'havia conduït a aquestes investigacions era el de quin efecte tindria el moment magnètic de l'electró, postulat el 1925 per Uhlenbeck i Goudsmit, en la col·lisió entre dos electrons. Henderson comparava la dispersió en hidrogen i heli, amb la dispersió en elements més pesants, nitrogen i argó. En els elements lleugers la dispersió electrònica és més important, i Henderson esperava posar de manifest amb la comparació qualsevol dispersió addicional que pogués adscriure's al nou "camp de força" de l'electró.

La cambra d'ionització, a diferència de la de boira, no permetia d'enregistrar esdeveniments individuals, sinó mesurar només el corrent total d'ionització

¹⁴*Ibid.*, p. 201: "The chance of occurrence of a branch track exceeding a given length may, on Thomson's theory, be calculated if we know the energy of a β -particle of given range". Wilson no detallava els càlculs que havia realitzat per comparar la teoria de Thomson amb les dades experimentals.

¹⁵Henderson (1929), "The scattering of β -particles by light gases and the magnetic moment of the electron".

produït al seu interior. No es podien doncs distingir les contribucions a la dispersió total de les dispersions nuclear i electrònica, el que feia que no fos un instrument adient per investigar aïlladament els efectes d'una de elles.¹⁶ Henderson l'aplicà de totes maneres a la investigació de la dispersió electrònica dels raigs β procedents del RaE. Encara que el límit superior del seu espectre estés subjecte a discussió, el RaE (Bi^{210}) constituïa un bon emissor per la suposada absència de radiació γ i l'elevada energia del seu espectre, i era àmpliament usat en l'anàlisi de la radiació β . Per comparar experimentalment la dispersió en els diferents gasos, Henderson mesurava el corrent d'ionització en funció de la pressió del gas contingut a la cambra, dins el conjunt de valors de la pressió en què el quocient de les dues quantitats es mantenia constant. Henderson considerava això com un indicatiu del predomini de la dispersió simple. El quocient d'aquestes constants entre si era aleshores una mesura de la "capacitat de dispersió" ("scattering power") relativa entre els diferents gasos.

Henderson va comparar els seus resultats amb les prediccions teòriques en base a la teoria clàssica de dispersió de Darwin, incloent-hi un factor de correcció relativista per la dispersió nuclear. D'aquesta forma obtenia que el número de partícules dispersades havia de ser proporcional a $aN^2 + N$ (N número atòmic element dispersor, $a = 1/2$ factor relativista), si es mantenia la pressió constant a la cambra. Això estava d'acord amb l'estimació habitual que la raó de les dispersions nuclear i electrònica era $N^2 : N$.

Les dades experimentals de Henderson indicaven que la dispersió total era proporcional a $aN^2 + 3/3N$, és a dir, que la dispersió electrònica era unes tres vegades superior a l'esperada teòricament. Henderson no jutjava aquesta dispersió addicional suficientment gran com per indicar l'existència d'un moment magnètic, el que argumentava en base a la magnitud relativa de les forces elèctrica i magnètica. Si el moment magnètic de l'electró fos d'un magnetó de Bohr, les forces magnetostàtiques haurien de ser el factor més important per determinar la desviació final de la partícula, ja que la distància mínima d'apropament s'estimava 60 vegades inferior als 5×10^{-11} cm en què les forces elèctric i magnetostàtiques són iguals. Però aleshores un càlcul elemental mostrava que els resultats haurien de diferir molt dels observats, el que feia

¹⁶En elements dispersors pesants, la preponderància de la dispersió nuclear sí permetia d'investigar-la en cert detall mitjançant la cambra d'ionització, introduint només una petita correcció per tenir en compte la dispersió electrònica. Durant els anys vint experiments així van ser realitzats especialment per Chadwick i P. H. Mercier, i B. Schonland (cfr. Rutherford, Chadwick i Ellis [1930], pp. 227–234).

concloure a Henderson que semblava improbable que l'electró pogués tenir un moment magnètic “tan gran com un magnetó de Bohr”.¹⁷

Henderson no proposava cap altra explicació d'aquestes anomalies, i assenyalava la dificultat de calcular la trajectòria de les partícules si s'havia de tenir en compte que la força entre dos magnetons depèn de l'orientació relativa dels seus eixos. Henderson objectava al model de l'electró magnètic la seva relativa complexitat en front l'electró puntual, i en aquest context caracteritzava la teoria de l'electró de Dirac com una alternativa a aquest model, més que com una explicació:¹⁸ “Dirac has shown how to avoid the necessity for a magnetic electron by a more complete solution of the fundamental equations”. Però Henderson jutjava també complicada l'aplicació de la teoria de Dirac a aquest problema, preveient correctament la laboriositat dels càlculs necessaris:¹⁹

The problem of the collision of a β -particle with an electron has not yet been examined on the basis of Dirac's equations, and although it seems possible that the duplex character of an electron in an orbit may be interpreted to give a magnetic field effective in collisions, the magnitude of the effect cannot be estimated without a laboured calculation. When such calculations are available it may be possible to give an adequate explanation of the results obtained in the present experiments without any further hypotheses.

El mètode de Henderson, inspirat directament en experiments similars realitzats anteriorment al Cavendish, no va tornar a ser emprat degut a l'escassa significació dels resultats que permetia obtenir. L'eficàcia de la cambra de boira, en canvi, va augmentar sensiblement amb la introducció accidental el 1927 d'un mètode fiable per la determinació de la velocitat de les partícules fotogrifiades: l'aplicació d'un camp magnètic a la cambra en operació. El camp corbava la trajectòria de les partícules, i permetia determinar-ne la velocitat.²⁰

¹⁷*Ibid.*, p. 856. No estarà de més recordar que el moment magnètic de l'electró és d'un magnetó de Bohr.

¹⁸Henderson (1929), p. 856.

¹⁹*Ibid.*, p. 857. Henderson es refereix a la “zweideutigkeit” introduïda per Pauli, expressada també pel model d'espí.

²⁰El 1927 el físic rus Dimitri Skobelzyn va introduir el camp magnètic com a medi auxiliar per evitar que les traces dels raigs β secundaris que la radiació còsmica produïa a les parets de la càmera, emmascaressin l'observació dels electrons produïts per efecte Compton, els únics en què estava interessat (cfr. Skobelzyn, “Die Intensitätsverteilung in dem Spektrum der γ -Strahlen von RaC”, *Zs. Phys.* **43** (1927), 354–378). Skobelzyn, estimulat pel descobriment

Si el pla de la traça era perpendicular a la direcció del camp, la velocitat podia expressar-se de forma molt senzilla en funció de la intensitat del camp H i el radi de curvatura ρ de la traça,

$$\beta = \frac{H\rho(e/mc)}{\sqrt{1 + (H\rho)^2(e/mc)^2}}, \quad (3)$$

($\beta = v/c$; e , m càrrega i massa de l'electró).

Gairebé alhora que Henderson, i al mateix laboratori, dos estudiants de doctorat, E. J. Williams i F. R. Terroux, aplicaven la innovació d'Skobelzyn a la investigació de la dispersió de partícules β ràpides a través d'oxigen i hidrogen.²¹ El resultat de les seves investigacions va ser publicat el gener de 1930. Les observacions originals de Bothe i Wilson s'havien limitat al pas dels raigs β a través d'aire, i els autors consideraven l'extensió de les observacions a l'hidrogen “de considerable importància” per la comparació amb la teoria, donada la magnitud de la dispersió electrònica en aquest cas. Williams i Terroux destacaven la superioritat de la cambra de boira davant altres mètodes per la possibilitat que oferia de distingir directament entre les dispersions electrònica i nuclear, i deien de les observacions de Henderson sobre la dispersió en hidrogen, que esmentaven en aquest context, que “even in this case the nuclear scattering is greater than the electron scattering and it is difficult to make a reliable determination of the latter”.²²

Williams i Terroux analitzaven, com Henderson, els raigs β procedents del RaE. Un dels objectes de la seva investigació era obtenir dades sobre la freqüència de les col·lisions amb una transferència d'energia important, és a dir, sobre la freqüència de producció de branques.²³ Williams i Terroux van examinar unes 500 traces de partícules β , que totalitzaven 18 m, i hi van poder detectar 100 branques. La velocitat de les partícules incidents es determinava mitjançant la curvatura de les traces, i l'energia de les branques a partir del

de l'efecte Compton, investigava des del 1923 la radiació γ i la radiació còsmica al laboratori del seu pare a Leningrad (cfr. Skobelzyn, “The early stage of cosmic-ray particle research”, a Brown i Hoddeson [1983], pp. 111–119).

²¹Williams i Terroux (1930). Evans James Williams es va doctorar a Cambridge el 1929 amb una tesi sobre la pèrdua d'energia de les partícules β en el seu pas a través de la matèria, tema sobre el que publicaria nombrosos articles en els anys següents. F. R. Terroux era un “external research student” del Cavendish.

²²*Ibid.*, p. 291.

²³Williams i Terroux estudiaven també la ionització primària i la conservació del moment en les col·lisions.

rang. L'energia de les partícules incidents es trobava entre 0'13 i 1'6 MeV (velocitats entre 0'6 i 0'97*c*). Els seus resultats eren agrupats en dues taules segons (1) l'energia cinètica transferida a les branques i (2) la velocitat de les partícules incidents.

La comparació amb la teoria es feia a partir de la raó entre els casos observats i el valor teòric, que era calculat a partir de la teoria de Thomson, encara l'única disponible. Williams i Terroux partien de l'expressió de Thomson per la probabilitat de producció d'una branca d'energia entre Q i $Q + dQ$ (veure expressió (2))

$$\phi(Q) = \frac{2\pi ne^4}{mv_0^2} \frac{1}{Q^2}, \quad (4)$$

on n densitat d'electrons, i $T = \frac{1}{2}mv_0^2$ energia cinètica de la partícula incident. Degut a la impossibilitat de distingir la partícula β de l'electró secundari després de la col·lisió, Williams i Terroux consideraven com a branca la ramificació de menor energia.²⁴ La màxima energia d'una branca era aleshores $T/2$, el valor límit de Q en les expressions següents. El nombre teòric $P(Q)$ de branques d'energia Q s'obtenia aleshores sumant a l'expressió anterior el número de col·lisions en què l'energia perduda per la partícula β era $T - Q$, on T representava l'energia total de la partícula incident

$$P(Q) = \phi(Q) + \phi(T - Q) = \frac{2\pi ne^4}{mv^2} \left(\frac{1}{Q^2} + \frac{1}{(T - Q)^2} \right). \quad (5)$$

Els resultats de Williams i Terroux indicaven que el nombre d'esdeveniments observats era al menys el doble del valor predit per la teoria de Thomson, una diferència molt superior al marge d'error experimental i estadístic. L'anàlisi de la ionització primària que havien realitzat simultàniament conduïa a la mateixa conclusió, i l'acord era també satisfactori amb els resultats de Henderson.²⁵ Williams i Terroux miraven com Henderson d'obtenir de les seves dades alguna evidència de l'existència del moment magnètic de l'electró. En primer lloc, coincidien amb ell en l'observació que, assumint un moment magnètic igual a un magnetó de Bohr ($eh/4\pi mc$), les forces magnetostàtiques havien de predominar a la distància mínima clàssica d'apropament entre la

²⁴És interessant observar que les partícules no eren considerades indistingibles *en principi*, com assenyalaven implícitament Williams i Terroux en afirmar: "When a β -particle produces a branch, there is no criterion available to determine which is the branch and which is the continuation of the primary track" (Williams i Terroux 1930, p. 304).

²⁵Williams i Terroux citaven la tesi de Henderson, Cambridge 1928.

partícula β i l'electró. Això suggeria ja que el nombre teòric de branques hauria de ser molt superior al calculat mitjançant la teoria clàssica considerant només forces elèctrostàtiques. Per fer una apreciació quantitativa, Williams i Terroux prenien un valor promig per la força d'atracció entre dos magnetons, i calculaven el nombre de branques corresponent. Els resultats que obtenien, sense detallar els càlculs, eren d'un ordre de magnitud diferent als observats, el que els portava a concloure:²⁶ “The differences are so great that although the calculated values are only approximate, we may conclude that the electron regarded as a particle does not behave as if it had a magnetic moment equal to a Bohr magneton”.

Alhora que Williams i Terroux preparaven el seu article, N. Mott estudiava a Manchester la interacció entre dos electrons considerant la seva indistingibilitat, un problema que ja havia tingut la intenció de tractar al Cavendish a principis de 1929. Aleshores havia acabat considerant la col·lisió entre dues partícules α , que no tenien espí i eren més convenients des del punt de vista experimental, amb el resultat que el nombre de partícules desviades a 45° havia de ser el doble del predit per la teoria clàssica de Rutherford.²⁷ A Manchester Mott va calcular finalment, introduint funcions d'ona antisimètriques, l'efecte de la indistingibilitat en la col·lisió entre dos electrons. L'article on exposava el seu càlcul va ser rebut als *Proceedings of the Royal Society* el 7 de novembre de 1929, només un dia després que l'article de Williams i Terroux.²⁸

Williams, que s'havia llicenciat a Manchester i havia coincidit amb Mott al Cavendish, va saber del treball de Mott abans que es publicués. Així, Mott devia molt probablement a Williams la suggerència que la dispersió anòmala que havia calculat podia ser detectada, entre altres medis, “by observing collisions between fast electrons and atoms in which an electron is ejected from the atom, e.g., the forked β -ray tracks in a Wilson chamber”.²⁹ Les úniques dades experimentals amb què Mott comparava la seva previsió teòrica eren precisament les que Williams li havia avançat, corresponents a un article que havia de publicar en breu. En aquest cas, sorprèn el fet que Williams no donés cap indicació d'aquest treball en l'article conjunt amb Terroux, on ja havien intentat explicar les discrepàncies amb la teoria clàssica. En aquest article no hi havia cap referència a la possibilitat que un tractament més complet basat

²⁶Williams i Terroux 1930, p. 307.

²⁷Mott, *Proc. Roy. Soc. A* **125** (1929), 222.

²⁸Mott (1930).

²⁹*Ibid.*, p. 264.

en la mecànica quàntica, o en la teoria de Dirac, poguéis eliminar les anomalies observades.

En qualsevol cas, l'article anunciat per Mott va aparèixer efectivament en pocs mesos. Williams el dedicava exclusivament a l'observació de branques, amb la intenció manifesta de donar suport a la teoria de Mott.³⁰ A la llum de la nova teoria quàntica, Williams va tornar a examinar les fotografies de partícules β "lentes" (fotoelectrons d'uns 20 KeV d'energia) que havia realitzat a Manchester el 1927, i que ja havia usat a la seva tesi. Simplificant lleugerament el resultat de Mott, Williams obtenia per la freqüència de producció de branques

$$P_q(Q) = \phi(Q) + \phi(T - Q) - \sqrt{\phi(Q)\phi(T - Q)}, \quad (6)$$

i formava el quocient amb l'expressió clàssica corresponent, equació (5), per obtenir

$$\frac{P_q(Q)}{P_{cl}(Q)} = 1 - \frac{\sqrt{\phi(Q)\phi(T - Q)}}{\phi(Q) + \phi(T - Q)}. \quad (7)$$

En l'examen de 4 m de traça, Williams va detectar 150 branques, que classificà en dos grups segons que l'energia de la branca es trobés entre 3.000 i 5.000 eV, o entre 5.000 i 10.000 eV. Va dividir aleshores el nombre de casos observats, 89 i 47 respectivament, pel valor previst per la teoria clàssica, 100 i 78, i va comparar el resultat amb el quocient donat per l'expressió (7). Ambdós valors coincidien dins el marge d'error, el que Williams interpretava com una evidència favorable a "la nova teoria quàntica i en particular a l'extensió del principi d'exclusió a sistemes aperiòdics o oberts".³¹

Després de considerar l'evidència existent sobre dispersió simple de radiació β cap el 1930, podem afirmar que les dades experimentals eren escasses i poc significatives. A més de les dificultats experimentals que ja hem esmentat, contribuïa a això l'estat canviant de la teoria, que inhibia sens dubte la realització d'experiments més precisos. Si era difícil obtenir resultats no ambigus, no ho era menys saber amb quina predicció teòrica havien de ser comparats. El cas de Williams representa clarament aquest conflicte.

Després de publicar l'article de comprovació de la teoria de Mott, Williams completà en pocs mesos dos articles més sobre la pèrdua d'energia de les

³⁰Williams (1930).

³¹*Ibid.*, p. 465: "As far as they go the experimental results therefore provide evidence in support of the new quantum theory and in particular of the extension of the exclusion principle to aperiodic, or open, systems".

partícules β en atravesar la matèria.³² En ells analitzava les dades experimentals assenyalant que malgrat l'acord general, les discrepàncies amb les previsions teòriques eren més grans del que era generalment reconegut. Mentre corregia les proves va aparèixer la detallada anàlisi quàntica de Bethe del mateix problema,³³ i Williams va haver de reexaminar novament les seves conclusions, el que l'ocupà gairebé un any. L'acord que va obtenir amb la teoria era ara millor, però les discrepàncies eren més serioses perquè havia menys espai per adscriure-les a “incompleteness or approximation in the theoretical calculations”.³⁴ En una de les parts de l'article Williams va discutir el cas relativista:³⁵ “By comparing Bethe's non-relativity formulae with experimental results for particles with velocities comparable with c we can deduce the nature of the actual relativity effect. A direct application of quantum mechanics to the problem has not been made, and there are therefore no theoretical formulae with the same generality as those derived by Bethe for the non-relativity case”. Però Williams havia tornat a avançar-se en les seves conclusions, perquè quan va aparèixer aquest article, el febrer de 1932, Møller ja disposava de la seva fórmula i aviat publicaria el seu tractament quàntic i relativista del problema.

4. 2. Els experiments de Champion

Aquesta situació no havia canviat substancialment quan el 14 de octubre de 1931 Møller va rebre una carta procedent del laboratori Cavendish, datada el 10 d'octubre. El remitent, que s'havia descuidat de signar-la, li comunicava que havia llegit amb molt d'interès el seu article recent (referint-se a Møller 1931), però observava que només s'hi donaven els casos límit de la fórmula de dispersió. El desconegut explicava que havia prè recentment “un gran nombre de fotografies de traces de raigs β ràpids en una càmera d'expansió automàtica”, i que havia començat ja a analitzar “les col·lisions amb electrons estacionaris”. En un diagrama adjunt li mostrava la distribució dels 50 punts que havia determinat fins el moment, amb angles de dispersió compresos entre

³²Williams, “The rate of loss of energy by β -particles in passing through matter” i “The loss of energy by β -particles and its distribution between different kinds of collisions”, *Proc. Roy. Soc. A* **130** (gener 1931), 310–327 i 328–346 [rebs. 25 setembre 1930].

³³Bethe (1930). Veure la introducció al capítol 2.

³⁴Williams, “The passage of α and β -particles through matter and Born's theory of collisions”, *Proc. Roy. Soc. A* **135** (febrer 1932), 108–131 [reb. 1 octubre 1931]; p. 109.

³⁵*Ibid.*, p. 109.

10° i 45° , i partícules incidents de velocitats entre $0'8$ i $0'9c$. L'autor reconeixia que el número de punts no era encara suficient per permetre la comparació amb la teoria, però demanava a Møller que calculés la fórmula de dispersió pels valors de β indicats. Afegia finalment que esperava completar l'anàlisi, fins uns 600 punts, el març de l'any següent, i que estava "molt ansiós" per saber com diferiria la distribució de punts de la predita per l'expressió clàssica.³⁶

Naturalment, el contingut de la carta va interessar molt a Møller, que el mateix dia va escriure a Max Delbrück en clau d'humor preguntant-li qui fotografiava traces de raigs β ràpids mitjançant una càmera d'expansió al Cavendish, després que a l'Institut tots s'haguessin "trencat el cap inútilment amb aquesta pregunta":³⁷

Els fets empírics són els següents: el 14 d'octubre de 1931 pel matí, al voltant de les 11, vaig rebre una carta escrita amb una màquina d'escriure (probablement marca Remington). Del contingut de la carta es dedueix que el remitent s'ocupa d'investigar la dispersió de raigs $[\beta]$ en electrons lliures mitjançant fotografies Wilson. Em demana algunes indicacions relatives a la meua fórmula per la dispersió d'electrons ràpids, però com s'ha 'oblidat' de signar la carta, això és naturalment difícil. Si vosté no pogués ajudar-me, recorriera a Scotland Yard. Jo diria que el culpable és Blackett, què li sembla?

Delbrück es trobava a Roma, on havia participat al congrès dedicat a la física nuclear que s'hi havia celebrat entre l'11 i el 18 d'octubre, i va contestar a Møller en una carta sense data, escrita però poc després que finalitzés el congrès.³⁸ Blackett participava en el congrés i tenia un àlibi, de forma que Delbrück suggeria com a remitent a un jove alumne italià de Blackett de qui

³⁶Champion a Møller, 10 d'octubre de 1931 (AHQP-59).

³⁷Møller a Delbrück, 14 octubre 1931 (AHQP-59): "Mit dieser interessanten Frage haben wir uns hier im Institut vergeblich den Kopf zerbrochen". La carta segueix: "Die empirischen Tatsachen sind die folgende: Am 14.Okt.1931. Vormittags ca.11 Uhr erhielt ich einen mit einer Schreibmaschine (wahrscheinlich Marke Remington) geschriebene Brief. Aus dem Inhalt des Briefes geht hervor, daß der Absender sich damit beschäftigt mittels Wilsonaufnahmen die Streuung von $[\beta]$ -Strahlen bei freien Elektronen zu untersuchen. Er bittet mich um einige Angaben bezüglich meiner Formel für die Streuung Schneller Elektronen, da er aber 'vergessen' hat seinen Brief zu unterschreiben ist dies natürlich schwierig. Wenn Sie mir nicht helfen können, werde ich mich an Schotland Yard wenden. Ich möchte glauben, daß Blackett der Täter ist, was meinen Sie?".

³⁸Delbrück a Møller (AHQP-59).

aquest li havia parlat, refirint-se molt probablement a Giuseppe Occhialini.³⁹ Però l'autor de la carta no era Occhialini, sinó un altre jove doctorand del Cavendish, F. Clive Champion.

Frank Clive Champion va néixer a Esher, Surrey, el 2 de novembre de 1907. Després de rebre l'ensenyament secundari a The Royal Grammar School de Guilford, va estudiar física al St. John's College de Cambridge.⁴⁰ Champion va ser un estudiant brillant: el 1929 va obtenir First Class als Natural Science Tripos (Physics), el seu segon First després de l'assolir a Guilford el 1920. El juliol de 1929 s'incorporà al Cavendish com a Hutchinson Research Student.⁴¹ El seu treball s'orientà des d'un primer moment a l'ús de la cambra de boira en la investigació de les radiacions α i β .

La cambra de boira, com ja hem vist, era un medi de detecció especialment adient per l'observació de col·lisions entre electrons. Durant els anys vint la cambra va ser molt usada en la investigació de la radiació α , i es perfeccionà el disseny original sense que tanmateix es modifiquessin essencialment les seves característiques. Les modificacions van afectar principalment el pistó, que en alguns casos va ser substituït per una membrana elàstica, i la freqüència del cicle d'operació de la càmera —expansió, condensació, fotografia i retorn a les condicions inicials—, que va ser automatitzat.⁴² A finals dels anys vint l'aparell era àmpliament usat al Cavendish, on hi havia varis experts en la seva construcció, entre ells Patrick Blackett, “the leading exponent of cloud cham-

³⁹Occhialini, un estudiant de l'Institut de Física de la Universitat de Florència, acabava d'arribar al Cavendish a suggerència de Bruno Rossi amb la intenció de passar-hi unes poques setmanes aprenent a construir cambres de boira, però esdevingué col·laborador de Blackett i s'hi va estar tres anys (Hendry [1984], p. 24; Rossi, “Early days in cosmic rays”, *Phys. Today* **34** (octubre 1981), 34–41, esp. p. 41). A finals de 1932 van confirmar l'existència del positró mitjançant una càmera accionada per comptadors Geiger, “a method by which the high speed particles associated with penetrating radiation can be made to take their own photographs” (Blackett i Occhialini, “Some photographs of the tracks of penetrating radiation”, *Proc. Roy. Soc. A* **139** (1933), 699–726 [reb. 7 febrer 1933]).

⁴⁰Les dades biogràfiques de Champion provenen d'una nota biogràfica conservada al St. John's College, que conté el seu obituari a *The Times*, 5 de març de 1976. S'hi conserva també una “tutorial file” amb una cinquantena de documents, principalment correspondència administrativa, però entre els que hi figuren també dos informes de recerca i material relatiu a una petició de beca el 1934. Agraïxo al senyor M. G. Underwood, arxiver del St. John's College, aquesta informació i les còpies que m'ha facilitat d'alguns d'aquests documents.

⁴¹Segons el registre del laboratori. Agraïxo al senyor J. Deakin, secretari del departament de física de la Universitat de Cambridge, aquesta informació.

⁴²Cfr. Gentner, Maier-Leibnitz i Bothe, *Atlas typischer Nebelkammerbilder*, Berlin 1940, p. 10.

bers in the world”.⁴³ Durant l’estiu de 1929 Champion es familiaritzà amb un model cambra dissenyat recentment per Blackett, i durant el seu primer trimestre al Cavendish treballà en la seva adaptació a la investigació de la radiació β .⁴⁴ A principis de 1930 aquest treball es va veure alterat inesperadament.

L’1 de gener de 1930 va aparèixer als *Proceedings of the Royal Society* l’article de Mott on es considerava la interacció entre dues partícules idèntiques tenint en compte la seva indistingibilitat.⁴⁵ El 2 de gener, segons el seu informe, Champion va suspendre temporalment el treball sobre radiació β per ocupar-se de la comprovació de la fórmula de Mott. A finals de gener disposava ja de 2.400 fotografies, que analitzà durant el mes següent. El març va prendre noves fotografies, fins un total d’entre 3.000 i 4.000. Com assenyalava a l’informe: “By this time analysis had shown itself to be definitely in favour of Mott’s theory”.⁴⁶ L’anàlisi final de les fotografies mostrà un acord excellent de les dades amb la fórmula de Mott, com evidència l’article que Champion redactà a continuació conjuntament amb Blackett, finalitzat l’octubre de 1930.⁴⁷

L’adaptació de la cambra a l’ús amb electrons ocupà gran part del curs 1930–1931. El maig de 1931 Champion disposava només d’unes 3.000 traces (aproximadament 400 fotografies), una dècima part de les necessàries segons les seves estimacions. Si bé Champion era conscient de la necessitat de prendre un gran nombre de fotografies per donar fiabilitat al mètode estadístic d’anàlisi que es proposava utilitzar, en el moment d’iniciar els seus experiments no tenia una idea molt definida dels resultats teòrics que volia comprovar. La fórmula de Mott aparegué per a ell oportunament. Quan el maig de 1931, després de gairebé dos anys de treball al Cavendish, Champion va redactar un segon informe sobre els seus resultats i el seu pla de treball, les seves intencions eren més clares. Després de comentar el treball sobre la dispersió de partícules α Champion afegia:⁴⁸

These particles, however, are not the fundamental particles of matter which are the proton and the electron. *Dirac* has calculated,

⁴³Hendry [1984], p. 22.

⁴⁴“Research Report 1929–1930” (CTF).

⁴⁵Veure p. 85.

⁴⁶Research Report 1929–1930 (CTF).

⁴⁷Champion i Blackett (1931).

⁴⁸“Research Report 1930–1931”, 8 maig 1931 (CTF).

using relativity theory, the expected properties of a *single* electron and deduced theoretically the experimentally known property of electron spin. *Breit, Gaunt* and others have tried to apply Dirac's methods to the *theoretical* determination of the laws governing the interaction of *two* electrons i. e. the 'simplest' of the two-body problems. All these attempts have been unsuccessful predicting physically inconceivable events and agreeing badly with doubtful experimental data obtained from the hyperfine structure of spectral lines. *A direct experimental determination* of the behaviour of two electrons on interaction would therefore be invaluable.

Champion exagerava els defectes de les teories de Gaunt i Breit, justificant el seu interès genuí pel problema, al marge de tota consideració teòrica. Champion proposava la reconsideració experimental del problema de dos electrons per considerar poc fiables les dades espectroscòpiques, i per l'interès del problema en si mateix. Aquest no era el cas dels altres "problemes fonamentals" que es proposava solucionar, on eren explícites les referències a prediccions teòriques.⁴⁹

(1) The only purely terrestrial proof of the theory of relativity as applied to individual electrons. *Theoretical* work on the problem, based on simple conservation principles, has been carried out by the writer; this will be published later when more copious data is available. On the data already available approximate measurements shew beautiful agreement with the theoretical predictions.

(2) The intensity-velocity distribution in the β ray spectrum of Radium E, for which there is at present conflicting evidence. (Radium E is the source of the fast electrons in the other problems).

(3) The experimental investigation of nuclear scattering; this will afford tests of some applications of wave mechanical theory.

La inclusió del segon punt, el primer que Champion va considerar, era segurament circumstancial. Les primeres investigacions de l'espectre del RaE, realitzades al voltant de 1910 usant el mètode de deflexió magnètica, havien mostrat que era continu i presentava un límit superior ben marcat per $H\rho$

⁴⁹*Ibid.* Com veurem més endavant, Champion es refereix en el primer punt a l'anàlisi relativista de la col·lisió entre dues partícules.

5.500, una energia de l'ordre d'1 MeV.⁵⁰ Experiments posteriors van revelar l'existència de bandes més energètiques, però molt febles i pràcticament insignificants. L'abril de 1931 F. R. Terroux va publicar el resultat d'investigacions recents que contradeien aquestes observacions.⁵¹ Mitjançant la mateixa càmera que havia usat anteriorment amb Williams, Terroux va prendre 80 parells de fotografies de raigs β procedents del RaE. De l'anàlisi de les 500 traces que hi va detectar va concloure que no existia un límit superior, sinó que l'espectre descendia gradualment fins a energies molt altes, seguint aproximadament una distribució maxwelliana. Terroux estimava el nombre de partícules emeses amb una energia superior a $5.000 H\rho$ en un 4% del total.

Terroux va realitzar aquests experiments al Cavendish. En aquells moments no treballaven al laboratori més de trenta persones, i Champion hagué de conèixer els seus resultats de primerà mà, molt abans que es publicessin. Champion tenia una altra oportunitat inesperada d'utilitzar les seves fotografies. Analitzant 1.000 traces va confirmar novament l'existència d'un límit superior sobre $5.000 H\rho$, i observà que la part de l'espectre amb energia superior a $5.500 H\rho$ era només d'un 0'05%, d'acord amb les observacions anteriors.

L'article que contenia els resultats d'aquestes observacions va ser rebut el 15 d'octubre de 1931 als *Proceedings of the Royal Society*.⁵² La coincidència de dates —el 14 s'havia rebut a Copenhaguen la seva primera carta— suggereix que Champion va esperar a concloure una primera anàlisi de les seves fotografies abans de decidir-se per escriure a Møller. Champion s'expressava en la carta a Møller (“I have recently taken a large number of photographs of *fast β -ray tracks* in an automatic expansion chamber”) pràcticament en els mateixos termes que a l'article que acabava de completar (“The writer has recently obtained a large number of photographs of *β -ray tracks* in an automatic expansion chamber”). Champion ja devia disposar en aquests moments de la majoria de les fotografies, i dedicà els mesos següents a la seva anàlisi.

A l'informe corresponent al curs 1929–1930 Champion indicava que el seu treball havia consistit “in the application of the *Wilson Cloud Chamber* technique, especially in the modified form due to P. M. S. Blackett, to the investi-

⁵⁰Quan una partícula β travessa un camp magnètic, el producte de la intensitat del camp (H) i el radi de curvatura (ρ) de la seva trajectòria determina unívocament la seva energia (veure equació (3)).

⁵¹Terroux, “The upper limit of energy in the spectrum of radium E”, *Proc. Roy. Soc. A* **131** (abril 1931), 90–99.

⁵²Champion (1932a).

gation of atomic processes”.⁵³ En l'article sobre l'espectre del RaE, indicava així mateix que la càmera que havia usat era “a modification of that previously employed by Blackett and the writer [Champion i Blackett (1931)]”.⁵⁴ L'última cita, en especial, sembla implicar que la cambra que estava usant Champion era la mateixa que havia construït Blackett. L'informe sobre la tesi de Champion que Blackett redactà el 1934 confirma que era de fet la mateixa: “Since Mr Champion left Cambridge he has built a new automatic cloud chamber following in the main the design of the one he used during his time in the Cavendish, and *which was built by me six years ago*. He does not appear to have made any material or very original changes in this design”.⁵⁵

La cambra de Blackett (figura 1) es basava en un model estàndard subministrat per la Cambridge Scientific Instruments Company.⁵⁶ Més que d'una cambra, es tractava en realitat d'una nova disposició del conjunt cambra de boira – càmares fotogràfiques, que optimitzava el nombre d'esdeveniments fotografiats. El disseny de Blackett l'havia motivat l'estudi de la desintegració artificial, que feia necessari fotografiar un gran nombre de traces:⁵⁷ “The importance of obtaining the best possible conditions needs no emphasis when it is remembered that it is generally necessary to photograph at least half-a-million tracks to obtain a few disintegration collisions with any one element”. El número d'expansions no podia passar de 4 per minut sense anar en detriment de les traces, i un increment en la velocitat d'obtenció de traces s'havia de buscar en l'increment del número de traces per fotografia.

La cambra es trobava dins d'una caixa de fusta amb pantalles d'il·luminació tubulars, de forma que no era necessari usar l'aparell en una habitació completament a les fosques. Segons la descripció del mateix Blackett, “an aluminium casting has two faces at its ends making angles of 45° with the top. To these two faces are attached standard Ensign ciné-cameras (a method adopted to save time and expense). Each lens is carried on a brass bush, the two faces of which are inclined at an angle of $8\frac{1}{2}^\circ$ ”.⁵⁸ La inclinació de les lents, que

⁵³ “Research Report 1929–1930” (CTF).

⁵⁴ Champion (1932a), p. 672.

⁵⁵ “Report by Professor P. M. S. Blackett on the dissertation of F. C. Champion” (CTF). El subratllat és meu.

⁵⁶ Blackett, “On the design and use of a double camera for photographing artificial disintegrations”, *Proc. Roy. Soc. A***123** (abril 1929), 613–629 [reb. 21 febrer 1929]. La figura és la número 20 del volum.

⁵⁷ *Ibid.*, p. 614.

⁵⁸ *Ibid.*, p. 622.

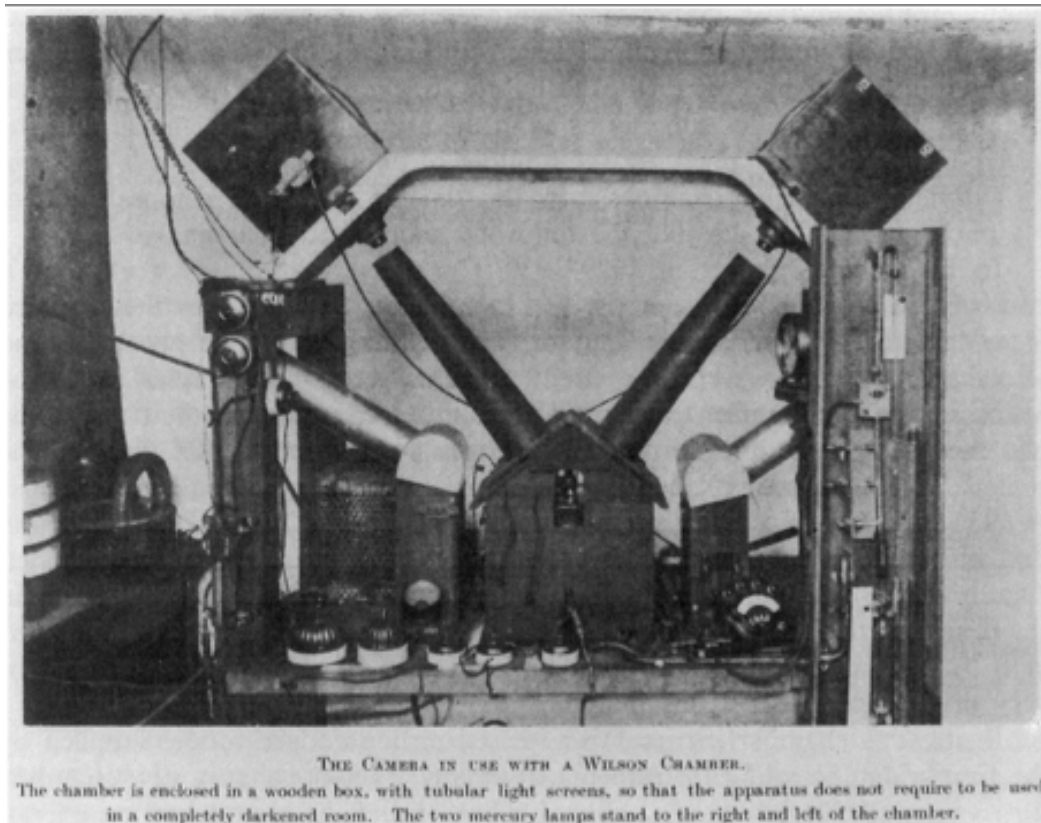


Figura 1. La disposició de cambra de boira i càmares fotogràfiques dissenyada per Blackett el 1929. Amb aquest aparell, adaptat al seu ús amb electrons, realitzà Champion els seus experiments sobre dispersió de partícules β , en el context dels quals contrastaria la fórmula de Møller (veure nota 56).

s'hauria d'apreciar a la figura, era una de les innovacions de Blackett respecte de dissenys anteriors. La desviació estava calculada per aconseguir que tot el pla de la cambra quedés enfocat en les dues plaques fotogràfiques, disposades en angle recte.

El 2 de novembre, impacient per no haver rebut cap resposta, Champion va tornar a escriure a Møller, oferint-se a enviar-li alguns resultats més que havia obtingut des que la carta anterior havia estat escrita. Champion qualificava més precisament aquesta vegada el seu treball com “an experimental test of your formula for the scattering”.⁵⁹ Møller va contestar immediatament a Champion en rebre la carta dos dies després, explicant-li la raó del retard, i mostrant-se interessat pel seu treball i optimista respecte la fórmula

⁵⁹Champion a Møller, 2 novembre 1931 (AHQP-59).

sol·licitada.⁶⁰ “I am very interested in your work on the scattering of high velocity electrons. I hope in a short time be able to send you the complete formula for all the velocities of the incident electron”.

El 8 de novembre, havent rebut finalment una resposta de Møller, Champion li va escriure donant-li alguns detalls de la disposició experimental que havia usat. La cambra contenia nitrogen, i les col·lisions es produïen entre les partícules β i els electrons “en la estructura extra-nuclear de l'àtom de nitrogen”. Champion analitzava en aquests moments les seves fotografies com a contrastació directa de la conservació del moment i l'energia en les col·lisions, i dels principis de la mecànica relativista, segons el primer punt del seu projecte:⁶¹ “I am preparing a paper for publication at the moment on some accurate measurements of the angles between the directions of motion of the two electrons after collision taking into account the relativity change of mass”. L'article resultant, “On some close collisions of fast β -particles with electrons, photographed by the expansion method”, estava completat a mitjans de febrer de 1932.⁶²

En la mecànica clàssica, si una partícula xoca elàsticament amb una altra de la mateixa massa inicialment en repòs, l'angle entre les direccions de moviment de les dues partícules després de la col·lisió és sempre 90° , independentment de l'angle de dispersió de la partícula incident. En la mecànica relativista aquest angle depèn de l'angle de dispersió i de la velocitat de la partícula incident, i disminueix a mida que aquesta velocitat s'apropa a la de la llum. Champion esmentava al seu article observacions anteriors de col·lisions de raigs β amb electrons que havien evidenciat qualitativament aquest fenomen, però assegurava que “up to the present no quantitative study has been made of the general relation between the whole angle after the collision, the angle of scattering, and the velocity of the incident particle”.⁶³ Champion havia determinat l'angle de dispersió mesurant l'angle projectat en les dues imatges simultànies que havia prè de cada esdeveniment, i la velocitat de les partícules a partir de la curvatura de les traces causada per un camp magnètic perpendicular al pla

⁶⁰Møller a Champion, 4 novembre 1931 (AHQP-59). A la mateixa carta Møller feia una observació que la cambra de Wilson feia innecessària: “Have you taken into account, that my formula gives only the scattering from the electrons and not from the nucleus of the atoms?”.

⁶¹Champion a Møller, 8 novembre 1931 (AHQP-59).

⁶²Champion (1932b).

⁶³*Ibid.*, p. 630. Entre les observacions anteriors Champion destacava les de Bothe i Wilson.

de la cambra. En la carta a Møller del 8 de novembre, havia inclòs dues fotografies d'una única col·lisió preses amb càmares perpendiculars. La col·lisió s'havia produït pràcticament en el pla d'una de les fotografies, de forma que “the apparent angle on this photograph is almost the true angle. You will observe that it is not nearly 90° ; in fact the measured angle is 73° agreeing exactly with the relativity expression for this velocity of the incident electron and the particular angle of incidence”.⁶⁴

Champion, com havia previst, va haver d'analitzar moltes fotografies, ja que la probabilitat de les col·lisions que investigava era molt petita. En la seva primera carta a Møller parlava només d'un “gran nombre” de fotografies, però sabem per un article posterior que eren unes 4.000.⁶⁵ Si el número de col·lisions estretes (“close collisions”) ja era escàs, els criteris que havia de satisfer una traça per obtenir-ne mesures fiables encara el reduïa més. Per mesurar amb precisió la curvatura de l'electró incident Champion estimava necessari disposar d'uns 9 cm lliures de desviacions nuclears. A més, per determinar acuradament els angles de col·lisió, les gotes de condensació que formaven les traces havien de distribuir-se el més uniformement possible. En les 30.000 traces investigades, Champion va detectar només 50 “close collisions”, 14 de les quals satisfien el millor possible les condicions anteriors. Champion basava la seva anàlisi sobre aquestes col·lisions.

En la mesura que l'escassetat de dades ho permetia, Champion deduïa un acord “excel·lent” entre els valors observats i els teòrics, que s'havien calculat suposant que no hi havia pèrdues d'energia per radiació. Aquesta era una qüestió problemàtica que encara no havia estat tractada teòricament, d'aquí que les conclusions de Champion fossin d'interès. En iniciar la seva anàlisi, Champion no havia trobat cap evidència de pèrdues per radiació en les col·lisions entre electrons. En el seu article expressava finalment de forma vaga la manca d'evidència experimental que aquestes pèrdues fossin importants:⁶⁶ “If any considerable amount of energy is lost as radiation during the encounters, it is estimated that it occurs in no more than a few per cent. of the total number of collisions”.

⁶⁴Champion a Møller, 8 novembre 1931 (AHQP-59).

⁶⁵Champion (1932c), p. 691: “The present results are from the analysis of 4.000 photographs, giving about 30.000 tracks of fast β -particles in nitrogen”. A l'article que estem considerant no indicava el nombre de fotografies analitzades, però el nombre de traces investigades era també d'unes 30.000.

⁶⁶Champion (1931), p. 637.

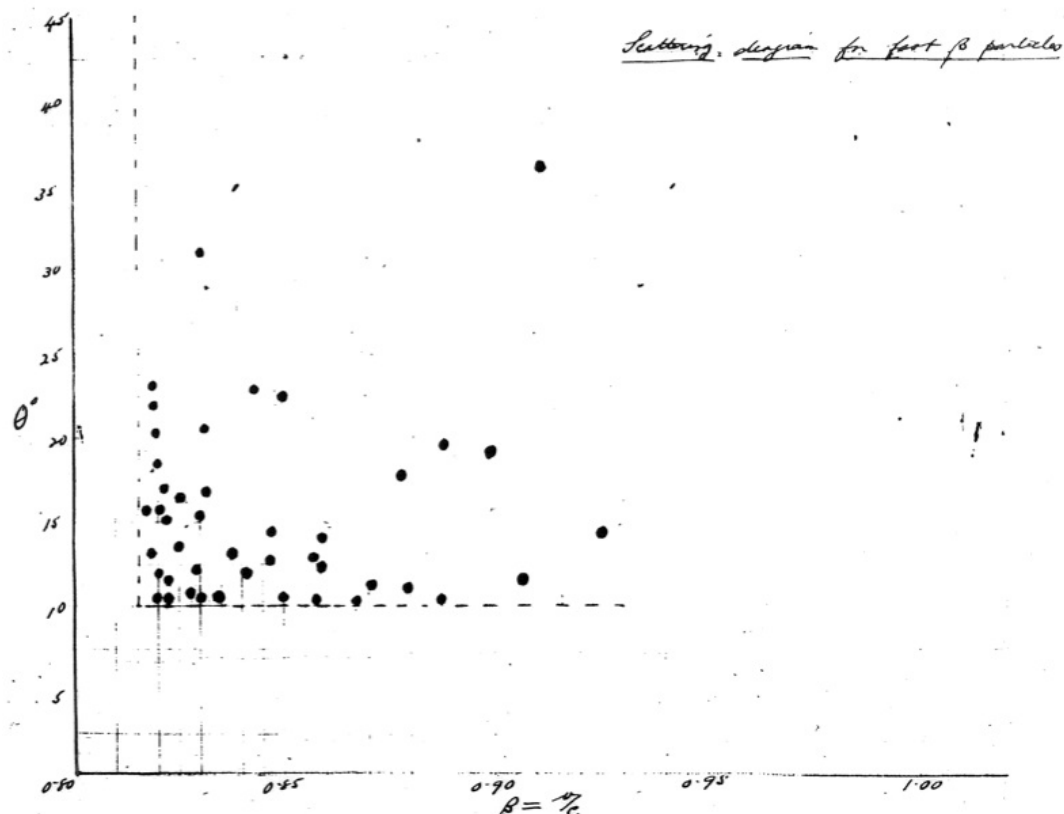


Figura 2. Els primers resultats obtinguts per Champion per l'angle de dispersió θ en funció de la velocitat de l'electró incident, segons el diagrama que envià a Møller el 10 d'octubre de 1931. El mateix diagrama ampliat a 250 punts esdevindria la primera figura de l'article de Champion (veure figura 3).

Champion analitzava allora les mateixes fotografies amb la intenció de contrastar la fórmula de Møller. En la seva primera carta a Møller incloïa ja algunes dades, 50 punts en un diagrama θ (angle de dispersió) - β (v/c), (figura 2). El mateix diagrama, ampliat a 250 punts, esdevingué la primera figura del següent article de Champion, "The scattering of fast β -particles by electrons", acabat el mes de juny de 1932, quan la fórmula de Møller no havia estat publicada encara (figura 3).⁶⁷ En la descripció del seu mètode experimental, Champion insistia que "the great advantage of the expansion method in investigating the present problem lies in the fact that it is the only method that separates the nuclear scattering clearly and definitely from the electron

⁶⁷Champion (1932c), rebut el 25 de juny de 1932. Champion només podia citar Møller (1931), però naturalment agràia a Møller la comunicació dels seus resultats.

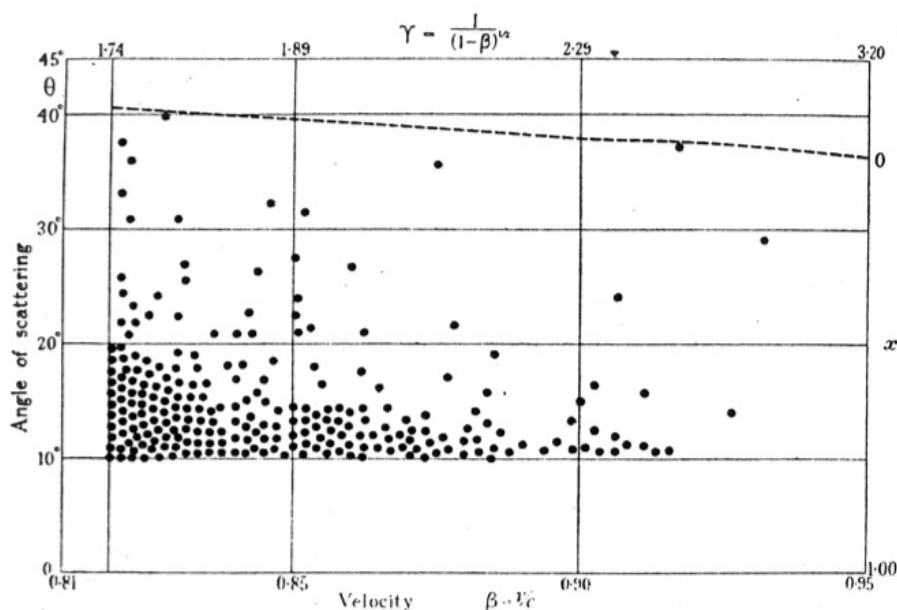


Figura 3. Resultats finals de Champion per l'angle de dispersió θ en funció de la velocitat de l'electró incident, segons van aparèixer al seu article (Champion 1932c, p. 692).

scattering".⁶⁸ Champion havia aplicat els mateixos criteris de precisió de l'article anterior, però aquest cop el nombre de resultats era més gran perquè només s'havia de mesurar l'angle de dispersió i l'energia corresponents a una de les branques.

En les traces aptes per a la mesura, que totalitzaven uns 650 m, Champion va observar 250 col·lisions amb angles de dispersió superiors a 10°, amb valors de $\beta = v/c$ per la partícula incident compresos entre 0'8 i 0'9. Els esdeveniments en què l'angle de dispersió era inferior a 10° no havien estat considerats, tant pel comparativament gran marge d'error que hauria estat introduït, com perquè eren més freqüents i s'hauria incrementat molt el nombre de mesures. Les mesures s'havien estès fins l'angle màxim de dispersió, aproximadament 40°, que a la figura 3 representa la línia discontinua. La figura dona l'angle de dispersió en funció de la velocitat de l'electró incident.

En la comparació dels valors experimentals amb les prediccions teòriques, Champion seguia els consells de Møller, que en comunicar-li la primera versió, incorrecta, de la fórmula de dispersió, li havia suggerit d'introduir $x = \cos \theta_{cm}$

⁶⁸*Ibid.*, p. 690.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
θ° .	Observed.	Møller.	C.	M (Mott).	M(1- β^2).	C(1- β^2).	C/T ² .
30-max.	10	13	57	28	7	15	9
20-30	26	30	148	105	26	37	21
10-20	214	230	761	650	162	190	108
Total	250	273	966	783	195	242	138

Taula 1. La comparació dels resultats de Champion amb les prediccions teòriques (Champion 1932c, p. 693).

i γ com a variables independents, en lloc de θ i v : “If you then plot your data in a (x, γ) diagram this formula should directly give the density of the dots”.⁶⁹ Champion escrivia al seu article la fórmula de Møller en la forma (veure fórmula (25) del capítol anterior)

$$d\sigma(\theta) = 4\pi \left(\frac{e^2}{m v^2} \right)^2 \frac{\gamma + 1}{\gamma^2} dx \cdot \left(\frac{4}{(1-x^2)^2} - \frac{3}{1-x^2} + \frac{(\gamma-1)^2}{4\gamma^2} \left(1 + \frac{4}{1-x^2} \right) \right), \quad (8)$$

on

$$x = \cos \theta_{cm} = \frac{2 - (\gamma + 3) \sin^2 \theta}{2 + (\gamma - 1) \sin^2 \theta}. \quad (9)$$

Aquesta expressió s'integrava gràficament en γ .

Champion va representar en una única taula la comparació dels seus resultats amb les prediccions teòriques (taula 1). Les columnes de la taula contenen: 1, les tres regions angulars considerades; 2, el nombre de punts observats a cada una d'elles; 3, 4 i 5, els valors predits per les teories de Møller, clàssica, i Mott respectivament; 6, els valors obtinguts segons la teoria de Mott substituint m per $m/(1-\beta^2)^{1/2}$; 7, els valors obtinguts segons la teoria clàssica fent la mateixa substitució; i 8, la predicció de la fórmula clàssica substituint en el denominador $(\frac{1}{2}mv^2)^2$ per T^2 , on T és l'energia cinètica de la partícula incident. Els resultats estaven en bon acord (“good agreement”) amb la fórmula de Møller, però Champion no deixava d'observar que per angles superiors a 20° les fórmules no relativistes corregides eren també satisfactòries.

⁶⁹Møller a Champion, 7 desembre 1931 (AHQP-59).

Els experiments de Champion van ser concebuts quan la fórmula de Møller encara no existia. Com hem vist, Champion tenia la intenció d'estudiar experimentalment la interacció entre dos electrons, però dins d'un context general d'anàlisi de la radiació β . L'interès de Champion per la teoria és molt limitat. El sumari final de l'article que acabem d'examinar mostra que Champion no havia assimilat la innovació teòrica fonamental de la fórmula de Møller, que descrivia simplement com basada en la mecànica quàntica: "The absolute number scattered and the distribution with angle were in good agreement with a formula of Møller, based on quantum mechanics".⁷⁰ Els seus experiments només podien haver afectat indirectament i de forma totalment inconscient l'electrodinàmica quàntica. Però no només Champion desconeixia part de les implicacions del seu treball. Quan el 1934 J. Cockcroft i P. Blackett van informar sobre el treball de Champion, que aspirava al càrrec de "Lecturer" al King's College de Londres, cap dels dos no esmentava la comprovació de la fórmula de Møller entre els seus mèrits. Cockcroft deia de les qüestions tractades per Champion: "The problem attacked is one of considerable importance, being a study of the close collisions of atomic particles; a study which allows a direct test of some of the fundamental results of the theory of relativity and of the wave theory of matter".⁷¹ Blackett deia simplement dels resultats de Champion que eren "de considerable interès i importància", però es comprén que criticués la seva manca d'originalitat.⁷²

Champion es doctorà l'estiu de 1932, i deixà el Cavendish per incorporar-se com a "assistant Lecturer" al University College de Nottingham. A més de continuar l'anàlisi de les seves fotografies, que no completaria fins el 1935,⁷³ Champion hi va preparar una monografia d'unes 100 pàgines sobre la cambra de boira ("The expansion cloud method and its application to atomic physics"), i va treballar en col·laboració amb el Departament de Zoologia en l'aplicació de l'espectroscopia a problemes relacionats amb la diferenciació sexual en peixos. El 1934 esdevingué "Lecturer" al King's College de Londres, institució on desenvoluparia la resta d'una carrera menys brillant del que prometien els seus inicis.⁷⁴

⁷⁰Champion (1932b), p. 695 (el subratllat és meu).

⁷¹"Report by Dr Cockcroft on the dissertation of F. C. Champion" (CTF).

⁷²"Report by Professor P. M.S. Blackett on the dissertation of F. C. Champion" (CTF).

⁷³Champion (1936), "The scattering of fast β particles by electrons", rebut el juliol de 1935.

⁷⁴El 1948 Champion va ser anomenat "Reader", i el 1959 va obtenir la càtedra de física experimental. Després del seu interès inicial per la física atòmica i nuclear, la carrera de

4. 3. Experiments posteriors

Després dels experiments de Champion, no es donaria un altre intent de contrastar la fórmula de Møller fins el 1941 —si més no, un intent els resultats del qual fossin publicats—. ⁷⁵ L'intent es produí a la Universitat de North Carolina, als Estats Units, en circumstàncies molt diferents del de Champion. Una beca de la American Philosophical Society va permetre Arthur E. Ruark, professor d'aquesta universitat des del 1934, de dirigir dues anàlisis consecutives de col·lisions entre electrons relativistes, amb la intenció explícita de comparar els resultats amb la fórmula de Møller.

L'abril de 1941 George Hornbeck i Irl Howel van publicar els resultats de la primera d'aquestes anàlisis: "Production of secondary electrons by electrons of energy between 0'7 and 2'6 MeV". ⁷⁶ Hornbeck i Howell destacaven la necessitat d'obtenir dades experimentals de la secció eficaç per la dispersió d'electrons d'alta energia, molt més escasses que les relatives al frenat o la ionització. Però els seus experiments estaven motivats per les discrepàncies en les dades experimentals existents. Les úniques que citaven eren les que hem comentat a les seccions anteriors: les de Bothe, Wilson, Henderson, Williams i Terroux, Williams i Champion. De la reconsideració de les dades de Williams i Terroux, Hornbeck i Howell deduïen una secció eficaç $2'1 \pm 0'25$ vegades el valor predit per Møller, "in sharp contradiction with the results of Champion, and with our own", el que els portava a concloure: "More extensive cloud chamber observations are needed, both to clear up the discrepancy and to extend the results to higher primary energy". ⁷⁷

Les mesures de Hornbeck i Howell es basaven en les fotografies que havia prè un altre professor de la mateixa universitat, Creighton C. Jones, i s'havien realitzat mitjançant un visor estereoscòpic desenvolupat recentment pel mateix

Champion s'orientà cap a l'estat sòlid. Champion va escriure llibres de text relativament coneguts durant els anys quaranta i cinquanta: *Properties of Matter*, amb N. Davy, i *University Physics*. Champion va viure a Espanya des que es va retirar, el 1970, fins a la seva mort a Màlaga el 1976 (cfr. "Obituary. Professor Champion. Noted physicist" *The Times*, 5 març 1976, p. 17).

⁷⁵Segons una nota del treball de Hornbeck i Howell que considerem a continuació, E. J. Williams els havia informat per carta que "unpublished work performed by himself and Mr Cameron in 1933, using Ra E beta particles, resulted in R -values of about 1'2; further details are not now available" (Hornbeck i Howell 1941, p. 51). R és el quocient entre els valors observat i teòric de la secció eficaç.

⁷⁶Hornbeck i Howell (1941).

⁷⁷*Ibid.*, pp. 38 i 39.

$T_0(\text{KeV}) :$	20	30	40
$R :$	$1'18 \pm 0'14$	$1'09 \pm 0'16$	$0'84 \pm 0'15$

Taula 2. Resultats de Hornbeck i Howell (1941). T_0 , límit inferior d'energia dels electrons secundaris; R , quocient entre els valors observats i els valors predits per la fórmula de Møller (promitjats sobre l'energia primària).

Jones i Ruark.⁷⁸ Els electrons primaris eren electrons produïts a les parets d'una cambra de nitrogen pels raigs γ d'una font de mesotori. L'energia dels electrons primaris venia donada per la curvatura de la seva traça; la dels electrons secundaris, pel seu rang. Per la comparació amb la teoria, Hornbeck i Howell havien calculat la secció eficaç de producció d'un electró secundari d'energia cinètica T , superior a cert valor T_0 , però inferior a $T_p/2$, on T_p és l'energia cinètica primària. Per això havien integrat la fórmula de Møller entre T_0 i T_p , i l'havien promitjada sobre l'energia primària. El seus resultats, que resumeix la taula 2, complementaven els obtinguts per Champion en l'àmbit d'energies primàries de 0'4 a 0'9 MeV. “Both investigations”, conclouien, “support each other in demonstrating the essential correctness of Møller’s theory of secondary energy distribution in the domain of primary energy from 0'4 to 2'6 MeV”⁷⁹

El febrer de 1942 va aparèixer, als *Proceedings* de la institució patrocinadora, l'American Philosophical Society, un treball de Paul E. Shearin i T. Eugene Pardue que complementava el de Hornbeck i Howell: “Prior to recent work by Hornbeck and Howell in this laboratory, the experimental findings were in a contradictory state and covered only a restricted range of primary energies. . . The present investigation is a continuation of their work, with the objectives of decreasing the statistical errors and increasing the accuracy of all the measurements involved”.⁸⁰ Shearin i Pardue havien millorat l'acord entre les observacions experimentals i la fórmula de Møller modificant els criteris de selecció de traces i mesurant més acuradament els rangs. Com mostraven els seus resultats (taula 3), expressats com els de Hornbeck i Howell, “the Møller

⁷⁸Jones i Ruark, *Proc. Am. Phil. Soc.* **82** (1940), 253.

⁷⁹*Ibid.*, p. 51.

⁸⁰Shearin i Pardue (1942): “Electron-electron collisions in the primary energy range from 1'3 to 2'6 million electron volts”, p. 243.

$T_0(KeV) :$	20	30	40
$R :$	$1'07 \pm 0'09$	$0'99 \pm 0'11$	$1'04 \pm 0'12$

Taula 3. Resultats de Shearin i Pardue (1942). Interpretar com taula 2.

formula is essentially correct for the primary and secondary energy ranges considered here”.⁸¹

El que diferencia més clarament aquests intents del de Champion és el seu origen en una intenció explícita de contrastar la fórmula de Møller. Es tracta d'un treball d'equip dirigit a la comprovació de la fórmula i a la seva comparació amb les altres fórmules proposades. A finals dels anys quaranta, es qüestionaria el caràcter decisiu d'aquests experiments. Però més que la seva correcció experimental o la significació de les seves conclusions, ens interessa observar com hi era valorada la fórmula. Hornbeck i Howell caracteritzaven sense precisió les aportacions de Bethe, Breit i Wolfe, per afegir després simplement que “[Møller’s] final formulas giving the cross-section for production of a branch with energy in the range T to $T + dT$, are presumably the most accurate ones available”.⁸² Shearin i Pardue parlaven d'una “teoria relativista de la secció eficaç electró-electró”: “This theory, due to Møller, includes the effects of exchange and retardation of potentials, to terms in $(v_p/c)^2$ inclusive, v_p being the velocity of the incident electron”.⁸³ Al final de l'article eren més explícits: “We wish to emphasize the importance of thorough tests of this formula, the only one in which the interaction of two similar fundamental particles has been calculated with perfect symmetry, in accordance with the spirit of Breit’s considerations [Breit (1929)]”. En cap cas s'esmentaven explícitament elements més fonamentals del treball de Møller, com el recurs a l'equació de l'electró de Dirac, per no dir la relació de la fórmula amb l'electrodinàmica quàntica.

És molt possible que no hi hagués més contrastacions de la fórmula fins el 1950, quan un equip del Institute for Nuclear Studies de la Universitat de Chicago va publicar una anàlisi de 98 col·lisions electró-electró. Les col·lisions havien estat observades accidentalment: “As a by-product of several cloud-

⁸¹*Ibid.*, p. 243.

⁸²Hornbeck i Howell (1941), p. 40.

⁸³Shearin i Pardue (1942), p. 243.

chamber investigations carried out in this laboratory, a considerable number of photographs of fast electron-electron scattering events have been obtained".⁸⁴ L'estudi s'havia realitzat, segons els seus autors, perquè l'evidència experimental d'aquest tipus de col·lisions no era molt abundant. A l'article es comparaven la teoria de Møller, versions relativistes de les teories de Mott i Rutherford, i la teoria clàssica de Rutherford, amb resultats poc conclusius: "Our data discriminate definitely only against the latter theory. When combined with 122 electron-electron collisions observed by Champion, they are consistent only with the first two theories, but are insufficient to discriminate decisively between them". De la fórmula de Møller només es deia que era la teoria de la dispersió electró-electró "now generally accepted".⁸⁵

A partir d'aquest moment es constata fàcilment, especialment als Estats Units, un increment de l'interès per la dispersió electró-electró. El 1951 un grup de la Universitat d'Illinois l'analitza utilitzant un feix monocinètic d'electrons de 15'7 MeV, procedents d'un bevatró de 22 MeV.⁸⁶ A finals del mateix any, un equip del Radiation Laboratory de Berkeley considera aquesta interacció a altes energies, mitjançant electrons de 200 MeV procedents del sincrotó de Berkeley.⁸⁷ Al Microwave Laboratory de la Universitat de Stanford, un altre grup de físics experimentals estudia la dispersió d'electrons de 6'1 MeV procedents d'un accelerador lineal.⁸⁸ Aquesta sèrie d'experiments culmina l'abril de 1954 amb la publicació de l'article considerat més decisiu, on es comprova la validesa de la fórmula de Møller en l'interval d'energies de 0'6 a 1'2 MeV.⁸⁹ La llista, que no vol ser exhaustiva, mostra suficientment el que hem indicat. En cap dels articles citats no es relaciona directament la fórmula de Møller amb l'electrodinàmica quàntica. En tots ells la fórmula és considerada com la més satisfactòria teòricament, però no s'indiquen les raons. La caracterització més precisa que es fa de la fórmula és que es basa en la teoria de Dirac.

Els experiments decisius s'havien desenvolupat en un dels nous laboratoris creats després de la guerra, el Laboratory of Nuclear Studies de la Uni-

⁸⁴Groetzinger, Leder, Ribe i Berger (1950), p. 454.

⁸⁵*Ibid.*, pp. 454 i 455.

⁸⁶Scott, Hanson i Lyman (1951).

⁸⁷Barkas, Deutsch, Gilbert i Violet, "High energy electron-electron scattering", *Phys. Rev.* **86** (1952), 59–63 [reb. 10 desembre 1951].

⁸⁸Barber, Becker i Chu, "Electron-electron scattering at 6'1 MeV", *Phys. Rev.* **89** (1953), 950–957.

⁸⁹Ashkin, Page i Woodward (1954).

versitat de Cornell, i en realitat no representen la culminació sinó l'inici de l'interès renovat per la dispersió Møller. El setembre de 1950 un dels autors de l'article, Lorne Albert Page, va defensar la seva tesi doctoral: *A measurement of electron-electron scattering*.⁹⁰ Els seus resultats no diferien essencialment dels que van ser publicats quatre anys després.

Page, nascut el 1921, havia iniciat el seu doctorat a finals de 1945.⁹¹ M. Woodward, director de la tesi, devia proposar-li poc després el problema. És interessant constatar d'aquesta manera que la relació entre els dos períodes que hem estat considerant és més estreta del que l'esment de l'any 1954 com a data de la comprovació definitiva suggereix. Tampoc Page qualificava molt precisament la fórmula:⁹²

Møller, *using the Dirac theory of the electron*, has given a formula for the differential cross section for perfectly elastic electron-electron scattering. Careful measurements of the differential cross-section in the relativistic energy region as a function of incident energy should provide verification or denial of the Møller formula, and by implication *the present theory of the electron*. As the experiment to be described uses negative beta-rays scattered by atomic electrons, evidence is provided on the question whether negative beta-particles are identical with atomic electrons.

Els experiments de Page es centraven en l'observació de les col·lisions en què la transferència fraccional d'energia era gran, aquelles en les quals els efectes d'espí eren més pronunciats, i la fórmula de Møller es distingia més clarament de les altres fórmules de dispersió. Les mesures s'havien realitzat en l'àmbit d'energies de 0'6 a 1'7 MeV, usant electrons β procedents d'una font radioactiva. La detecció s'havia efectuat mitjançant un dispositiu de coincidència basat en comptadors Geiger, una innovació decisiva respecte els experiments anteriors i els que simultàniament s'estaven desenvolupant, basats majoritàriament en la cambra de boira.

Els experiments de Page no només confirmaven experimentalment la fórmula de Møller; Page afirmava complagut a les seves conclusions que "there is

⁹⁰Page [1950], tesi doctoral no publicada.

⁹¹El setembre de 1940 Page havia ingressat a la Queen's University, Kingston, Ontario, on va obtenir el grau de "Bachelor in Science" en física el maig de 1944. El novembre de 1945, després d'haver servit a l'exèrcit, va iniciar els seus estudis de doctorat a la Universitat de Cornell, on romandria fins el 1950 (cfr. Page [1950], "Biographical sketch").

⁹²Page [1950], p. 1 (el subratllat és meu).

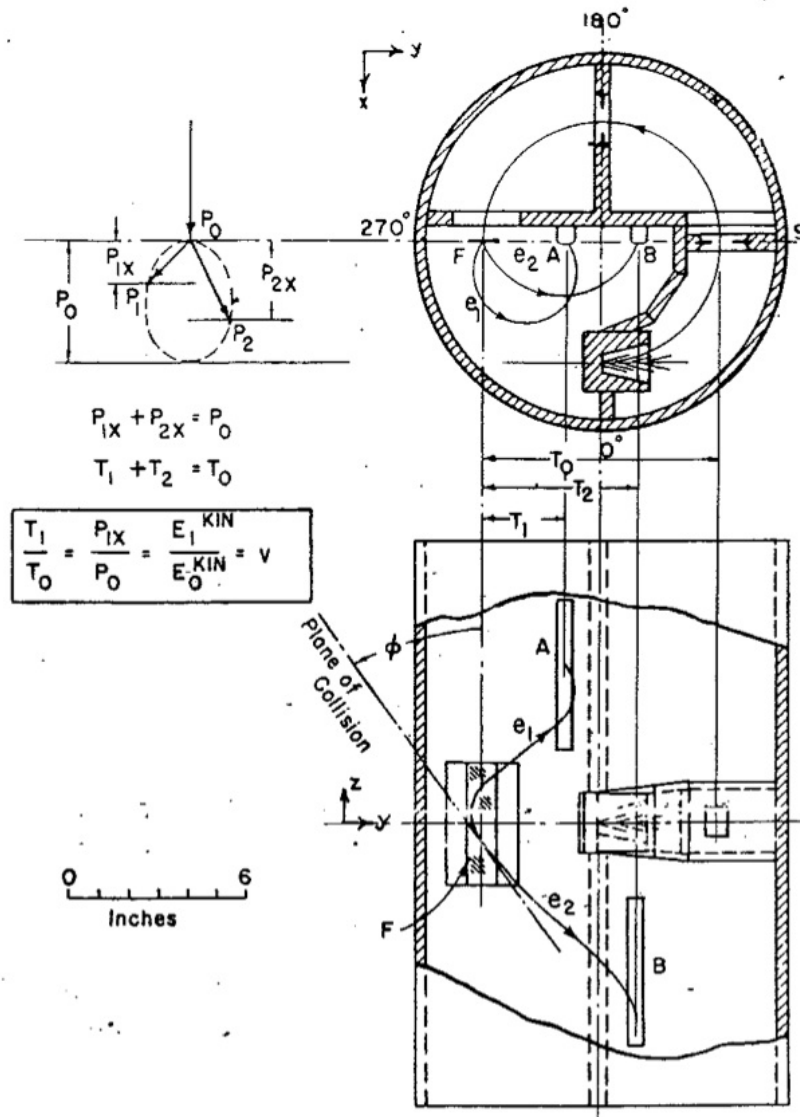


Figura 4. La cambra de dispersió a 270° usada per L. A. Page en les seves mesures de la dispersió electró-electró, segons la figura 1 de la seva tesi doctoral [Page 1950]. S'hi representa una trajectòria típica per a una partícula β des de la font a 0° , fins a la làmina dispersora a 270° (camp magnètic segons l'eix z). Dos electrons, e_1 i e_2 , emergeixen de la làmina i són detectats pels comptadors Geiger A i B, connectats en coincidència. El diagrama superior esquerra representa els moments en el pla de col·lisió, per a una energia cinètica incident d'1 MeV i una transferència fraccional d'energia $v = 0'35$. La mateixa figura seria reproduïda 4 anys després en l'article conjunt amb Ashkin i Woodward (Ashkin, Page i Woodward 1954, p. 358).

however some further satisfaction in noting that the formula is rather ‘necessary’, in that all the the essential features of the formula must be included for a reasonable agreement with experiment—thus it is not merely some degenerate form which applies for the range of E [incident energy] and v [fractional energy transfer] investigated here”.⁹³ Page era tanmateix molt conscient dels desenvolupaments teòrics més recents, que esmentava “for completeness”, en els que es tenia en compte l’emissió de radiació.⁹⁴ Però descartava alhora que una teoria més avançada pogués modificar les prediccions de Møller referents als experiments que havia realitzat.

Esmentem finalment que Page havia tingut un interlocutor d’excepció: Richard P. Feynman, a qui agraiïa “helpful discussions of the process being studied” (p. 58). Aquest reconeixement indica novament que l’interès renovat per la dispersió Møller es dona ja abans de 1950, i que es produeix alhora en els seus aspectes teòric i experimental.

⁹³*Ibid.*, p. 20.

⁹⁴Page esmentava dos articles recents de Schwinger (“On radiative corrections to electron scattering”, *Phys. Rev.* **75** (21 gener 1949), 898–899) i Katzenstein (“The radiative collisions of positrons and electrons”, *Phys. Rev.* **78** (15 abril 1950), 161–169), i una tesi doctoral desenvolupada al seu mateix departament, Lomanitz, “Second order effects in the electron-electron interaction”, Cornell University 1950 (Page [1950], p. 25).

Conclusions

La sèrie de conclusions següent conté els resultats més importants de l'anàlisi que hem desenvolupat. Les conclusions es refereixen directament a les qüestions que havíem plantejat: com deduí Møller la fórmula de dispersió (1); amb quina intenció i en quin context (2); i quina és la relació de la fórmula amb l'electrodinàmica quàntica, tant des del punt de vista teòric (3 i 4) com experimental (5 i 6).

1. Møller va desenvolupar un mètode propi per tractar el problema de la interacció entre dues partícules que, basat críticament en la noció de correspondència de Klein, evitava els greus problemes que afectaven en aquells moments l'electrodinàmica quàntica.

Des de l'inici de la seva carrera, les preferències de Møller a l'hora d'escollir un tema de recerca s'orientaren cap a l'extensió i l'aplicació de teories existents, especialment la mecànica quàntica i la relativitat, abans que cap als problemes de fonamentació d'aquestes teories. L'anàlisi dels seus primers treballs científics revela clarament aquesta tendència, així com el domini que Møller assolí aviat de desenvolupaments teòrics molt recents, com l'equació de l'electró de Dirac.

A finals de 1930, Landau conduí Møller al problema de la interacció entre dues partícules, un problema que Bethe havia tractat recentment. Møller desenvolupà un mètode propi per generalitzar relativísticament el tractament del problema sense recórrer a l'electrodinàmica quàntica. L'opció de Møller, que ni tan sols esmentava aquesta teoria als seus articles, és perfectament comprensible donada la seva situació: Møller s'havia format a Copenhaguen, cuna del principi de correspondència, on havia tingut per mestres a Bohr, el creador del principi, i Klein, que el 1927 havia reconsiderat la seva aplicació en la nova mecànica quàntica. El principi havia jugat un paper essencial en el desenvolupament de la mecànica quàntica, i el mateix Klein l'havia aplicat anteriorment amb èxit a la dispersió fotó-electró. Això reforçava el plantejament

de Møller, que no sembla en qualsevol cas haver considerat seriosament el seu mètode com una alternativa als intents que s'estaven realitzant de quantitzar el camp electromagnètic. Les altres bases del mètode de Møller eren igualment sòlides: el mètode de pertorbacions de Born, que cap el 1931 havia ja mostrat àmpliament la seva eficàcia, i l'equació de l'electró de Dirac, que malgrat els problemes d'interpretació física, s'havia consolidat com una teoria necessària per comprendre l'espí.

2. L'aplicació del mètode a l'anàlisi de la radiació còsmica fou per Møller un estímul decisiu en el moment d'iniciar l'estudi que formaria la seva tesi, però finalment Møller la dedicà exclusivament a la radiació β .

Un cop desenvolupat el mètode, Møller va aplicar-lo a la consideració d'un problema clàssic que tenia en aquells moments una nova significació: el del frenat de partícules carregades en el seu pas a través de la matèria. Aquest problema no només havia interessat Bohr des de l'inici de la seva carrera, sinó que podia ser aplicat a l'anàlisi de la radiació còsmica, una de les àrees de recerca més actives de la dècada de 1930. L'aplicabilitat dels seus resultats a la radiació còsmica va ser certament per a Møller, en el moment d'iniciar la seva tesi, un estímul important. Però al llarg de l'elaboració del treball, notablement degut al contacte amb Heisenberg, aquest aspecte va perdre gradualment la seva importància, i Møller aplicà finalment les seves consideracions de forma exclusiva a la radiació β , d'energies relativistes però molt menors que les dels raigs còsmics. Aquest canvi d'actitud no va ser provocat només per les consideracions negatives de Heisenberg. Møller va rebre amb sorpresa la notícia que al laboratori Cavendish s'intentava de contrastar la seva fórmula mitjançant l'anàlisi de la dispersió de raigs β . Les comunicacions positives de l'autor dels experiments, F. C. Champion, van influir també en la reorientació final de les investigacions de Møller, que pot situar-se a mitjans de desembre de 1931.

3. La fórmula de dispersió de Møller va ser deduïda al marge de l'electrodinàmica quàntica, contràriament al que la seva posició actual en la teoria suggereix.

De fet, l'electrodinàmica quàntica de 1930 oferia poques possibilitats que el càlcul que Møller realitzà pogués portar-se a terme. A finals de 1928, Pauli introduí G. Breit en el problema de la interacció entre dos electrons. Breit

l'analitzà en base a un argument de correspondència, però empès per Pauli, va relacionar després el seu hamiltonià d'interacció amb la teoria dels camps d'ona i va intentar de resoldre el problema sense recórrer a un tractament aproximat. A mitjans de 1929 el mateix Breit reconeixia que la teoria no donava cap esperança que el problema de la interacció entre dos electrons fos soluble exactament.

4. La fórmula només assolí plenament el caràcter d'aplicació de l'electrodinàmica quàntica després de la renormalització, a pesar que la seva relació directa amb la teoria va ser posada de manifest molt aviat.

A principis de 1932, superats els errors que s'havien presentat en el càlcul, Møller disposava de la fórmula que descriu correctament en primera aproximació la col·lisió entre dos electrons lliures. Poc després que Møller concluís la redacció de l'article on l'exposava, Bethe i Fermi van mostrar l'equivalència del mètode de Møller amb l'electrodinàmica quàntica de Fermi. Tanmateix, la fórmula va ser relativament ignorada fins després de la renormalització, com mostra el tractament que va rebre en els escassos textos dedicats a l'electrodinàmica quàntica i les teories de camps abans de 1947. El caràcter d'aplicació de la teoria l'adquireix la fórmula plenament només després de la renormalització. Una de les causes més importants d'aquesta revaloració és la rellevància de la interacció electró-electró en l'electrodinàmica quàntica de Feynman.

5. La dispersió Møller és ignorada des del punt de vista experimental durant la dècada de 1930. Els experiments de Champion no només van ser concebuts quan la fórmula encara no existia, sinó que no es produïria un intent similar fins el 1941.

Champion va iniciar a finals de 1929 un ampli estudi de la radiació β mitjançant la cambra de boira. Quan el maig de 1931 va redactar el seu projecte d'investigació pels mesos següents, els defectes de les teories existents de la interacció entre dos electrons eren exagerats per justificar un interès genuí, aliè a tota consideració teòrica, pel problema. En el moment d'aparèixer l'article de Møller, Champion disposava ja de la majoria de les fotografies que utilitzà per contrastar la fórmula, que en aquells moments analitzava amb altres intencions. La contrastació de la fórmula de Møller no era esmentada com a mèrit de Champion en els informes que el 1934 Cookcroft i Blackett elaboraren sobre el seu treball.

6. *La fórmula només va adquirir el seu caràcter actual de contrastació de l'electrodinàmica quàntica després de la renormalització.*

L'interès per la dispersió electró-electró després de la guerra no es limita a l'aspecte teòric. Al voltant de 1950 són nombrosos els intents de contrastar la fórmula, especialment als Estats Units. Considerat conjuntament amb la indiferència experimental cap a la fórmula durant el període crític de la teoria, aquest interès indica que només amb posterioritat a la seva reformulació el 1947, va adquirir la fórmula el seu caràcter actual de *contrastació* de la teoria. La relació entre els dos períodes que delimita la introducció del procediment de renormalització, és més estreta del que suggereix l'esment de 1954 com a data de la contrastació "definitiva" de la fórmula: L. A. Page havia finalitzat el 1950 la seva tesi doctoral, que contenia essencialment els mateixos resultats que serien publicats quatre anys després en l'article conjunt amb Ashkin i Woodward.

Bibliografia

AASERUD, FINN

[1990] *Redirecting Science. Niels Bohr, philanthropy, and the rise of nuclear physics*, Cambridge University Press 1990.

ASHKIN, ARTHUR, PAGE, LORNE ALBERT I WOODWARD, W. M.

(1954) “Electron-electron and positron-electron scattering measurements”, *Phys. Rev.* **94** (abril 1954), 357-362 [sig. Cornell; reb. 27 nov 1953].

ASHKIN, ARTHUR I WOODWARD, W. M.

(1952) “Positron-electron scattering”, *Phys. Rev.* **87** (1952), p. 236 [sig. Cornell].

BERNSTEIN, JEREMY

[1979] *Hans Bethe, prophet of energy*, New York: Basic Books 1980.

BETHE, HANS

(1930) “Zur Theorie des Durchgangs schneller Korpuskularstrahlen durch Materie”, *Ann. Physik (5)* **5** (1930), 325-400 [sig. Munic; reb. 3 abril 1930].

(1932) “Bremsformel für Elektronen relativistischer Geschwindigkeit”, *Zs. Phys.* **76** (1932), 293-299 [sig. Roma; reb. 4 maig 1932].

BETHE, HANS I FERMI, ENRICO

(1932) “Über die Wechselwirkung von zwei Elektronen”, *Zs. Phys.* **77** (1932), 296-306 [sig. Roma; reb. 9 juny 1932].

BLACKETT, PATRICK M. S.

(1929) “On the design and use of a double camera for photographing artificial disintegrations”, *Proc. Roy. Soc. A* **123** (abril 1929), 613-629 [reb. 21 febrer 1929].

BOHR, NIELS

(1913) “On the theory of the decrease of velocity of moving electrified particles on passing through matter”, *Phil. Mag.* **25** (1913), 10-31. Reimprès a: *Niels Bohr. Collected Works*, vol. 2, pp. [17]-[39].

(1915) “On the decrease of velocity of swiftly moving electrified particles in passing through matter”, *Phil. Mag.* **30** (1915), 581-612. Reimprès a: *Niels Bohr. Collected Works*, vol. 2, pp. [57]-[90].

(1948) “The penetration of atomic particles through matter”, *Kgl. danske Vid. Selsk., mat.-fys. Medd.* **18** (1948), (114 pàgs.).

BOTHE, WALTER

(1922) “Untersuchungen an β -Strahlenbahnen”, *Zs. Phys.* **12** (1922), 117-127 [reb. 23 octubre 1922].

BREIT, GREGORY

(1929) “The effect of retardation on the interaction of two electrons”, *Phys. Rev.* **34** (15 agost 1929), 553-573 [sig. Washington; reb. 31 maig 1929].

(1930) “The fine structure of He as a test of the spin interactions of two electrons”, *Phys. Rev.* **36** (1 agost 1930), 383-397 [sig. Nova York; reb. 16 juny 1930].

BREIT, GREGORY

(1932) “Quantum theory of dispersion. Parts I–V”, *Rev. Mod. Phys.* **4** (July 1932), 504–576.

(1933) “Quantum theory of dispersion. Parts VI and VII”, *Rev. Mod. Phys.* **5** (April 1933), 91–140.

BROWN, LAURIE I HODDESON, LILLIAN

[1983] *The Birth of Particle Physics* (eds.), III International Symposium on the History of Particle Physics (Fermilab 1980). Cambridge University Press 1983.

CASSIDY, DAVID C.

(1981) “Cosmic-ray Showers, High Energy Physics, and Quantum Field Theories: Programmatic Interactions in the 1930s”, *H.S.P.S.* **12** (1981), 1–39.

CHADWICK, JAMES I MERCIER, P. H.

(1925) “The scattering of β -rays”, *Phil. Mag.* **50** (juliol 1925), 208–224.

CHAMPION, F. CLIVE

(1932a) “The distribution of energy in the β -ray spectrum of radium E”, *Proc. Roy. Soc. A* **134** (gener 1932), 672–681 [reb. 15 octubre 1931].

(1932b) “On some close collisions of fast β -particles with electrons, photographed by the expansion method”, *Proc. Roy. Soc. A* **136** (1932), 630–637 [sig. Cambridge; reb. 23 febrer 1932].

(1932c) “The scattering of fast β -particles by electrons”, *Proc. Roy. Soc. A* **137** (1932), 688–695 [sig. Cambridge; reb. 25 juny 1932].

(1936) “The scattering of fast β -particles by nitrogen nucleus”, *Proc. Roy. Soc. A* **153** (gener 1936), 353–358 [reb. 23 juliol 1935].

CHAMPION, F. CLIVE I BLACKETT, PATRICK M. S.

(1931) “The scattering of slow α -particles by helium”, *Proc. Roy. Soc. A* **130** (gener 1931), 380–388 [reb. 3 novembre 1930].

DARRIGOL, OLIVIER

[1982] *Les débuts de la théorie quantique des champs, 1925-1948*, tesi doctoral, Université de Paris 1982.

(1984) “La genèse du concept de champ quantique”, *Ann. Physique* **9** (1984), 433–501.

(1986) “The origin of quantized matter waves”, *H.S.P.S.* **16** (1986), 197–253.

DIRAC, PAUL ADRIEN MAURICE

(1928a) “The quantum theory of the electron”, *Proc. Roy. Soc. A* **117** (1928), 610–624.

(1928b) “The quantum theory of the electron, part II”, *Proc. Roy. Soc. A* **118** (1928), 351–361.

FEYNMAN, RICHARD P.

(1949) “Space-Time approach to quantum electrodynamics”, *Phys. Rev.* **76** (1949), 769–788 [reb. 9 maig 1949].

GALISON, PETER

(1983) “The discovery of the muon and the failes revolution against quantum electrodynamics”, *Centaurus* **26** (1983), 262–316.

[1987] *How experiments end*, The University of Chicago Press 1987.

GAUNT, J. A.

(1929a) “The triplets of helium”, *Proc. Roy. Soc. A* **122** (1929), 513–532 [sig. Cambridge; reb. 6 novembre 1928].

(1929b) “The triplets of helium”, *Phil. Trans. Roy. Soc.* **228** (1929), 151–196 [sig. Cambridge; reb. 6 novembre 1928].

GOENNER, HUBERT

(1980) “Christian Møller, 1904-1980”, *Phys. Bl.* **36** (1980), p. 341.

GROETZINGER, G., LEDER, L. B., RIBE, F. L., I BERGER, M. J.

(1950) “Study of electron-electron scattering”, *Phys. Rev.* **79** (1950), 454.

HEILBRON, JOHN L.

(1967) “The scattering of α and β particles and Rutherford’s atom”, *A.H.E.S.* **4** (1967/1968), 247-307.

HEISENBERG, WERNER

(1932) “Theoretische Überlegungen zur Höhenstrahlung”, *Ann. Physik* **13** (1932), 430–452 [reb. 13 febrer 1932].

HEISENBERG, WERNER I PAULI, WOLFGANG

(1929) “Zur Quantendynamik der Wellenfelder”, *Zs. Phys.* **56** (1929), 1–61 [reb. 19 març 1929].

(1930) “Zur Quantentheorie der Wellenfelder II”, *Zs. Phys.* **59** (1930), 168–190 [reb. 7 setembre 1929].

HEITLER, WALTHER

[1936] *The quantum theory of radiation*, Oxford University Press 1936, ²1944, ³1954.

HENDERSON, M. C.

(1929) “The scattering of beta-particles by light gases and the magnetic moment of the electron”, *Phil. Mag.* **8** (1929), 847–857 [sig. Cambridge].

HENDRY, JOHN

[1984] *Cambridge physics in the thirties* (ed.), Bristol: Adam Hilger 1984.

HERMANN, ARMIN, V. MEYENN, KARL I WEISSKOPF, VICTOR F.

[1979] *Wolfgang Pauli. Wissenschaftlicher Briefwechsel. Vol. I* (eds.), Springer 1979.

HORNBECK, GEORGE I HOWELL, IRL

(1941) “Production of secondary electrons by electrons of energy between 0.7 and 2.6 MeV”, *Proc. Amer. Phil. Soc.* **84** (abril 1941), 33–51 [sig. University of North Carolina].

ITZYKSON, C. I ZUBER, J.

[1985] *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill 1985.

JAUCH, J. M. I ROHRLICH, FRITZ

[1955] *The Theory of Photons and Electrons*, Addison-Wesley 1955.

KÄLLÉN, A. O. GUNNAR

[1958] “Quantenelektrodynamik”, a S. Flügge (ed.) *Encyclopedia of Physics / Handbuch der Physik*, Springer 1958.

KRAGH, HELGE

(1981) “The genesis of Dirac’s relativistic theory of electrons”, *A.H.E.S.* **24** (1981), 31–67.

[1990] *Dirac: A scientific biography*, Cambridge: Cambridge University Press 1990.

KRAMERS, HEINRIK A.

- [1938] “Quantentheorie des Elektrons und der Strahlung”, a *Hand- und Jahrbuch der chemischen Physik*, Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft 1938.

KUHN, THOMAS S., HEILBRON, JOHN L., FORMAN, PAUL I ALLEN, LINI

- [1967] *Sources for History of Quantum Physics. An inventory and report*, Philadelphia: The American Philosophical Society 1967.

V. MEYENN, KARL

- [1985] *Wolfgang Pauli. Wissenschaftlicher Briefwechsel. Vol. II* (ed.), Springer 1985.
 [1989] “Physics in the making in Pauli’s Zürich”, a *Physics in the making*, A. Sarlemijn i M. J. Sparnaay (eds.), North-Holland 1989.

V. MEYENN, KARL, STOLZENBURG, KLAUS I SEXL, ROMAN

- [1985] *Niels Bohr. Der Kopenhagener Geist in der Physik*, Vieweg 1985.

MØLLER, CHRISTIAN

- (1929) “Der Vorgang des radioaktiven Zerfalls unter Berücksichtigung der Relativitätstheorie”, *Zs. Phys.* **55** (1929), 451–466 [sig. Copenhaguen abril 1929; reb. 26 abril 1929].
 (1930a) “Scattering of α -particles by light atoms”, *Nature* **125** (22 març 1930), sup., p. 459 [sig. Copenhaguen 21 febrer 1930].
 (1930b) “Zur Theorie der anomalen Zerstreung von α -Teilchen beim Durchgang durch leichtere Elemente”, *Zs. Phys.* **62** (1930), 54–70 [sig. Copenhaguen febrer 1930; reb. 15 març 1930].
 (1930c) “Über die höheren Näherungen der Bornschen Stossmethode”, *Zs. Phys.* **66** (1930), 513–532 [sig. Copenhaguen octubre 1930; reb. 24 octubre 1930].
 (1931) “Über den Stoß zweier Teilchen unter Berücksichtigung der Retardation der Kräfte”, *Zs. Phys.* **70** (1931), 786–795 [sig. Copenhaguen maig 1931; reb. 21 maig 1931].
 (1932) “Zur Theorie des Durchgangs schneller Elektronen durch Materie”, *Ann. Physik* **14** (1932), 531–585 [sig. Copenhaguen abril 1932; reb. 3 maig 1932].
 [1952] *The theory of relativity*, Oxford: Clarendon Press 1952; ²1972.

MOTT, NEVILLE F.

- (1930) “The collision between two electrons”, *Proc. Roy. Soc. A* **126** (1930), 259–267 [sig. Manchester; reb. 7 novembre 1929].

MOTT, NEVILLE F. I MASSEY, H. S. W.

- [1933] *The theory of atomic collisions*, Oxford University Press ¹1933; ²1949; ³1965.

MOYER, DONALD FRANKLIN

- (1981a) “Origins of Dirac’s electron, 1925–1928”, *Am. J. Phys.* **49** (October 1981), 944–949.
 (1981b) “Evaluations of Dirac’s electron, 1928–1932”, *Am. J. Phys.* **49** (November 1981), 1055–1062.
 (1981c) “Vindications of Dirac’s electron, 1932–1934”, *Am. J. Phys.* **49** (December 1981), 1120–1125.

OPPENHEIMER, J. ROBERT

- (1929) “Note on the theory of the interaction of field and matter”, *Phys. Rev.* **35** (1 March 1930), 461–477.

PAGE, LORNE ALBERT

[1950] *A measurement of electron-electron scattering*, tesi doctoral no publicada, Cornell University, setembre 1950.

(1951) “Electron-Electron scattering from 0'6 to 1'7 MeV”, *Phys. Rev.* **81** (mar 1951), 1062-1063 [s. Cornell 11 gener 1951].

PAULI, WOLFGANG

[1933] “Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik”, a *Hdb. Phys.* XXIV/1 (2^a ED.), pp. 83–272. Berlin: Springer 1933.

ROSENFELD, LÉON

(1931) “Bemerkung zur korrespondenzmässigen Behandlung des relativistischen Mehrkörperproblems”, *Zs. Phys.* **71** (1931), 253–259 [sig. Copenhaguen setembre 1931; reb. 24 oct 1931].

RÜGER, ALEXANDER

[1989] *Historical and methodological studies in the development of quantum field theory*, tesi doctoral, Universität Konstanz 1989.

RUTHERFORD, ERNST

(1911) “The scattering of α and β particles by matter and the structure of the atom”, *Phil. Mag.* **21** (1911), 669.

RUTHERFORD, ERNST, CHADWICK, JAMES I ELLIS CHARLES D.

[1930] *Radiations from radioactive substances*, Cambridge University Press 1930.

SHEARIN, PAUL E. I PARDUE, T. EUGENE

(1942) “Electron-electron collisions in the primary energy range from 1.3 to 2.6 million electron volts”, *Proc. Amer. Phil. Soc.* **85** (febrer 1942), 243–249 [sig. University of North Carolina].

STUDY TEAM FOR CERN HISTORY

[1987] *History of CERN (vol. I)*, North-Holland 1987.

WENTZEL, GREGOR

[1943] *Einführung in die Quantentheorie der Wellenfelder*, Viena: Frank Deuticke 1943; traducció anglesa: *Quantum Theory of Fields*, Nova York: Interscience Publishers 1949.

WILLIAMS, EVAN JAMES

(1930) “Passage of slow β -particles through matter. Production of branches”, *Proc. Roy. Soc. A* **128** (1 jul 1930), 459–468 [sig. Manchester; reb. 6 maig 1930].

WILLIAMS, EVAN JAMES I TERROUX, F. R.

(1930) “Investigation of the passage of ‘fast’ β -particles through gases”, *Proc. Roy. Soc. A* **126** (1 ene 1930), 289–310 [r. Cambridge 6 nov 1929].

WOLFE, HUGH C.

(1931) “Scattering of high velocity electrons in hydrogen as a test of the interaction energy of two electrons”, *Phys. Rev.* **37** (1 març 1931), 591–601 [sig. Caltech; reb. 26 gener 1931].