CONTRIBUCIO DE PIETRO MENGOLI AL CONCEPTE DE LIMIT A TRAVES D'UNA TEORIA DE LES QUASI PROPORCIONS.

TREBALL DE RECERCA PEL MESTRATGE

D'HISTORIA DE LES CIENCIES.

Mª ROSA MASSA ESTEVE.

BARCELONA, SETEMBRE DE 1993.

I N D E X

INTRODUCCIO.

El meu interès per a un treball de recerca sobre quadratures en el segle XVII va sorgir en cursar l'assignatura "El mètode dels indivisibles al segle XVII" amb el Dr. Antoni Malet. En aquell curs vaig estudiar algunes obres de diferents autors i vaig fer-ne alguns resums.[1] Veure com uns autors buscaven les àrees utilitzant indivisibles i d'altres infinitesimals, era apassionant.[2] Quan li vaig proposar al Dr. Malet de fer un

---

1 Citaré algunes de les estudiades:
B. CAVALIERI, *Geometria degli indivisibili di Bonaventura Cavalieri*, trad. L. Lombardo-Radice, 1966, K. ANDERSEN, "Cavalieri's Method of Indivisibles", *AHES*, 31, 1984/85, ENRICO GIUSTI: *Bonaventura Cavalieri and the Theory of Indivisibles,* Edizioni Cremonese, Bolonya, 1980, E. WALKER, *A study of the Traité des Indivisibles of....Roberval*, New York, Columbia Univ.,1932, M. S. MAHONEY, "Another Look at Greek Geometrical Analysis", *AHES*, 5, 1968, F. VIETE, *The Analytic art* (T R Witmer tr), Kent State University Press, Kent, Ohio, 1983, A. MALET, "Studies on James Gregorie (1638-1675)", Ph. D. Diss., Princeton University, 1989, I. BARROW, *The Usefulness of Mathematical Learning...*, London, 1734, repr. London, 1970.

2 El fet de treballar amb figures i segments com magnituds va provocar que els pensadors i filòsofs es preguntessin per la naturalesa *ontològica* dels segments rectilinis. Dues possibilitats es feren aleshores patents: les magnituds són *infinitament divisibles*; les magnituds són *atòmiques*.
Matemàticament la primera opció es traduiria amb que una figura es pot descompondre indefinidament en figures cada cop més petites i les rectes en segments rectilinis cada cop més petits. És el que s'anomenarà com infinitesimals.
Matemàticament l'opció atomista es traduiria en que

treball de recerca sobre aquest tema, em va suggerir que estudiés Pietro Mengoli (1625-1686), deixeble de Cavalieri (1598-1647), ja que era un autor poc estudiat.[3] El treball de recerca que aquí es presenta és l'estudi de tres *Elementa* de l'obra *Geometriae speciosae elementa*[4] (Bolonya 1659) de Pietro Mengoli primer pas del que voldria ser posteriorment un estudi més general.

L'autor expressa l'objectiu del seu llibre al començament, en la primera carta, dedicada a D. Fernando Riario.[5] Diu Mengoli:

"Ambdues geometries, l'antiga d'Arquimedes i la nova dels

---

una figura plana es pot descompondre en línies i les línies en punts. És el que s'anomenarà com indivisibles.

3 Realment els estudis sobre l'obra matemàtica de Mengoli són pocs i només donen els resultats molt simplificats, en notació actual, sense analitzar el procés ni el pensament de l'autor. G. VACCA, "Sulle scoperte di Pietro Mengoli", *Atti dell'Accademia nazionale dei Lincei-Rendiconti*, XXIV, 1915, 5, pp. 508-13, 617-20. A. AGOSTINI, "La teoria dei limiti in P. Mengoli, *Periodico di Matematiche*, ser. 4, 5, 1925, pp. 18-30; "Il concetto di integrale definito in P. Mengoli", Ibid, pp. 137-146 U. CASSINA, "Storia del concetto di limite", Ibid, ser. 4, 1936, pp. 89-101.

4 Per aquest treball he utilitzat una còpia microfilmada de la Bodleian Library d'Oxford de l'obra: *Geometriae speciosae elementa*. (Bolonya 1659). Ho podríem traduir per "Elements de geometría d'espècie". Com el títol suggereix, el llibre consta d'elements (capítols), tracta de geometria i, a més a més, no treballa amb nombres sinó amb lletres que simbolitzen nombres (espècies).

5 Al principi del llibre i al començament de cada *Elementum* s'inclouen cartes dedicades . Aquestes cartes estan dirigides a personatges importants del món científic i cultural de l'època que tenien o havien tingut algun tipus de relació amb Mengoli.

indivisibles de Bonaventura Cavalieri (preceptor meu), així com també l'àlgebra de Vieta, han estat tractades amb bastant encert per persones cultes; d'elles, ni confusament ni com si fos una barreja, sinó per una perfecta conjunció, en resulta una de nova, l'espècie pròpia del nostre treball, que no podrà desagradar a ningú." [6]

Com veiem, Mengoli vol deixar clar l'objectiu de la seva obra des de les primeres línies. Es tracta de trobar un altre mètode per calcular quadratures diferent dels utilitzats per Arquimedes i per Cavalieri, i que, a més, es basi en l'*Algebra Speciosa* de Vieta, al qual cita constantment.

Com veurem, aquest mètode està basat en una nova teoria de "quasi proporcions", rigorosament elaborada, que el autor utilitza per calcular quadratures i també per definir els logaritmes.[7] Mengoli estableix aquesta teoria de quasi proporcions a partir de la teoria de proporcions del llibre cinquè dels *Elements* d'Euclides i d'unes nocions originals: raó "quasi nul.la", "quasi infinita" i "quasi un nombre".

Aquest treball pretén fer una anàlisi exhaustiva de l'elaboració d'aquesta teoria, tant pel que fa al seu contingut concret com a les idees en les quals es fonamenta. El treball vol

---

6 "Ipsae satis amabiles litterarum cultoribus visae sunt, utraque Geometria, Archimedis antiqua, & Indivisibilium nova Bonaventura Cavallerij Praeceptoris mei, necnor & Viettae Algebra: quarum, non ex confusione, aut mixtione, sed coniunctis perfectionibus, nova quaedam, & propria laboris nostri species, nemini poterit displicere."*Geometriae speciosae elementa* (Bolonya, 1659), Element primer, pp. 2-3. Totes les traduccions d'aquest treball són de l'autora i intenten respectar el pensament de Mengoli.

7 Agostini i Cassina la tracten com una teoria del límit.

analitzar en profunditat els aspectes tècnics i matemàtics, ja que això ens permetrà de reflexionar sobre els conceptes que feia servir Mengoli en aplicar aquesta teoria, com ara el d'infinit, el d'infinitèsim i el d'indivisible.

Una de les dificultats més grans amb què m'he trobat en fer el treball, deixant de banda que l'obra està escrita en llatí, ha estat les notacions i la manera enrevessada i obscura d'escriure d'aquest autor. Demano disculpes al lector perquè és molt difícil simplificar tota la reconstrucció de la teoria aquí descrita. He procurat alleugerir-la tot el que he pogut, ja que és una mica embrollosa, però he intentat ser fidel a la notació i al pensament de l'autor.

L'estructura del treball és la següent: en l'apartat primer es fa una breu biografia de Mengoli i s'expliquen les característiques generals de l'obra *Geometriae speciosae elementa* (Bolonya 1659); en l'apartat segon s'expliquen els fonaments de la teoria de quasi proporcions de Mengoli, exposada a l'*Elementum tertium* d'aquesta obra; en l'apartat tercer es donen les nocions i conceptes necessaris per poder entendre la teoria de quasi proporcions; en l'apartat quart s'explica aquesta teoria i es demostren els teoremes més importants, finalment, en l'apartat cinquè es fan algunes reflexions sobre Mengoli i el seu mètode.

1.-LA VIDA I OBRA DE PIETRO MENGOLI.(1626-1686).

1.1.- Breu biografia de Pietro Mengoli (1626-1686).[8]

El nom de Mengoli apareix en el registre de la Universitat de Bolonya del període 1648-1686. Va estudiar amb Bonaventura Cavalieri (1598-1647), al qual va succeir en la seva càtedra. El curs 1648-49 va ser titular de *Ad aritmeticam* i el 1650-51 passà a ocupar la plaça que ja tenia Cavalieri de *Ad Mechanicas*, i el 1678 obtingué *Ad Mathematicam* de la qual se'n va ocupar fins la seva mort.[9] Es va graduar en filosofia el 1650 i 3 anys més tard en lleis canòniques i civils.

En aquesta primera època va escriure dues obres matemàtiques: *Novae quadraturae arithmeticae seu De Additione Fractionum,* (Bolonya, 1650) i *Geometriae speciosae elementa,* (Bolonya, 1659).

El 1660 va ser ordenat sacerdot i fins la seva mort va ser prior de l'església de Santa Maria Magdalena de Bolonya. Del 1660 al 1670 no va publicar res, però a partir de 1670 amb la *Refrattioni e parallase solare* (Bolonya, 1670) i la *Speculationi di Musica* (Bolonya, 1670) va recomençar les publicacions. El 1672

---

8 Per les dades de la biografia he utilitzat el *Dictionary of Scientific Biography* (ed. C. C. Gillispie), New York, vol. 9, 1971, pp. 303-4 i l'*Introduzione* de M. Cavazza a *La Corrispondenza*, Editorial Leo S. Olschki, Florència, 1986, pp. 1-22.

9 El programa de *Ad Mechanicas* durava solament uns quants anys i es tractaven els temes de més actualitat. Així els títols eren: *Legant librum aequaepoderis Archimedis, Legant mechanicas marchionis Guidubaldi a Monte, Legant de centro gravitatis.* El programa de *Ad Mathematicam* era sempre el mateix: *EUCLIDE, la teoria dei planeti, l'astronomia di TOLOMEO.* Veure Agostini: "L'opera matematica di Pietro Mengoli", *Arch. Int. Hist. Sci.*, 1950, pàg. 817-8.

va publicar el *Circolo* (Bolonya, 1672). Ja en les pàgines inicials, Mengoli explicava que aquest resultat, la quadratura del cercle, l'havia trobat el 1660 sense donar-lo a conèixer. Ara es decidia a publicar-lo tot explicant així els motius:

> "M'he acostumat a menysprear fins i tot les meves pròpies argumentacions Geomètriques, i a tenir-les en compte únicament en la mida en què em serveixin per explicar les coses naturals. Per això que mentre estic escrivint les regles de Solsticis i dels Equinoccis (que he trobat i comunicat per escrit a alguns), havent concebut alguna esperança de reduir, mitjançant aquest Problema de la Quadratura del Cercle, la Teoria del Sol, i potser també tot el sistema, a únicament tants principis com els que es llegeixen en el primer capítol del Gènesis, he jutjat convenient treure de les tenebres les meves invencions i comunicar-les."[10]

Sembla que Mengoli ha canviat radicalment de direcció en el seu pensament i solament vol donar a conèixer les matemàtiques que li serveixin per explicar fenòmens naturals. En la introducció de *La Corrispondenza*, Marta Cavazza explica que probablement això fou degut al seu nomenament com a prior de Santa Madalena, i potser també als aconteixements polèmics entre l'església i Galileu.[11] Sembla que la nova idea de Mengoli és no fer més recerca de matemàtica pura sinó fer-la de matemàtica "mixta": astronomia, cronologia, música. A més, tota estaria

---

[10] P. Mengoli: *Circolo* (Bolonya 1672), exemplar microfilmat de la Bodleian Library d'Oxford, primera pàgina.

[11] Ibid, pp. 5-6-7.

emmarcada dins un precís projecte apologètic de la fe catòlica que a la vegada serviria com a pregona justificació dels escrits bíblics. Mengoli va seguir escrivint en aquesta línia i va publicar l'*Anno* (Bolonya, 1675) sobre cosmologia i cronologia bíblica. A *la Protesta dell'Autore* impressa a l'*Anno* diu:

> "Escric amb tots els mitjans de què disposo per conservar i aconseguir el crèdit en la Santa Fe Romana, que jo professo i predico, d'aquells que busquen la veritat únicament a través de raonaments humans."[12]

Més tard publicà l'*Arithmetica Rationalis* (Bolonya, 1674) i l'*Arithmetica Realis* (Bolonya, 1675) sobre lògica i metafísica en la mateixa línia.

Durant quasi dos segles el nom de Mengoli va romandre ignorat. Els motius no acaben de quedar clars. És possible que la seva manera d'escriure confosa i enrevessada, i la seva notació, fessin difícil la lectura de les seves obres. Així en una carta de Collins a Gregory es comenta que Barrow en llegir les obres de Mengoli va dir que era més dur que l'àrab. Tanmateix, en aquestes cartes és palès que les obres de Mengoli eren esperades a Europa.[13] Les seves obres eren molt apreciades pels matemàtics europeus mentre encara vivia, però sembla que va

---

12 P. Mengoli, *La Corrispondenza*, Marta Cavazza ed, 1986, Pp. 7-8.

13 En la pàg. nº 49, carta nº 1 de Collins a Gregory, JAMES GREGORY TERCENTENARY MEMORIAL VOLUME, Herbert Westren Turnbull, G. Bell & Sons Ltd, London, 1939.

morir aïllat i ignorat.[14]

Al començament d'aquest segle, l'estudi de les seves primeres obres matemàtiques va fer que Mengoli fos valorat dins la història de la matemàtica. Així G. Eneström (1912) i G. Vacca (1915) han mostrat que Mengoli va ser el primer en calcular a la *Novae quadraturae arithmeticae* (1650) sèries infinites altres que les sèries geomètriques, en enunciar el concepte general de convergència i divergència, i en demostrar que la sèrie harmònica és divergent, resultat aquest últim tornat a demostrar en el 1689 per J. Bernoulli, al qual ha estat sempre atribuït el mèrit de la prioritat.[15] A. Agostini (1925), seguit de U. Cassina (1936 i 1960), ha fet després l'estudi de la *Geometriae speciosae elementa* (1659), que ha permès de restablir la importància de Mengoli a la història del concepte de límit i de la integral definida.[16] Aquests treballs han fet que Mengoli actualment gaudeixi d'un lloc important. Carl B. Boyer, per exemple, dedica un apartat a Mengoli dins la seva *Historia de la matemática;* també Gino Loria, en la seva *Storia delle matematiche*, parla de

---

14 Referència cartes. JAMES GREGORY TERCENTENARY MEMORIAL VOLUME, Herbert Westren Turnbull, G. Bell & Sons Ltd, London, 1939, pp. 179-186-203-231-232-236.

15 G. VACCA: "Sulle scoperte di Pietro Mengoli", *Atti dell'Accademia Nazionale dei Licei-Rendiconti*, vol. XXIV, 5, 1915, pp. 508-13, 617-20.

16 A. AGOSTINI, "La teoria dei limiti in P. Mengoli, *Periodico di Matematiche*, ser. 4, 5, 1925, pp. 18-30; "Il concetto di integrale definito in P. Mengoli", Ibid, pp. 137-146 U. CASSINA, "Storia del concetto di limite", Ibid, ser. 4, 1936, pp. 89-101.

l'originalitat de la seva obra.[17]

Recentment s'han publicat alguns treballs molt interessants sobre les obres dels seus últims anys, període més fosc pels seus contemporanis. Així L. Pepe, limitant la seva interpretació a l'*Elemento primo* de l'*Arithmetica rationalis* (1674) i advertint que la intenció Mengoli era completar la lògica d'Aristòtil i posar les bases d'un sistema metafísic propi, l'ha vist "quasi com una teoria dels conjunts *ante litteram* traduïble literalment al llenguatge matemàtic modern".[18] Una altra tentativa interessant per descodificar la fosca terminologia mengoliana en clau teòrica moderna es deu a M. Matteuzzi, que considera la *Arithmetica rationalis* una obra clarament inspirada en "un programa de matematització de la lògica" i precursora de l'àlgebra de la lògica de Boole, mentre a la *Arithmetica realis* i precisament en l'*Apex primus* de la part editada, veu "la construcció d'una lògica proposicional model, que no té precedents, per la perspectiva en la qual es col.loca i per la completitud del tractat, a l'antiguitat i a la tradició medieval".[19] No vull deixar de citar estudis més recents com els de G. Baroncini, "L'"Arithmetica Realis" di Pietro Mengoli", en l'apèndix del llibre: *La corrispondenza*, i també d'aquesta autora

---

17 CARL B. BOYER, *Historia de la matemática*, Madrid, Alianza Universidad, 1968, pàg. 467, i GINO LORIA, *Storia delle matematiche*, Hoepli, Milano, 1946, pp. 525-526.

18 LUIGI PEPE, "L'elemento primo dell' "Aritmetica razionale" di Pietro Mengoli.",en *Bolletino U. M. I.*,(5), 16-A, 1979, pp. 201-209.

19 M. MATTEUZZI, "L'Arithmetica realis e la confusa genialità di Pietro Mengoli", *Studi e Memorie per la Storia dell'Università di Bologna*, Bolonya, 1983, pp. 393-408.

"Introduzione ad una teologia matematica del tardo Seicento: l'Arithmetica Realis (1675) di Pietro Mengoli".[20] En aquest treball Baroncini "descriu les evolucions i transformacions dels plantejaments doctrinals que conflueixen en el gènere "teologia matemàtica", segons l'articulació feta en el text mengolià". Els temes tractats en l'article són: teologia matemàtica, pitagorisme hermètic, cabalístic, lul.lisme, dionigisme, etc. També es refereix a personatges relacionats amb aquestes temàtiques: Giordano Bruno, Mersenne, Kepler, Fludd, Galileu, etc. Fa un parell d'anys també ha aparegut un treball molt interessant de Paolo Gozza sobre l'*Especulationi di musica* (1670).[21] Gozza hi explica l'original teoria del so de Mengoli i de quina manera refusava la teoria de la consonància de Galileu. També hi descriu còm Mengoli, en la seva obra, justifica fisiològicament l'existència de dos tímpans a l'orella humana.

---

20 G. BARONCINI, "L'"Arithmetica Realis" di Pietro Mengoli", en l'apèndix del llibre: *La corrispondenza*, pp. 155-188 i "Introduzione ad una teologia matematica del tardo Seicento: l'Arithmetica Realis (1675) di Pietro Mengoli, en *Studi e Memorie per la Storia dell'Università di Bologna*, Bolonya, 1983, pp.315-392.

21 PAOLO GOZZA: "Atomi ,"spiritus", suoni: le "speculationi di musica" (1670) del "galileano" Pietro Mengoli", *Nuncius*, vol. 5, 1991, pp. 75-98.

1.2.- *Geometriae speciosae elementa* (Bolonya 1659).

L'obra *Geometriae speciosae elementa* (Bolonya 1659) té 472 pàgines i està composta de sis capítols, amb títol propi, que ell anomena *Elementum*, i una introducció que porta per títol: *Lectori Elementario.* Aquesta introducció té 80 pàgines i en elles explica cada un dels capítols per separat. En aquesta explicació no hi ha demostracions ni teoremes, tanmateix hi ha exemples dels resultats obtinguts en cada capítol. El contingut de cada *Elementum* s'explica breument a continuació.

PRIMUM: *De potestatibus, à radice binomia, et residua.* Pp. 1-19.

Dóna les potències d'un binomi expressades amb lletres tant pel que fa a la suma com pel que fa a la resta.

SECUNDUM: *De inumerabilibus numerosis progressionibus.* Pp. 20-94.

Calcula nombroses sumes de progressions no aritmètiques ni geomètriques amb una notació pròpia i demostra algunes identitats.

TERTIUM: *De quasi proportionibus.* Pp. 95-147.

Defineix raó quasi nul.la, quasi infinita i quasi un nombre. Amb aquestes definicions construeix una teoria de quasi proporcions basant-se en la teoria de proporcions del llibre cinquè dels *Elements* d'Euclides.

QUARTUM: *De rationibus logarithmicis.* Pp. 148-200.

Construeix anàlogament al llibre cinquè dels *Elements* d'Euclides una teoria completa de proporcions logarítmiques.

QUINTUM: *De propriis rationum logarithmis.* Pp. 201-347.

Construeix el logaritme i les seves propietats utilitzant els resultats dels *Elementum tertium i quartum.*

SEXTUM: *De innumerabilibus quadraturis.* Pp. 348-392.

Calcula les quadratures de corbes que corresponen a les funcions que avui representem

$$y=x^{p}.[t-x]^{r-p}$$

amb la teoria de quasi proporcions explicada a l'*Elementum tertium*. A més a més, calcula baricentres de les àrees d'aquestes corbes.

En el full següent hom pot veure una fotocòpia de l'original de la portada del llibre.

AD MAIOREM DEI GLORIAM

GEOMETRIÆ SPECIOSÆ ELEMENTA

PRIMVM

De poteſtatibus, à radice binomia, & reſidua.

SECVNDVM

De innumerabilibus numeroſis progreſsionibus.

TERTIVM

De quaſi proportionibus.

QVARTVM

De rationibus logarithmicis.

QVINTVM

De proprijs rationum logarithmis.

SEXTVM

De innumerabilibus quadraturis.

PETRI MENGOLI.

I. V. Ph. D. Coll. Patr. Bonon. Archigymn. Mechanici.

BONONIÆ, Typis Io. Baptiſtæ Ferronij 1659.

Superiorum permiſſu.

14

2.- ELS FONAMENTS DEL CAMI INICIAT PER MENGOLI.

A final del segle XVI la geometria va quedar establerta com una branca de les matemàtiques gràcies a les traduccions llatines dels treballs dels geòmetres grecs. Va produir-se una revifalla de recerques geomètriques sobre temes arquimedians, en particular sobre el càlcul d'àrees i volums de figures geomètriques i centres de gravetat. Podríem dir que durant tot el segle XVII qualsevol matemàtic que volgués esser apreciat, treballava amb problemes de quadratures i càlculs de baricentres. Des de l'any 1600 al 1680 les eines utilitzades per aquests matemàtics varen donar lloc a variades versions d'infinitesimals i indivisibles, una mena de precàlcul.

Cavalieri (1598-1647) va ser un dels primers a desenvolupar un nou mètode; en aquell moment ja hi havia dos antecedents clars: la tècnica dels antics que avui s'anomena mètode d'exhaustió (Eudox-Arquimedes) i el treball fet per Kepler (1571-1630).[22]

Com ja hem explicat a la introducció, Mengoli també volia fer quadratures i el seu mètode es basava en les geometries de Cavalieri i Arquimedes utilitzant les eines que li proporcionà l'*Algebra Speciosa* de Vieta. Utilitzava Mengoli el mateix mètode que Cavalieri? Semblaria natural que fos així, ja que Mengoli era

---

22 El mètode de Cavalieri està explicat bàsicament en dos dels seus llibres: *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*,(Bologna, 1635) i *Exercitationes geometricae sex*,(Bologna, 1647). El treball de Kepler per a la recerca de quadratures i cubicacions està explicat en l'obra *Stereometria Doliorum*. (Linz, 1615). Aquesta obra de Kepler sembla que no va influir sobre el mètode de Cavalieri ni sobre Mengoli que ni l'anomena.

deixeble de Cavalieri. Però el mètode del mestre va rebre moltes crítiques i Mengoli no podia deixar de ser-ne sensible. Mengoli explicava en la carta dedicada a Dominico Cassino, en l'*Elementum sextum* de la *Geometriae*, que feia onze anys que havia trobat innombrables quadratures de figures planes.[23] Després de fer-ne les demostracions, que són similars a les de Cavalieri, justificava així el no haver-les donat a conèixer fins aleshores:[24]

> "Mentrestant vaig deixar de banda aquest afegit que havia fet a la Geometria dels indivisibles, tenint por de l'autoritat d'aquells que jutgen falsa la hipòtesi que la infinitat de totes les rectes d'una figura plana sigui una figura plana; ho vaig deixar no perquè jo fos d'aquesta opinió, sinó que la vaig esquivar perquè la trobava dubtosa i vaig intentar, si m'era possible, d'establir fonaments nous i segurs al mateix mètode dels indivisibles o a uns altres mètodes nous que fossin equivalents."[25]

---

23 Giandomenico Cassini (1625-1712) va ser professor d'astronomia a l'estudi de Bolonya del 1650 fins el 1669 quan es va traslladar a París. Més referències sobre aquest matemàtic a Pietro Mengoli: *La corrispondenza*, Gabrielle Baroncini i Marta Cavazza eds, Editorial Leo S. Olschki, Florència, 1986, pp. 37-38.

24 Les definicions i els teoremes més importants del *Elementum sextum* estan demostrats a A. AGOSTINI, "Il concetto d'integrale definito in Pietro Mengoli" , "Rileggendo la "Geometria speciosa" di Pietro Mengoli", *Periodico di Matematiche*, ser. 4, vol. 5, 1925, pp. 137-46, ser. 4, vol. 20, 1940, pp. 313-327.

25 "Ipsam interim accessionem, quàm Geometriae Indivisibilium feceram, praeterivi: veritus eorum authoritatem, qui falsum putant suppositum, omnes rectas figurae planae infinitas, ipsam esse figuram planam: non quasi hanc sequens partem; sed illam quasi

Com veiem, Mengoli reconeixia que els fonaments del mètode dels indivisibles de Cavalieri no eren prou segurs, i tot volent fonamentar sòlidament aquest mètode emprengué un altre camí, el de les sèries infinites.[26]

De fet, després de 1650 els mètodes analítics van rebre més atenció i van sustituir els mètodes geomètrics basats en els escrits dels antics. Les causes en foren d'una banda l'acceptació dels mètodes algebraics en el camp de la geometria i, d'altra, un interès molt viu pel treball numèric: interpolació, aproximació, etc. Molts matemàtics d'aquella època van intentar aquest camí. Entre ells podríem citar Fermat (1601-1665), Roberval (1602-1675), Pascal (1623-1662) i Wallis (1616-1703).[27] Intentaven bàsicament calcular el límit:

$$lím[\frac{1^k+.........+n^k}{n^{k+1}}]=\frac{1}{k+1}$$

quan n tendeix a infinit.

Aquest límit permetia quadrar les paràboles

---

non prorsus indubiam devitans: tentandi animo, si possem demum eamdem indivisibilium methodum, aut aliam equivalentem novis, & indubijs prorsus constituere fundamentis." Element sisè de *Geometriae Speciosae Elementa*, Bolonya, 1659, pàg. 364.

26 Mengoli ja havia publicat una obra *Novae Quadraturae Arithmeticae* (Bolonya 1650) en la que treballava amb sèries infinites, sumant-les i donant les seves propietats. A. Agostini, "La serie sommate da Pietro Mengoli", *Bollettino della Unione Matematiche Italiana*, ser. 2, vol. 3, 1941, pp. 231-51.

27 E. Walker diu sobre Roberval:
"Roberval mereix tot el crèdit d'haver sigut un dels primers en utilitzar les sumes de potències de sèries com una base per calcular amb infinitesimals." E. WALKER: *A Study of the Traité des Indivisibles of...Roberval*, New York, Columbia Univ. Press, 1986, pàg. 44.

$$y=x^k$$

sent k qualsevol sencer positiu.

Roberval, en el seu *Traité des indivisibles* (1634, publicat a 1693), deia que la suma de la sèrie dels primers x nombres naturals era igual a l'expressió

$$\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x,$$

i que l'últim terme es podia menysprear quan x és molt gran.[28]

Pel que fa a la suma dels quadrats dels primers nombres naturals, Roberval deia que valia

$$\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x,$$

i que quan x és molt gran, els dos últims termes es podien ometre. I seguia amb la suma dels cubs, les quartes potències, etc.[29] Roberval no donava cap mena de justificació o prova matemàtica d'aquestes afirmacions només comprovava que eren certes donant valors.

Hom queda perplex de la temeritat que comporta ometre la

---

28 E. WALKER: *A Study of the Traité des Indivisibles of...Roberval,* New York, Columbia Univ. Press, 1986, pp. 171-2.

29 Roberval (1602-1675), el 11 d'Octubre de 1636 en una carta a Fermat (1601-1665), li explica quan valen les sumes de potències de nombres, però com que no li presenta proves, Fermat el critica. E. Walker, *A Study of the Traité des Indivisibles of....Roberval,* New York, Columbia Univ., 1932, pàg. 43.

meitat d'un nombre infinit. Però si s'investiga acuradament, es veu que les quantitats omeses per Roberval són quantitats variables i que tot i augmentar els seus valors numèrics, quan el nombre de sumands és molt gran, són com zero en relació al valor total de la suma.

Mengoli calculava innombrables sumes de potències de nombres i de productes de potències utilitzant les propietats del triangle aritmètic. A continuació no feia el límit a la manera de Roberval, omitint termes, sinó que per obtenir-lo, va elaborar tota una teoria nova amb uns conceptes nous, les quasi proporcions.[30] Concretament calculà que la raó

$$\frac{[p+1]\sum_{a=1}^{t-1}\binom{p}{r}.a^{p-r}.[t-a]^{r}}{t^{p+1}}$$

tendeix a 1, quan el nombre de termes es fa molt gran. Mengoli generalitzà per a qualsevol valor del exponent sencer positiu. Aquest resultat l'obtingué en el teorema 42 de l'*Elementum tertium* del qual farem la demostració acuradament. Després, en l'*Elementum sextum*, aquesta quasi proporció l'aplicava a les figures per calcular quadratures, sent el primer terme de la proporció la raó abans esmentada i el segon terme de la proporció la raó entre una àrea coneguda i l'àrea que volia trobar.

---

30 Mengoli en la carta de l'*Elementum tertium*, dedicada a D. Fabio Alamandino, ja qualifica les quasi proporcions com un element geomètric inaudit: "En les Quasi proporcions he establert un element geomètric fins ara inaudit per resoldre teoremes, a més a més molt difícils, mitjançant un treball fàcil." Element tercer de *Geometriae Speciosae Elementa*, Bolonya, 1659, pàg. 95.

Mengoli, com deia en la carta abans citada, volia donar a la nova teoria de les quasi proporcions uns pilars sòlids i per això la fonamentà en els primers principis de la geometria grega explicats en els *Elements* d'Euclides. Mengoli repeteix en totes les cartes, i en la introducció del seu llibre, que ha utilitzat els *Elements* d'Euclides:

"i crec que no prenc res d'altres, excepte dels primers nou *Elements* d'Euclides."[31]

També en la carta introductòria a l'*Elementum primum* deia: "No prenc res d'altres, excepte certa cosa d'Euclides, en el cinquè i sisè, que cito al marge dels passatges on està."[32]

Si hom vol entendre les demostracions de Mengoli, ha de tenir present en tot moment les definicions i les proposicions dels *Elements* d'Euclides. Per exemple, quan en el marge d'una demostració escriu "11.5.", vol dir que en aquell pas ha utilitzat la proposició 11 del llibre cinquè dels *Elements* d'Euclides. Hi ha teoremes en els quals la demostració sencera és una explicació; tanmateix en el marge continua fent referències als *Elements* d'Euclides.

Però on és més palès que la seva teoria està fonamentada en els *Elements* és en les demostracions de les propietats de les quasi raons. Mengoli volia comprovar que les propietats de les proporcions del llibre cinquè dels *Elements* d'Euclides també es

---

31 "ideoque nihil alienum sumpsi, praeterquam ex prioribus novem Elementis Euclidis." Ibid, introducció, pàg. 9.

32 "Nihil alienum sumo; prater quadam, ex Euclide, in quinto, & sexto: qua suis locis allego, in margine." Ibid, Element primer, pàg. 2.

verifiquen per a les quasi raons. Per això, primer comprovava totes les propietats de les proporcions quan, en comptes del signe igual, hi havia una desigualtat i, a continuació, també verificava totes aquestes propietats quan les proporcions passaven a ser quasi proporcions.

Així la seva nova teoria, que solament era una eina per calcular el límit i la quadratura associada, quedava sòlidament fonamentada.

3.- NOCIONS I CONCEPTES BASICS.[33]

3.1.- Notacions de Mengoli.

Un dels problemes per poder entendre l'obra de Mengoli és la notació emprada, que és original i es va complicant al llarg del llibre.[34] Cal recordar que en aquella època no hi havia criteris unificats pel que fa a les diferents alternatives simbòliques.[35]

En l'*Elementum primum* fixa les notacions en tres sentits: representa els símbols amb els quals operarà, explica les lletres i els noms de les expressions que utilitzarà i situa aquestes expressions algebraiques en unes taules triangulars.

Abans del primer teorema i després de les definicions, en una pàgina apart i sota el títol *Explicationes quarundam notarum*, Mengoli explica les notacions bàsiques que utilitzarà al llarg del llibre.[36] Per exemple, de la suma diu:

"L'addició serà representada amb el símbol creu; així la

---

[33] Totes les taules, notacions i resultats aquí exposades, es necessiten per entendre la teoria de quasi proporcions de l'*Elementum Tertium*.

[34] G. Vacca en el seu article , "Sulle scoperte di Pietro Mengoli", *Atti dell'Accademia Nazionale dei Lincei-Rendiconti*, XXIV, 5, 1915, pp. 617-20, va resaltar i explicar l'originalitat de la notació de Mengoli.

[35] Més referències sobre aquest tema a A. MALET i J. PARADIS, *Els origens i l'ensenyament de l'àlgebra simbòlica*, Edicions de la Universitat de Barcelona, Barcelona, 1984.

[36] Tots els elements tenen una estructura similar. Després de la carta dedicada fa unes definicions numerades i després teoremes numerats que en alguns casos en diu proposicions i en altres problemes. En l'element primer fa una excepció i dóna un full amb explicació de les notacions.

suma d'a i r es representarà a+r."[37]

A continuació explica que la subtracció serà representada amb una línia,[38] la igualtat amb dos punts, la raó amb punt i coma[39] i la igualtat entre raons utilitzant els punts i comes com a signes de raó i els dos punts com a signe igual entre raons.[40] Per exemple, escriu

$$a \;;\; r \;:\; a2 \;;\; ar$$

per representar

$$a:r=a^2:ar$$

La composició de dues raons la representa amb una coma i després una creu;[41] per exemple, escriu

$$u \;;\; a2,\; +u \;;\; r3 \;:\; u \;;\; a2r3$$

per representar

---

37 *Geometriae speciosae elementa.* Pàg. 8 de l'*Elementum primum.*

38 Els signes + i - sembla que eren els únics acceptats unànimament i havien sigut introduits per l'escola alemanya el segle anterior. Mengoli utilitza els mateixos símbols que Vieta per la suma i la subtracció. FRANÇOIS VIETE: *Opera Mathematica* per Francisci A. Schooten, Georg Olms Verlag Hildesheim, New York, 1970, "Isagoge in Artem Analyticam", pàg. 5.

39 Més endavant, en l'element cinquè distingeix la raó de la fracció entre dos nombres i escriu el denominador entre parèntesi. Introducció de l'element cinquè, *Geometriae Speciosae Elementa*, Bolonya, 1659, pàg. 66.

40 Com fa notar Cajori aquesta va ser una notació esporàdica, *A History of Mathematical Notations*, vol. 1, Open Court, Chicago, 1928, pàg. 289.

41 Aquesta representació de la unitat per la lletra *u* s'explica a les pàgines següents.

$$[1:a^2].[1:r^3]=1:[a^2.r^3]$$

Representa la potència d'una raó amb la paraula *triplicata, duplicata*, etc segons convingui i escriu

a3 ; r3 : triplicata a ; r[42]

per representar

$$a^3:r^3=[a:r]^3$$

En les definicions, fixa les lletres amb les quals representarà les quantitats. A la definició quarta diu:

"4. La quantitat des de la qual amb progressió contínuament proporcional s'ordenarà en infinit es dirà racional (*rationalis*) i es representarà amb la lletra *u*."[43]

Aquí Mengoli vol deixar clar que els nombres els considera en proporció contínua indefinidament a partir de la unitat. Així,

$$1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^5,\ldots\ldots$$

Al llarg de l'*Elementum tertium* Mengoli es refereix a aquesta quantitat que representa amb la lletra *u* com la unitat. Per exemple, quan en un enunciat diu *tota quantumlibet ordinata ad unitatem,* aquesta afirmació la representa algebraicament

---

42 Primer dóna la notació i després en el teorema 3 de l'*Elementum primum* demostra que la notació representa la potència. *Geometriae Speciosae Elementa,* Bolonya, 1659, pàg. 10.

43 "4. Quantitas, unde progressio continuè proportionalium, ordinatur in infinitum, dicetur, Rationalis.& significabitur, charactere u." Ibid, pàg. 4.

t3 ; u. També en les demostracions quan multiplica *u* per un nombre posa com a resultat aquest nombre.[44] Les altres quantitats les representa amb les lletres de l'alfabet i les seves potències, escrivint al costat el seu exponent; així en les definicions cinquena i sisena diu:

> "5. I la primera (quantitat) que succeeix a la racional es dirà arrel (*Radix*), o bé potència primera, i es representarà amb els caràcters de les lletres de l'alfabet."[45]

> "6. I la resta (de quantitats) que segueixen es diran potències segona, tercera, etc de l'arrel, ordenades d'aquesta manera. I es representarà cada una, amb la mateixa lletra de l'arrel, i l'ordre amb un nombre. Per exemple: arrel *a*, segona potència *a2*, tercera *a3* i així successivament."[46]

Per tant, l'expressió *a3* s'explica en aquesta definició com la tercera potència d'*a* i l'anomena *tertia potestas*. Aquesta definició no dóna solament el nom i el símbol, sinó la relació amb la resta de nombres. A la definició quarta, Mengoli explica que els nombres els forma en progressió contínua proporcional;

---

44 Veure pàg. 63 d'aquest treball.

45 "5. Et prima consequens à rationali, dicetur, Radix, vel Potestas prima. & significabitur, charactere cuiusq; litterae alphabeti." *Ibid*, pàg. 4.

46 "6. Et reliquae consequentes, dicentur Potestates radicis, Secunda, Tertia, & deinceps, iuxta suum cuiusque ordinem. Et significabitur unaquaeque, eâdem litterâ suae radicis, adscriptoque ordinis numero. vt radicis a, secunda potestas a2, tertia a3, & sic deinceps." Ibid, pàg. 4.

per tant, quan utiliza la definició sisena escriu:[47]

r ; u : r2 ; r : r3 ; r2....

per representar

$$r:1=r^2:r=r^3:r^2....$$

Més interessant és la definició setena, que ens fa pensar que per a Mengoli la unitat és una potència de l'arrel ordenada en una unitat menys que la primera, o sigui zero. Per tant $a^0 = u = 1$. No parla en cap moment del zero, ni com a exponent ni com a nombre. Només diu que la unitat està ordenada en una unitat menys que la primera potència.

"7. La quantitat racional, encara que no tingui nombre d'ordre com les potències, també es considerarà ordenada i es dirà ordenada en una unitat menys que la primera potència."[48]

Fem notar que per representar x^2 escriu *x2*. Segons Cajori aquesta notació procedeix del francès Pierre Hérigone i Mengoli la va copiar, tal com ell mateix diu: [49]

"A aquells símbols, utilitzats per Vieta, Herigonio, ...,

---

47 A la demostració del teorema 38 que hi ha més endavant hi posa def. 6. p. *t5 : t4 = t : u*. Ibid, pàg. 127.

48 "7. Rationalis, licet nomen ordinis non habeat inter potestates; tamen habebitur pro ordinata: & dicetur, unitate minùs ordinata, quàm sit prima potestas." *Ibid*, pàg. 4.

49 F. CAJORI, *A history of Mathematical Notations*, Open Court, Chicago, 1928, pàg. 345.

els donarem nom a la nostra conveniència."[50]

Aquí es refereix als noms que a continuació explicarem.

El producte de dues quantitats l'escriu amb una lletra al costat de l'altra. Si aquestes quantitats no tenen exponents, l'anomena *uniprimam, ar.*[51] Si la primera està al quadrat i la segona no, en diu *biprimam, a2r,* i així successivament: *Triprimam (a3r), quadriprimam (a4r), quintiprimam (a5r), sextiprimam (a6r),* etc. Si la primera es manté sense exponent i la segona va augmentant, l'anomena *uniprimam (ar), unisecundam (ar2), unitertiam (ar3), uniquartam (ar4), uniquintam (ar5), etc.* I quan totes dues tenen exponents, fa una barreja dels dos noms: *sextiquartam* per *a6r4, nonisecundam* per *a9r2,* etc. Quan vol anomenar el producte d'un nombre multiplicat pels productes anteriors, escriu: *dupla uniprima (2ar), tripla biprima (3a2r), sescupla bisecunda (6a2r2), quadrupla unitertia (4ar3), etc.*[52]

A continuació Mengoli defineix dues taules triangulars, que ell anomena "de proporcionals" ,*(proportionalium),* i "de múltiples", (*multiplicium*). En la def. nº 8 de l'*Elementum primum* explica que la primera taula és la mateixa que la proposició 2.8. dels *Elements* d'Euclides que diu

> Proposició 2.8. "Trobar nombres en proporció contínua, tants com es poden trobar i els més petits que siguin

---

50 "Quibus characteribus à Vietta, Herigonio,...usitatis, convenientia nos adinvenimos nomina." Introducció de *Geometriae*, pàg. 12.

51 Ibid, en la introducció *Lectori Elementario,* pàg. 12.

52 Ibid, pàgs. 18-19.

en una raó donada."[53]

Pel que fa a la segona taula, que no és més que la taula triangular dels nombres combinatoris, diu que és la que utilitzaven els analistes.[54] Una tercera taula triangular, que anomena "dels noms" (*nominum*), és el resultat de la combinació de les dues taules anteriors. Mengoli utilitza aquesta taula per obtenir les potències d'un binomi, tant pel que fa a l'addició com a la subtracció. Els elements de la taula *Nominum* són els desenvolupaments de les potències del binomi $a + r$, afegint-hi els signes corresponents segons sigui addició o subtracció. Aquests desenvolupaments els demostra en els teoremes 8 i 10 de l'element primer.[55] En el fulls següents hom trobarà una fotocòpia de l'original de l'explicació de les notacions, així com de les tres taules.

---

53 EUCLIDES, *The elements*, edició anglesa de T. L. Heath, Dover, Vol. 2, Nova York, 1956, pàg. 346.

54 A aquesta taula fa referència en el *Circolo* (Bolonya 1672), on diu:
"Aquí es pot veure afegint-hi la unitat als costats, i a dalt, com en el primer element de la meva Geometria Speciosa jo la represento, i la defineixo, i explico les seves propietats, i en el segon, tercer, i sisè, també l'utilitzo, i el Vietta que en va ser l'autor, a l'Algebra Speciosa, i en el seu Llibre de les Seccions angulars." Pàg. 3.
Dins l'obra de Vieta he trobat taules similars a "Ad Angulares Sectiones", *The Analytic Art*, T. R. Witmer tr., Kent State University Press, Kent, Ohio, 1983, pp. 297-9.

55 Ibid, pp. 15-9.