



Universitat  
Autònoma  
de Barcelona



## **ENRUTAMENT I CONTROL DE FLUX EN XARXES HÍBRIDES SATÈL·LIT-TERRESTRE**

*Memòria del Treball Final de Carrera  
d'Enginyeria de Telecomunicació,*

realitzat per

Alex Amills Rexach

i dirigit per

Gonzalo Seco Granados

Bellaterra, 11 de juny de 2007



El sotasignat, Gonzalo Seco Granados

Professor/a de l'Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de la UAB,

**CERTIFICA:**

Que el treball a què correspon aquesta memòria ha estat realitzat sota la seva direcció per n'Alex Amills Rexach

I per tal que consti firma la present.

Signat: .....

Bellaterra, 11 de juny de 2007



*Al tutor del projecte Gonzalo Seco  
per l'ineestimable orientació, interès  
i temps invertit en aquest projecte.*

*A tota la meva família per  
l'immens suport rebut*

*A la Cristina per estar  
sempre al meu costat*

*Sense vosaltres no hagués estat possible  
dur a terme aquest projecte.*



# ÍNDIX

<b>CAPÍTOL 1. INTRODUCCIÓ .....</b>	<b>1</b>
1.1 Objectiu .....	1
1.2 Metodologia .....	1
1.3 Estructura del document .....	2
 <b>CAPÍTOL 2. OPTIMITZACIÓ DE L'ENRUTAMENT, EL CONTROL DE FLUX I EL PROBLEMA CONJUNT .....</b>	 <b>3</b>
2.1 Optimització del control de flux .....	3
2.2 Optimització de l'enrutament .....	4
2.2.1 Formulació del problema per una sola destinació .....	5
2.2.2 Formulació del problema per múltiples destinacions .....	7
2.3 Optimització conjunta de l'enrutament i el control de flux .....	9
2.3.1 Formulació del problema per una sola destinació .....	9
2.3.2 Formulació del problema per múltiples destinacions .....	10
 <b>CAPÍTOL 3. TÈCNIQUES D'OPTIMITZACIÓ CONVEXA .....</b>	 <b>13</b>
3.1 Optimització convexa .....	13
3.2 Mètode de Descomposició Dual .....	14
3.3 Mètode del Gradient/Subgradient .....	15
3.3.1 Formulació del mètode del subgradient .....	16
3.3.2 Criteris de tria de la mida de pas .....	17
3.3.3 Convergència de l'algorisme .....	17
3.4 Mètode de Newton .....	18
3.4.1 Mètode de Newton per minimització sense restriccions .....	18
3.4.2 Mètode de Newton estàndard per minimització amb restriccions d'igualtat .....	19
3.4.3 Mètode de Newton amb restriccions d'igualtat i inici no factible .....	20
3.5 Mètode de la Barrera Logarítmica .....	21
 <b>CAPÍTOL 4. CONTROL DE FLUX: OPTIMITZACIÓ DE LA UTILITAT .....</b>	 <b>25</b>
4.1 Formulació del problema .....	25
4.2 Aplicació del mètode del subgradient .....	26





4.3 Aplicació del mètode de la barrera logarítmica .....	28
4.4 Exemple numèric .....	30
4.4.1 Model equivalent de topologia de xarxa .....	31
4.4.2 Resultats de la simulació .....	32
4.4.3 Anàlisi de les prestacions dels algorismes .....	34
 <b>CAPÍTOL 5. ENRUTAMENT AMB MÍNIM RETARD</b> .....	37
5.1 Formulació del problema .....	37
5.2 Aplicació del mètode del subgradient .....	40
5.3 Exemple numèric .....	41
5.3.1 Model equivalent de topologia de xarxa .....	42
5.3.2 Resultats de la simulació .....	43
5.3.3 Anàlisi de les prestacions de l'algorisme .....	45
 <b>CAPÍTOL 6. ENRUTAMENT I CONTROL DE FLUX CONJUNTS PER UNA DESTINACIÓ</b> .....	47
6.1 Formulació general del problema .....	47
6.2 Formulació del problema extern .....	48
6.3 Formulació del problema intern .....	49
6.4 Consideracions per a la simulació de l'algorisme .....	51
6.5 Aplicació del mètode del subgradient al problema extern .....	51
6.6 Aplicació del mètode del subgradient al problema intern .....	52
6.7 Aplicació del mètode de Newton amb inici no factible al problema intern .....	55
6.8 Exemple Numèric .....	60
6.8.1 Model equivalent de topologia de xarxa .....	61
6.8.2 Resultats de la simulació .....	63
6.8.3 Anàlisi de les prestacions dels algorismes .....	65
 <b>CAPÍTOL 7. ENRUTAMENT I CONTROL DE FLUX CONJUNTS PER MÚLTIPLES DESTINACIONS</b> .....	71
7.1 Formulació general del problema .....	71
7.2 Formulació del problema dual extern .....	72
7.3 Formulació del problema dual intern .....	73
7.4 Consideracions per a la resolució del problema .....	74
7.5 Aplicació del mètode del subgradient pel problema extern .....	76



7.6 Aplicació del mètode del subgradient pel problema intern .....	77
7.7 Exemple numèric .....	81
7.7.1 Model equivalent de topologia de xarxa .....	81
7.7.2 Resultats de la simulació .....	83
7.7.3 Anàlisi de les prestacions de l'algorisme .....	89
 <b>CAPÍTOL 8. CONCLUSIONS</b> .....	 97
 <b>REFERÈNCIES</b> .....	 101



## ÍNDIX DE FIGURES

Fig. 2.1. Exemple de fluxos entrants i sortints en el node n .....	6
Fig. 4.1. Exemple de model de xarxa pel problema de maximització d'utilitat de xarxa .....	30
Fig. 4.2 Model equivalent de topologia de xarxa .....	31
Fig. 4.3. Rutes o fluxos fixats .....	32
Fig. 4.4. Evolució de la funció d'utilitat $\sum_n U_n(s_n)$ pels dos algorismes .....	34
Fig. 4.5 Gap d'optimalitat principal en ambdós algorismes .....	35
Fig. 5.1. Exemple de model de xarxa per al problema d'enrutament amb mínim retard. ....	41
Fig. 5.2. Model equivalent de la topologia de xarxa .....	42
Fig. 5.3. Límits de capacitat dels enllaços .....	43
Fig. 5.4 Interpretació gràfica de la solució $x^*$ .....	44
Fig. 5.5. Enrutament òptim de xarxa .....	45
Fig. 5.6 Funcions objectiu principal i dual per $\alpha=0.05$ i $\alpha=0.01$ .....	46
Fig. 5.7. Norma del subgradient g per $\alpha=0.05$ i $\alpha=0.01$ .....	46
Fig. 6.1 Representació gràfica del subgradient intern g .....	53
Fig. 6.2 Diagrama de flux dels algorismes emprats .....	59
Fig. 6.3. Exemple de model de xarxa per al problema conjunt d'E. i C.F. per una sola destinació. ....	60
Fig. 6.4. Model equivalent de la topologia de xarxa .....	61
Fig. 6.5. Límits de capacitat dels enllaços .....	62
Fig. 6.6 Enrutament cap al node-destinació .....	63
Fig. 6.7 Tràfic òptim que circula en cada enllaç del model real .....	64
Fig. 6.8. Evolució de la funció utilitat $U(s)$ dels dos algorismes .....	66
Fig. 6.9 Gap d'optimalitat principal .....	66
Fig. 6.10 Evolució de la funció dual en els dos algorismes .....	67
Fig. 6.11 Gap d'optimalitat dual dels dos algorismes (en valor absolut) .....	68
Fig. 6.12 Evolució del vector de preus aplicant el mètode del subgradient .....	68
Fig. 6.13 Evolució del vector de preus el mètode de Newton amb i.n.f. ....	69
Fig. 6.14 Variació del preu i factor d'utilització de l'enllaç $l=2$ en l'algorisme B .....	70
Fig. 7.1 Representació gràfica del subgradient intern g per múltiples destinacions .....	78
Fig. 7.2 Diagrama de flux de l'algorisme emprat .....	80
Fig. 7.3. Model de xarxa per a l'exemple numèric del problema conjunt d'E. i C.F. per múltiples destinacions. ....	81
Fig. 7.4. Model equivalent de la topologia de xarxa .....	82
Fig. 7.5. Model equivalent amb el límits de capacitat de cada enllaç .....	83
Fig. 7.6 Representació gràfica de la solució òptima $s^*$ .....	85
Fig. 7.7 Representació gràfica de la solució òptima $x^*$ .....	86
Fig. 7.8 Enrutament òptim per les diferents destinacions .....	87
Fig. 7.9 Representació del valor òptim de $t^*$ .....	88
Fig. 7.10. Evolució de la utilitat $\sum(U(s))$ amb el mètode del subgradient per diferents mides de pas .....	90
Fig. 7.11. Gap d'optimalitat principal per diferents mides de pas .....	91
Fig. 7.12. Evolució de la funció dual $V(p)$ per diferents mides de pas .....	91
Fig. 7.13. Gap d'optimalitat dual per diferents mides de pas .....	92
Fig. 7.14 Evolució de la norma del subgradient intern g .....	93
Fig. 7.15 Evolució de la norma del subgradient extern h .....	93
Fig. 7.16 Evolució del factor d'utilització dels enllaços amb $\beta=0.02$ .....	94
Fig. 7.17 Evolució del vector de preus .....	95



## ÍNDEX DE TAULES

Taula 4.1 Valors òptims de flux injectat $s^*$ .....	33
Taula 4.2. Factor d'utilització de cada enllaç, en equilibri .....	33
Taula 4.3. Valors òptims del vector de preus $p^*$ .....	33
Taula 5.1. Vector òptim d'enrutament $x^*$ .....	43
Taula 6.1 Valors òptims d'enrutament $x^*$ .....	63
Taula 6.2 Valors òptims de control de flux $s^*$ .....	63
Taula 6.3 Valors òptims de $p^*$ .....	64
Taula 7.1. Solucions del flux injectat òptim $sn(d)$ .....	84
Taula 7.2 Solucions de l'enrutament òptim $xl(d)$ .....	84
Taula 7.3 Valors òptims de $t^*$ .....	88
Taula 7.4 Valors òptims de $p^*$ .....	89





## 1. INTRODUCCIÓ

### 1.1 Objectiu

En aquest document s'estudien, de manera exhaustiva, diversos problemes d'enrutament i control de flux en xarxes híbrides satèl·lit-terrestre. Es considera un escenari en què tots els components de la xarxa, tant els nodes terrestres com els satèl·lits, estan integrats en una xarxa de manera heterogènia.

Aquestes xarxes permeten oferir connectivitat a zones remotes utilitzant enllaços per satèl·lit i, en aquest sentit, permeten resoldre nombrosos problemes de comunicacions. No obstant, també presenten diversos reptes ja que realitzen la comunicació mitjançant un canal mòbil terrestre i un canal satèl·lit (estant un a continuació de l'altre). Aquest projecte està motivat per un d'aquests reptes: la recerca de mecanismes per dur a terme, de manera eficient, l'enrutament i el control de flux en aquest tipus de xarxes.

Així doncs, es vol aconseguir una xarxa on cada component, per una banda, injecti un certa quantitat òptima de flux, i per altra banda, decideixi de manera òptima a quin node adjacent ha de transmetre el flux sortint, en funció de la seva destinació i a partir d'una certa funció de cost o utilitat.

L'objectiu d'aquest projecte és simular algun dels algorismes existents (o proposar-ne algun de nou, si és possible), per tal de resoldre aquests reptes, tot analitzant-ne les prestacions. Per fer-ho, es plantejaran els problemes d'enrutament i control de flux de manera individual i conjunta, formulant diversos problemes d'optimització convexa, i estudiant els diferents mètodes de resolució existents.

### 1.2 Metodologia

La metodologia emprada en aquest projecte es pot dividir en quatre fases.

En una primera fase s'han estudiat de manera genèrica diversos problemes d'optimització de xarxa (a partir de [1]-[5]): enrutament, control de flux, i problema conjunt. Tanmateix, s'han estudiat diverses tècniques i mètodes d'optimització convexa per tal d'afrontar la seva resolució ([6]-[8]).

A la segona fase s'han resolt els problemes d'enrutament i control de flux per separat, mitjançant la implementació d'algorismes existents (veure [6], [9] i [10]),

endinsant-nos en la resolució d'aquests problemes a través de tècniques d'optimització convexa.

A la tercera fase, a partir dels fonaments teòrics i funcionals adquirits a les dues fases anteriors, s'han proposat algorismes d'optimització del problema conjunt d'enrutament i control de flux, a partir de tècniques d'optimització convexa ja existents.

Per últim, s'han analitzat els resultats obtinguts i les prestacions presentades per cadascun dels algorismes posats a prova.

### **1.3 Estructura del document**

Aquest document s'estructura en quatre parts ben diferenciades, seguint en certa mesura, les diverses fases de la metodologia emprada.

En primer lloc, s'introduiran les diverses eines teòriques en les quals es fonamenta el projecte i mitjançant les quals es presentaran els diferents casos d'estudi i es desenvoluparan els diferents algorismes. En el capítol 2 es formularan de manera genèrica cadascun dels problemes sotmesos a estudi, mentre que en el capítol 3 es descriuran les diverses tècniques d'optimització convexa que seran emprades per a la seva resolució.

A la segona part del treball s'estudiaran els problemes d'enrutament i control de flux per separat, proposant algorismes existents per a la seva resolució i analitzant-ne les prestacions i els resultats obtinguts. En el capítol 4 s'estudiarà el problema de maximització de la utilitat de xarxa, vist com un problema d'optimització del control de flux. En el capítol 5, s'estudiarà el problema d'enrutament amb mínim retard.

A continuació s'estudiarà el problema conjunt d'enrutament i control de flux, que constitueix la part central d'aquest projecte. Aquest serà estudiat per dos models de flux de xarxa diferents, per una sola destinació i per múltiples destinacions, que es tractaran en els capítols 6 i 7 respectivament. En aquest problema el nostre objectiu serà optimitzar de manera simultània l'enrutament i el control de flux. Per fer-ho, es proposaran nous algorismes creats a partir de tècniques d'optimització convexa existents. S'analitzaran exhaustivament el funcionament, les prestacions i els resultats obtinguts amb aquests algorismes.

Per últim, en el capítol 8 es presentaran les conclusions d'aquest projecte.

## 2.- OPTIMITZACIÓ DE L'ENRUTAMENT, EL CONTROL DE FLUX I EL PROBLEMA CONJUNT

En aquest apartat es presenten, per una banda, els problemes individuals d'optimització de l'enrutament i del control de flux, on es formularan ambdós casos per separat, de manera no conjunta. Per altra banda es formularà, a títol descriptiu, el problema que engloba aquests dos problemes individuals, el problema conjunt d'enrutament i control de flux, que serà àmpliament estudiat en els capítols 6 i 7 d'aquest projecte.

### 2.1 Optimització del control de flux

El control de flux és una part essencial en qualsevol protocol de transport de dades. En les xarxes cablejades tradicionals, ja sigui el mecanisme *Available Bit Rate (ABR)* en xarxes ATM o les connexions TCP *best effort* en una xarxa IP, el control de flux redueix la pèrdua de paquets, incrementa la utilització de la xarxa i preveu la congestió.

En el nostre cas, en xarxes híbrides satèl·lit terrestre (HSTN), l'entrega fiable de dades depèn en gran part del protocol de control de flux de TCP. A continuació es presenta una idea en la que permetem que a cada node de la xarxa HSTN es pugui autoajustar el flux originat, és a dir, es permeti un comportament elàstic en funció de les condicions actuals de la xarxa. Suposarem que una xarxa ofereix ample de banda fixe o variable a una sèrie de fonts de flux (nodes) i els hi assigna un cert preu a aquests recursos d'acord amb la demanda existent, de tal manera que aquestes fonts de tràfic puguin "comprar" ample de banda per tal de maximitzar una certa funció d'utilitat.

La idea bàsica d'aquest mecanisme d'optimització de control de flux es descriu de manera exhaustiva a [11], on es proposa un algorisme descentralitzat de control de flux en el qual l'objectiu és maximitzar la utilitat de les fonts de tràfic (a partir de la corresponent taxa de transmissió). El problema resultant tindrà la forma típica d'un problema d'optimització convexa, on els enllaços i els nodes seran vistos com a processadors d'un sistema de computació distribuït que maximitzaran la utilitat de la xarxa. Cadascun d'aquests processadors executarà un algorisme local, comunicarà el resultat del càlcul als elements de xarxa adjacents, i el cicle s'anirà repetint. Aquest algorisme, des d'un punt de vista global, optimitzarà de manera reactiva el control de flux.

Formularem el problema, considerant que la xarxa estarà formada per un conjunt de  $N$  fluxos, cadascun dels quals estarà caracteritzat per una funció d'utilitat  $U_n(s_n)$ ,  $n \in N$ , que serà creixent, estrictament còncava i contínuament diferenciable, on  $s_n$  són els diferents fluxos injectats en un cert node origen i un cert node destí. La

xarxa també estarà formada per un conjunt  $L$  d'enllaços unidireccionals de capacitat  $c_l$ ,  $l \in L$ . Per a simplificar la formulació del problema, no tindrem en compte quina és la topologia de xarxa i utilitzarem un enrutament fixe, és a dir, es definiran unes certes rutes que passaran per un conjunt fixe d'enllaços des del seu origen al seu destí.

L'objectiu del problema serà calcular els fluxos d'origen  $s_n$  que maximitzen la suma de les respectives utilitats, subjecte a les restriccions de les capacitats de cada enllaç:

$$\begin{aligned} & \text{maximitzar} \sum_n U_n(s_n) \\ & \text{subjecte a} \sum_{n \in N(l)} s_n \leq c_l \quad \forall l \in L \end{aligned} \quad (2.1)$$

On  $N(l)$  és el conjunt de rutes que utilitzen l'enllaç  $l$ . Per tal de resoldre aquest problema d'optimització convexa es reformularà la expressió (2.1) a un problema més fàcil de resoldre mitjançant el mètode de descomposició dual, i posteriorment s'aplicarà el mètode del subgradient. Ambdós mètodes seran presentats en el capítol 3, i la resolució del problema d'optimització del control de flux serà descrita en el capítol 4, Control de flux: optimització de la utilitat de xarxa.

## 2.2 Optimització de l'enrutament

En l'apartat anterior s'ha realitzat una optimització del control de flux a partir dels fluxos d'origen  $s_n$ , també anomenats fonts de tràfic origen-destí, sense tenir en compte com s'enrutaven aquests fluxos fins arribar al seu destí. Un cop injectats a la xarxa, aquests fluxos són enrutats a cada node a través d'uns certs enllaços per arribar al seu destí, en funció d'unes taules d'enrutament i la restricció de les capacitats dels enllaços, presentat a l'expressió (2.1).

En l'optimització de l'enrutament considerarem que a cada enllaç hi ha un cert tràfic, el cost associat del qual voldrem minimitzar (o la utilitat del qual voldrem maximitzar). Val a dir que en aquest apartat assumim que la xarxa té  $L$  enllaços i  $N$  nodes (en l'apartat anterior no parlàvem de  $N$  nodes si no  $N$  de rutes o fluxos origen-destí).

En primer lloc definirem una matriu node-incidència que descrigui la topologia de xarxa, d'aquesta manera:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si l'enllaç } j \text{ surt del node } i \\ -1 & \text{si l'enllaç } j \text{ entra al node } i \\ 0 & \text{en qualsevol altre cas} \end{cases} \quad (2.2)$$

$$i = 1, \dots, N$$

$$j = 1, \dots, L$$

Per tal d'explicar quina serà la relació entre aquesta matriu, el tràfic injectat a la xarxa a través d'un cert node i el tràfic existent a cada enllaç, caldrà diferenciar entre dos models: enrutament per una sola destinació o per múltiples destinacions.

### 2.2.1 Formulació del problema per una sola destinació

En aquest problema tots els fluxos de la xarxa tenen un sol node com a destinació (model *single-commodity flow*). En primer lloc definirem  $x_j$  com el tràfic que passa per l'enllaç  $j$ . Definim també  $\mathcal{O}(n)$  com el conjunt d'enllaços que surten del node  $n$ , i  $\mathcal{I}(n)$  com el conjunt d'enllaços que entren al node  $n$ . Assumim que els fluxos de dades no tenen pèrdues al passar a través dels enllaços.

A cada node  $n$ , els components del vector de flux de la xarxa  $x$  i del vector de flux injectat  $s$ , satisfan la llei de conservació de fluxos:

$$\sum_{j \in \mathcal{O}(n)} x_j - \sum_{j \in \mathcal{I}(n)} x_j = s_n \quad (2.3)$$

Val a dir que en aquest problema identificarem cada flux injectat  $s_n$  pel seu node origen  $n$ , és a dir,  $s_n$  serà tot el flux que injecta el node  $n$  cap a una certa destinació (comuna per tots els fluxos de la xarxa).

Això significarà que per un node  $n$ , la diferència entre la suma dels fluxos sortints i la suma de fluxos entrants ha de ser el flux injectat en el node  $n$ . La expressió (2.3) pot ser reescrita de manera més compacta:

$$Ax = s \quad (2.4)$$

on  $A$  és la matriu node-incidència definida a (2.2).

En l'exemple de la figura 2.1 veiem que per tal que es compleixi la llei de conservació de fluxos s'hauria de complir  $x_l + x_m + x_p - x_q = s_n$ .

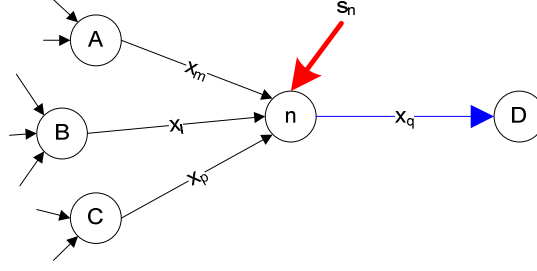


Figura 2.1. Exemple de fluxos entrants i sortint en el node n

Tanmateix, perquè la llei de conservació de flux tingui sentit es definirà el component  $s$  del node destinació ( $s_{n=d}$ ) com la suma de tots els fluxos de dades injectats amb el signe canviat:

$$s_{n=d} = - \sum_{n, n \neq d} s_n \quad (2.5)$$

Això implica que  $\sum_n s_n = 0$ , on només una component del vector  $s$  serà negativa (la del node destí).

En el problema d'optimització de l'enrutament es prendran els fluxos de tràfic  $x$  com les variables del problema mentre que els fluxos injectats  $s$  vindran donats (i seran fixos).

Definim ara la funció objectiu:

$$f(x) = \sum_{j=1}^n \phi_j(x_j) \quad (2.6)$$

on  $\phi_j: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$  és la funció de cost dels fluxos per l'enllaç  $j$ . S'assumirà que les funcions de cost són convexes. I per tant, tindrem un problema d'optimització convexa que consistirà en trobar l'enrutament que minimitzi la nostra funció de cost i satisfaci l'equació de conservació (2.4).

Així doncs, el problema d'optimització de l'enrutament per una sola destinació queda formulat així:

$$\underset{x}{\text{minimitzar}} \quad \sum_{j=1}^L \phi_j(x_j) \quad (2.7)$$

$$\text{subjecte a } Ax = s$$

Al resoldre aquest problema és possible que certs components del vector  $x$  tinguin un valor òptim nul, la qual cosa té sentit ja que al minimitzar les funcions de cost és possible que el cost associat a la utilització d'un cert enllaç sigui massa elevat i sigui convenient no emprar-lo. Val a dir que en la formulació genèrica d'aquest problema (2.7) no es té en compte el límit de capacitat de cada enllaç.

En el capítol 5 d'aquest document s'estudia un cas específic d'aquest problema, l'objectiu del qual és optimitzar l'enrutament per tal d'obtenir un retard mínim en la transmissió dels fluxos de xarxa.

### 2.2.2 Formulació del problema per múltiples destinacions

En el problema d'optimització d'enrutament per un model de múltiples destinacions (també anomenat model *multicommodity flow*), cada node pot enviar dades cap a moltes destinacions i rebre dades de moltes fonts.

Per tant, existeixen  $D$  nodes destinació en la nostra xarxa, on  $D \leq N$  (on  $N$  és el nombre total de nodes de la xarxa). En aquest cas definim el nostre vector flux injectat  $s^{(d)} \in \mathbb{R}^N$ , el component  $n$ -èssim del qual ( $n \neq d$ )  $s_n^{(d)}$  denota la quantitat de flux positiu (en bits/s) injectat a la xarxa al node origen  $n$  amb destinació  $d$ .

Per definir la topologia de xarxa també utilitzarem la matriu node-incidència  $A$ , expressada a (2.2).

En el cas anterior, com tots els fluxos de tràfic que passaven per un enllaç de la xarxa tenien la mateixa destinació aquests eren expressats com a  $x_j$ . Ara definim  $x_j^{(d)}$  com el flux de tràfic que passa per l'enllaç  $j$  i té com a destinació  $d$ . Definim també  $t_j$  com la suma dels fluxos de totes les destinacions que passen per l'enllaç  $j$ :

$$t_j = \sum_d x_j^{(d)}, \quad j = 1, \dots, L \quad (2.8)$$

Assumim que els fluxos de dades no tenen pèrdues al passar a través dels enllaços, i que de la mateixa manera que en l'apartat anterior, es compleix la llei de conservació de flux, formulada ara com:

$$\sum_{j \in \mathcal{O}(n)} x_j^{(d)} - \sum_{j \in \mathcal{I}(n)} x_j^{(d)} = s_n^{(d)}, \quad d = 1, \dots, D \quad (2.9)$$

La llei de conservació de flux (2.9) pot ser escrita de manera més compacta com:

$$Ax^{(d)} = s^{(d)}, \quad d = 1, \dots, D \quad (2.10)$$

De manera anàloga a l'apartat anterior, perquè es compleixi (2.10) s'ha de definir el component  $n$  de cada vector  $s^{(d)}$  tal que  $n=d$ , com la suma de tots els altres components del vector canviada de signe:

$$s_d^{(d)} = - \sum_{n, n \neq d} s_n^{(d)} \quad (2.11)$$

Això té sentit ja que els components de  $s$  positius són els fluxos injectats a la xarxa, per la qual cosa els components  $s$  on  $n=d$ , tindran un signe negatiu i s'interpretaran com el flux de dades que surt de la xarxa per aquell node, és a dir, la quantitat de les dades (en bits/s) que rep el node de les altres fonts.

Un cop s'han descrit els diferents elements que intervenen en el problema, definim ara la funció objectiu:

$$f(t) = \sum_{j=1}^L \phi_j(t_j)$$

on  $\phi_j: \Re \rightarrow \Re$  és la funció de cost de la suma de fluxos per l'enllaç  $j$ . S'assumirà que les funcions de cost són convexes. I per tant, tindrem un problema d'optimització convexa que consistirà en trobar l'enrutament per cada destinació que minimitzi la nostra funció de cost i satisfaci l'equació de conservació. Cal remarcar que en comparació amb l'apartat anterior, ara la funció de cost dependrà del sumatori de fluxos de cada destinació en cada enllaç, el vector  $t_j = \sum_d x_j^{(d)}$ .

Així doncs, el problema d'optimització de l'enrutament per múltiples destinacions formulat de manera genèrica queda així:

$$\begin{aligned} & \underset{x}{\text{minimitzar}} \quad \sum_{j=1}^L \phi_j(t_j) \\ & \text{subjecte a} \quad Ax^{(d)} = s^{(d)}, \quad d = 1, \dots, D \end{aligned} \quad (2.12)$$



$$t_j = \sum_d x_j^{(d)}, \quad j = 1, \dots, L$$

Anàlogament al problema anterior, el vector de flux injectat  $s$  vindrà donat (estarà fixat) i només s'haurà d'optimitzar la funció objectiu a partir dels vectors  $x$  i  $t$ .

## 2.3 Optimització conjunta de l'enrutament i el control de flux

El problema d'optimització conjunta de l'enrutament i el control de flux és el principal objecte d'estudi d'aquest document i és un cas mixt dels dos problemes presentats anteriorment. En aquest cas optimitzarem una certa funció objectiu a partir dels vectors de flux injectat  $s$  (associats al control de flux) i dels vectors de flux de tràfic als enllaços  $x$  (associats amb l'enrutament) de manera simultània.

A continuació es definirà el problema pels dos models d'enrutament de l'apartat anterior: per una sola destinació i per múltiples destinacions.

### 2.3.1 Formulació del problema per una sola destinació

En el problema conjunt d'enrutament i assignació de recursos per una sola destinació, són vàlides les definicions de la matriu node-incidència  $A$ , el vector de flux de tràfic  $x$  i el vector de flux injectat  $s$  de l'apartat 2.2.1, així com les expressions (2.3), (2.4) i (2.5) que descriuen la llei de conservació de flux.

En aquest cas però, la funció objectiu del problema pot estar definida en funció del vector  $x$  i/o del vector  $s$  (en apartats posteriors d'aquest document serà només en funció del vector de flux injectat  $s$ ).

Al ser un problema d'optimització conjunta es minimitzarà una funció de cost convexa (o es maximitzarà una funció d'utilitat còncava) a partir dels vectors  $x$  i  $s$  a la vegada. El problema queda formulat així:

$$\begin{aligned} &\underset{x,s}{\text{minimitzar}} && f(x,s) && (2.13) \\ &\text{subjecte a} && Ax = s \end{aligned}$$

A aquest problema genèric se li afegirà una restricció: cada enllaç  $j$  té una capacitat màxima  $c_j$  que no podrà ser sobrepassada  $x_j \leq c_j$ ,  $j = 1, \dots, L$ . Llavors, el problema quedarà formulat així:

$$\begin{aligned} & \underset{x,s}{\text{minimitzar}} && f(x,s) && (2.14) \\ & \text{subjecte a} && Ax = s \\ & && x_j \leq c_j, \quad j = 1, \dots, L \end{aligned}$$

El problema serà estudiat exhaustivament i resolt en el capítol 6 d'aquest document.

### 2.3.2 Formulació del problema per múltiples destinacions

En el problema conjunt d'enrutament i assignació de recursos per múltiples destinacions són vàlides les definicions de la matriu node-incidència  $A \in \Re^{N \times L}$ , el vector de flux de tràfic  $x^{(d)} \in \Re^L$ , la suma de fluxos de tràfic  $t \in \Re^L$  i el vector de flux injectat  $s^{(d)} \in \Re^N$  de l'apartat 2.2.2, així com les expressions (2.9), (2.10) i (2.11) que descriuen la llei de conservació de fluxos per un model d'enrutament *multicommodity flow*.

De la mateixa manera que en l'apartat anterior, la funció objectiu del problema pot estar definida en funció del vector  $x$  i/o del vector  $s$ . Al ser un problema d'optimització conjunta es minimitzarà un funció de cost convexa (o es maximitzarà una funció d'utilitat còncava) a partir dels vectors  $x^{(d)}$ ,  $s^{(d)}$  i  $t$  a la vegada. El problema queda formulat així:

$$\begin{aligned} & \underset{x^{(d)}, s^{(d)}, t}{\text{minimitzar}} && f(x, s, t) && (2.15) \\ & \text{subjecte a} && Ax^{(d)} = s^{(d)}, \quad d = 1, \dots, D \\ & && t_j = \sum_d x_j^{(d)}, \quad j = 1, \dots, L \end{aligned}$$

A aquest problema genèric se li afegirà una restricció: cada enllaç  $j$  té una capacitat màxima  $c_j$  que no podrà ser sobrepassada  $t_j \leq c_j$ ,  $j = 1, \dots, L$ . Cal recordar que el vector de capacitats serà una dada del problema i es considerarà estàtic. Llavors, el problema quedarà formulat així:

$$\underset{x,s,t}{\text{minimitzar}} \quad f(x, s, t) \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \text{subjecte a } \quad & Ax^{(d)} = s^{(d)}, \quad d = 1, \dots, D \\ & t_j \leq c_j, \quad j = 1, \dots, L \\ & t_j = \sum_d x_j^{(d)}, \quad j = 1, \dots, L \end{aligned}$$

Si la funció objectiu és separable per destinacions, el problema es convertirà en  $D$  problemes *single commodity flow* i es podrà implementar un algorisme més senzill per a la seva resolució mitjançant el mètode de descomposició dual (que permetrà que el terme  $t_j \leq c_j$  sigui separable per destinacions)

El problema serà àmpliament estudiat i resolt en el capítol 7 d'aquest document. Val a dir que en l'exemple numèric d'aquest capítol considerarem que tots els nodes són origen i destinació.



### 3.- TÈCNIQUES D'OPTIMITZACIÓ CONVEXA

En aquest document s'estudien diversos problemes d'optimització convexa. Per aquest motiu és necessari definir prèviament què tenen en comú els problemes descrits en capítols posteriors i presentar-ne les tècniques que s'utilitzaran per a la seva resolució.

#### 3.1 Optimització convexa

Podem definir un problema d'optimització, de manera genèrica, com:

$$\begin{aligned} &\underset{x}{\text{minimitzar}} \quad f_0(x) && (3.1) \\ &\text{subjecte a } f_i(x) \leq 0, \quad 1 \leq i \leq m \\ &\quad \quad \quad h_i(x) = 0, \quad 1 \leq i \leq p \end{aligned}$$

on  $x \in \mathbb{R}^n$  és la variable d'optimització,  $f_0$  és la funció de cost o objectiu,  $f_1, \dots, f_m$  són les  $m$  funcions amb restriccions de desigualtat, i  $h_1, \dots, h_p$  són les  $p$  funcions amb restriccions d'igualtat.

A partir de (3.1) direm que es tracta d'un problema d'optimització convexa si les funcions  $f_0, \dots, f_m: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  són convexes, és a dir, satisfan:

$$f_i(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f_i(x) + \beta f_i(y)$$

per qualsevol  $x, y \in \mathbb{R}^n$  i qualsevol  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , amb  $\alpha + \beta = 1$ ,  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$  i les  $p$  funcions  $h_i(x)$  són lineals.

Per altra banda, podem dir que una funció  $f$  és còncava si  $-f$  és convexa. Com que minimitzar una funció  $f$  equival a maximitzar  $-f$ , un problema d'optimització convexa també pot consistir en maximitzar una funció còncava subjecte a unes certes restriccions.

En general no hi ha cap fórmula analítica per solucionar problemes d'optimització convexa, però sí que existeixen mètodes molt efectius per afrontar-ne la resolució. A continuació se'n descriuen alguns.

### 3.2 Mètode de Descomposició Dual

El mètode de descomposició dual (dualitat de Lagrange) consisteix en enllaçar el problema original de minimització (3.1), anomenat problema principal, amb un problema de maximització equivalent, anomenat problema dual.

La idea bàsica en la dualitat de Lagrange és relaxar al problema principal (3.1) transferint les restriccions a la funció objectiu en forma d'una suma ponderada d'aquests. Així, podem definir la Lagrangiana com:

$$L(x, \lambda, v) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x) + \sum_{i=1}^p v_i h_i(x) \quad (3.2)$$

on  $\lambda_i \geq 0$  i  $v_i$  són multiplicadors de Lagrange o preus associats amb l' $i$ -èssima restricció d'igualtat  $f_i(x) \leq 0$  i amb l' $i$ -èssima restricció de desigualtat  $g_i(x) \leq 0$ , respectivament. La variable d'optimització  $x$  s'anomena la variable principal i els multiplicadors de Lagrange  $\lambda$  i  $v$  s'anomenen les variables duals.

La funció dual  $g(\lambda, v)$  associada a la funció objectiu principal de (3.1), es defineix com el mínim valor del Lagrangiana (3.2) sobre  $x$ :

$$g(\lambda, v) = \inf_x L(x, \lambda, v) \quad (3.3)$$

que és una funció còncava (fins i tot si la funció principal no és convexa).

Els objectius principal i dual satisfan que  $f_0(x) \geq g(\lambda, v)$  per qualsevol  $x$  i  $(\lambda, v)$  factibles. La funció dual pot ser llavors maximitzada per obtenir una cota inferior al valor òptim  $f^*$  del problema original (3.1):

$$\begin{aligned} & \underset{\lambda, v}{\text{maximitzar}} \quad g(\lambda, v) \\ & \text{subjecte a } \lambda \geq 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

La diferència entre l'objectiu principal òptim  $f^*$  i l'objectiu dual òptim  $g^*$  s'anomena gap de dualitat, i és sempre no-negatiu. Quan  $f^* - g^* > 0$  tenim dualitat feble (*weak duality*) mentre que quan  $f^* - g^* = 0$  tenim dualitat forta (*strong duality*).

En problemes convexos en els que se satisfà la condició de Slater, és a dir, quan el problema és estrictament factible (i existeix una  $x$  tal que  $f_i(x) < 0$  per  $1 \leq i \leq m$  i  $h_i(x) = 0$  per  $1 \leq i \leq p$ ), el gap de dualitat es redueix a zero en el punt òptim i per tant hi ha dualitat forta. Així doncs, en aquests casos, podem resoldre el problema principal (3.1), resolent el problema dual (3.4).

### 3.3 Mètode del Gradient/Subgradient

Un cop hem realitzat la descomposició dual, la funció objectiu obtinguda a partir del problema principal pot ser o no ser diferenciable. Per funcions diferenciables/no diferenciables, l'aplicació del mètode del gradient/subgradient és força convenient degut a la seva simplicitat, pocs requeriments computacionals i possibilitat d'implementació distribuïda.

A títol descriptiu, considerant el següent problema de maximització còncava sobre un conjunt d'elements convex  $X$ :

$$\begin{aligned} & \underset{x}{\text{maximitzar}} \ f_0(x) \\ & \text{subjecte a } x \in X \end{aligned} \quad (3.5)$$

Tant el mètode de projecció del gradient com el del subgradient generen, a través d'un algorisme iteratiu (veure [6]), una seqüència de punts factibles  $\{x(t)\}$  a partir de l'expressió:

$$x(t+1) = [x(t) + \alpha(t)s(t)]_X$$

on  $s(t)$  és el gradient de  $f_0$  avaluat al punt  $x(t)$  si  $f_0$  és diferenciable o el subgradient de  $f_0$  avaluat al punt  $x(t)$  si  $f_0$  no és diferenciable,  $[\cdot]_X$  denota projecció dins del conjunt de valors factibles de  $X$  i  $\alpha(t)$  és la mida de pas positiva (que es descriu en l'apartat 3.3.2).

La majoria dels problemes estudiats en aquest document han estat resolts amb el mètode del subgradient per la qual cosa es procedeix a realitzar una descripció més àmplia d'aquest algorisme d'optimització convexa.

El mètode del subgradient, desenvolupat per Shor [16] a la URSS durant els anys setanta, és un algorisme simple per minimitzar una funció convexa no diferenciable. És molt semblant al mètode del gradient per funcions diferenciables, però amb algunes petites modificacions. Per exemple, el mètode del subgradient

no és un mètode de tipus *descent* com el mètode del gradient, és a dir, el valor de la funció que minimitzem pot créixer al llarg de les iteracions.

En general, el mètode del subgradient és un mètode lent, però és molt simple i pot ser aplicat a una gran varietat de problemes. Pot ser combinat amb tècniques de descomposició dual (apartat 3.1) per tal de desenvolupar algorisme distribuïts per a la resolució de problemes de optimització convexa.

### 3.3.1 Formulació del mètode del subgradient

Suposem que  $f(x) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  és una funció convexa. Definim el subgradient de  $f$  a  $x$  com qualsevol vector  $g$  que satisfà la inequació:

$$f(y) \geq f(x) + g^T(y - x) \quad \forall y$$

Si definim  $x^{(k)}$  com  $x$  a la iteració  $k$ -èssima i  $g^{(k)}$  és algun subgradient de  $f$  a  $x^{(k)}$  tenim que, per minimitzar  $f$ , el mètode del subgradient utilitza la iteració (veure [10]):

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k g^{(k)}$$

On  $\alpha^k > 0$  és la  $k$ -èssima mida de pas. D'aquesta manera, a cada iteració del mètode del subgradient, fem una passa en direcció al subgradient negatiu. Quan  $f$  és diferenciable, l'únic possible valor de  $g^{(k)}$  a cada iteració, és  $\nabla f(x^{(k)})$ , i el mètode del subgradient esdevé llavors el mètode del gradient (excepte per la tria de la mida de pas  $\alpha$ ).

Com que el mètode del subgradient no és un mètode del tipus *descent*, s'acostuma a conservar el millor punt trobat en cada iteració (en el cas de minimitzar, el valor més petit que pren la funció):

$$f_{\text{optima}}^{(k)} = \min\{f_{\text{optima}}^{(k-1)}, f(x^{(k)})\}$$

on  $f_{\text{optima}}^{(k)}$  és el millor valor objectiu trobat en  $k$  iteracions.



### 3.3.2 Criteris de tria de la mida de pas

D'acord amb [10], s'utilitzen diversos criteris per escollir la mida de pas  $\alpha_k$ :

- Mida de pas constant. En aquest cas  $\alpha_k$  és una constant, independent de k.
- Llargada de pas constant. Es compleix que  $\alpha_k = h/\|g^{(k)}\|_2$  el que significa que se satisfà:

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_2 = h$$

- Sumable quadràticament però no sumable. Les mides de pas satisfan:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty,$$

- Disminució no-sumable. Les mides de pas satisfan:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty$$

Per aquest criteri, un exemple típic de mida de pas és  $\alpha_k = a/\sqrt{k}$ , on  $a > 0$ .

En la implementació del mètode del subgradient dels problemes plantejats en aquest document s'ha utilitzat el primer criteri (mida de pas constant), amb valors de mida de pas compresos entre 0.001 i 0.5

### 3.3.3 Convergència de l'algorisme

Tal i com es comenta en [10, §1.2], per una mida de pas constant, el mètode del subgradient garanteix la convergència de l'algorisme dintre d'un cert rang prop del valor òptim, és a dir:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{\text{òptima}}^{(k)} - f^* < \epsilon$$

on  $f^*$  representa el valor òptim del problema (p.e.  $f^* = \inf_x f(x)$ ). Això significa que el mètode del subgradient troba un punt  $\epsilon$ -subòptim en un nombre finit de passos. Aquest nombre  $\epsilon$  és directament proporcional al valor de la mida de pas.

Quan la funció  $f$  és diferenciable podem assegurar que el mètode del subgradient amb mida de pas constant aconsegueix convergir al punt òptim (sempre que el valor de la mida de pas sigui suficientment petit).

### 3.4 Mètode de Newton

Per  $x \in \mathbb{R}^n$ , el vector

$$\Delta x_{nt} = -\nabla^2 f(x)^{-1} \nabla f(x) \quad (3.6)$$

s'anomena pas de Newton (per  $f$ , a  $x$ ) i constitueix la base per diferents estratègies d'optimització. Es pot interpretar com la direcció que apunta de la manera més directa a l'error mínim, quan és avaluada en qualsevol punt d'una superfície quadràtica. Quan la aproximació quadràtica no és vàlida (la qual cosa succeeix la majoria de les vegades), és necessari calcular la expressió (3.6) de manera iterativa.

De fet, la aproximació de Taylor de segon ordre  $\hat{f}$  de  $f$  a  $x$ ,

$$\hat{f}(x + v) = f(x) + \nabla f(x)^T v + \frac{1}{2} v^T \nabla^2 f(x) v$$

és minimitzada quan  $v = \Delta x_{nt}$ . Llavors, el pas de Newton  $\Delta x_{nt}$  és el que hem d'afegir al punt  $x$  per minimitzar la aproximació de segon ordre de  $f$  a  $x$ .

Així doncs, es pot dir que si una funció  $f$  és quadràtica, llavors  $x + \Delta x_{nt}$  és el minimitzador exacte de  $f$ . Si la funció  $f$  és quasi quadràtica,  $x + \Delta x_{nt}$  acostuma a ser un molt bon estimador del minimitzador de  $f$ .

Un altre paràmetre important pel que fa aquest mètode és

$$\lambda(x) = (\nabla f(x)^T \nabla^2 f(x)^{-1} \nabla f(x))^{1/2}$$

que s'anomena el decrement de Newton a  $x$ , i és força útil en la definició d'un criteri de parada d'un algorisme iteratiu basat en aquest mètode.

#### 3.4.1 Mètode de Newton per minimització sense restriccions

Per problemes de minimització sense restriccions, l'estructura d'un algorisme que utilitzi el mètode de Newton és la següent [7]:

---

**Donat** un punt inicial  $x \in \text{dom } f$ , tolerància  $\varepsilon > 0$

**Repetir**

1. Calcular el pas i el decrement de Newton

$$\Delta x_{nt} = -\nabla^2 f(x)^{-1} \nabla f(x); \quad \lambda(x) = (\nabla f(x)^T \nabla^2 f(x)^{-1} \nabla f(x))^{1/2}.$$

2. Criteri de parada. **Sortir** si  $\lambda^2/2 \leq \varepsilon$
  3. Recerca de línia. Escollim la mida de pas  $t$  per recerca de línia *Backtracking*
  4. Actualitzar  $x := x + t \Delta x_{nt}$
- 

Val a dir que la recerca de línia és un mecanisme que s'utilitza en els mètodes *Descent* (veure [7, §9.2]) per trobar la mida de pas  $t$ . En concret, la recerca de línia *Backtracking* és un tipus de recerca de línia molt pràctic (fàcil d'implementar) que depèn de dues constants  $\alpha$  i  $\beta$ , on  $0 \leq \alpha \leq 0.5$ ,  $0 \leq \beta \leq 1$  i, aplicat al mètode de Newton, té el següent funcionament:

---

**Donada** una certa direcció  $\Delta x_{nt}$  per  $f$  a  $x \in \text{dom } f$

$t := 1$

**mentre**  $f(x + t \Delta x_{nt}) > f(x) + \alpha t \nabla f(x)^T \Delta x_{nt}$ ,  $t := \beta t$

---

### 3.4.2 Mètode de Newton estàndard per minimització amb restriccions d'igualtat

El mètode de Newton també pot ser adaptat per problemes de minimització amb restriccions d'igualtat (*Equality constrained minimization*), que tenen la forma:

$$\begin{aligned} &\text{minimitzar } f(x) \\ &\text{subjecte a } Ax = b \end{aligned} \quad (3.7)$$

on  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  és convexa, dos vegades diferenciable i contínua, i  $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$  amb rang  $\{A = p < n\}$ . Assumim que existeix una solució òptima  $x^*$ , i utilitzem  $p^*$  per denotar el punt òptim  $p^* = \inf \{ f(x) \mid Ax = b \} = f(x^*)$ .

Cal remarcar que en aquest cas, un punt  $x^* \in \text{dom } f$  per (3.7) és òptim si i només si hi ha un vector  $v^* \in \mathbb{R}^p$  tal que es compleixen les equacions de validesa principal i dual, que són respectivament:

$$Ax^* = b, \quad \nabla f(x^*) + A^T v^* = 0 \quad (3.8)$$

Llavors aquest mètode serà el mateix que en l'apartat 3.4.1, excepte per dues diferències:

- i) El punt inicial ha de ser factible (satisfer  $x \in \text{dom } f$  i  $Ax=b$ )
- ii) La definició del pas de Newton s'ha de modificar per tal de tenir en compte les restriccions d'igualtat (per assegurar-nos que el pas de Newton  $\Delta x_{nt}$ , és una direcció vàlida (p.e.  $A^* \Delta x_{nt} = 0$ ).

Per aquest motiu, a partir de l'anàlisi de [7], haurem de derivar una nova expressió del pas de Newton que estarà caracteritzada per:

$$\begin{bmatrix} \nabla^2 f(x) & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_{nt} \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla f(x) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

A partir de (3.9),  $x + \Delta x_{nt}$  serà un bon estimador de la solució  $x^*$ , i  $w$  ho serà de la variable dual òptima  $v^*$ , de tal manera que satisfacin les equacions de condicions d'optimalitat (3.8).

Per tant s'executarà el mateix algorisme que en l'apartat anterior amb la única diferència en el procés de càlcul de  $\Delta x_{nt}$ .

### 3.4.3 Mètode de Newton amb restriccions d'igualtat i inici no factible

Es pot desenvolupar una extensió pel mètode de Newton de l'apartat anterior, en la que els punts inicials poden no ser factibles, és a dir, no s'ha de satisfer necessàriament  $Ax^{(0)}=b$ . No obstant s'ha de satisfer  $x(0) \in \text{dom } f$ .

En primer lloc expressarem les condicions d'optimalitat com a components d'un residu  $r(x^*, v^*)$  que volem reduir a zero, on  $r : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$

$$r(x, v) = (r_{dual}(x, v), r_{pri}(x, v))$$

On :

$$\begin{aligned} r_{dual}(x, v) &= \nabla f(x) + A^T v, \\ r_{pri}(x, v) &= Ax - b \end{aligned}$$

En aquest cas utilitzem un pas de Newton  $\Delta x_{nt}$  que ve caracteritzat per aquest residu a partir de la expressió:

$$\begin{bmatrix} \nabla^2 f(x) & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_{nt} \\ \Delta v_{nt} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_{dual} \\ r_{pri} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla f(x) + A^T v \\ Ax - b \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

D'aquesta manera ens quedarà el següent algorisme:

---

**Donat** un punt inicial  $x \in \text{dom } f$ ,  $v$ , tolerància  $\varepsilon > 0$ ,  $\alpha \in (0, 1/2)$ ,  $\beta \in (0, 1)$

**repetir**

1. Càlcul passos de Newton  $\Delta \tilde{x}_{nt}$  i  $\Delta v_{nt}$
2. Recerca de línia *backtracking*  
 $t := 1$

**mentre**  $\|r(\tilde{x} + t\Delta \tilde{x}_{nt}, v + t\Delta v_{nt})\|_2 > (1 - \alpha t)\|r(\tilde{x}, v)\|_2$ ,  $t := \beta t$ ;

3. Actualització  $\tilde{x} := x + t\Delta \tilde{x}_{nt}$  i  $v := v + t\Delta v_{nt}$

**fins que**  $\|r(\tilde{x}, v)\|_2 \leq \varepsilon$  i  $Ax = b$

---

El mètode de recerca de línia *backtracking* emprat en aquest algorisme, és semblant al de l'apartat 3.4.1 però està basat la norma del residu actualitzat en comptes de la funció actualitzada (amb el nou pas de Newton). Valors de  $\alpha$  i  $\beta$  petits (p.e. 0.1) aconseguiran més precisió en cada iteració de la recerca de línia però requeriran més capacitat computacional.

Val a dir que aquest algorisme permet aplicar el mètode de Newton a problemes on sigui difícil donar un punt inicial  $x^{(0)}$  (com succeeix p.e. en l'apartat 6.7), és a dir, ens simplifica la tria de condicions inicials.

### 3.5.- Mètode de la barrera logarítmica

A continuació es proposa un mètode del tipus *interior-point* per resoldre problemes de minimització amb restriccions de desigualtat (*inequality constrained minimization problem*), que tenen aquesta forma:

$$\begin{aligned} &\text{minimitzar } f_o(x) \\ &\text{subjecte a } f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ &\quad \quad \quad Ax = b \end{aligned} \quad (3.11)$$

on  $f_0, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  són convexes, contínues i dos vegades diferenciables, i  $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$  amb rang  $A = p < n$ . Assumim que el problema és solucionable, és a dir, que existeix un valor  $x^*$  òptim.

També assumim que el problema és estrictament factible, és a dir, que existeix  $x \in \text{dom } f_0$ , que satisfà  $Ax=b$  o  $f_i(x) > 0$  per  $i=1, \dots, m$ .

El nostre objectiu és formular, de manera aproximada, el problema amb restriccions de desigualtat (3.11) com un problema amb restriccions d'igualtat que pugui ser resolt pel mètode de Newton.

En primer lloc reescriurem el problema (3.11), fent implícites les restriccions de desigualtat en la funció objectiu:

$$\begin{aligned} & \text{minimitzar } f_0(x) + \sum_{i=1}^m I_-(f_i(x)) \\ & \text{subjecte a } Ax = b \end{aligned} \quad (3.12)$$

on  $I_- : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  és la funció indicador per reals no-positius:

$$I_u = \begin{cases} 0 & u \leq 0 \\ \infty & u > 0 \end{cases}$$

La idea bàsica del mètode de la barrera (logarítmica) és aproximar la funció indicador  $I_-$  per la funció:

$$\hat{I}_-(u) = -\left(\frac{1}{t}\right) \log(-u), \quad \text{dom } \hat{I}_- = -\mathbb{R}_{++}$$

on  $t > 0$  és el paràmetre que assigna la precisió de l'aproximació. Com la funció  $I_-$ , la funció  $\hat{I}_-$  és convexa i no-decreixent, i per convenció, prendrà el valor  $\infty$  per  $u > 0$ . A diferència de  $I_-$  però,  $\hat{I}_-$  és diferenciable i tancada: creix cap a infinit quan  $u$  creix cap a 0.

Substituint  $\hat{I}_-$  per  $I_-$  a (3.12) tenim l'aproximació:

$$\begin{aligned} & \text{minimitzar } f_0(x) + \sum_{i=1}^m -\left(\frac{1}{t}\right) \log(-f_i(x)) \\ & \text{subjecte a } Ax = b \end{aligned} \quad (3.13)$$

Aquí, l'objectiu de la funció és convex, ja que  $-(1/t)\log(-u)$  és convexa i creixent en  $u$ , i diferenciable. Assumint que també és tancada, es pot aplicar el mètode de Newton per resoldre el problema (3.13). La funció:

$$\phi(x) = - \sum_{i=1}^m \log(-f_i(x))$$

amb dom  $\phi = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) < 0, i=1, \dots, m\}$  s'anomena la barrera logarítmica (o log-barrera) pel problema (3.11). El seu domini és la sèrie de punts que satisfan les restriccions de desigualtat de (3.11) de manera estricta. No ens importa quin serà el valor (positiu) de  $t$ , la barrera logarítmica creixerà il·limitadament si  $f_i(x) \rightarrow 0$ , per qualsevol  $i$ .

Podem reescriure el problema equivalent a (3.13)

$$\begin{array}{ll} \text{minimitzar} & t f_0(x) + \phi(x) \\ \text{subjecte a} & Ax = b \end{array} \quad (3.14)$$

que tindrà els mateixos minimitzadors que el problema (3.13), podrà ser resolt fàcilment pel mètode de Newton amb restriccions d'igualtat, i tindrà una única solució per cada  $t > 0$ .

L'algorisme proposat per solucionar el problema (3.14) mitjançant el mètode de la barrera (logarítmica) té la següent forma:

---

**Donats** els punts estrictament factibles  $x$ ,  $t:=t^{(0)}>0$ ,  $\mu>1$ , tolerància  $\varepsilon > 0$

**Repetir**

1. Pas de recerca de centre

Calcular  $x^*(t)$  minimitzant  $t f_0 + \phi$ , subjecte a  $Ax=b$  (p.e. amb mètode de Newton)

2. Actualitzar  $x:=x^*(t)$
  3. Criteri de parada. **Sortir** si  $m/t < \varepsilon$
  4. Incrementar  $t:=\mu t$
- 

Per valors de  $\mu$  petits, incrementarem la  $t$  més a poc a poc, aconseguint més precisió a cada iteració però requerint més iteracions.





#### 4.- CONTROL DE FLUX: OPTIMITZACIÓ DE LA UTILITAT

En aquest capítol s'estudia el control de flux en xarxes que tenen un enrutament fixe, és a dir, el nostre objectiu serà la implementació d'un o més algorismes que obtinguin el valor òptim del flux  $s$  injectat a la xarxa, assumint que aquest seguirà una ruta estàtica des d'un cert node origen fins a un cert node destí.

Considerem una xarxa que consisteix en una sèrie de  $L$  enllaços unidireccionals de capacitat  $c_l$ . La xarxa està compartida per una sèrie de  $N$  rutes, cadascuna de les quals tindrà un flux injectat associat  $s_n$  i estarà caracteritzada per una funció d'utilitat  $U_n(s_n)$ , que serà creixent i còncava en la seva taxa de transmissió  $s_n$ . El nostre objectiu serà calcular els fluxos injectats que maximitzin la suma d'utilitats  $\sum_{s_n \in N} U_n(s_n)$  respecte  $s_n$  subjecte a les restriccions de les capacitats.

En equilibri, els fluxos injectats que comparteixen els mateixos enllaços no tenen que compartir necessàriament la capacitat disponible d'aquests de manera equitativa.

A l'apartat 4.1 es formularà el problema d'optimització de control de flux, mentre que als apartats 4.2 i 4.3 es proposaran dos mètodes per resoldre'l: el mètode del gradient i el mètode de la barrera logarítmica respectivament. Finalment a l'apartat 4.4, aquests seran posats a prova a través d'un exemple numèric i s'analitzaran els resultats obtinguts.

##### 4.1 Formulació del problema

Considerem la xarxa descrita en l'apartat anterior, que consisteix en una sèrie de  $L$  enllaços unidireccionals de capacitat  $c_l$ ,  $l \in L$ . La xarxa està compartida per una sèrie de  $N$  fluxos injectats, cadascun dels quals seguirà una certa ruta  $n$  (on  $L(n) \subseteq L$ ) des d'un node origen fins a un node destí.. Aquesta ruta estarà formada per el conjunt d'enllaços que utilitza el flux  $s_n$ . Cal remarcar que cada ruta  $n$  tindrà una certa funció d'utilitat associada  $U_n(s_n)$  en funció del flux injectat  $s_n$ . Per últim, assumim que  $l \in L(n)$  si i només si  $n \in N(l)$ , on  $N(l)$  és el conjunt de rutes que passen per un enllaç  $l$ .

Formulem doncs el problema principal com:

$$\max_{s_n} \sum_n U_n(s_n) \quad (4.1)$$

$$\text{subjecte a } \sum_{n \in N(l)} s_n \leq c_l, \quad l = 1, \dots, L$$

La restricció de (4.1) ens indica que la suma de tots fluxos injectats  $s_n$ , les rutes dels quals passin per l'enllaç  $l$ , no poden sobrepassar la capacitat  $c_l$ .

La funció d'utilitat associada cada ruta  $n$ , que depèn del flux injectat  $s_n$ , serà la següent

$$U_n(s_n) = \log(s_n) \quad (4.2)$$

Existeix un únic valor que maximitzi el sumatori de funcions d'utilitat, que anomenarem solució òptima principal, ja que aquest serà estrictament còncav i continu.

## 4.2 Aplicació del mètode del gradient

A continuació es proposa un mètode descentralitzat que consistirà en tractar els diferents enllaços i nodes origen com a processadors d'una xarxa de càlcul distribuït. Així doncs, cada processador executarà un algorisme local, comunicarà el seu resultat de càlcul als altres i el cicle es repetirà iterativament.

A cada iteració, un algorisme calcularà un preu  $p_l$  (p.e. per unitat d'ample de banda) per cada enllaç  $l \in L$ . El node font rebrà el preu total que ha de pagar per transmetre un flux injectat  $s_n$  (el preu per cada enllaç que utilitzi), que es transmetrà a través dels enllaços que formin la seva ruta  $n$ . D'aquesta manera el node font triarà un flux injectat  $s_n$  que maximitzi en el seu propi benefici la utilitat de la transmissió menys el cost, és a dir  $U_n(s_n) - p^n s_n$ .

L'algorisme utilitzat per optimitzar el control de flux és parcialment asíncron, és a dir, els nodes origen i els enllaços poden realitzar els càlculs basant-se en informació lleugerament obsoleta, comunicant-se a diferents temps i amb retards substancials, com els que poden existir en xarxes híbrides satèl·lit-terrestre. Segons [11], sempre que els intervals entre actualitzacions tinguin un temps limitat, l'algorisme convergirà i podrà proporcionar uns valors òptims de flux injectat.

Com que la funció objectiu (sumatori de funcions d'utilitat), és separable en els diferents components  $s_n$ , els fluxos injectats  $s_n$  es poden acoblar amb la restricció de l'expressió (4.1).

La resolució directa del problema principal (4.1) requeriria una certa coordinació entre tots els nodes que injecten flux a la xarxa, la qual cosa no és factible en les xarxes reals. Per aquest motiu, formularem el problema dual associat aplicant el mètode de descomposició dual, descrit a l'apartat 3.2, i a continuació aplicarem el mètode del gradient.

Definim la Lagrangiana:

$$\begin{aligned} L(s, p) &= \sum_n U_n(s_n) - \sum_l p_l \left( \sum_{n \in N(l)} s_n - c_l \right) \\ &= \sum_n (U_n(s_n) - s_n \sum_{l \in L(n)} p_l) + \sum_l p_l c_l \end{aligned} \quad (4.3)$$

La funció objectiu del problema dual serà llavors:

$$\begin{aligned} D(p) &= \max_{s_n} L(s, p) = \max_{s_n} \sum_n (U_n(s_n) - s_n \sum_{l \in L(n)} p_l) + \sum_l p_l c_l \\ &= \sum_n B_n(p^n) + \sum_l p_l c_l \end{aligned} \quad (4.4)$$

on:

$$\begin{aligned} B_n(p^n) &= \max_{s_n} U_n(s_n) - s_n p^n \\ p^n &= \sum_{l \in L(n)} p_l \end{aligned}$$

i el problema dual és:

$$\begin{aligned} \min D(p) \\ \text{subjecte a } p \geq 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Si interpretem  $p_l$  com el preu per unitat d'ample de banda a l'enllaç  $l$ , llavors  $p^n$  és el preu total per unitat d'ample de banda per tots els enllaços de la ruta  $n$ . Llavors  $s_n p^n$  representa el cost de l'ample de banda de la ruta  $n$  quan transmetem a una taxa de transmissió  $s_n$ , i  $B_n(p^n)$  representa el benefici màxim que podem aconseguir al preu  $p^n$ .

Cal destacar que, donat el vector de preus òptim  $p^*$ , els nodes origen poden trobar de manera distribuïda el flux injectat  $s_n$  òptim, sense necessitat de coordinar-se amb els altres nodes.

Donat un cert  $p^n$ , es resoldrà per cada ruta  $n$ :

$$s_n^*(p^n) = \arg \max_{s_n \geq 0} [U_n(s_n) - p^n s_n] \quad \forall n \quad (4.6)$$

A partir de la funció d'utilitat logarítmica definida a (4.2), haurem de resoldre a cada iteració:

$$\begin{aligned} s_n^*(p^n) &= \arg \max_{s_n \geq 0} [\log(s_n) - p^n s_n] \quad \forall n \\ s_n^*(p^n) &= 1/p^n \end{aligned} \quad (4.7)$$

Com que la solució de (4.7) és única, tenim que la funció dual  $D(p)$  és diferenciable i per tant pot ser emprat el mètode del gradient, mitjançant el qual actualitzarem, a cada iteració, els preus  $p_l$  associats a cada enllaç  $l$  de la següent manera:

$$p_l(t+1) = \left[ p_l(t) - \alpha (c_l - \sum_{n: l \in L(n)} s_n^*(p^n(t))) \right]_+$$

on  $t$  és el número de iteració,  $\alpha > 0$  és la mida de pas, i  $[\cdot]_+$  denota projecció a l'ortant no negatiu (estem acoblant una restricció de desigualtat).

La variable dual  $p(t)$  convergirà a l'òptim dual  $p^*$  quan  $t \rightarrow \infty$ , i com que el gap de dualitat per (4.1) és zero, i la solució de (4.7) és única, la variable principal  $s^*(p(t))$  també convergirà a la variable òptima principal  $s^*$ .

### 4.3 Aplicació del mètode de la barrera logarítmica

D'acord amb la formulació del mètode de la barrera logarítmica, realitzada a l'apartat 3.5, hem de reescriure el nostre problema per tal de poder expressar quins enllaços són utilitzats per cada ruta en la restricció requerida per aquest mètode. En primer lloc definirem una matriu  $A \in \mathbb{R}^{L \times N}$ , que descriurà les correspondències entre les  $N$  rutes i els  $L$  enllaços existents a la xarxa i ens permetrà reescriure la restricció utilitzada a (4.1)  $\sum_{n \in N(l)} s_n \leq c_l$ , per  $l =$

$1, \dots, L$  com  $As \leq c$  on  $s \in \mathbb{R}^N$  i  $c \in \mathbb{R}^L$ . D'aquesta manera, reescriurem el problema (4.1) com:

$$\begin{aligned} \underset{s_n}{\text{minimitzar}} \quad & - \sum_n U_n(s_n) \quad (4.8) \\ \text{subjecte a} \quad & As \leq c \end{aligned}$$

Convertim la restricció de (4.8) en la funció barrera logarítmica:

$$\phi(s) = - \sum_l \log(c_l - a_l^T s)$$

On  $a_1^T, \dots, a_L^T$  són les files de  $A$  (corresponents a cada enllaç). Acoblant la barrera logarítmica a la funció objectiu i substituint la funció principal reescrivim el problema de la següent manera:

$$\underset{s_n}{\text{minimitzar}} \quad -t \sum_n \log(s_n) - \sum_l \log(c_l - a_l^T s) \quad (4.9)$$

Utilitzem l'algorisme de la barrera logarítmica proposat a l'apartat 3.5, que emprarà el mètode de Newton sense restriccions de manera iterativa i l'estratègia de recerca de línia *backtracking*. Si anomenem  $f(s)$  la funció a minimitzar de l'expressió (4.9), per tal d'aplicar el mètode de Newton haurem de calcular  $\nabla f(s)$  i  $\nabla^2 f(s)$ :

$$\begin{aligned} \nabla f(s) &= - \left( \frac{t}{s} \right) + A^T d \\ \nabla^2 f(s) &= t \mathbf{diag} \left( \frac{1}{s^2} \right) + A^T \mathbf{diag}(d^2) A \end{aligned}$$

on els elements del vector  $d \in \mathbb{R}^L$  vénen donats per:

$$d_l = \frac{1}{(c_l - a_l^T s)}$$

A partir d'aquests elements podem calcular el pas i el decrement de Newton, seguint les especificacions de l'apartat 3.4.1, així com el criteri de parada basat en el decrement de Newton. Utilitzarem una estratègia de recerca de línia *backtracking* que seguirà el següent funcionament:

---

**repeteix**

$$s' := s + k \Delta s_{nt}$$

$$\text{si } (As' < c) \text{ i } (-t \sum_n \log(s'_n) - \sum_l \log(c_l - a_l^T s')) < f(s) - \alpha k \Delta s_{nt}$$

$$s = s'$$

**sortir**

$$k := k\beta$$


---

on  $\alpha$  i  $\beta$  són constants positives,  $\Delta s_{nt}$  és el pas de Newton (veure expressió 3.6), i  $k$  és el factor que estem buscant amb l'estratègia de recerca de línia *backtracking*.

#### 4.4 Exemple numèric

A continuació es presenta un exemple numèric per tal d'il·lustrar de manera simplificada el problema de control flux com a problema d'optimització d'utilitat de xarxa.

Posarem com a exemple la xarxa híbrida satèl·lit-terrestre de la figura 6.2, on una sèrie de terminals s'han de comunicar amb una certa destinació remota i tenen la possibilitat de fer-ho per dues vies: a través d'una xarxa WiMAX que estarà connectada alhora via satèl·lit (p.e. Inmarsat-4) o via terrestre amb una connexió ADSL genèrica. S'han pres valors realistes de cabal contractat. Aquests valors representen el límit de capacitat associat a cada enllaç.

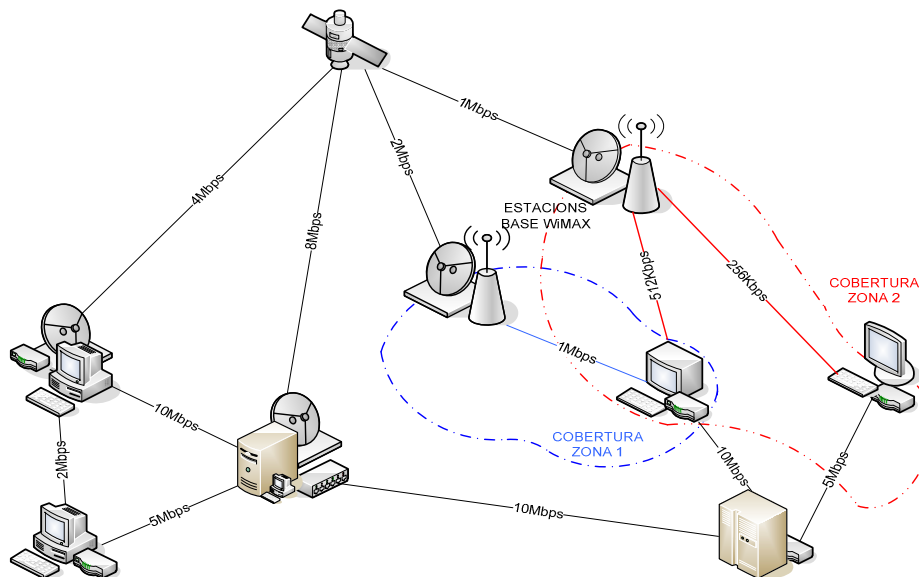


Figura 4.1. Exemple de model de xarxa pel problema de maximització d'utilitat de xarxa

#### 4.4.1 Model equivalent de topologia de xarxa

Podem representar la xarxa de la figura 4.1 amb el model equivalent de la figura 4.2, en el que s'ha realitzat la conversió 1 unitat de tràfic = 512Kbps. El vector de capacitats serà per tant:  $c=[4 \ 20 \ 10 \ 8 \ 16 \ 4 \ 2 \ 2 \ 1 \ 0.5 \ 20 \ 10 \ 20]$

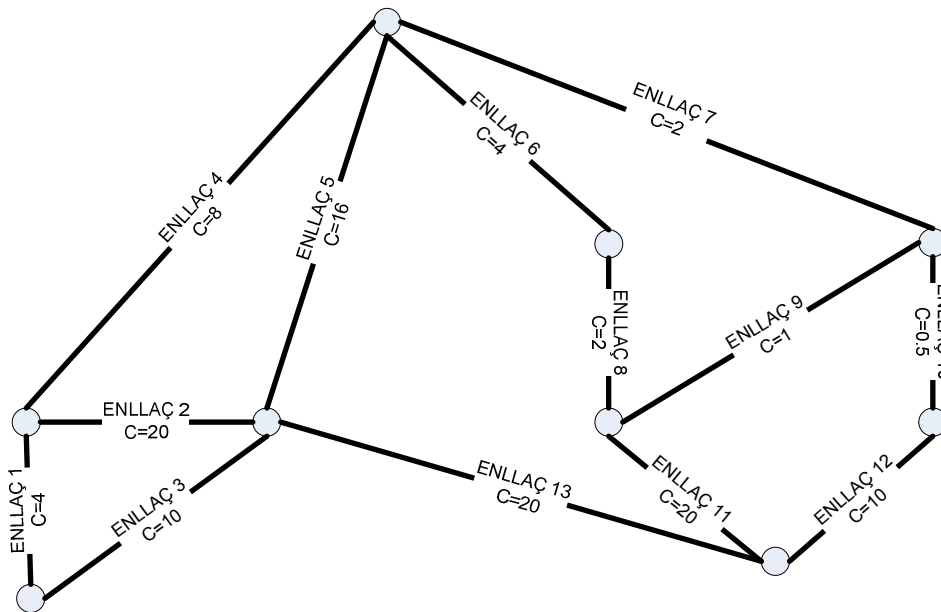
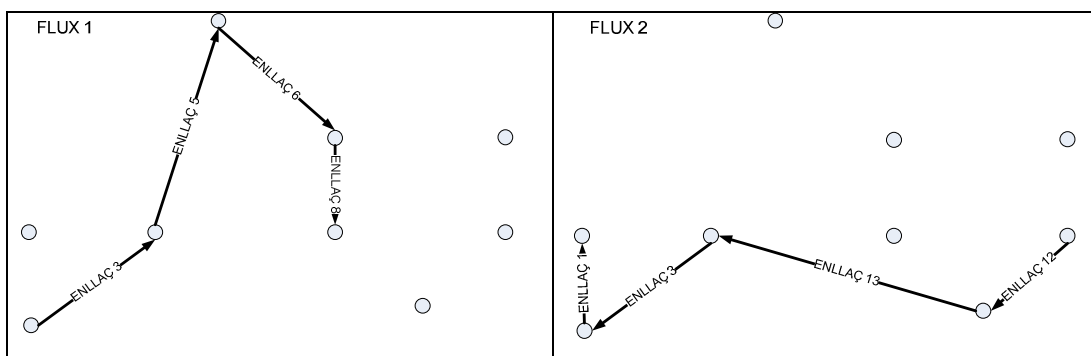


Figura 4.2 Model equivalent de topologia de xarxa

Com a dada del problema es donen també les rutes unidireccionals (figura 4.3), que són fixes. Hi haurà sis rutes o fluxos possibles (que per exemple poden correspondre a sis usuaris diferents). Cada enllaç pot portar més d'un flux diferent i el valor d'un mateix flux no variarà al passar pels diferents enllaços (és a dir que no es consideren pèrdues).



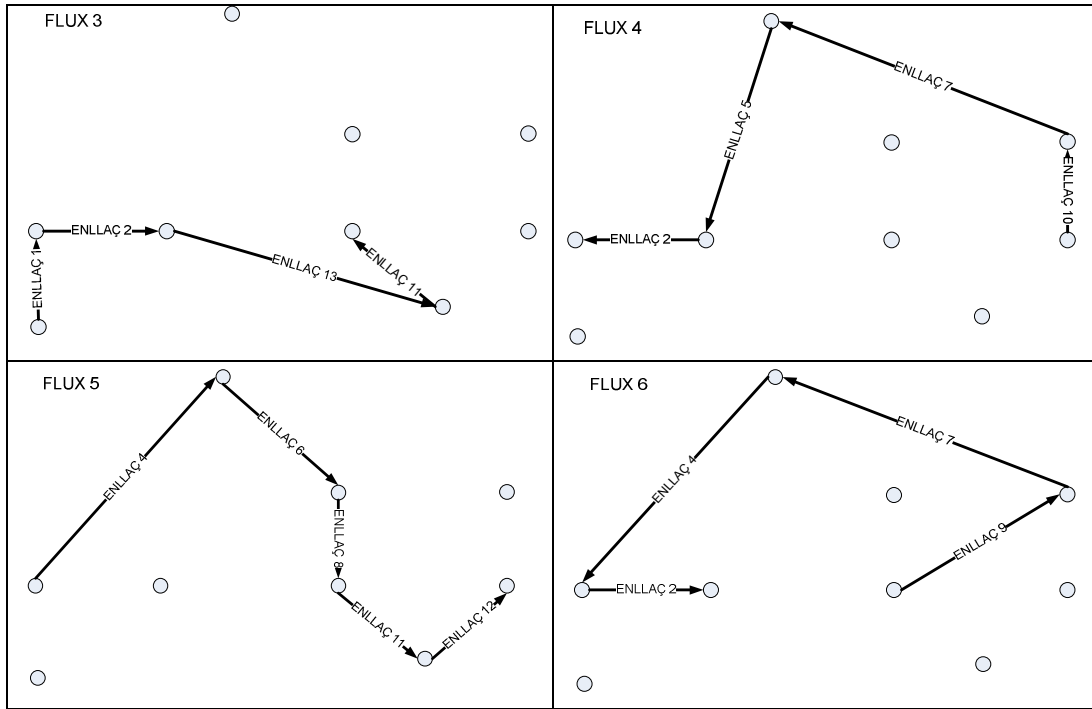


Figura 4.3. Rutes o fluxos fixats (dada donada del problema).

A partir dels sis fluxos de la figura 4.3 podem construir la matriu  $A$ , que ens indicarà quins enllaços fa servir cada flux:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{on } \begin{cases} A_{ij} = 1 & \text{si l'enllaç } i \text{ és utilitzat pel fluxe } j \\ A_{ij} = 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

#### 4.4.2 Resultats de la simulació

S'han implementat el mètode del gradient i el mètode de la barrera logarítmica en Matlab per tal de resoldre el problema d'optimització de control de flux. En la taula 4.1 es presenten els resultats obtinguts.



Ruta	Flux injectat s*	Valor convertit
1	1	512Kbps
2	2	1Mbps
3	2	1Mbps
4	0.5	256Kbps
5	1	512Kbps
6	1	512Kbps

Taula 4.1 Valors òptims de flux injectat s\*

A partir del valor òptim de flux injectat a cada ruta (o usuari) és interessant veure quin és el factor d'utilització de cada enllaç  $F_l = \frac{\sum_{n:l \in L(n)} s_n^*}{c_l}$  (taula 4.2):

Enllaç	$F_l$
1	100%
2	17.5%
3	40%
4	25%
5	9.375%
6	50%
7	75%
8	100%
9	100%
10	100%
11	15%
12	30%
13	20%

Taula 4.2. Factor d'utilització de cada enllaç, en equilibri.

Com es pot veure, només són quatre els enllaços que estan aprofitats al màxim i corresponen als enllaços que només són utilitzats per una sol flux o ruta (enllaços 1, 8, 9 i 10). Per tant, en aquest cas, els enllaços que són utilitzats per més d'una ruta no estan aprofitats al màxim (estan sobredimensionats). És interessant també observar el preu assignat  $p_l$  a cada enllaç amb el mètode del gradient (taula 4.3):

Enllaç	$p_l^*$	Enllaç	$p_l^*$
1	5	8	10
2	0	9	10
3	0	10	20
4	0	11	0
5	0	12	0
6	0	13	0
7	0		

Taula 4.3. Valors òptims del vector de preus  $p^*$ .

Veiem com els únics enllaços que tenen un preu  $p_l > 0$  són precisament els que estan al límit de capacitat (s'interpreta que són els que tenen una major demanda i per aquest motiu tenen un preu elevat). Els altres enllaços, on hi ha capacitat disponible, permeten transmetre flux de manera gratuïta.

No obstant, en un altre escenari on la quantitat mitja de fluxos per enllaç sigui molt més elevada, la mitja del factor d'ocupació dels enllaços serà més elevada.

#### 4.4.3 Anàlisi de les prestacions dels algorismes

A continuació es compararan les prestacions dels dos algorismes utilitzats per tal d'analitzar la seva eficiència en el procés d'optimització de control de flux d'aquest exemple numèric. S'ha escollit un valor de mida de pas  $\alpha=0.05$  en el mètode del gradient (si utilitzem un valor més gran l'algorisme no convergeix), mentre que s'ha escollit uns valors de  $\alpha=0.1$  i  $\beta=0.8$  per l'estratègia de backtracking del mètode de la barrera logarítmica.

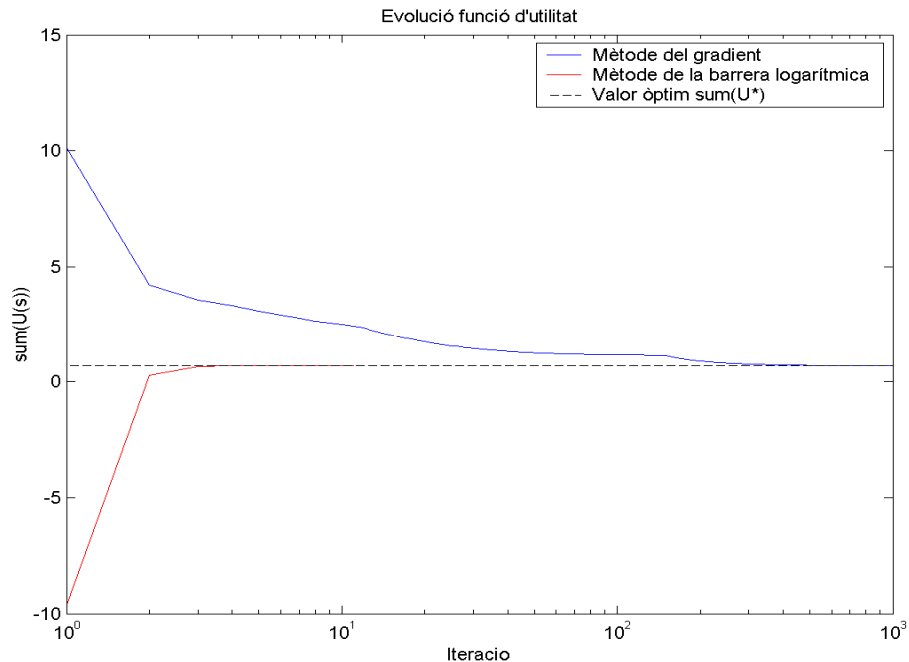


Figura 4.4. Evolució de la funció d'utilitat pels dos algorismes

A la figura 4.4 veiem com evoluciona a cada iteració la funció d'utilitat principal del problema per cadascun dels algorismes. És fàcilment visible que en poc més d'una desena d'iteracions, el mètode de la barrera logarítmica assoleix pràcticament el

valor òptim, mentre que el mètode del gradient tarda de l'ordre de milers d'iteracions per assolir-lo.

Si ens fixem en la figura 4.5, on es representa el gap d'optimalitat principal, és a dir la diferència entre el valor òptim i el valor de la funció d'utilitat a cada iteració (per ambdós algorismes), podem veure que en el mètode del gradient s'aconsegueix una precisió de  $10^{-8}$  (respecte el valor òptim) en aproximadament  $2,5 \times 10^3$  iteracions, mentre que en el mètode de la barrera logarítmica s'aconsegueix la mateixa precisió en només 10 iteracions.

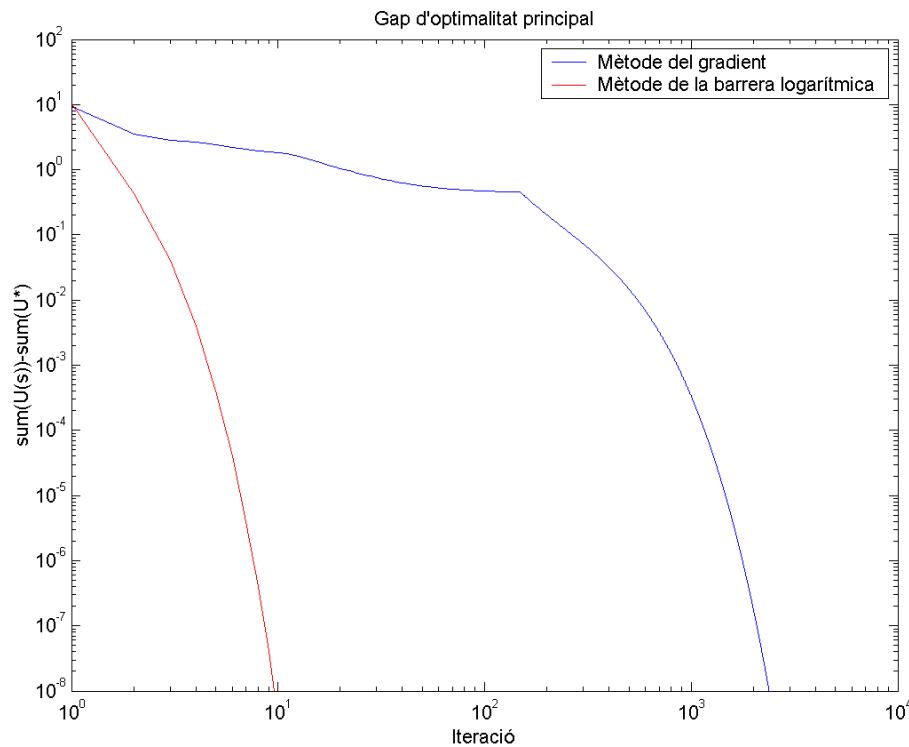


Figura 4.5 Gap d'optimalitat principal en ambdós algorismes

En conclusió, el mètode de la barrera logarítmica té una rapidesa de convergència significativament major que el mètode del gradient. No obstant, a l'emprar el mètode de Newton, l'algorisme no es podrà implementar de manera distribuïda: cada node que injecti un flux i vulgui controlar-ne el seu valor òptim necessitarà informació sobre nodes remots, i per tant requerirà l'existència d'un coordinador que centralitzi el procés d'optimització. En canvi, emprant el mètode del gradient, sí que es pot construir un algorisme distribuït, on cada node pugui calcular de manera local el flux que pot injectar per tal de maximitzar-ne una certa funció d'utilitat global, prenent una decisió a partir del vector de preus i amb un nombre d'operacions molt menor (requereix menys capacitat computacional).



## 5. ENRUTAMENT AMB MÍNIM RETARD

En aquest apartat es presenta un problema l'objectiu del qual és aconseguir l'enrutament amb el mínim retard possible. Amb la resolució d'aquest problema es pretenen il·lustrar de manera simple els mètodes de descomposició dual i del subgradient que s'utilitzaran més extensivament en el problema conjunt d'enrutament i control de flux (apartats 6 i 7).

### 5.1 Formulació del problema

Considerem una xarxa amb  $L$  enllaços i  $N$  nodes. Denotarem  $x_j$  com el flux o tràfic a l'enllaç  $j$ , amb  $x_j > 0$  si el flux segueix la direcció predeterminada de l'enllaç o amb  $x_j < 0$  si el flux segueix el sentit contrari. També definirem  $s_i$  com el flux extern que s'origina en el node  $i$ .

Els fluxos de la xarxa han de satisfer l'equació de conservació presentada en l'apartat 2.2, garantint que el flux total entrant de cada node ha de ser igual al flux total sortint, incloent els fluxos externs  $s$ . Així doncs es complirà  $Ax=s$  on  $A \in \mathbb{R}^{N \times L}$  és la matriu node-incidència que descriu la topologia de xarxa, d'aquesta manera:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si l'enllaç } j \text{ surt del node } i \\ -1 & \text{si l'enllaç } j \text{ entra al node } i \\ 0 & \text{en qualsevol altre cas} \end{cases}$$

Prendrem els fluxos de tràfic  $x$  com les variables del problema mentre que els fluxos externs origen  $s$  vindran donats (i seran fixos).

Definim també una funció objectiu:

$$f(x) = \sum_{j=1}^L \phi_j(x_j)$$

on  $\phi_j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  és la funció de cost dels fluxos per l'enllaç  $j$ . S'assumirà que les funcions de cost són convexes. I per tant, el nostre problema d'optimització consistirà en trobar l'enrutament que minimitzi la nostra funció de cost i satisfaci l'equació de conservació:

$$\begin{aligned} & \text{minimitzar} \quad \sum_{j=1}^n \phi_j(x_j) \\ & \text{subjecte a} \quad Ax = s \end{aligned} \quad (5.1)$$

Per resoldre aquest problema aplicarem el mètode de descomposició dual (descriu en l'apartat 3.2), i a continuació utilitzarem el mètode del subgradient per resoldre el problema dual. Cal remarcar que de moment ignorarem les restriccions de les capacitats de cada enllaç i l'expressió exacta de la funció de cost. Per altra banda, no imposarem que la  $x$  sigui positiva, és a dir, si el valor de  $x^*$  òptim és negatiu significarà que el sentit del flux òptim serà el contrari del predeterminat.

A partir del problema principal (5.1), formem la Lagrangiana:

$$\begin{aligned} L(x, v) &= \sum_{j=1}^n \phi_j(x_j) + v^T(s - Ax) \\ &= \sum_{j=1}^n (\phi_j(x_j) - (a_j^T v)x_j) + v^T s \end{aligned} \quad (5.2)$$

on  $a_j$  és la  $j$ -èssima columna de  $A$ .

La funció dual  $q(v)$  és:

$$\begin{aligned} q(v) &= \inf_x L(x, v) \\ &= \sum_{j=1}^n \inf_{x_j} (\phi_j(x_j) - (a_j^T v)x_j) + v^T s \\ &= - \sum_{j=1}^n \phi_j^*(a_j^T v) + v^T s \end{aligned} \quad (5.3)$$

on  $\phi_j^*$  és la funció conjugada de  $\phi_j$ :

$$\phi_j^*(y) = \sup (yx_j - \phi_j(x_j)) \quad (5.4)$$

I per tant el problema dual és el següent problema convex sense restriccions:

$$\text{maximitzar} \quad q(v) \quad (5.5)$$

Els valors de  $\mathbf{x}$  que maximitzin  $q(\mathbf{v})$  seran els valors òptims del problema principal. Assumirem que les funcions de cost  $\phi_j$  són estrictament convexes per la qual cosa es pot assegurar que per cada  $y$  existirà un únic valor que maximitzi  $y x_j - \phi_j(x_j)$ . Si  $\phi_j$  és diferenciable, llavors aquest valor màxim serà  $x_j^* = (\phi_j')^{-1}(y)$ .

En conclusió, podrem solucionar el problema principal a través del problema dual (5.5), de la següent manera: primer resolldrem el problema dual maximitzant  $q(\mathbf{v})$  per obtenir les variables duals òptimes  $\mathbf{v}^*$ , llavors la solució òptima del problema principal vindrà donada per:

$$x_j^* = x_j^*(a_j^T \mathbf{v}^*) = [\phi_j']^{-1}(a_j^T \mathbf{v}^*)$$

Així doncs, el flux òptim en l'enllaç  $j$  serà una funció de la variable dual òptima  $\mathbf{v}$ . Un cop hem definit el problema de manera genèrica, particularitzarem el problema per la funció de cost [10] [13]:

$$\phi_j(x_j) = \frac{|x_j|}{c_j - |x_j|} \quad \text{per } c_j > 0 \quad (5.6)$$

Per  $x_j > 0$ , aquesta funció expressa el retard d'una cua M/M/1, amb temps d'arribades exponencial amb taxa  $x_j$  i temps de servei exponencial amb taxa  $c_j$ . La constant  $c_j$  l'anomenarem capacitat de l'enllaç  $j$ . Assumirem que el flux de tràfic, tal i com s'ha formulat el problema, pot anar en qualsevol dels dos sentits d'un enllaç.

Seguint les indicacions descrites a [10, §5.6]:

$$x_j = \arg \min_{z \in \text{dom } \phi_j} (z(a_j^T \mathbf{v}) - \phi_j(z)) = \begin{cases} c_j - \frac{\sqrt{c_j}}{\sqrt{a_j^T \mathbf{v}}}, & a_j^T \mathbf{v} > \frac{1}{c_j} \\ 0, & |a_j^T \mathbf{v}| \leq \frac{1}{c_j} \\ \frac{\sqrt{c_j}}{\sqrt{-a_j^T \mathbf{v}}} - c_j, & a_j^T \mathbf{v} < -\frac{1}{c_j} \end{cases} \quad (5.7)$$

## 5.2 Aplicació del mètode del subgradient

Utilitzarem el mètode del subgradient, presentat en l'apartat 3.3 per solucionar el problema dual (5.5). En primer lloc haurem de trobar un subgradient per la funció dual negativa  $-q$  (és el mateix maximitzar  $q$  que minimitzar  $-q$ ). Segons [10, §5.4], obtenim un subgradient per la funció dual negativa  $-q$ , d'aquesta manera:

$$g_i(v) = a_i^T x - s_i$$

De manera intuïtiva podem descriure aquesta expressió com el residu o flux sobrant en el node  $i$ , per cada condició de la llei de conservació de fluxos.

Així doncs, el mètode del subgradient aplicat al problema dual es pot expressar com:

$$\begin{aligned} x_j^* &:= x_j^*(a_j^T v) \\ g_i &:= a_i^T x - s_i \\ v_i &:= v_i - \alpha g_i \end{aligned} \quad (5.8)$$

on  $\alpha$  és la mida de pas (es pot anar variant amb cada iteració o deixar fixe). En aquest cas veiem com l'actualització del vector de preus  $v_i$  no requereix realitzar la projecció a l'ortant no-negatiu (com en l'apartat 4.2) ja que la restricció associada és d'igualtat.

El mètode del subgradient consisteix en què donat el valor actual de les variables duals  $v_i$ , calculem els fluxos  $x_j$  (per saber el flux d'un cert enllaç només necessitem saber els valors  $v_i$  dels nodes que hi ha a l'extrem d'aquest enllaç) a partir de l'expressió (5.7). En aquest punt podem calcular el flux sobrant  $g_i$  a cada node  $i$ . Finalment, actualitzem les variables  $v_i$  en funció dels fluxos sobrants, d'acord amb (5.8). Aquesta actualització serà molt simple: incrementem  $v_i$  si el node  $i$  té un flux sobrant positiu, el que comportarà reduir el flux que anirà cap a aquest node.

Cal remarcar que tots aquests passos poden ser calculats localment per cada node, els enllaços i nodes només necessiten la informació de les  $x_j$  i  $v_i$  adjacents, per la qual cosa es podrà implementar un algorisme distribuït. Un node no necessitarà conèixer la topologia global de la xarxa, o qualsevol altra informació com per exemple quines són les funcions de cost.



### 5.3 Exemple numèric

A continuació es presenta un exemple numèric per tal d'il·lustrar de manera simplificada el problema d'enrutament (amb mínim retard). Per simplificar el problema, assumirem que s'utilitza un model de xarxa d'una única destinació (model *single-commodity flow*).

Posarem com a exemple la xarxa híbrida satèl·lit-terrestre de la figura 5.1, on una sèrie de terminals s'han de comunicar amb una certa destinació remota i tenen la possibilitat de fer-ho per dues vies: a través d'una xarxa WiMAX (on poden escollir transmetre a través de dues estacions base), que estarà connectada alhora via satèl·lit (p.e. Inmarsat-4) a la destinació final o via terrestre amb una connexió ADSL genèrica. S'han pres valors realistes de cabal contractat. Aquests valors representen el límit de capacitat associat a cada enllaç.

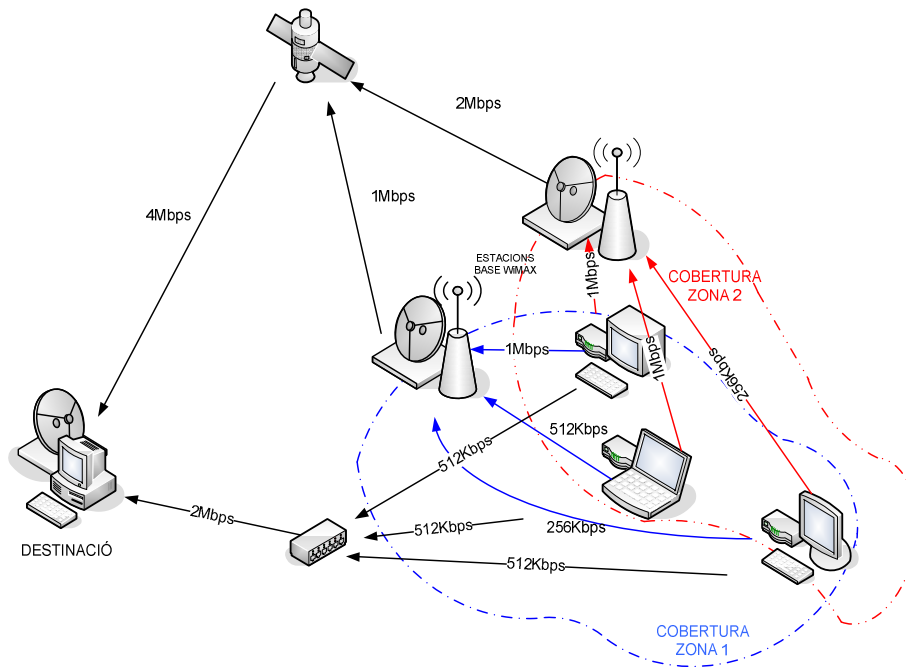


Figura 5.1. Exemple de model de xarxa per al problema d'enrutament amb mínim retard.

Cal remarcar que com només simularem el tràfic destinat a una certa (i única) destinació final, només tindrem en compte els enllaços dibuixats en la figura 5.1, i suposarem que a priori el sentit predeterminat serà l'òptim. Al no haver imposat que el vector  $x$  només tingui valors positius, si al fer la simulació obtenim que algun component d'aquest vector té un valor òptim negatiu, això es podrà interpretar de dues maneres:

- i) Els enllaços són bidireccionals i el signe negatiu del resultat simplement significa que el flux òptim tindrà el sentit contrari al predeterminat.

ii) Els enllaços són unidireccionals (només poden prendre el sentit predeterminat) i un valor òptim negatiu significa que el sentit de l'enllaç no és òptim per a maximitzar la funció d'utilitat de la xarxa (i haurem de replantejar el problema amb el mateix enllaç amb el sentit oposat, obtenint el mateix valor òptim però canviat de signe).

En ambdós supòsits, estem ignorant tots els fluxos amb sentit contrari als definits per cada enllaç en aquest model, que també coexistirien (en la realitat) a la nostra xarxa, amb l'únic objectiu d'estudiar com s'enruten els fluxos que van a una certa destinació (en aquest cas minimitzant el retard).

### 5.3.1 Model equivalent de topologia de xarxa

Per tal de simular aquesta topologia de xarxa en Matlab serà necessari transformar el model de la figura 5.1 en un model equivalent de 8 nodes (cadascun del components de la xarxa) i 13 enllaços, tal i com es pot veure en la figura 5.2

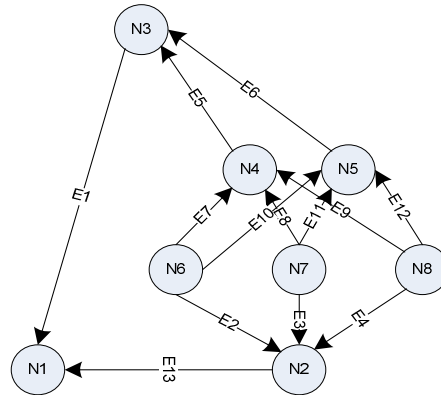


Figura 5.2. Model equivalent de la topologia de xarxa

A partir del model de la figura 5.2, definirem la matriu node incidència A:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cal recordar que si l'element  $A_{ij}=1$ , l'enllaç  $j$  surt del node  $i$ , mentre que si  $A_{ij}=-1$  l'enllaç  $j$  entra al node  $i$  (si un node  $i$  i un enllaç  $j$  no estan associats  $A_{ij}=0$ ).

Per facilitar la simulació farem una conversió dels valors de límit de capacitat de l'enllaç de tal manera que 1 unitat de tràfic equivaldrà a 512 kbps (p.e. 4 unitats=2Mbps). Així ens quedarà un vector  $c=[8 \ 1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 4 \ 2 \ 1 \ 0.5 \ 2 \ 2 \ 0.5 \ 4]$ , tal i com es representa a la figura 5.3.

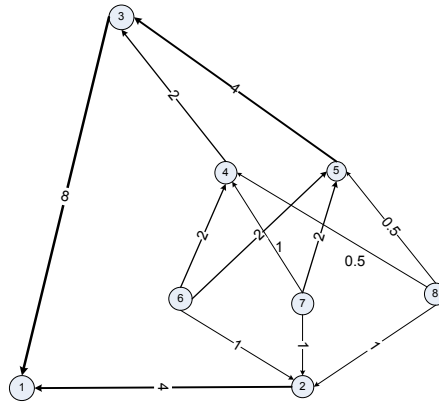


Figura 5.3. Límits de capacitat dels enllaços

Cal recordar també que en aquest problema el vector  $s$  ve donat, i mitjançant la resolució del problema es trobarà el vector  $x$  òptim (associat a l'enrutament). El vector de flux injectat (que serà fixe) serà  $s=[-3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 1 \ 0]$ , és a dir, estem injectant fluxos de 1Mbps i 512Kbps pel node 6 i 7 respectivament, i volem que surtin pel node 1 (node destinació). Per tant, el problema consistirà en saber com s'enrutaran (per quins nodes passaran) aquests dos fluxos fins a arribar al seu destí.

### 5.3.2 Resultats de la Simulació

S'ha resolt aquest problema amb el mètode del subgradient, implementat en Matlab seguint les indicacions de l'apartat 5.2. El vector  $x^*$  òptim resultant el podem trobar a la taula 5.1.

Enllaç	$x^*$	Enllaç	$x^*$	Enllaç	$x^*$
1	2.3811	6	1.6562	11	0.7307
2	0.3496	7	0.7249	12	0
3	0.2693	8	0	13	0.6189
4	0	9	0		
5	0.7249	10	0.9255		

Taula 5.1. Vector òptim d'enrutament  $x^*$

A la figura 5.4 podem veure una interpretació gràfica de la solució  $x^*$ , on també es veu el flux injectat i el flux sortint de la xarxa. Veiem com el node 8, no intervé en l'enrutament d'aquests dos fluxos, i per tant els seus enllaços adjacents tampoc.

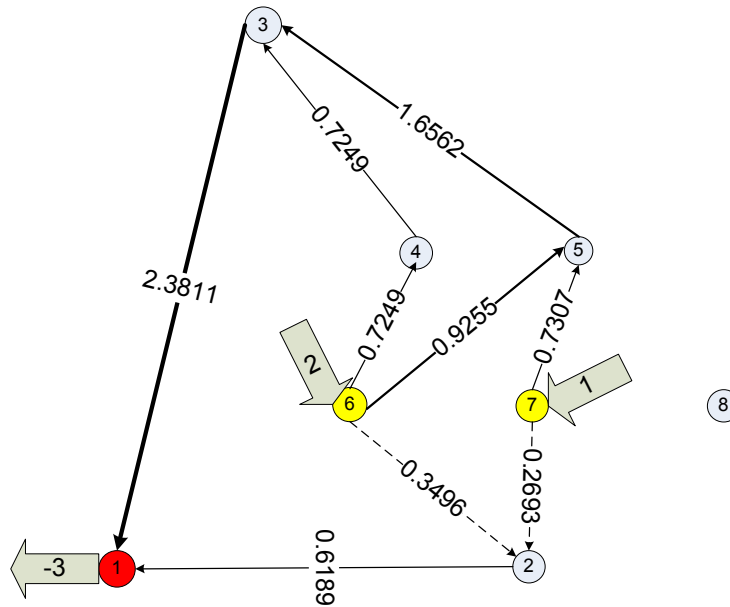


Figura 5.4 Interpretació gràfica de la solució  $x^*$

El resultat d'aquest problema té una interessant analogia amb una xarxa elèctrica. Si considerem una xarxa elèctrica amb una topologia definida per la matriu node-incidència  $A$ , la variable  $x_l$  es pot interpretar com el corrent que flueix per la branca  $l$  (amb sentit positiu indicant el flux cap a la direcció de referència, i negatiu indicant el sentit contrari). Podem considerar una font  $s_n$  com un corrent extern injectat al node  $n$ . D'aquesta manera, la suma de corrents que entren i surten de la xarxa és zero: la llei de conservació de flux  $Ax=s$  equival a la llei de Kirchhoff.

Les variables duals  $v^*$  corresponen als potencials dels nodes del circuit, i al node destinació (en el nostre cas el node 1) se li assigna un voltatge de referència zero (la massa), per tal de mesurar la resta de potencials a partir d'aquest node. Llavors, podem considerar que la diferència de potencial en una branca  $l$  és  $a_l^T v$ . Així doncs l'enrutament òptim serà el corrent òptim que circula per aquesta xarxa elèctrica en equilibri, que serà funció de la diferència de potencial  $x_l^*(a_l^T v)$ , de la mateixa manera que el corrent n'és proporcional (a través de la llei d'Ohm).

El mètode del subgradient ens proporciona una manera iterativa de trobar els corrents i els voltatges òptims, actualitzant els potencials de cada node en el circuit. Podem veure una interpretació gràfica d'aquesta analogia a la figura 5.5, on a cada node es representa la variable dual  $v^*$  òptima (que representa el potencial), i a cada enllaç la corresponent diferència de potencial  $a_l^T v$ .

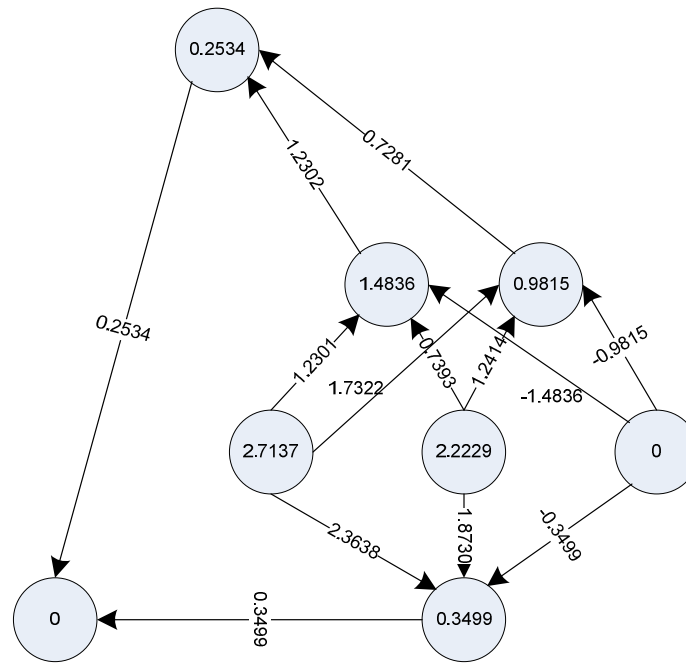


Figura 5.5. Enrutament òptim de xarxa (on els nombres a cada node són les variables duals  $v^*$  i els fluxos a cada enllaç són  $(A'v)_i$ , representant el potencial i la d.d.p respectivament).

### 5.3.3 Anàlisi de les prestacions de l'algorisme

Hem simulat el problema mitjançant l'algorisme proposat amb dues mides de pas pel mètode del subgradient  $\alpha=0.05$  i  $\alpha=0.01$  per tal de veure com depèn la rapidesa de convergència de la tria d'aquest paràmetre.

A la figura 5.6 veiem la funció objectiu principal  $f_{pri}(x) = \sum_{j=1}^n \phi_j(x_j)$  on  $\phi_j(x_j)$  és la funció de cost de l'expressió (5.6) juntament amb la funció dual  $f_{dual}(v)=Q(v)$ , per diferents valors de mida de pas. Es pot veure com per  $\alpha=0.05$  la rapidesa de convergència és clarament superior que per una mida de pas  $\alpha=0.01$ . Això és degut a què amb una mida de pas més gran la variable dual  $v$  s'actualitza més bruscament i arriba al valor òptim de manera més ràpida. Veiem també que, hi ha dualitat forta ja que  $f_{pri}(x) = f_{dual}(v)$ , i per tant per una variable dual  $v^*$  òptima, aconseguim un vector  $x^*$  òptim.

A la figura 5.7 podem observar la norma del subgradient  $g(Ax-s)$ , és a dir, la quantitat de flux sortint disponible a cada node que falta per assignar a cada iteració. Veiem que el mètode del subgradient va reduint aquesta quantitat disponible linealment amb les iteracions. Per a un valor de mida de pas  $\alpha=0.05$ , l'algorisme és cinc vegades més ràpid en reduir aquesta norma que per una mida

de pas cinc vegades més petita (segueixen una relació inversament proporcional). Concretament per  $\alpha=0.05$  tenim que la norma s'ha reduït a  $10^{-8}$  en aproximadament  $10^3$  iteracions, mentre que per  $\alpha=0.01$  obtenim la mateixa precisió per  $5 \times 10^3$  iteracions.

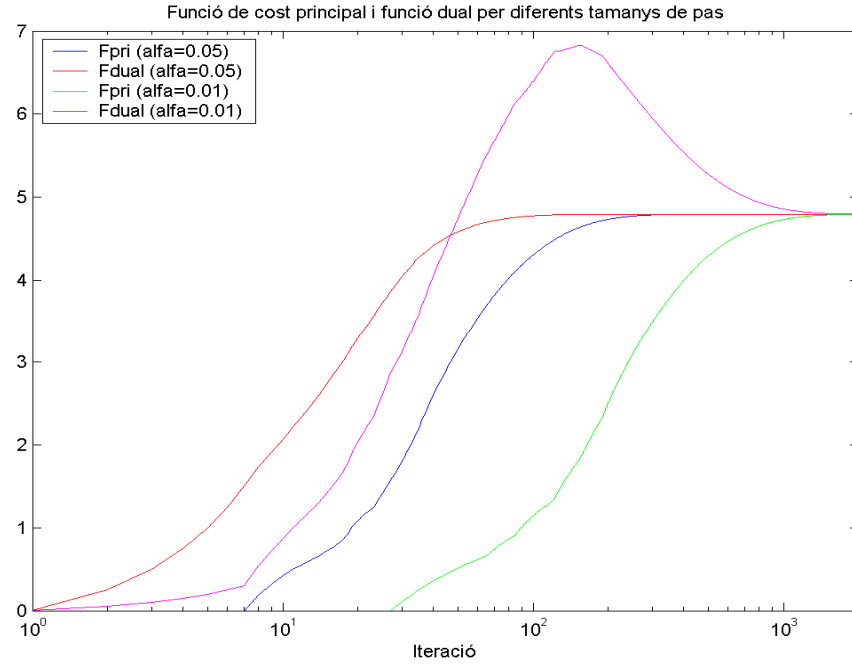


Figura 5.6 Funcions objectiu principal i dual per  $\alpha=0.05$  i  $\alpha=0.01$

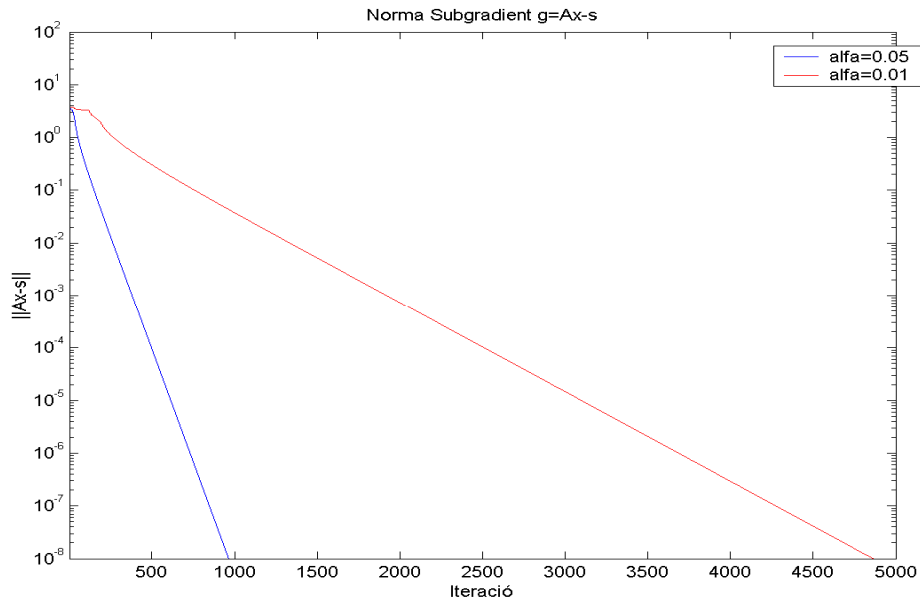


Figura 5.7. Norma del subgradient  $g$  per  $\alpha=0.05$  i  $\alpha=0.01$

## 6.- ENRUTAMENT I CONTROL DE FLUX CONJUNTS PER UNA DESTINACIÓ

### 6.1 Formulació general del problema

A continuació es descriurà el problema conjunt d'enrutament i control de flux per una sola destinació, formulat de manera genèrica a l'apartat 2.3.1 com un problema d'optimització convexa.

En aquest cas però, suposarem que l'objectiu és maximitzar una funció d'utilitat còncava (en comptes de minimitzar una funció de cost convexa), i d'aquesta manera el problema quedarà així:

$$\begin{aligned} & \text{maximitzar} && f(x, s) && (6.1) \\ & \text{subjecte a} && Ax = s \\ & && s \geq_{n=d} 0 \\ & && x_l \leq c_l, && l = 1, \dots, L \end{aligned}$$

En aquest problema les variables d'optimització són la variable d'enrutament  $x$ , i la variable de control de flux  $s$ . Val a dir que per aquest model (*single-commodity flow*), no s'imposarà la condició  $x_l > 0$ : si una  $x$  té un valor òptim negatiu significarà que el flux tindrà un sentit oposat al que s'ha definit per l'enllaç corresponent, dins la matriu node-incidència  $A$ . Aquesta és una de les principals diferències que té aquest model respecte el model de múltiples destinacions.

Existeixen diverses funcions de cost que s'adapten als problemes de disseny per aquest tipus de xarxes. Una de les funcions de cost més utilitzades és la funció de retard total [12],[13] que és una funció convexa de  $x$  (el tràfic d'un enllaç) i s'ha utilitzat en l'enrutament amb mínim retard (apartat 5):

$$f_{\text{retard}}(t) = \sum_l \frac{|x_l|}{c_l - |x_l|}$$

En els problemes on s'ha de minimitzar aquesta funció de cost, el vector de flux origen  $s$  (la càrrega que ha de suportar la xarxa) acostuma a ser fixat, per la qual cosa no es farà servir en aquest cas.

En aquest problema s'utilitzarà una funció d'utilitat  $U_n(\cdot)$  còncava i estrictament creixent, on  $U_n(s_n)$  representarà la utilitat del node  $n$  per enviar dades a una taxa  $s_n$ . Així doncs, si  $d$  és el node destí de la nostra xarxa, aquest problema de màxima utilitat quedarà formulat com:

$$\begin{aligned}
& \text{maximitzar } \sum_{n,n \neq d} U_n(s_n) \\
& \text{subjecte a } Ax = s \\
& s \geq_d 0, \\
& x_l \leq c_l, \quad l = 1, \dots, L
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Més concretament, es considerarà el problema conjunt d'enrutament i control de flux com la maximització de la utilitat total de la xarxa, on tots els parells origen-destinació definits (no es tindrà en compte el node destinació  $d$ ), tindran la funció d'utilitat logarítmica:

$$U_n(s_n) = \log(s_n), \quad n \neq d$$

Per tal de poder desenvolupar un algorisme distribuït que resolgui el problema (6.2), aquest serà dividit en dos problemes: un d'extern i un d'intern.

Es proposen dos algorismes diferents per resoldre el problema conjunt d'enrutament i control de flux per una sola destinació. En ambdós algorismes resoldrem el problema extern aplicant el mètode de descomposició dual i posteriorment el mètode del subgradient, presentats en els apartats 3.2 i 3.3 respectivament. No obstant, la diferència entre els dos algorismes està en la resolució del problema intern: en el primer algorisme emprarem també el mètode de descomposició dual i el mètode del subgradient mentre que en el segon emprarem una variant del mètode de Newton, el mètode de Newton amb inici no factible (*infeasible start Newton method*), presentat en l'apartat 3.4.

## 6.2 Formulació del problema extern

Mitjançant el mètode de descomposició dual convertirem el problema principal extern en un problema dual equivalent, més fàcil de resoldre (p.e. amb el mètode del subgradient). El problema principal associat a (6.2), al qual se li aplicarà el mètode de descomposició dual, és:

$$\begin{aligned}
& \text{maximitzar } \sum_{n,n \neq d} \log(s_n) \\
& \text{subjecte a } Ax = s, \\
& s \geq_d 0, \\
& x_l \leq c_l, \quad l = 1, \dots, L
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Construïm el problema dual extern introduint els multiplicadors de Lagrange  $p \in \mathbb{R}^L$  per les  $L$  inequacions d'acoblament  $x_l \leq c_l$ , formant la Lagrangiana parcial:



$$\begin{aligned}
L(x, s, p) &= \sum_{n, n \neq d} \log(s_n) - \sum_l p_l (x_l - c_l) = \\
&= \sum_{n, n \neq d} \log(s_n) - \sum_l p_l x_l + \sum_l p_l c_l \quad (6.4)
\end{aligned}$$

Així doncs l'objectiu del problema extern és maximitzar la funció d'utilitat tenint en compte la restricció de desigualtat  $x_l \leq c_l$  (deixarem la restricció d'igualtat  $Ax=s$  pel problema intern). Llavors, la funció objectiu  $V(p)$  pel problema dual extern és:

$$V(p) = \sup_{x, s, t} \{ L(x, s, p) \mid Ax = s, \quad s \geq_d 0 \} \quad (6.5)$$

Per tant el problema dual extern associat al problema principal serà:

$$\begin{aligned}
&\text{minimitzar } V(p) \\
&\text{subjecte a } p \geq 0 \quad (6.6)
\end{aligned}$$

Com que la funció dual  $V$  és sempre convexa es pot dir que aquest és un problema d'optimització convexa. S'assumeix que la condició de Slater [7, §5.2] se satisfà, és a dir, que existeix una solució factible de  $x$ , i  $s$  tals que  $x_l \leq c_l$  (cal recordar que el vector de capacitats  $c$  serà fixe). D'aquesta manera s'acompleix el que s'anomena dualitat forta (*strong duality*), amb la qual cosa els valors de  $x$  i  $s$  que optimitzen el problema dual (6.6) també optimitzaran el problema principal (6.3). Val a dir que això no és cert si el problema original no és convex.

Com que la funció objectiu principal no és estrictament còncava en la variable  $x$ , la funció dual és només diferenciable per parts [1]. Per tant el problema dual és un problema d'optimització convexa no-diferenciable.

Per solucionar el problema dual (6.6) utilitzarem el mètode del subgradient, mitjançant el qual, en cada iteració serà necessari avaluar la funció dual  $V(p)$  i calcular el seu subgradient per qualsevol variable dual  $p \geq 0$ . Així doncs es maximitzarà l'expressió (6.4) de manera iterativa, mitjançant el problema intern.

### 6.3 Formulació del problema intern

Podem formular el problema principal intern a partir de (6.4) i (6.5):

$$\begin{aligned} \max_{x,s} \sum_{n,n \neq d} \log(s_n) - \sum_l p_l x_l + \sum_l p_l c_l \quad (6.7) \\ \text{subjecte a } Ax = s, \quad s \geq_d 0 \end{aligned}$$

El mètode de Newton amb inici no factible, emprat en el segon algorisme que es proposa en aquest capítol, es podrà aplicar directament a l'expressió (6.7), sense requerir l'aplicació del mètode de descomposició dual.

En canvi, el primer algorisme proposat en aquest capítol sí que requerirà l'aplicació del mètode de descomposició dual a (6.7) per tal de poder emprar el mètode del subgradient, amb l'objectiu de resoldre el problema intern. Per aquest motiu, serà necessari formular el problema dual intern.

En aquest sentit, el nostre objectiu serà acoblar la restricció d'igualtat  $Ax = s$  a la Lagrangiana definida a (6.4) mitjançant el mètode de descomposició dual. Per fer-ho introduïm un nou multiplicador de Lagrange  $v$  i formem una nova Lagrangiana  $L'$ :

$$\begin{aligned} L'(x, s, p, v) &= L(x, s, p) + v^T (Ax - s) \quad (6.8) \\ &= \sum_{n,n \neq d} \log(s_n) - \sum_l p_l x_l + \sum_l p_l c_l + v(Ax - s) \end{aligned}$$

Aplicant el mètode de descomposició dual a (6.8), definim una nova funció dual  $Q(v)$ :

$$Q(v) = \sup_{x,s} \{ L'(x, s, p, v) \mid s \geq_d 0, \quad d = 1, \dots, D \} \quad (6.9)$$

a partir de la qual definim el problema dual intern:

$$\begin{aligned} \text{minimitzar } Q(v) \quad (6.10) \\ \text{subjecte a } v \geq 0 \end{aligned}$$

Així doncs el primer algorisme proposat per resoldre el problema conjunt d'enrutament i control de flux per una sola destinació, constarà de dos problemes duals, un problema dual extern (6.6) i un problema dual intern (6.10) cadascun dels quals serà resolt amb el mètode del subgradient.

## 6.4 Consideracions per a la simulació de l'algorisme

Una altra conseqüència de la concavitat no estricta de la funció objectiu principal és que s'ha d'anar en compte al recuperar les solucions principals òptimes en el mètode de descomposició dual. Una manera de fer això és afegir un petit terme de regularització perquè la funció objectiu principal sigui estrictament còncava [8, §6]. En el nostre cas afegim un petit terme quadràtic a la funció d'utilitat total [9]. De fet, es maximitzarà:

$$\sum_{n, n \neq d} \log(s_n) - \varepsilon(x^T x)$$

La constant  $\varepsilon$  serà un nombre positiu petit, el valor de la qual determinarà la influència d'aquest terme quadràtic en les solucions òptimes de  $x^*$  i  $s^*$ . Val a dir que la solució del problema per diferents valors de  $\varepsilon$  no variarà substancialment. No obstant, són recomanables valors de  $\varepsilon$  reduïts (p.e.  $\varepsilon=0.1$ ). Afegint aquest terme quadràtic ens assegurem que hi hagi una solució única per al nostre problema.

Per últim, cal remarcar que de cara a la resolució del problema, s'ha ignorat el terme  $\sum p_l c_l$ , ja que desapareixerà al maximitzar la funció respecte  $x$  i  $s$ .

## 6.5 Aplicació del mètode del subgradient al problema extern

Definim el vector  $h \in \mathbb{R}^L$  com un subgradient de la funció convexa no diferenciable  $V$  a  $p$ , tal que:

$$V(q) \geq V(p) + h^T(q - p)$$

per qualsevol  $q$  (veure [15]). Donada una variable dual  $p \geq 0$ ,  $x^*(p)$  i  $s^*(p)$  són solucions òptimes d'aquest problema. De la definició de la funció dual a (6.5), trobem que un subgradient  $h \in \mathbb{R}^L$  de  $V$  a  $p$  ve donat per l'expressió:

$$h_l = c_l - x_l$$

Val a dir que  $h_l$  pot ser interpretat com l'excés de capacitat en l'enllaç  $l$ , és a dir, la diferència entre la capacitat proporcionada pel sistema de comunicacions (cabal contractat) i el tràfic proposat per l'enrutament.

Podem interpretar la variable dual  $p_l$  com el preu per la capacitat de l'enllaç  $l$  (p.e. en € per unitat de flux). D'aquesta manera el problema té una interessant interpretació econòmica: estem intentant maximitzar la funció d'utilitat total on descomptarem el cost total dels fluxos utilitzats en cada enllaç, que ve donat pel terme  $\sum_l p_l x_l$ , i afegint el guany obtingut de les capacitats que són suportades, que ve donat pel terme  $\sum_l p_l c_l$ . El problema extern coordinarà aquestes operacions a través del vector de preus  $p$ . Així doncs, el mètode del subgradient aplicat en el problema extern ens servirà per actualitzar aquests preus per tal d'arribar a una coordinació òptima.

A l'aplicar el mètode del subgradient, començarem amb un punt inicial  $p^{(1)}$ . A cada pas d'iteració  $k=1,2,3\dots$ , calcularem la funció dual  $V(p^{(k)})$  i el subgradient  $h^{(k)}$ , i llavors actualitzarem la variable dual externa d'aquesta manera:

$$p^{(k+1)} = [p^{(k)} - \beta_k h^{(k)}]_+$$

on  $[\cdot]_+$  denota projecció a l'ortant no negatiu i  $\beta_k$  és la mida de pas (un nombre escalar positiu). Hi ha diverses formes d'escollir la mida de pas (veure apartat 3.3), en el nostre cas s'utilitzarà una mida de pas constant  $0 \leq \beta_k \leq 0.1$ . En funció de la mida de pas escollida, l'algorisme tindrà una velocitat de convergència major o menor, ja que amb una mida de pas elevada, les variables duals  $v$  s'actualitzaran més bruscament i l'algorisme serà més ràpid, però correm el risc de que l'algorisme no convergeixi si el valor triat és massa gran.

## 6.6 Aplicació del mètode del subgradient al problema intern

Anàlogament al problema extern, definirem  $g \in \mathbb{R}^N$  com un subgradient de la funció convexa no diferenciable  $Q$  a  $v$ , tal que:

$$Q(m) \geq Q(v) + g^T(m - v)$$

per qualsevol  $m$ . Donada una variable dual  $v \geq 0$ ,  $x^*(v)$ ,  $s^*(v)$ ,  $p^*(v)$  són solucions òptimes d'aquest problema. De la definició de la funció dual a l'expressió (6.10), trobem que un subgradient  $g \in \mathbb{R}^N$  de  $Q$  a  $v$  ve donat per l'expressió:

$$g = Ax - s$$

Val a dir que  $g$  pot ser interpretat com la quantitat de flux que falta per assignar a cada node, tenint en compte que hi ha un cert tràfic  $x$  entrant i sortint, i un cert flux

injectat  $s$ , de tal manera que com s'ha de complir la llei de conservació de flux, la quantitat de flux sobrant per assignar s'anirà fent cada cop més petita.

A l'exemple de la figura 6.1 veiem que  $g_n$  pot ser interpretat com el tràfic sobrant en el node  $n$ , i per tant ha de complir  $g_4 = x_D + x_E - x_A - x_B - x_C - s_4$ . El mètode del subgradient doncs, aplicat en el problema dual intern, anirà assignant de manera iterativa part de la  $g$  restant a qualsevol dels fluxos entrants o sortints.

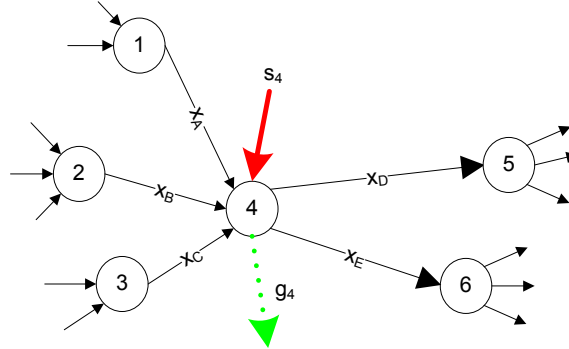


Figura 6.1 Representació gràfica del subgradient intern  $g$

Tal i com s'ha descrit en l'exemple numèric de l'apartat 5.3 (pel problema d'enrutament amb mínim retard), l'aplicació del mètode del subgradient pel problema interior té una analogia amb un circuit electrònic, ja que podem interpretar cada variable dual  $v_n$  com un potencial i per tant  $A^T v$  (d'ara endavant  $\Delta v \in \mathbb{R}^L$ ) com la diferència de potencial; el flux injectat  $s_n$  com el corrent exterior injectat cap a un node, el flux  $x_j$  com el corrent a la branca  $j$ , i per tant la llei de conservació de flux equivaldria a la llei de Kirchoff. Més endavant veurem que les  $x$  (el corrent) seran calculades com una funció de la diferència de potencial  $\Delta v$ .

Reescrivim l'expressió que s'haurà de maximitzar introduint la component quadràtica que serà necessària afegir per tal d'implementar correctament l'algorisme:

$$y(x, s, p, v) = \sum_{n, n \neq d} \log(s_n) - \varepsilon(x^T x) - \sum_l p_l x_l - v^T (Ax - s) \quad (6.11)$$

A l'aplicar el mètode del subgradient al problema intern, començarem amb un punt inicial  $v^{(1)}$ . A cada pas d'iteració  $k=1,2,3,\dots$ , calcularem el subgradient  $g^{(k)}$ , i llavors actualitzarem la variable dual externa d'aquesta manera:

$$v^{(k+1)} = v^{(k)} - \alpha_k g^{(k)}$$

on  $\alpha_k$  és la mida de pas (independent de la mida de pas del problema extern  $\beta_k$ ). Hi ha diverses formes d'escollir la mida de pas (veure apartat 3.3), en el nostre cas s'utilitzarà una mida de pas constant  $0 \leq \alpha_k \leq 0.1$ .

En funció de la nostra tria d'aquest paràmetre, l'algorisme convergirà amb més o menys rapidesa, ja que actualitzarem la variable dual  $v$  amb canvis més o menys bruscos. Si triem una mida de pas elevada,  $v$  pot tenir actualitzacions massa brusques i no convergir. A part actualitzarem les variables  $x$  i  $s$ , obtenint-ne en cada iteració els valors que maximitzin la expressió (6.11):

$$(x^*, s^*) = \underset{s \geq 0}{\operatorname{argmax}} y(x, s, p, v)$$

Així doncs, a cada iteració calcularem:

$$x_l^* = \frac{-p_l + \Delta v_l}{2\epsilon}$$

$$s_n^* = \frac{1}{v_n} \quad \text{per } n \neq d$$

Encara que no forcem que la  $x$  sigui positiva, amb el mètode del subgradient, imposar aquesta restricció sí que seria factible (de fet es fa en el model del capítol 7). Per últim, cal recordar que per tal de respectar la llei de conservació de flux imposarem:

$$s_d = - \sum_{n, n \neq d} s_n \quad (6.12)$$

On  $s_d$  és el flux que sortirà del node destí, és a dir, tot el flux que desapareixerà de la xarxa a través del node  $d$ .

A mode de conclusió, el primer dels algorismes que estudiarem per resoldre el problema d'enrutament i control de flux per una sola destinació, aplica de manera paral·lela el mètode del subgradient tant al problema extern com al intern, tindrà la següent estructura:

---

**Algorisme A (doble mètode del subgradient) per resoldre el problema conjunt d'enrutament i control de flux per una sola destinació**


---

**definició** vector de capacitats  $c$  i matriu node-incidència  $A$

**definició** constant del terme quadràtic  $\varepsilon$  i mides de pas  $\alpha$  i  $\beta$

**inicialització variables:**  $x, s, p, v$

**repetir**

actualització  $g, v, s, x$  (p.intern)

actualització  $h$  i  $p$  (p.extern) a partir de les  $x$  actualitzades

**finis que** NumIteracions=Max\_Iteracions o  $\text{norma}(Ax-s) < \text{Precisió}$

---

Com es pot veure, no és necessari que crear un bucle iteratiu que repeteixi només el problema intern, amb una única actualització del problema intern dins de cada iteració (del problema extern) és suficient perquè l'algorisme convergeixi al valor òptim.

## 6.7 Aplicació del mètode de Newton amb inici no factible al problema intern

Incloent a l'expressió (6.7) el terme quadràtic  $\varepsilon(x^T x)$  tenim:

$$\begin{aligned} \max_{x,s,t} \sum_{n,n \neq d} \log(s_n) - \varepsilon(x^T x) - \sum_l p_l x_l + \sum_l p_l c_l \quad (6.13) \\ \text{subjecte a } Ax = s, \quad s \geq_d 0 \end{aligned}$$

Com que  $x$  i  $s$  són incògnites del problema (6.13), i en la restricció d'igualtat  $Ax=b$  que defineix el mètode de Newton (descriu en l'apartat 3.4.3)  $A$  i  $b$  són dades del problema (i no incògnites) haurem de reformular les variables que intervenen en aquest. Així com en el mètode del subgradient podem imposar que les  $x \geq 0$ , amb el mètode de Newton això no és immediat, ja que hi ha problemes en l'actualització de  $x$ , després de la recerca de línia.

En una xarxa de  $N$  nodes i  $L$  enllaços, canviarem la restricció d'igualtat  $Ax=s$  de l'expressió (6.13) per:

$$\tilde{A}\tilde{x} = 0, \quad \text{on } \tilde{A} \in \mathbb{R}^{N \times (L+N)}, \tilde{x} \in \mathbb{R}^{(L+N) \times 1}$$

$$\text{tals que: } \tilde{A} = (A|-I),$$

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_L \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_N \end{pmatrix}$$

D'aquesta manera hem integrat les incògnites  $x$  i  $s$  dins d'una sola incògnita  $\tilde{x}$ . Val a dir que la restricció  $\tilde{A}\tilde{x} = 0$  seguirà respectant la llei de conservació de flux. Podem reescriure (6.13) com:

$$\begin{aligned} \max_{x,s,t} \sum_{n,n \neq d} \log(s_n) - \epsilon(x^T x) - \sum_l p_l x_l + \sum_l p_l c_l \quad (6.14) \\ \text{subjecte a } \tilde{A}\tilde{x} = 0, \\ \tilde{A} = (A| -I), \\ \tilde{x} = \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix}, \quad s \geq_d 0 \end{aligned}$$

Llavors, haurem de maximitzar una la funció  $f(\tilde{x})$ , expressada a (6.14) en funció de les variables  $x$  i  $s$ .

Un cop reformulat el problema ja podem aplicar el mètode de Newton amb inici no factible (*infeasible start Newton method*). Aquesta variant del mètode de Newton permet introduir valors inicials de  $x$  i  $s$  que no siguin factibles (pels quals no es compleixi la restricció d'igualtat  $Ax=s$ ). Val a dir que la solució trivial  $x=s=0$  no ens funcionaria ja que en la primera iteració apareixerien errors al tenir que calcular el gradient de la funció d'utilitat logarítmica de  $s$  (valors  $\infty$ ). Tanmateix, amb altres inicis trivials no se satisfaria la expressió (6.12).

No obstant, els valors inicials de  $x$  i  $s$  hauran de satisfer la condició  $x, s \in \text{dom } f(\tilde{x})$ .

Seguint el plantejament descrit en l'apartat 3.4, a cada iteració calcularem els anomenats residus principal i dual:

$$\begin{aligned} r_{dual}(\tilde{x}, v) &= \nabla f(\tilde{x}) + \tilde{A}^T v \\ r_{pri}(\tilde{x}, v) &= \tilde{A}\tilde{x} - b = \tilde{A}\tilde{x} \end{aligned} \quad (6.15)$$



on  $v \in \Re^{N \times 1}$  i  $b$  és un vector amb tots els components igual a zero. A partir de (6.14), el gradient serà:

$$\nabla f(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} \nabla f(x) \\ \nabla f(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\epsilon x_1 - p_1 \\ -2\epsilon x_2 - p_2 \\ \vdots \\ -2\epsilon x_L - p_L \\ s_1^{-1} \\ s_2^{-1} \\ \vdots \\ s_N^{-1} \end{pmatrix}$$

Si definim  $r \in \Re^{(L+2N) \times 1}$  com:

$$r(\tilde{x}, v) = \begin{pmatrix} r_{dual}(\tilde{x}, v) \\ r_{pri}(\tilde{x}, v) \end{pmatrix}$$

el nostre objectiu és assolir la condició d'optimalitat, expressada com  $r(\tilde{x}^*, v^*) = 0$ . El mètode de Newton amb inici no factible intentarà complir aquesta condició calculant en cada iteració els passos de Newton principal ( $\Delta \tilde{x}_{nt}$ ) i dual ( $\Delta v_{nt}$ ):

$$\begin{pmatrix} \Delta \tilde{x}_{nt} \\ \Delta v_{nt} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla^2 f(\tilde{x}) & \tilde{A}^T \\ \tilde{A} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} r_{dual}(\tilde{x}, v) \\ r_{pri}(\tilde{x}, v) \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

A partir de (6.14), el hessià serà:

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(\tilde{x}) &= \begin{pmatrix} \nabla^2 f(x) & 0 \\ 0 & \nabla^2 f(s) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -2\epsilon & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -2\epsilon & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\epsilon & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -s_1^{-2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -s_2^{-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -s_N^{-2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Un cop calculats els passos de Newton actualitzarem  $\tilde{x}$  i  $v$  de la següent manera:

$$\tilde{x} = \tilde{x} + t\Delta \tilde{x}_{nt} \quad (6.17)$$

$$v = v + t\Delta v_{nt}$$

on  $t$  serà calculat amb una estratègia de recerca de línia *backtracking*, en la que s'anirà reduint  $t$  amb un factor  $\beta$  ( $t=\beta t$ ,  $0\leq\beta\leq 1$ ) mentre es compleixi:

$$\|r(\tilde{x} + t\Delta\tilde{x}_{nt}, v + t\Delta v_{nt})\|_2 > (1 - \alpha t)\|r(\tilde{x}, v)\|_2$$

on  $\alpha$  també és una constant ( $0\leq\alpha\leq 1$ ) i pot ser interpretada com el percentatge que volem que es redueixi el residu per tal de realitzar la recerca de línia. La constant  $\alpha$  pren valors típics de 0.01 a 0.3, mentre que la constant  $\beta$  pren valors típics de 0.1 a 0.8.

El procés de càlcul de (6.15), (6.16), (6.17) i la recerca de línia s'aniran repetint iterativament fins que  $\tilde{A}\tilde{x} = 0$  o  $\|r(\tilde{x}, v)\|_2 \leq \delta$ , on  $\delta$  és la precisió desitjada i prendrà valors típics de  $10^{-6}$ .

A mode de resum, en el segon algorisme proposat en aquest capítol integrem el mètode de Newton amb inici no factible (aplicat al problema intern) amb el mètode del subgradient (aplicat al problema extern). L'algorisme resultant té la següent estructura:

---

**Algorisme B (mètode del subgradient/mètode de Newton amb inici no factible) per resoldre el problema conjunt d'enrutament i control de flux per una sola destinació**

---

**definició** vector de capacitats  $c$ , matriu node-incidència modificada  $\tilde{A}$ , constant del terme quadràtic  $\varepsilon$ , mides de pas  $\alpha$  i  $\beta_1$  (backtracking), mida de pas  $\beta_2$  (subgradient), precisió  $\delta$

**inicialització variables:**  $\tilde{x}, v, p$

**repetir** (problema extern)

**mentre**  $\|r(\tilde{x}, v)\|_2 \leq \delta$  (problema intern)

càlcul gradient i hessià

càlcul residus principal i dual

càlcul passos de Newton  $\Delta\tilde{x}_{nt}$  i  $\Delta v_{nt}$ ;  $t=1$ ;

**mentre**  $\|r(\tilde{x} + t\Delta\tilde{x}_{nt}, v + t\Delta v_{nt})\|_2 > (1 - \alpha t)\|r(\tilde{x}, v)\|_2$  ,  $t=\beta t$ ;

actualització  $\tilde{x}$  i  $v$  (p.intern) a partir de la  $t$  resultant;

càlcul subgradient  $h$  amb la  $\tilde{x}$  nova

actualització vector de preus  $p$  a partir del subgradient  $h$  (p.extern).

**fins que** NumIteracions=Max\_Iteracions

---

Així doncs, a la figura 6.2 veiem un esquema que descriu com es solucionen els problemes extern i intern, aquest últim amb les dues alternatives proposades.

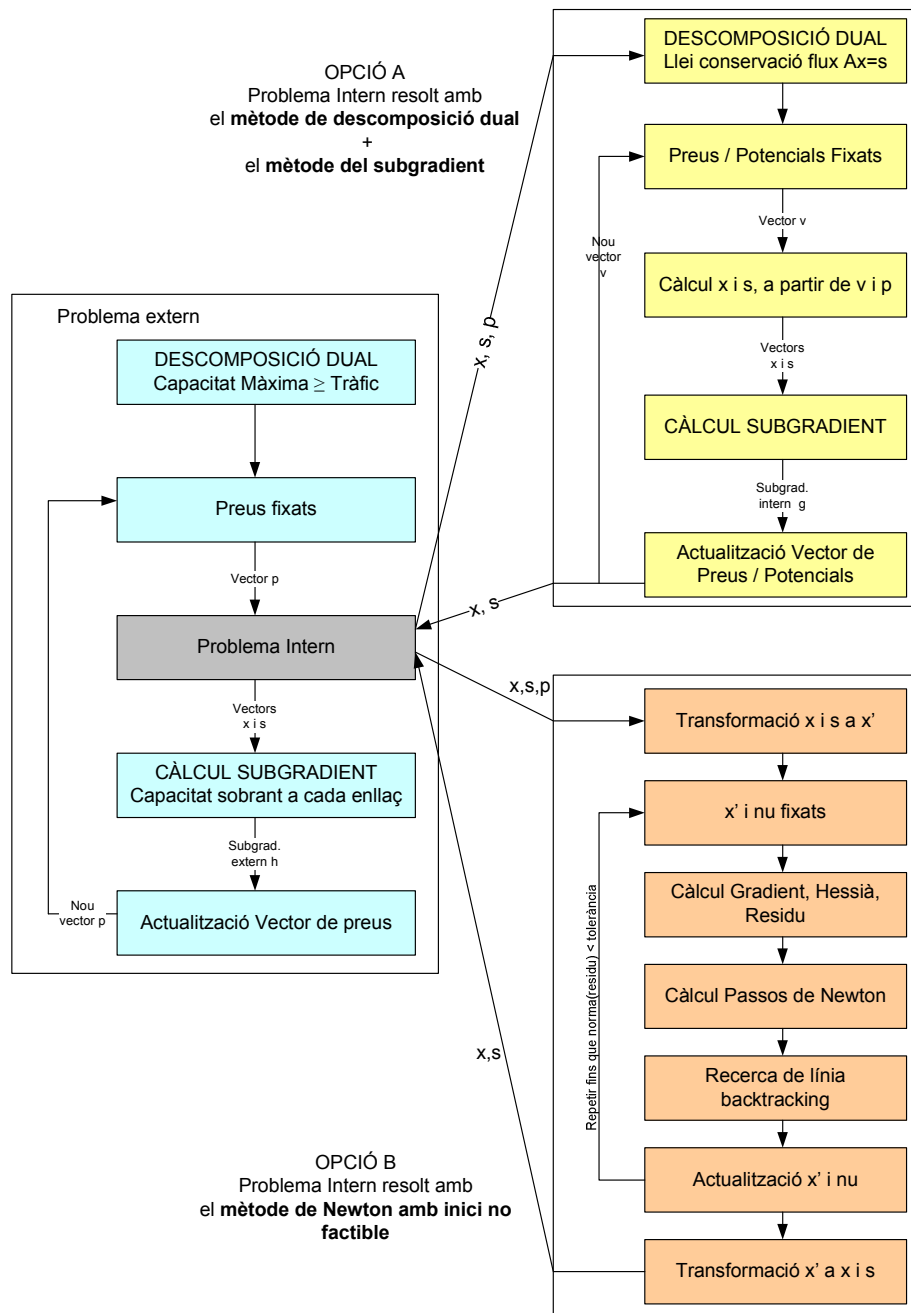


Figura 6.2 Diagrama de flux dels algorismes emprats

## 6.8 Exemple Numèric

A continuació es presenta un exemple numèric per tal d'il·lustrar de manera simplificada el problema conjunt d'enrutament i control de flux per una sola destinació.

Posarem com a exemple la xarxa híbrida satèl·lit terrestre de la figura 6.3, utilitzada en el capítol 5 per representar el problema d'enrutament amb retard mínim, on una sèrie de terminals s'han de comunicar amb una certa destinació remota i tenen la possibilitat de fer-ho per dues vies: a través d'una xarxa WiMAX (on poden escollir transmetre a través de dues estacions base), que estarà connectada alhora via satèl·lit (p.e. Inmarsat-4) a la destinació final o via terrestre amb una connexió ADSL genèrica. S'han pres valors realistes de cabal contractat. Aquests valors representen el límit de capacitat associat a cada enllaç.

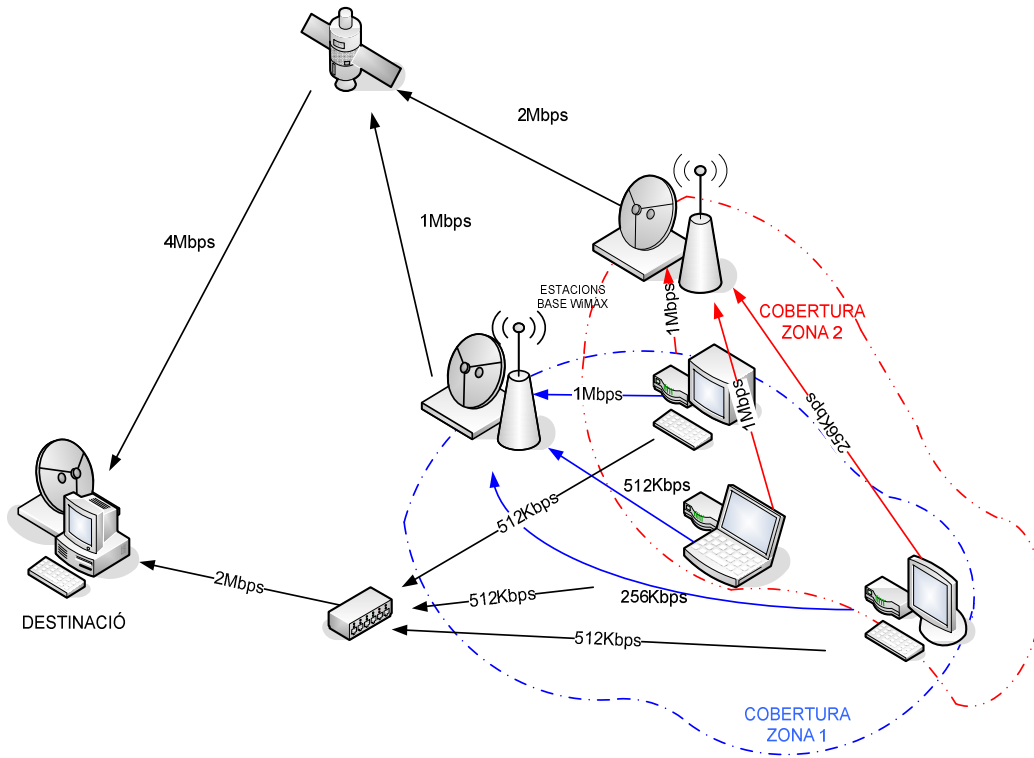


Figura 6.3. Exemple de model de xarxa per al problema conjunt d'E. i C.F. per una sola destinació.

Cal remarcar que com només simularem el tràfic destinat a una certa (i única) destinació final, només tindrem en compte els enllaços dibuixats en la figura 6.3, i suposarem que a priori el sentit predeterminat serà l'òptim.

Al no haver imposat que el vector  $x$  només tingui valors positius, si al fer la simulació obtenim que algun component d'aquest vector té un valor òptim negatiu, això es podrà interpretar de dues maneres:

- i) Els enllaços són bidireccionals i el signe negatiu del resultat simplement significa que el flux òptim tindrà el sentit contrari al predeterminat.
- ii) Els enllaços són unidireccionals (només poden prendre el sentit predeterminat) i un valor òptim negatiu significa que el sentit de l'enllaç no és òptim per a maximitzar la funció d'utilitat de la xarxa (i haurem de replantejar el problema amb el mateix enllaç amb el sentit oposat, de manera que obtinguéssim el mateix valor òptim amb el signe canviat).

En ambdós supòsits, estem ignorant tots els fluxos amb sentit contrari als definits per cada enllaç en aquest model, que també coexistirien (en la realitat) a la nostra xarxa, amb l'únic objectiu d'estudiar l'enrutament i el control de flux en un sol sentit dels fluxos.

### 6.8.1 Model equivalent de topologia de xarxa

Per tal de simular aquesta topologia de xarxa en Matlab serà necessari transformar el model de la figura 6.3 en un model equivalent de 8 nodes (cadascun del components de la xarxa) i 13 enllaços, tal i com es pot veure en la figura 6.4

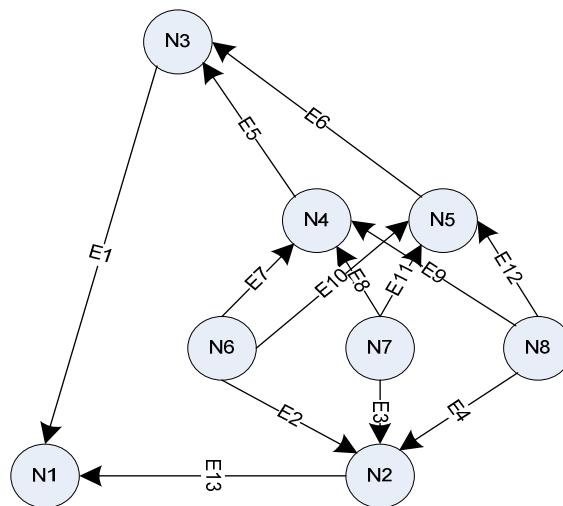


Figura 6.4. Model equivalent de la topologia de xarxa

A partir del model equivalent de la figura 6.4, definirem la matriu node incidència  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cal recordar que si l'element  $A_{ij}=1$ , l'enllaç  $j$  surt del node  $i$ , mentre que si  $A_{ij}=-1$  l'enllaç  $j$  entra al node  $i$  (si un node  $i$  i un enllaç  $j$  no estan associats  $A_{ij}=0$ ).

Cal recordar també que a part de calcular el vector  $x$  (que pot ser vist com a l'utilització de cada enllaç) es calcularà el vector  $s$ , que tindrà tants components com nodes, i representa el tràfic injectat en cada node. El component  $s_1$  (tràfic injectat al node destinació) serà negatiu, ja que al no tenir un enllaç per on pugui sortir el flux no es podrà injectar flux des d'aquest node.

Per facilitar la simulació farem una conversió dels valors de límit de capacitat de l'enllaç de tal manera que 1 unitat de tràfic equivaldrà a 512 kbps (p.e. 4 unitats=2Mbps). Així ens quedarà un vector  $c=[8 \ 1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 4 \ 2 \ 1 \ 0.5 \ 2 \ 2 \ 0.5 \ 4]$ , tal i com es representa en la figura 6.5.

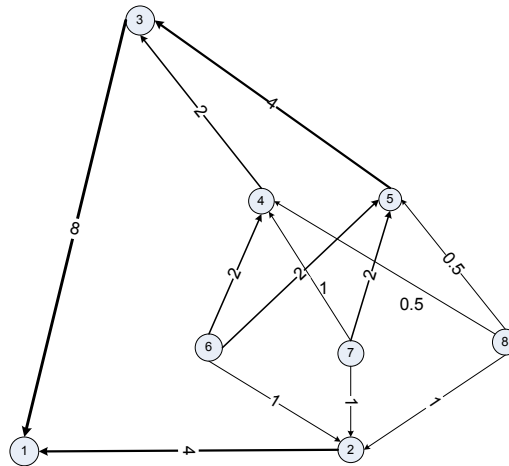


Figura 6.5. Límits de capacitat dels enllaços

6.8.2 Resultats de la Simulació

S'ha resolt aquest problema amb els dos algorismes proposats en els apartats 6.7 i 6.8, implementats en Matlab.

S'ha realitzat la simulació amb un factor  $\varepsilon=0.01$  per tal de minimitzar l'efecte del terme quadràtic en els resultats. Val a dir que al canviar dràsticament el valor de  $\varepsilon$ , la solució obtinguda varia molt poc.

Veiem a les taules 6.1 i 6.2 els valors òptims del tràfic  $x$  i el flux injectat  $s$ , els quals defineixen l'enrutament i el control de flux.

Enllaç l	$x_l$
1	8
2	0.7046
3	0.7046
4	0.8984
5	2
6	4
7	0.0501
8	0.0501
9	0.2440
10	0.8982
11	0.8982
12	0.5
13	4

Taula 6.1 Valors òptims d'enrutament  $x^*$

Node n	$s_n$
1 (Dest.)	-12.0000
2	1.6924
3	2.0000
4	1.6557
5	1.7035
6	1.6530
7	1.6530
8	1.6424

Taula 6.2 Valors òptims de control de flux  $s^*$

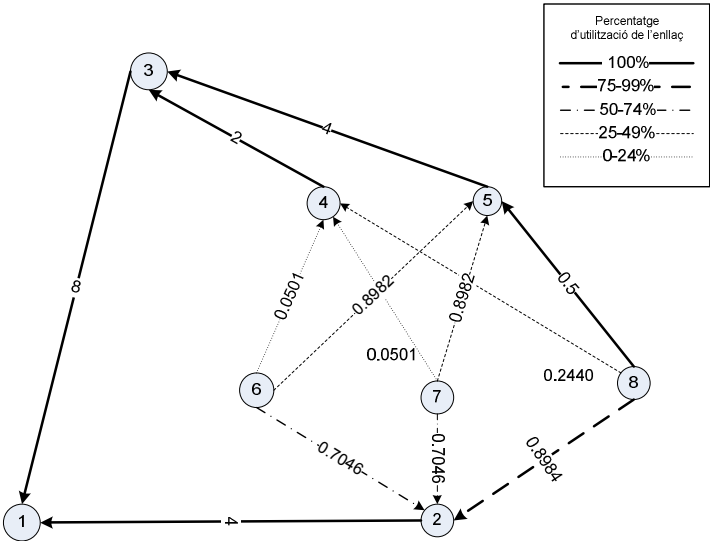


Figura 6.6 Enrutament cap al node-destinació





7	0	2.51%
8	0	5.01%
9	0	48.8%
10	0	44.91%
11	0	44.91%
12	<b>0.0118</b>	<b>100%</b>
13	<b>0.5109</b>	<b>100%</b>

Taula 6.3 Valors òptims de  $p^*$ 

Com es pot apreciar a la taula 6.3, dels 13 enllaços de la xarxa, n'hi ha 8 als quals no se'ls assigna cap preu, i corresponen de manera lògica, als enllaços que no estan utilitzats al màxim (que encara podrien ser més aprofitats). En canvi, qualsevol node que vulgui transmetre pels enllaços 1,5,6,12 o 13 haurà de pagar un cert preu per fer-ho ja que aquests estan utilitzats al màxim i tenen un preu major que 0 assignat. Aquest preu, que no deixa de ser el multiplicador de Lagrange del problema extern, serà fruit de la negociació dels diferents nodes a través del procés d'optimització del problema extern (mitjançant el mètode del subgradient).

Per últim cal remarcar que s'ha obtingut un valor  $f_{pri}^* = f_{dual}^*$  (igual a 2.7203), i per tant es comprova que hi ha dualitat forta, amb la qual cosa optimitzem l'enrutament i el control de flux al trobar el vector de preus  $p^*$  òptim (al resoldre el problema extern mitjançant el mètode de descomposició dual i el mètode del subgradient).

### 6.8.3 Anàlisi de les prestacions dels algorismes

Hem simulat el problema mitjançant els dos algorismes proposats als apartats 6.6 i 6.7. Ambdós algorismes s'han simulat amb la mateixa mida de pas  $\beta=0.001$  per tal que, el mètode del subgradient que resol el problema extern, funcioni amb la mateixa rapidesa en els dos casos, de manera que sigui possible comparar la resolució del problema intern (que és on difereixen els dos algorismes).

D'aquesta manera és fàcil entreveure certes diferències entre les prestacions d'ambdós algorismes. L'algorisme B (que resol el problema intern amb el mètode de Newton amb inici no factible), on la direcció de les actualitzacions dels preus de cada enllaç ve donada pel gradient negatiu escalat per l'invers del hessià (veure expressió 6.16), convergeix significativament més ràpid que l'algorisme A (que resol el problema intern amb el mètode del subgradient).

Això ho podem veure a les figures 6.7 i 6.8, on es representa l'evolució iterativa de la funció d'utilitat principal  $\sum_{n,n \neq d} U_n(s_n)$  i el *gap* d'optimalitat principal (la diferència entre la funció d'utilitat a cada iteració i el valor òptim d'aquesta), respectivament.

Com es pot apreciar en la figura 6.8, en l'algorisme B (que resol el problema intern amb el mètode de Newton amb inici no factible) la funció d'utilitat principal convergeix al valor òptim pràcticament en  $10^3$  iteracions, mentre que l'algorisme A n'hi tarda més de  $2 \times 10^4$  iteracions.

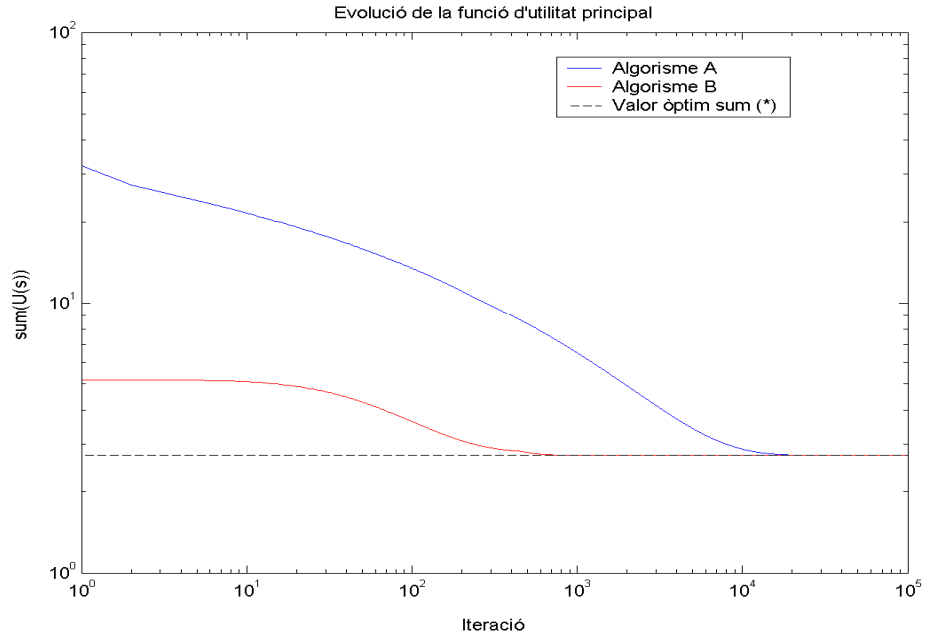


Figura 6.8. Evolució de la funció utilitat  $U(s)$  dels dos algorismes

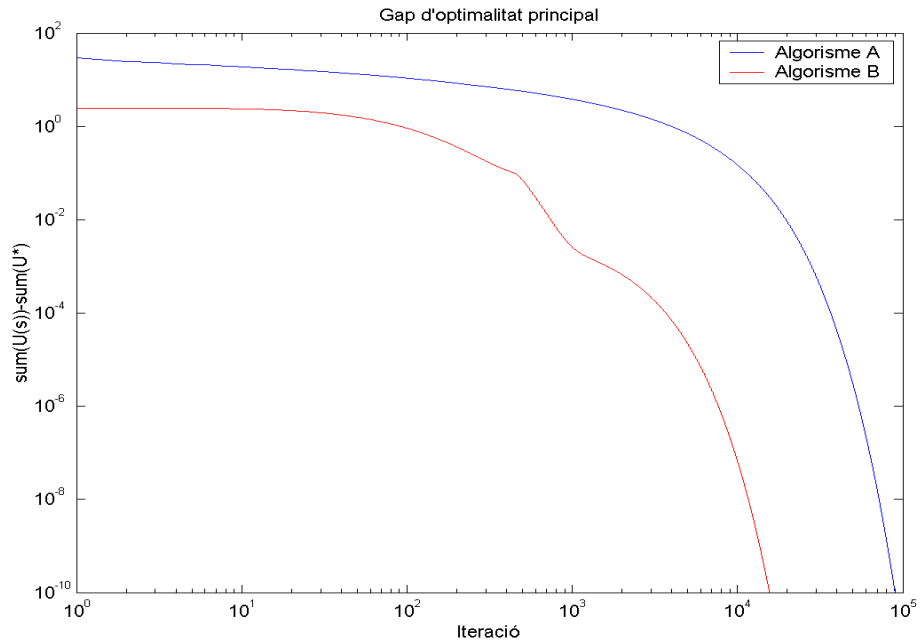


Figura 6.9 Gap d'optimalitat principal

Observant el gap d'optimalitat principal, és a dir la diferència o error de la funció d'utilitat principal respecte el seu valor òptim, veiem amb més detall que l'algorisme B obté un gap de  $10^{-10}$  en  $1.5 \times 10^4$  iteracions, mentre que l'algorisme A necessita més de 6 vegades les iteracions de B per arribar al mateix gap (a la mateixa precisió).

Anàlogament, s'ha representat l'evolució de la funció dual a la figura 6.10, on es pot veure que  $V(p)$  arriba pràcticament al valor òptim en un centenar d'iteracions mitjançant l'algorisme B (mètode de Newton amb i.n.f.), mentre que l'algorisme A necessita més de  $10^4$  iteracions per arribar al mateix valor.

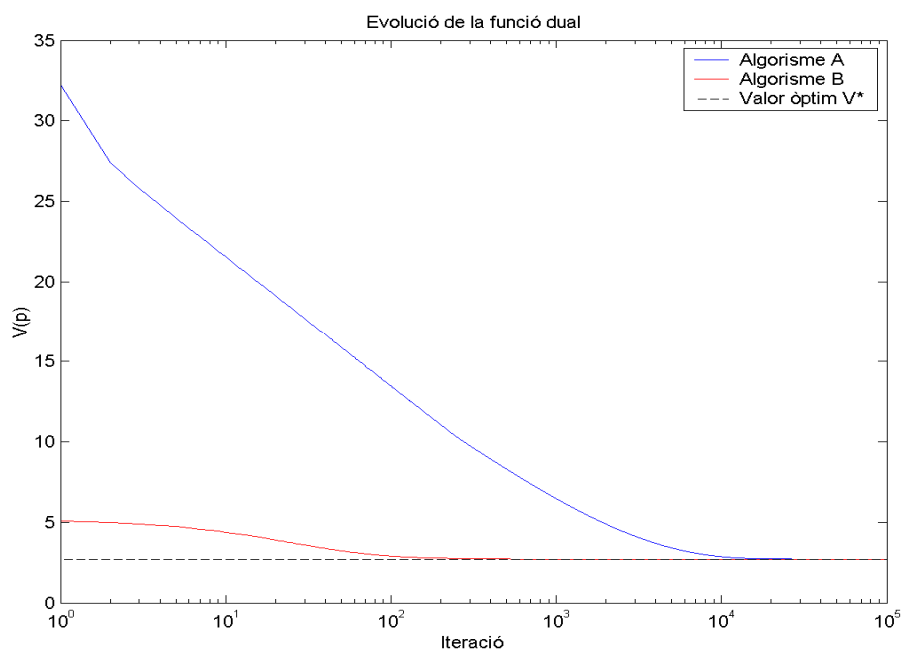


Figura 6.10 Evolució de la funció dual en els dos algorismes

A la figura 6.11 veiem el gap (o error) d'optimalitat dual, és a dir la diferència entre la funció objectiu dual  $V(p)$  i el valor òptim  $V^*$  d'aquesta. En aquest cas també es pot apreciar com l'algorisme B es considera més ràpid en convergir que l'algorisme A (aproximadament un 600% més ràpid en obtenir una precisió de  $10^{-10}$ ).

De la mateixa manera que en la figura 6.9, veiem com ambdós algorismes adquireixen els que s'anomena convergència quadràtica a partir d'aproximadament  $10^4$  iteracions.

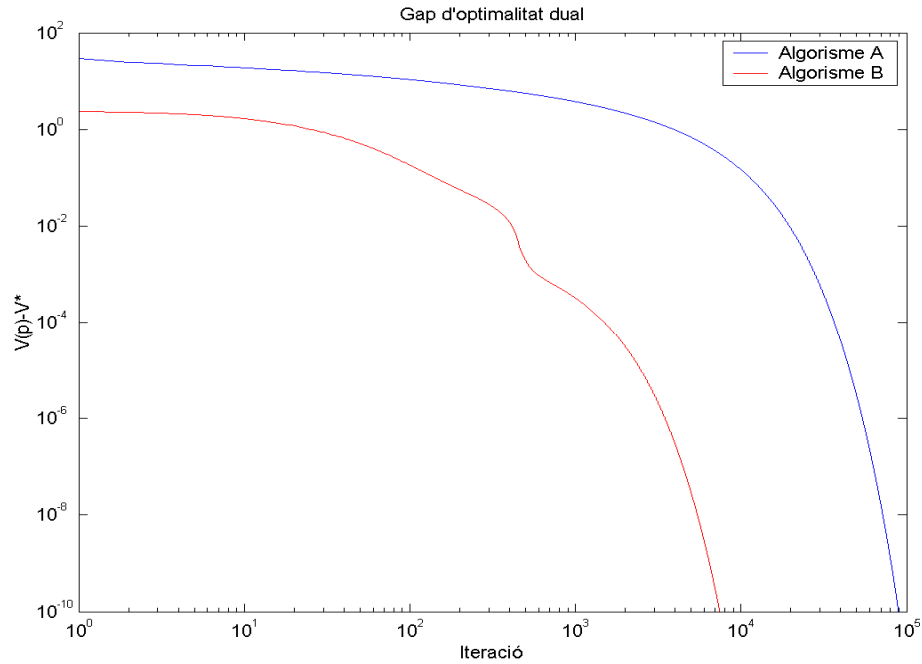


Figura 6.11 Gap d'optimalitat dual dels dos algorismes (en valor absolut)

També és interessant observar l'evolució dels preus  $p_i$  pels dos algorismes, per tal de comprovar que aquesta diferència en la rapidesa de convergència dels dos mètodes proposats, és visible també en la optimització del vector de preus  $p$ .

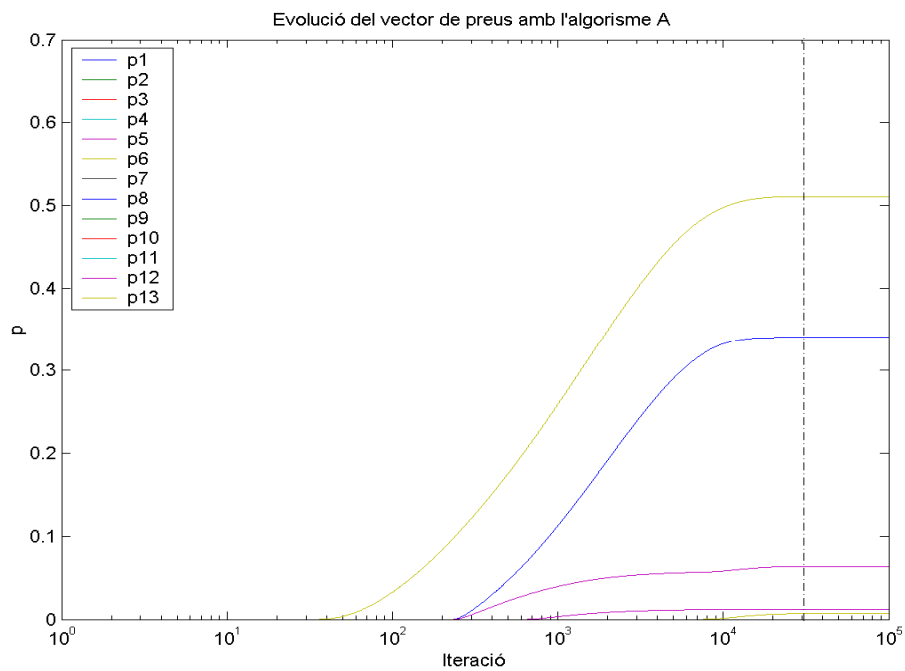


Figura 6.12 Evolució del vector de preus aplicant el mètode del subgradient

A la figura 6.12 veiem que en l'algorisme A els multiplicadors de Lagrange  $p$  associats a cada enllaç arriben pràcticament al seu valor òptim en  $3 \times 10^4$  iteracions. A la figura 6.13 veiem que amb l'algorisme B els valors òptims  $p^*$  són calculats amb un nombre d'iteracions molt menor, de l'ordre de  $5 \times 10^6$ .

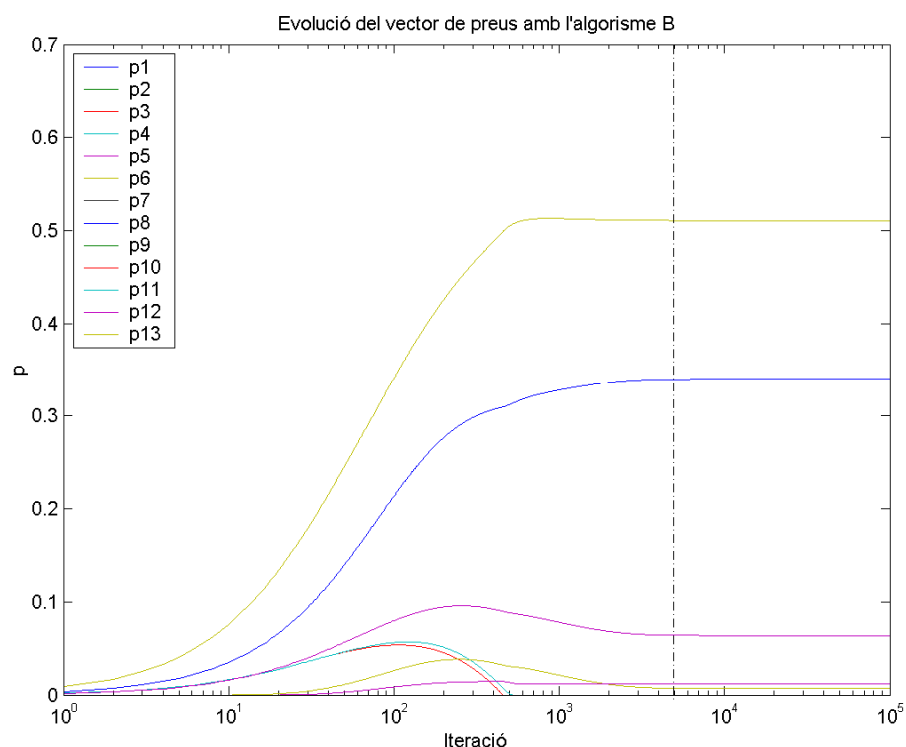


Figura 6.13 Evolució del vector de preus el mètode de Newton amb i.n.f.

A la figura 6.13 també veiem que l'optimització de  $p$  no sempre implica fer créixer el valor, alguns components del vector de preus  $p$  pugen a un cert valor i tornen a zero. Això és degut a que el mètode del subgradient segueix les lleis de la oferta i la demanda a cada enllaç.

Com es pot veure en l'exemple ampliat de la figura 6.14, durant les mil primeres iteracions (en el cas de l'algorisme B) succeeix la següent situació a l'enllaç 2: en un primer moment, l'enllaç està sobreutilitzat i el preu d'aquest puja (ja que hi ha molta demanda per enviar-hi tràfic). Com és lògic, a mesura que el preu de l'enllaç 2 creix, la demanda d'aquest va baixant fins que creua el llindar del factor d'utilització 1. En aquest punt, l'enllaç està infrautilitzat degut a què la demanda ha baixat i el preu anirà descendant fins arribar a 0. En aquest punt el subgradient  $h$  serà major que 0, la qual cosa significarà que hi ha capacitat sobrant, que serà assignada als nodes de manera gratuïta (a partir de la iteració 460, el preu de l'enllaç passa a ser zero).

Per tant veiem com el mètode del subgradient, aplicat al problema extern, va repartint la capacitat de transmissió sobrant en cada enllaç i assignant preus en funció de la demanda dels nodes. D'aquesta manera, cada node coneixerà els preus dels enllaços adjacents i podrà regular el flux que injecta i el tràfic que enruta a través d'un cert enllaç seguint la llei de conservació de flux.

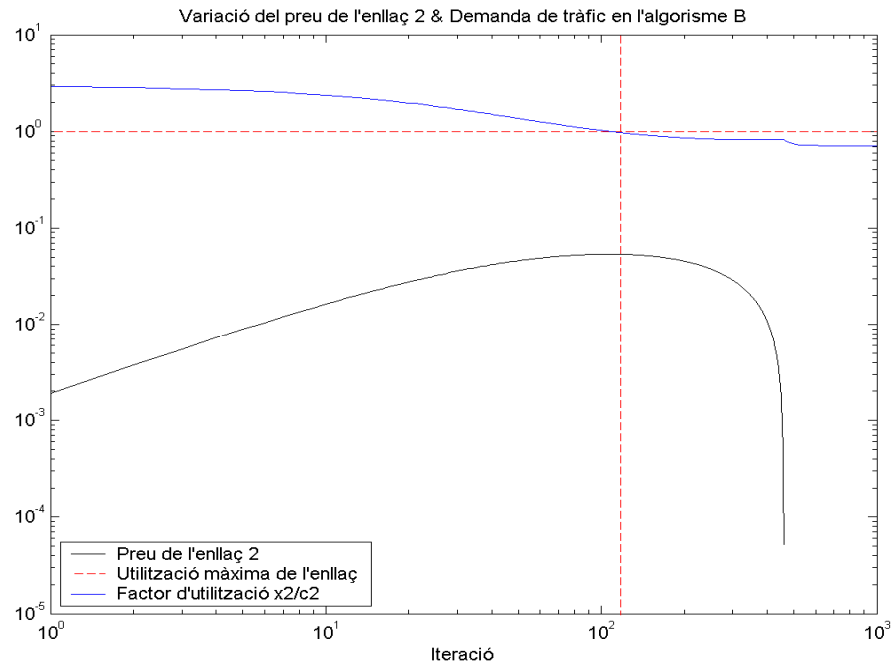


Figura 6.14 Variació del preu i factor d'utilització de l'enllaç  $l=2$  en l'algorisme B

## 7.- ENRUTAMENT I CONTROL DE FLUX CONJUNTS PER MÚLTIPLES DESTINACIONS

### 7.1 Formulació general del problema

En aquest apartat es descriurà el problema conjunt d'enrutament i control de flux per múltiples destinacions formulat com un problema d'optimització convexa, a l'apartat 2.3.2.

Anàlogament al capítol anterior suposarem que l'objectiu és maximitzar una funció d'utilitat còncava (en comptes de minimitzar una funció de cost convexa):

$$\begin{aligned}
 & \text{maximitzar} && f(x, s, t) \\
 & \text{subjecte a} && Ax^{(d)} = s^{(d)}, \quad d = 1, \dots, D \\
 & && x^{(d)} \geq 0, \quad s^{(d)} \geq_d 0, \quad d = 1, \dots, D \\
 & && t_l = \sum_d x_l^{(d)}, \quad l = 1, \dots, L \\
 & && t_l \leq c_l, \quad l = 1, \dots, L
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

En aquest problema les variables d'optimització són les variables d'enrutament  $x$  i  $t$ , i la variable de control de flux  $s$ . A diferència del model d'enrutament *single-commodity flow*, imposarem que tots els components del vector  $x$  han de ser positius, limitant per tant el sentit dels fluxos òptims al sentit predeterminat de cada enllaç (definit en la matriu node-incidència  $A$ ).

Existeixen diverses funcions de cost que s'adapten als problemes de disseny per aquest tipus de xarxes. La funció de cost vista al capítol 5 per un model *single-commodity flow* també es podria aplicar al model actual si reescrivim el tràfic total de l'enllaç  $l$  com a  $t_l$  (la suma dels  $x_l$  per a totes les destinacions). En aquest cas doncs, quedaria com a una funció convexa de  $t$ :

$$f_{\text{retard}}(t) = \sum_l \frac{t_l}{c_l - t_l}$$

No obstant, i seguint el mateix criteri que en l'apartat 6, en aquest problema s'utilitzarà una funció d'utilitat  $U_n^{(d)}(\cdot)$  còncava i estrictament creixent, on  $U_n^{(d)}(s_n^{(d)})$  representarà la utilitat del node  $n$  per enviar dades a una taxa  $s_n^{(d)}$  a la destinació  $d$ . Així doncs el nostre problema de màxima utilitat quedarà formulat com:

$$\begin{aligned}
& \text{maximitzar } \sum_d \sum_{n,n \neq d} U_n^{(d)}(s_n^{(d)}) \\
& \text{subjecte a } Ax^{(d)} = s^{(d)}, \quad d = 1, \dots, D \\
& \quad x^{(d)} \geq 0, \quad s^{(d)} \geq_d 0, \quad d = 1, \dots, D \\
& \quad t_l = \sum_d x_l^{(d)}, \quad l = 1, \dots, L \\
& \quad t_l \leq c_l, \quad l = 1, \dots, L
\end{aligned} \tag{7.2}$$

Més concretament, es considerarà el problema conjunt d'enrutament i control de flux com la maximització de la utilitat total de la xarxa, on tots els parells origen-destinació definits, tindran la funció d'utilitat logarítmica:

$$U_n^{(d)}(s_n^{(d)}) = \log(s_n^{(d)}), \quad n \neq d$$

Per tal de poder desenvolupar un algorisme distribuït que resolgui el problema (7.2), aquest serà dividit en dos problemes: un d'extern i un d'intern, i en cadascun dels dos s'aplicarà el mètode de descomposició dual i el mètode del subgradient, presentats en els apartats 3.2 i 3.3 respectivament.

En el problema expressat a (7.1) s'han imposat  $x \geq 0$ , seguint les indicacions de [1], per tal d'evitar problemes en la desigualtat d'acoblament  $t_l \leq c_l$  (a partir de la definició de  $t_l$ ). Aquest fet impedeix que s'hagi resolt el problema amb el mètode de Newton tal i com s'ha fet pel cas d'una sola destinació.

## 7.2. Formulació del problema extern

Mitjançant el mètode de descomposició dual convertirem el problema principal en un problema dual equivalent, més fàcil de resoldre (p.e. amb el mètode del subgradient). Reescrivim el problema principal associat a (7.2):

$$\begin{aligned}
& \text{maximitzar } \sum_d \sum_{n,n \neq d} \log(s_n^{(d)}) \\
& \text{subjecte a } Ax^{(d)} = s^{(d)}, \quad d = 1, \dots, D \\
& \quad x^{(d)} \geq 0, \quad s^{(d)} \geq_d 0, \quad d = 1, \dots, D \\
& \quad t_l = \sum_d x_l^{(d)}, \quad l = 1, \dots, L \\
& \quad t_l \leq c_l, \quad l = 1, \dots, L
\end{aligned} \tag{7.3}$$

Construïm el problema dual extern introduint els multiplicadors de Lagrange  $p \in \mathbb{R}^L$  per les  $L$  inequacions d'acoblament  $t_l \leq c_l$ , formant el Lagrangiana parcial:



$$\begin{aligned}
L(x, s, t, p) &= \sum_d \sum_{n, n \neq d} \log(s_n^{(d)}) - \sum_l p_l (t_l - c_l) = \\
&= \sum_d \sum_{n, n \neq d} \log(s_n^{(d)}) - \sum_l p_l t_l + \sum_l p_l c_l \quad (7.4)
\end{aligned}$$

La funció objectiu  $V(p)$  del problema dual extern és:

$$V(p) = \sup_{x, s, t} \left\{ L(x, s, t, p) \left| \begin{array}{l} Ax^{(d)} = s^{(d)}, \quad x^{(d)} \geq 0, \quad s^{(d)} \geq_d 0, \quad d = 1, \dots, D \\ t_l = \sum_d x_l^{(d)}, \quad l = 1, \dots, L \end{array} \right. \right\} \quad (7.5)$$

Per tant el problema dual extern associat al problema principal serà:

$$\begin{array}{ll}
\text{minimitzar } V(p) \\
\text{subjecte a } p \geq 0
\end{array} \quad (7.6)$$

Com que la funció dual  $V$  és sempre convexa es pot dir que aquest és un problema d'optimització convexa. S'assumeix que la condició de Slater [7, §5.2] se satisfà, és a dir, que existeix una solució factible de  $x$ ,  $s$  i  $t$  tals que  $t_l \leq c_l$ . D'aquesta manera s'acompleix el que s'anomena dualitat forta (*strong duality*) amb la qual cosa els valors de  $x$ ,  $s$  i  $t$  que optimitzen el problema dual (7.6) també optimitzaran el problema principal (7.3).

Com que la funció objectiu principal no és estrictament còncava en les variables  $x$  i  $t$ , la funció dual és només diferenciable per parts. Per tant el problema dual és un problema d'optimització convexa no-diferenciable.

Per solucionar el problema dual extern (7.6) utilitzarem el mètode del subgradient, mitjançant el qual, en cada iteració serà necessari avaluar la funció dual  $V(p)$  i calcular el seu subgradient per qualsevol variable dual  $p \geq 0$ . Així doncs, es maximitzarà l'expressió (7.4) de manera iterativa, mitjançant el problema intern.

### 7.3 Formulació del problema intern

Podem formular el problema principal intern a partir de (7.4) i (7.5):

$$\begin{aligned}
& \max_{x,s,t} \sum_d \sum_{n,n \neq d} \log(s_n^{(d)}) - \sum_l p_l t_l + \sum_l p_l c_l \\
& \text{subjecte a } Ax^{(d)} = s^{(d)}, \quad d = 1, \dots, D \\
& \quad x^{(d)} \geq 0, \quad s^{(d)} \geq_d 0, \quad d = 1, \dots, D \\
& \quad t_l = \sum_d x_l^{(d)}, \quad l = 1, \dots, L
\end{aligned} \tag{7.7}$$

Per tal de poder acoblar la restricció d'igualtat  $Ax^{(d)} = s^{(d)}$  al Lagrangia definit a (7.4) també utilitzarem el mètode de descomposició dual, introduint un nou multiplicador de Lagrange  $v$  i formant així un nou Lagrangia  $L'$ :

$$\begin{aligned}
L'(x, s, t, p, v) &= L(x, s, t, p) + \sum_d v^{(d)T} (Ax^{(d)} - s^{(d)}) \\
&= \sum_d \sum_{n,n \neq d} \log(s_n^{(d)}) - \sum_l p_l t_l + \sum_l p_l c_l + \sum_d v^{(d)T} (Ax^{(d)} - s^{(d)})
\end{aligned} \tag{7.8}$$

I per tant, aplicant el mètode de descomposició dual a (7.8), definirem una nova funció dual  $Q(v)$ :

$$Q(v) = \sup_{x,s,t} \left\{ L'(x, s, t, p, v) \mid \begin{array}{l} x^{(d)} \geq 0, \quad s^{(d)} \geq_d 0, \quad d = 1, \dots, D \\ t_l = \sum_d x_l^{(d)}, \quad l = 1, \dots, L \end{array} \right\} \tag{7.9}$$

a partir de la qual definirem el següent problema, que anomenarem problema dual intern:

$$\begin{aligned}
& \text{minimitzar } Q(v) \\
& \text{subjecte a } v \geq 0
\end{aligned} \tag{7.10}$$

Així doncs el problema conjunt d'enrutament i control de flux per múltiples destinacions constarà de dos problemes duals, un problema dual extern (7.6) i un problema dual intern (7.10) cadascun dels quals serà resolt amb el mètode del subgradient.

## 7.4 Consideracions per a la resolució del problema

Si ens fixem en el problema extern, veiem que té una estructura especial que ens permetrà descomposar-lo en  $D$  subproblemes d'una sola destinació (*single-commodity flow problems*), amb la qual cosa el problema global es podrà resoldre de manera més eficient:

$$\begin{aligned}
& \max_{x,s,t} \sum_d \sum_{n,n \neq d} \log(s_n^{(d)}) - \sum_d \sum_l p_l x_l^{(d)} \\
& \text{subjecte a } Ax^{(d)} = s^{(d)}, \quad d = 1, \dots, D \\
& \quad x^{(d)} \geq 0, \quad s^{(d)} \geq_d 0, \quad d = 1, \dots, D
\end{aligned} \tag{7.11}$$

Val a dir que de cara a la resolució del problema, el terme  $\sum p_l x_l$  s'ha ignorat ja que al maximitzar la funció respecte  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{s}$  i  $\mathbf{t}$ , aquest desapareixerà.

Simplificant l'expressió (7.11):

$$\begin{aligned}
& \sum_d \max_{x,s,t} \sum_{n,n \neq d} \log(s_n^{(d)}) - \sum_l p_l x_l^{(d)} \\
& \text{subjecte a } Ax^{(d)} = s^{(d)}, \quad d = 1, \dots, D \\
& \quad x^{(d)} \geq 0, \quad s^{(d)} \geq_d 0, \quad d = 1, \dots, D
\end{aligned} \tag{7.12}$$

Anàlogament, aquesta descomposició en  $D$  subproblemes d'una sola destinació també es podrà aplicar al problema intern:

$$\begin{aligned}
& \sum_d \max_{x,s,t} \sum_{n,n \neq d} \log(s_n^{(d)}) - \sum_l p_l x_l^{(d)} - v^{(d)T} (Ax^{(d)} - s^{(d)}) \\
& \text{subjecte a } x^{(d)} \geq 0, \quad s^{(d)} \geq_d 0, \quad d = 1, \dots, D
\end{aligned} \tag{7.13}$$

A la realitat, el fet de poder separar el problema en  $D$  subproblemes ens permetrà implementar un algorisme distribuït, on cada node podrà calcular per si sol quant flux podrà injectar i com enrutarà el tràfic en cada moment, sense necessitar informació sobre l'estat dels altres nodes.

Per altra banda, quan solucionem el problema dual extern (7.6) i obtenim una variable dual òptima  $p^*$ , pot succeir que les corresponents solucions  $x^*(p^*)$ ,  $s^*(p^*)$  i  $t^*(p^*)$  corresponents al problema principal intern, no siguin totalment factibles. En particular, aquestes solucions poden violar lleugerament la limitació de capacitat  $t_i \leq c_i$ , que s'ha relaxat quan hem format el problema extern. Això és un fenomen típic en la descomposició dual de problemes d'optimització convexa amb funcions objectiu principals que no siguin estrictament còncaves/convexes (veure [8, §6]).

Per tant una altra conseqüència de la concavitat no estricta de la funció objectiu principal és que s'ha d'anar en compte al recuperar les solucions principals òptimes en el mètode de descomposició dual. Una manera de fer això és afegir un

petit terme de regularització perquè la funció objectiu principal sigui estrictament còncava.

En el nostre cas afegim un petit terme quadràtic a la funció d'utilitat total [9], i de fet es maximitzarà:

$$\sum_d \sum_{n, n \neq d} \log(s_n^{(d)}) - \epsilon \sum_d x^{(d)T} x^{(d)}$$

La constant  $\epsilon$  serà un nombre positiu petit, el valor de la qual determinarà la influència d'aquest terme quadràtic en les solucions òptimes de  $x^*, s^*$  i  $t^*$ . Es pot veure que la funció segueix sent separable entre destinacions (amb la qual cosa serà més fàcil implementar l'algorisme). Val a dir que la solució del problema per diferents valors de  $\epsilon$  no variarà substancialment. No obstant, són recomanables valors de  $\epsilon$  reduïts (p.e.  $\epsilon=0.1$ ). Afegint aquest terme quadràtic ens assegurem que hi hagi una solució única per al nostre problema.

## 7.5 Aplicació del mètode del subgradient pel problema extern

Anàlogament al apartat 6.4, definim el vector  $h \in \mathbb{R}^L$  com un subgradient de la funció convexa no diferenciable  $V$  a  $p$ , tal que:

$$V(q) \geq V(p) + h^T(q - p)$$

per qualsevol  $q$  (veure [15]). Donada una variable dual  $p \geq 0$ ,  $x^*(p)$ ,  $s^*(p)$ ,  $t^*(p)$  són solucions òptimes d'aquest problema. De la definició de la funció dual a (7.5), trobem que un subgradient  $h \in \mathbb{R}^L$  de  $V$  a  $p$  ve donat per l'expressió:

$$h_l = c_l - t_l$$

Val a dir que  $h_l$  pot ser interpretat com l'excés de capacitat en l'enllaç  $l$ , és a dir, la diferència entre la capacitat proporcionada pel sistema de comunicacions (cabal contractat) i el tràfic proposat per l'enrutament.

Podem interpretar la variable dual  $p_l$  com el preu per la capacitat de l'enllaç  $l$  (p.e. en € per unitat de flux). D'aquesta manera el problema té una interessant interpretació econòmica: estem intentant maximitzar la funció d'utilitat total on descomptarem el cost total dels flux utilitzat en cada enllaç (destinat a qualsevol destinació), que ve donat pel terme  $\sum_l p_l t_l$ , i afegint el guany obtingut de les

capacitats que són suportades, que ve donat pel terme  $\sum_i p_i c_i$ . El problema extern coordinarà aquestes operacions a través del vector de preus  $p$ . Així doncs, el mètode del subgradient aplicat en el problema extern ens servirà per actualitzar aquests preus per tal d'arribar a una coordinació òptima.

A l'aplicar el mètode del subgradient, començarem amb un punt inicial  $p^{(1)}$ . A cada pas d'iteració  $k=1,2,3\dots$ , calcularem la funció dual  $V(p^{(k)})$  i el subgradient  $h^{(k)}$ , i llavors actualitzarem la variable dual externa d'aquesta manera:

$$p^{(k+1)} = [p^{(k)} - \beta_k h^{(k)}]_+$$

on  $[\cdot]_+$  denota projecció a l'ortant no negatiu i  $\beta_k$  és la mida de pas (un nombre escalar positiu). Hi ha diverses formes d'escollir la mida de pas (veure apartat 3.3), en el nostre cas s'utilitzarà una mida de pas constant  $0 \leq \beta_k \leq 0.1$ .

## 7.6 Aplicació del mètode del subgradient pel problema intern

Anàlogament al problema extern i seguint els mateixos passos que en la resolució del problema per una sola destinació (apartat 6.5), definirem  $g \in \mathbb{R}^{N \times D}$  com un subgradient de la funció convexa no diferenciable  $Q$  a  $v$ , tal que:

$$Q(m) \geq Q(v) + g^T(m - v)$$

per qualsevol  $m$ . Donada una variable dual  $v \geq 0$ ,  $x^*(v)$ ,  $s^*(v)$ ,  $t^*(v)$ ,  $p^*(v)$  són solucions òptimes d'aquest problema. De la definició de la funció dual a l'expressió (7.10), trobem que un subgradient  $g \in \mathbb{R}^{N \times D}$  de  $Q$  a  $v$  ve donat per l'expressió:

$$g = Ax - s$$

Val a dir que  $g$  pot ser interpretat com la quantitat de flux que falta per assignar a cada node, tenint en compte que hi ha un cert tràfic  $x$  entrant i sortint, i un cert flux injectat  $s$ , de tal manera que, com s'ha de complir la llei de conservació de flux, la quantitat de flux sobrant per assignar s'anirà fent cada cop més petita. També podem interpretar  $g_n^{(d)}$  com el tràfic sobrant en el node  $n$  amb una certa destinació. El mètode del subgradient doncs, aplicat al problema dual intern, anirà assignant de manera iterativa part de la  $g$  restant a qualsevol dels fluxos entrants o sortints.

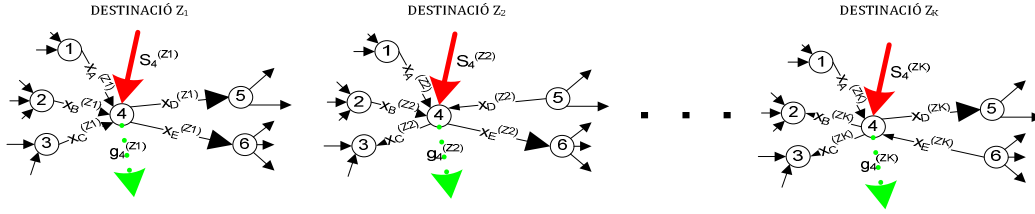


Figura 7.1 Representació gràfica del subgradient intern  $g$  per múltiples destinacions

Per exemple, el model de la figura 7.1, pel qual suposem  $k$  destinacions, haurà de complir:

$$g_4 = (g_4^{(z_1)} \quad g_4^{(z_2)} \quad \dots \quad g_4^{(z_k)})$$

$$\text{on } g_4^{(z_1)} = x_A^{(z_1)} + x_B^{(z_1)} + x_C^{(z_1)} - x_D^{(z_1)} - x_E^{(z_1)} - s_4^{(z_1)}$$

$$g_4^{(z_2)} = x_A^{(z_2)} + x_B^{(z_2)} - x_C^{(z_2)} - x_D^{(z_2)} + x_E^{(z_2)} - s_4^{(z_2)}$$

$$\vdots$$

$$g_4^{(z_k)} = x_A^{(z_k)} + x_B^{(z_k)} + x_C^{(z_k)} - x_D^{(z_k)} - x_E^{(z_k)} - s_4^{(z_k)}$$

L'aplicació del mètode del subgradient pel problema interior té una interessant analogia amb un circuit electrònic, ja que podem interpretar cada variable dual  $v_n^{(d)}$  com un potencial i per tant  $A^T v$  (d'ara endavant  $\Delta v \in \mathbb{R}^{L \times D}$ ) com la diferència de potencial; el flux injectat  $s_n^{(d)}$  com el corrent exterior injectat cap a un node, el flux  $x_j$  com el corrent a la branca  $j$ , i per tant la llei de conservació de flux equivaldria a la llei de Kirchoff. En el nostre cas, veurem més endavant que calcularem les  $x$  (el corrent) com una funció de la diferència de potencial  $\Delta v$ .

Reescrivim l'expressió que s'haurà de maximitzar introduint el terme quadràtic que serà necessari afegir per tal d'implementar correctament l'algorisme:

$$y(x, s, p, v) = \sum_d \left( \sum_{n, n \neq d} \log(s_n^{(d)}) - \epsilon(x^{(d)T} x^{(d)}) - \sum_l p_l x_l^{(d)} - v^{(d)T} (A x^{(d)} - s^{(d)}) \right) \quad (7.14)$$

A l'aplicar el mètode del subgradient al problema intern, començarem amb un punt inicial  $v^{(1)}$ . A cada pas d'iteració  $k=1,2,3,\dots$ , calcularem el subgradient  $g^{(k)}$ , i llavors actualitzarem la variable dual interna d'aquesta manera:

$$v^{(k+1)} = v^{(k)} - \alpha_k g^{(k)}$$

on  $[\cdot]_+$  denota projecció a l'ortant no negatiu i  $\alpha_k$  és la mida de pas (independent de la mida de pas del problema extern  $\beta_k$ ). Hi ha diverses formes d'escollir la mida de

pas (veure apartat 3.3), en el nostre cas s'utilitzarà una mida de pas constant  $0 \leq \alpha_k \leq 0.1$ . En funció de la nostra tria d'aquest paràmetre, l'algorisme convergirà amb més o menys rapidesa, ja que actualitzarem la variable dual  $v$  amb canvis més o menys bruscos. Si triem una mida de pas elevada,  $v$  pot tenir actualitzacions massa brusques i no convergir.

A part actualitzarem les variables  $x$  i  $s$ , obtenint-ne en cada iteració els valors que maximitzin la expressió (7.14):

$$x^* = \underset{x \geq 0}{\operatorname{argmax}} y(x, s, p, v)$$

$$s^* = \underset{s \geq 0}{\operatorname{argmax}} y(x, s, p, v)$$

Així doncs, a cada iteració calcularem:

$$x_l^* = \max\left(\frac{-p_l + \Delta v_l}{2\epsilon}, 0\right)$$

$$s_n^{(d)*} = \frac{1}{v_n^{(d)}} \quad \text{per } n \neq d$$

Per últim, cal recordar que per tal de respectar la llei de conservació de flux imposarem:

$$s_d^{(d)} = - \sum_{n, n \neq d} s_n^{(d)}$$

Val a dir que des del principi s'han imposat  $x$  positives perquè en el model de múltiples destinacions es representarà un enllaç bidireccional com a dos enllaços unidireccionals cadascun dels quals tindrà un tràfic major o igual a 0.

Integrant els dos mètodes del subgradient (un aplicat al problema extern i l'altre a l'intern), ens quedarà un algorisme amb la següent forma:

---

**Algorisme del doble mètode del subgradient per resoldre el problema conjunt d'enrutament i control de flux per múltiples destinacions**

---

**definició** vector de capacitats  $c$  i matriu node-incidència  $A$

**definició** constant del terme quadràtic  $\epsilon$  i mides de pas  $\alpha$  i  $\beta$

**inicialització variables:**  $x, s, p, v$

**repetir**

actualització  $g(p, \text{intern})$

**repetir** per cada destinació

actualització  $v, s, x(p, \text{intern})$

càlcul de  $T$  (acoblament entre els dos problemes)

actualització  $h$  i  $p(p, \text{extern})$

**fins que**  $\text{NumIteracions} = \text{Max\_Iteracions}$  o  $\text{norma}(Ax-s) < \text{Precisió}$

De la mateixa manera que en l'algorisme A emprat pel cas d'una sola destinació, no és necessari crear un bucle iteratiu que repeteixi només el problema intern, amb una única actualització del problema intern dins de cada iteració (del problema extern) és suficient perquè l'algorisme convergeixi al valor òptim.

A la figura 7.2 podem veure un esquema que descriu les fases de l'algorisme implementat:

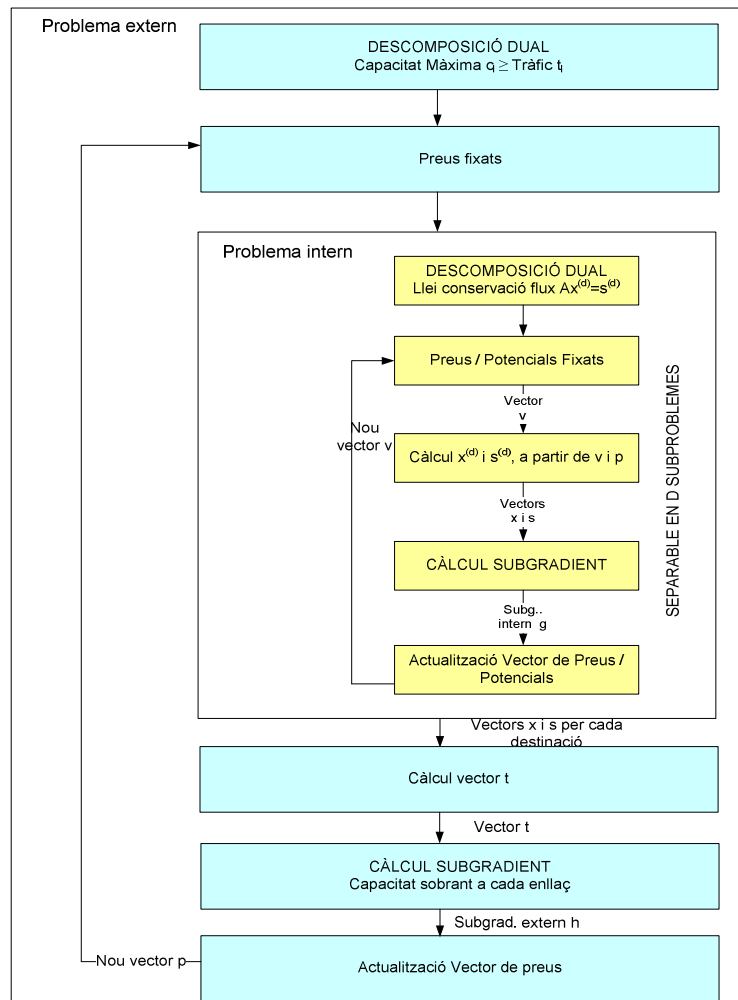


Figura 7.2 Diagrama de flux de l'algorisme emprat



## 7.7 Exemple numèric

A continuació es presenta un exemple numèric per tal d'il·lustrar el problema conjunt d'enrutament i control de flux per múltiples destinacions.

Posarem com a exemple la xarxa híbrida satèl·lit-terrestre de la figura 7.3, constituïda per una sèrie de terminals interconnectats entre ells mitjançant enllaços terrestres, inalámbrics i satel·litals. Considerem alguns dels enllaços simètrics i d'altres asimètrics (p.e. enllaços satel·litals, ADSL,...). Tanmateix, considerarem que cadascun dels nodes pot transmetre a qualsevol altre node, és a dir, que tots els nodes poden són origen i destinació de flux (model *multicommodity flow*). S'han pres valors realistes dels límits de capacitat de cada enllaç, compresos entre 256Kbps i 10Mbps.

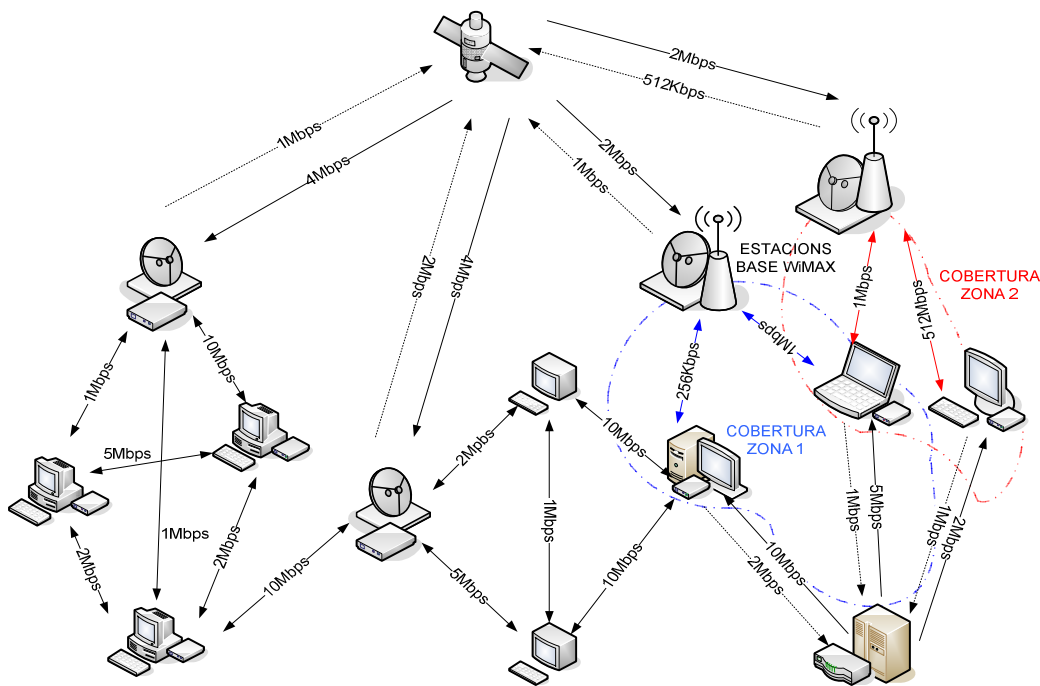


Figura 7.3. Model de xarxa per a l'exemple del problema conjunt per múltiples destinacions.

### 7.7.1 Model equivalent de topologia de xarxa

Es resoldrà aquest problema implementant, en Matlab, l'algorisme de l'apartat 7.6, que utilitza el mètode del subgradient tant pel problema extern (7.6) com pel problema intern (7.10), i que explota l'estructura separable per destinacions de la formulació del problema. Per tal de poder-ho fer, el primer pas serà transformar el model de la figura 1, de 14 nodes i 23 enllaços bidireccionals, en un model



$c=[8\ 2\ 8\ 4\ 4\ 2\ 4\ 1\ 2\ 2\ 20\ 20\ 4\ 4\ 4\ 2\ 2\ 10\ 10\ 20\ 20\ 4\ 4\ 20\ 20\ 10\ 10\ 2\ 2\ 20\ 20\ 0.5\ 0.5\ 4\ 20\ 2\ 2\ 2\ 10\ 2\ 2\ 1\ 1\ 2\ 4];$

A la figura 7.5 veiem els límits de capacitat assignats a cada enllaç, on el gruix de cada enllaç és proporcional a la capacitat assignada.

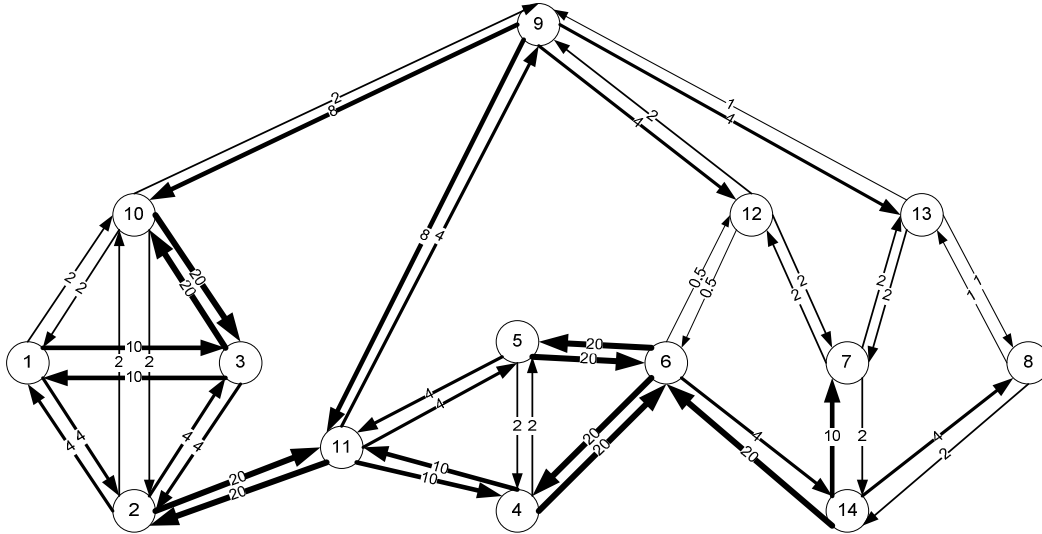


Figura 7.5. Model equivalent amb el límits de capacitat de cada enllaç

### 7.7.2 Resultats de la simulació

S'ha simulat l'algorisme amb una constant  $\varepsilon$  reduïda ( $\varepsilon=0.1$ ) per tal de minimitzar l'impacte del terme quadràtic en els resultats. Veiem a les taules 7.1 i 7.2 els valors òptims del tràfic  $x$  i el flux injectat  $s$  per les diferents destinacions, que defineixen l'enrutament i el control de flux òptim.

n	d = 1	d = 2	d = 3	d = 4	d = 5	d = 6	d = 7	d = 8	d = 9	d = 10	d = 11	d = 12	d = 13	d = 14
1	-7,9271	0,8914	1,755	0,4405	0,411	0,4077	0,149	0,1655	0,9847	1,3704	0,618	0,2004	0,145	0,3886
2	0,9589	-7,6292	0,944	0,6062	0,5523	0,5356	0,1614	0,1816	0,878	0,9053	1,0754	0,1964	0,1424	0,4916
3	2,0289	0,9207	-8,576	0,4479	0,4174	0,4145	0,1502	0,1668	1,063	1,5892	0,632	0,2031	0,1465	0,3958
4	0,4499	0,7786	0,4471	-9,4057	1,7529	1,6132	0,1946	0,226	0,9371	0,4402	1,1611	0,2001	0,1444	1,0604
5	0,4316	0,7235	0,429	1,2994	-8,3649	1,4318	0,1922	0,2228	0,8611	0,4226	1,0195	0,1967	0,143	0,9917
6	0,4012	0,6396	0,399	1,3613	1,7526	-9,3183	0,2121	0,2501	0,7432	0,3935	0,8355	0,2273	0,1538	1,9492
7	0,1635	0,1904	0,1636	0,1959	0,1982	0,1998	-5,1116	0,2684	0,496	0,1641	0,1935	0,5392	0,5089	1,8302
8	0,1531	0,1769	0,1528	0,1864	0,1922	0,1937	0,2234	-4,0354	0,3034	0,1521	0,1809	0,1641	0,3091	1,6472
9	0,2322	0,2881	0,2347	0,2512	0,2412	0,2429	0,1743	0,1312	-2,9877	0,2399	0,2931	0,2501	0,1694	0,2394
10	1,7024	0,8397	1,8193	0,4324	0,4039	0,4017	0,1605	0,1648	1,9825	-9,2704	0,5994	0,2225	0,1565	0,3847
11	0,6119	1,5063	0,6068	1,1351	0,9702	0,8667	0,1805	0,206	2,0533	0,5943	-9,8395	0,225	0,1569	0,7265
12	0,2084	0,2539	0,2091	0,2336	0,2315	0,234	0,503	0,1802	1,6639	0,2115	0,2591	-4,9266	0,2618	0,4767

13	0,2042	0,2469	0,2054	0,2221	0,2159	0,2179	0,6727	0,5504	1,5194	0,2084	0,2507	0,3189	-5,4538	0,6209
14	0,164	0,1917	0,1636	0,2053	0,2142	0,2164	0,2357	0,2863	0,1953	0,1628	0,1968	0,1706	0,1657	-2,5684

Taula 7.1. Solucions del flux injectat òptim  $s_n^{(d)}$ 

Enllaç	d=1	d=2	d=3	d=4	d=5	d=6	d=7	d=8	d=9	d=10	d=11	d=12	d=13	d=14
1	1,4292	0	0	0	0	0,2995	0	0,145	0	2	0	0,7996	0	3,0781
2	0,2944	0	0	0	0	2,849	0	2,4812	0,5086	0	0	0,0977	1,3545	0
3	0	0	0	0,914	0	0	0	0,604	0,0991	0	0,0499	0	0	0
4	0	0	0,1655	0	0,1716	0	1,0453	0	0	0,1964	0	0,1424	0	0
5	0	0,2265	1,0415	0	0	1,0879	0	0,8503	0	0,0826	0	4,6494	0,8354	0
6	0	0,2831	1,6934	0	0	0	0	1,0872	0	0	0	0,8347	0	0
7	0,1614	0	0	0	0	0	0,1816	0	1,5572	0	0	0	0	0,3476
8	0	0,1465	0	0	0	3,1463	0	0,4355	2,9653	0	0	0	2,4644	0
9	0	2,4801	0,5009	0	0	0,0835	1,3472	0	0	0	0	0,8993	0	0
10	0	0,5684	0,1445	0	0,0058	0	0	0	0	0	0,1668	0	0	0
11	1,0294	0	0	0,0826	0	0,0097	0	0	0	0,1756	0,5195	0	0	0,553
12	0	0,2646	0	0,0697	2,1157	0	0	0	0	0,2471	0	4,3062	0	2
13	0	3,0995	0	0,1176	0	1,6158	0	0	0,3294	0	0	0,1348	0	0
14	0,226	0	0	0	0,9027	0	0	0,0416	0	0	0	0	0	0,1758
15	0,5014	0	0	0,535	0	0,2468	0	0,0698	2,0067	0	0	2,8727	0	3,4922
16	0	1,0563	2	0	0,3557	0	0	0,1551	0	1,5497	0	0	0,3352	0
17	0	0,143	0	0	0,2228	0	0	0	0,7432	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0,1762	0,4713	0	0	0,5051	0	0,2173	0	0,07	1,8332	0
19	0	1,1003	2,8529	0	0	2,3116	0	0	3,6729	0	0	0,2273	0	2,5651
20	0	0	0,3658	0	0	0,1538	0	0	0,2501	0	0	0,2528	0	0,3144
21	0,8073	0	0,256	0	0	0	0,0888	0	0,146	0	0	0,0923	0	0
22	0,0175	0	0,4287	0	0	0	0,1982	0	0	0,3078	0	0	0,5036	0
23	0	0	0,9016	0	0	1,3464	0	2,7319	0	1,0333	0,2684	0	0	0
24	0	0	0	0	0	0	0,3034	0	0	0	0	0,1521	0,2158	0
25	0	0,2422	0	0	0	0,0627	0,6349	0	0	0	0,1922	0	0	0,8158
26	0	0	1,0023	0	0	0	1,3882	0	0	0,1641	0	0	0,3875	0
27	0	1	0	3,0354	0	0,701	0	1,6193	0	0,4244	0	0,243	0	0
28	0,4612	0	0,0057	0	0	0	0	0	0,2265	0	0,2938	0	0,0982	0
29	0,143	0	0,9343	0	0	0	0	0,683	0	0	0	0,2971	0,1743	0
30	0	0	0	0	0,0735	0	0,0576	0	2,522	0	0	0	0	0,383
31	0	0,1565	2	0	2,7483	0	0	0,4863	0,7403	0	2	0	0,1887	0
32	0	2,3869	0,4711	0	0	0,0672	1,3164	0	0	0	0	0,884	0	0
33	0	0,5495	0,1605	0	0	0	0	0	0	0	0,1648	0	0	0
34	2,4351	0	0	0,225	0	0,1569	0	0	0	0,1732	0,68	0	0	0,7119
35	0	0,4211	0	0,0681	3,3193	0	1,5858	0	0	0,6156	2,4993	0	0	0
36	0	1,3642	0	0	0	1,113	0	0	0,1805	0	0	0	0	0
37	0,206	0	0	0,4884	0	0,8525	3,0049	0	0	0	0	0	0,2769	0
38	0,1284	0	0	0,0122	0	0	0,08	0	0,3944	0	0	0	0,2315	0
39	0,199	0	0	0	0,0346	0	0,5	0	0	0	1,4217	0	0	0,5493
40	0	0,3694	0,1076	0	0,0726	0	0	0,5577	0	1,2138	0	0	3,2909	0
41	0	0	0,3494	0	0,0602	0	0	0	0	0	0,144	0	0,3071	0
42	0	0	0,2159	0	0,656	0	0	0	0	0,4338	0	0	0	0
43	0	0,3189	0	0,6209	1,6125	0	0,5504	0	0	0	0	0	0,1953	0
44	0	0	0	0	0	0	0	0,1628	0,2302	0	0	0,2602	0	0
45	0	0,0662	0,6821	0	0	0,0271	0,2412	0	0	1,0472	0	0	1,2525	0
46	0	0	1,7102	0	0	0,1706	0,572	0	0	0,1657	0	0	0,2863	0

Taula 7.2 Solucions de l'enrutament òptim  $x_i^{(d)}$ 

Com es pot veure en la taula 7.1, la diagonal de la matriu  $S$  obtinguda correspon al flux que rep cada node  $n$  (és la suma del flux originat en els altres nodes  $i$  que té com a destinació el node  $n$ ). Per aquest motiu, prenen valors negatius (tenen el sentit contrari al flux injectat).

A la figura 7.6 podem veure gràficament quins nodes injecten més flux cap a certes destinacions (a més flux injectat, vermell més fort) i quins nodes reben més flux (a més flux rebut, blau marí més fort).

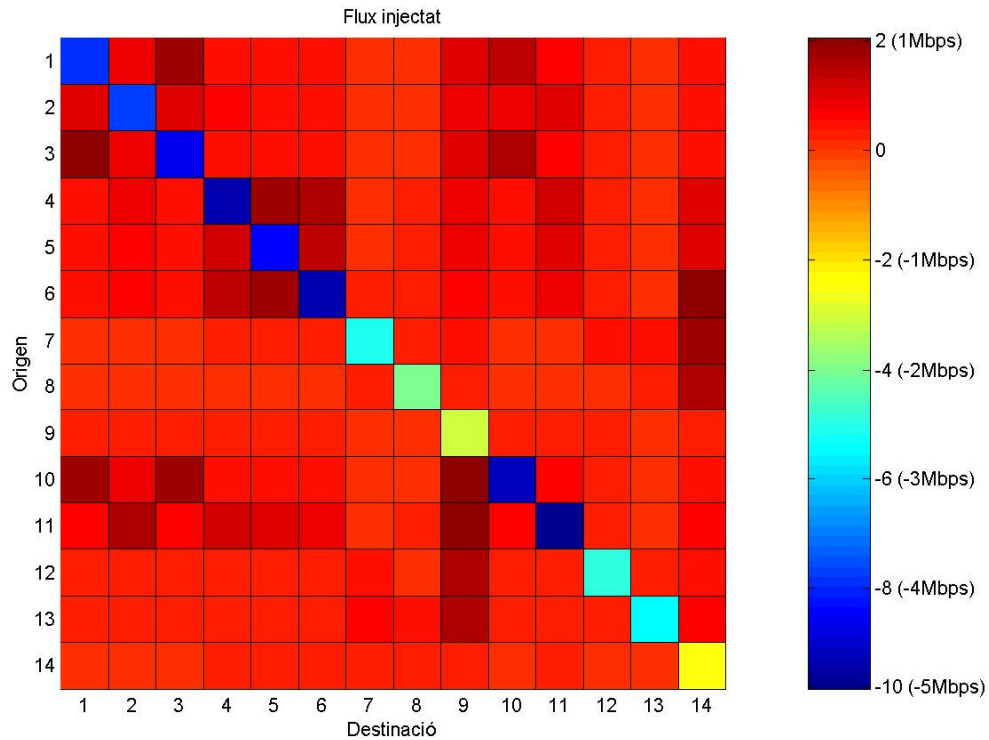


Figura 7.6 Representació gràfica de la solució òptima  $s^*$

Pel que fa a les solucions òptimes de  $x^*$ , veiem que l'enrutament optimitzat comporta que molts enllaços no siguin utilitzats per transmetre informació a certes destinacions. Per tant molts components  $x_l^{(d)}$  tenen valor òptim zero.

La transmissió de flux cap a una certa destinació només implicarà la utilització d'entre 12 i 20 enllaços unidireccionals (d'un total de 46).

A la figura 7.7 veiem de manera gràfica quins enllaços no són utilitzats per transmetre informació a una certa destinació (color blanc) i quins són més o menys utilitzats (a gris més fosc, més tràfic assignat).

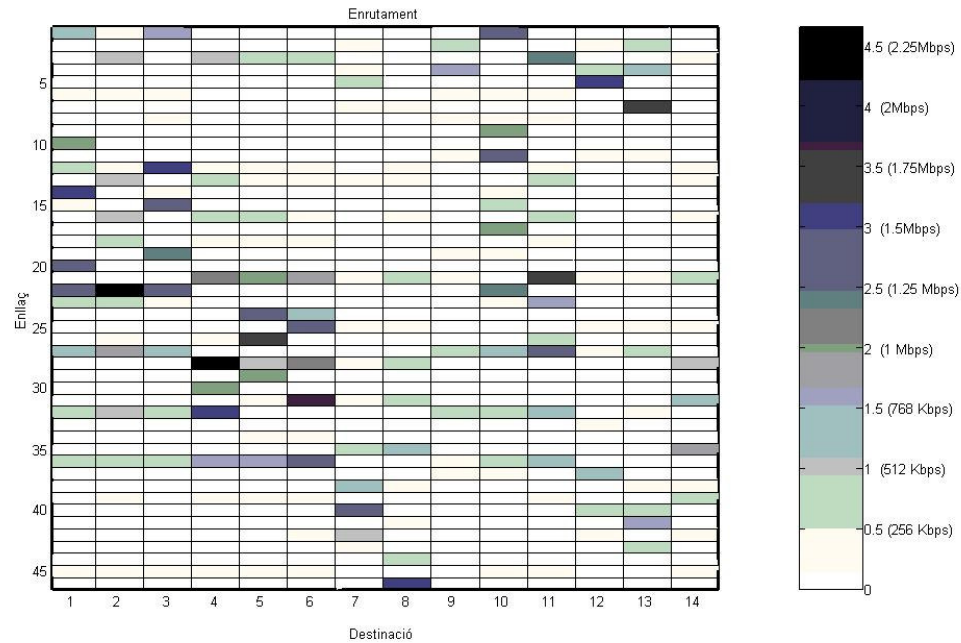
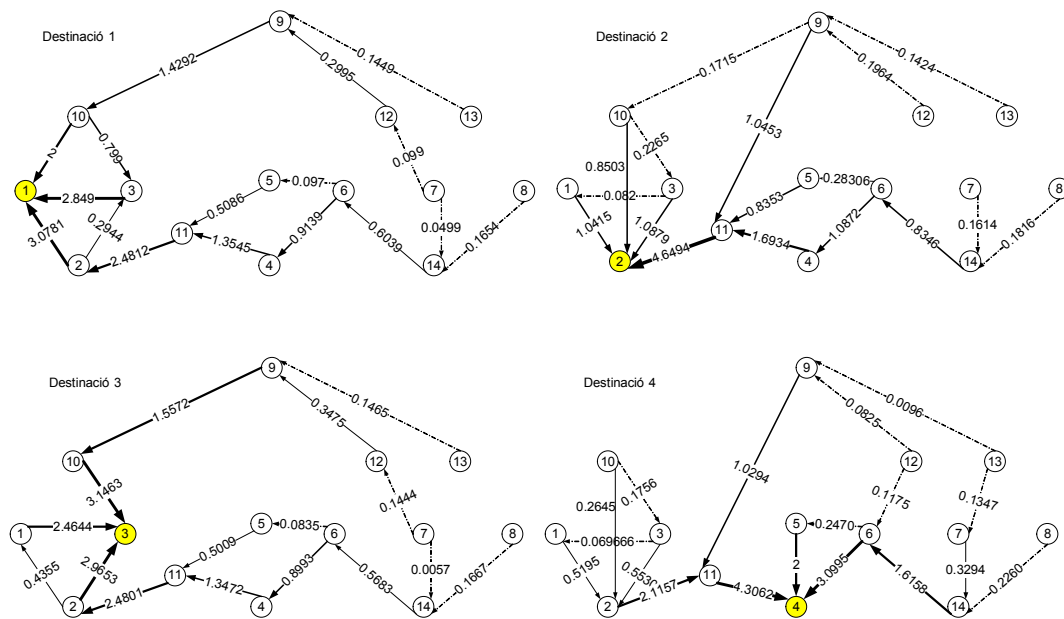


Figura 7.7 Representació gràfica de la solució òptima  $x^*$

A la figura 7.8 veiem una manera més intuïtiva de representar la solució òptima  $x^*$ , l'enrutament òptim per cada destinació. En aquesta representació el gruix de l'enllaç mostra el factor d'utilització d'aquest. Veiem com alguns nodes enruten predominantment pels enllaços satel·litals i d'altres pels enllaços terrestres.



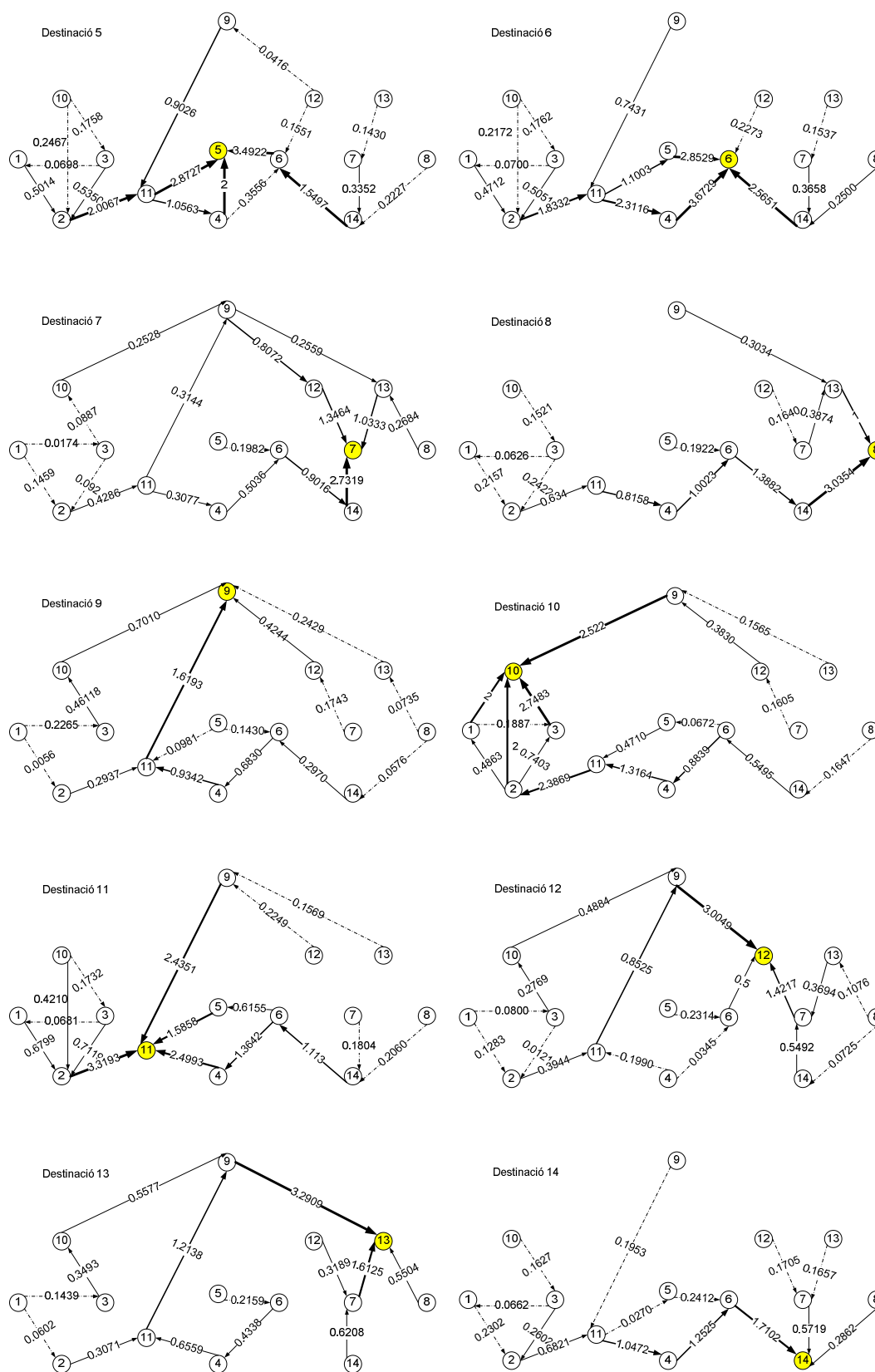


Figura 7.8 Enrutament òptim per les diferents destinacions

Si sobreposem tots els gràfics de la figura 7.8 obtenim el vector  $t$ , és a dir el tràfic total a cada enllaç (per totes les destinacions), que podem veure a la figura 7.9 (on el gruix de l'enllaç representa és proporcional a la quantitat de tràfic i els enllaços en blau estan al màxim de la seva capacitat).

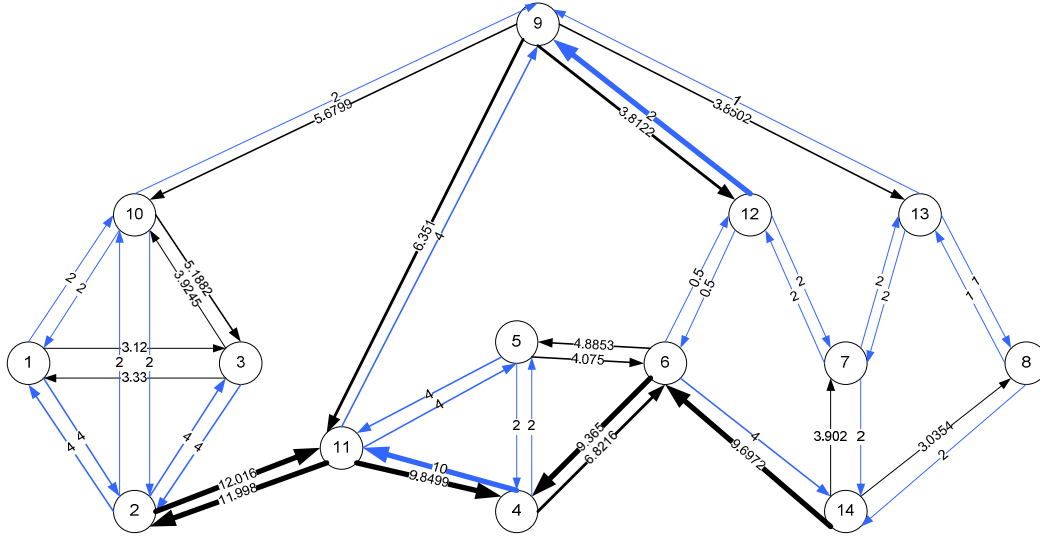


Figura 7.9 Representació del valor òptim de  $t^*$

La solució numèrica corresponent al vector  $t^*$  es mostra a la taula 7.3.

Enllaç l	$t_l$	Enllaç l	$t_l$	Enllaç l	$t_l$	Enllaç l	$t_l$	Enllaç l	$t_l$
1	5.6799	11	3.9245	21	12.016	31	6.8216	41	2
2	2	12	5.1882	22	11.998	32	9.365	42	2
3	6.351	13	4	23	4	33	0.5	43	1
4	4	14	4	24	4	34	0.5	44	1
5	3.8122	15	4	25	4.075	35	4	45	2
6	2	16	4	26	4.8863	36	9.6972	46	3.0354
7	3.8502	17	2	27	10	37	2		
8	1	18	2	28	9.8449	38	2		
9	2	19	3.1211	29	2	39	2		
10	2	20	3.3381	30	2	40	3.902		

Taula 7.3 Valors òptims de  $t^*$

A la taula 7.4 veiem el vector de preus  $p^*$  òptim, on veiem que anàlogament al cas per una sola destinació, els enllaços que no estan utilitzats a la seva màxima capacitat (poca demanda) tindran preus nuls mentre que els enllaços amb un factor d'utilització  $t_l/c_l$  igual a 1 tindran un preu  $p_l$  major que zero. Els enllaços que tenen un multiplicador de Lagrange  $p_l$  igual a zero (i que per tant tindran capacitat disponible) constitueixen gairebé un 40% del total d'enllaços.



Enllaç l	$p_l$	Enllaç l	$p_l$	Enllaç l	$p_l$	Enllaç l	$p_l$	Enllaç l	$p_l$
1	0	11	0	21	0	31	0	41	1.1639
2	4.0290	12	0	22	0	32	0	42	1.7583
3	0	13	0.8345	23	0.7135	33	4.1740	43	1.7068
4	3.0885	14	0.5062	24	0.4063	34	4.3536	44	3.0351
5	0	15	0.4931	25	0	35	4.2785	45	3.4361
6	3.9134	16	0.8417	26	0	36	0	46	0
7	0	17	0.7909	27	0.3811	37	1.7037		
8	5.8539	18	0.9346	28	0	38	1.5854		
9	0.1874	19	0	29	0.3696	39	4.1287		
10	0.3297	20	0	30	0.1705	40	0		

Taula 7.4 Valors òptims de  $p^*$ 

A part d'estar directament relacionat amb la utilització òptima de cada enllaç, podem establir una certa relació entre el vector  $p^*$  i la capacitat màxima de cada enllaç. En els enllaços que tenen una capacitat força baixa en comparació amb la mitja (valors menors de 2Mbps, p.e. enllaços 33, 34, 39, 44, 45), el preu de la unitat de tràfic serà major ja que aquesta serà més escassa.

També veiem que els enllaços satel·litals de pujada, al tenir també una capacitat força reduïda i ser estratègicament molt útils (ja que connecten quasi directament parts que no estan gaire ben comunicades a través dels enllaços terrestres) tenen un preu força elevat. Qualsevol node que vulgui utilitzar l'enllaç de pujada de satèl·lit per tant haurà de pagar-ne un preu ben alt, mentre que els enllaços de baixada satel·litals, al tenir una capacitat considerable tindran un cost de transmissió d'informació 0, en les condicions plantejades en aquest exemple.

Per últim cal remarcar que s'ha obtingut un valor  $f_{pri}^* = f_{dual}^*$  (igual a -213.93), i per tant es comprova que hi ha dualitat forta, amb la qual cosa optimitzem l'enrutament i el control de flux al trobar el vector de preus  $p^*$  òptim (al resoldre el problema extern mitjançant el mètode de descomposició dual i el mètode del subgradient).

### 7.7.3 Anàlisi de les prestacions dels algorismes

Hem simulat l'algorisme per diferents valors de la mida de pas del subgradient exterior ( $\beta=0.02, 0.01, 0.005$ ). El resultat obtingut és satisfactori ja que l'algorisme convergeix a valors òptims de  $p^*$  i  $v^*$  i per tant, a l'haver-hi dualitat forta, convergeix també als valors òptims de  $x^*, s^*$  i  $t^*$ .

A les figures 7.10 i 7.11 podem veure l'evolució de la funció d'utilitat i el gap d'optimalitat principals, mentre que a les figures 7.12 i 7.13 observem l'evolució de la funció objectiu i el gap d'optimalitat duals, respectivament.

El fet de simular l'algorisme per diferents mides de pas ens permet veure en quina magnitud varia la rapidesa de convergència al variar aquest paràmetre. Naturalment pel cas  $\beta=0.02$ , l'algorisme convergirà més ràpidament al valor òptim ja que estem modificant el subgradient més bruscament que en els altres dos casos.

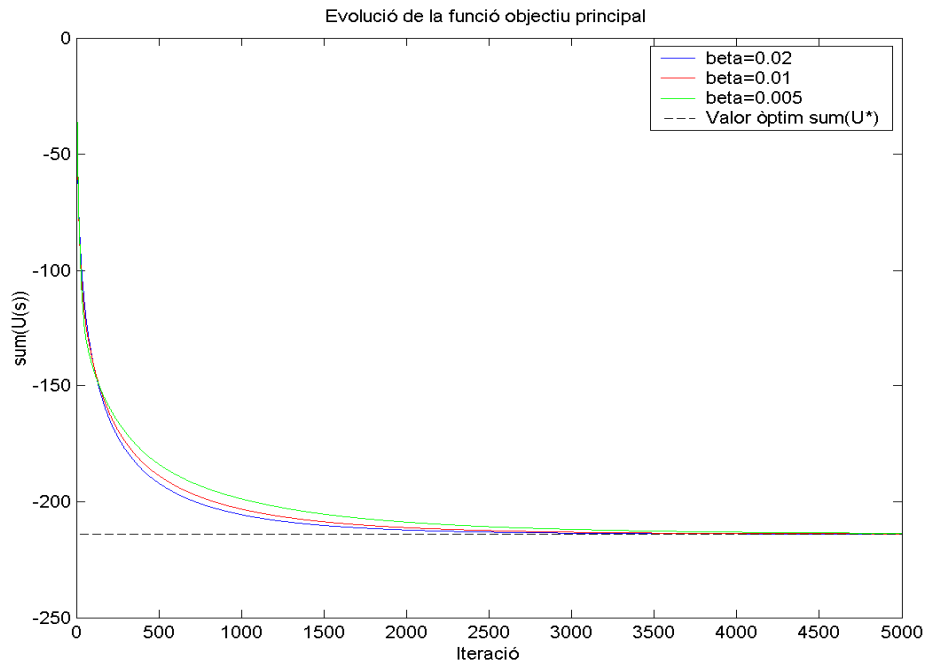


Figura 7.10. Evolució de la utilitat  $\text{sum}(U(s))$  amb el mètode del subgradient per diferents mides de pas

A la figura 7.11 veiem com amb el mateix nombre d'iteracions ( $1.5 \times 10^4$ ) el gap d'optimalitat principal amb una mida de pas  $\beta=0.02$  és de  $10^{-10}$ . Amb una mida de pas inferior la precisió amb el mateix nombre d'iteracions és inferior (l'error és major). Per exemple per  $\beta=0.01$  la diferència d'optimalitat principal és de  $10^{-6}$  i per  $\beta=0.005$  és de  $10^{-4}$  aproximadament. Val a dir que en el cas més ràpid  $\beta=0.02$ , aprop de les  $1.5 \times 10^4$  iteracions comença el que s'anomena convergència quadràtica (la reducció del gap sembla que es redueixi quadràticament).

Donats els valors de d'aquest exemple numèric, si s'executa el mateix algorisme per valors de mida de pas superiors (p.e.  $\beta=0.05$ ), l'algorisme no funciona correctament, ja que el subgradient s'actualitza massa bruscament i no consegueix convergir als valors òptims.

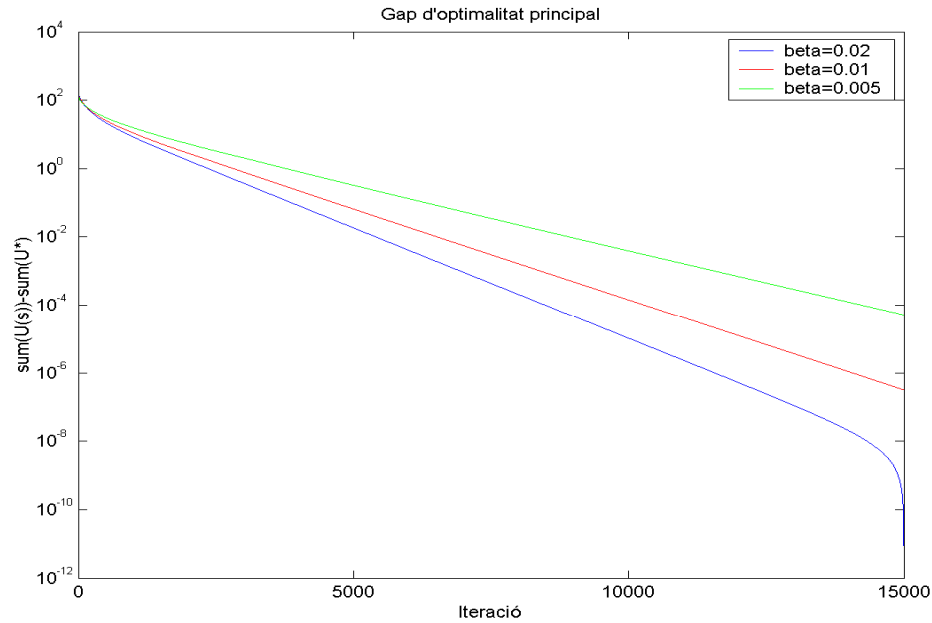


Figura 7.11. Gap d'optimalitat principal per diferents mides de pas

A la figura 7.12, l'algorisme amb  $\beta=0.02$  també convergeix més ràpidament que els altres casos, però durant unes iteracions l'algorisme amb  $\beta=0.005$  està més aprop del valor òptim. Això només pot succeir en les primeres iteracions (cal remarcar que la representació és en escala logarítmica), en algun moment que l'algorisme més ràpid ha actualitzat els vector de preus més bruscament (degut a la mida de pas major) i s'ha desviat més que els casos que tenen una convergència més suau.

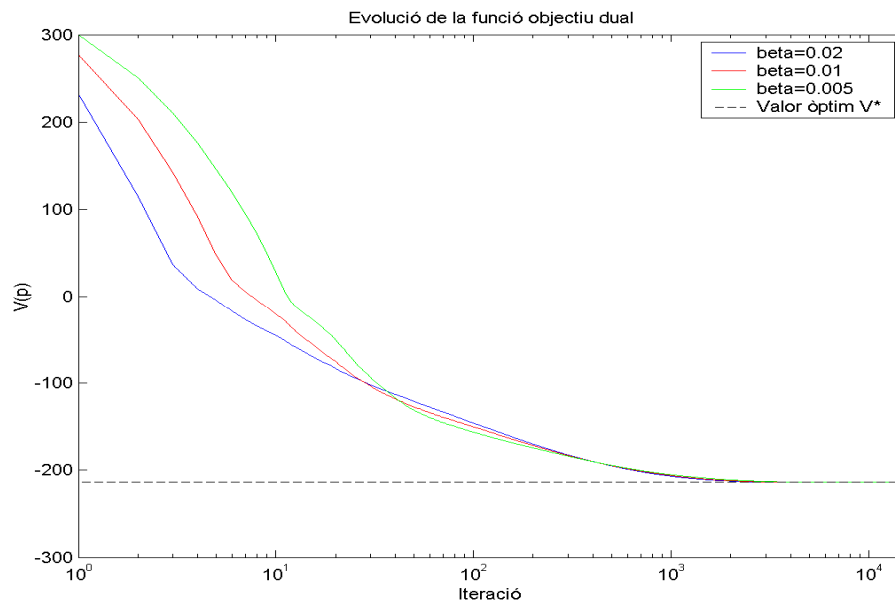


Figura 7.12. Evolució de la funció dual  $V(p)$  per diferents mides de pas

A la figura 7.13 es pot veure més clarament que en el cas de la funció dual també convergeix més ràpid l'algorisme amb  $\beta=0.02$ . Les xifres de precisió són quasi bé idèntiques al gap d'optimalitat principal, tal i com es pot veure en la figura 7.10, aconseguint valors de precisió per aquesta mida de pas que estan entorn de  $10^{-10}$  a les  $1.5 \times 10^4$  iteracions.

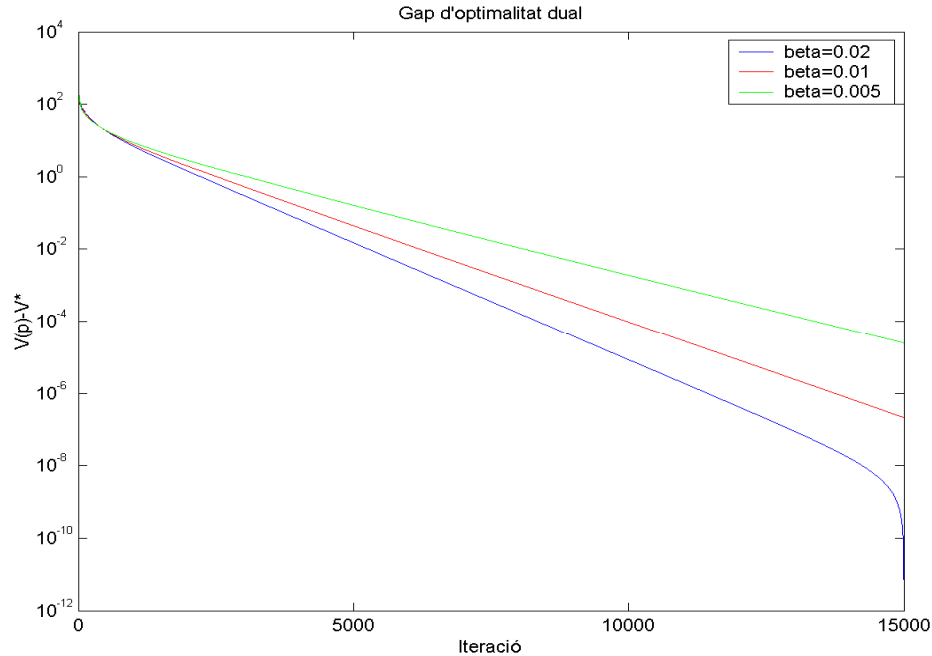


Figura 7.13. Gap d'optimalitat dual per diferents mides de pas

Un altre paràmetre del qual val la pena observar-ne l'evolució és la norma de cadascun dels subgradients.

A la figura 7.14 es pot observar la norma del subgradient  $g$ , que veiem com es redueix fins a zero, ja que en l'optimització del problema intern es té com a objectiu repartir el flux sobrant a cada node (respectant la llei de conservació de flux  $Ax=s$ ). Així doncs, a partir d'aquesta gràfica, podem dir que en  $1.5 \times 10^4$  iteracions, la llei de conservació de flux es compleix amb una precisió aproximada de  $10^{-6}$  pel cas  $\beta=0.02$ ,  $10^{-5}$  pel cas  $\beta=0.01$  i  $10^{-4}$  pel cas  $\beta=0.005$ . Es pot observar també que a partir de  $10^3$  iteracions la reducció de la norma de  $g$  és lineal.

En canvi, tal i com es pot observar en la figura 7.15, la norma del subgradient  $h$ , corresponent al problema extern, no tendeix a 0, tendeix a un cert valor major que zero. Això és lògic ja que en el problema extern el subgradient va repartint la capacitat sobrant en cada enllaç als diferents fluxos però mai aconsegueix que tots els enllaços estiguin al màxim de la seva capacitat. Només en aquest cas s'aconseguiria que la norma del subgradient  $h$  ( $\|c-t\|$ ) convergís a zero.

Adicionalment, a les figures 7.14 i 7.15 també observem que l'algorisme amb una mida de pas  $\beta$  superior és el que obté una precisió més elevada amb el mateix nombre d'iteracions.

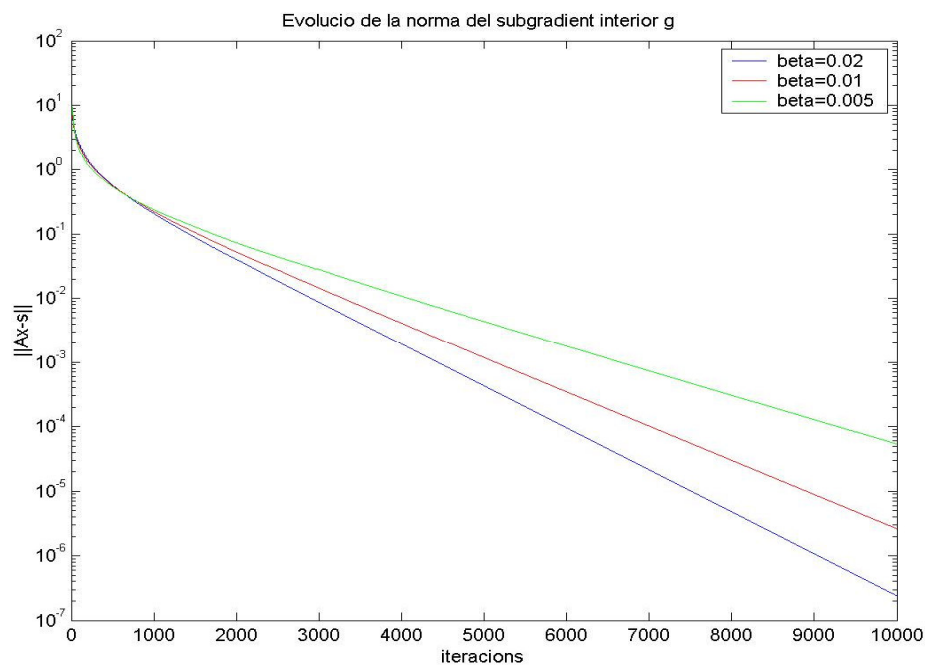


Figura 7.14 Evolució de la norma del subgradient intern g

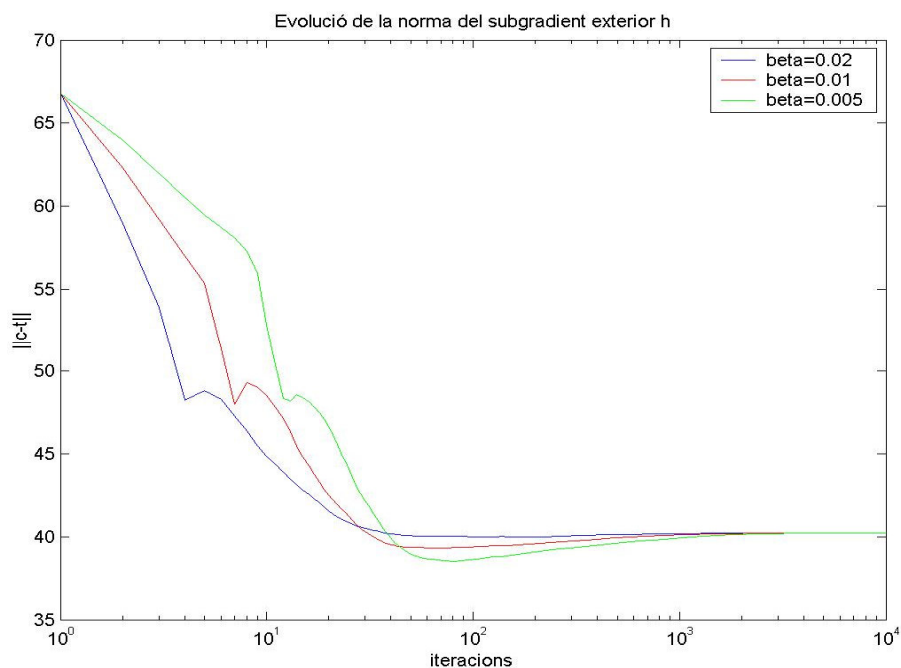


Figura 7.15 Evolució de la norma del subgradient extern h

A la figura 7.16 s'ha representat el factor d'utilització dels enllaços (amb una mida de pas  $\beta=0.02$ ). És interessant observar com en el primer centenar d'iteracions el factor d'utilització creix des de zero (es va assignant la capacitat de cada enllaç) i en alguns casos arriba a estar molt per sobre del màxim permès (250%), convergint després cap al màxim permès ( $t_i/c_i=1$ ).

Aquests casos corresponen als enllaços amb una capacitat molt baixa (p.e. els enllaços 33 i 34, que tenen una capacitat màxima de 256Kbps). Això succeeix perquè estem utilitzant una mida de pas força alta i anem actualitzant el vector de preus bruscament de manera que a les iteracions inicials el preu  $p_i$  de l'enllaç creix molt. En un cert moment, el preu està molt elevat i als nodes no els hi surt a compte transmetre per aquests enllaços. Llavors es rectifica el procés: els preus baixen lleugerament i el factor d'utilització acaba tendint a 1.

Amb una mida de pas  $\beta$  inferior, aquesta sobreutilització d'alguns enllaços no seria tan accentuada ja que es faria la actualització del vector de preus de manera més suau.

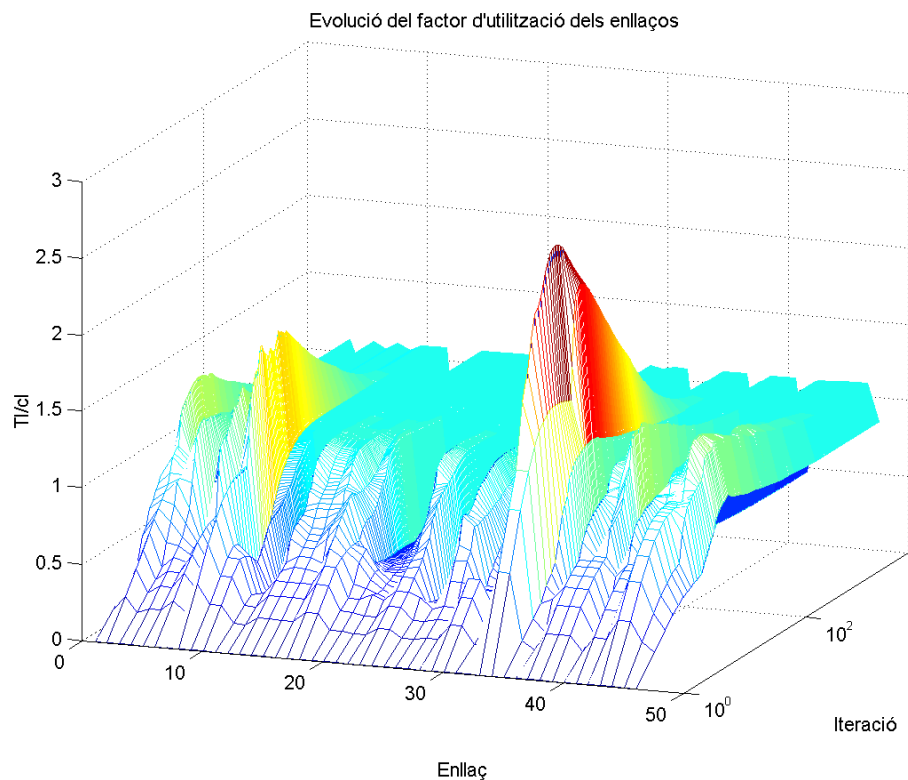


Figura 7.16 Evolució del factor d'utilització dels enllaços amb  $\beta=0.02$

Per últim és interessant veure, a la figura 7.17, l'evolució del vector de preus  $p$  (ampliat en les iteracions inicials, abans que convergeixi, i representat en escala logarítmica). Tal i com s'ha explicat en l'apartat 7.7.2, el mètode del subgradient va actualitzant el vector de preus seguint la llei de l'oferta i la demanda. Els enllaços amb una  $p > 0$  corresponen a nodes que utilitzen la seva capacitat al 100%. Addicionalment els enllaços amb una  $p$  elevada acostumen a tenir una capacitat força limitada per la qual cosa la seva capacitat de tràfic disponible s'exhaureix ràpidament i el seu preu comença a créixer amb poques iteracions.

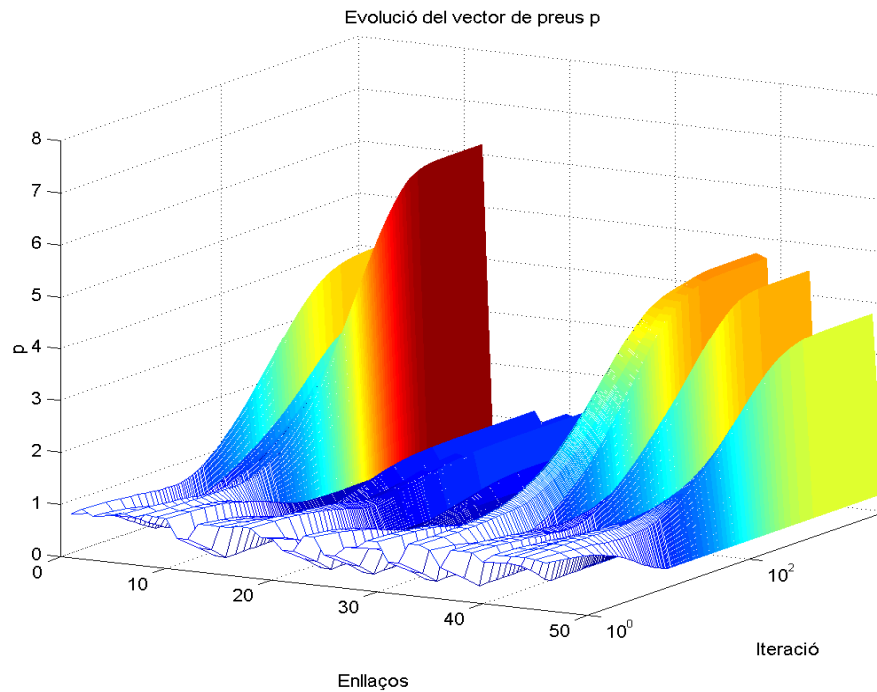


Figura 7.17 Evolució del vector de preus





## 8.-CONCLUSIONS

En aquest document s'han estudiat, de manera exhaustiva, algorismes d'optimització d'enrutament i control de flux en xarxes híbrides satèl·lit-terrestre. S'han posat a prova alguns mètodes per estudiar l'enrutament i el control de flux de manera separada i conjunta, plantejant quatre problemes d'optimització convexa: optimització del control de flux (màxima utilitat de xarxa), optimització de l'enrutament (mínim retard) i optimització conjunta de l'enrutament i control de flux per models d'una sola destinació i múltiples destinacions, tractats en els capítols 4,5,6 i 7 respectivament.

Més concretament, en el capítol 4, s'ha estudiat el problema individual de control de flux, en el que l'enrutament ve fixat i simplement hem d'optimitzar el flux injectat a la xarxa (a partir d'una funció d'utilitat logarítmica). S'han aplicat dos algorismes ja existents per resoldre aquest problema: el mètode del gradient i el mètode de la barrera logarítmica.

S'ha pogut comprovar que els algorismes utilitzats convergeixen satisfactòriament i que el mètode de la barrera logarítmica convergeix amb més rapidesa que el mètode del gradient. No obstant, el mètode de la barrera logarítmica requereix aplicar el mètode de Newton i aquest no és implementable de manera distribuïda, a diferència del mètode del gradient, que no requereix d'un coordinador central i permet que cada node pugui calcular el flux injectat òptim de manera local. Addicionalment, a cada iteració, el mètode del gradient realitza un nombre d'operacions molt menor que el mètode de la barrera logarítmica, per la qual cosa requereix menys capacitat computacional.

En el capítol 5 hem estudiat el problema d'enrutament amb mínim retard, on el flux injectat ve fixat i només hem d'optimitzar l'enrutament minimitzant una funció de cost que depèn del vector de tràfic existent a cada enllaç (i l'optimització de la qual suposa obtenir un retard mínim).

Mitjançant aquest problema hem pogut comprovar que el resultat d'aplicar el mètode del subgradient, per tal de minimitzar el tràfic sobrant a cada node, és satisfactori. L'algorisme convergeix satisfactòriament i compleix la llei de conservació de flux amb una precisió molt elevada (en un nombre relativament curt d'iteracions). A més, s'ha pogut establir una interessant analogia entre el model de xarxa utilitzat i un circuit elèctric, on el vector de preus calculat pel mètode del subgradient es pot interpretar com el potencial (voltatge) a cada node, i el tràfic que circula per un enllaç com el corrent d'una branca del circuit elèctric.

En el capítol 6 hem estudiat el problema conjunt d'enrutament i control de flux per una sola destinació, proposant l'aplicació de dos mètodes per resoldre la part interna del problema: el mètode del subgradient i el mètode de Newton amb inici no factible.

La conclusió que podem extreure de la simulació de l'exemple numèric de l'apartat 6.8 és que els dos mètodes proposats convergeixen satisfactòriament, proporcionant els valors òptims  $x^*$  i  $s^*$  que ens permetran optimitzar de manera conjunta l'enrutament i el control de flux en models de xarxa d'una sola destinació (*single commodity flow model*). A l'haver-hi dualitat forta, trobant els valors òptims dels multiplicadors de Lagrange  $p^*$  i  $v^*$ , s'han aconseguit uns valors òptims de  $x^*$ ,  $s^*$  i  $t^*$ .

D'acord amb les figures 6.7 a 6.10, és fàcilment visible que el mètode de Newton amb inici no factible té una major rapidesa de convergència que el mètode del subgradient. No obstant, el mètode de Newton amb inici no factible té un gran inconvenient: requereix que cada node conegui (la segona derivada de) la funció d'utilitat dels altres nodes, la qual cosa el fa poc pràctic de cara a implementar-lo a la realitat. En aquest sentit, el fet d'aplicar el mètode de descomposició dual en el problema intern de l'algorisme A (juntament amb el mètode del subgradient), canvia l'estructura del problema de tal manera que cada node només ha de tenir la informació dels nodes pròxims, per tal de poder decidir quin tràfic enrutarà per cada enllaç i saber quin flux maximitzarà la seva funció d'utilitat, respectant la llei de conservació de flux.

D'aquesta manera el problema conjunt d'enrutament i control de flux per una sola destinació pot ser resolt de manera distribuïda, i és per tant fàcilment implementable, amb un algorisme que combini el mètode descomposició dual i el mètode del subgradient.

En conclusió, pel problema conjunt d'enrutament i control de flux per una sola destinació existirà un compromís entre implementabilitat i eficiència (considerant els dos algorismes proposats).

En el capítol 7 d'aquest document s'ha estudiat el problema conjunt d'enrutament i control de flux per múltiples destinacions presentant un algorisme que utilitza el mètode del subgradient per resoldre paral·lelament el problema intern i extern. A partir de la formulació realitzada a l'aplicar el mètode de descomposició dual hem vist que el problema és fàcilment implementable en un algorisme si explotem la seva estructura separable en destinacions.

Mitjançant l'exemple numèric de l'apartat 7.7, hem pogut veure que l'algorisme convergeix satisfactòriament, proporcionant els valors òptims  $x^*$  i  $s^*$  per cada destinació. Novament, s'ha pogut veure que a l'optimitzar la funció objectiu dual

(formulada aplicant el mètode de descomposició dual) en el problema extern i intern, també s'optimitza la funció d'utilitat principal del problema. Per tant, hem pogut comprovar que a l'haver-hi dualitat forta, pels valors òptims dels multiplicadors de Lagrange  $p^*$  i  $v^*$ , s'han aconseguit els valors òptims de  $x^*$ ,  $s^*$  i  $t^*$ , per cada destinació.

S'ha estudiat la rapidesa de convergència de l'algorisme per diverses mides de pas, comprovant com influeix la tria d'aquest paràmetre en les prestacions de l'algorisme. Una mida de pas suficientment elevat ens actualitzarà els vectors de preus més bruscament i convergirà més ràpid.

S'ha analitzat exhaustivament el mecanisme d'assignació de preus que proporciona el mètode del subgradient, mitjançant el qual els nodes decideixen quant flux poden enrutar per cada enllaç sortint, en funció d'un preu assignat que depèn de la demanda de tots els nodes i de la capacitat disponible a cada enllaç (problema extern). També s'ha estudiat el resultat d'aplicar el mètode del subgradient al problema de repartiment de tràfic sobrant a cada node (problema intern). En aquest sentit hem vist com el mètode del subgradient anava reduint, de manera iterativa la capacitat disponible d'injecció de flux de cada node tot respectant la llei de conservació de flux, amb uns nivells de precisió molt elevats.

També s'ha vist que el mètode del subgradient permet imposar que es pugui transmetre en un cert sentit de cada enllaç, i és per aquest motiu que aquest mètode es pot utilitzar en el cas de múltiples destinacions (cosa que no succeeix amb el mètode de Newton). Per tant una possible extensió d'aquest treball seria estudiar si és viable realitzar alguna modificació per tal d'emprar el mètode de Newton en la resolució del problema conjunt per múltiples destinacions.

Una altra possible extensió d'aquest estudi seria incloure a la formulació del problema principal, l'optimització de variables de la capa de comunicacions, com per exemple la capacitat dels enllaços, de manera que aquesta fos dinàmica (problema formulat a [11]) tot aplicant el mateix algorisme. També seria interessant incloure dins la formulació del problema l'optimització de la qualitat de servei (QoS), que és ignorada en aquest estudi i pot ser molt important en les xarxes híbrides satèl·lit-terrestre.

En conclusió, s'ha construït un algorisme capaç d'assignar la capacitat sobrant de cada enllaç (mètode del subgradient en el problema extern) i assignar el flux sortint disponible en cada node (mètode del subgradient en el problema intern), que pot ser implementat de manera distribuïda, és a dir, sense necessitat d'un coordinador central.



## Referències

- [1] L. Xiao, M. Johansson, and S. Boyd, "Simultaneous Routing and Resource Allocation via Dual Decomposition," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 52, no. 7, pp. 1136-1144, 2004.
- [2] M. Johansson and L. Xiao, "Scheduling, Routing and Power Allocation for Fairness in Wireless Networks," in *Proceedings 59th Vehicular Technology Conference (VTC)*, Milan, Italy, 2004.
- [3] L. Rosati and G. Reali, "Jointly Optimal Routing and Resource Allocation in Hybrid Satellite/Terrestrial Networks", in *Proceedings International Workshop on Satellite and Space Communications (IWSSC)*, Leganés, Spain, Sep. 2006
- [4] M. Chiang, S. Low, A. R. Calderbank, and J. C. Doyle, "Layering As Optimization Decomposition: Frameworks and Examples," in *IEEE Information Theory Workshop (ITW)*, Punta Del Este, Uruguay, 13 2006.
- [5] M. Chiang, S. Low, A. R. Calderbank, and J. C. Doyle, "Layering As Optimization Decomposition: Current Status and Open Issues," in *Conference on Information Sciences and Systems (CISS)*, Princeton, NJ , USA, 22 2006.
- [6] D. Palomar and M. Chiang, "A Tutorial on Decomposition Methods for Network Utility Maximization," *IEEE Journal on Selected Areas in Communications: Special Issue on Nonlinear Optimization of Communication Systems*, Vol. 24, No. 8, pp. 1439-1451, Aug. 2006.
- [7] S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, Stanford University EE 364 Course Reader, 2001.
- [8] D. P. Bertsekas, *Nonlinear Programming*. Athena Scientific, second edition, 1999.
- [9] T. E. Stern, "A class of decentralized routing algorithms using relaxation," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-25, pp. 1092-1102, Oct. 1977.
- [10] S. Boyd, L. Xiao, and A. Mutapcic. *Subgradient methods - EE392o class notes*, Stanford University, 2003.
- [11] S. H. Low and D. E. Lapsley, "Optimization flow control-i: basic algorithm and convergence," *IEEE/ACM Transactions on Networking*, vol. 7, no. 6, Dec. 1999.
- [12] D. P. Bertsekas and R. G. Gallager, *Data Networks*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1992.
- [13] L. Kleinrock, *Communication Nets: Stochastic Message Flow and Delay*. New York: McGraw-Hill, 1964.

- [14] A. Ouorou, P. Mahey, and J.-Ph. Vial, "A survey of algorithms for convex multicommodity flow problems," *Manage. Sci.*, vol. 46, pp. 126–147, Jan. 2000.
- [15] P.Soldati, "Distributed Cross-Layer Optimized Flow Control for STDMA Wireless Networks", Master's thesis, KTH, 2004.
- [16] N.Z. Shor, *Minimization Methods for Non-Differentiable Functions*, ser. Springer Series in Computational Mathematics. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1985.







Les xarxes híbrides satèl·lit-terrestre ofereixen connectivitat a zones remotes i aïllades, permetent resoldre nombrosos problemes de comunicacions. No obstant, presenten diversos reptes, ja que realitzen la comunicació per un canal mòbil terrestre i un canal satèl·lit contigu. Un d'aquests reptes és trobar mecanismes per realitzar eficientment l'enrutament i el control de flux, de manera conjunta.

L'objectiu d'aquest projecte és simular i estudiar algorismes existents que resolguin aquests problemes, així com proposar-ne de nous, mitjançant diverses tècniques d'optimització convexa.

A partir de les simulacions realitzades en aquest estudi, s'han analitzat àmpliament els diversos problemes d'enrutament i control de flux, i s'han avaluat els resultats obtinguts i les prestacions dels algorismes emprats.

En concret, s'han implementat de manera satisfactòria algorismes basats en el mètode de descomposició dual, el mètode del subgradient, el mètode de Newton i el mètode de la barrera logarítmica, entre d'altres, per tal de resoldre els problemes d'enrutament i control de flux plantejats.

---

Las redes híbridas satélite-terrestre ofrecen conectividad a zonas remotas y aisladas, permitiendo resolver numerosos problemas de comunicaciones. Sin embargo, presentan varios desafíos, ya que realizan la comunicación por un canal móvil terrestre y un canal satélite contiguo. Uno de estos desafíos es encontrar mecanismos para realizar eficientemente el enrutamiento y el control de flujo, de forma conjunta.

El objetivo de este proyecto es simular y estudiar algoritmos existentes que resuelvan estos problemas y, en la medida de lo posible, proponer algún algoritmo nuevo, mediante técnicas de optimización convexa.

A partir de las simulaciones realizadas en este estudio, se han analizado exhaustivamente los distintos problemas de enrutamiento y control de flujo, y se han evaluado los resultados obtenidos y las prestaciones de los algoritmos sometidos a prueba.

En concreto, se han implementado satisfactoriamente algoritmos basados en el método de descomposición dual, el método del subgradiente, el método de Newton y el método de la barrera logarítmica, entre otros, para resolver los problemas de enrutamiento y control de flujo planteados.

---

Hybrid satellite-terrestrial networks provide connectivity to remote and isolated areas, solving many communication problems. However, they present several challenges, given that the communication is done through a terrestrial mobile channel and a contiguous satellite channel with very different characteristics. One of these challenges consists in finding a mechanism to efficiently and jointly perform routing and flow control.

The aim of this project is to simulate and study existing algorithms that solve these problems, and if possible, propose a new algorithm, by means of convex optimization techniques.

From the performed simulations, routing and flow control problems have been widely studied in depth, evaluating both the obtained results and the performance of the implemented algorithms.

In order to solve these routing and flow control problems, algorithms based in dual decomposition method, subgradient method, Newton method and logarithmic barrier method have been successfully implemented.