UNA APROXIMACIÓ AL PENSAMENT ALGEBRAIC A L'ESPANYA DEL SEGLE XVI

Estudi del manuscrit 2294 de la Biblioteca de la Universitat de Salamanca

TREBALL DE RECERCA
D'HISTÒRIA DE LES CIÈNCIES
FÀTIMA ROMERO VALLHONESTA
BARCELONA, 20 de JULIOL de 2007

Tan sutil, tan excelente
Es el arte de contar,
Tan dulce y tan eminente,
Tan fácil (lector prudente)
Que en la artes no hay su par
Es tan alta que Platón
En su puerta, así escribía:
Nadie oiga mi lección
Ni se tenga por varón
Si contar ya no sabía.
Quien saber estos primores,
Los desea, y sin afán:
Quien gozar de estos favores,
Quien gustar de sus dulzores
Oiga los del alemán.
Y quien no se halla a mano
De saber si lo desea,
Este bien tan soberano
De su propia lengua y mano
Este libro tenga y lea.

(Poema laudatori que apareix al principi de l'Àlgebra de Marco Aurel, escrit per un amic de l'autor)

ÍNDEX

1. INTRODUCCIÓ

El meu interès per fer un treball de recerca sobre l'àlgebra de Diego Pérez de Mesa va sorgir després de cursar les assignatures d'Àlgebra i Geometria I i II, impartides per la Dra. M. Rosa Massa i incloses en el pla d'estudis del Doctorat Interuniversitari d'Història de les Ciències de la Universitat de Barcelona i de la Universitat Autònoma de Barcelona.

M'havia dedicat sempre a l'ensenyament de les matemàtiques i m'interessava la seva història tot i que encara no havia trobat el moment d'estudiar-la. Les petites incursions que hi havia fet, però, m'havien fet adonar que podia ser un recurs didàctic potent. Amb la intenció d'aprendre història per disposar de més eines de cara a l'ensenyament de les matemàtiques, em vaig matricular a les assignatures d'Àlgebra i Geometria. Després, com passa amb algunes teories matemàtiques que sorgeixen per aplicar-les a problemes concrets i acaben tenint vida pròpia, podríem dir que la Història va caminar sola. Em va interessar molt per ella mateixa, independentment de les aplicacions que hi pogués veure a les classes que impartia.

Uns dels aspectes que vaig trobar més apassionants va ser l'evolució del pensament matemàtic en les diferents fases d'algebrització d'aquesta disciplina que inclouen l'àlgebra retòrica, la sincopada i la simbòlica[1]. Vam estudiar obres cabdals i també vam comentar diversos articles tant sobre l'àlgebra com sobre la seva història. Un dels treballs que vaig fer va versar sobre un article de 1996: "*The creation of the history of algebra in the sixteenth century*" de Giovanna Cifoletti[2]. En aquest article s'expressa l'opinió que després de Diofant, el pas

[1] Segons la classificació que va fer l'historiador de la matemàtica alemany G.H. Nesselmann el 1842 a l'obra *Algebra der Griechen nach den Quellen bearbeitet*.

[2] Cifoletti va nèixer a Milano el 1952. És doctora en Història de la Ciència per la Universitat de Princeton i en Filosofia per la Universitat de Montréal. Actualment viu a Paris i treballa a L'École des Hautes Études en Sciences Sociales (EHESS).

crucial en el desenvolupament de l'àlgebra el van donar els francesos en el segle XVI, i s'obvia per tant, la important contribució dels àrabs. S'hi citen molts autors i hi ha implícites moltes idees que se m'escapaven, i per mirar d'entendre-les, vaig estudiar els corrents que van influir en el pensament del segle XVI.

En aquest segle les matemàtiques van experimentar a Europa canvis molt profunds, la difusió dels quals es va veure afavorida per la invenció de la impremta en el segle anterior, que va transformar el sistema de transmissió de la cultura. Un d'aquests canvis va ser el desenvolupament de l'àlgebra a partir de les aritmètiques mercantils. Les necessitats relacionades amb l'activitat mercantil i financera van impulsar el desenvolupament de l'aritmètica i del seu ensenyament ja a partir de l'any 1300. Al segle XVI l'àlgebra estava associada a les aritmètiques mercantils i consistia en una sèrie de tècniques que les complementaven i que van anar arraconant els mètodes de falsa posició. Des del segle XV s'havien començat a utilitzar els símbols + i -; el símbol = va ser introduït per Robert Recorde (1510-1558) en el seu tractat d'àlgebra *The Whettstone of Witte,* però l'ús de símbols per a designar les incògnites i les seves potències es va anar desenvolupant molt lentament. En la segona meitat del segle XVI van començar a aparèixer tractats dedicats a divulgar les regles bàsiques de l'àlgebra que va anar deixant de ser concebuda només com una eina de resolució de problemes per esdevenir un objecte d'estudi per ell mateix, capaç d'agafar cos com una branca independent de les matemàtiques. El pas de gegant en el simbolisme, però, no es va donar fins el 1590 amb l'obra *In Artem Analiticam Isagoge* de François Viète (1540-1603) que va ser el primer autor en utilitzar lletres no solament per designar la incògnita i les seves potències, sinó també com a coeficients generals.

L'algebrització de les matemàtiques no va ser acceptada amb igual entusiasme a tots els països i, si bé en alguns, com Itàlia[3], hi va haver un nombrós grup d'algebristes en la primera meitat del segle XVI, en d'altres l'àlgebra es va rebre amb reticències i fins i tot, hi va haver qui va considerar els seus procediments impropis del pensament matemàtic.

A Espanya, a l'obra "*Los matemáticos españoles del siglo XVI*", Rey Pastor estudia les produccions impreses dels matemàtics espanyols del segle XVI i les troba molt pobres en comparació amb les dels estrangers contemporanis. Arriba a la conclusió que, si bé a la primera meitat dels segle XVI hi va haver a Espanya importants aritmètics, a partir d'aleshores, la matemàtica espanyola va deixar pràcticament d'existir, afirmació que després d'haver treballat algunes obres d'aquesta època, trobo molt agosarada i força discutible. De fet Rey Pastor no va fer un estudi prou profund de les obres dels autors que cita com per poder treure'n aquestes conclusions. En el capítol titulat "clasificación de los tratadistas españoles", divideix els matemàtics espanyols del segle XVI en tres grups. El primer grup està format pels matemàtics de la primera meitat del segle que tenien l'Aritmètica com a característica principal de les seves obres. Entre aquests, cita Pedro Ciruelo, Síliceo, Lax, Francés, Ortega i Alvaro Tomás. El segon grup el formen els que ell anomena algebristes, que cultivaven l'aritmètica algebraica. D'entre aquests, cita Marco Aurel, Pérez de Moya, Antic Roca i Pedro Núñez[4]. El tercer grup el formen Herrera, Molina, Falcó, Rodrigo Porras, Firrufino, etc, que es van dedicar predominantment a estudis geomètrics. En alguns fragments del llibre, Rey Pastor posa de manifest de manera molt contundent la seva decepció en estudiar els matemàtics espanyols del XVI. Hi ha expressions com "cuando esperábamos encontrar multitud de

[3] El lideratge de l'Itàlia renaixentista no es va limitar al terreny de les matemàtiques sinó que va influir en tota la cultura en general. Va transmetre el gust per la literatura clàssica i l'idea que es podia construir un món millor a partir del llegat literari de Grècia i Roma. Aquestes innovacions van portar a l'exigència de reforma en les escoles i universitats per tal que paressin menys atenció en certes disciplines que havien dominat la pedagogia medieval, particularment la dialèctica, i que es donés més importància a les llengües i literatures clàssiques.

[4] Per completar aquesta informació es pot llegir Salavert (1990).

tratados algebraicos con fechas anteriores a los del resto de Europa, como correspondía a nuestra ventajosa posición[5], vemos con asombro, que el primero publicado en nuestra patria es el de Marco Aurel, en 1552 [Rey Pastor, 1934, 97][6]. Una mica més endavant diu: "muy doloroso es confesarlo, pero el Álgebra fue ignorada por los españoles, hasta que el alemán *Marco Aurel,* se la dió a conocer en 1552, con un libro vulgar y atrasado..." I encara una mica més endavant, en el mateix capítol: "es preciso que venga un alemán vulgar a darnos noticia de ella; de la misma Álgebra enriquecida y casi engendrada en nuestro suelo, varios siglos antes, por la raza odiada". En el capítol que dedica a Pérez de Moya hi diu: " el Álgebra había hecho después de la *Summa* de Burgo los enormes progresos que hemos visto, y Moya se limitó a tomar de Aurel parte de lo que éste había tomado de la *Summa* [Rey Pastor, 1934, 106].

Lluny d'encomanar-me el seu desànim, i ja que no hi ha estudis aprofundits sobre els textos d'àlgebra espanyols de la segona meitat del segle XVI[7], aquesta lectura em va engrescar a estudiar-ne algun amb profunditat per saber alguna cosa més dels coneixements algebraics de l'Espanya de l'època. També m'interessava entendre l'anomenada polèmica sobre la ciència espanyola a la qual feien referència diferents textos que havia llegit[8].

---

[5] Aquí Rey Pastor fa referència als anys de convivència amb els àrabs.

[6] Si bé és cert que no es coneix cap àlgebra publicada a la Península Ibèrica abans que la de Marco Aurel, Javier Docampo posa de manifest a la seva tesi *" La formación matemática del mercader catalán 1380-1521. Análisis de fuentes manuscritas",* (2004) que hi havia al menys dos manuscrits amb contingut algebraic i escrits en llengua vernàcula, anteriors al llibre de Marco Aurel: el manuscrit original del tractat de Pedro Nuñez i el que analitza Docampo en la seva tesi, el manuscrit 71 de St. Cugat ACA.

[7] No s'ha publicat, per exemple, cap estudi sistemàtic de l'àlgebra de Marco Aurel, essent segons diversos autors, la font principal del llibre d'àlgebra més popular que es va escriure a la Península Ibérica en el segle XVI, la *Arithmetica practica y speculativa* de Pérez de Moya.

[8] Aquesta polèmica es centra en l'activitat científica desenvolupada en l'Espanya dels segles XVI i XVII. Alguns autors defensen la inexistència d'aquest desenvolupament i d'altres diuen que el geni espanyol d'aquella època no té res a envejar al dels altres països europeus. Sembla, però, que aquestes opinions tan distants responen a idees polítiques enfrontades més que al resultat d'estudis seriosos sobre el tema. En la confrontació d'aquestes opinions hi planava l'ombra de la Inquisició i la seva responsabilitat en la inexistència o no d'un tal desenvolupament. Més informació a Pardo Tomás (1991)

Mentre pensava per quin dels algebristes em decidia, M. Rosa Massa em va parlar d'un manuscrit de finals del segle XVI que contenia aritmètica i, possiblement àlgebra. L'havia citat Isabel Vicente[9] en una conferència que va impartir a la Universitat Pompeu Fabra de Barcelona i va ser ella qui n'hi va proporcionar la referència. El seu autor era Diego Pérez de Mesa i es tractava del manuscrit 2294 de la Biblioteca Universitària de Salamanca. Malgrat les dificultats que preveia per la transcripció del manuscrit, el fet de poder treballar una obra inèdita, em va fer decidir per aquest autor.

Aquest manuscrit i molts d'altres de l'època han romàs inèdits. Pot ser que hi hagués tingut a veure la dificultat per a l'accés a la impremta a Espanya[10] i també pot ser que hi tingués alguna cosa a veure el pes que va tenir en aquest país l'activitat inquisitorial[11]. Sigui pel motiu que sigui, el fet de romandre inèdits ha dificultat l'accés a la seva consulta. Alguns d'ells, com el 2294 de la biblioteca universitària de Salamanca, no han s'han estudiat en profunditat. L'objectiu d'aquest treball és aportar nous elements que ajudin a entendre quin era realment l'estatus de l'àlgebra a Espanya en un segle que va ser clau en el seu desenvolupament, centrant-me sobretot en l'idea d'àlgebra i en el tractament dels irracionals, les equacions i els sistemes d'equacions.

El treball està estructurat de la manera següent: començaré donant un apunt biogràfic sobre l'autor i sobre altres autors d'àlgebres de la Península Ibèrica, als quals faré referència més endavant en els capítols dedicats a les equacions i als sistemes d'equacions. Després de descriure breument el manuscrit, em referiré a les seves possibles fonts. A continuació, analitzaré l'aportació d'aquest manuscrit a la matemàtica en cinc apartats que tracten del concepte d'àlgebra, la notació, els irracionals, les equacions i els sistemes d'equacions.

---

[9] Isabel Vicente Maroto és catedràtica del departament de Física Aplicada de la Escola Universitària Politècnica de Valladolid. És autora juntament amb M. Esteban Piñeiro de *Aspectos de la Ciencia Aplicada en la España del Siglo de Oro* (1991).

[10] Per a més informació, vegi's Navarro [1999, pp. 29-39]

[11] El primer índex de llibres prohibits per la Inquisició va ser publicat el 1559 pel papa Paulo IV i Diego Pèrez de Mesa va nèixer el 1563.

2. DIEGO PÉREZ DE MESA

Diego Pérez de Mesa va néixer a Ronda (Málaga) el 1563 i va estudiar Arts[12] (1577-1581) i Teologia (a partir de 1582) a la Universitat de Salamanca. En aquesta ciutat va seguir els cursos que impartia Jerónimo Muñoz, (València 1520- Salamanca 1592) des de la seva càtedra d'astronomia i matemàtiques[13].

Entre el 1586 i el 1595 va ocupar la càtedra de matemàtiques i astronomia d'Alcalá d'Henares i el 1591 es va presentar a les oposicions a la càtedra de Salamanca que havia deixat vacant Jerónimo Muñoz. La va guanyar però no en va prendre possessió i va decidir quedar-se a Alcalá. El 1595, sembla que per mandat de Felip II, es va traslladar a Sevilla per ocupar una càtedra entre els anys 1595 i 1600. Va ser conseller del cardenal Gaspar de Borja i Velasco, i probablement va viure a Nàpols i Roma, acompanyant-lo quan va ser ambaixador en aquesta ciutat (1616-1618) i virrei de Nàpols (1620). Li va dedicar *Política o Razón de Estado* l'any 1632.

Va escriure diversos treballs de nàutica, astrologia, astronomia i matemàtiques, però cap d'ells es va arribar a publicar. D'entre aquests treballs destaca *Comentarios de Sphera*, un estudi cosmogràfic de quatre llibres en el que fa referència a autors com Copèrnic, Aristòtil o Ptolemeu. Va traduir de l'italià el *Libro de los maravillosos efectos de la limosna* de Julio Folco (1589) i cap el 1590, va publicar una nova edició del *Libro de grandezas y cosas memorables de España* de Pedro de Medina[14], que va corregir i ampliar. En un article de Rafael Sabio

[12] Els estudis d'Arts tenien un caràcter preparatori per a ingressar a les facultats superiors de Teologia i Medicina. Les facultats d'Arts eren considerades facultats menors. Deriven del *trivium* (gramàtica, retòrica i dialèctica) i el *quadrivium* (aritmètica, geometria, música i astronomia) medievals però en realitat eren facultats de Filosofia.

[13] Aquest destacat científic havia nascut a València on es va graduar en Arts. Va viatjar per Europa per completar la seva formació. Va ocupar la càtedra d'hebreu a la universitat d'Ancona. Va tornar a València on va exercir de catedràtic d'hebreu i matemàtiques entre 1563 i 1578. A partir del 1579 va ocupar la càtedra d'astronomia i matemàtiques de Salamanca.

[14] Pedro de Medina va néixer segurament a Sevilla a finals del segle XV i va realitzar estudis centrats en l'astronomia i la cosmografia. És autor d'un tractat de nàutica que va ser traduït a sis

publicat el 2003 a la Revista de estudios tarifeños amb el títol "La historia de Tarifa según dos autores del siglo XVI: Pedro de Medina y Diego Pérez de Mesa", es comenten les aportacions de Pérez de Mesa al text original de Pedro de Medina del 1548. Segons l'autor de l'article, Pérez de Mesa informa en el pròleg que la seva pretensió és "mejorar el mal lenguaje empleado en su redacción por el autor, así como aumentarle en lo que pueda, que es bastante". La primera part de l'obra de Pedro de Medina és històrica i abasta des dels orígens de caràcter mític atribuïts a Tarifa fins al regnat de Carles V, a la que Pérez de Mesa hi afegeix fets del regnat de Felip II. La segona part és una descripció d'Espanya dividida en províncies i regnes, i dins de cadascun hi ha capítols dedicats a les poblacions més rellevants. En aquesta part, Pérez de Mesa afegeix poblacions a les tractades a l'edició original i també amplia els comentaris corresponents a algunes de les localitats consignades per Pedro de Medina[15].

Segons F. J. Juez[16], Pérez de Mesa és l'autor de la segona part de l'únic manuscrit[17] conegut per ara a Espanya que conté alguna obra del poeta croat Marko Marulic[18]. Aquesta segona part l'ocupen tres tractats matemàtics escrits en llatí: *De artihmeticis, De algebra* i *De regnomonica*, el primer i tercer dels quals estan datats el 1592 i 1593 i consta com el seu autor *Iacobus De Mesa* o *Iachobus Perez de Mesa*.

llengües essent molt difós per tot Europa i que va transmetre una imatge positiva de l'activitat científica que es duia a terme a l'Espanya d'aquella època.

[15] Per més informació vegi's Sabio (2003).

[16] Francisco Javier Juez Gálvez és professor del departament de Filologia Eslava de la facultat de Filologia de la Universitat Complutense de Madrid.

[17] Es tracta del manuscrit 19008 de la Biblioteca Nacional de Madrid, que només està catalogat de manera provisional.

[18] M.Marulic (Split, 1450 – Split, 1524) és considerat generalment el pare de la literatura croata. Segons el professor Juez, Pérez de Mesa seria un dels més destacats "marulòfils" espanyols dels segles XVI i XVII. La "Marulología", és la disciplina que engloba les investigacions referides al príncep dels humanistes croats, conegut a Europa Occidental amb el seu nom llatí, *Marcus Marulus.* La seva obra va tenir molta difusió en l'Europa dels segles XVI i XVII.

No se sap quins motius va poder tenir Pérez de Mesa per a no publicar el manual d'àlgebra objecte d'aquest treball, ni cap altre dels seus escrits i per a publicar, en canvi, el *Libro de grandezas y cosas memorables de España.* Un dels motius que s'apunten és el de la censura. Encara que la disciplina més vigilada pel Sant Ofici fos la Teologia, la majoria de professors d'astronomia de les universitats espanyoles en les que s'hi impartia aquesta matèria, no van imprimir els seus manuals. Jerónimo Muñoz va deixar manuscrits els seus tractats d'astronomia i Pérez Mesa va defensar la competència de l'astrònom per a tractar qüestions cosmològiques i va ensenyar idees semblants a les tractades per Muñoz en les seves obres. Podria ser que intentessin evitar la censura per part de filòsofs per les seves incursions cosmològiques[19].

[19] Navarro, V., 1999, [34-39]

3. ALTRES AUTORS D'ÀLGEBRES DE LA PENÍNSULA IBÈRICA[20]

El primer llibre imprès a la Península Ibèrica que es pot considerar d'àlgebra porta per títol: *Despertador de ingenios. Libro Primero de Arithmetica Algebratica* i es va publicar a València l'any 1552. Del seu autor, Marco Aurel, se'n sap ben poca cosa, a part que era alemany, que s'havia afincat a València per tal d'ensenyar matemàtiques pràctiques i que és autor d'una aritmètica mercantil.[21]

Segons diversos autors, el llibre d'Aurel sembla haver estat una de les principals fonts del llibre d'àlgebra més popular que es va escriure a la Península Ibérica en el segle XVI, la *Arithmetica practica y speculativa* (Salamanca, 1562) de Juan Pérez de Moya (Santisteban del Puerto, ca. 1513 - Granada, ca. 1597) que va arribar a tenir unes 30 edicions. Pérez de Moya va estudiar a Salamanca i va ser capellà del seu poble natal. El 1590 va ser nomenat canonge de Granada. Apart de l'obra citada, va publicar també un *Tratado de geometria Practica, y Speculatiua (*Alcalá de Henares, 1573).[22]

---

[20] En aquest apartat donaré un petit apunt biogràfic de tres autors d'àlgebres del segle XVI: Marc Aurel, Juan Pérez de Moya i Pedro Núñez. La justificació d'aquesta tria és la importància de les tres àlgebres de les quals són autors, per diferents motius. La de Marc Aurel sembla que va ser la primera que es va imprimir a la Península Ibèrica, la de Pérez de Moya va ser la més popular i la de Núñez, segurament la més important.

[21] Segons Rey Pastor, el contingut del llibre és un compendi força acceptable de la part algebraica continguda en la *Summa de aritmetica, geometria, proportioni e proporcionalita* (1494) de Luca Pacioli (Sansepolcro, 1445 - Sansepolcro, 1517); en uns punts millorada i en altres empitjorada. La millora es refereix a la notació i, en canvi, significa un retrocés quant a les regles per a resoldre equacions de segon grau [1934, pp. 100-101].

[22] El 1583 es va publicar *Varia historia de sanctas e illustres mugeres en todo género de virtudes*, que s'inscriu dins de la temàtica de la biografia moralitzant. També participa d'aquest caràcter doctrinal la seva obra: *Comparaciones o símiles para los vicios y virtudes* (Alcalá de Henares, 1584), reeditada diverses vegades. La seva darrera obra, *Philosophia secreta* (Madrid 1585) va obtenir d'immediat un gran èxit i va ser considerada un autèntic *vademecum* per a qualsevol artista barroc que volgués conèixer les històries de mitologia grecollatina.

Segurament, però, el matemàtic més destacat de la Península Ibèrica en el segle XVI va ser el portuguès Pedro Núñez (Alcácer do Sal, 1502- Coimbra, 1578) que va estudiar medicina y matemàtiques i va ser professor de matemàtiques durant sis anys a la Universitat de Salamanca i després a Coimbra[23]. El seu llibre *De algebra en arithmetica y geometria,* escrit en portuguès en la dècada dels trenta, no va ser publicat fins el 1567 i en castellà.[24].

---

[23] En aquesta universitat va tenir com a deixeble a Clavius, que va ser després un destacat matemàtic i va participar activament en la reforma gregoriana del calendari.

[24] A part de la seva important contribució a les matemàtiques, Núñez també en va fer d'importants a l'astronomia i a la navegació. Va inventar l'aparell que després es coneixeria com "nonius" que permetia, amb l'ajut de l'astrolabi, mesurar fraccions de grau d'angles molt petits. En el seu *Tratado de la navegación* (1546) va publicar un descobriment que va tenir importants implicacions geomètriques: la corba loxodròmica. Es creia, abans, que si s'avançava sobre la superfície terrestre amb un rumb fix, és a dir, formant un angle constant amb el meridià, la línia recorreguda era un cercle màxim. Dit d'una altra manera, que una nau que seguís aquest camí, arribaria a donar la volta al món, tornant al punt de partida. Nuñez va ser el primer en adonar-se de la falsedat d'aquesta idea tan arrelada, demostrant que la corba que es recorreria té el pol per punt asimptòtic. Va ser anomenat cosmògraf real el 1539. Les seves obres completes van ser publicades amb el títol *Petri Nonii Opera* (Basilea, 1592).

4. EL MANUSCRIT 2294 DE LA UNIVERSITAT DE SALAMANCA

4.1 Descripció

L'àlgebra de Diego Pérez de Mesa forma part del manuscrit 2294 datat el 1598 que es troba a la Biblioteca Universitària de Salamanca. Consta de 100 pàgines a doble cara i porta el títol: *Libro y tratado del arismetica y arte mayor y algunas partes de astrología y matematicas compuestas por el eroyco y sapentisimo maestro El Licenciado Diego perez de mesa catredatico desta Real ciudad de Sevilla del año de 1598.* L'àlgebra pròpiament dita, que l'autor titula *Tratado y Libro de arte mayor o algebra,* comença a la pàgina 60 i consta d' una introducció i 23 capítols.

En la introducció l'autor presenta l'àlgebra i la defineix com una part de l'aritmètica a la que, segons diu, els autors[25], principalment els italians, anomenen "cosa"[26].

En el primer capítol, *De la naturaleza y propiedades de los números,*[27] Pérez de Mesa diferencia els nombres abstractes, que diu que són ens fabricats per l'enteniment i anomena també "numerantes", dels nombres concrets que anomena "numerados". Divideix els nombres en 5 categories: enters, fraccions vulgars, fraccions astronòmiques[28], figurats[29] i proporcionals.

---

[25] Pérez de Mesa es refereix sovint al que diuen els "autors" quan vol posar de manifest algun fet, donant a entendre que algú amb prou autoritat per fer-ho, l'ha establert amb anterioritat. També parla a vegades en el mateix sentit dels "escriptors".

[26] Luca Pacioli en la seva obra *Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalità* (1494) es referia a la incògnita com "cosa", terme del qual va derivar "Coss" en els àmbits germànic i anglès.

[27] Els fragments literals de les obres de Pérez de Mesa, Marc Aurel, Pérez de Moya i Pedro Núñez respecten l'original llevat de la puntuació i l'ortografia que les he adaptat a les normes actuals per facilitar-ne la lectura.

[28] En el tercer llibre de l'aritmètica, Pérez de Mesa tracta els "quebrados astronómicos" . Diu que els matemàtics, principalment els astròlegs no divideixen les coses en meitats, terceres parts, quartes, etc. com "el vulgo" sinó que la primera divisió que apliquen és en 60 parts, és a dir, quan parla de fraccions astronòmiques es refereix a la divisió sexagesimal de la unitat.

En el segon capítol, *Del fundamento porqué se puso el álgebra en proporciones o figuras,* considera que de les anteriors categories, la del nombre proporcional és la més universal i la més adient per utilitzar en l'àlgebra ja que, segons l'autor, l'àlgebra és l'art universal per raonar.

En el tercer capítol, *Cómo se entienda haber formas en los números*, tracta una qüestió que ja havia tractat en el llibre quart de l'aritmètica que precedeix l'àlgebra en el manuscrit. Allà deia Pérez de Mesa que tots els nombres tenen amagada als sentits una certa figura que només es percep per les seves unitats i que Aristòtil anomena forma:

> Todo número tiene en sí cierta manera de figura aunque se esconda a los sentidos. Las figuras en la cantidad continua son 3 en género: línea, superficie y cuerpo. Otras tantas formas ponen los aritméticos en los números haciendo unos lineales, otros superficiales y otros sólidos o corpóreos. Y por ventura se pueden admitir otras dimensiones o figuras en los números que no pueden darse en la cantidad continua. Éstas serían cuadrado de cuadrado, relato y supersólidos cuadrados y otros semejantes donde se funda el arte mayor o álgebra. [Pérez de Mesa, 1598, 36]

L'autor fa, sovint, paral·lelismes entre els nombres, que pertanyen al terreny de l'aritmètica i les quantitats contínues que pertanyen al de la geometria. Per Pérez de Mesa el terme "forma" és l'equivalent en l'aritmètica del que s'entén per dimensió en geometria.

En el quart capítol, titulat *De los principios propios del álgebra,* expressa la seva idea d'àlgebra que completa en el cinquè, *Del valor o dimensiones de los números*

[29] En el *"Libro 4º de los números figurados"* de l'Aritmètica (p. 36), tracta de l'origen de les formes o figures en els nombres i en torna a parlar en el capítol tercer de l'àlgebra com veurem en l'apartat 4.2.

proporcionales, i en el sisè titulat *De la diversidad de las operaciones aritméticas por la diversidad de las dimensiones.*

Els quatre capítols següents es refereixen a la suma, resta, multiplicació i divisió de dimensions o figures.

En els capítols que van de l'onzè al setzè, Pérez de Mesa tracta de la naturalesa de les fraccions, de les formes de reduir-les i de la suma, resta, multiplicació i divisió d'expressions fraccionàries tant si afecten els coeficients com la indeterminada i remet a la definició de fracció que fa en la seva aritmètica menor.

En el capítol dissetè titulat *"De la naturaleza de las raíces o lados"* tracta dels nombres racionals i irracionals i en parlaré en l'apartat 5.3.

El sis darrers capítols tracten la resolució de les equacions i dels sistemes d'equacions.

4.2 Fonts

Al principi de l'àlgebra Pérez de Mesa cita Pitàgores i Plató, com a exemples de persones doctes en la part de l'aritmètica que té com a objectiu l'estudi de la naturalesa dels nombres segons les seves propietats.

Cita després a "Triputeon"[30] quan es refereix a diferents denominacions que rep l'àlgebra i diu que aquest autor l'anomena "ciencia de la cuadratura".

En el capítol primer, que fa referència a la naturalesa dels nombres, fa una sèrie de reflexions de caire més aviat filosòfic i es refereix diverses vegades a

Aristòtil[31]. Cita concretament "el primer libro de los posteriores, capítulo 23" [Pérez de Mesa, 1598, 62][32], en un fragment en el que disserta sobre la importància de l'aritmètica i la geometria. Després posarà de manifest les diferències entre els nombres i les quantitats contínues i dirà que "Platineo"[33] considera que el nombre i el continu no participen de la mateixa manera de la naturalesa de quantitats, sinó que és el nombre el que té l'essència de quantitat.

En el capítol tercer, que com he dit en la descripció del manuscrit, tracta de la forma que tenen amagada els nombres, cita a Jordano[34] i al "maestro Ciruelo"(1470-1548) [35]. Segons afirma Pérez de Mesa, diuen que la figura en el nombre, depèn de la disposició que donem a les seves unitats. Per exemple, si es disposen les unitats del 3 de la forma:

• • •

el 3 és un nombre lineal, però també es podien haver col·locat d'aquesta altra forma:

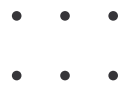
---

[30] No està clar a qui es refereix Pérez de Mesa amb el nom de "Triputeon". Més endavant cita a "Puteon". Podria tractar-se de la mateixa persona i podria ser Johannes Buteo, nom llatinitzat de Jean Borrell, matemàtic francès nascut al voltant del 1492, i mort entre 1564 i 1572.
[31] Durant el segle XVI es va incrementar la influència humanística sobre l'educació, que plantejava tot un repte a la filosofia aristotèlica. Tot i això, l'autoritat d'Aristòtil va seguir dominant els estudis universitaris fins ben entrat el segle XVII.
[32] Més endavant tornarà a citar Aristòtil. En aquest cas, el capítol onzè del llibre cinquè de la Metafísica.
[33] Aquí podria referir-se Pérez de Mesa a Plotino, filòsof del segle III, nascut a Licòpolis (Egipte).
[34] Es pot tractar de Jordanus Nemorarius (1225-1260), matemàtic i filòsof alemany . Va escriure 6 tractats de matemàtiques, el més important dels quals pel que fa referència a la seva contribució al desenvolupament de l'àlgebra és: *De numeris datis.* Per més informació vegeu Hoyrup (1998) .

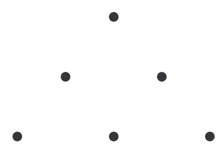
[35] Pedro Sánchez Ciruelo va nèixer a Daroca el 1470 i va ser preceptor de Felip II i professor de teologia a la universitat d'Alcalà de Henares. Va escriure el 1529 *Cursus quattuor mathematicarum artium liberalium.*

I aleshores tindríem un nombre triangular.

Les unitats del 6 es podrien col·locar de la forma:



I diríem que el nombre és “quadrangulo”, però també les podíem haver disposat:



I el nombre seria triangular.

Continuant amb aquest capítol, que és un dels més espessos del manuscrit, diu que quan es parla de quantitats contínues, sorgeixen els quadrats si es multiplica una línia recta per una altra i, entre els nombres, els quadrats o plans sorgeixen multiplicant un nombre per ell mateix. També hi ha els nombres “planos quadrangulos” o “planos prolongados” que s’obtenen al multiplicar dos nombres diferents. Aquí cita a “puteon” que anomena “contingut” a tot nombre pla, i “continent” a un dels costats que l’ha generat. A l’altre costat diu que se l’anomena normalment “cosa”.

Al final d'aquest capítol cita els llibres segon, setè, vuitè, novè i desè dels *Elements* d'Euclides. En les referències a aquest autor, que són moltes, Pérez de Mesa sempre cita llibres concrets i sovint, proposicions concretes. Com veurem en l'apartat següent, una proposició que és clau per ell com a fonament de l'àlgebra és la vuitena del novè llibre i quan tracti les equacions de segon grau dirà que la doctrina general per a resoldre-les està basada en la setena proposició del segon llibre dels *Elements* i en el mateix capítol fa referència també a la sisena[36].

Un altre dels autors que cita és "peronuñez"[37] en un fragment del capítol quart en el que parla del nom que es sol donar a la incògnita i diu que aquest autor, a diferència dels italians que l'anomenen "cosa", distingeix entre "lado o raíz".

Cap el final del manuscrit Pérez de Mesa critica els autors, en general, perquè diu que només s'han ocupat de les equacions de primer i segon grau i cita "Nicolas Tartalia" (1500-1557)[38] com a excepció, per haver inventat un mètode per a resoldre les equacions de tercer grau sense terme quadràtic.

En el darrer capítol, després de resoldre sistemes d'equacions lineals, Pérez de Mesa cita a Diofant (ca. 200-ca. 284) i es refereix a la resolució de les equacions que avui s'anomenen diofàntiques. Posa com a exemple l'equació $6x^2 + 16 = y^2$ i diu que per resoldre-la Diofant suposa que $y=2x+4$, que al substituir-ho en el segon membre de l'equació resulta: $6x^2 + 16 = 4x^2 + 16x + 16$ i d'aquí $x=8$.

A l'Aritmètica hi són citats alguns d'aquests autors però també en cita dos més que val la pena destacar. En el llibre tercer de les fraccions astronòmiques justifica la divisió de unitat en 60 parts dient que 60 és un nombre que té molts

[36] L'expressió algebraica que correspondria a la proposició 6 del llibre II dels *Elements* és: $(2a+b)b+a^2=(a+b)^2$ i la que correspondria a la proposició 7 del mateix llibre: $(a+b)^2+a^2=2(a+b)a+b^2$

[37] Aquí es refereix clarament a Pedro Núñez.

divisors i atribueix aquest motiu a Oroncio Fineo[39]. En el capítol de les "falsas oposiciones" del llibre cinquè explica la regla de falsa posició i diu que hi ha dues maneres d'aplicar-la. Una d'elles l'atribueix a "Juanputeon" que ja hem citat anteriorment i l'altra l'atribueix a "Gema Frisio" (1508-1555) [40].

[38] Niccolo Fontana, més conegut com a Tartaglia, va nèixer a Brescia el 1500 i va morir a Venècia el 1557. El seu nom està lligat a la fórmula de la resolució de l'equació de tercer grau i a les disputes que va tenir amb Cardano al voltant d'aquesta fórmula.

[39] Oriontius Finaeus és el nom llatinitzat, que ell mateix utilitzava, d'Oronce Finé, matemàtic francès nascut a Briançon el 1494 i mort a París el 1555. La seva obra més important és *Protomathesis*, dividida en quatre parts, la primera de les quals tracta d'aritmètica, particularment dels nombres enters, les fraccions comuns i les astronòmiques.

[40] Regnier Gemma Frisius va ser un matemàtic holandès nascut el 1508 a Dokkum i mort el 1555 a Lovaina. Els seus treballs són principalment d'Astronomia i Cosmografia. Va ser professor de Mercator i després col·laborador seu. Jerónimo Muñoz, del qual, com ja hem dit, Pérez de Mesa va ser deixeble, es declara en els seus manuscrits deixeble d'Oronce Finé i Gemma Frisius.

5. CONTINGUT DEL MANUSCRIT

5.1 El concepte d'àlgebra

En aquest apartat intentaré posar de manifest la concepció de l'àlgebra dins la matemàtica de Pérez de Mesa. Les matemàtiques són, per l'autor, un conjunt de disciplines que tracten de tot allò que és proporció, pes i mesura. Entre aquestes disciplines hi ha la música, la geometria, la perspectiva, la cosmografia, la geografia, l'astronomia, la navegació, la mecànica, la gnomònica, i també l'aritmètica. Al començament de la segona part del manuscrit que titula "Tratado y libro del arte mayor o álgebra" considera en l'aritmètica tres parts principals: la logística que tracta dels comptes ordinaris d'ús públic i dels contractes, una altra d'ordre més elevat que contempla la naturalesa dels nombres segons les seves propietats i la tercera part que és l'àlgebra. Diu que alguns l'anomenen regla de la cosa i que aquest nom li escau perquè no es pot considerar una "ciència sencera" sinó una regla amb diferents cànons i preceptes mitjançant els quals es pot descobrir la veritat[41]. Com que hi ha tants cànons, considera que tots junts poden considerar-se un capítol apart dins de "l'aritmètica secreta" perquè la seva manera d'obrar és secreta i enginyosa i per la seva excel·lència alguns l'anomenen "art major de comptar". L'àlgebra té la propietat d'esbrinar si qualsevol "cosa aritmètica" és possible o impossible i quan és possible si es verifica per un nombre, per dos o per tots.

Diu l'autor que la finalitat de l'àlgebra és trobar un nombre o nombres quan es coneixen algunes de les seves propietats. En aquesta recerca hi tenen un paper molt important el que ell anomena nombres proporcionals, que són nombres que estan en progressió geomètrica. L'autor ho expressa així:

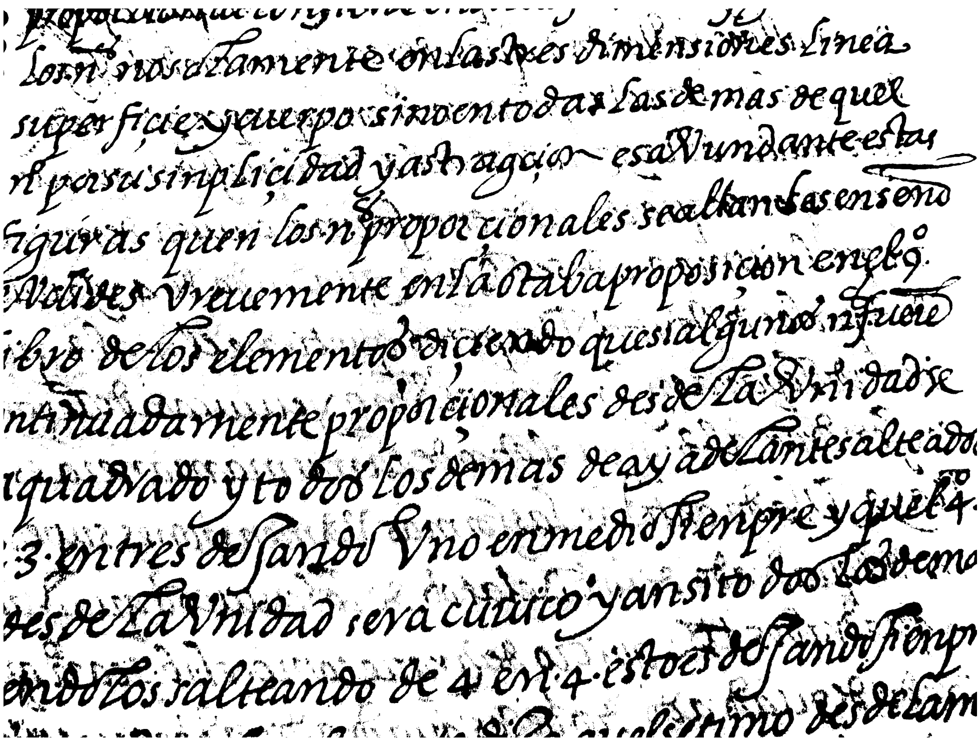
> "Es el intento y fin principal del álgebra descubrir o hallar algún número o números cualesquiera por algunas propiedades suyas las

> cuales propiedades no pueden ser otras que las que del mismo número se hallan. Éstas son: aumento o disminución, sumando o restando, multiplicando o partiendo, engendrando figuras o sacando raíces…” [Pérez de Mesa, 1598, 65-66]

Algunes d’aquestes propietats, explica l’autor, són particulars del nombre que es busca i d’altres són generals per a tots els nombres. Les propietats generals basten pel coneixement dels accidents singulars i per trobar qualsevol nombre que es busqui en aquells accidents universals que, segons Pérez de Mesa, són sis: sumar, restar, multiplicar, partir, extraure arrels i, finalment, constituir formes o figures. Els quatre primers accidents estan llargament desenvolupats en la primera part del manuscrit, l’aritmètica, així com també l’extracció d’arrels que inclou un algorisme per fer l’arrel cúbica. Quan Pérez de Mesa es refereix al càlcul de figures, està parlant del càlcul de potències. Diu que, si per exemple, es demana un nombre, el quadrat del qual sigui 36, en aquesta demanda s’hi proposen dues propietats, l’una és general a tots els nombres que consisteix en la capacitat de multiplicar-se per ells mateixos, ja que la multiplicació és accident comú a tota quantitat, però l’altra que és engendrar el 36, no és accident comú a tots les nombres, sinó només al 6 que és l’únic nombre que multiplicat per ell mateix engendra el 36. Aquí, com a tota la seva obra, no té en compte els nombres negatius.

Fa referència als ensenyaments d’Euclides i cita la vuitena proposició del llibre IX, com es por veure a les línies cinquena i sisena del següent paràgraf extret del manuscrit:

[41] En el context de l’àlgebra, quan Pérez de Mesa parla de descobrir la veritat, sempre fa referència a trobar el valor d’alguna quantitat desconeguda.



Si tants nombres com es vulgui a partir d'una unitat són contínuament proporcionals, el tercer a partir de la unitat serà quadrat, així com tots els que deixen un interval d'un i el quart serà cub així com tots els que deixen un interval de dos, i el setè serà a l'hora quadrat i cub, així com tots els que deixen un interval de cinc. Utilitzant la notació actual, podríem escriure-la:

$$1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9, a^{10}, \ldots$$ [42]

Aquesta proposició, per Pérez de Mesa, és el fonament de l'àlgebra i és present a tota la seva obra. Al segon nombre l'anomena costat, línia o arrel i diu que és el mitjà universal que es fa servir en totes les operacions de l'àlgebra per a trobar la veritat que es busca. És a dir, l'autor situa la incògnita en el segon lloc d'una progressió geomètrica de primer terme igual a 1 i, per tant, raó igual al valor de la incògnita. Amb aquest plantejament Pérez de Mesa posa de manifest la incògnita i les seves potències. Per ell, l'àlgebra és l'art de trobar el valor de la

[42] Euclides, 1994, tomo II, p. 207. Aquesta progressió la fa explícita l'autora de la traducció dels *Elements* per facilitar la comprensió del text d'Euclides.

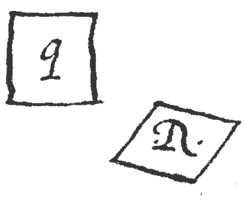
incògnita, encara que a vegades no es troba directament sinó que se'n troba alguna potència i, sabent a quin lloc de la progressió està situada aquesta potència, es pot trobar el terme que ocupa el segon lloc, que és el que interessa, fent l'arrel apropiada.

L'àlgebra, per Pérez de Mesa, és una part de l'aritmètica que l'autor diferencia de la logística que tracta de qüestions de caire més aviat comercial, i de l'aritmètica pròpiament dita que tracta dels nombres. La finalitat de l'àlgebra és trobar el valor de la incògnita fent una sèrie d'operacions aritmètiques. Com ho expressa Pérez de Mesa, es tracta de trobar un nombre coneixent algunes de les seves propietats. Podríem dir que l'àlgebra és, per l'autor, un procediment per resoldre tot tipus de problemes aritmètics.

5.2 La notació

Pérez de Mesa no defineix de manera clara la notació que emprarà a la seva àlgebra. La va introduint a mida que la necessita i normalment l'escriu al marge. Algunes vegades s'hi refereix explícitament en el text i d'altres no.

La primera anotació al marge apareix en el capítol tercer, a la pàgina 65, i hi posa les dues figures següents:

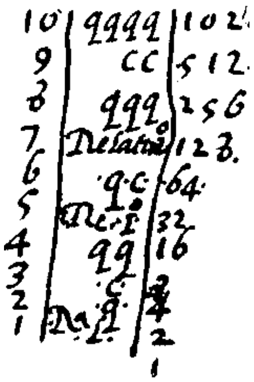


Aquí tenim un exemple del que dèiem al descriure el manuscrit amb referència als nombres i les quantitats contínues. El que pretén és il·lustrar la superioritat dels nombres amb relació a les quantitats contínues dient que així com en la "quantitat contínua" hi ha quadrat i rombe, en els nombres no hi pot haver obliqüitat, sinó sempre rectitud. Pérez de Mesa considera les obliqüitats com imperfeccions:

> ...porque esta oblicuidad nace de la materia más crasa de lo continuo... [Pérez de Mesa, 1598, 65]

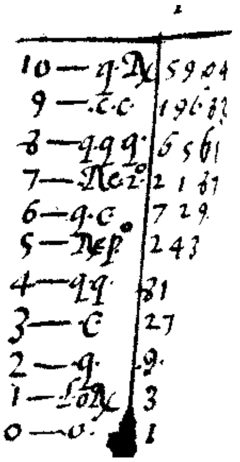
Els símbols que hi ha a les dues figures són les inicials de quadrat i rombe. Si bé en el cas del quadrat es podria pensar que la intenció de l'autor és relacionar les dues dimensions de la figura amb el símbol "q" que utilitza pel quadrat de la potència, en el cas del rombe, el símbol que utilitza és el que, com veurem a continuació, fa servir per indicar el terme lineal.

A la pàgina 66, després d'establir que els nombres proporcionals són el fonament de l'àlgebra, escriu en el marge la taula següent:



encara que no en dóna cap explicació. A la columna central hi ha representats els símbols que corresponen a les potències de la incògnita. En el cas de la primera potència hi ha dos símbols que són les inicials de "lado" i "raíz" i representen, per tant, la incògnita. Al costat del 2 hi ha la lletra q que representa el terme quadràtic i al costat del 3, la lletra c que representa el terme de tercer grau. Després es tracta d'anar combinant els símbols de forma multiplicativa per obtenir les potències corresponents. Quan l'exponent de la potència és un nombre primer, aleshores anomena relat a la potència. En la representació de la desena potència hi ha una errada ja que els símbols que hi figuren correspondrien en realitat a una setzena potència. Aquesta errada no apareix en una altra taula d'aquest estil que col·loca en el marge de la pàgina 67 i que veurem a continuació. A la tercera columna hi ha els valors de les potències de la incògnita pel cas en què valgui 2 i a la primera columna hi ha el que Pérez de Mesa anomena valor o dimensió dels termes de les proporcions[43] geomètriques que són els exponents de les potències, és a dir, els graus de la incògnita.

La taula següent és una il·lustració del mateix estil que aquesta però per la progressió que ell anomena tripla i que és la de primer terme 1 i raó 3.



10 — q.R	5904
9 — c.c	1968
8 — qqq	6561
7 — Rel2º	2187
6 — q.c	729
5 — Rel	243
4 — qq	81
3 — c	27
2 — q	9
1 — 1.oR	3
0 — o	1

Així com a la taula anterior escrivia "relato" amb totes les lletres en el cas de la setena potència, aquí ho abreuja tal com fa a les dues taules amb el "primer relat". En aquest cas afegeix zeros a la part inferior de la primera i segona columnes a diferència de la taula anterior en la qual al primer terme no li assignava grau.

Després Pérez de Mesa es pregunta com s'han d'anomenar els termes de les progressions en funció del lloc que ocupen :

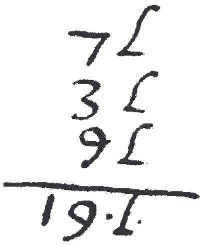
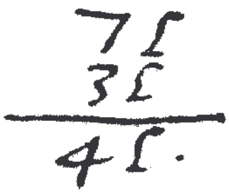
[43] Pérez de Mesa fa servir indistintament els termes "proporció" i "progressió".

> ...conviene tener presto para saber en cualquier límite[44] de los que se apartan de la unidad qué forma o figura o denominación deba ponerse. Advertiremos de la doctrina puesta, que la denominación de cuadrado es 2 y la de cúbico 3 y la de q de q es 4...[Pérez de Mesa, 1598, 67]

Vol saber, per exemple, com s'ha d'anomenar un terme que ocupi el sisè lloc i per esbrinar-ho descompon el 6 en factors, que són 2 i 3. Segons la seva nomenclatura, la denominació que correspon al 3 és "cúbic" i al 2 "quadrat", i d'aquí dedueix que la que correspon al 6 és "quadrat de cúbic". En el cas dels termes que ocupin llocs que s'expressin amb nombres primers, correspondrà al cinquè la de "primer relat", al setè la de segon relat, a l'onzè la de tercer relat i així successivament. Seguint el seu raonament, el nombre que ocupa el desè lloc s'haurà d'anomenar "quadrat de primer relat" i el que ocupa el lloc 21 és "cúbic de segon relat" i així tots els altres. I viceversa, donada una denominació, podem saber quin lloc de la progressió li correspon. Per exemple, per saber quin lloc correspon a la denominació "cúbic de quadrat de primer relat" es multipliquen els nombres corresponents, és a dir, 3, 2 i 5 i s'obté el nombre 30 que és el lloc que correspon a aquesta denominació.

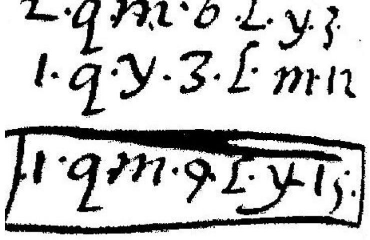
A la pàgina 70, en el capítol setè, on explica com es sumen i resten figures simples, és a dir, el que nosaltres diríem monomis, torna a posar anotacions al marge relacionades amb la notació. Explica Pérez de Mesa que per sumar o restar quantitats han de ser de la mateixa espècie, és a dir, han de ser el que nosaltres diríem termes semblants.

[44] Aquí l'autor utilitza "límit" amb el sentit de "terme".

Notació de Pérez de Mesa	Notació actual
	$\begin{array}{r} 7x \\ +3x \\ +9x \\ \hline 19x \end{array}$
	$\begin{array}{r} 7x \\ -\ 3x \\ \hline 4x \end{array}$

Com es pot veure, no posa símbols que indiquin si les operacions són sumes o restes encara que en el text ho diu: "7£ y 3 £ y 9£ montan 19£" i el text que correspondria a la resta: " de 7£ quitando 3£ quedan 4£".

En el capítol vuitè explica la suma i resta de figures compostes, el que ara anomenaríem suma i resta de polinomis. Anem a comentar amb detall una de les restes que posa al marge:

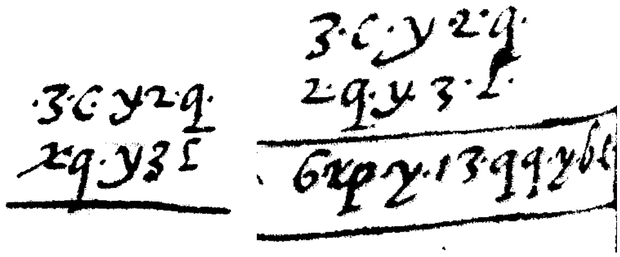
Notació de Pérez de Mesa	Notació actual
	$\begin{array}{c} 2x^2 - 6x + 3 \\ -(1x^2 + 3x - 12) \\ \hline 1x^2 - 9x + 15 \end{array}$

Cada terme té el seu signe "més" (y) o "menys" (m) i fa servir punts per separar els diferents símbols. Als primer termes no els posa signe i sempre considera que són positius. Introdueix en aquest paràgraf la nomenclatura “caràcter” per referir-se als signes “més” i “menys”:

> “Por ser primeros no tienen carácter más ni menos y siempre que fueren primeros se ha de obrar como si ambos tuviesen el carácter más” [Pérez de Mesa, 1598, 70-71].

Sabem que està efectuant una resta perquè en el text ho diu, però, igual que en cas de les figures simples, no hi ha cap símbol que ho indiqui. El primer terme començant per la dreta correspon al terme independent i fa l’operació +3-(-12)=+15. El segon correspon al terme lineal[45]. Aquí l’operació seria -6x-(+3x)=-9x. Finalment, a l’esquerra, hi ha el terme quadràtic que, com hem indicat abans, Pérez de Mesa simbolitza amb una q. L’operació en aquest darrer cas és: $2x^2 -1x^2=1x^2$

Anem ara a veure un exemple de multiplicació de la pàgina 72:

Notació de Pérez de Mesa	Notació actual
	$\begin{array}{c} 3x^3+2x^2 \\ 2x^2+3x \\ \hline 6x^5+13x^4+6x^3 \end{array}$

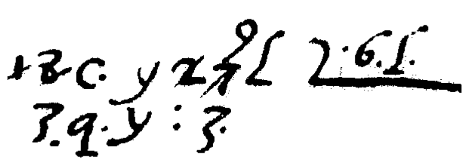
Com passava a les sumes i restes, no hi ha cap símbol que indiqui que es tracta de multiplicacions. Aquest exemple l’explica detalladament i fa referència a la manera d’escriure la multiplicació:

[45] És el terme que Pérez de Mesa anomena “cosa”, “línea”, “raíz” o “lado”.

Asimismo habiendo de multiplicar 3c y 2q por 2q y 3£ dispondremos los números en esta forma[46], luego multiplicaremos las dimensiones superiores por cada una de las inferiores de por sí escribiendo los productos debajo de la línea transversal para que estos sumandos manifiesten el número engendrado de la multiplicación precedente y procediendo de esta forma 2q por 3c engendran 6rp y 2q por 2q engendran 4qq con la partícula y por multiplicar más por más. Cancelaremos luego el número multiplicante 2q con una rayuela como se ve en el ejemplo y volveremos a multiplicar por la otra dimensión 3£ cada una de las formas superiores 3£ por 3c más por más engendran 9qq y 3£ por 2q más por más engendran 6c con el carácter y en los cuales números productos la suma es 6rp y 13qq y 6c como se ve en el ejemplo. [Pérez de Mesa, 1598, 72].

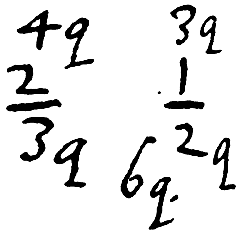
És a dir, explica que s'han de col·locar els polinomis "multiplicand" i "multiplicador" l'un a sota de l'altre i que tots els termes del "multiplicand" s'han de multiplicar per tots els del "multiplicador". No diu explícitament que s'hagin d'agrupar els termes semblants però ho fa al agrupar els que ha obtingut multiplicant 3x per $3x^3$ i $2x^2$ per $2x^2$ resultant el 13 qq, és a dir 13 x^4, que escriu en el polinomi "producte".

Pel que fa a les divisions, la figura següent il·lustra un dels passos que fa al dividir el que ara s'escriuria: $18x^3+ 27x$ entre 6x. El quocient de la divisió el col·loca a sota del dividend i els residus parcials a sobre.



[46] Aquí fa referència a l'operació que hi ha al marge però no ho diu explícitament.

En el capítol 14, on explica la resta de fraccions, hi ha la següent anotació al marge:



que vol il·lustrar la resta que ara s'escriuria: $\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}x^2$. Es tracta, per Pérez de Mesa, de la resta de dues fraccions de la mateixa dimensió i diferents espècies, és a dir, diferents denominadors. En el capítol 11è, *De la naturaleza y la diversidad de los quebrados,* l'autor considera que és igual si la dimensió d'una fracció simple es col·loca en el numerador o en el denominador i posa com a exemple les fraccions $\frac{1}{4c}$ i $\frac{1\mathrm{c}}{4}$ que en la progressió dupla, és a dir pel valor 2 de la variable, diu que tenen ambdues el valor 2. Per aquest motiu, encara que escrigui el 6q com a comú denominador, no és estrany que la q torni a aparèixer acompanyant el 4 i el 3 que són els nombres que s'haurien de col·locar als numeradors.

Les equacions no les escriu de manera simbòlica, les enuncia i les resol de forma retòrica. On fa un pas important tant pel que fa a la notació com des del punt de vista algebraic és en la resolució de sistemes d'equacions, que és on apareix per primera vegada a l'obra un signe "igual" que simbolitza amb una Ω, com veurem amb més detall en l'apartat 5.5.

5.3 Els irracionals

Una de les característiques de les àlgebres del segle XVI és la inclusió d'un capítol en el que es tracten els nombres irracionals. Pérez de Mesa hi dedica el capítol dissetè que titula *De las naturalezas de las raíces o lados*, i comença de la manera següent:

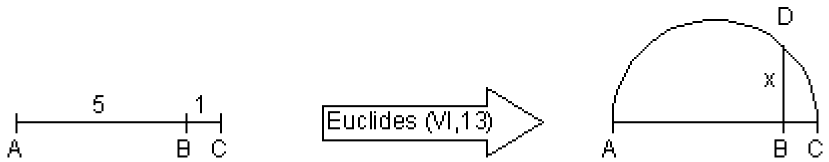
> Una de las dimensiones de la progresión geométrica fue la línea, lado o raíz, la cual puede tener diversos valores según que las progresiones fueren diversas: dos si la proporción fuere dupla, 3 si fuere tripla, 4 si cuádrupla, 5 si quíntupla y así todos los números pueden ser ℜ o £, pero infinitas veces estas ℜ o £ no son números cuando la segunda dimensión que es el cuadrado fuere número sordo o irracional y aunque es verdad que entre los números no es posible haber cuadrado 7 ni 5 ni cubo 10 ni cuadrado de cuadrado 12. Con todo eso en la cantidad continua hay semejantes cuadrados de aquestos mismos valores, porque si entre una línea de un pie y otra de 5, tomáremos por la doctrina del sexto de Euclides en la 13ª proporción[47], una media proporcional, el cuadrado de ésta será, por la 17 del sexto libro[48], igual al rectángulo hecho de las dos líneas extremas de un pie por cinco, y, por tanto, aquel cuadrado será 5, no obstante que no hay nº 5 cuadrado, y eso es lo que arriba quisimos decir, que cualquier nº puede tener cualquiera forma o dimensión, esto es, que no solamente el 4 es q y el 8 c sino que también el 5 se puede considerar como q y como c. La diferencia es que el cuadrado 4 y el c 8 se dicen formas racionales pero el q 5 y el c 12 se dicen formas irracionales. [Pérez de Mesa, 1598, 85].

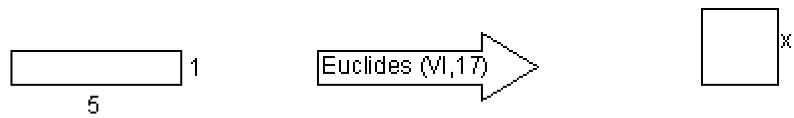
Com ja hem dit abans, per Pérez de Mesa la progressió geomètrica és el fonament de l'àlgebra. Les progressions a les que Pérez de Mesa es refereix habitualment, comencen amb el número 1 i el segon terme que és el que ell

[47] Aquí es refereix a la 13ª proposició del llibre VI dels *Elements*, que, donats dos segments, en construeix la mitjana proporcional.

[48] La 17ª proposició del llibre VI dels *Elements* diu que si tres rectes són proporcionals, el rectangle format per les extremes, és igual al quadrat de la mitjana i recíprocament.

anomena “línea, lado o raíz”, el podem interpretar com la raó de la progressió. Diu que tots els nombres poden ocupar aquest lloc, però que infinites vegades, quan el tercer terme de la progressió sigui un nombre irracional o sord, el que ocuparà aquest lloc no seran nombres perquè entre els nombres no n’hi ha cap que el seu quadrat sigui 7 o el seu cub 10, per exemple. És a dir, per l’autor no són nombres $\sqrt{7}, \sqrt{5}, \sqrt[3]{10}$ ni $\sqrt{12}$. Però això que no és possible en el terreny de l’aritmètica, sí que ho és en el de la geometria. I aquí Pérez de Mesa es basa en les proposicions tretzena i dissetena del sisè llibre dels *Elements* d’Euclides, que il·lustrem de la manera següent:





Si tenim una línia que mesura 1 peu i una altra que en mesura 5, per la tretzena proposició en podem construir la mitjana proporcional. Si ara recorrem a la dissetena proposició, el quadrat de costat aquesta mitjana proporcional, serà igual al rectangle construït amb les dues línies extremes que mesuraven un peu i cinc peus respectivament. Per tant es pot construir un quadrat de superfície 5 encara que el seu costat no es pugui expressar amb un nombre.

Les quantitats, diu Pérez de Mesa, no són racionals o irracionals per elles mateixes, sinó en comparació a d’altres quantitats. Donada una línia, si n’assenyalem una altra que li sigui commensurable en longitud, es dirà l’una racional en comparació de l’altra però si a la línia donada n’hi assenyalem una altra d'incommensurable serà aquesta segona irracional per la donada[49]. Dues línies són commensurables quan tenen una mesura comuna i es diuen aleshores commensurables en longitud perquè algunes vegades una línia amb una altra no són commensurables en longitud però els seus quadrats són commensurables entre ells i aleshores es diu que aquestes línies són commensurables en potència.

Ara explica l'autor perquè als nombres irracionals se'ls anomena sords i també d'on ve el nom d'irracionals. Es situa en una progressió geomètrica i diu que essent 5 un quadrat, és a dir, un nombre que ocupi el tercer lloc, tindrà un costat o arrel de qui neix en la seva progressió. Aquest costat es dóna fàcilment en geometria però no és possible en aritmètica perquè no hi ha cap nombre que engendri el quadrat 5. I perquè aquesta tal arrel o costat no es coneix ni es pronuncia per nombre, com ho expressa l'autor, l'anomenen arrel sorda i al 5 quadrat sord. A més a més, com que aquest costat o arrel és mitja proporcional entre 5 i 1, i ja que la proporció entre nombres es diu raó, el tal costat es diu irracional. D'aquesta manera el cinc, que com a quadrat és incommensurable amb la seva línia o arrel i per això és irracional, no ho és com a nombre, sinó com a quadrat perquè el mateix 5 comparat a una altre nombre és commensurable. En canvi, l'arrel de 5, tant amb el mateix 5 com amb un altre nombre és incommensurable. El mateix que passa amb el 5 passa amb el quadrat 7 i el quadrat 6, amb el cub 10 i el cub 12 i amb moltes altres formes que anomenarem sordes en l'aritmètica menor.

Diu Pérez de Mesa que si ens donen un nombre sord o irracional i ens demanen l'arrel o figura que representa, hem de donar per arrel o costat el

[49] Aquesta darrera frase es pot entendre com que dues quantitats incommensurables en longitud, són irracionals entre elles, idea que està d'acord amb l'idea actual d'irracionalitat. A les versions del llibre X dels Elements de les obres citades a la bibliografia, hi ha 4 definicions prèvies. En la tercera d'aquestes definicions s'hi expressa un concepte d'irracional que no és el que es fa servir actualment. La versió de Heath, diu al final de la tercera definició: *Let then the assigned straight line be called rational, and those straight lines which are commensurable with it, whether in lenght and in square* ***or in square only****, rational, but those which are incommensurable with it irrational.*

mateix nombre amb el caràcter $\Re$, és a dir, l'hem de deixar indicat. Diu "las formas o dimensiones irracionales unas veces se explican con números y otras veces no pueden pronunciarse o declararse con números: el cuadrado 5, no en cuanto número sino en cuanto cuadrado es irracional y con todo eso se explica con el número y valor 5 pero su lado y $\Re$ de ninguna manera se puede explicar por número..." Aquí l'autor remarca el que ja ha dit abans, que les expressions irracionals com $\sqrt{5}$ no es poden considerar nombres.

Els nombres arrel de 3 i arrel de 5, per exemple són costats simples però també hi ha un gènere de compostos, en el qual hi poden haver infinites espècies segons la quantitat de línies simples que formin la composta. Diu Pérez de Mesa que Euclides només va ensenyar aquelles que es componen de dos nombre o naturaleses. En aquest gènere de compostes hi va considerar dues espècies, una de binomis i l'altra de residus. Buscava línies compostes irracionals i una irracional composta no pot constar de dues racionals, sinó d'una irracional o de dues irracionals. Si els dos termes estan units pel signe més, aleshores l'expressió és un binomi i si el que uneix els dos termes és un signe menys, aleshores la línia composta es diu àpotome o residu. Euclides considera sis espècies segons certes condicions dels binomis o residus. La primera condició és que tota la línia composta sigui irracional i per això és necessari que las parts que la componen siguin totes dues irracionals o al menys una sigui irracional. La segona condició és que siguin arrels o costats de quadrats. Aquestes expressions es classifiquen segons sigui més gran la part racional que la irracional en el cas que n'hi hagi una de cada classe i després en funció de si la raó entre el quadrat del terme més gran i la diferència entre els quadrats de tots dos es pot escriure com la raó entre dos quadrats o si no s'hi pot escriure. Pérez de Mesa posa els exemples següents:

$3+\sqrt{5}$ com a exemple del primer binomi. Aquí la part racional és més gran que la irracional i el quadrat 9 del terme més gran, és a la diferència dels quadrats, 4, com un quadrat és a un quadrat. Un exemple del primer residu serà $3-\sqrt{5}$.

Els casos que corresponen al segon binomi tenen la part irracional més gran que la racional i el quadrat del terme més gran és a la diferència dels quadrats com un quadrat és a un quadrat. Com a exemples del segon binomi i del segon residu posa $\sqrt{12}+3$ i $\sqrt{12}-3$.

Corresponen al tercer binomi els casos en els que els dos termes són irracionals i que es verifica que la relació entre quadrat del terme més gran i la diferència entre els quadrats dels termes és com la raó entre dos quadrats. Els exemples que posa pel binomi i el residu són: $\sqrt{8}+\sqrt{6}$ i $\sqrt{8}-\sqrt{6}$.

El quart binomi correspon al cas en què la part racional és més gran que la irracional però la relació entre el quadrat del terme més gran i la diferència dels quadrats no es pot escriure com el quocient entre dos quadrats perfectes. Posa com a exemple de quart binomi el $5+\sqrt{20}$ i de quarts residu, $5-\sqrt{20}$.

En el cinquè cas la part irracional és més gran que la racional i la raó entre el quadrat de la part més gran i la diferència dels quadrats no es pot escriure com la raó entre dos quadrats perfectes. Aquí els exemples que posa pel binomi i pel residu són: $\sqrt{14}+3$ i $\sqrt{14}-3$.

Finalment els casos corresponents al sisè binomi i al sisè residu, tenen els dos termes irracionals i el quadrat del terme més gran no és a la diferència entre els quadrats dels termes com un quadrat és a un quadrat. Els exemples pel binomi i el residu són: $\sqrt{10}+\sqrt{7}$ i $\sqrt{10}-\sqrt{7}$.

La definició de binomial la trobem a la proposició 36 del llibre X dels *Elements*: "Si es sumen dues rectes expressables commensurables només en quadrat, la recta sencera no és expressable; anomenem-la binomial"[50]. Després de definir altres tipus de rectes, presenta el que anomena "segones definicions" que classifiquen les binomials ens sis tipus.

Aquesta classificació de les binomials la trobem també en el catorzè capítol del *Liber Abaci* de Fibonacci, en el desè del *Libro Primero de Arithmetica Algrebratica* de Marco Aurel, en el novè del llibre VII de *l'Arithmetica Practica* de Juan Pérez de Moya, i en el capítol novè del llibre quart de *l'Arithmetica* d'Antic Roca. Pedro Núñez no fa una classificació tan explícita dels binomis però en la tercera part de la segona part principal del seu *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria,* que ell anomena "tractat de les proporcions", hi tracta la commensurabilitat i en el capítol quinzè i darrer d'aquest tractat, estudia les arrels dels binomis.

La taula següent mostra els exemples posats per Fibonacci, Aurel, Pérez de Moya, Roca i Pérez de Mesa per il·lustrar cada tipus de binomi. Es pot veure com Pérez de Moya posa els mateixos exemples que Fibonacci pels binomis primer, segon, cinquè i sisè i que Antic Roca posa també els mateixos exemples que Fibonacci per a tots els tipus de binomis llevat del 3r en el que posa els mateix exemple que Pérez de Moya. Els exemples d'Aurel i Pérez de Mesa no semblen tenir cap relació amb els anteriors, si bé l'exemple que posa Pérez de Mesa pel tercer binomi és el d' Aurel dividit per $\sqrt{12}$.

[50] Aquesta és la traducció que he fet de la versió de M. Luisa Puertas, que fa servir l'expressió "rectes expressables" en comptes d'irracionals. La mateix proposició en el Heath s'expressa: "If two rational straight lines commensurable in square only be added together, the whole is irrational; and let it be called binomial".

AUTOR	1r binomi	2n binomi	3r binomi	4rt binomi	5è binomi	6è binomi
Fibonacci (1202)	$4+\sqrt{7}$	$\sqrt{112}+7$	$\sqrt{112}+\sqrt{84}$	$4+\sqrt{10}$	$\sqrt{20}+3$	$\sqrt{20}+\sqrt{8}$
Marco Aurel (1552)	$27+\sqrt{200}$	$\sqrt{180}+10$	$\sqrt{96}+\sqrt{72}$	$100+\sqrt{4000}$	$\sqrt{864}+24$	$\sqrt{864}+\sqrt{288}$
Pérez de Moya (1562)	$4+\sqrt{7}$	$\sqrt{112}+7$	$\sqrt{32}+\sqrt{14}$	$5+\sqrt{12}$	$\sqrt{20}+3$	$\sqrt{20}+\sqrt{8}$
Antic Roca (1564)	$4+\sqrt{7}$	$\sqrt{112}+7$	$\sqrt{32}+\sqrt{14}$	$4+\sqrt{10}$	$\sqrt{20}+3$	$\sqrt{20}+\sqrt{8}$
Pérez de Mesa (1598)	$3+\sqrt{5}$	$\sqrt{12}+3$	$\sqrt{8}+\sqrt{6}$	$5+\sqrt{20}$	$\sqrt{14}+3$	$\sqrt{10}+\sqrt{7}$

Al final d'aquest capítol, Pérez de Mesa diu que les arrels compostes es divideixen en dos gèneres: arrels lligades i arrels universals[51]. Les arrels lligades són les que estan compostes per dues arrels simples racionals o irracionals d'una mateixa dimensió o de diverses com per exemple: $\sqrt{4}+\sqrt{9}$ o com $\sqrt{9}+\sqrt[3]{8}$. Amb l'expressió "lligades" vol dir que els seus resultats es poden ajuntar i en els dos casos que posa com exemples aquesta unió dóna el nombre 5. Tindrem una arrel universal, en canvi, quan haguem de sumar una arrel i un nombre i del resultat n'haguem de fer l'arrel. Com a exemple torna a posar una expressió que dóna 5: $\sqrt{\sqrt{4}+23}$ i detalla els passos que s'han de fer per calcular-la.

5.4 Les igualacions

Pérez de Mesa dedica els darrers capítols a les equacions, a les que ell es refereix generalment com igualacions, com fan també altres autors de l'època. Comença a tractar-les en el divuitè, "*De las igualaciones en género*", en el que l'autor explica que la resolució d'equacions, que ell anomena "regla de la igualación", és la finalitat última de l'àlgebra i consisteix en conèixer en quina proporció geomètrica estan les figures o dimensions o, més concretament, en un cert coneixement del valor d'alguna figura o dimensió de la progressió. Es tracta de trobar un terme qualsevol d'una progressió geomètrica, la raó de la qual, ens donarà el valor de la incògnita. Per il·lustrar aquesta petita explicació posa com exemple les equacions que en llenguatge actual s'escriurien: $3x^2=12$ i $2x^5=64$. Diu que en el primer cas entendríem que un quadrat és 4 i en el segon que un relat primer és 32, és a dir, en té suficient amb trobar una potència de la incògnita.

Diu que en una equació[52] o ajustament de dues parts, de dimensió a nombre o de dimensió a dimensió a vegades s'iguala una dimensió simple a una altra de simple i aleshores s'anomena simple igualació i la regla que es fa servir es diu "regla de la simple igualació" o a vegades en una part hi ha dues dimensions iguals a un nombre, com si diguéssim que 1c i 4 q igualen a 24, que en notació actual seria: $x^3+4x^2=24$ o que un relat primer i 2q igualen a 5c, que ara s'escriuria: $x^5+2x^2=5x^3$. Diu que sempre que hi ha 3 quantitats o dimensions igualant-ne dues a una, diuen "els autors" que es tracta d'una igualació composta, encara que a vegades hi ha més de 3 quantitats, y aleshores "se n'igualen tres a una o tres a dues o de diverses maneres" [Pérez de Mesa, 1598, 89]. A continuació l'autor posa diversos exemples que en el llenguatge actual s'escriurien: $x^3+4x^2=24$; $x^4+2x^2=24$; $x^5+2x^2=5x^3$; $x^5+3x^3+5x^2=76$; $x^5+3x^3=14x^2$.

---

[51] Aquesta terminologia és la mateixa que utilitza Núñez en el capítol primer de la part segona de la segona part principal, per classificar les arrels compostes.

5.4.1 Les igualacions simples

Diego Pérez de Mesa no classifica les equacions segons el grau, sinó segons els termes que tenen. Anomena equació simple a la que consta només de dos termes, un a cada costat de la igualtat. Distingeix el cas que les quantitats són immediates, és a dir, no falten dimensiones intermèdies, com per exemple, $6x^2=3x^3$, del cas que faltin dimensiones intermèdies com si igualéssim $2x^3$ a 16, on faltarien els termes de primer i segon grau. En aquest cas, diu l'autor que per resoldre les equacions corresponents s'ha de fer una simple divisió i extraure alguna arrel.

En el dinovè capítol titulat *"De algunas consideraciones y la igualación simple y el modo general de obrar en ella"*, Pérez de Mesa tracta la resolució de les equacions que poden reduir-se a dos termes.

En el cas que es tingui una dimensió simple, és a dir un sol terme, igualada a un nombre, s'ha de fer una divisió i s'obté el nombre exacte que es busca si entre les dues parts de la igualació no hi ha dimensió intermèdia. En l'exemple que posa es tracta de resoldre l'equació que en llenguatge actual s'escriuria: $\frac{4x}{2}=8$.
Primer Pérez de Mesa efectua la divisió que està indicada al primer terme, obtenint $2x=8$ i després divideix el 8 pel 2 i obté 4 com solució de l'equació. L'autor ho expressa així:

> "Supongamos que nos piden un número que multiplicado por 4 y partido el producto por 2 engendre 8. Supondremos que aquel número que nos demandan es un lado. Haremos todo lo que la cuestión propone que es multiplicarlo por 4 y el producto será 4£[53]. Partiendo 4£ por 2 salen de la partición 2£ el cual producto conforme

---

[52] És la primera vegada que apareix la paraula "ecuación" en el manuscrit. Fins aquest punt Pérez de Mesa només havia parlat d'igualacions.
[53] £ no es exactament el símbol que fa servir Pérez de Mesa per a referir-se al terme de primer grau (vegeu les figures 1 i 2). He utilitzat aquest caràcter en el text per simplificar la tipografia.

a la demanda había de ser el número 8. Tendremos, pues, una igualación de dos cantidades inmediatas y ambas simples. Partiremos la menor dimensión que es el número 8 por la mayor dimensión que son 2 lados y vendrá el número 4 que es el valor de un lado y el número que se buscaba" [Pérez de Mesa, 1598, 90].

Tot seguit fa la comprovació i afegeix que el resultat també ens dóna a conèixer que la progressió sobre la que s'ha treballat és la "quàdrupla".

Tindrem un cas diferent quan en una de les dues parts de la igualació hi ha dos termes de diferent grau units per la partícula "més" i la dimensió a la que afecta el signe "més" té el mateix grau que el terme que hi ha a l'altre costat de la igualtat. Aleshores diu l'autor que es resta el terme que té el signe "més" en els dos costats i la igualació queda reduïda a dos termes o dimensions simples. En l'exemple que posa es tracta de resoldre l'equació: $4x+5=25$ i ho fa restant 5 als dos membres amb el que obté l'equació $4x=20$ i dividint el 20 per 4 que dóna 5 com a solució. Pérez de Mesa ho expressa:

"Pídese un nº que multiplicado por 4 y al producto añadiéndole 5 engendra 25. Supongamos ser el nº que nos demanda un lado, multiplicándolo por 4 hacen 4£ a este producto 4£ añadiendo 5 hace el nº 4£ y más 5 todo el cual nº según la cuestión es igual a 25. Dispondrémosle así: 4£ y 5 igualan a 25 en la cual igualación hay tres números y en ellos el 5 de una parte tienen el carácter "y" que quiere decir más siendo de la misma especie del número 25 de la otra parte siendo pues verdad que 4£ y 5 igualan a 25. Si quitáremos de ambas partes cantidades iguales también las que quedarán serán iguales. Quito pues de aquella primera parte aquel más 5 y quito asimismo otro tanto del segundo nº y así quedará la igualación en esta forma: 4£ iguales a 20. Parte veinte por cuatro y saldrá en el cociente 5 que es el que buscamos" [Pérez de Mesa, 1598, 90].

Afegeix que si un cop ajustada la relació queden dues formes mediates, és a dir entre les dimensions de les quals n'hi ha d'intermèdies, després de partir la menor dimensió per la més gran s'haurà de fer alguna arrel. Per exemple, si haguéssim de resoldre l'equació que ara s'escriuria: $x^2 + 6 = 42$ restaríem 6 unitats a cada membre de la igualtat i a continuació faríem l'arrel quadrada de 36 que és el que quedaria en el segon membre. Veiem com ho expressa l'autor.

> "Pídese un número que multiplicándose a sí mismo y al producto añadiéndole 6, haga 42. Quitaremos 6 de cada una de las partes y quedará 1q igual a 36. Tomando la raíz cuadrada de 36 será 6" [Pérez de Mesa, 1598, 91].

També fa explícits els passos que s'haurien de seguir si en una part de la igualació hi hagués una fracció: s'hauria d'obtenir una segona igualació multiplicant el nombre enter pel denominador de la fracció i així es convertiria la fracció en un enter.

Per acabar, resol una equació irracional sense considerar-la un cas especial. De fet, el que fa per resoldre-la és un canvi de variable.

> "Se pide un número que multiplicado por su raíz cuadrada y al producto quitándole 2, engendra 25" [Pérez de Mesa, 1598, 91].

Es tracta de resoldre de l'equació que en notació actual s'escriuria: $x \cdot \sqrt{x} - 2 = 25$.

Pérez de Mesa raona dient que si se'ns demana multiplicar un nombre per la seva arrel quadrada és perquè aquest nombre és un quadrat[54]. Aleshores tindrem un quadrat multiplicat per la seva arrel, del que en resulta un cub i l'equació que ha de resoldre es transforma en la que ara, després d'haver fet el canvi de variable: $y = \sqrt{x}$, s'escriuria y^3-2=25. En aquest punt Pérez de Mesa diu que s'han d'afegir dues unitats a cada membre de la igualtat i després s'ha de fer l'arrel cúbica perquè entre els dos termes hi falten dues dimensions. El valor de la incògnita és, òbviament, 3. Després té en compte que el que havia de buscar era el quadrat de la incògnita i que per tant, el nombre que es buscava és 9. Un cop feta la comprovació, diu que si el resultat de l'arrel fos un nombre irracional, estaríem fora "d'aquest gènere de contractes" i entraríem en el terreny de les quantitats contínues.

5.4.2 Les igualacions compostes

5.4.2.1 El nombre de casos

En el capítol vintè, Pérez de Mesa estudia les igualacions compostes que són les que s'obtenen "cuando después de haber quitado los superfluo que es lo que tiene con el carácter más y añadido lo diminuto[55], quedan tres dimensiones" [Pérez de Mesa, 1598, 92]. Diu que aquestes tres dimensions que queden poden ser qualssevol, encara que "els escriptors" fan servir les dimensions: nº, £ i q i poden col·locar-se de tres maneres.

Marco Aurel estudia "la regla de la cosa" en el capítol dissetè i considera també tres casos per les equacions de segon grau completes dins de les vuit regles que estableix per a les vuit igualacions [Aurel, 1552, 77B]. El motiu perquè siguin vuit és força curiós doncs Aurel, segons ell mateix explica, fa la mitjana entre les sis regles que posa Fray Lucas de Burgo i les deu que posa Albertucio de Saxonia[56]. D'aquestes vuit regles, les quatre darreres corresponen a igualacions compostes. Primer dóna les regles per a resoldre-les en el cas que "las

[54] Com hem vist en l'apartat 5.3, Pèrez de Mesa no atorga als irracionals la categoria de nombres.
[55] Núñez fa servir una expressió semblant quan estudia les equacions de segon grau: " sacando lo superfluo y restaurando lo diminuto..." (p. 126)
[56] Filòsof alemany (ca. 1316-1390)

cantidades sean igualmente distantes y que no falte alguna entre medios" i la vuitena regla l'enuncia pels casos que "entre cada dos ordinarios faltare una, dos o tres cantidades o grados" [Aurel, 1552, 79B] i remet a les tres regles anteriors segons el cas, i a extraure l'arrel corresponent.

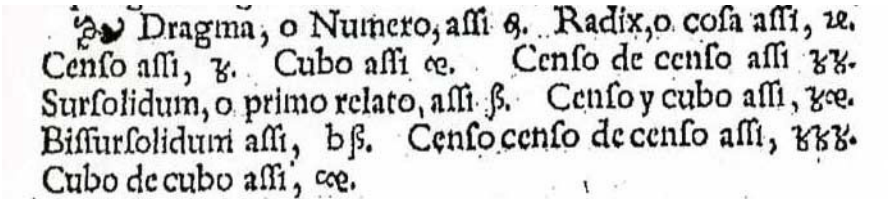
Pérez de Moya tracta les equacions de segon grau completes en el capítol XII del llibre VII de la seva Arithmética práctica y speculativa. Ell parla d'igualacions amb caràcters "igualment distants", expressió que, com hem vist, també fa servir Aurel. Considera també tres casos d'igualacions compostes.

En el capítol primer de la primera part de l'obra de Núñez "Del fin de la Algebra, y de sus Conjugaciones y Reglas", l'autor diu que la finalitat de l'àlgebra és manifestar la quantitat desconeguda i el mitjà que farà servir és la igualtat. Les principals quantitats amb les que diu que treballarà són tres: "Numero, Cosa, Censo". Classifica les conjugacions, com ell anomena les equacions, en sis modes: tres conjugacions simples i tres de compostes. Les tres darreres corresponen a les equacions de segon grau completes i considera els casos següents [Núñez, 1567, 1]:

1. Censo y cosas iguales a número
2. Cosas y número iguales a censo
3. Censo y número iguales a cosas

Veiem, per tant, que els quatre autors tot i que utilitzen terminologia diversa i ho expressen de diferent manera, consideren tres casos per a la resolució del que nosaltres entenem ara per equacions de segon grau. Voldria destacar, però, una diferència pel que fa al terme independent de les equacions. Aurel és qui estableix de manera més clara la notació que utilitzarà[57]. Ho fa en el capítol XIII [Aurel, 1552, 69]:

[57] En aquesta notació s'hi deixa veure la influència alemanya, probablement degut a l'origen de l'autor. Els símbols que utilitza Marc Aurel van aparèixer impresos per primera vegada en el "Coss" de Rudolff de 1125 [Malet, Paradís, 1984, 166].


Dragma, o Numero, assi ϑ. Radix, o cosa assi, ꝛe. Censo assi, ʒ. Cubo assi ce. Censo de censo assi ʒʒ. Surfolidum, o primo relato, assi ß. Censo y cubo assi, ʒce. Bissurfolidum assi, bß. Censo censo de censo assi, ʒʒʒ. Cubo de cubo assi, cce.

i , com es pot veure a la primera línia, assigna un símbol al terme independent al qual es refereix com "dragma o número". Pérez de Moya li assigna el símbol "n". En canvi, ni Pérez de Mesa ni Núñez acompanyen de cap símbol el terme independent.

5.4.2.2 La classificació

En el primer cas, Pérez de Mesa col·loca el nombre en el segon membre de la igualtat que tindrà en el primer, els termes quadràtic i lineal. L'autor ho expressa dient: " en la segunda parte de la igualación está la menos dimensión que es n^{o} y así será q y £ igual al n^{o}"[Pérez de Mesa, 1598, 92]. També pot ser que en el segon membre hi hagi el terme quadràtic i aleshores tindrem en el primer membre el terme lineal i el terme independent o, finalment, pot ser que a la segona part de la igualtat hi hagi el terme lineal, amb el que quedaran al primer membre el termes quadràtic i independent.

Els altres tres autors fan una classificació semblant considerant en primer lloc el cas en què el terme independent queda sol en un membre de la igualtat, en segon lloc el cas en el qual el que queda sol és el terme quadràtic i l'últim cas, en el que queda sol el terme lineal.

A continuació Pérez de Mesa posa exemples de resolució de cadascun d'aquests tres casos. Quan resol el primer, fa referència a "la primera regla de las compuestas" [Pérez de Mesa, 1598, 92] i quan resol el segon i el tercer parla del segon i tercer cànons [Pérez de Mesa, 1598, 92, 93].

Per a resoldre el primer cas, Pérez de Mesa diu que s'ha de fer el següent: "Tomaremos la mitad del número de las líneas[58] como que fuese nº absoluto sin carácter, cuadrarlo hemos y este cuadrado se añadirá a la segunda parte de la igualación que es al nº. De tal suma se saca la raíz cuadrada y a esta raíz cuadrada le quitaremos la mitad del nº de las líneas y quedará el nº que buscamos" [Pérez de Mesa, 1598, 92].

Així com es refereix al coeficient del terme lineal dient "el número de las líneas" i es refereix al terme independent com el "número", en cap cas fa referència al coeficient del terme quadràtic, que considera sempre 1, igual que Núñez.

En el primer cas resol una equació del tipus: $x^2 + bx = c$ i el procediment que empra per a resoldre-la equival a l'aplicació de la fórmula: $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$ que és la que s'utilitza actualment per a resoldre les equacions de segon grau en el cas que el coeficient del terme de grau més alt sigui 1 i sense tenir en compte les dues determinacions de l'arrel. Pérez de Mesa només té en compte la determinació positiva i, per tant, només dóna una solució, que sempre serà positiva perquè, com que c és positiu, l'arrel quadrada de $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$ sempre serà més gran que $\frac{b}{2}$.

L'exemple de resolució que proposa per aquest cànon és l'equació que ara s'escriuria: $x^2+4x+7=52$. El primer que fa és restar 7 als dos membres, resultant l'equació $x^2+4x=45$ que ja no es pot reduir més i aleshores fa els passos corresponents a la fórmula anterior. Vegem com ho expressa ell:

[58] es refereix al coeficient del terme lineal

"Pídese un número que sumados su cuadrado con 4£ de su mismo q y con siete más monte 52. Supongamos que el nº que nos demandan es un lado, el cuadrado de éste, será un cuadrado. Sumando este q más 7 será la suma 1q y 4£ y 7 la cual es igual a 52. Igualando, quitaremos 7 de ambas partes y quedarán 1q y 4£ iguales a 45 y no se podrán quitar los 4£ de la una parte porque no hay lados en la otra. Quedará pues la igualación en tres cantidades o dimensiones y porque de ellas el nº está en la segunda parte y cuadrado y lado en la primera será la primera regla de las compuestas. Tomaremos pues la mitad de los lados que es 2. Cuadrarle hemos y será el cuadrado 4. Juntaremos éste con el nº de la segunda parte y será la suma 49. De esta suma tomaremos la Rq[59] que es 7 de la cual quitaremos la mitad de los lados que es 2 y quedará 5 que es el mismo número que buscamos porque su cuadrado 25 junto con 4£ que son 20 y siete más montan 52 como se puso en la demanda, el cual precepto y doctrina es general, fundada en la séptima proposición del segundo de los Elementos de Euclides"[60] [Pérez de Mesa, 1598, 92].

L'autor afegeix que si, després de fer el quadrat de la meitat del coeficient del terme lineal i afegir-li el nombre que hi ha al segon membre de la igualtat, resulta un nombre que no té arrel quadrada exacta, direm que l'arrel quadrada irracional de la tal suma menys la meitat del coeficient del terme lineal és el nombre que es busca, és a dir, l'arrel es deixa indicada. Aquest resultat diu que el podem tenir en compte si estem treballant amb quantitats contínues però amb nombres i contractes públics és absurd.

59 Símbol que fa servir Pérez de Mesa per a l'arrel quadrada.
60 L'enunciat de la proposició setena del segon llibre dels *Elements*, és el següent: Si es talla a l'atzar una línia recta, el quadrat de la recta sencera i el d'un dels segments, considerats conjuntament, són iguals a dues vegades el rectangle comprès per la recta sencera i el segment anterior, més el quadrat del segment restant.

A continuació indica els passos a seguir per resoldre les equacions que corresponen als altres dos cànons. En el cas del segon cànon proposa un exemple que correspon a la resolució de l'equació: $x^2 - 4x = 25$ que té dues solucions irracionals. Ell dóna com a solució de l'equació la que correspon a la determinació positiva de l'arrel: $\sqrt{29} + 2$. Sense comprovar res ni fer cap més comentari, proposa la resolució de l'equació: $x^2 - 2x = 80$. Aquesta equació té les solucions 10 i -8, de les quals Pérez de Mesa troba la positiva i comprova que és solució. En aquest cas diu que la resolució està basada en la sisena proposició del segon llibre dels Elements[61]. Pel tercer cànon, l'exemple que posa porta a resoldre l'equació: $8x - 12 = x^2$. En aquest cas l'equació té dues solucions positives, però, igual que en els casos anteriors, Pérez de Mesa només dóna la que correspon a la determinació positiva de l'arrel, que és 6 i que també comprova.

En la cinquena igualació, Marco Aurel proposa la resolució de l'equació que nosaltres escriuríem: $2x^2+12x=32$. El mètode per a resoldre-la l'exposa en forma retòrica i correspondria a l'aplicació de la fórmula: $\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} - \frac{b}{2a}$, que només donarà una solució. En aquest cas, l'equació té les solucions 2 i -8 però Aurel només obté la positiva. Per a la sisena igualació proposa l'equació que, escrita en llenguatge actual, és: $2x^2+32=20x$. En aquest cas, la fórmula que obtindríem generalitzant els passos que fa servir Aurel per a la seva resolució, és: $\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \pm \frac{b}{2a}$ [62]. L'equació té dues solucions positives que són 8 i 2 però Aurel obté: 3+5 i 3-5[63].

---

[61] Si es divideix en dues parts iguals una línia recta i se li afegeix, en línia recta, una altra recta, el rectangle comprès per la recta sencera i la recta afegida, juntament amb el quadrat de la meitat és igual al quadrat de la recta composta per la meitat i la recta afegida.

[62] La fórmula conté el doble signe $\pm$ però per tal que coincidís amb la fórmula actual hauria d'estar en el primer terme en lloc del segon.

[63] Diu que com que és impossible treure 5 de 3, s'ha de girar l'expressió i posar primer la quantitat més gran. Hi ha un altre error en un avís que col·loca darrera la regla de la sisena igualació qualificant-lo de "muy notable" i que Rey Pastor en el capítol que dedica a Marc Aurel

Els passos que segueix per resoldre l'exemple que proposa en la setena igualació, en la que els dos termes de grau inferior s'igualen al de grau més alt, són els mateixos que per la cinquena i igual que en aquell cas, l'equació té una solució positiva i una de negativa i Aurel n'obté només la positiva.

En la primera igualació de Pérez de Moya, s'igualen els dos caràcters més grans al més petit "como si ce. i co. se yguala a n., o como si cu. y ce. se igualan a co." [Pérez de Moya, 463]. Correspon a la cinquena igualació de Marco Aurel, el mètode que proposa per resoldre-la és el mateix i també l'exposa en forma retòrica. Així com Aurel posa l'exemple a continuació de l'explicació, Pérez de Moya posa els exemples en el capítol següent. El primer exemple que posa és:

> "Dame un número que juntándole 5 y por otra parte quitándole 2 y multiplicando la suma por la resta monte 98"[Pérez de Moya, 483]

Després d'explicar els càlculs que s'han d'anar fent, diu que l'equació queda de la forma: "1ce. p. 3co. yg. a 108n", que ara escriuríem $x^2+3x=108$. Aquesta equació té les solucions 9 i -12, de les quals Pérez de Moya només obté la positiva, que comprova.

En la segona igualació, el caràcter més gran i el més petit s'igualen al mitjà. Aquest cas correspon a la sisena igualació de Marco Aurel i la fórmula que resulta si es generalitza el mètode que Pérez de Moya explica de forma retòrica,

---

[Rey Pastor, 1934, 102] considera greu. En aquest avís el que diu és que si es dóna el cas que $\frac{c}{a} > \left(\frac{b}{2a}\right)^2$, de manera que "no es pugui restar", aleshores s'ha de sumar i el valor de la x serà el resultat d'afegir l'arrel d'aquesta suma al terme $\frac{b}{2a}$, fet que suposa considerar que té solució real una equació que només en tindria de complexes.

és la mateixa que la d'Aurel, és a dir: $\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \pm \frac{b}{2a}$. Pérez de Moya afegeix dues notes a l'estil dels avisos d'Aurel.

La tercera igualació és la setena de Marco Aurel i dóna el mateix mètode de resolució. La influència de Marco Aurel és força evident. Vegem el redactat que fan els dos autors per la cinquena igualació d'Aurel i la primera de Pérez de Moya:

> Regla, y regimiento para la quinta
> igualacion.
>
> Quando se igualaren tres cantidades, o diferencias de números igualmente distantes, y que no falte ninguna entre medias, de esta manera que los dos mayores se igualen a la menor...[Aurel, 1552, 78B].
>
> La primera igualación de las compuestas es cuando vienen tres caracteres igualmente distantes, y que entre ellos no falta otro algún carácter, como n., co., ce., y así de otras cualesquiera, y que se igualan los dos caracteres mayores al menor...[Pérez de Moya, 463].

Núñez dóna les regles en forma retòrica per cadascuna de les conjugacions i les il·lustra amb un exemple. L'equació que resulta del exemple que posa per la quarta conjugació és: $x^2+10x=56$. Aquesta equació té dues solucions: 4 i -14, de les quals Núñez només obté la positiva, que comprova tot seguit. La fórmula que obtindríem seguint els passos de Núñez és la mateixa que s'obté, tal com hem vist seguint els passos que fa Pérez de Mesa, és a dir, $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}-\frac{b}{2}$. L'equació que proposa per il·lustrar el procediment que s'ha de fer servir en la cinquena conjugació és: $6x+40=x^2$, que té les solucions 10 i -4 i de les quals també dóna només la positiva. Com a exemple de la sisena regla, que és la tercera de les compostes, resol l'equació $x^2+24=10x$ que té dues solucions positives. Aquí Núñez diu: "Cuando un censo y el número fueren iguales a las cosas, multiplicaremos en si la mitad del número de las cosas criando cuadrado, del qual quitaremos el número propuesto y de lo que quedare tomaremos la raíz. La qual juntando con la mitad del número de las cosas o quitándola si quisiésemos, nos dará el valor de la cosa" [Núñez, 1567, 2b]. Seguint els passos que indica Núñez obtenim la fórmula: $\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} + \frac{b}{2}$. Primer obté el valor $\sqrt{5^2 - 24} + 5 = 6$ i aleshores diu que si volem podem treure 1 de 5 i en quedaran 4.

Considera també el cas en què la solució de l'equació és doble, que els altres autors no mencionen:

> "Y si acaeciere que el número propuesto sea igual al cuadrado de la mitad del número de las cosas, en tal caso esa mitad del número de las cosas, será el valor de la cosa" [Núñez, 1567, 1].

De les 4 combinacions possibles de signes que es poden donar en una equació de segon grau si fixem com a positiu el terme de grau més alt, els autors d'aquesta època només en consideren 3. No consideren el cas que amb la notació actual correspondria a $ax^2+bx+c=0$ amb a, b i c positius i que tindria les dues solucions negatives. Per tal que aquest model encaixés amb la forma d'escriure els cànons, amb dos termes a un costat i un a l'altre, s'hauria de posar algun signe negatiu i aquesta possibilitat no la contemplaven els autors de l'època.

Pérez de Mesa explica que aquests cànons han estat estesos a altres dimensions pels escriptors de l'àlgebra amb una de les dues condicions següents: que les tres quantitats siguin immediates o que guardin entre elles la mateixa proporció. Com a exemple d'equacions que compleixen la primera condició posa les següents: $x^3 = 4x^2 + 5x$, corresponent al primer cànon; $x^5 + 2x^4 = 4x^4 + 5x^3$, corresponent al segon i $x^4 + 2x^2 = 6x^3$ al tercer. Diu que alguns escriptors rebaixen aquestes dimensions però que això és superflu i que n'hi ha prou amb tenir com a referència la dimensió intermèdia. Com a exemples d'equacions que compleixen la segona condició dóna els següents: $1x^5 = 2x^3 + 8x$ i $x^7 = 4x^4 + 32x$. En el primer cas, falta una dimensió intermèdia i el que resulta és el quadrat de la "cosa". Per tant, per obtenir-la, s'haurà de fer l'arrel quadrada del resultat. Si falten dues dimensions intermèdies, com en el segon exemple, el nombre que resulta és el cub de la "cosa" i l'arrel cúbica del resultat és el nombre que es busca. Si falten tres dimensions, per obtenir el valor de la "cosa" s'haurà de fer l'arrel de l'arrel del resultat i així infinitament, tal com ho expressa l'autor.

5.4.3 Resolució d'equacions de graus qualssevol

En el capítol vint-i-unè que porta per títol "*Como cualquier caso de igualación simple o compuesta es inmediata*", diu que les igualacions no han d'estar reduïdes a dues o tres quantitats proporcionals mediates o immediates "como corre la doctrina vulgar de los autores" sinó que s'estén infinitament. Diu que "la doctrina dels autors és estreta" perquè només descobreix el valor i progressió de la cosa en el cànon simple i en els tres compostos, deixant apart la invenció de Nicolas Tartaglia[64] per la qual troba el valor de la cosa quan c i £ s'igualen a un nombre.

[64] Pérez de Mesa posa aquí de manifest que no hi ha un mètode per a resoldre altres equacions amb tres termes que les de segon grau, o les que s'hi puguin transformar. Segons l'autor, l'únic que havia fet un pas endavant era Tartaglia que va trobar la manera de solucionar l'equació: $x^3+mx=n$. De fet, el primer en publicar la solució d'una equació d'aquest tipus va ser Cardano en la seva *Ars Magna,* el 1545. En aquesta obra hi apareix també una quàrtica per reducció a una cúbica.

Pérez de Mesa afirma que hi ha un camí per trobar el valor de la línia o la cosa en qualsevol igualació o disposició de dimensions, siguin 2, 3 o 4 o més, mediates o immediates, amb la condició que els valors de les figures o dimensions siguin racionals, és a dir, diu que es pot resoldre qualsevol equació de qualsevol grau, sempre que tingui solucions racionals.

En aquest apartat, les progressions hi són presents d'una manera encara més explícita que a la resta de l'obra. En aquest apartat treballa constantment amb els seus termes. Primer explica com es poden anar reduint les figures depenent de la progressió de la que formin part. Per exemple, diu que en la progressió de raó 2, una cinquena potència és el mateix que dues quartes potències, que quatre terceres potències, que vuit quadrats i, finalment, el mateix que 16 vegades la incògnita. A la progressió de raó 3, en canvi, una quarta potència és el mateix que 3 terceres potències, que 9 quadrats i que 27 vegades la incògnita.

Defineix progressió simple com aquella que té per denominador[65] un nombre primer, com per exemple la dupla que el denominador és 2, la tripla que és 3 o la quíntupla que és 5 i diu que és d'aquestes progressions de les que ens servirem per reduir figures, és a dir, per anar rebaixant el grau de la incògnita.

Si tenim alguna figura o dimensió igualada a un nombre, com passa en tots els casos del cànon simple, anirem reduint les dimensions fins a obtenir una línia per tal que quedin immediats £ i el nombre en la igualació. A continuació partirem el nombre per les línies i obtindrem el nombre que busquem. Posa l'exemple següent:

---

[65] A l'Aritmètica, Pérez de Mesa dedica un capítol a les progressions, en el que defineix progressió aritmètica i geomètrica i explica com es sumen els seus termes. Anomena "denominación" d'una progressió geomètrica al que nosaltres entenem per raó. Aquí, en lloc de "denominación" es refereix a la raó com a "denominador"

> "Búscase un número que multiplicado en sí mismo y el producto en sí mismo y añadiéndole 9 a este último producto engendre 90". [Pérez de Mesa, 1598, 95].

Es tracta de resoldre l'equació: $x^4+9=90$. Diu que si restem 9 als dos membres, el nombre que resulta és 81 que té el 3 entre les seves parts alíquotes i que com que una d'aquestes parts ha de ser la denominació de la progressió, podem suposar que aquesta figura està en la progressió tripla.

Pérez de Mesa està donant per conegut el fet que la solució de l'equació ha de dividir el terme independent, però no ho justifica.

El fet que digui que la figura està en la progressió tripla vol dir suposar que la solució de l'equació és 3. Amb aquesta premissa redueix el terme de quart grau de la manera següent: $x^4=3x^3=9x^2=27x$. Aleshores diu que com que es tenia que $x^4=81$, també $27x=81$ i en aquesta darrera igualtat tenim formes immediates. Partint, doncs, 81 per 27 obtindrem el nombre 3 que és el valor de la cosa i el número buscat. A continuació analitza què hauria passat si en comptes de prendre el 3 com a part alíquota de 81, haguéssim considerat el 27 o el 9 i s'adona que és impossible, perquè, per exemple en el cas d'haver considerat la progressió de raó 9, s'hagués obtingut $729x = 81$, quan en la progressió de raó 9, $729x$ són 6561 i no 81. Un altre exemple que posa és el següent:

> "Pídese un número que, multiplicado por sí mismo y al producto añadiéndole 4 tanto del mismo número y de la suma quitando 3, queden 18" [Pérez de Mesa, 1598, 96].

Aquí es tracta de resoldre l'equació : $x^2+4x-3=18$. Primer passa el 3 al segon membre amb el que resulta $x^2+4x=21$ corresponent al primer cànon dels compostos. El 21 té els factors 3 i 7. Aleshores diu que si es tractés de la progressió de raó 7, cada quadrat equivaldria a 7 termes lineals, els quals, juntament amb els 4, farien 11, que no és divisor de 21. En canvi, en la progressió "tripla", un quadrat equival a 3 termes lineals, que juntament amb els 4 faran 7. Partint el 21 por 7 tindrem el valor de la "cosa" que busquem que serà el número 3" [Pérez de Mesa, 1598, 96]. En tots els exemples que posa hi ha solucions enteres i només en busca una.

El que fa és, doncs, resoldre equacions buscant els divisors del terme independent[66] i, per tant, busca només solucions enteres. Després diu que apart dels 3 cànons compostos, a totes les altres disposicions dels nombres que són infinites i possibles, es procedirà com en els exemples.

En el capítol vint-i-dosè titulat "*De la posibilidad e imposibilidad de las cuestiones*" considera que les qüestions que es plantegen en l'àlgebra, a vegades les verifica un sol nombre, a vegades més d'un, a vegades les verifiquen tots i a vegades, cap.

Fa explícits casos com:

1. Si les dimensions són de la mateixa espècie i els nombres desiguals, el cas és impossible, com en el cas que tinguéssim $4x^3=3x^3$ o $10x=3x$ perquè això seria com afirmar que 10 és igual a 3.
2. Quan en la igualació hi hagi dues formes d'una mateixa espècie i els seus coeficients siguin iguals, la demanda és supèrflua i vana perquè es verifica per tots els nombres.
3. Si les formes en la igualació fossin diverses i els nombres iguals, la qüestió és impossible, com si s'igualessin $3x^3$ a $3x$.

[66] Un dels mètodes que s'utilitzen per trobar les solucions enteres d'equacions polinòmiques qualssevol, es basa en què les solucions enteres d'una equació polinòmica divideixen el terme independent. Es busquen els divisors d'aquest terme i es prova si verifiquen l'equació. Si un valor "a" la verifica, el polinomi corresponent és divisible per x-a. La divisió per aquest binomi s'efectua per l'anomenat mètode de Ruffini i permet rebaixar el grau de l'equació inicial. Paolo Ruffini (Valentano, 1765 - Mòdena, 1822) va ser un matemàtic i físic que va estudiar la resolució d'equacions. Va ser un dels primers matemàtics en intentar mostrar la impossibilitat de trobar una solució algebraica per l'equació general de grau cinquè.

4. Si les formes són diverses i els nombres també diversos, la qüestió és possible i es verificarà per algun nombre racional o irracional.

Afegeix també que en el cas de les equacions de segon grau del tipus $x^2+c=bx$ no hi ha solució quan $\left(\frac{b}{2}\right)^2 < c$.

5.5 Els sistemes d'equacions

La introducció d'una segona incògnita representa un pas més en el desenvolupament de l'àlgebra i concretament en la formació del concepte d'equació. Segons Luis Radford[67] la segona incògnita va aparèixer a Occident per primera vegada en el problema 9 del *Trattato di Fioretti,* escrit per Antonio de Mazzinghi[68] cap el 1373. El problema és el següent: "troba dos nombres que multiplicats donin 8 i que la suma dels seus quadrats sigui 27". Mazzinghi resol aquest problema de dues maneres i es basa en la proposició 4 del llibre II dels *Elements*[69] d'Euclides. La segona incògnita de Mazzinghi sempre està expressada, però, en termes de la primera. Es podria dir que hi ha una mena de jerarquia entre les incògnites que no serà present a l'obra de Cardano que dedicarà els capítols 9 i 10 de la seva *Ars Magna* a la segona incògnita. De tota manera, encara que en l'*Ars Magna* les incògnites siguin tractades amb un rang d'igualtat, a la segona incògnita se l'anomena "quantitat" i es posa en funció de la primera i si apareix una tercera quantitat desconeguda, es posa en funció de les altres dues. On apareixen de manera explícita més de dues incògnites és a l'*Aritmetica Integra* de Michel Stifel[70] (1487-1567), publicada el 1544.

---

[67] Més informació a Radford (1997)

[68] Mestre d'àbac florentí (ca 1353-1383).

[69] Aquesta proposició diu que si es talla a l'atzar una línia recta, el quadrat de la recta sencera és igual als quadrats dels segments més dues vegades el rectangle comprès entre els segments. En llenguatge algebraic correspondria a: $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

[70] Michael Stifel va ser un matemàtic alemany que es va interessar sobretot per l'aritmètica i l'àlgebra. Va arribar a l'idea de logaritme de manera independent a Napier. El seu treball més important és *Arithmetica integra*, en el que s'hi pot trobar la notació +, -, √.

Pérez de Mesa resol sistemes d'equacions en el darrer capítol que titula "*de la Regla de la quantidad*".

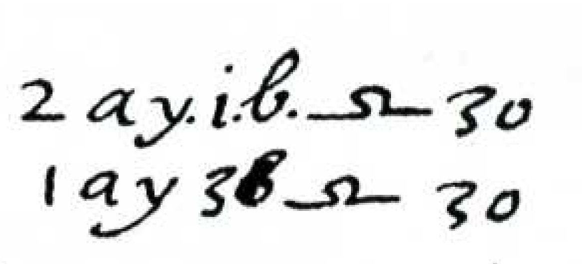
Pérez de Mesa diu que els "escriptors" parlen de "regla de la quantitat" quan no poden arribar a la fi que pretenen amb una sola incògnita sinó que en necessiten dues o tres o més i que per resoldre aquest tipus de situacions, no ho fan de la mateixa manera tots els "escriptors". Com que causaria confusió anomenar £ o cosa totes les incògnites, solen deixar el nom de cosa per a la primera posició anomenant quantitats a les altres i els posen noms diferents. A la segona l'anomenen "a", a la tercera "b", a la quarta "c" i moltes vegades a cap d'elles l'anomenen cosa sinó que anomenen "a" a la primera, "b" a la segona, "c" a la tercera i així contínuament.

Aquesta darrera possibilitat és per la que opta Pérez de Mesa . Per a resoldre el sistema va reduint les expressions fins a obtenir la incògnita igualada a un nombre, i aleshores pel "canon simple" sabrà el valor de la incògnita. Quan tingui el valor d'una incògnita, d'una en una, anirà trobant totes les altres. Sense més explicació teòrica es posa a plantejar i resoldre un exercici que reprodueixo a continuació:

> "Dénse dos n^{os} que sumando la mitad del menor con el mayor hagan 15 y el menor con el tercio del mayor haga diez. Supongamos ser el mayor 1a y el menor 2b, los cuales ambos son lados en diversas progresiones conforme a la demanda, pues 1a y una $\frac{1}{2}$b son 15 o igualan a 15 y una b con un tercio de a igualan a 10. Igualemos pues reduciendo los quebrados a enteros como arriba se ha enseñado y de esta manera serán 2a y 1b iguales a 30 en la primera demanda o mayor n^{o} y en el menor 1a y 3b serán iguales a 30 y los escribo de

esta forma[71] y por el valor dos de la primera cantidad multiplico la segunda y salen 2a y 6b y 60. Quito de ahí toda la primera cantidad 2a y b y 30 y quedan 5b iguales a 30. Parto 30 por 5 y salen 6 que es el valor del lado b. Este es uno de los dos números que buscamos. Y porque en una de las igualaciones puestas dijimos 2a y 1b iguales a 30, volviendo a igualar que es quitando pues se sabe ya que una b es 6, será 2a y 6 iguales a 30 y volviendo a igualar que es quitando de ambas partes 6, quedará 2a iguales a 24 o 2 £ iguales a 24. Parto 24 por 2 y sale 12 que es el valor de a o del otro lado y nº que buscamos [Pérez de Mesa, 1598, 99].

És a dir, el que fa és plantejar i resoldre el sistema d'equacions que ara s'escriuria: $\begin{cases} \frac{1}{2}b + a = 15 \\ b + \frac{1}{3}a = 10 \end{cases}$ anomenant "a" al nombre gran i "b" al petit, i considera que el primer que s'ha de fer és reduir les fraccions a enters. Obté 2a+b=30 i a+3b=30. Resol el sistema per reducció multiplicant la segona equació per 2 i restant-li la primera amb el que li queda 5b=30 i d'aquí obté el valor 6 per a la b. Substitueix aquest valor a la primera equació i obté el valor de a que és 12. Com s'ha pogut veure, la resolució és retòrica com la de les equacions però en aquest cas escriu el sistema al marge, un cop trets els denominadors, de la manera següent:



[71] Aquí fa referència al sistema que hi ha reproduït al final de la pàgina i que escriu al marge, no l' insereix en el text.

Fa servir la "y" per indicar el signe més i indica amb una Ω la igualtat. És la primera vegada en tota l'obra que utilitza un símbol per a la igualtat. Cal remarcar que ni Bombelli (1572) ni Stevin (1585) ni el mateix Viète (1590) utilitzaven cap símbol per a indicar la igualtat. L'equació $4x^2 + 3x = 10$, per exemple, Bombelli l'escrivia: $\overset{\overset{2}{\smile}}{4}\ p\ \overset{\overset{1}{\smile}}{3}$ **equals** á 10, Stevin ho feia: 4 ②+ 3 ①**egales** 10 i Viète de la forma: 4*Q* + 3*N* **aequatus sit** 10.[72] S'ha de destacar també el fet que Pérez de Mesa tracta les incògnites amb rang d'igualtat assignant-les lletres per ordre alfabètic que no pressuposen la jerarquia de cap incògnita respecte les altres.

Anem a veure ara com resol Pérez de mesa per substitució un sistema no lineal amb dues incògnites.

> "Dame dos números que multiplicado el uno por 6 y añadiendo al producto 2, haga tanto como multiplicando el otro por 7 y quitando al producto 14 y asimismo que multiplicando el uno por el otro engendren 90" [Pérez de Mesa, 1598, 100].

El sistema al que ara es traduiria aquest enunciat utilitzant les incògnites que fa servir Pérez de Mesa és : $\begin{cases} 6\pounds + 2 = 7a - 14 \\ \pounds \cdot a = 90 \end{cases}$. En aquest cas considera primer l'equació 6£+2=7a-14 de la que aïlla "a" que resulta: $\frac{6}{7}\pounds+2+\frac{2}{7} = a$ i diu que s'ha d'actuar com si es conegués el valor de "a", fet que es tradueix en escriure la segona equació en funció de "a": $\frac{6}{7}\,\mathrm{q\ y\ 2\ y}\,\frac{2}{7}\pounds = 90$, expressió que ara s'escriuria: $\frac{6}{7}\pounds^2 + \left(2 + \frac{2}{7}\right)\pounds = 90$. A continuació diu que s'han de reduir les fraccions a enters partint per $\frac{6}{7}$ i quedarà de la forma $1\,\mathrm{q\ y\ 2\ y}\,\frac{2}{3}\pounds$ iguals a 105,

[72] Per més informació sobre l'evolució del simbolisme algebraic es pot consultar Cajori (1993).

que en llenguatge actual és: $£^2 + \left(2 + \frac{2}{3}\right)£ = 105$. Com que en aquesta expressió hi ha tres quantitats de tal manera que la més gran i la mitjana són iguals a la més petita, estem en el primer cànon dels compostos. Resol l'equació de segon grau, que té una solució positiva i una de negativa i obté la positiva que és 9.

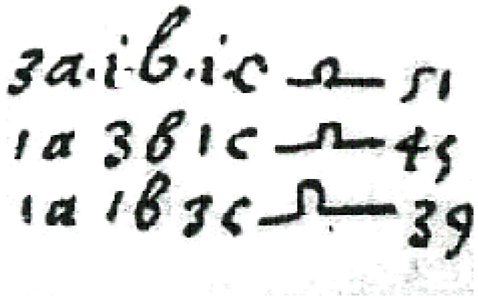
En la resolució del sistema de tres equacions amb tres incògnites que veurem tot seguit, és destacable la claredat amb què descriu tots els passos que fa. Planteja el problema següent:

> "Pídense 3 números que el mayor con el tercio de los otros dos haga 17 y el segundo con el tercio de los otros 2 haga 15 y el tercero con el tercio de los otros haga 13" [Pérez de Mesa, 1598, 99].

La traducció d'aquest enunciat a sistema d'equacions donaria com a resultat en el llenguatge actual:

$$\begin{cases} a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c = 17 \\ \frac{1}{3}a + b + \frac{1}{3}c = 15 \\ \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + c = 13 \end{cases}$$

El primer que fa és treure denominadors i escriu el sistema al marge un cop els ha tret, de la següent manera:



A l'hora d'escriure aquest segon sistema no té tanta cura amb la notació i no escriu signes entre els termes. Per resoldre'l multiplica la segona equació per 3 i la resta de la primera. L'autor ho expressa dient "multiplico la segunda parte por el valor de la primera y quito de ahí la primera cantidad" [Pérez de Mesa, 1598, 99]. Després multiplica també la tercera equació per 3, la resta de la primera i obté el sistema

$$\begin{cases} 8b + 2c = 84 \\ 2b + 8c = 66 \end{cases}$$

A continuació multiplica la primera equació pel coeficient de "b" de la segona i la segona pel coeficient de "b" de la primera i les resta, obtenint el valor de "c" que és 6. Després substitueix cap enrera obtenint la "b" de l'equació [8b+2c=84] i finalment la a de l'equació [3a+b+c=51].

Marco Aurel resol els sistemes d'equacions en el capítol XVI de la seva àlgebra : "Trata de la regla de la quantidad, con algunas reglas, y demandas que por ella se hazen que por otro nombre se puede llamar regla de la segunda cosa". Un dels exemples és el següent:

> Tres compañeros tienen dineros y quieren comprar un caballo por 34 ducados. Dice el primero a los otros dos que le den la mitad de lo que tienen y con lo que él tienen podrá comprar el caballo. El segundo demanda a los otros dos que le den un tercio de lo que tienen y con lo que él tiene también podrá comprar el caballo; el tercero demanda a los otros dos un cuarto y que podrá justamente pagar el caballo [Aurel, 1552, 108 B].

Actualment la resolució d'aquest problema la traduiríem a la del sistema:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 34 \\ \frac{1}{3}x + y + \frac{1}{3}z = 34 \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + z = 34 \end{cases}$$

Per resoldre'l Aurel suposa que el primer té 1x ducats i aleshores n'hi falten 34Q[73]-1x. Aquesta quantitat és la meitat dels ducats que tenen entre els altres dos, el que vol dir que entre el segon i el tercer tenen 68Q-2x ducats i, entre tots tres: 68Q-1x.

Ara suposa que el segon tingui 1q ducats. Aleshores el primer i el tercer tindran 68Q-1x-1q, essent la tercera part: $22\frac{2}{3}Q - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\mathrm{q}$, els quals, afegits als q que té el segon resulten $22\frac{2}{3}Q - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\mathrm{q}$, que han de ser iguals als 34 ducats que val el cavall. Aurel fa la igualació i troba la q en funció de x, resultant: $\mathrm{q} = 17 + \frac{1}{2}x$ que són els ducats que té el segon.

Finalment suposa que el tercer tingui 1q ducats[74] i aleshores entre el primer i el segon tindran 68Q-1x-1q. La quarta part d'aquesta quantitat és $17Q - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\mathrm{q}$ que la donem al tercer i passarà a tenir $17Q - \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}\mathrm{q}$. Igual que abans, ho igualem a 34 i obtenim per q el valor $\frac{1}{3}x + \frac{68}{3}$.

Ara ho suma tot: $x + 17 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{68}{3}$ i diu que ha de ser igual a 68Q-1x, obtenint x=10.

[73] Com ja he dit a l'apartat 5.4.2.1, Q és el símbol amb el que Marc Aurel acompanya el terme independent de les equacions.

En l'article 9 del capítol XIII de la seva àlgebra, Pérez de Moya tracta de la "regla de la segunda cosa o cantidad" i segueix el mateix procediment que Aurel.

Núñez titula el capítol 5 de la seva àlgebra: "De la Practica de las Reglas de Algebra en los casos de Arithmetica". L'exercici 106 d'aquest capítol (pàg. 219-2) diu:

> Tenemos tres números, que el primero con la mitad del segundo y el tercio del tercero hace 12 y el segundo con el quarto del primero y el tercio del tercero hace 15 y el tercero con el quarto del primero y el quinto del segundo hace 20 y queremos saber cuanto es cada uno de ellos. Este caso y en estos mismos términos pone Fray Lucas pero no hace discursos para poder comprehender.

Anomena al primer nombre 1co. i diu que com que ajuntant-lo amb $\frac{1}{2}$ del segon i $\frac{1}{3}$ del tercer han de fer 12, seran 12-1co. la meitat del segon i el terç del tercer junts. I com que el segon amb $\frac{1}{4}$ del primer i $\frac{1}{3}$ fan 15, traurem d'aquests 15, $\frac{1}{4}$ del primer i quedaran $15-\frac{1}{4}$co. per valor del segon juntament amb $\frac{1}{3}$ del tercer. D'aquests $15-\frac{1}{4}$co. traurem el que val la meitat del segon amb el terç del tercer que és 12 - 1co. i el que resta que és $3+\frac{3}{4}$co. serà la meitat del segon. Serà, doncs, tot el segon el doble que és $6+1\text{co.}\frac{1}{2}$ i com que havíem deduït que la meitat del segon juntament amb el terç del tercer és 12 - 1co. traurem d'aquesta

[74] Fa servir la mateixa incògnita per la quantitat que han de rebre el segon i el tercer companys, fet que impedeix que pugui fer explícit el sistema sencer.

quantitat la meitat del segon que és $3+\frac{3}{4}$co. i quedaran $9-1\,\text{co.}\frac{3}{4}$ per valor de la tercera part del tercer, quantitat que multiplicada per 3 fa $27-5\,\text{co.}\frac{1}{4}$ que serà tot el tercer i perquè el tercer amb $\frac{1}{4}$ del primer i $\frac{1}{5}$ del segon fan 20, ajuntarem $27-5\,\text{co.}\frac{1}{4}$, el quart del primer que és $\frac{1}{4}$co. i un cinquè del segon que és $\frac{1}{5}\,\text{p}\,\frac{3}{10}$ de cosa i faran $28\frac{1}{5}\,\text{m}\,4\,\text{co.}\frac{7}{10}$ que seran iguals a 20 i d'aquí ja n'obté les solucions.

El que fa Núñez és prendre la primera incògnita com a paràmetre, escriu la segona i la tercera en funció de la primera, i després les suma totes tres, obtenint una equació amb una sola incògnita.

Després de resoldre 110 exercicis passa al capítol 6: "De la regla de la quantidad simple o absoluta".

En aquest capítol utilitza la "quantitat" de la mateixa manera que Aurel i Pérez de Moya. El primer exemple que posa és del estil dels que hem vist fins ara. Es tracta d'un problema numèric que porta a resoldre un sistema que ara es plantejaria amb tres equacions i tres incògnites en els quals sempre hi ha una incògnita amb coeficient 1 i les altres dues amb coeficients fraccionaris de numerador la unitat.

6. REMARQUES FINALS

L'estudi d'aquest manuscrit m'ha permès aprofundir en part de l'activitat matemàtica que es desenvolupava a l'Espanya del segle XVI. El coneixement que en tenia era molt global i me l'havia format principalment a partir de la lectura de textos de literatura secundària sobre el tema.

La realització d'aquest treball m'ha portat a l'estudi de les àlgebres de Marco Aurel, Pedro Núñez i Juan Pérez de Moya així com, encara que de manera més superficial, de l'Arithmetica d'Antic Roca. Ara puc afirmar que no hi ha una única línia de pensament pel que fa a l'àlgebra entre els autors espanyols del segle XVI i que així com l'àlgebra de Pérez de Moya té com a font principal la d'Aurel, l'àlgebra de Pérez de Mesa està més en la línia de la de Núñez.

Un efecte col·lateral que ha tingut aquest estudi ha estat el de despertar el meu interès per la figura de Diego Pérez de Mesa. El meu objectiu a l'hora de plantejar-me aquest treball no va ser mai aprofundir sobre l'autor de qui jo no havia sentit a parlar i de qui havia trobat fins aleshores molt poca informació, sinó sobre l'època en la que va viure per tenir més elements que m'ajudessin a entendre el canvi en la mentalitat matemàtica que es va anar gestant al llarg del segle XVI espanyol. He descobert, però, un autor amb només una obra publicada però moltes d'escrites que abasten des de les matemàtiques i totes les ciències afins, inclosa l'astrologia, fins a la història i, probablement la literatura. Es tracta d'un humanista de qui es diu en una edició crítica de *Política o razón de Estado* : "por su método, originalidad y modernidad, la abundante producción del nuevo catedrático sevillano lo acredita como uno de los mejores científicos del Siglo de Oro español" Juez [2002, 493]. A l'Arxiu General d'Indies hi ha el parer de Pérez de Mesa sobre les conclusions d'un qüestionari per a pilots que havia elaborat García de Céspedes: "...vistas las cartas y los mapas...hechos por el matemático doctísimo Andrés García de Céspedes...digo que están perfectos y bonísimamente acabados...y deben ser aprobados" [Vicente, 1991, 424]. García de Céspedes era un matemàtic i cosmògraf reconegut i, per tant, el fet que Pérez de Mesa pogués opinar sobre la feina feta per Céspedes demostra que se'l tenia en una alta consideració. Seria interessant estudiar les altres produccions de Pérez de Mesa, la majoria de les quals es troben en diferents manuscrits de la Biblioteca Nacional de Madrid.

L'àlgebra que conté el manuscrit 2294 és més aviat teòrica, com s'ha pogut veure en el desenvolupament del treball. Els exemples que posa no són pràctics, són numèrics en la línia dels exercicis de l'*Arithmetica* de Diofant. Les qüestions de tipus més pràctic o mercantil formen, per l'autor, part de la "logística". A l'àlgebra hi són presents d'alguna manera les tres fases de l'algebrització de les matemàtiques segons la classificació de Nesselmann: la retòrica, la sincopada i la simbòlica. Els mètodes que explica per a resoldre equacions els exposa en forma retòrica tot i que fa servir símbols que fan més senzilla l'explicació. En canvi, quan fa el que ell anomena operacions amb figures compostes[75], els símbols són operatius. Al final de l'obra, en l'apartat de resolució de sistemes d'equacions és on la seva àlgebra arriba a una fase que podríem qualificar de més madura, doncs aquí l'autor planteja els sistemes i opera amb les equacions. No sembla que Pérez de Mesa sigui conscient del salt qualitatiu que suposa aquest darrer capítol, ja que no posa massa èmfasi en les explicacions ni hi ha gaire exemples resolts. Així com el mètode que utilitza per a la resolució de les equacions de segon grau està en la línia dels que utilitzen Aurel, Pérez de Moya i Núñez, en la resolució dels sistemes d'equacions segueix una metodologia ben diferent. No està clar en quines fonts es va basar pel que fa a la resolució dels sistemes però potser caldria estudiar la *Logistica* de Buteo, autor que és possible que Pérez de Mesa hagués llegit. També seria interessant fer un estudi que comparés l'àlgebra de Núñez amb la que conté aquest manuscrit.

---

75 Veieu les pàgines 69-80 del manuscrit.

Els *Elements* d'Euclides, que eren manual de referència a les universitats de l'època, són un referent molt clar per l'autor, com ho són també per Aurel, Moya i Núñez. He mostrat que les referències que en fa en el manuscrit l'ajuden a recolzar algunes de les seves afirmacions. Els *Elements* formen part de la geometria i sovint estableix paral·lelismes entre aquesta i l'aritmètica. Per Pérez de Mesa l'aritmètica és superior a la geometria, o, com ell ho exposa, els nombres són superiors a les quantitats contínues. L'autor expressa sovint opinions d'aquest estil que si bé estan relacionades amb el text no són necessàries per a la seva comprensió. Quan es llegeix el manuscrit es té la sensació que aquestes opinions són reflexions de l'autor en veu alta. Diu Pérez de Mesa que en aritmètica es poden constituir figures de qualsevol dimensió, és a dir, es poden calcular potències de qualsevol grau, mentre que en geometria no es pot passar de la tercera dimensió. Fent ús de la geometria, però, es poden construir quantitats que, com ho expressa l'autor, no es poden pronunciar i a les que Pérez de Mesa no atorga la categoria de nombres, les quantitats irracionals. Per acabar d'entendre quin paper té la geometria per Pérez de Mesa es podria estudiar el manuscrit 1561 de la universitat de Barcelona que conté només geometria i del qual també n'és autor.

En una primera lectura del manuscrit 2294, el que més em va sobtar és la presència gairebé constant de les progressions geomètriques que són, per Pérez de Mesa, el fonament de l'àlgebra. És cert que altres autors de l'època hi fan referència però no són tan presents a les seves obres i parlen més de termes proporcionals que de progressions. Quan Pérez de Mesa parla de la importància de les progressions geomètriques diu que n'hi ha prou amb trobar un terme qualsevol de la progressió per saber el valor de la incògnita. Amb aquesta afirmació està apuntant un mètode i li està donant més importància que al fet de trobar el valor de la incògnita. Crec, per tant, que hi ha una voluntat d'anar més enllà del fet d'arribar a resultats concrets. La meva interpretació és que l'autor podria estar valorant la importància de les tècniques algebraiques per elles mateixes independentment de la seva potència per resoldre problemes aritmètics.

Voldria destacar també el fet de la introducció de la lletra Ω per indicar la igualtat, símbol que no representa cap abreviació. Aurel i Núñez fan servir diferents paraules per indicar-la i Pérez de Moya la indica amb l'abreviació "yg." de la paraula "ygualdad" .

Crec que el fet de donar a conèixer aquest manuscrit pot canviar una mica la grisor amb què se sol veure el panorama matemàtic espanyol del segle XVI. Valdria la pena que veiessin la llum més manuscrits amb contingut algebraic per tal de poder tenir una idea més ajustada a la realitat del que va ser l'activitat matemàtica espanyola en un segle en el qual la supremacia de les "lletres" va poder eclipsar altres tipus d'activitat intel·lectual.

7. BIBLIOGRAFIA

AUREL, M. *Libro primero de Arithmetica Algebratica.* Valencia, 1552.

BEAUJOUAN, G. “Manuscrits scientifiques médiévaux de l’Université de Salamanque et de ses « Colegios Mayores » ” en *Bibliothèque de l’école des hautes études hispaniques (fascicule XXXII),* 5.

CAJORI, F., 1928-9, *A History of Mathematical Notations*, 2 vols., Open Court Publishing Co., La Salle, Il, reprinted by Dover, 1993.

CAMERON, E. *El siglo XVI.* Editorial Crítica. Barcelona, 2006.

CIFOLETTI, G. "The creation of the history of algebra in the sixteenth century", *L'Europe Mathématique, Mathematical Europe* (dir. C. Goldstein, J. Gray, J. Ritter), Paris, MSH, 1996, 121-142

DOCAMPO, J., 2006. «Reading Luca Pacioli’s Summa in Catalonia: An early 16th-century Catalan manuscript on algebra and arithmetic», *Historia Mathematica* 33, 43-62.

EUCLIDES, (1991), *Elementos,* Madrid, Editorial Gredos, tomos I y II.

ESTEBAN PIÑEIRO, M. “La Academia de Matemáticas de Madrid” dins les actes del Congreso Internacional sobre *La Ciencia y la Técnica en la época de Felipe II*, organitzat per FUNDESCO sota la direcció del profesor ENRIQUE MARTÍNEZ RUIZ, celebrat entre el 8 i 10 de setembre de 1998 a San Lorenzo de El Escorial pp. 113-133. Madrid, 1999.

HEATH, T. L. *The thirteen books of Euclid's Elements.* Volum III. Dover Publications, INC. New York.

HOYRUP, J. Jordanus de Nemore 13th Century Mathematical Innovator, a *Archive for History of Exact Science* **38** (1988), 307-363.

HUTTON, C. *Mathematical and Philosophical Dictionary* 1795, pp 125-126.

JUEZ, F. J. "Un manuscrito desconocido del *Carmen de doctrina Domini Nostri Iesu Christi* de Marko Marulic en la Biblioteca Nacional de Madrid. Colloquia Maruliana XI (2002).

LÓPEZ PIÑERO, J.M.; GLICK, T.F.; NAVARRO, V.; PORTELA, E. (1983) *Diccionario Histórico de la Ciencia Moderna en España,* Barcelona, Ediciones Península, Volumen II pp. 160-162.

LÓPEZ PIÑERO, J.M. "Actividad científica y sociedad en la España de Felipe II", dins les actes del Congreso Internacional sobre *La Ciencia y la Técnica en la época de Felipe II*, organitzat per FUNDESCO sota la direcció del profesor ENRIQUE MARTÍNEZ RUIZ, celebrat entre el 8 i 10 de setembre de 1998 a San Lorenzo de El Escorial pp. 17-37. Madrid, 1999.

MALET, A. (2000), "Mil años de matemáticas en Iberia" dins A. J. DURÁN GUARDEÑO, *El legado de las matemáticas. De Euclides a Newton: los genios a través de sus libros,* Sevilla, Consejería de Cultura (Junta de Andalucía), Universidad de Sevilla, Real Sociedad Matemática Española, SAEM Thales, 193-224.

MALET, A.; PARADÍS, J. (1984), *Els orígens i l'ensenyament de l'àlgebra simbòlica,* Barcelona, Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona.

MARTÍNEZ, M. (2000), “De la aritmética medieval al álgebra renacentista” en A. J. DURÁN GUARDEÑO, *El legado de las matemáticas. De Euclides a Newton: los genios a través de sus libros,* Sevilla, Consejería de Cultura (Junta de Andalucía), Universidad de Sevilla, Real Sociedad Matemática Española, SAEM Thales, 77-107.

MORENO, R. (2001), *Andanzas y aventuras de las ecuaciones cúbica y cuártica a su paso por España,* Madrid, Editorial Complutense S.A.

NAVARRO, V. (1992), “La actividad astronómica e la España del siglo XVI: perspectivas historiográficas” *Arbor CXLII, (558-559-560),* pp 185-216.

NAVARRO, V.; RODRÍGUEZ, E. (1998), *Matemáticas, cosmología y humanismo en la España del siglo XVI. Los Comentarios al segundo libro de la Historia Natural de Plinio de Jerónimo Muñoz,* “Cuadernos Valencianos de Historia de la Medicina y de la Ciencia”, LIV, Valencia, Instituto de Estudios Documentales e Históricos sobre la Ciencia. Universitat de València-CSIC.

NAVARRO, V.; SALAVERT, V. L.; ROSSELLÓ, V.; DARÁS, V. (1999), *Bibliographia physico-mathematica hispanica (1475-1900),* “Cuadernos Valencianos de Historia de la Medicina y de la Ciencia”, LVI, Valencia, Instituto de Historia de la Ciencia y Documentación “López Piñero”. Universitat de València-CSIC. Volumen I.

NÚÑEZ SALACIENSE, P., *Libro de álgebra en arithmética y geometría*, Amberes, Herederos dí Arnoldo Birckman, 1567.

ORDÓÑEZ, J.; NAVARRO, V.; SÁNCHEZ, J.M. *Historia de la Ciencia.* Espasa Calpe S.A. Madrid, 2007, pp 239-300.

PACIOLI, L. *Summa de Aritmética, Geometría, Proportioni t Proportionalità.* Paganino de Paganini. Venecia, 1494.

PARDO TOMÁS, J. *Ciencia y censura. La Inquisición Española y los libros científicos en los siglos XVI y XVII.* Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Madrid, 1991.

PÉREZ DE MESA, D. (1598), *Libro y tratado del arismetica y arte mayor y algunas partes de astrología y matematicas.* Manuscrito 2294 de la Biblioteca de la Universidad de Salamanca.

PÉREZ DE MOYA, J. *Aritmética práctica y speculativa.* Biblioteca Castro. Madrid 1998.

RADFORD, LUIS. « L'invention d'un idée mathématique: la deuxième inconnue en algèbre » dins de Reperes-Irem nº 28, juliol de 1997.

REY PASTOR, J. (1934), *Los matemáticos españoles del siglo XVI,* Madrid, Junta de Investigaciones Histórico-Bibliográficas, Monografía núm.1.

SABIO, RAFAEL. " La historia de Tarifa según dos autores del siglo XVI: Pedro de Medina y Diego Pérez de Mesa" a la Revista de Estudios Tarifeños. Año XIII. Núm. 50. Tercer trimestre. Septiembre de 2003. Servicio de Publicaciones del Excelentísimo Ayuntamiento de Tarifa.

SALAVERT, V. "Introducción a la historia de la aritmética pràctica en la Corona de Aragón en el siglo XVI", *Dynamis,* 10 (1990), 63-91

SIGLER, L. E. *Fibonacci's Liber Abaci.* 2002 Springer-Verlag New York, Inc.

VICENTE, M.I.; ESTEBAN, M. *Aspectos de la Ciencia Aplicada en la España del Siglo de Oro,* Salamanca, Junta de Castilla y León, 1991.

De sant Joan Baptista Soneto:

En tinieblas y noche muy obscura
estaua todo el mundo sepultado.
llorando su infeliz y triste estado
por no mostrar el dia su figura
quando vn luzero de grande hermosura
principio de aquel dia desseado
con grande luz y curso accelerado
adar la buena nueua se apressaua
Sus rayos por el mundo va sparziendo
mostrando alos ojos tan vistoso
que todos con le ver quedan diziendo.
Sus el luzero tal y tan lustroso
vn prenunçio del dia solo siendo
quando sera el dia mas hermoso.

(Sonet copiat per Pérez de Mesa en la pàgina 20 del manuscrit 1561 de la Biblioteca de la Universitat de Barcelona)