Ferrer Puigdellívol, Miquel; Bibiloni, Lluís, dir.; Pujol i Pujol, Romà, dir. Estratègies i errors en la resolució de problemes d'extrems per mètodes elementals. 2010. 119 p.

UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA

DEPARTAMENT DE DIDÀCTICA DE LA MATEMÀTICA I DE LES CIÈNCIES EXPERIMENTALS

ESTRATÈGIES I ERRORS EN LA RESOLUCIÓ DE PROBLEMES D'EXTREMS PER MÈTODES ELEMENTALS

Màster de recerca en didàctica de les matemàtiques i de les ciències experimentals

Autor

Miquel Ferrer Puigdellívol

Tutors

Lluís Bibiloni i Romà Pujol

10 de setembre de 2010

UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA

DEPARTAMENT DE DIDÀCTICA DE LA MATEMÀTICA I DE LES CIÈNCIES EXPERIMENTALS

ESTRATÈGIES I ERRORS EN LA RESOLUCIÓ DE PROBLEMES D'EXTREMS PER MÈTODES ELEMENTALS

Màster de recerca en didàctica de les matemàtiques i de les ciències experimentals

Autor

Miquel Ferrer Puigdellívol

Tutors

Lluís Bibiloni i Romà Pujol

10 de setembre de 2010

AGRAÏMENTS

En primer lloc, vull agrair especialment l'ajuda, el suport i les orientacions que he rebut per part dels meus tutors de recerca, el Lluís Bibiloni i el Romà Pujol, ja que gràcies a ells aquest treball ha estat una realitat.

En segon lloc, m'agradaria agrair la col·laboració dels professors del Departament de Matemàtiques de l'Institut Guillem de Berguedà i de l'Institut de l'Arboç, perquè han fet possible la recollida de dades d'aquesta investigació.

En tercer lloc, agraeixo les indicacions i els comentaris dels professors del Màster de Recerca en Didàctica de les Matemàtiques de la UAB, ja que en els diversos mòduls ens han facilitat les eines suficients per poder tirar endavant el treball de recerca.

Finalment, voldria donar les gràcies a tots els alumnes que han participat en la resolució del qüestionari, ja que sense la seva col·laboració no s'haurien pogut obtenir els resultats de la investigació. Tanmateix, agraeixo el suport moral i incondicional de la meva família i de totes les persones que m'han ajudat en algun moment durant l'elaboració d'aquest treball de recerca.

ÍNDEX DE CONTINGUTS

PRESENTACIÓ

En aquest capítol es presenta breument quin és el contingut del treball d'investigació, es descriuen quines són les aportacions de la recerca en termes de resultats i es descriu l'estructura global de la memòria.

RESUM I APORTACIONS DEL TREBALL

Aquesta investigació s'engloba dins del camp de la resolució de problemes en educació matemàtica i se centra en estudiar de quina manera els alumnes de primer curs de Batxillerat de dos instituts públics de Catalunya resolen alguns problemes d'extrems per mètodes elementals, és a dir, sense utilitzar les tècniques del càlcul diferencial. Tanmateix, s'estudia el punt de partida d'aquests alumnes davant dels problemes de màxims i mínims i es detecten algunes estratègies i diversos errors que cometen a l'hora de resoldre'ls. L'instrument de recollida de dades és un qüestionari individual que combina problemes d'extrems de resposta tancada amb altres problemes de resposta oberta. Es realitza una anàlisi inductiva – deductiva de les dades, la qual permet determinar que una part important dels participants en la recerca confonen les relacions entre l'àrea i el volum d'algunes figures geomètriques. A més, la majoria dels alumnes d'aquesta investigació resolen els problemes d'extrems plantejats fent ús de l'estratègia de *conjecturar*. Finalment, es detecta que diverses respostes dels participants presenten errors causats per l'ús de teoremes i/o de definicions matemàtiques equivocades. Aquest és el cas d'una aplicació errònia del *teorema de Pitàgores*, la confusió del *perímetre* d'un quadrat amb la longitud del seu costat i la determinació incorrecta de l'*altura* de diversos paral·lelograms.

ESTRUCTURA DE LA MEMÒRIA

Aquest treball de recerca està distribuït en cinc parts clarament diferenciades. La primera conté el plantejament de la investigació, és a dir, contextualitza el problema, presenta el propòsit de la recerca i les limitacions de l'estudi. A més, es realitza la justificació de la investigació, s'introdueixen els objectius de recerca, es mostren alguns antecedents històrics en la resolució de problemes de màxims i mínims, es presenta la importància de la resolució d'aquesta tipologia de problemes en el context de l'educació secundària i, finalment, s'exposa la motivació personal de l'autor sobre aquesta temàtica. Per acabar, es formalitza la qüestió d'investigació i es precisen els objectius de la recerca.

La segona part consisteix en el marc teòric de la investigació. S'introdueixen algunes línies de recerca actuals en la resolució de problemes, s'adopta una definició de *problema* en educació matemàtica, es presenten diverses diferències entre un exercici i un problema, i es mostra la complexitat de resoldre problemes matemàtics. A més, s'exposen alguns referents històrics en el camp de la resolució de problemes i es mostren les diverses fases que consideren els autors en aquest procés. Tanmateix, es realitza una revisió d'estratègies generals que s'usen per resoldre problemes matemàtics i es dedica una especial atenció al cas dels problemes d'extrems. Finalment, es presenta la visió de diversos autors sobre alguns errors que cometen els alumnes durant el procés de resolució de problemes.

La tercera part explica la metodologia utilitzada per elaborar aquest treball d'investigació. Es realitza l'aproximació metodològica de la recerca, es presenta la població estudiada i el seu context. A més, s'exposa el disseny de l'instrument d'investigació i s'explica el procés que s'ha seguit per realitzar la recollida de dades.

La quarta part consisteix en l'anàlisi de les dades de l'instrument i l'obtenció de resultats. Es planteja quin procés d'anàlisi s'ha seguit en aquesta recerca i es realitza la discussió i exposició dels resultats de la investigació. L'anàlisi es divideix en tres parts: els problemes de resposta tancada, l'estudi d'estratègies de resolució de dos problemes de resposta oberta i la detecció d'alguns errors en la resolució d'aquests problemes.

Finalment, la cinquena part mostra les conclusions de l'estudi i la prospectiva de la investigació.

1. PLANTEJAMENT DE LA INVESTIGACIÓ

En aquest capítol s'enuncia el problema de recerca i el context a què fa referència, és a dir, es realitza una introducció del problema i es descriu el propòsit d'aquesta investigació. Tanmateix, es justifica la recerca, es presenten alguns antecedents històrics dels problemes d'extrems, es fa referència a la importància que té la investigació en el seu context i es menciona la meva motivació personal a l'hora de realitzar aquest treball. Finalment, es formalitza la pregunta d'investigació i els objectius de recerca.

1.1. EL PROBLEMA EN EL SEU CONTEXT

En aquest apartat s'introdueix el problema d'investigació que es treballa en l'estudi, es defineix el propòsit de la recerca i se centren les limitacions que presenta.

1.1.1. INTRODUCCIÓ: CENTRE D'INTERÈS I CONTEXT

Aquest treball de recerca estudia estratègies i errors que comenten els estudiants a l'hora de resoldre un problema d'extrems, o de màxims i mínims, per mètodes elementals, és a dir, sense fer ús de les tècniques del càlcul diferencial. L'estudi se centra en alumnes de primer de batxillerat, de dos instituts públics de Catalunya, els quals no coneixen les regles del càlcul amb derivades. L'instrument de recollida de dades de la investigació és un qüestionari basat, essencialment, en sis problemes d'extrems.

1.1.2. PROPÒSIT DE LA INVESTIGACIÓ

El problema d'investigació consisteix en determinar com resolen un problema de màxims i mínims els estudiants que no estan familiaritzats amb les regles del càlcul diferencial. Per concretar aquest problema de recerca es defineixen uns objectius d'investigació, els quals pretenen esbrinar quina és la percepció dels estudiants de la relació entre àrees i perímetres i entre àrees i volums. A més, s'identifiquen algunes estratègies que segueixen els estudiants en la resolució dels problemes d'extrems i es detecten alguns errors que cometen.

1.1.3. LIMITACIONS DE L'ESTUDI

Els objectius que es plantegen en aquesta recerca són bastant ambiciosos i és difícil abordar-los de forma completament exhaustiva, ja que la investigació presenta unes limitacions temporals importants. Així, la recerca es realitza en un nivell diagnòstic i, per aquest motiu, s'utilitza el qüestionari com a instrument de recollida de dades i es descarta la realització d'entrevistes personals als alumnes. Aquest fet limita la profunditat amb què es podran estudiar les diverses estratègies i els errors comesos pels alumnes durant la resolució dels problemes d'extrems de l'instrument.

1.2. JUSTIFICACIÓ DE LA INVESTIGACIÓ

Aquest apartat pretén justificar la recerca que es presenta en aquesta memòria. Per fer-ho es comenta breument la rellevància que té la història de les matemàtiques en la docència i es mencionen alguns antecedents històrics que han tractat els problemes d'extrems. A més, s'explica la importància que té aquesta recerca en el context del currículum de l'educació secundària i es comenta la meva motivació personal per investigar en aquest camp.

1.2.1. ANTECEDENTS HISTÒRICS

La història de la matemàtica és un element important i convé tenir-lo en compte a la didàctica. Són molts els autors que destaquen la seva rellevància i el que es fa a continuació és comentar la visió d'alguns.

PÓLYA, G. (1962, citat a NOLLA, R., 2001) es fa la següent pregunta: *fins a quin punt i de quina manera el currículum de les matemàtiques a l'ensenyament secundari és paral·lel a l'evolució històrica de les matemàtiques?*

D'altra banda, DE GUZMÁN, M. (1992) afirma que *la història ens proporciona una guia magnífica per emmarcar els diferents temes, els problemes a partir dels quals han sorgit els conceptes importants de la matèria i ens dóna idees per entendre la raó que ha portat l'ésser humà a ocupar-se'n amb interès.*

Finalment, és interessant citar la visió de NOLLA, R. (2001), el qual afirma que *els conceptes i les idees matemàtiques que es tracten a l'educació secundària es presenten als alumnes d'una forma tancada i s'oblida que han sorgit després d'un llarg procés de gestació*. *Al llarg de la història, aquestes idees s'han generat per diferents tipus de problemes, pràctics i teòrics, els quals pertanyen a la pròpia matemàtica o a altres disciplines. El coneixement d'aquests problemes i l'estudi de l'evolució del seu tractament i dels nous problemes que han produït, proporciona els fonaments per a la comprensió de les idees i els conceptes que d'ells han resultat*.

A més a més, també es pot comentar que en la pràctica docent i com a conseqüència de la formació universitària rebuda pels professors, la matemàtica sovint arriba als alumnes com un producte dogmàtic i tancat. Per això, l'estudi de la història de les matemàtiques pot ser una font d'inspiració en l'orientació de l'activitat docent.

Els problemes d'extrems en el currículum de l'educació secundària es presenten després d'estudiar el tema de les derivades, com a simple aplicació d'aquestes (apartat 1.2.2). En el seu desenvolupament històric, el càlcul diferencial va ser influenciat pels problemes particulars de màxims i mínims, però aquests ja existien molts segles abans de l'aparició del concepte de derivada d'una funció.

El fet de tenir una idea general de l'origen i l'evolució d'aquests problemes ens pot ajudar a entendre el perquè d'algunes dificultats de comprensió que tenen els estudiants a l'hora d'afrontar aquesta tipologia de problemes. Per això, **l'annex 1** de la memòria conté un resum de l'evolució històrica dels problemes d'extrems i s'aprofita l'ocasió per presentar alguns matemàtics importants, els quals han treballat, també, aquests problemes.

1.2.2. IMPORTÀNCIA EN EL SEU CONTEXT

Actualment, hi ha moltes investigacions que destaquen la importància de la resolució de problemes a l'educació matemàtica i que promouen que aquesta activitat constitueixi el centre de l'ensenyament i l'aprenentatge de les matemàtiques. **L'annex 2** de la memòria presenta una breu anàlisi d'alguns d'aquests estudis i es comenten les institucions que els recolzen.

La presència de la resolució de problemes en el currículum de l'Educació Secundària Obligatòria (ESO)

El currículum que està en vigor per a l'ESO a Catalunya és el que estableix el Decret 143/2007, de 26 de juny, pel qual s'estableix l'ordenació dels ensenyaments de l'ESO i està publicat en el Diari Oficial de la Generalitat de Catalunya (DOGC) núm. 4915.

Aquest currículum està estructurat en termes de vuit competències bàsiques, en què la quarta és la competència matemàtica, i cal destacar la importància que té la resolució de problemes dins del currículum, ja que segons diu el DOGC:

> *La finalitat de l'ESO és proporcionar a tots els nois i les noies una educació que els permeti (...) adquirir les habilitats (...) relatives a la resolució de problemes de la vida quotidiana.*

(DOGC núm. 4915 de 29.6.2007, pàg. 21871)

A més a més, s'observa que en aquest currículum de matemàtiques es planteja la resolució de problemes quan es defineix la competència matemàtica i diu:

> *...cal proporcionar en totes les classes de matemàtiques oportunitats per tal que l'alumnat aprengui a raonar matemàticament, proposant activitats d'aprenentatge*

on la resolució de problemes, entesa en un sentit ampli, esdevingui el nucli de l'ensenyament.

(DOGC núm. 4915 de 29.6.2007, pàg. 21927)

D'altra banda, cal comentar que a l'apartat d'estructuració dels continguts presenta la resolució de problemes com un dels processos que cal desenvolupar quan es treballen els continguts de tots els blocs del currículum i en tots els cursos:

La resolució de problemes, com a nucli del treball de matemàtiques, ja que facilita la construcció de nous coneixements, la transferència de conceptes, el desenvolupament d'estratègies de resolució i l'anàlisi del procés de resolució. Cal tenir en compte que els problemes, a més d'aplicar el coneixement adquirit en altres contextos, han de possibilitar la construcció del coneixement matemàtic i mostrar-ne la seva utilitat.

(DOGC núm. 4915 de 29.6.2007, pàg. 21928)

I, també, en l'apartat de consideracions per al desenvolupament del currículum de matemàtiques es destaca la importància de les *Tecnologies de la Informació i la Comunicació* (TIC) com a eina per ajudar en el procés de resolució de problemes:

...les TIC faciliten la interacció de l'alumnat amb objectes matemàtics (...) i ajuden a la resolució de problemes...

(DOGC núm. 4915 de 29.6.2007, pàg. 21929)

Finalment, tal com argumenta PUIG, L. (2008) quan analitza la situació de la resolució de problemes en la Llei Orgànica 2/2006, de 3 de maig, d'Educació (LOE):

...la resolució de problemes no només està mencionada com un element de la competència matemàtica, sinó que es col·loca de nou en un lloc central [del currículum].

(PUIG, L., 2008, pàg.8)

La presència de la resolució de problemes en el currículum del Batxillerat

Actualment, el currículum que està en vigor per al Batxillerat a Catalunya és el que estableix el Decret 142/2008, de 15 de juliol, pel qual s'estableix l'ordenació dels ensenyaments del Batxillerat i està publicat en el DOGC núm. 5183.

De manera anàloga al currículum de l'ESO, el paper de la resolució de problemes a les matemàtiques del Batxillerat és important, ja que s'entén:

...La resolució de problemes com una activitat de construcció de coneixement i no sols com la resolució rutinària d'exercicis, pot i deu conduir a l'establiment de

> *patrons generals que posteriorment siguin útils. A més, com a estil d'aprenentatge servirà a l'alumnat en els seus estudis superiors, en el món laboral...*
>
> (DOGC núm. 5183 de 29.7.2008, pàg. 59275)

En definitiva, tant a primer com a segon curs de Batxillerat, el currículum de matemàtiques centra la seva atenció en la resolució de problemes, ja que presenta:

> *La resolució de problemes, entesa com un estil d'ensenyament i aprenentatge que facilita la construcció de coneixement matemàtic a partir de l'experimentació, la cerca de patrons i regularitats; i la formulació de resultats conjecturals.*
>
> (DOGC núm. 5183 de 29.7.2008, pàg. 59282)

La situació de la resolució de problemes d'extrems en l'actual currículum de l'educació secundària

El primer que cal comentar és que els problemes d'extrems no figuren de forma explícita com un dels continguts que s'han de desenvolupar en l'actual currículum de matemàtiques de l'ESO. Tot i així, en els quatre cursos, a l'apartat de *Canvi i relacions* es fa referència a la interpretació i construcció de gràfics (usant les TIC si és necessari) i, en el cas concret de tercer curs, s'esmenta l'*anàlisi de funcions d'una variable i el seu creixement / decreixement*. Per aquest motiu, es pot introduir el concepte de màxim i mínim d'una funció de manera senzilla i es pot relacionar amb la resolució de problemes bàsics on intervinguin gràfiques de funcions.

D'altra banda, s'observa que els problemes d'extrems es troben explicitats en el currículum de segon curs de Batxillerat. Aquests problemes figuren en l'apartat d'*Anàlisi* i en el bloc de *l'aplicació de l'estudi local i global d'una funció a situacions geomètriques, científiques i tecnològiques*. Figuren com a continguts l'*estudi de funcions: domini i recorregut, signe, punts de tall amb els eixos, simetries, límits a l'infinit, asímptotes, intervals de creixement i decreixement, <u>màxims i mínims relatius</u>, <u>màxims i mínims absoluts</u>, concavitat i convexitat, punts d'inflexió. Representacions gràfiques. Aplicació a situacions geomètriques, científiques i tecnològiques. <u>Problemes d'optimització</u>*.

Tanmateix, cal dir que el cinquè criteri d'avaluació per a segon curs de Batxillerat fa referència explícita als problemes de màxims i mínims i diu:

> *Modelitzar i resoldre problemes de la vida real lligats a la derivació. Mostrar destresa en el plantejament i resolució de problemes lligats a la vida real en què es facin servir els conceptes lligats a la derivació, en particular problemes d'optimització, i interpretar els resultats que s'obtinguin.*
>
> (DOGC núm. 5183 de 29.7.2008, pàg. 59288)

1.2.3. MOTIVACIÓ PERSONAL

La resolució de problemes és, des del meu punt de vista, un tema essencial en l'ensenyament i l'aprenentatge de les matemàtiques. Tanmateix, l'actual currículum de matemàtiques de l'educació secundària situa la resolució de problemes en un eix central que convé treballar amb l'alumnat (apartat 1.2.2). Per això, tinc un especial interès en estudiar els mecanismes pels quals els alumnes de secundària treballen la resolució de problemes. A més, els problemes de màxims i mínims formen part d'una tipologia de problemes àmpliament tractada al llarg de la història (apartat 1.2.1).

Per tots aquests motius, considero que investigar de quina manera els estudiants de secundària, que no coneixen les regles del càlcul diferencial, resolen aquesta tipologia de problemes és un element important que em motiva per introduir-me en el món de la recerca en didàctica de les matemàtiques i és un punt de partida interessant per començar a fer investigació en aquest camp.

1.3. CONCRECIÓ DEL PROBLEMA: OBJECTIUS I QÜESTIONS D'INVESTIGACIÓ

La **pregunta d'investigació** que es planteja en aquesta recerca és: *caracteritzar com resolen un problema d'extrems els estudiants no familiaritzats amb el càlcul diferencial*.

Aquesta pregunta es precisa en els tres objectius de recerca següents:

- **Objectiu 1 (O.1)**: Esbrinar quina és la percepció dels estudiants de la relació entre àrees i perímetres, i entre àrees i volums. Aquest objectiu es concretarà en veure si pels estudiants[1]:
  - **O.1.1.** La igualtat d'àrea entre dues figures implica una igualtat de perímetre.
  - **O.1.2.** La igualtat de volum entre dues figures implica una igualtat d'àrea.
  - **O.1.3.** La igualtat d'àrea entre dues figures implica una igualtat de volum.
- **Objectiu 2 (O.2)**: Identificar algunes estratègies que segueixen els estudiants per resoldre un problema de màxims i mínims sense estar familiaritzats amb les regles del càlcul diferencial.

---

[1] En aquesta investigació **no** s'estudia la percepció que tenen els alumnes de la implicació entre la igualtat de perímetres i la igualtat d'àrees, ja que aquesta recerca està àmpliament explicada en el llibre de DICKSON, L. *et al*. (1991) i els resultats de l'estudi es comenten a l'apartat 2.5.1 del marc teòric d'aquest treball.

- **Objectiu 3 (O.3)**: Detectar alguns errors dels estudiants a l'hora de resoldre un problema d'extrems sense estar familiaritzats amb el càlcul diferencial.

Per tant, la pregunta d'investigació es concreta en tres objectius de recerca, el primer dels quals pretén determinar la impressió i el punt de partida de l'alumnat davant d'una tipologia de problemes amb què no està habituat a treballar, perquè encara no ha practicat el càlcul amb derivades. Tot i així, molts problemes senzills d'extrems es poden resoldre de forma intuïtiva per mètodes elementals. Per aquest motiu, el segon objectiu pretén diagnosticar quines estratègies de resolució coneix i utilitza la població estudiada en aquesta recerca. A més, és interessant observar alguns errors comesos durant el procés de resolució dels problemes de màxims i mínims per tal d'extreure conclusions més sòlides, fet que es concreta en el tercer objectiu d'investigació.

Finalment, cal tenir present que la definició que s'adopta de *problema* per a la realització d'aquesta investigació és la que figura a l'apartat 2.2 de la memòria; la definició d'*estratègia de resolució d'un problema* es presenta a l'apartat 2.4 del treball i, per últim, el que s'entendrà per *error dels estudiants en la resolució d'un problema matemàtic* es defineix a l'apartat 2.5 de la memòria.

2. MARC TEÒRIC I POSICIONAMENT

En aquest capítol es presenta el marc teòric del treball de recerca. S'inicia amb l'exposició de les principals línies d'investigació que hi ha actualment en l'àmbit de la resolució de problemes i es pren una definició de problema en educació matemàtica. A més, es fa una breu revisió dels referents històrics més importants que han tractat la resolució de problemes i s'exposen les fases que intervenen en el procés de resolució segons els diversos autors. Tanmateix, es comenten algunes estratègies generals que faciliten i possibiliten l'obtenció de la solució d'alguns problemes matemàtics, inclosos els problemes de màxims i mínims. Finalment, es presenten diverses tipologies d'errors que sovint apareixen a l'hora de resoldre aquests problemes.

2.1. LÍNIES D'INVESTIGACIÓ EN RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

Des del punt de vista escolar, en tota situació de resolució de problemes de matemàtiques intervenen tres components (KILPATRICK, J., 1978, citat a CASTRO, E., 2008), que són els següents: el *problema*, és a dir, l'interrogant o qüestió que es planteja, l'*alumne/a*, és a dir, a qui es planteja el problema perquè el resolgui i la *situació* en què es resol el problema, que en l'àmbit educatiu és l'aula guiada pel professor/a. La consideració de cadascun d'aquests components (per separat o conjuntament), en interacció amb els altres permet situar diverses línies d'investigació en la resolució de problemes en educació matemàtica.

D'altra banda, LESTER, F.K. (1983, citat a CASTRO, E., 2008) considera que es poden utilitzar vàries categories d'elements identificables com a variables per classificar les línies prioritàries de les investigacions en resolució de problemes matemàtics i són les següents: *factors de tasca*, relacionats amb la naturalesa del problema; *factors del subjecte*, o característiques de la persona que resol el problema; *factors del procés*, és a dir, conductes individuals durant la resolució de problemes; *factors ambientals*, que són les característiques externes al problema i al resolutor; i *factors d'instrumentació i metodologia de la investigació*.

A nivell internacional, els principals temes d'investigació en resolució de problemes matemàtics són els següents: aïllament d'elements clau sobre la dificultat dels problemes, esquemes en la resolució de problemes, identificació de les característiques dels bons resolutors, identificació d'estratègies de resolució, comparació entre resolutors experts i novells, metacognició, interaccions socials, resolució de problemes en context, invenció de problemes, avaluació de la resolució de problemes, representació i resolució de problemes, afectes, creences i tecnologia en la resolució de problemes.

Finalment, es pot considerar que en educació matemàtica, les investigacions realitzades s'agrupen en dues grans línies: ensenyar a resoldre problemes i estudis sobre com pensem a l'hora de resoldre'ls.

2.2. QUÈ ÉS UN PROBLEMA EN EDUCACIÓ MATEMÀTICA?

Molts autors han definit, des de la seva perspectiva, què es pot entendre per *problema* en educació matemàtica. L'objectiu de l'apartat és presentar dues definicions interessants d'aquest concepte i, després, adoptar un posicionament per a la realització de la investigació.

En primer lloc, citarem la definició de problema que dóna PÓLYA, G., l'any 1961 en el llibre *Mathematical Discovery*, i és la següent:

> *Tenir un <u>problema</u> significa buscar de manera conscient una acció apropiada per aconseguir un objectiu clarament concebut, però no assolible de manera immediata.*
>
> (PÓLYA, G., 1981, vol. I, pàg. 117)

Tanmateix, si s'interpreta la definició de problema de PÓLYA, G., es pot considerar que un problema ha de complir les tres condicions següents:

I. <u>Acceptació</u>: la persona o grup ha d'acceptar el problema i ha d'establir un compromís formal que pot tenir diverses motivacions.
II. <u>Bloqueig</u>: els intents inicials no donen bon resultat i les tècniques habituals per tractar el problema no funcionen.
III. <u>Exploració</u>: es requereix l'exploració del problema amb nous mètodes.

En segon lloc, és interessant comentar la definició de problema que proposen VILA, A. i CALLEJO, M.L. (2004) i és la següent:

> *Reservarem el terme <u>problema</u> per designar una situació, plantejada amb una finalitat educativa, que proposa una qüestió matemàtica el mètode de solució de la qual no és immediatament accessible a l'alumne / resolutor o grup d'alumnes que intenta resoldre-la, perquè no disposa d'un algoritme que relacioni les dades i la incògnita o d'un procés que identifiqui automàticament les dades amb la conclusió, i per tant haurà de buscar, investigar, establir relacions, etc. per afrontar una nova situació.*
>
> (VILA, A. i CALLEJO, M.L., 2004, pàg. 31)

En aquest sentit, l'ensenyament i l'aprenentatge a través de la resolució de problemes intenta modificar el desenvolupament habitual de les classes de matemàtiques. Els problemes posen èmfasi en els processos de pensament dels alumnes i són una bona eina per millorar el seu aprenentatge autònom. Això fa necessari un clima educatiu que afavoreixi la confiança de cada alumne/a en les seves pròpies capacitats d'aprenentatge, en el seu propi criteri i on es valorin els processos i progressos de l'alumnat i no només les seves respostes.

Finalment, convé comentar que per realitzar aquest treball s'adoptarà la definició de problema que presenta PÓLYA, G. i que s'ha citat en els paràgrafs anteriors.

2.2.1. ALGUNES DIFERÈNCIES ENTRE UN EXERCICI I UN PROBLEMA

Determinar que una activitat sigui un problema o un exercici depèn de la persona a qui va dirigida l'experiència. Segons SCHOENFELD, A.H. (1985), hi ha una relació directa amb el resolutor i el fet que la tasca en qüestió sigui un exercici o un problema:

> *Ser un problema no és una propietat inherent d'una tasca matemàtica. Més aviat és una relació entre l'individu i la tasca el que fa d'aquesta un problema per aquella persona. La paraula problema s'usa per designar una tasca que és difícil per a l'individu que està intentant resoldre-ho. Tanmateix, aquesta dificultat ha de ser un embolic intel·lectual més que de càlcul (...). Per tal d'enunciar-ho formalment, si hom té accés a un esquema de solució per a una tasca matemàtica, aquesta és un exercici i no pas un problema.*
>
> (SCHOENFELD, A.H., 1985, pàg. 74)

A més a més, segons PUJOL, R. (2007, pàg. 17) *un problema reuneix les condicions* exposades en l'apartat 2.2, és a dir, l'*acceptació*, el *bloqueig* i l'*exploració*; *en canvi, un exercici no les presenta*. En un exercici no acostuma a haver-hi un bloqueig, ni és necessària l'exploració de nous mètodes, ja que sovint s'aplica un procediment rutinari per arribar a la resposta.

Finalment, cal dir que fer exercicis és important per a l'aprenentatge de la matemàtica, perquè ens ajuda a consolidar conceptes, propietats, procediments,... els quals es poden aplicar quan es vol resoldre un problema.

2.2.2. PER QUÈ POT SER TAN DIFÍCIL RESOLDRE UN PROBLEMA MATEMÀTIC?

A diferència del que succeeix quan es treballa un exercici, el procés de resolució d'un problema és difícil que es pugui produir pas a pas i segons unes regles establertes.

Tal com analitza SCHOENFELD, A.H. (1985, pàg. 15), *el coneixement i el comportament matemàtic del qui resol problemes es pot classificar segons les categories següents: recursos* (conjunt de coneixements matemàtics bàsics i necessaris perquè el resolutor afronti un problema), *heurístics* (tècniques generals de resolució), *control* (la manera amb què cada persona s'enfronta a la resolució de problemes, tenint present els recursos i l'heurística que coneix) i *sistema de creences* (perspectiva del resolutor respecte de la matemàtica i de com s'hi treballa).

El compliment, o no, de cadascun d'aquests components per part del resolutor és el que determinarà la dificultat que tindrà a l'hora de resoldre un problema. Així, per exemple, un resolutor pot presentar uns recursos adequats i un bon domini de l'heurística, però en canvi una manca de seguretat en el seu sistema de creences no li permet arribar a la solució del problema. Per tant, analitzar i comprendre aquestes categories és important per entendre les dificultats del resolutor per afrontar un problema.

2.3. REFERENTS HISTÒRICS I FASES EN LA RESOLUCIÓ DE PROBLEMES.

En aquest apartat es realitza un resum dels referents històrics més importants que han tractat la resolució de problemes en educació matemàtica. Ara bé, per respondre els objectius de recerca i per interpretar els resultats de la investigació no seran tots necessaris. De totes maneres, en un treball d'aquesta naturalesa és interessant comentar-los breument, encara que no se'n faci un ús explícit de tots ells durant l'anàlisi de les dades. La informació d'aquest apartat prové, en bona part, de l'article de BLANCO, J.L. (1996) i s'ha completat amb l'article de VILA, A. i CALLEJO, M.L. (2004).

PAPPUS d'Alexandria en el llibre VII de la seva *Col·lecció Matemàtica*, publicada l'any 320 dC., inclou una sèrie d'obres amb l'objectiu que servissin per a l'ensenyament de la resolució de problemes. A més, introdueix unes reflexions sobre els processos de raonament que poden utilitzar-se i inclou una explicació del mètode d'anàlisi – síntesi. D'aquesta manera, Pappus esdevé uns dels primers estudiosos del procés de resolució de problemes.

Molts segles més tard, **DESCARTES, R.** (1596 – 1650), volgué trobar un mètode universal per a la resolució de problemes. Tenia l'objectiu d'escriure unes *Regles per a la direcció dels ingenis*, però no arribà a finalitzar-les. Ara bé, després de la seva mort, es van agrupar els fragments disponibles i es van editar.

LEIBNIZ, G. (1646 – 1716) es va proposar escriure un llibre que volia titular *Art de la invenció*, però al final no el va publicar. Tot i així, va deixar una sèrie d'anotacions a través de les quals es podia observar el seu interès per les fonts de la invenció de problemes i el seu funcionament.

Anys més tard, **BOLZANO, B.** (1781 – 1848) treballà la lògica i va dedicar una gran atenció a la resolució de problemes. Volia centrar les regles i els camins de la investigació en aquest camp.

De totes maneres, no és fins a finals del segle XIX quan la psicologia inicia l'estudi sistemàtic dels processos d'invenció. L'any 1888, **DEWEY, J.** formula un model de resolució de problemes, que es va mantenir durant molt temps i es basava en les sis fases següents:

I. Identificació de la situació problemàtica.
II. Definició precisa del problema.
III. Anàlisi dels mitjans i de les finalitats. Pla de solució.
IV. Execució del pla.
V. Assumir les conseqüències.
VI. Avaluació de la solució. Supervisió. Generalització.

L'any 1926, **WALLAS, G.** publicà el llibre *The Art of Thought* i va determinar quatre fases per a la resolució de problemes:

I. <u>Preparació</u>: recull d'informació i intents preliminars de solució.
II. <u>Incubació</u>: aparcar el problema per realitzar altres activitats o descansar.
III. <u>Il·luminació</u>: és el moment en què apareix la idea clau per a la solució.
IV. <u>Verificació</u>: es comprova la solució.

L'any 1945, **PÓLYA, G.** publicà el llibre *How to solve it*, que va tenir una gran repercussió. A partir d'aquest moment, s'entén per *heurística* l'estudi de totes les operacions mentals útils en el procés de resolució de problemes i es tenen en compte qüestions de tipus emocional i cultural, que fins llavors no s'havien considerat. PÓLYA, G. basa el seu programa en la idea del *resolutor ideal*, és a dir, l'individu que a l'hora de resoldre un problema avança linealment des de l'enunciat fins a la solució.

L'objectiu d'aquest model és aconseguir que qualsevol persona, amb l'ajuda d'un tutor/a, assimili tècniques de resolució efectives i, així, es pugui convertir en un bon resolutor de problemes. Per això, convé conèixer dues qüestions bàsiques:

La primera és que en la resolució d'un problema es presenten quatre fases i són les següents:

I. Comprensió del problema.
II. Concepció d'un pla.

III. Execució del pla.
IV. Examinar la solució obtinguda (visió retrospectiva).

La segona és de caràcter didàctic, ja que segons PÓLYA, G. l'alumne/a aprèn per imitació i pràctica i, per tant, s'ha de combinar l'orientació del professor/a i l'ús personal de les estratègies heurístiques.

Un altre referent important és el treball que **SCHOENFELD, A.H.** publicà en el llibre *Mathematical Problem Solving* (1985). Es tracta d'un model més global que el de PÓLYA, G. i va acompanyat de diverses experiències que el validen. Amb aquest model, SCHOENFELD, A.H. no pretén convertir cada individu en un resolutor ideal, sinó fer-lo millorar a partir de les tècniques que aprèn i tenint en compte la manera amb què el resolutor s'enfronta al problema.

SCHOENFELD, A.H. entén que el procés de resolució de problemes no és lineal i aquesta idea el diferencia de PÓLYA, G. De totes maneres, delimita quatre fases en aquest procés i són les següents:

I. Anàlisi i disseny.
II. Exploració.
III. Execució.
IV. Comprovació de la solució obtinguda.

D'altra banda, l'any 1988, des d'una perspectiva més centrada a l'aula, **MASON, J., BURTON, L. i STACEY, K.** publiquen el llibre *Pensar matemáticamente* i descriuen el procés de resolució de problemes donant una gran importància al que sent el resolutor, és a dir, als seus estats afectius, d'ànim, emocionals,... Aquesta descripció fa referència a uns *processos* (particularitzar – generalitzar, conjecturar i demostrar), a unes *fases* (abordatge, atac i revisió) i a uns *estats afectius*. Tanmateix, proposen la idea d'un *monitor*, és a dir, una espècie de tutor interior que sense implicar-se vigili i dirigeixi els processos, tant personals com tècnics, necessaris per a la resolució de problemes.

Finalment, és interessant comentar la visió de **VILA, A. i CALLEJO, M.L.** (2004), els quals consideren que en tots els models anteriors es poden identificar tres fases o grups d'accions pel que fa a la resolució d'un problema: *l'abordatge* o *preparació*, el *desenvolupament* i la *revisió global*, i convé tenir en compte les diferents transicions entre elles. Les accions relacionades amb l'*abordatge* van encaminades a comprendre millor el problema i a buscar diferents vies de resolució; les relacionades amb el *desenvolupament* pretenen implementar l'estratègia de resolució que s'ha determinat en la fase anterior i les relacionades amb la *verificació* estan enfocades a comprovar, reflexionar i generalitzar. Naturalment, s'ha de començar per l'abordatge i acabar amb la revisió, però durant el procés de resolució és freqüent fer marxa enrere per tal de buscar nous abordatges quan les idees que s'estan desenvolupant sembla que no funcionen.

2.4. UNA REVISIÓ D'ESTRATÈGIES QUE S'USEN PER RESOLDRE PROBLEMES MATEMÀTICS

En primer lloc, es considera que, tal com defineix MAYER, R.E. (1986, pàg. 429), *una estratègia és una tècnica general per resoldre problemes; no garanteix que es trobi la solució, però constitueix una guia per resoldre el problema*.

A més a més, cal comentar que a l'apartat 2.3 s'han presentat les fases que intervenen en el procés de resolució de problemes segons diversos autors. Al llarg d'aquesta secció es recordaran aquestes fases i s'aprofundirà en elles amb l'objectiu d'introduir algunes estratègies que permeten arribar a la solució de diversos problemes matemàtics.

Com s'ha explicat anteriorment, PÓLYA, G. destaca quatre fases en el procés de resolució d'un problema matemàtic, que són les següents: comprensió del problema, concepció d'un pla, execució del pla i visió retrospectiva. A més, PÓLYA, G. dóna una sèrie d'indicacions per tal que el resolutor pugui afrontar amb més facilitat el problema i, així, suggereix algunes estratègies que afavoreixen el procés de resolució. Vegem-ho a continuació:

I. Comprensió del problema: determinar quina és la incògnita, quines són les dades i les condicions que s'han de satisfer. Convé plantejar-se si són suficients per determinar la incògnita, o bé si són insuficients, redundants o contradictòries. Pot ser útil fer un dibuix i simbolitzar el problema de forma adequada.

II. Concepció d'un pla: és important considerar si ens hem trobat anteriorment amb un problema semblant o que ha estat plantejat d'una manera gairebé igual. A més, cal observar si es coneix algun teorema que pugui ser útil per resoldre'l. També s'aconsella determinar la relació entre les dades i la incògnita i, a vegades, és útil enunciar el problema d'una altra manera. Si no es troba la solució de forma immediata es poden tenir en compte problemes anàlegs més senzills, és a dir, es pot resoldre un problema més simple o bé un cas particular. D'aquesta manera, després, serà més fàcil la generalització de la solució. Finalment, convé estar segur que s'han utilitzat totes les dades de l'enunciat i que s'han tingut en compte tots els coneixements que fan referència al problema.

III. Execució del pla: comprovar si cadascun dels passos del pla que s'apliquen és correcte i, si és necessari, demostrar-ho.

IV. Examinar la solució obtinguda (visió retrospectiva): verificar la solució i el raonament utilitzat. Pensar si es pot obtenir el resultat d'alguna forma diferent i si la mateixa tècnica de resolució es pot aplicar en un altre problema.

D'altra banda, segons SCHOENFELD, A.H. (1985, pàg. 107) una estratègia de resolució d'un problema matemàtic representa el que hauria de realitzar, de forma sistemàtica, un bon resolutor per tal d'arribar a la solució del problema. SCHOENFELD, A.H. considera que una estratègia heurística és una tècnica o un suggeriment destinat a fer més comprensible el problema i, en alguns casos, permet assolir el resultat.

A continuació es descriuen les principals estratègies que, segons SCHOENFELD, A.H. (1985, pàg. 109), un resolutor hauria de seguir a l'hora d'afrontar un problema matemàtic, i s'agrupen en les diferents fases de resolució:

I. Anàlisi i disseny:
   a. Sempre que sigui possible dibuixar un diagrama.
   b. Examinar casos especials:
      i. Escollir valors adequats per tal d'exemplificar el problema i poder intuir la solució.
      ii. Examinar casos extrems per explorar el ventall de possibles solucions.
      iii. Quan el problema ho permeti, buscar un patró inductiu.
   c. Intentar simplificar el problema:
      i. Explorar possibles simetries.
      ii. Buscar arguments que, sense pèrdua de generalitat, facilitin l'abordatge del problema.

II. Exploració:
   a. Considerar problemes essencialment equivalents:
      i. Canviar les condicions del problema per altres que siguin equivalents.
      ii. Combinar els elements del problema de diferents maneres.
      iii. Introduir elements auxiliars.
      iv. Replantejar el problema mitjançant un canvi de perspectiva o de notació i considerar raonaments per contrarecíproc o per contradicció.
   b. Examinar problemes lleugerament modificats:
      i. Escollir subojectius que satisfacin parcialment les condicions del problema.

ii. Descompondre el problema en casos més senzills i estudiar-los un per un.

c. Analitzar problemes àmpliament modificats:

i. Construir problemes anàlegs amb menys variables.

ii. Mantenir fixes totes les variables menys una per determinar quin efecte té aquesta variable.

iii. Usar problemes afins respecte la forma, les dades o les conclusions.

iv. Aprofitar resultats i mètodes de resolució de problemes semblants.

III. Execució.

IV. Comprovació de la solució obtinguda: verificar que s'han utilitzat totes les dades i analitzar si la solució s'ajusta a les prediccions. Plantejar-se si es pot obtenir la mateixa solució per altres mètodes i si és possible reduir-la a resultats coneguts.

Finalment, convé tenir en compte que hi ha diversos estudis que se centren en detectar estratègies de resolució de problemes matemàtics en contextos diversos. Aquest és el cas de l'article de VALLE, M.C. *et al.* (2007) en què s'estudien quines estratègies generals de resolució segueixen els participants en una olimpíada matemàtica de Mèxic. La condició que fixa l'article per assegurar que un participant ha seguit una estratègia determinada és que ha d'identificar la incògnita del problema, ha de comprendre les dades i ha d'aplicar la condició del problema plantejat. Així, l'estudi detecta l'aparició de les següents estratègies en els estudiants de l'olimpíada:

i. Assaig i error: es prenen nombres a l'atzar i es va provant fins a trobar la solució.

ii. Usar una variable: s'utilitza quan es desconeix una dada i es complementa amb l'estratègia anterior.

iii. Buscar un patró: consisteix en l'anàlisi d'un determinat model per veure si s'observa una regularitat. És un patró que quasi sempre suggereix la solució del problema.

iv. Fer una llista: es relacionen tots els possibles resultats i el que compleix amb les exigències plantejades pel problema es considera que és la solució. En aquest cas s'utilitza la comprovació per verificar la solució.

v. Resoldre un problema més simple: es tracta de resoldre un problema per descomposició del problema original en problemes senzills, de tal manera que agrupant-los s'arribi a la solució.

vi. Fer una figura: és una estratègia que consisteix en modelar la situació mitjançant figures que inclouen relacions del que es coneix i del que es busca.

vii. Usar un raonament directe: el raonament d'aquesta estratègia es basa en la lògica. El seu principi és la inducció.

viii. Usar un raonament indirecte: és una estratègia basada, també, en la lògica. En aquest cas, però, el seu principi és la deducció.

2.4.1. ESTRATÈGIES DE RESOLUCIÓ DE PROBLEMES D'EXTREMS

Durant els cursos de matemàtiques, els professors sovint plantegen els problemes de màxims i mínims immediatament després d'estudiar el càlcul diferencial. El seu objectiu és aplicar la teoria del càlcul amb derivades a casos pràctics, per tal de visualitzar aplicacions de les matemàtiques a la vida real. Segons MODICA, E. (2010), una estratègia interessant, fent ús del càlcul diferencial, per afrontar aquesta tipologia de problemes és la següent:

a. Llegir el problema atentament i dibuixar, si és necessari, un diagrama que ajudi a l'organització de les dades i a la definició de les variables.

b. Definir la variable respecte la qual expressem l'equació matemàtica que volem maximitzar o minimitzar.

c. Plantejar totes les equacions que relacionen variables i constants per tal de trobar una funció amb el nombre més petit de variables possible, la qual es maximitzarà o minimitzarà.

d. Utilitzar les regles del càlcul diferencial per obtenir els valors màxims o mínims de la funció.

e. Verificar els resultats obtinguts.

De totes maneres, MODICA, E. (2010) també afirma que els problemes d'extrems es poden treballar amb alumnes que encara no coneixen el càlcul diferencial, ja que hi ha gran quantitat de problemes senzills que admeten solucions per mètodes elementals, com pot ser l'ús de propietats algebraiques, les quals es poden demostrar a l'alumnat a partir dels coneixements matemàtics de què ja disposa.

D'altra banda, és interessant que els estudiants no vegin el càlcul amb derivades com l'únic mètode per resoldre un problema de màxims i mínims, perquè segons quin sigui i on estigui situat l'extrem de la funció estudiada, les eines del càlcul diferencial no permetran obtenir, directament, la solució del problema. Aquestes qüestions estan àmpliament tractades en l'article de MORENO, S. (2004) en què es conclou que per a la majoria d'estudiants i per alguns docents, l'extrem d'una funció només es pot obtenir a partir del criteri de la segona derivada i, en cas que aquest no funcioni, els participants no són capaços d'elaborar una resposta coherent per al problema. Així, en aquest article s'observa una interpretació errònia del concepte d'extrem en aplicar mecànicament el criteri de la segona derivada, és a dir, en usar la condició suficient d'extrem per determinar si un valor crític d'una funció de variable real és un màxim o un mínim relatiu.

A més, MORENO, S. (2004) observa que alguns docents i molts estudiants només aconsegueixen calcular un màxim usant tècniques diferencials i no són capaços d'obtenir la solució d'un problema d'extrems sense aplicar el criteri de la segona derivada, ja que contesten erròniament que el problema no té solució quan aquest criteri no funciona. Un motiu pel qual apareix aquesta concepció equivocada del concepte d'extrem el dóna TALL, D. (1996) en afirmar que *l'estudiant ha d'aprendre a afrontar les dificultats conceptuals i el seu aprenentatge no s'ha de basar, exclusivament, en adquirir rutines de càlcul, sinó també convé que aprofundeixi en els conceptes matemàtics associats als procediments*.

Finalment, l'article de MORENO, S. (2004) obre una prospectiva que consisteix en dissenyar situacions didàctiques per a l'ensenyament dels conceptes de màxim i mínim que puguin evitar les interpretacions equivocades produïdes per l'aplicació mecànica i errònia del criteri de la segona derivada.

2.5. ERRORS DURANT EL PROCÉS DE RESOLUCIÓ DE PROBLEMES MATEMÀTICS

És important reflexionar sobre l'origen i el significat de les dificultats que tenen els estudiants, ja que sovint es manifesten a través dels seus errors. Tradicionalment, s'ha concebut l'<u>error</u> associat a l'ensenyament com una diferència entre el que el professor desitja en les respostes dels seus alumnes i el que l'estudiant realment contesta.

En aquest sentit, segons BORASI, R. (1997, citat a FRANCHI, L. *et al.*, 2003, pàg. 65) *l'ensenyament constructivista considera que els errors són una font d'informació per al docent sobre el procés d'aprenentatge dels estudiants i com ho han après*. Així, RICO, L. (1995, citat a FRANCHI, L. *et al.*, 2003, pàg. 65) presenta *l'error com una possibilitat permanent d'adquisició i consolidació del coneixement que pot arribar a formar part del saber científic que utilitzen les persones o els col·lectius*. Tanmateix, SOCAS, M. (1997, citat a FRANCHI, L. *et al.*, 2003, pàg. 65) afirma que *l'error és la presència d'un esquema cognitiu inadequat en l'alumne i no, únicament, una conseqüència d'una falta específica de coneixement o distracció*.

A més a més, és important <u>distingir entre error i obstacle o dificultat</u>. Segons BROUSSEAU, G. (1997, citat a FRANCHI, L. *et al.*, 2003, pàg. 66), *l'error no només es* *produeix per la ignorància, per la inseguretat o per l'atzar, sinó que també pot sorgir com a resultat d'un coneixement anterior que tenia el seu interès, però que més endavant es rebel·la com a fals o inadaptat.* Així, els errors d'aquest tipus no són imprevisibles, sinó que s'originen pels obstacles o les dificultats dels alumnes. Per aquest autor, *un obstacle és una concepció que ha estat, inicialment, eficient per resoldre algun tipus de problema, però que no serveix quan s'aplica en un altre i, per això, es converteix en una dificultat per a un aprenentatge posterior.*

D'altra banda, PESSOA, A. (1997, citat a FRANCHI, L. *et al.*, 2003, pàg. 66) observa que *per al professor és difícil treballar amb l'error dels seus alumnes i poder-lo transformar en una situació d'aprenentatge adient per ensenyar una ciència*. Cal tenir present que en l'ensenyament tradicional, el docent no acostuma a aprofitar l'error dels alumnes, sinó que procura eliminar-lo, ja que l'error es percep com quelcom negatiu. Contràriament, en l'ensenyament constructivista, l'error es considera una eina fonamental per a la construcció del coneixement. Així, és important identificar-lo i classificar-lo. Per això, és necessari entendre millor per què els alumnes s'equivoquen, treballar amb aquest error i transformar-lo en situacions d'aprenentatge que parteixen de l'explicació de l'alumne. D'aquesta manera, es pot entendre l'estructura del pensament de l'aprenent i, a través de preguntes que el condueixin a conflictes cognitius o a nous coneixements, es creen les condicions necessàries perquè l'alumne pugui superar el seu error.

En aquest sentit, conèixer els tipus d'errors que realitzen els alumnes permet als docents seleccionar les estratègies idònies que permetin optimitzar el procés d'ensenyament i aprenentatge dels aprenents, i que facilitin la superació dels errors mitjançant l'adquisició d'un nou coneixement per part dels seus alumnes.

A continuació es presenten cinc tipologies que s'han desenvolupat per classificar l'error en l'àrea de les matemàtiques i de les ciències en general. Convé tenir present que per analitzar els resultats d'aquest treball d'investigació no s'usaran totes. Tot i així, en una memòria d'aquestes característiques és interessant comentar-les breument per tal de reflectir la visió dels diferents autors. Les tipologies fan referència a RADATZ, H., MOVSHOVITZ *et al.*, SOCAS, M., ASTOLFI, J., i BROUSSEAU, G.

- **Tipologia d'errors segons RADATZ, H.** (1979, citat a FRANCHI, L. *et al.*, 2003, pàg. 67): realitza una classificació dels errors a partir del processament de la informació i estableix cinc categories generals:

  – Errors produïts per la dificultat del llenguatge.

  – Errors causats per dificultats d'obtenir informació espaial.

  – Errors causats per la rigidesa del pensament.

- Errors produïts per un aprenentatge deficient de fets, habilitats i conceptes previs: aquesta categoria engloba totes les mancances sobre continguts i procediments específics per a la realització d'una tasca matemàtica.
- Errors produïts per l'aplicació de regles o d'estratègies irrellevants.

• **Tipologia d'errors segons MOVSHOVITZ *et al.*** (1987, citat a FRANCHI, L. *et al.*, 2003, pàg. 67): l'autor classifica els errors en les següents categories:

- Errors produïts per la mala utilització de les dades del problema.
- Errors causats per una interpretació incorrecta del llenguatge.
- Errors produïts per l'ús de teoremes i/o de definicions equivocades.
- Errors causats per la falta de verificació de les solucions.
- Errors tècnics: errors de càlcul i de procediment en algoritmes bàsics.

• **Tipologia d'errors segons SOCAS, M.** (1997, citat a FRANCHI, L. *et al.*, 2003, pàg. 66): els errors en l'aprenentatge de les matemàtiques es deuen a certes dificultats que es poden agrupar en cinc categories: dificultats associades a la complexitat dels objectes matemàtics, dificultats associades als processos del pensament matemàtic, dificultats associades als processos d'ensenyament desenvolupats per l'aprenentatge de les matemàtiques, dificultats associades als processos de desenvolupament cognitiu dels alumnes i dificultats associades a les actituds afectives i emocionals cap a les matemàtiques. Considerant aquestes dificultats, l'autor classifica els errors d'acord amb el seu origen:

- Errors que parteixen d'un obstacle.
- Errors que tenen el seu origen en l'absència de sentit: en aquesta categoria es troben els errors de l'àlgebra que s'originen, inicialment, en l'aritmètica; els errors de procediment que es deriven de l'ús inadequat que fan els alumnes de les fórmules o de les regles de procediment; i els errors algebraics que es produeixen a causa de les característiques pròpies del llenguatge de l'àlgebra.
- Errors que tenen el seu origen en actituds afectives cap a les matemàtiques.

• **Tipologia d'errors segons ASTOLFI, J.** (1999, citat a FRANCHI, L. *et al.*, 2003, pàg. 67): aquest autor estableix una tipologia d'errors que pretén trencar amb les categories tradicionals adoptades per classificar-los:

- Errors causats per la incomprensió de les instruccions de treball donades: estan relacionats amb les dificultats que tenen els alumnes per interpretar els enunciats dels problemes, ja sigui de forma oral o escrita.
- Errors que provenen dels hàbits escolars o d'una mala interpretació de les expectatives.

- Els errors com a resultat de les concepcions alternatives dels alumnes.
- Errors lligats a les operacions intel·lectuals que es duen a terme durant el procés de resolució d'un problema.
- Errors produïts per un desviament del procés estàndard explicat a classe.
- Errors causats per una excessiva càrrega cognitiva de l'activitat.
- Errors que tenen el seu origen en una altra disciplina.
- Errors causats per la complexitat del contingut.

- **Tipologia d'errors de BROUSSEAU, G.** (2001, citat a FRANCHI, L. *et al.*, 2003, pàg. 66): per aquest autor els professors acostumen a classificar l'error segons:
  - Error a un nivell pràctic: el professor considera que són errors de càlcul.
  - Error en la tasca: el docent critica la realització d'un model operatiu conegut.
  - Error de tecnologia: el professor critica l'elecció de la tècnica.
  - Error de nivell teòric: el docent critica els coneixements teòrics de l'alumne que serveixen de base a la tecnologia i a les tècniques associades.

2.5.1. CONFUSIÓ DE LA RELACIÓ ENTRE L'ÀREA I EL PERÍMETRE DE DIFERENTS FIGURES GEOMÈTRIQUES

DICKSON, L. (1991) presenta diversos estudis els quals posen de manifest que els alumnes confonen freqüentment la relació entre l'àrea i el perímetre de les figures geomètriques. En aquest apartat es comenten algunes d'aquestes investigacions amb l'objectiu de centrar la problemàtica.

Una de les recerques que analitza DICKSON, L. (1991, pàg. 125) planteja la situació en què un docent mostra a un alumne un full de paper quadriculat format per caselles d'1 cm x 1 cm, on s'havia dibuixat un rectangle de 7 cm x 3 cm. El docent li va preguntar quin era el seu perímetre i la seva àrea. En els dos casos l'estudiant va respondre-ho correctament. Després se li va fer dibuixar un rectangle diferent, però que mantingués els 20 cm de perímetre. Els primers intents de l'alumne van consistir en dibuixar el mateix rectangle, però canviant la seva orientació i li sorgiren importants dificultats per construir un rectangle diferent. Per tant, s'observà un bloqueig per part de l'estudiant a l'hora de respondre aquesta pregunta. Era evident que l'alumne, tot i tenir 15 anys, no s'adonava que figures (rectangles) del mateix perímetre poguessin tenir àrees diferents, és a dir, que es pogués mantenir el perímetre dels rectangles encara que es canviés la seva forma i, per tant, la seva àrea.

A més a més, DICKSON, L. (1991, pàg. 126) presenta els resultats d'un altre estudi, el qual va consistir en situar sobre una geotaula un cordill de 20 cm de longitud que tancava un quadrat de 5 cm de costat. Aquest cordill es podia moure i permetia construir rectangles de: 6 cm x 4 cm, 7 cm x 3 cm, 8 cm x 2 cm i 9 cm x 1 cm. En cada ocasió es preguntava als estudiants si l'àrea i el perímetre d'aquests rectangles eren iguals. S'observà que els estudiants de 9 anys investigats no podien admetre que canviés l'àrea sense canviar el perímetre. Alguns dels alumnes de 10 a 13 anys acceptaven que l'àrea canviava, tot i que el perímetre es mantenia constant. De totes maneres, molts d'aquests estudiants només ho admetien en el cas de realitzar comparacions extremes de les formes dels rectangles. Finalment, es va concloure que, en aquesta investigació, gairebé tots els alumnes de 15 anys acceptaven la no conservació de l'àrea fixat el perímetre dels rectangles.

3. METODOLOGIA

En aquest capítol es presenta la part metodològica d'aquest treball de recerca. S'inicia amb l'aproximació metodològica de la investigació, es descriu la població estudiada i el context de la recerca. A més, es mostra l'instrument utilitzat per recollir les dades i el procés que s'ha seguit per obtenir-les.

3.1. APROXIMACIÓ METODOLÒGICA

En primer lloc, és important destacar que hi ha una escassa bibliografia i antecedents en general sobre l'objecte específic d'aquesta recerca, és a dir, la resolució de problemes d'extrems sense usar tècniques diferencials a l'educació secundària. Tot i així, existeix una abundant bibliografia que tracta la resolució de problemes en matemàtiques.

L'opció metodològica escollida per realitzar la investigació s'inclou dins de l'apartat de *recerca qualitativa* en didàctica de les matemàtiques. Tal com exposa ARNAL, J. (1997), des del punt de vista qualitatiu, la percepció de la realitat del subjecte és holística i presenta les persones en el context de llurs entorns socials. La posició que adopta l'investigador és subjectiva i s'estableix una interacció personal amb els subjectes. A més, l'origen de les dades és qualitatiu, en el sentit que s'obtenen descripcions dels actes i dels punts de vista personals. Tanmateix, les teories que s'acostumen a aplicar són interpretatives i permeten aprofundir en el context social dels punts de vista personals. La comprovació de les teories es realitza mitjançant el consens, ja que es contrasten les interpretacions de l'investigador amb les dels subjectes i amb les d'altres observadors. Finalment, les aplicacions de les investigacions qualitatives se centren en determinar les interaccions amb les persones i es basen en el context de l'atenció a l'educació.

Donada la naturalesa dels objectius de recerca (apartat 1.3), l'instrument de recollida de dades que s'ha seleccionat per realitzar aquesta investigació és un <u>qüestionari individual</u> que combina tres problemes de resposta tancada, és a dir, problemes tipus test amb quatre opcions de resposta, i tres problemes de resposta oberta, en què l'estudiant ha d'argumentar el procés que ha seguit per arribar a la solució.

A més a més, l'estudi pren com a població els alumnes de primer de Batxillerat que cursen la matèria de Matemàtiques, o les Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials, de dos instituts públics de Catalunya.

Aquesta recerca s'engloba en el *paradigma exploratori i empíric*, ja que no pretén indagar en hipòtesis, sinó obtenir dades i explicacions dels fenòmens que s'observen; i perquè dóna resposta a les preguntes d'investigació i descriu com resolen els problemes plantejats els estudiants a partir de les dades empíriques que es recullen. A més, es tracta d'una *diagnosi*, ja que s'estudia com resolen alguns problemes d'extrems els alumnes que no coneixen les regles del càlcul diferencial i es vol determinar el punt de partida d'aquests estudiants davant dels problemes de màxims i mínims.

Finalment, cal dir que l'anàlisi de dades que es realitza és una *anàlisi inductiva – deductiva*, ja que les diferents estratègies i els errors que experimenten els alumnes a l'hora de resoldre els problemes matemàtics que se'ls plantegen s'engloben en unes categories que parteixen del marc teòric de la recerca i que s'adapten a les necessitats particulars de l'estudi.

3.2. POBLACIÓ ESTUDIADA I CONTEXT DE RECERCA

La població que ha estat <u>objecte d'estudi en aquesta investigació són 138 estudiants de primer de Batxillerat</u>, que cursen la matèria de Matemàtiques o de Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials, de dos instituts públics de Catalunya: l'Institut de Batxillerat Guillem de Berguedà, de Berga; i l'Institut de Batxillerat de l'Arboç, de l'Arboç. Cal dir que aquests alumnes formen part de les següents modalitats de batxillerat: 24 de l'Econòmic, 29 del Social, 17 del Biosanitari, 38 del Científic, 26 del Tecnològic i 4 del personalitzat. A més, dels 138 alumnes, 78 són nois i 60 són noies. Tanmateix, quan es van recollir les dades, 77 estudiants tenien 16 anys, 57 tenien 17 anys i 4 eren alumnes de 18 anys. Per això, l'edat mitjana d'aquesta població estudiada és de 16'47 anys.

<u>Pel que fa a l'Institut de Batxillerat Guillem de Berguedà</u>, s'han estudiat un total de 86 alumnes, dels quals 16 són estudiants del batxillerat Econòmic, 15 del Social, 17 del Biosanitari, 23 del Científic, 13 del Tecnològic i 2 cursen un batxillerat personalitzat, el qual inclou la matèria de Matemàtiques. Tanmateix, convé dir que d'aquests 86 alumnes, 43 són nois i 43 són noies. A més, quan es van recollir les dades, 59 estudiants tenien 16 anys, 25 tenien 17 anys i 2 eren alumnes de 18 anys. Per això, l'edat mitjana de la població estudiada de Berga és de 16'34 anys.

<u>Pel que fa a l'Institut de Batxillerat de l'Arboç</u>, s'han estudiat un total de 52 alumnes, dels quals 8 són estudiants del batxillerat Econòmic, 14 del Social, 15 del Científic, 13 del Tecnològic i 2 cursen un batxillerat personalitzat, que inclou la matèria de Matemàtiques. A més, cal dir que d'aquests 52 estudiants, 35 són nois i 17 són noies. Tanmateix, quan es van recollir les dades, 18 estudiants tenien 16 anys, 32 tenien 17 anys i 2 eren

alumnes de 18 anys. Per això, l'edat mitjana de la població estudiada de l'Arboç és de 16'69 anys.

A més a més, cal dir que aquests dos centres escollits són instituts públics comarcals que pertanyen a un àmbit sociocultural mitjà i que compleixen el desenvolupament curricular normatiu del Departament d'Educació de la Generalitat de Catalunya. La seva llengua vehicular és el català i la seva línia pedagògica es caracteritza per desenvolupar l'esperit crític i la formació dels alumnes. A més, l'ensenyament que es proporciona en aquests dos instituts és el mateix per als nois i per a les noies i es desenvolupa en un marc de coeducació, ja que es procura educar per a la igualtat i sense cap tipus de discriminació per raó de sexe, raça, llengua o creença. Tanmateix, des dels departaments de matemàtiques d'aquests instituts es fomenta que els alumnes resolguin problemes de matemàtiques i argumentin, oralment i/o per escrit, el procediment que han seguit per arribar a la solució.

D'altra banda, convé comentar que s'ha escollit aquesta població d'estudiants de primer de batxillerat que cursen matemàtiques per afavorir l'argumentació i la justificació de la pregunta d'investigació i dels objectius. Per realitzar aquesta recerca es necessita una població d'alumnes que tinguin els coneixements matemàtics suficients i la maduresa adequada per argumentar detalladament les respostes que manifesten en cadascun dels problemes. Tanmateix, és necessari que no estiguin familiaritzats amb les regles del càlcul diferencial i que no hagin treballat, a la matèria de Matemàtiques o de Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials, problemes d'extrems. A més, és interessant que disposin d'una formació matemàtica adequada per poder aplicar les diverses estratègies adquirides en problemes amb què no estan habituats. Per tant, els estudiants de primer de batxillerat d'aquests dos centres compleixen aquests requisits i, per això, són una població adequada per realitzar aquesta investigació.

Finalment, cal comentar que els estudiants responen els qüestionaris individualment i de forma anònima, fet que permet assegurar la protecció de les respostes dels estudiants. Tanmateix, hi ha un ferm compromís per tractar amb la més absoluta confidencialitat les respostes de tots els alumnes.

3.3. DISSENY DE L'INSTRUMENT DE RECERCA

En aquest apartat es descriu el procés que s'ha seguit per obtenir l'instrument de recollida de dades i adaptar-lo a les qüestions de recerca. A més, es presenta quin és l'instrument definitiu per dur a terme aquesta investigació i de quina manera es relaciona cada problema amb els objectius de l'estudi.

3.3.1. EL PROCÉS CAP A L'INSTRUMENT DE RECOLLIDA DE DADES

En primer lloc, cal comentar quines són les característiques dels problemes adequats per dur a terme aquesta recerca, els quals formaran part del qüestionari, és a dir, de l'instrument de recollida de dades. Vegem-les:

I. És interessant que alguns dels problemes estiguin relacionats amb situacions reals i/o quotidianes (p.ex.: optimitzar el volum d'una llauna de refresc) i, d'altres, facin referència a un context estrictament matemàtic (p.ex.: optimitzar el volum d'un cilindre, maximitzar l'àrea d'un rectangle o el producte de dos nombres; o bé, determinar el paral·lelogram d'àrea màxima sota certes condicions).

II. Com s'ha comentat en altres apartats, aquesta recerca no pretén estudiar tècniques de resolució de problemes d'extrems per mètodes diferencials i, per aquest motiu, no es considera si funciona, o no, el criteri de la derivada per resoldre els problemes de màxims i mínims de l'instrument.

III. Es decideix incloure únicament problemes de maximització, és a dir, problemes en què es pregunta el valor de l'àrea màxima, el volum màxim, el producte màxim, etc. Així, a l'instrument no figuren problemes de minimització, és a dir, aquells en què es pregunta per valors mínims de funcions, perímetres, àrees, etc. El motiu bàsic d'aquesta elecció és que els estudiants de la recerca no estan familiaritzats amb els conceptes d'extrem (relatiu i/o absolut) i, així, s'eviten confusions que dificultin l'anàlisi de les dades. Per possibles estudis posteriors, i més amplis, pot ser interessant considerar les dues tipologies de problemes d'extrems.

IV. Tot i que es tracta d'un fet força subjectiu, es formulen problemes que tenen solucions intuïtives bastant evidents. De totes maneres, no es tracta de problemes necessàriament fàcils de plantejar, d'argumentar o d'interpretar. Aquest fet es justifica per afavorir l'aparició de diverses estratègies de resolució d'aquests problemes per part dels estudiants i per evitar possibles bloquejos, els quals dificultin l'anàlisi de dades i l'obtenció dels resultats.

V. Es procura que els enunciats dels problemes matemàtics plantejats tinguin un nivell de dificultat semblant al que presenten els problemes dels llibres de text de matemàtiques destinats a estudiants de primer curs de batxillerat. Així, s'eviten dificultats en la comprensió de l'enunciat i en l'elaboració de les respostes i dels arguments per part dels alumnes.

En segon lloc, s'ha de tenir present que els problemes plantejats han d'estar suficientment validats. Aquest és un punt difícil i, per això, s'ha procurat que els problemes d'extrems de l'instrument siguin anàlegs als que es poden trobar en els llibres de text de batxillerat o bé els que planteja el llibre de ALAYO, F. (1990). De totes maneres, s'ha procurat formular els enunciats de forma precisa per tal que s'ajustin a la pregunta d'investigació i als objectius de recerca.

En tercer lloc, cal dir que abans de confeccionar l'instrument de recollida de dades definitiu, s'elaborà un ventall ampli de problemes de màxims i mínims, ja que així es van poder seleccionar els més adequats per a la investigació, després de fixar els objectius definitius de l'estudi. En aquest procés es va tenir en compte el criteri dels tutors de recerca, els quals van ajudar a seleccionar adequadament els problemes.

En quart lloc, s'elabora el qüestionari que servirà d'instrument de recerca. Es tracta d'un qüestionari que presenta sis problemes: tres problemes de resposta tancada, és a dir, problemes tipus test amb quatre opcions de resposta i només una és la adequada des del punt de vista matemàtic[2]. A més, presenta tres problemes d'extrems de resposta oberta en què es desitja que l'alumne argumenti el procés que ha seguit per arribar a la solució. Així, és més senzill entendre el raonament que segueix per resoldre'l i és més fàcil detectar l'estratègia que utilitza. Cal dir que l'últim problema, el sisè, és el més complex i està dividit en vuit apartats breus i precisos, la idea dels quals és orientar l'alumne en el procés de resolució i evitar possibles dificultats. Tanmateix, per a cada problema es formula una qüestió que demana, en una escala de l'1 (molt fàcil) al 10 (molt difícil), la percepció que té l'alumne de la dificultat del problema. A més, s'inclou una qüestió al final de l'instrument en què es pregunta per possibles bloquejos que hagin aparegut durant el procés de resolució de tots els problemes del qüestionari. Cal dir que el temps que es fixa per a la realització dels problemes de l'instrument per part dels alumnes és d'una sessió de classe de 60 minuts.

De totes maneres, tal com es detalla a l'apartat 3.3.2 del treball, a l'hora d'analitzar les dades obtingudes es fa una selecció dels problemes i de les qüestions, amb la finalitat de centrar l'anàlisi als objectius d'aquesta recerca particular.

En cinquè lloc, una vegada rebuda la validació de l'instrument per part dels tutors de recerca, es realitza un petit estudi pilot amb tres estudiants de les mateixes edats i de característiques semblants que els participants de la investigació. Aquests alumnes no formen part de la població estudiada de cap dels dos instituts i es realitza per detectar possibles incomprensions dels enunciats dels problemes. En aquest estudi es detecta

[2] Es plantegen tres problemes de resposta tancada, perquè, com s'observa més endavant (apartat 3.3.2) s'utilitzen per donar resposta a l'objectiu **O.1** de la investigació. Per això, no és necessària l'argumentació dels alumnes i el motiu pel qual han escollit cada resposta. L'únic que interessa és conèixer quin percentatge d'alumnes respon cadascuna d'elles.

que els participants donaven solucions als problemes, però argumentaven poc o gens les seves respostes. Per aquest motiu, es va creure convenient afegir a l'enunciat dels problemes oberts un aclariment que indiqués als alumnes que havien d'argumentar explícitament les respostes que donaven. Tanmateix, es va delimitar un espai per poder realitzar els raonaments de cada problema.

Finalment, un cop fetes aquestes petites modificacions, es dóna per acabada l'elaboració de l'instrument i es passen a recollir les dades en els dos instituts.

3.3.2. L'INSTRUMENT DE RECERCA

En aquest apartat es descriu amb detall l'instrument definitiu[3] de recollida de dades, es fan diverses observacions respecte alguns dels problemes plantejats en el qüestionari i es relaciona cada problema amb els objectius d'investigació citats a l'apartat 1.3 del treball.

En primer lloc, cal comentar que a la primera pàgina del qüestionari figuren les dades personals dels alumnes: curs, grup, data de realització, itinerari de batxillerat, data de naixement, edat i gènere. Convé remarcar que els qüestionaris són anònims. Després s'inclouen els diversos problemes, els quals figuren a continuació:

- **Problema 1**: Fixa't en la següent il·lustració (figura 3.1):

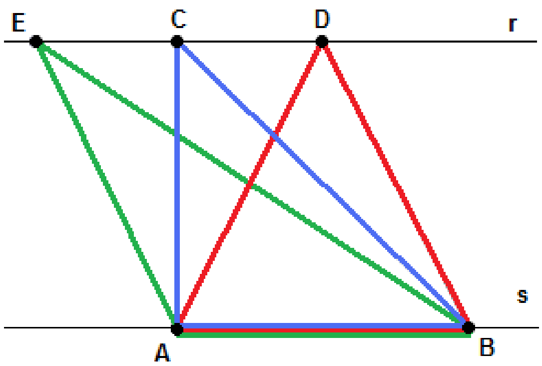


Figura 3.1: *Triangles corresponents al problema de recerca 1.*

Com pots observar, s'han representat dues rectes paral·leles: *r* i *s*. Sobre la recta *s* s'han marcat els punts *A* i *B*, i sobre la recta *r* s'han assenyalat els punts *C* , *D* i *E*. A més, s'han unit els punts *A*, *B*, *C*; *A*, *B*, *D*; i *A, B, E*; de manera que s'han construït els triangles *ABC* (triangle blau), *ABD* (triangle vermell) i *ABE* (triangle verd). Aquests tres triangles tenen la mateixa àrea. Creus que també tenen el mateix perímetre? Encercla la resposta que millor s'ajusti al teu punt de vista:

[3] A l'**annex 3** de la memòria figura l'instrument de recerca amb el format original i tal com s'ha distribuït als alumnes.

a) Els tres triangles tenen la mateixa àrea i, per tant, també tenen el mateix perímetre.

b) El triangle blau (el *ABC*) és el que tindrà major perímetre.

c) El triangle vermell (el *ABD*) és el de major perímetre.

d) El triangle verd (el *ABE*) és el que té un perímetre més gran.

Aquest problema pretén donar resposta a l'objectiu **O.1.1** de la investigació, ja que es vol veure si pels estudiants la igualtat d'àrea entre figures (els tres triangles) implica una igualtat de perímetre. Es tracta d'un problema amb context estrictament matemàtic.

- **Problema 2**: Actualment, hi ha llaunes d'un refresc de cola de 330 ml amb dues formes diferents: una més alta i prima, i l'altra més baixa i ampla (figura 3.2). Ambdues contenen la mateixa quantitat de refresc, és a dir, tenen el mateix volum. Creus que és necessària la mateixa quantitat de llauna per fabricar cadascuna d'elles? Encercla la resposta que millor s'ajusti al teu punt de vista:

Figura 3.2: *Llaunes de refresc corresponents al problema de recerca 2*.

a) Penso que el recipient més alt i prim té més quantitat de llauna.

b) Em sembla que la quantitat de llauna necessària per fabricar els dos recipients ha de ser la mateixa, ja que les dues tenen el mateix volum.

c) Penso que el recipient més baix i ample té més quantitat de llauna.

d) No sé per on començar el problema i, per això, cap de les respostes anteriors s'ajusta al meu punt de vista.

Aquest problema pretén donar resposta a l'objectiu **O.1.2** de la recerca, ja que es vol veure si pels estudiants la igualtat de volum entre dues figures (les dues llaunes de refresc) implica una igualtat d'àrea total. Es tracta d'un problema amb context quotidià.

- **Problema 3**: Es disposa de dues làmines iguals de cartolina (una grisa fosca i l'altra grisa clara) de forma rectangular, que presenten 31,4 cm de llargada i 6,28 cm d'altura. Amb cadascuna d'elles es vol construir un cilindre, però doblegant-les de dues maneres diferents, tal com s'observa a la següent il·lustració (figura 3.3):

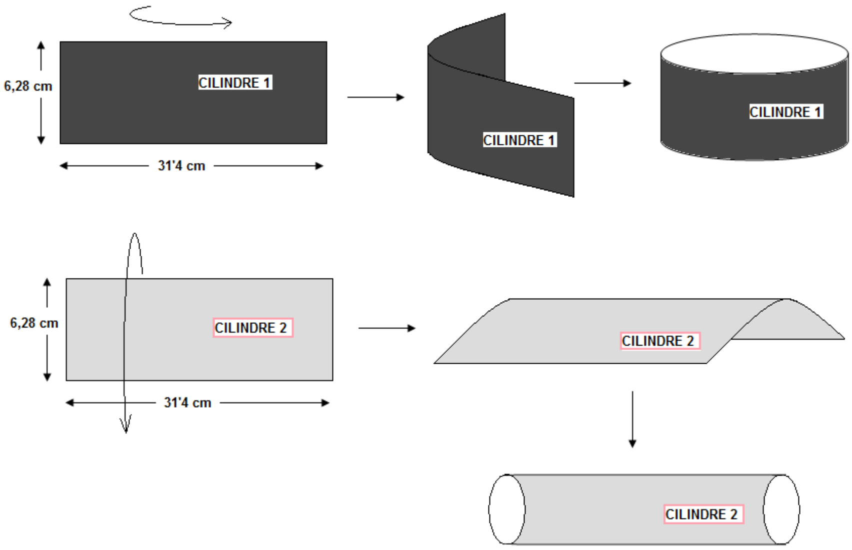


Figura 3.3: *Cilindres corresponents al problema de recerca 3.*

Així, s'obtenen dos cilindres, un de més ample i baix (cilindre 1, de color gris fosc) i un altre de més estret i alt (cilindre 2, de color gris clar). Els dos cilindres tenen la mateixa superfície lateral. Creus que els dos cilindres també tenen el mateix volum? Encercla la resposta que millor s'ajusti al teu punt de vista:

- **a)** Els dos cilindres tenen el mateix volum, ja que els dos tenen la mateixa superfície lateral.
- **b)** El cilindre més ample i baix (el gris fosc) té un volum més gran.
- **c)** El cilindre més estret i alt (el gris clar) té un volum més gran.
- **d)** No sé per on començar el problema i, per això, cap de les respostes anteriors s'ajusta al meu punt de vista.

Aquest problema pretén respondre l'objectiu **O.1.3** de la investigació, ja que es vol veure si pels estudiants la igualtat d'àrea lateral entre dues figures (els dos cilindres de cartolina) implica una igualtat de volum. Es tracta d'un problema amb context quotidià.

Cal comentar que l'enunciat d'aquests tres problemes no és l'enunciat estàndard d'un problema d'extrems, perquè no es pregunta directament per una àrea, per un volum, per una funció,... que s'hagi d'optimitzar. Amb aquest tipus de problemes es vol estudiar l'objectiu **O.1** de la recerca, és a dir, es vol determinar quina és la percepció dels estudiants de la relació entre àrees i perímetres, i entre àrees i volums. Així, es vol veure si pels estudiants els problemes de màxims i mínims en un primer moment són, o no, una veritable dificultat; ja que per alguns d'ells la igualtat de volums, per exemple, pot implicar una igualtat d'àrees totals.

- **<u>Problema 4</u>**: De totes les figures de 8 cm de perímetre que es poden representar sobre el següent diagrama (figura 3.4) dibuixa la que tingui l'àrea més gran (és a dir, l'àrea màxima). Argumenta la teva elecció.

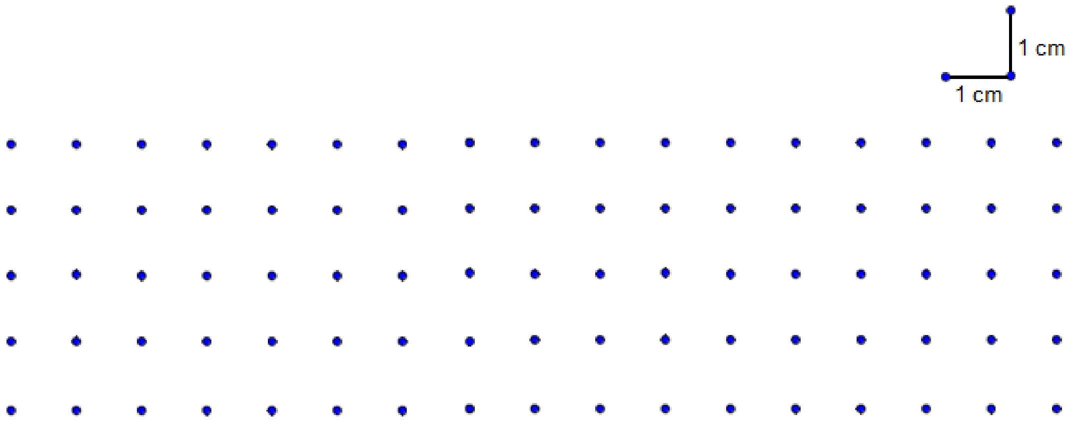


Figura 3.4: *Geoplà corresponent al problema de recerca 4*.

Aquest problema pretén justificar els objectius **O.2** i **O.3** de la investigació, ja que es volen identificar algunes estratègies que segueixen els estudiants per resoldre'l. A més, es volen detectar alguns errors d'aquests alumnes durant la resolució. Es tracta d'un problema amb context estrictament matemàtic.

- **<u>Problema 5</u>**: Sabem que dos números enters i positius sumen 100. Determina quins són aquests números de manera que el seu producte sigui el més gran possible (és a dir, màxim). Argumenta la teva resposta.

Aquest problema pretén, igual que l'anterior, donar resposta als objectius **O.2** i **O.3** de la investigació. També es tracta d'un problema amb context estrictament matemàtic.

- **<u>Problema 6</u>**: Considerem el triangle de vèrtexs *C*, *D* i *E*, tal com es pot veure a la figura 3.5. Passant pel punt *F*, situat en el costat *CD*, dibuixem una recta paral·lela al costat *CE* que talla el costat *DE* en el punt *G*. La recta que passa per *G* i que és paral·lela al segment *CD* talla el costat *CE* en el punt *H*. On cal situar el punt *F* del segment *CD* per tal que el paral·lelogram *CFGH* tingui àrea màxima?

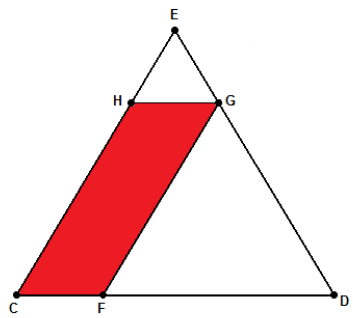


Figura 3.5: *Triangle corresponent al problema de recerca 6*.

Inicialment, et pot semblar complicat respondre aquesta pregunta. A continuació et donem algunes indicacions que et poden ajudar a resoldre el problema.

a) Sobre el retall de paper triangular que se t'adjunta (figura 3.6), dibuixa un triangle, com el de la figura 3.5, de 8 unitats de costat. Pren com a unitat els triangles equilàters del full, és a dir 1 unitat (1 u.) = 1 cm:

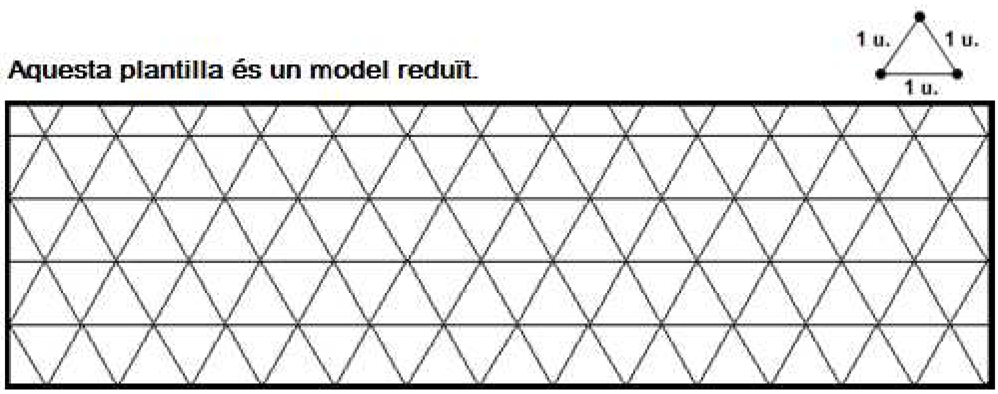


Figura 3.6: *Plantilla corresponent a l'apartat (a) del problema de recerca 6*.

b) Divideix la base del triangle en 8 parts iguals i, per a cadascuna, construeix un paral·lelogram de la mateixa manera que s'indica a l'enunciat del problema. Així, hauries d'obtenir 7 paral·lelograms. Ho has aconseguit?

Sí **No**

c) Calcula l'àrea de cadascun dels paral·lelograms. Recorda que per fer-ho has de multiplicar la longitud de la base per la longitud de l'altura de cada paral·lelogram. En aquest cas et serà útil prendre les mesures amb un regle o bé usar que 1 unitat és igual a 1 cm. Així, completa la informació següent (taula 3.1):

Base (en cm)	**Altura (en cm)**	**Àrea (en cm^2)**

Taula 3.1: *Informació associada a l'apartat (**c**) del problema de recerca 6*.

d) Representa sobre uns eixos de coordenades l'àrea dels paral·lelograms en funció de la seva base. Uneix els punts que has representat amb una corba.

e) Quin és el paral·lelogram que té l'àrea més gran? Com són els seus costats? I els seus angles? Com s'anomena aquest tipus de paral·lelogram?

f) Com són els angles de tots els paral·lelograms que has representat? Argumenta la teva resposta.
Creus que aquest fet és general per a tots els paral·lelograms construïts de la forma que t'indica l'enunciat del problema? Argumenta la teva resposta.

g) Quin és el perímetre de tots els paral·lelograms que has representat? Argumenta la teva resposta.
Creus que aquest fet és general per a tots els paral·lelograms construïts de la forma que t'indica l'enunciat del problema? Argumenta la teva resposta.

h) En general, on creus que s'ha de situar el punt *F* del segment *CD* per tal que l'àrea del paral·lelogram *CFGH* sigui màxima? Argumenta la teva resposta.
Nota: Et pot ser útil usar la informació dels apartats anteriors.

Aquest problema s'incorpora per argumentar l'objectiu **O.3** de la investigació, ja que es volen detectar alguns errors dels estudiants a l'hora de contestar-lo. Es tracta d'un problema amb context estrictament matemàtic. De totes maneres, les limitacions temporals d'aquesta investigació fan que no es puguin analitzar tots els apartats del problema, sinó que se n'ha seleccionat un: l'apartat **(c)**. Aquest apartat és el que, a priori, permet aprofundir millor en una tipologia d'error dels estudiants a l'hora de contestar el problema.

D'altra banda, tal com s'ha explicat a l'apartat 3.3.1 de la memòria, al final de cada problema s'inclou una qüestió en què es demana, en una escala de l'1 (molt fàcil) al 10 (molt difícil), la percepció que té cada alumne de la dificultat del problema. De totes maneres, aquesta qüestió no es tindrà en compte a l'hora de realitzar l'anàlisi de les dades, ja que no està directament relacionada amb els objectius definitius de la recerca, els quals estan descrits a l'apartat 1.3 del treball. El mateix es produeix amb la qüestió final en què es pregunta als estudiants sobre quins bloquejos han tingut a l'hora de realitzar el qüestionari.

A continuació es presenta una graella que relaciona els objectius de la investigació amb cadascun dels problemes que s'analitzen de l'instrument de recollida de dades. A les files trobem els objectius de recerca i a les columnes es presenten els sis problemes del qüestionari que s'expliquen en aquesta secció. Vegem-ho:

	P.1	**P.2**	**P.3**	**P.4**	**P.5**	**P.6 (c)**
O.1						
O.1.1						

O.1.2						
O.1.3						
O.2						
O.3						

Taula 3.2: *Graella que relaciona els objectius de la investigació amb els problemes del qüestionari*.

Objectiu 1 (O.1): Esbrinar quina és la percepció dels estudiants de la relació entre àrees i perímetres, i entre àrees i volums. Aquest objectiu es concretarà en veure si pels estudiants:

- **O.1.1.** La igualtat d'àrea entre dues figures implica una igualtat de perímetre.
- **O.1.2.** La igualtat de volum entre dues figures implica una igualtat d'àrea.
- **O.1.3.** La igualtat d'àrea entre dues figures implica una igualtat de volum.

Objectiu 2 (O.2): Identificar algunes estratègies que segueixen els estudiants per resoldre un problema de màxims i mínims sense estar familiaritzats amb les regles del càlcul diferencial.

Objectiu 3 (O.3): Detectar alguns errors dels estudiants a l'hora de resoldre un problema d'extrems sense estar familiaritzats amb el càlcul diferencial.

3.4. RECOLLIDA DE DADES

Els alumnes van respondre el qüestionari el dia 26 de març a l'Institut de Batxillerat Guillem de Berguedà, de Berga, i el dia 12 d'abril a l'Institut de Batxillerat de l'Arboç. Cal dir que en els dos casos els estudiants van disposar d'una sessió de classe, de 60 minuts, i que corresponia amb la seva hora habitual de matemàtiques.

Pel que fa a l'institut de Berga, el primer de Batxillerat està distribuït en tres grups: A, B i C. La prova es va realitzar de forma simultània als tres grups, és a dir, tots els alumnes van respondre els problemes a la mateixa hora i, així, no es van poder passar cap tipus d'informació. Dins de cada classe hi havia el professor titular de la matèria (Matemàtiques o Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials). Tanmateix, vaig procurar assistir durant un temps en cadascun dels grups per tal de resoldre possibles dubtes amb els enunciats dels problemes.

Pel que fa a l'institut de l'Arboç, el primer de Batxillerat està distribuït en dos grups: A i B. El procediment que es va seguir per recollir les dades és anàleg al realitzat a Berga i l'única diferència és que les hores de classe de matemàtiques d'aquests grups no són simultànies. Ara bé, sí que són una a continuació de l'altra, fet que va evitar que els alumnes es poguessin passar informació del qüestionari, perquè no van sortir de la classe quan acabaren de resoldre els problemes.

D'altra banda, cal dir que per resoldre els problemes es va decidir que els estudiants podien utilitzar la seva calculadora científica. A més, abans de començar el qüestionari es va donar una sèrie d'informacions i recomanacions a l'alumnat, les quals són les següents:

- Cal fer la prova amb bolígraf i, si havien de corregir les seves respostes, es recomanava que no ho esborressin, sinó que ho ratllessin, de manera que es pogués llegir el que havien contestat inicialment.
- El qüestionari realitzat no comptava per a la nota de Matemàtiques dels alumnes, però se'ls demanava i agraïa la seva col·laboració.
- Les dades que s'obtinguessin dels qüestionaris eren totalment anònimes i es garantia la més absoluta confidencialitat d'aquestes.

Finalment, convé remarcar que durant la recollida de dades els estudiants no van presentar dubtes rellevants. Tanmateix, ni el professor ni l'investigador no van intervenir en les respostes dels alumnes.

4. ANÀLISI DE DADES I RESULTATS

En aquest capítol del treball es descriu detalladament l'anàlisi de les dades obtingudes en els qüestionaris dels alumnes i es presenten quins són els resultats d'aquesta recerca.

4.1. PROCÉS D'ANÀLISI

Cal destacar que després de realitzar diverses lectures de les respostes dels alumnes i d'haver-se familiaritzat amb elles, aquestes s'han buidat en un full de càlcul amb l'objectiu de facilitar el procés d'anàlisi. S'han incorporat algunes dades personals dels alumnes, és a dir, la localitat de l'institut (Berga o l'Arboç), l'itinerari de batxillerat, l'edat i el gènere. A més, cada alumne s'ha numerat amb un codi, que va de l'1 al 86 per als alumnes de l'Institut Guillem de Berguedà i del 87 al 138 per als alumnes de l'Institut de l'Arboç. Aquest codi garanteix la confidencialitat de les respostes dels estudiants i, si en algun moment convé fer referència a alguna dada en particular, facilita aquest procés. Tanmateix, s'han incorporat les respostes dels estudiants en els diversos problemes i s'han introduït les estratègies i els errors que s'han detectat en la realització dels tres problemes oberts del qüestionari, classificant-los en les diverses unitats de significat (categories), tal com es descriurà al llarg d'aquest capítol[4].

El procés d'anàlisi de les dades s'ha dividit en tres parts clarament diferenciades. En primer lloc, s'han analitzat els tres problemes de resposta tancada, amb tres opcions de resposta, i que fan referència a l'objectiu **O.1** de la investigació. En aquest cas, només s'ha tingut present la resposta final que han donat els estudiants (a, b, c o d) i no s'han considerat les seves argumentacions. Tal com es detallarà més endavant, per a l'anàlisi d'aquests tres problemes interessa saber la freqüència amb què apareix cada resposta i quin percentatge representa la resposta en qüestió sobre el total.

En segon lloc, s'han analitzat les respostes dels estudiants als problemes 4 i 5, és a dir, els dos problemes oberts que serveixen per justificar l'objectiu **O.2** de la recerca. En aquest cas, es volen detectar les estratègies de resolució de dos problemes d'extrems per part d'una població d'estudiants de primer de Batxillerat que desconeix les regles i les tècniques del càlcul diferencial. A partir de l'apartat 2.4 del marc teòric, s'han agrupat les

---

[4] L'**annex 4** de la memòria conté un resum, en forma de taula, de les dades obtingudes durant el procés d'anàlisi per a les dues poblacions estudiades.

respostes dels estudiants en unes unitats de significat inicials, és a dir, en unes categories inicials, les quals s'han modificat lleugerament per tal d'ajustar-se a les dades particulars. Després, s'ha determinat quin percentatge representa cada categoria sobre el total de la població estudiada. Cal dir que per determinar el tipus d'estratègia no s'ha valorat si el procediment i/o els arguments dels estudiants són correctes, sinó que s'ha centrat l'atenció en detectar les diverses tècniques de resolució que han seguit els alumnes. Naturalment, les categories que s'han definit són disjuntes i, així, la resposta d'un alumne en concret només es pot englobar en una única categoria.

En tercer lloc, s'han analitzat les respostes dels estudiants als problemes 4, 5 i 6 – apartat (**c**). En aquest cas, però, s'ha centrat l'atenció en detectar quins errors han tingut els alumnes a l'hora de resoldre aquests problemes. A partir de l'apartat 2.5 del marc teòric, s'han agrupat les respostes dels estudiants en unes categories inicials, les quals s'han anat modificant per ajustar-se a les dades particulars de la recerca. Com en el cas de les estratègies, les categories d'errors s'han definit de forma disjunta i, així, un mateix error no pot figurar en dues unitats de significat a la vegada. En aquest cas, també és interessant conèixer quin percentatge representa cada categoria sobre el total de la població investigada.

D'aquesta manera, el tipus d'anàlisi de dades que es realitza per donar resposta als objectius **O.2** i **O.3** de la recerca és una <u>anàlisi inductiva – deductiva</u>.

Finalment, cal dir que en el proper apartat es detalla l'anàlisi de dades que s'ha seguit en cadascun dels casos, i s'obtenen i discuteixen els resultats. Tanmateix, és útil comentar que els resultats de l'anàlisi es detallen per als dos instituts i, també, es presenten agrupats, considerant el total de la població estudiada. Això es pot realitzar perquè, tal com s'ha descrit a l'apartat 3.2, les dues poblacions tenen característiques semblants i no existeixen fets rellevants que facin pensar que les dades s'han d'estudiar necessàriament per separat.

4.2. RESULTATS I DISCUSSIÓ

En aquest apartat es presenten els resultats de l'anàlisi de les respostes del qüestionari per a cadascun dels problemes i es relacionen amb els diversos objectius de recerca. Tanmateix, es realitza la discussió d'aquests resultats.

4.2.1. ANÀLISI DELS PROBLEMES DE RESPOSTA TANCADA I OBTENCIÓ DE RESULTATS

En aquesta secció s'analitzen els resultats dels tres primers problemes, és a dir, els problemes de resposta tancada del qüestionari. Com s'ha comentat anteriorment, aquests problemes estan plantejats per justificar l'objectiu **O.1** de la recerca, és a dir, es vol determinar quina és la percepció dels estudiants de la relació entre àrees i perímetres; i entre àrees i volums. Així, es vol veure si pels estudiants els problemes de màxims i mínims en un primer moment són, o no, una veritable dificultat. Per aquest motiu, només s'analitza la freqüència amb què apareix cadascuna de les respostes i se centra l'atenció en determinar el percentatge d'alumnes que contesta que, pel fet d'existir una igualtat d'àrees (respectivament de volums) hi ha, necessàriament, una igualtat de volums (respectivament d'àrees).

A continuació es presenten els resultats de cada problema, de forma global i detallada per a cada institut. Després, s'elaboren uns gràfics que sintetitzen tota la informació. Vegem-ho:

- **PROBLEMA 1**: Si considerem la totalitat de la població estudiada, és a dir, els 138 alumnes, observem que 22 alumnes (15'94 %) responen la pregunta A, cap alumne no respon la pregunta B, 2 alumnes (1'45 %) responen la pregunta C, 112 alumnes (81'16 %) contesten la pregunta D i 2 alumnes (1'45 %) no responen aquest problema 1.

Per tant, s'observa que només el 15'94% de la població estudiada respon, en aquest cas, que pel fet d'existir una igualtat d'àrea entre els tres triangles també hi ha una igualtat de perímetre. D'altra banda, la gran majoria, és a dir, el 81'16 % dels estudiants contesten la resposta adequada des del punt de vista matemàtic, és a dir, la resposta D del problema.

La següent taula resumeix les dades que s'acaben de comentar:

PROBLEMA 1	
TOTAL ALUMNES	
Resposta A	22
Resposta B	0
Resposta C	2
Resposta D	112
N/C	2
Resposta A	15,94%
Resposta B	0,00%
Resposta C	1,45%
Resposta D	81,16%
N/C	1,45%

Taula 4.1: *Resultats del problema 1 obtinguts per la totalitat d'alumnes investigats*.

Si considerem la població estudiada de l'Institut Guillem de Berguedà, és a dir, els 86 alumnes, observem que 13 alumnes (15'12 %) responen la pregunta A, cap alumne no respon la pregunta B, 1 alumne (1'16 %) respon la pregunta C i 72 alumnes (83'72 %) contesten la pregunta D.

Per tant, s'observa que els percentatges de resposta per a cada pregunta són molt semblants al cas anterior, és a dir, quan s'estudia tota la població i es posa de manifest que la resposta més majoritària és l'adequada des del punt de vista matemàtic (la resposta D). A més, s'observa que només un 15'12% de la població estudiada respon, en aquest cas, que pel fet d'existir una igualtat d'àrea entre els tres triangles també hi ha una igualtat de perímetre.

La següent taula resumeix les dades que s'acaben de comentar:

ALUMNES DE BERGA	
Resposta A	13
Resposta B	0
Resposta C	1
Resposta D	72
N/C	0
Resposta A	15,12%
Resposta B	0,00%
Resposta C	1,16%
Resposta D	83,72%
N/C	0,00%

Taula 4.2: *Resultats del problema 1 obtinguts per la població estudiada de Berga*.

Si considerem la <u>població estudiada de l'Institut de l'Arboç</u>, és a dir, els 52 alumnes, observem que 9 alumnes (17'31 %) responen la pregunta A, cap alumne no respon la pregunta B, 1 alumne (1'92 %) respon la pregunta C, 40 alumnes (76'92 %) contesten la pregunta D i 2 alumnes (3'85 %) no contesten el problema.

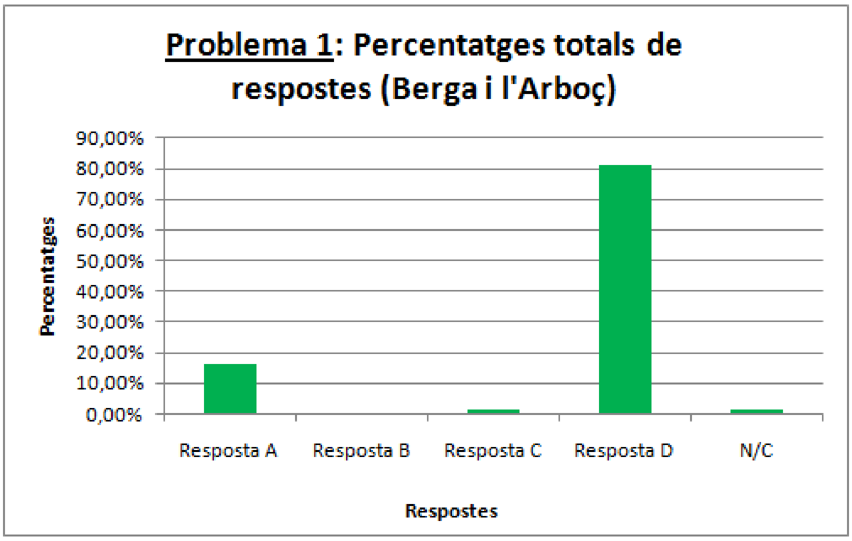
Per tant, s'observa que els percentatges de resposta per a cada pregunta són força semblants als casos anteriors, encara que aquí el percentatge d'estudiants que responen la pregunta A és lleugerament superior al de la població estudiada de Berga i el percentatge d'alumnes que contesten la D és inferior al cas anterior. Ara bé, més del 76% dels alumnes responen la pregunta adequada des del punt de vista matemàtic i poc més del 17% associa la igualtat d'àrea entre els tres triangles amb la igualtat de seu perímetre.

La següent taula resumeix les dades que s'acaben de comentar:

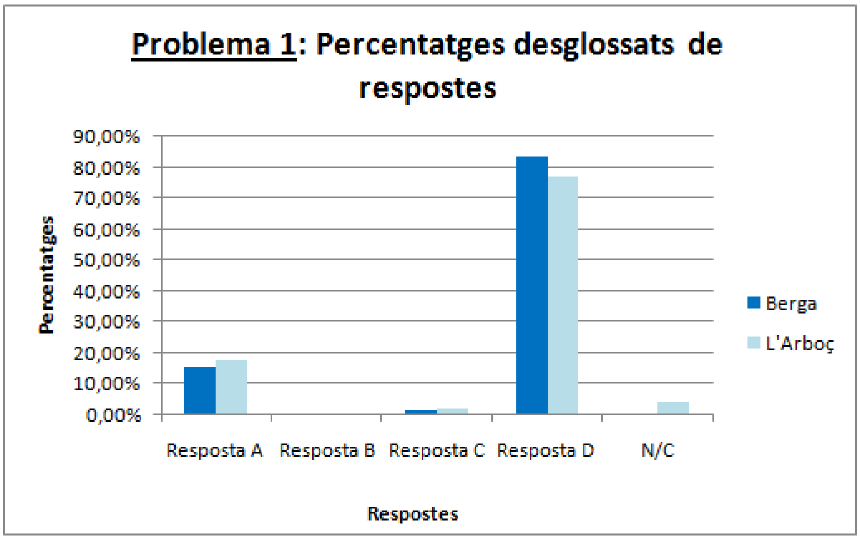
ALUMNES DE L'ARBOÇ	
Resposta A	9
Resposta B	0
Resposta C	1
Resposta D	40
N/C	2
Resposta A	17,31%
Resposta B	0,00%
Resposta C	1,92%
Resposta D	76,92%
N/C	3,85%

Taula 4.3: *Resultats del problema 1 obtinguts per la població estudiada de l'Arboç*.

Finalment, s'inclouen dos gràfics que presenten els percentatges totals de respostes en els dos instituts. Vegem-los:



Gràfic 4.1: *Percentatges totals de respostes per al problema 1.*



Gràfic 4.2: *Percentatges desglossats de respostes per al problema 1.*

- **PROBLEMA 2**: Si considerem la totalitat de la població estudiada, és a dir, els 138 alumnes, observem que 8 alumnes (5'80 %) responen la pregunta A, 105 alumnes (76'09 %) contesten la pregunta B, 20 alumnes (14'49 %) responen la pregunta C i 5 alumnes (3'62 %) contesten la pregunta D.

Per tant, s'observa que un percentatge molt gran dels alumnes estudiats, més del 76 %, responen, en aquest cas, que pel fet d'existir una igualtat de volum entre les dues llaunes també hi ha una igualtat d'àrea total, és a dir, que la quantitat de material que es necessita per construir-les és el mateix en els dos casos, ja que tenen el mateix volum. D'altra banda, també cal remarcar que només el 3'62 % de la població estudiada respon la pregunta D, és a dir, que un percentatge molt baix dels participants afirmen que no saben per on començar el problema i que, per això, cap de les respostes que se'ls facilita s'ajusta al seu punt de vista.

Així, es pot pensar que el punt de partida d'aquests estudiants a l'hora de resoldre un problema d'extrems en què s'hagi de maximitzar l'àrea total fixat el volum no és adequat des del punt de vista matemàtic. El motiu és que, per a la gran majoria, no representa una situació amb significat matemàtic, perquè associen que una igualtat de volum entre dues figures implica, directament, una igualtat de les seves àrees totals.

La següent taula resumeix les dades que s'acaben de comentar:

PROBLEMA 2	
TOTAL ALUMNES	
Resposta A	8
Resposta B	105
Resposta C	20
Resposta D	5
N/C	0
Resposta A	5,80%
Resposta B	76,09%
Resposta C	14,49%
Resposta D	3,62%
N/C	0,00%

Taula 4.4: *Resultats del problema 2 obtinguts per la totalitat d'alumnes investigats*.

Si considerem la población estudiada de l'Institut Guillem de Berguedà, és a dir, els 86 alumnes, observem que 6 alumnes (6'98 %) responen la pregunta A, 71 alumnes (82'56 %) contesten la pregunta B, 7 alumnes (8'14 %) responen la pregunta C i 2 alumnes (2'33 %) contesten la pregunta D.

Així, el fet més rellevant que s'observa és que més del 82 % dels alumnes estudiats a Berga responen, en aquest cas, que pel fet d'existir una igualtat de volum entre les dues llaunes de refresc també hi ha una igualtat d'àrea total.

La següent taula resumeix les dades que s'acaben de comentar:

ALUMNES DE BERGA	
Resposta A	6
Resposta B	71
Resposta C	7
Resposta D	2
N/C	0
Resposta A	6,98%
Resposta B	82,56%
Resposta C	8,14%
Resposta D	2,33%
N/C	0,00%

Taula 4.5: *Resultats del problema 2 obtinguts per la població estudiada de Berga*.

Si considerem la población estudiada de l'Institut de l'Arboç, és a dir, els 52 alumnes, observem que 2 alumnes (3'85 %) responen la pregunta A, 34 alumnes (65'38 %) contesten la pregunta B, 13 alumnes (25 %) responen la pregunta C i 3 alumnes (5'77 %) contesten la pregunta D.

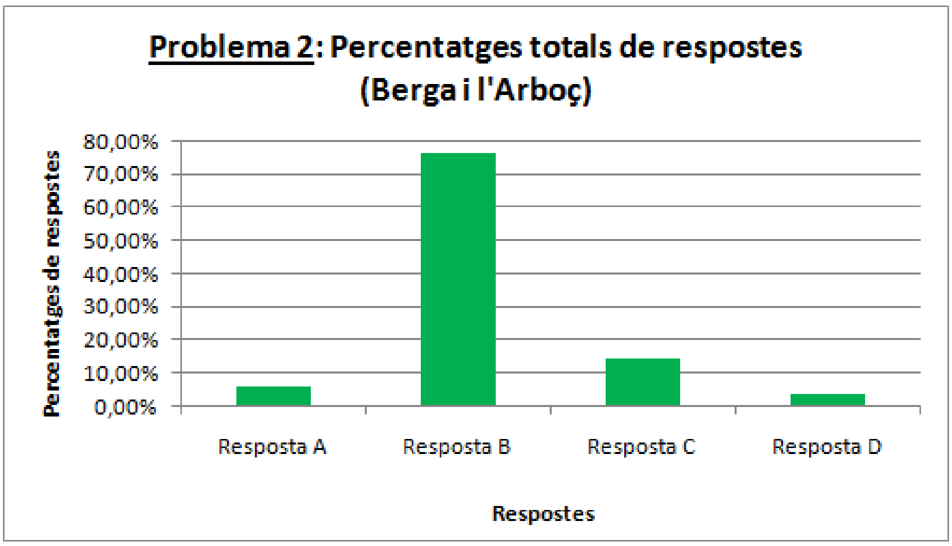
En aquest cas, cal destacar que aproximadament el 65 % dels estudiants responen que, pel fet d'existir una igualtat de volum entre les dues llaunes de refresc, també hi ha una igualtat d'àrea total. Aquest percentatge, tot i ser alt, és bastant inferior que el registrat per a la població de Berga. Tanmateix, també cal remarcar que un de cada quatre alumnes respon la pregunta C, és a dir, que el recipient més baix i ample té més quantitat de llauna. Es tracta d'un percentatge força superior al que s'ha observat per a la població de Berga.

La següent taula resumeix les dades que s'acaben de comentar:

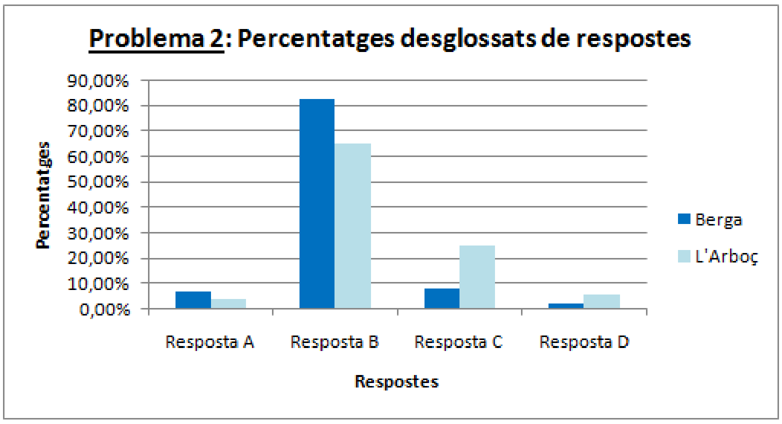
ALUMNES DE L'ARBOÇ	
Resposta A	2
Resposta B	34
Resposta C	13
Resposta D	3
N/C	0
Resposta A	3,85%
Resposta B	65,38%
Resposta C	25,00%
Resposta D	5,77%
N/C	0,00%

Taula 4.6: *Resultats del problema 2 obtinguts per la població estudiada de l'Arboç*.

Finalment, s'inclouen dos gràfics que presenten els percentatges totals de respostes en els dos instituts. Vegem-los:



Gràfic 4.3: *Percentatges totals de respostes per al problema 2*.



Gràfic 4.4: *Percentatges desglossats de respostes per al problema 2*.

- **<u>PROBLEMA 3</u>**: Si considerem la <u>totalitat de la població estudiada</u>, és a dir, els 138 alumnes, observem que 95 alumnes (68'84 %) responen la pregunta A, 33 alumnes (23'91 %) contesten la pregunta B, 4 alumnes (2'90 %) responen la pregunta C i 6 alumnes (4'35 %) contesten la pregunta D.

Per tant, s'observa que un percentatge bastant gran dels participants, més del 68 %, respon, en aquest cas, que pel fet d'existir una igualtat de superfície lateral entre els dos cilindres també hi ha una igualtat de volum. D'altra banda, també cal remarcar que només el 4'35 % de la població estudiada respon la pregunta D, és a dir, que un percentatge molt baix dels alumnes estudiats afirmen que no saben per on començar el problema i que, per això, cap de les respostes que se'ls facilita s'ajusta al seu punt de vista. Tanmateix, s'observa que gairebé un de quatre alumnes respon la pregunta B, és a dir, l'adequada des del punt de vista matemàtic.

Així, es pot pensar que el punt de partida d'aquests estudiants a l'hora de resoldre un problema d'extrems en què s'hagi de maximitzar el volum, fixada la superfície lateral, no és adequat des del punt de vista matemàtic. El motiu és que, per a la gran majoria, no representa una situació amb significat matemàtic, perquè associen que una igualtat de superfície lateral entre dues figures implica, directament, una igualtat dels seus volums.

La següent taula resumeix les dades que s'acaben de comentar:

PROBLEMA 3	
TOTAL ALUMNES	
Resposta A	95
Resposta B	33
Resposta C	4
Resposta D	6
N/C	0
Resposta A	68,84%
Resposta B	23,91%
Resposta C	2,90%
Resposta D	4,35%
N/C	0,00%

Taula 4.7: *Resultats del problema 3 obtinguts per la totalitat d'alumnes investigats*.

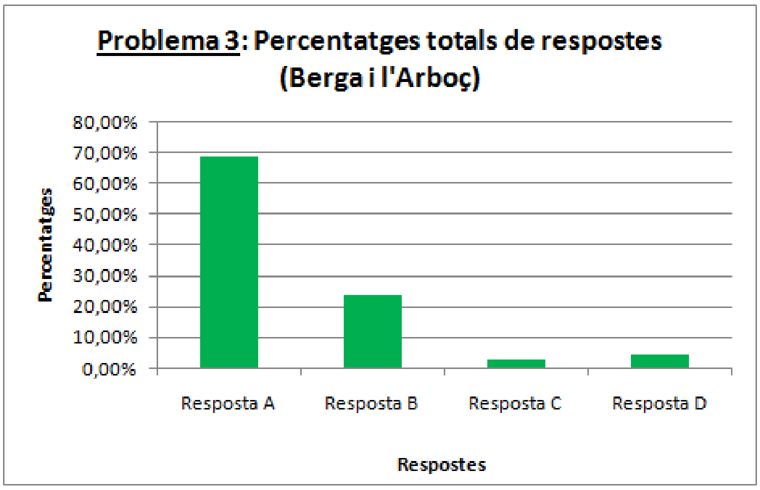
En aquest cas, cal tenir present que si s'observen les dades dels dos instituts per separat no es detecten diferències notables pel que fa al percentatge de les diferents respostes i, per aquest motiu, a continuació ens limitem a presentar unes taules que resumeixen les dades per als dos instituts per separat. Vegem-ho:

ALUMNES DE BERGA	
Resposta A	61
Resposta B	19
Resposta C	2
Resposta D	4
N/C	0
Resposta A	70,93%
Resposta B	22,09%
Resposta C	2,33%
Resposta D	4,65%
N/C	0,00%

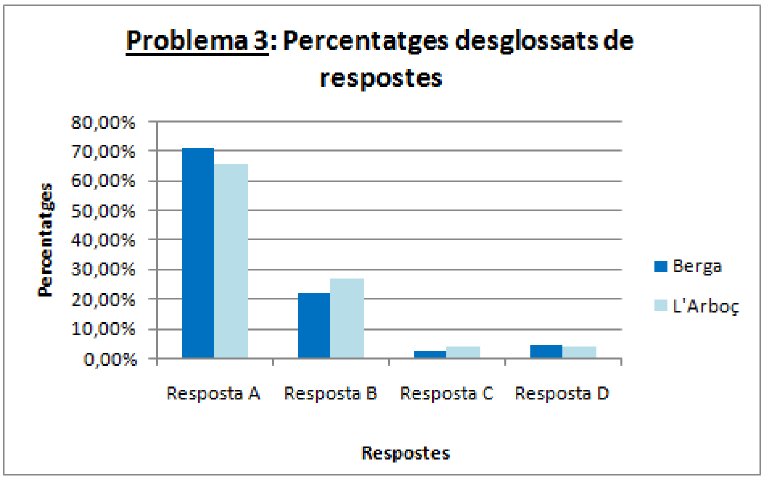
ALUMNES DE L'ARBOÇ	
Resposta A	34
Resposta B	14
Resposta C	2
Resposta D	2
N/C	0
Resposta A	65,38%
Resposta B	26,92%
Resposta C	3,85%
Resposta D	3,85%
N/C	0,00%

Taula 4.8: *Resultats del problema 3 obtinguts pels alumnes de cada institut*.

Finalment, s'inclouen dos gràfics que mostren els percentatges totals de respostes en els dos instituts. Vegem-los:



Gràfic 4.5: *Percentatges totals de respostes per al problema 3*.



Gràfic 4.6: *Percentatges desglossats de respostes per al problema 3*.

4.2.2. ANÀLISI DE LES ESTRATÈGIES DE RESOLUCIÓ DE DOS PROBLEMES DE RESPOSTA OBERTA

En aquest apartat es realitza l'anàlisi dels problemes 4 i 5 de l'instrument de recollida de dades, els quals són de resposta oberta. Així, es volen identificar algunes estratègies de resolució que han seguit els alumnes a l'hora de respondre aquests dos problemes del qüestionari. A més a més, es presenten els resultats de l'anàlisi i la seva discussió.

L'estudi del marc teòric de la recerca pel que fa a la detecció d'estratègies de resolució de problemes matemàtics, el qual s'explica en l'apartat 2.4 de la memòria, fa pensar que, inicialment, es puguin detectar tres mecanismes de resolució d'aquests problemes per part de l'alumnat. Les estratègies s'engloben en les categories, o unitats de significat, següents: *assaig i error*; *fer una llista o un recompte*; i *conjecturar*. De totes maneres, l'anàlisi dels qüestionaris contestats pels participants fa necessària i imprescindible l'adequació d'aquestes categories a la realitat de la investigació. Així, s'observa l'aparició de tres unitats de significat que no estaven previstes inicialment i que són les següents: *particularització d'un resultat més general*; *buscar una funció que serveixi de patró i experimentar; i sense estratègia detectada en el nivell que s'emmarca aquest treball*.

A continuació es defineixen amb detall les categories i s'explicita quines es detecten en cadascun dels dos problemes estudiats. Tanmateix, es realitza un recompte de la freqüència amb què s'usa cada estratègia, es presenten les dades en forma de taula i gràfic per a cadascuna de les poblacions analitzades i es mostra un exemple representatiu de cada unitat de significat.

- **<u>CATEGORIA 1</u>**: **Assaig i error (A.E.)**: els estudiants escullen un valor o resultat, apliquen les condicions de l'enunciat del problema per aquell valor i proven si s'ha aconseguit l'objectiu. En cas afirmatiu, s'atura el procés i es considera que aquesta és la solució. Sinó, els alumnes continuen provant fins arribar a la solució. Els valors es trien de manera fortuïta o sistemàtica, però a partir dels intents i sense establir una conjectura a priori. Tanmateix, no s'elabora una llista, és a dir, no es consideren totes les possibilitats. Aquesta estratègia es detecta en els dos problemes de resposta oberta estudiats, és a dir, els problemes 4 i 5 de l'instrument de recollida de dades.

Si considerem la <u>totalitat de la població estudiada</u>, és a dir, els 138 alumnes, observem que 17 d'ells (12'32 %) utilitzen l'*assaig i error* per respondre el problema 4 i 15 participants (10'87 %) fan ús d'aquesta estratègia per resoldre el problema 5. A més, si observem la <u>població estudiada de l'Institut Guillem de Berguedà</u>, és a dir, els 86 alumnes, ens adonem que 13 d'ells (15'12 %) utilitzen l'*assaig i error* per respondre el problema 4 i 10 participants (11’63 %) fan ús d’aquesta estratègia per resoldre el problema 5. Finalment, si analitzem la población estudiada de l’Institut de l’Arboç, és a dir, els 52 alumnes, observem que 4 d’ells (7’69 %) utilitzen l’*assaig i error* per donar resposta al problema 4 i 5 participants (9’62 %) fan servir aquesta estratègia per resoldre el problema 5.

A continuació es mostra la resposta de l’alumne 58 de l’Institut Guillem de Berguedà, la qual serveix per il·lustrar aquesta unitat de significat per al problema 5[5]:

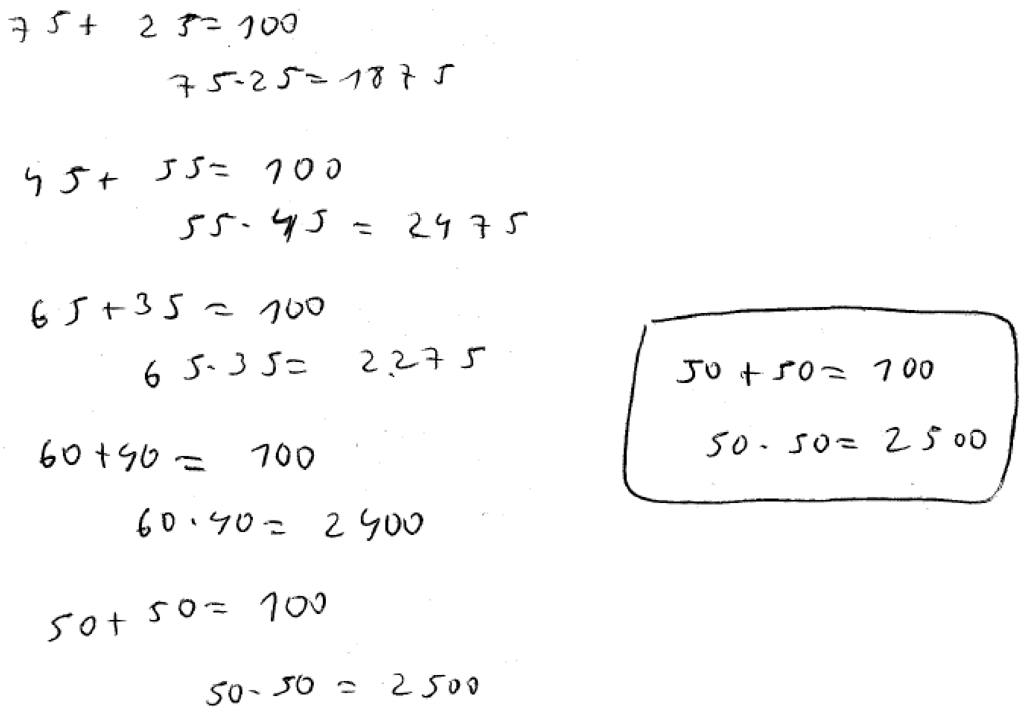


Figura 4.1: *Model de resposta de la categoria 1 per al problema 5 (alumne 58)*.

- **CATEGORIA 2**: **Fer una llista o un recompte (Ll.R.)**: es tracta de relacionar tots els possibles resultats i el que compleixi les exigències plantejades pel problema és la solució. Els resultats es poden calcular tots explícitament o bé es calculen uns casos particulars i es generalitza el patró que s’observa. De totes maneres, en aquesta estratègia queda clar que la solució del problema s’obté després d’haver provat tots els resultats possibles. L’estratègia es detecta en els dos problemes de resposta oberta estudiats, és a dir, els problemes 4 i 5 de l’instrument de recollida de dades.

Si considerem la totalitat de la població estudiada, és a dir, els 138 alumnes, observem que 6 d’ells (4’35 %) utilitzen *una llista o un recompte* per respondre el problema 4 i

[5] L’**annex 5** del treball conté altres exemples de resposta que serveixen per il·lustrar les unitats de significat per al problema 4.

9 participants (6’52 %) fan ús d’aquesta estratègia per resoldre el problema 5. A més, si observem la población estudiada de l’Institut Guillem de Berguedà, és a dir, els 86 alumnes, ens adonem que cap d’ells no utilitza *una llista o un recompte* per respondre el problema 4 i 6 participants (6’98 %) fan ús d’aquesta estratègia per resoldre el problema 5. Finalment, si analitzem la població estudiada de l’Institut de l’Arboç, és a dir, els 52 alumnes, observem que 6 d’ells (11’54 %) utilitzen *una llista o un recompte* per donar resposta al problema 4 i 3 participants (5’77 %) fan servir aquesta estratègia per resoldre el problema 5.

A continuació es mostra la resposta de l’alumne 133 de l’Institut de l’Arboç, la qual serveix per il·lustrar aquesta unitat de significat per al problema 5:

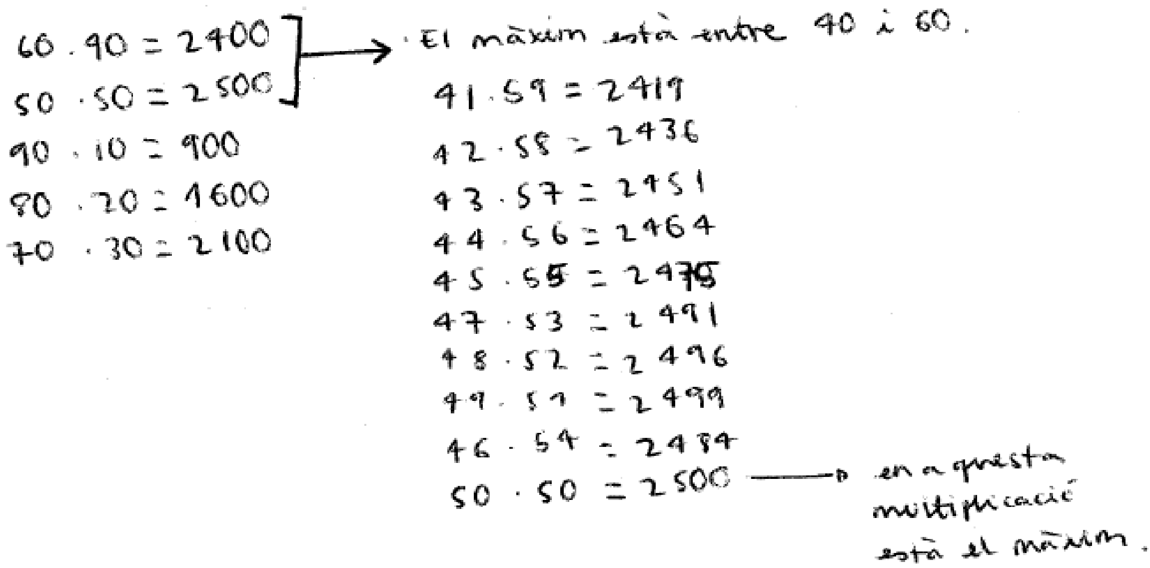


Figura 4.2: *Model de resposta de la categoria 2 per al problema 5 (alumne 58).*

- **CATEGORIA 3**: **Conjecturar (C.)**: els estudiants determinen un valor que assumeixen com a solució del problema. Es tracta d’una unitat de significat molt àmplia i l’anàlisi de les dades precisa la definició de tres subcategories més detallades:

– **Conjecturar la solució sense verificar-la ni argumentar-la (C.S.)**: els alumnes determinen un resultat que assumeixen com a solució del problema, però no el comproven i, tampoc, no expliquen ni argumenten com l’han obtingut.

Si considerem la totalitat de la població estudiada, és a dir, els 138 alumnes, observem que 58 d’ells (42’03 %) *conjecturen la solució sense verificar-la ni argumentar-la* per respondre el problema 4 i 24 participants (17’39 %) fan ús d’aquesta estratègia per resoldre el problema 5. A més, si observem la població estudiada de l’Institut Guillem de Berguedà, és a dir, els 86 alumnes, ens adonem que 35 d’ells (40’7 %) *conjecturen la solució sense verificar-la ni argumentar-la* per respondre el problema 4 i 10 participants

(11'63 %) fan ús d'aquesta estratègia per resoldre el problema 5. Finalment, si analitzem la població estudiada de l'Institut de l'Arboç, és a dir, els 52 alumnes, observem que 23 d'ells (44'23 %) *conjecturen la solució sense verificar-la ni argumentar-la* per donar resposta al problema 4 i 14 participants (26'92 %) fan servir aquesta estratègia per resoldre el problema 5.

A continuació es mostra la resposta de l'alumne 9 de l'Institut Guillem de Berguedà, la qual serveix per il·lustrar aquesta unitat de significat per al problema 5:

Figura 4.3: *Model de resposta de la categoria 3 (C.S.) per al problema 5 (alumne 9)*.

– **Conjecturar la solució i verificar-la (C.S.V.)**: els estudiants seleccionen un resultat que assumeixen com a solució del problema i, després, només comproven que compleix les condicions de l'enunciat.

Si considerem la totalitat de la població estudiada, és a dir, els 138 alumnes, observem que 21 d'ells (15'22 %) *conjecturen la solució i la verifiquen* per respondre el problema 4 i 59 participants (42'75 %) fan ús d'aquesta estratègia per resoldre el problema 5. A més, si observem la població estudiada de l'Institut Guillem de Berguedà, és a dir, els 86 alumnes, ens adonem que 14 d'ells (16'28 %) *conjecturen la solució i la verifiquen* per respondre el problema 4 i 42 participants (48'84 %) fan ús d'aquesta estratègia per resoldre el problema 5. Finalment, si analitzem la població estudiada de l'Institut de l'Arboç, és a dir, els 52 alumnes, observem que 7 d'ells (13'46 %) *conjecturen la solució i la verifiquen* per donar resposta al problema 4 i 17 participants (32'69 %) fan servir aquesta estratègia per resoldre el problema 5.

A continuació es mostra la resposta de l'alumne 1 de l'Institut Guillem de Berguedà, la qual serveix per il·lustrar aquesta unitat de significat per al problema 5:

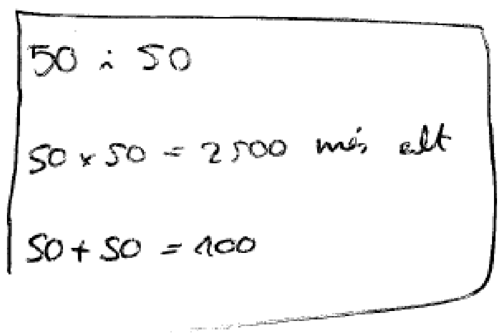
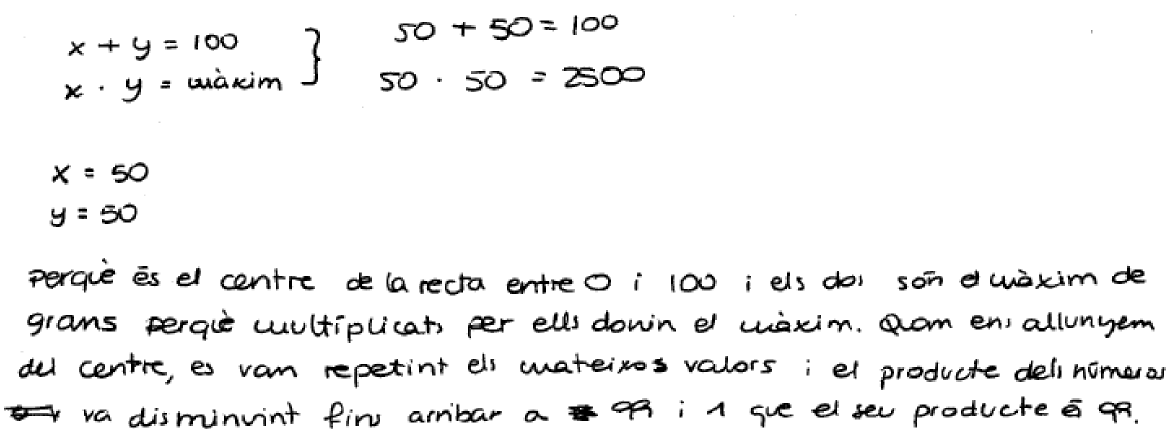


Figura 4.4: *Model de resposta de la categoria 3 (C.S.V.) per al problema 5 (alumne 1)*.

– **Conjecturar la solució, verificar-la i argumentar-la (C.S.V.A.)**: els alumnes determinen un resultat que assumeixen com a solució del problema i comproven que compleix les condicions de l'enunciat. Després, utilitzen arguments matemàtics per intentar raonar l'obtenció d'aquest valor com a solució del problema que resolen.

Si considerem la <u>totalitat de la població estudiada</u>, és a dir, els 138 alumnes, observem que 17 d'ells (12'32 %) *conjecturen la solució, la verifiquen i l'argumenten* per respondre el problema 4 i 12 participants (8'7 %) fan ús d'aquesta estratègia per resoldre el problema 5. A més, si observem la <u>població estudiada de l'Institut Guillem de Berguedà</u>, és a dir, els 86 alumnes, ens adonem que 8 d'ells (9'3 %) *conjecturen la solució, la verifiquen i l'argumenten* per respondre el problema 4 i 6 participants (6'98 %) fan ús d'aquesta estratègia per resoldre el problema 5. Finalment, si analitzem la <u>població estudiada de l'Institut de l'Arboç</u>, és a dir, els 52 alumnes, observem que 9 d'ells (17'31 %) *conjecturen la solució, la verifiquen i l'argumenten* per donar resposta al problema 4 i 6 participants (11'54 %) fan servir aquesta estratègia per resoldre el problema 5.

A continuació es mostra la resposta de l'alumne 33 de l'Institut Guillem de Berguedà, la qual serveix per il·lustrar aquesta unitat de significat per al problema 5:


$$\left.\begin{array}{l} x + y = 100 \\ x \cdot y = \text{màxim} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 50 + 50 = 100 \\ 50 \cdot 50 = 2500 \end{array}$$

$x = 50$
$y = 50$

perquè és el centre de la recta entre 0 i 100 i els dos són el màxim de grans perquè multiplicats per ells donin el màxim. Quan ens allunyem del centre, es van repetint els mateixos valors i el producte dels números va disminuint fins arribar a 99 i 1 que el seu producte é 99.

Figura 4.5: *Model de resposta de la categoria 3 (C.S.V.A.) per al problema 5 (alumne 33)*.

En resum, aquesta estratègia es detecta en els dos problemes de resposta oberta estudiats, és a dir, els problemes 4 i 5 de l'instrument de recollida de dades. Si considerem la <u>totalitat de la població estudiada</u>, és a dir, els 138 alumnes, observem que 96 d'ells (69'57 %) utilitzen *una conjectura* per respondre el problema 4 i 95 participants (68'84 %) fan ús d'aquesta estratègia per donar una resposta al problema 5. A més, si observem la <u>població estudiada de l'Institut Guillem de Berguedà</u>, és a dir, els 86 alumnes, ens adonem que 57 d'ells (66'28 %) utilitzen *una conjectura* per respondre el problema 4 i 58 participants (67'44 %) fan ús d'aquesta estratègia per resoldre el problema 5. Finalment, si analitzem la <u>població estudiada de l'Institut de l'Arboç</u>, és a dir, els 52 alumnes, observem que 39 d'ells (75 %) utilitzen *una conjectura* per respondre el problema 4 i 37 participants (71'15 %) fan servir aquesta estratègia per resoldre el problema 5.

- **<u>CATEGORIA 4</u>**: **Particularització d'un resultat més general (P.R.G.)**: els estudiants fan referència a un resultat més general que coneixen o intueixen per argumentar la solució del problema amb què estan treballant. Per exemple: per justificar que de tots els rectangles de perímetre fixat, el quadrat és el que té l'àrea més gran, es fan idea d'un resultat més general que és: "*de totes les corbes de longitud fixada, la circumferència és la que tanca una àrea major*". Així, consideren el problema de maximitzar l'àrea del rectangle de perímetre fixat com un cas particular del problema de la circumferència.

Aquesta estratègia només es detecta en el problema 4 de l'instrument de recollida de dades, ja que és el més favorable perquè sorgeixi un raonament d'aquest tipus.

Si considerem la <u>totalitat de la població estudiada</u>, és a dir, els 138 alumnes, observem que 8 d'ells (5'8 %) *particularitzen un resultat més general* per respondre el problema 4. A més, si observem la <u>població estudiada de l'Institut Guillem de Berguedà</u>, és a dir, els 86 alumnes, ens adonem que 7 participants (8'14 %) utilitzen aquesta estratègia per resoldre el problema. En canvi, si analitzem la <u>població estudiada de l'Institut de l'Arboç</u>, és a dir, els 52 alumnes, observem que només 1 d'ells (1'92 %) *particularitza un resultat més general* per respondre el problema 4 del qüestionari.

A continuació es mostra la resposta de l'alumne 47 de l'Institut Guillem de Berguedà, la qual serveix per il·lustrar aquesta unitat de significat:

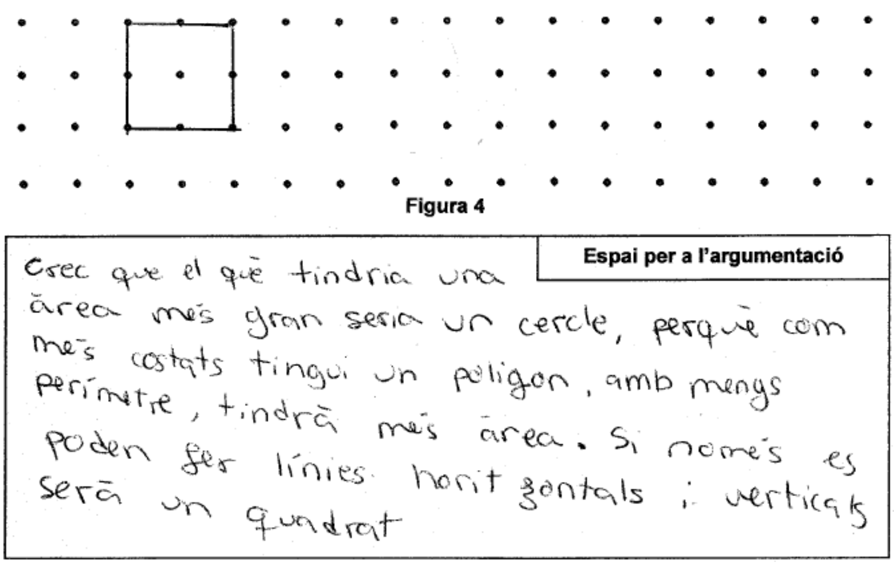


Figura 4.6: *Model de resposta de la categoria 4 (alumne 47).*

- **<u>CATEGORIA 5</u>: Buscar una funció que serveixi de patró i experimentar (B.F.P.)**: els estudiants obtenen pautes que permeten analitzar un determinat model (una funció) per veure si s'observa una regularitat que suggereixi la solució del problema. Aquesta estratègia només es detecta en el problema 5 de l'instrument de recollida de dades, ja que és el més favorable perquè sorgeixi un raonament d'aquest tipus.

Només 2 alumnes de l'Institut de l'Arboç *busquen una funció que els serveix de patró i experimenten*, fet que correspon al 1'45 % de la població total estudiada. Si ens centrem en els participants de l'Arboç, aquesta estratègia representa un 3'85 % del total de qüestionaris analitzats.

A continuació es mostra la resposta de l'alumne 136 de l'Institut de l'Arboç, la qual serveix per il·lustrar aquesta unitat de significat:

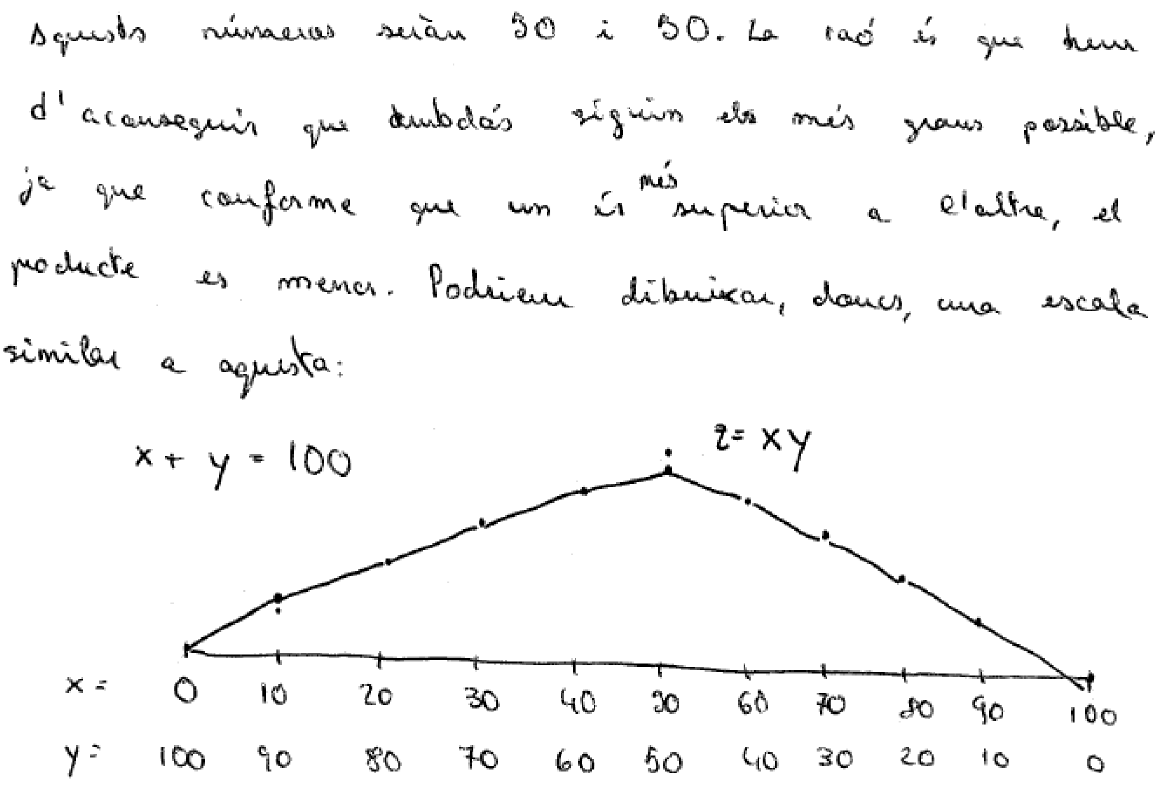


Figura 4.7: *Model de resposta de la categoria 5 (alumne 136).*

- **<u>CATEGORIA 6</u>: Sense estratègia detectada en el nivell que s'emmarca aquest treball (S.E.D.)**: la manifesten aquells alumnes que no identifiquen la incògnita, les dades o la condició del problema. També figuren en aquesta categoria els estudiants que no contesten el problema. Per definir aquesta unitat de significat s'ha tingut present l'article de VALLE, M.C. *et al.* (2007, pàg. 6), el qual es comenta a l'apartat 2.4 del marc teòric de la memòria. Cal dir que aquesta categoria de resposta es detecta en els dos problemes estudiats, és a dir, els problemes 4 i 5 de l'instrument de recerca.

Si considerem la totalitat de la població estudiada, és a dir, les respostes dels 138 alumnes, observem que en 11 respostes del problema 4 (7'97 %) i en 17 respostes del problema 5 (12'32 %) no s'ha pogut detectar una estratègia en el nivell que s'emmarca aquest treball. A més, si observem la població estudiada de l'Institut Guillem de Berguedà, és a dir, les respostes dels 86 alumnes, ens adonem que en 9 respostes del problema 4 (10'47 %) i en 12 respostes del problema 5 (13'95 %) no s'ha pogut detectar una estratègia en el nivell d'aquesta investigació. Finalment, si analitzem la població estudiada de l'Institut de l'Arboç, és a dir, les respostes dels 52 alumnes, observem que en 2 respostes del problema 4 (3'85 %) i en 5 respostes del problema 5 (9'62 %) no s'ha pogut detectar una estratègia en el marc d'aquesta recerca.

A continuació es mostra la resposta de l'alumne 32 de l'Institut Guillem de Berguedà, la qual serveix per il·lustrar aquesta unitat de significat per al problema 5:

Son el 5 i el 20 pergùe si es multiplican entre
ellsacavaran dunan 100

Figura 4.8: *Model de resposta de la categoria 6 per al problema 5 (alumne 32).*

Per acabar aquest apartat es presenten dues taules per tal de recollir sintèticament la informació que s'ha comentat anteriorment. Vegem-les:

PROBLEMA 4

	TOTAL ALUMNES		INSTITUT BERGA		INSTITUT L'ARBOÇ	
CATEGORIA	Nombre	Percentatge	Nombre	Percentatge	Nombre	Percentatge
1.- A.E.	17	12,32%	13	15,12%	4	7,69%
2.- Ll. R.	6	4,35%	-	-	6	11,54%
3.- C	96	69,57%	57	66,28%	39	75,00%
3.1.- C.S.	58	42,03%	35	40,70%	23	44,23%
3.2.- C.S.V.	21	15,22%	14	16,28%	7	13,46%
3.3.- C.S.V.A.	17	12,32%	8	9,30%	9	17,31%
4.- P.R.G.	8	5,80%	7	8,14%	1	1,92%
5.- B.F.P.	-	-	-	-	-	-
6.- S.E.D.	11	7,97%	9	10,47%	2	3,85%

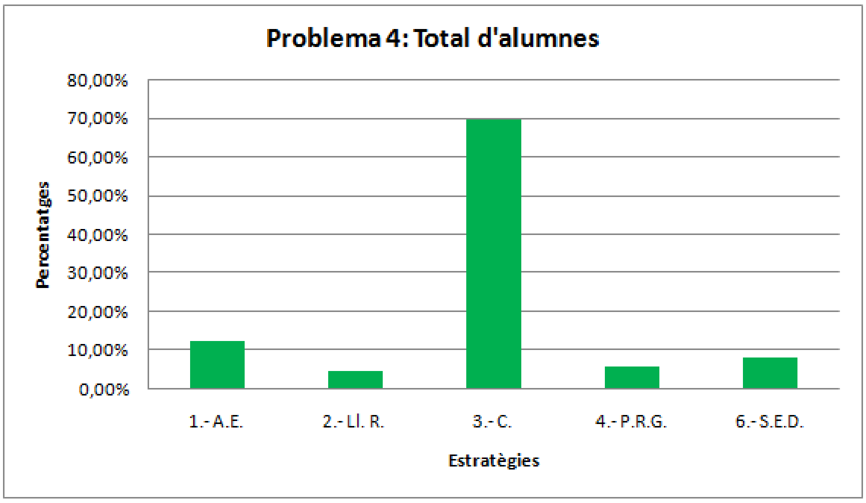
Taula 4.9: *Resultats de l'anàlisi de les estratègies del problema 4.*

PROBLEMA 5

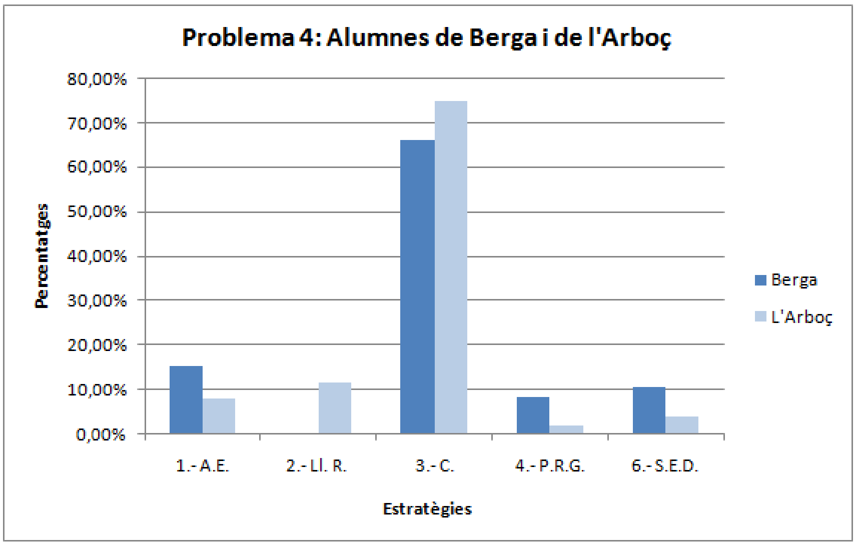
	TOTAL ALUMNES		INSTITUT BERGA		INSTITUT L'ARBOÇ	
CATEGORIA	Nombre	Percentatge	Nombre	Percentatge	Nombre	Percentatge
1.- A.E.	15	10,87%	10	11,63%	5	9,62%
2.- Ll. R.	9	6,52%	6	6,98%	3	5,77%
3.- C	95	68,84%	58	67,44%	37	71,15%
3.1.- C.S.	24	17,39%	10	11,63%	14	26,92%
3.2.- C.S.V.	59	42,75%	42	48,84%	17	32,69%
3.3.- C.S.V.A.	12	8,70%	6	6,98%	6	11,54%
4.- P.R.G.	-	-	-	-	-	-
5.- B.F.P.	2	1,45%	0	0,00%	2	3,85%
6.- S.E.D.	17	12,32%	12	13,95%	5	9,62%

Taula 4.10: *Resultats de l'anàlisi de les estratègies del problema 5.*

A més a més, els quatre gràfics següents mostren els percentatges totals d'aparició de cadascuna de les estratègies per a les poblacions estudiades de Berga i de l'Arboç. Vegem-los:

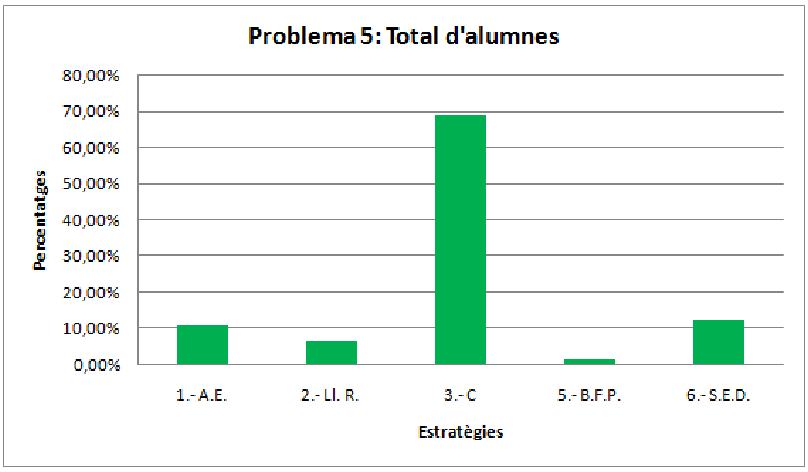


Gràfic 4.7: *Percentatges totals d'aparició de les estratègies (problema 4)*.

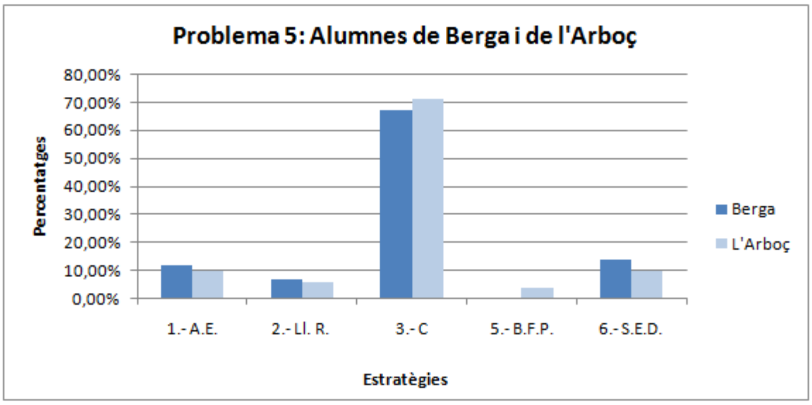


Gràfic 4.8: *Percentatges d'aparició de les estratègies a Berga i a l'Arboç (problema 4)*.

En resum, els gràfics 4.7 i 4.8 ens mostren que l'estratègia majoritària de resolució del problema 4 és *conjecturar* (69'57 %), la qual correspon a la categoria 3 de l'anàlisi de dades. Aquest fet es produeix per a la població total estudiada de Berga (66'28 %) i de l'Arboç (75 %). D'altra banda, l'estratègia menys utilitzada pel total d'estudiants és *fer una llista o un recompte* (4'35 %), la qual correspon a la categoria 2 de l'anàlisi. Aquest fet coincideix per la població de Berga, ja que cap alumne no utilitza aquesta estratègia per resoldre el problema 4 del qüestionari. Ara bé, en el cas de la població de l'Arboç, l'estratègia minoritària és *particularització d'un resultat més general* (1'92 %), la qual correspon a la categoria 4 de l'anàlisi de dades.



Gràfic 4.9: *Percentatges totals d'aparició de les estratègies (problema 5)*.



Gràfic 4.10: *Percentatges d'aparició de les estratègies a Berga i a l'Arboç (problema 5)*.

Finalment, els gràfics 4.9 i 4.10 ens mostren que l'estratègia majoritària de resolució del problema 5 és *conjecturar* (68'84 %), la qual correspon a la categoria 3 de l'anàlisi de dades. Aquest fet es produeix per a la població total estudiada de Berga (67'44 %) i de l'Arboç (71'15 %). D'altra banda, l'estratègia menys utilitzada pel total d'estudiants és *buscar una funció que serveixi de patró i experimentar* (1'45 %), la qual correspon a la categoria 5 de l'anàlisi. Aquest fet coincideix per la població de Berga, ja que cap alumne no utilitza l'estratègia per resoldre el problema 5 del qüestionari i per a la població de l'Arboç, en què 2 alumnes la usen (3'85 %).

4.2.3. ANÀLISI DELS ERRORS EN ELS PROBLEMES DE RESPOSTA OBERTA

En aquest apartat es realitza un estudi dels errors que han comès els estudiants a l'hora de resoldre els problemes 4 i 5 de l'instrument de recollida de dades. Tanmateix, s'analitza l'apartat (**c**) del problema 6 per tal d'aprofundir en una categoria d'errors que es detecta durant l'anàlisi del problema 4. Convé comentar que l'apartat 2.5 de la memòria exposa el marc teòric necessari per tal d'elaborar aquest anàlisi.

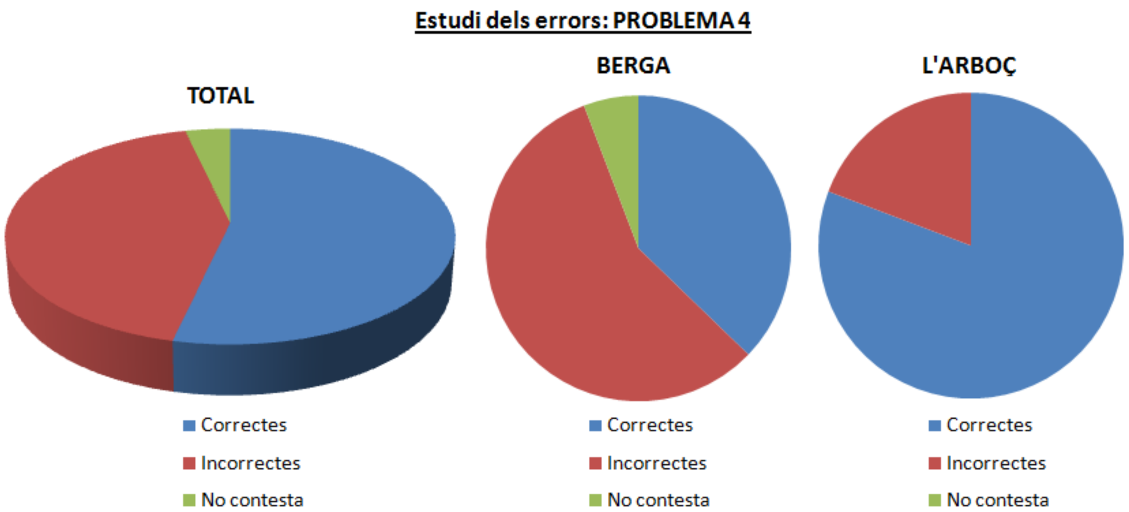
En primer lloc, és important determinar la quantitat d'alumnes que donen una resposta adequada des del punt de vista matemàtic als problemes 4 i 5. En aquest cas, s'entén que una resposta és adequada si la solució final presentada per l'estudiant és correcta matemàticament. Així, es comptabilitza quants estudiants responen que el quadrat de 2 cm de costat és la figura d'àrea màxima que resol el problema 4. A més, es determina la quantitat d'alumnes que afirmen que 50 i 50 són els dos nombres que solucionen el problema 5, és a dir, els dos nombres naturals tals que la seva suma és 100 i el seu producte és màxim. A continuació es presenten els resultats d'aquest anàlisi per als problemes 4 i 5:

- **<u>Problema 4</u>**: Si considerem la <u>totalitat de la població estudiada</u>, és a dir, els 138 alumnes, observem que 74 d'ells (53'62 %) donen una resposta adequada des del punt de vista matemàtic al problema, 59 alumnes (42'75 %) el responen incorrectament i 5 estudiants (3'62 %) no el contesten. La taula i el gràfic 4.11 resumeixen aquestes dades i les presenten per a cadascuna de les poblacions estudiades (Berga i l'Arboç):

PROBLEMA 4

	TOTAL ALUMNES		INSTITUT BERGA		INSTITUT L'ARBOÇ	
RESPOSTA	**Nombre**	**Percentatge**	**Nombre**	**Percentatge**	**Nombre**	**Percentatge**
Correcta	74	53'62%	32	37'21%	42	80'77%
Incorrecta	59	42'75%	49	56'98%	10	19'23%
No contesta	5	3'62%	5	5'81%	-	-

Taula 4.11: *Resultats de l'anàlisi dels errors del problema 4.*



Gràfic 4.11: *Resultats de l'anàlisi dels errors del problema 4.*

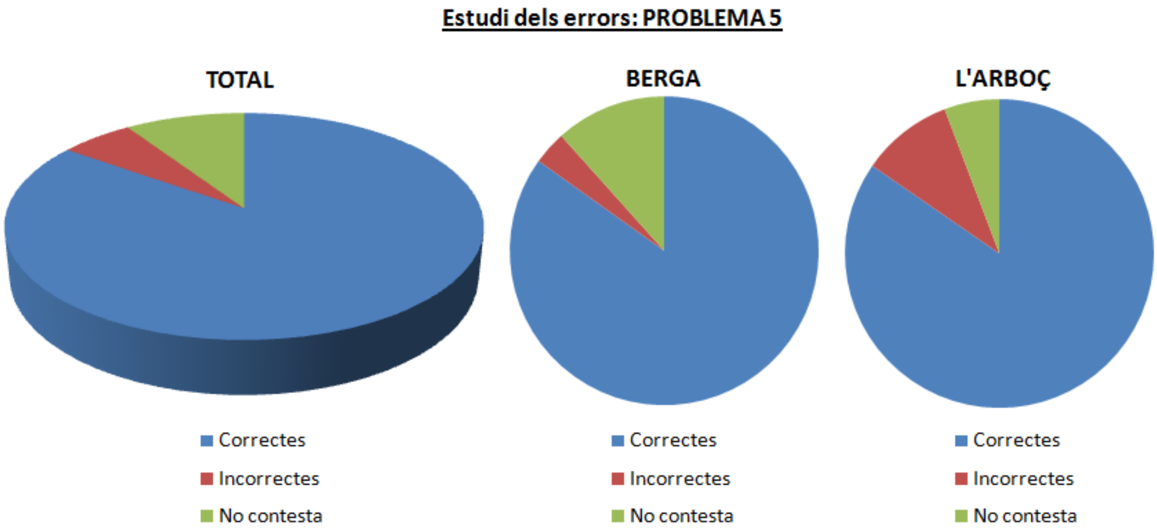
- **<u>Problema 5</u>**: Si considerem la <u>totalitat de la població estudiada</u>, és a dir, els 138 alumnes, observem que 117 d'ells (84'78 %) donen una resposta adequada des del punt de vista matemàtic al problema, 8 alumnes (5'8 %) el responen incorrectament i

13 estudiants (9'42 %) no el contesten. La taula i el gràfic 4.12 resumeixen aquestes dades i les presenten per a cadascuna de les poblacions estudiades (Berga i l'Arboç):

PROBLEMA 5

	TOTAL ALUMNES		INSTITUT BERGA		INSTITUT L'ARBOÇ	
RESPOSTA	Nombre	Percentatge	Nombre	Percentatge	Nombre	Percentatge
Correcta	117	84'78%	73	84'88%	44	84'62%
Incorrecta	8	5'80%	3	3'49%	5	9'62%
No contesta	13	9'42%	10	11'63%	3	5'77%

Taula 4.12: *Resultats de l'anàlisi dels errors del problema 5*.



Gràfic 4.12: *Resultats de l'anàlisi dels errors del problema 5*.

Convé comentar que en l'anàlisi dels dos problemes, tots els estudiants que han donat una solució final adequada matemàticament no han comès errors en la seva argumentació. Per això, per establir les categories dels errors només s'ha d'aprofundir en l'estudi dels qüestionaris que presenten incorreccions en les respostes dels problemes 4 i/o 5, és a dir, 59 qüestionaris per al problema 4 i 8 per al problema 5.

D'una forma semblant a l'anàlisi d'estratègies de resolució de problemes realitzat anteriorment (apartat 4.2.2), les unitats de significat que corresponen als diversos errors detectats parteixen de l'apartat 2.5 del marc teòric d'aquesta recerca i s'adeqüen per tal de respondre les necessitats de l'anàlisi de les dades.

A continuació es defineixen les categories i s'explicita quines es detecten en cadascun dels dos problemes estudiats[6]. Tanmateix, es realitza un recompte de la freqüència amb

[6] Cal comentar que la definició d'aquestes categories fa possible que cada error només es pugui incloure en una única unitat de significat. Ara bé, seria factible que un problema presentés tipologies d'error que formessin part de dues categories diferents. Així, per exemple, un problema

què apareix cada error, es presenten les dades en forma de taula i gràfic; i es mostra un exemple representatiu de cada unitat de significat. Vegem-ho:

- **<u>CATEGORIA A</u>: Errors causats per l'ús de teoremes i/o de definicions equivocades**. Aquesta unitat de significat coincideix amb una de les tipologies d'errors formulades per MOVSHOVITZ *et al*. a l'apartat 4.2.2 del marc teòric del treball. Només es detecta en el problema 4 i, en aquesta recerca, la manifesten els alumnes que apliquen de forma errònia el *teorema de Pitàgores* i/o la definició de *perímetre* d'una figura geomètrica. Concretament, els alumnes consideren que la hipotenusa d'un triangle rectangle isòsceles mesura igual que els seus catets i/o creuen, erròniament, que el perímetre d'un quadrat o d'un triangle és la longitud de cadascun dels seus costats.

Si considerem la totalitat dels qüestionaris que presenten incorreccions en el problema 4, és a dir, els 59 tests, observem que 40 d'ells (67'8 %) manifesten l'error descrit en la *categoria A*. La taula 4.13 resumeix aquestes dades i les presenta per a cadascuna de les poblacions estudiades (Berga i l'Arboç):

PROBLEMA 4

	TOTAL (sobre 59 qüest.)		BERGA (sobre 49 qüest.)		L'ARBOÇ (sobre 10 qüest.)	
ERROR	Nombre	Percentatge	Nombre	Percentatge	Nombre	Percentatge
CATEGORIA A	40	67'8%	35	71'43%	5	50,00%

Taula 4.13: *Resultats de l'anàlisi dels errors per a la categoria A.*

A continuació es mostren les respostes dels alumnes 2 i 25 de l'Institut Guillem de Berguedà, les quals serveixen per il·lustrar aquesta unitat de significat per al problema 4:

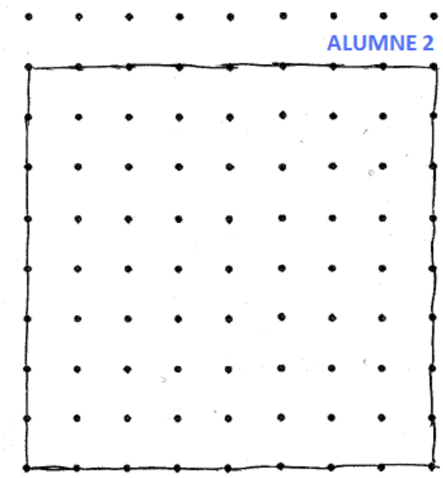


Figura 4.9: *Model de resposta de la categoria A per al problema 4 (alumne 2).*

---

pot contenir dos errors, un que formi part de la categoria A i l'altre de la categoria B. De totes maneres, aquest fet no s'ha produït en l'anàlisi de les dades d'aquesta investigació, és a dir, <u>cadascun dels problemes amb resposta errònia analitzats només conté una tipologia d'error</u>.

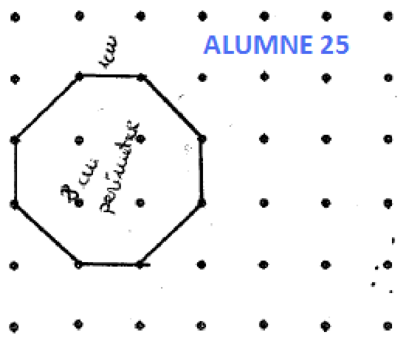


Figura 4.10: *Model de resposta de la categoria A per al problema 4 (alumne 25).*

- **<u>CATEGORIA B</u>: Errors produïts per la falta de verificació de les solucions del problema**. Com en el cas anterior, aquesta unitat de significat coincideix amb una de les tipologies d'errors formulades per MOVSHOVITZ *et al*. Es detecta en els problemes 4 i 5. En aquesta recerca la manifesten els alumnes que conjecturen erròniament la solució del problema sense realitzar suficients proves, verificacions i/o argumentacions.

Si considerem la totalitat dels qüestionaris que presenten incorreccions en el problema 4, és a dir, els 59 tests, observem que 9 d'ells (15'25 %) manifesten aquest error. Ara bé, si analitzem tots els qüestionaris amb equivocacions en el problema 5, és a dir, els 8 tests, detectem que 4 presenten l'error descrit en la *categoria B*. La taula 4.14 resumeix aquestes dades i les presenta per a cadascuna de les poblacions estudiades:

	PROBLEMA 4					
	TOTAL (sobre 59 qüest.)		BERGA (sobre 49 qüest.)		L'ARBOÇ (sobre 10 qüest.)	
ERROR	Nombre	Percentatge	Nombre	Percentatge	Nombre	Percentatge
CATEGORIA B	9	15'25%	7	14'29%	2	20,00%
	PROBLEMA 5					
	TOTAL (sobre 8 qüest.)		BERGA (sobre 3 qüest.)		L'ARBOÇ (sobre 5 qüest.)	
ERROR	Nombre	Percentatge	Nombre	Percentatge	Nombre	Percentatge
CATEGORIA B	4	50,00%	-	-	4	80,00%

Taula 4.14: *Resultats de l'anàlisi dels errors per a la categoria B.*

A continuació es mostren les respostes de l'alumne 36 de l'Institut Guillem de Berguedà (problema 4) i de l'estudiant 125 de l'Institut de l'Arboç (problema 5), les quals serveixen per il·lustrar aquesta unitat de significat:

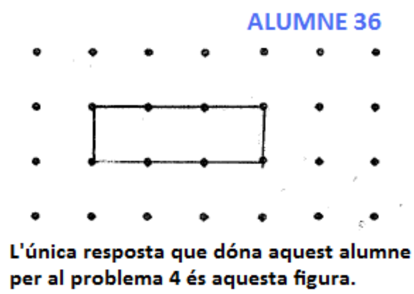


Figura 4.11: *Model de resposta de la categoria B per al problema 4 (alumne 36).*

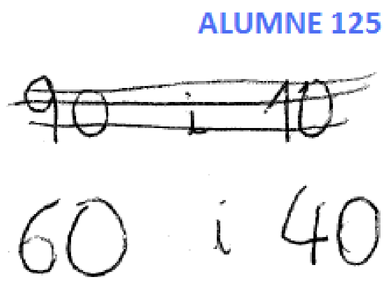


Figura 4.12: *Model de resposta de la categoria B per al problema 5 (alumne 125)*.

- **<u>CATEGORIA C</u>: Errors causats per la incomprensió de les instruccions de treball donades**. Aquesta unitat de significat coincideix amb una de les tipologies d'errors formulades per ASTOLFI, J. a l'apartat 4.2.2 del marc teòric de la memòria. Es detecta en els problemes 4 i 5. En aquesta investigació la manifesten els alumnes que presenten dificultats evidents a l'hora de comprendre i d'interpretar l'enunciat del problema. Així, la resposta que presenten permet intuir que no han entès, des del punt de vista matemàtic, la pregunta que se'ls formula a l'enunciat[7].

Si considerem la totalitat dels qüestionaris que presenten incorreccions en el problema 4, és a dir, els 59 tests, observem que 7 d'ells (11'86 %) manifesten aquest error. Ara bé, si analitzen tots els qüestionaris amb equivocacions en el problema 5, és a dir, els 8 tests, detectem que 4 presenten l'error descrit en la *categoria C*. La taula 4.15 resumeix aquestes dades i les presenta per a cadascuna de les poblacions estudiades:

PROBLEMA 4

	TOTAL (sobre 59 qüest.)		BERGA (sobre 49 qüest.)		L'ARBOÇ (sobre 10 qüest.)	
ERROR	Nombre	Percentatge	Nombre	Percentatge	Nombre	Percentatge
CATEGORIA C	7	11'86%	6	12'24%	1	10,00%

PROBLEMA 5

	TOTAL (sobre 8 qüest.)		BERGA (sobre 3 qüest.)		L'ARBOÇ (sobre 5 qüest.)	
ERROR	Nombre	Percentatge	Nombre	Percentatge	Nombre	Percentatge
CATEGORIA C	4	50,00%	3	100,00%	1	20,00%

Taula 4.15: *Resultats de l'anàlisi dels errors per a la categoria C*.

A continuació es mostren les respostes dels alumnes 10 (problema 4) i 32 (problema 5) de l'Institut Guillem de Berguedà, les quals serveixen per il·lustrar aquesta unitat de significat:

---

[7] Convé comentar que sovint és difícil englobar la resposta errònia d'un estudiant en aquesta unitat de significat, ja que és complicat determinar si l'error es produeix per una falta de comprensió de l'enunciat o bé per altres motius més profunds. Per això, aquesta categoria s'ha reservat per aquells qüestionaris en què queda clar, tal com es pot veure en els exemples, que l'estudiant no entén què li demana el problema i, per tant, la solució que proposa no s'adequa a l'enunciat.

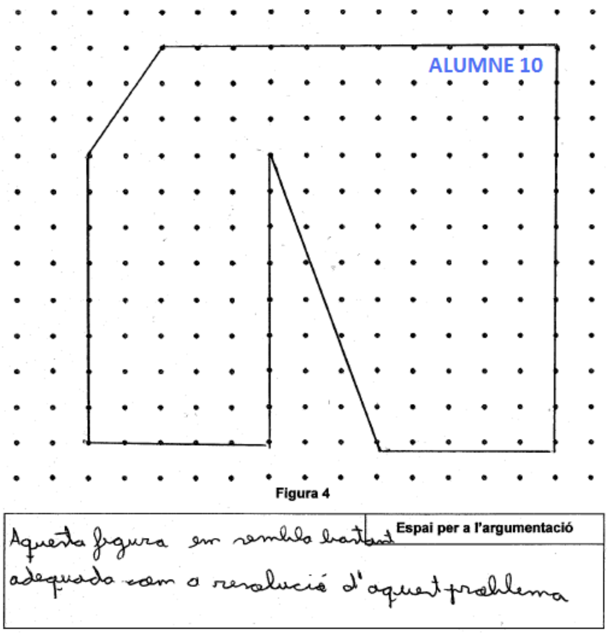


Figura 4.13: *Model de resposta de la categoria C per al problema 4 (alumne 10)*.

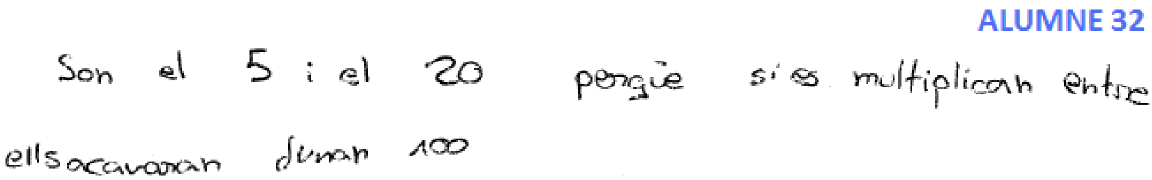


Figura 4.14: *Model de resposta de la categoria C per al problema 5 (alumne 32)*.

- **<u>CATEGORIA D</u>**: **Confusió de la relació entre perímetres i àrees**. Aquesta unitat de significat inclou les respostes d'aquells estudiants que afirmen que pel fet d'existir una igualtat de perímetre entre diverses figures geomètriques també existeix una igualtat de les seves àrees. Es detecta en el problema 4. Convé recordar que l'estudi d'aquesta problemàtica està àmpliament realitzat a l'apartat 4.2.1 de la memòria.

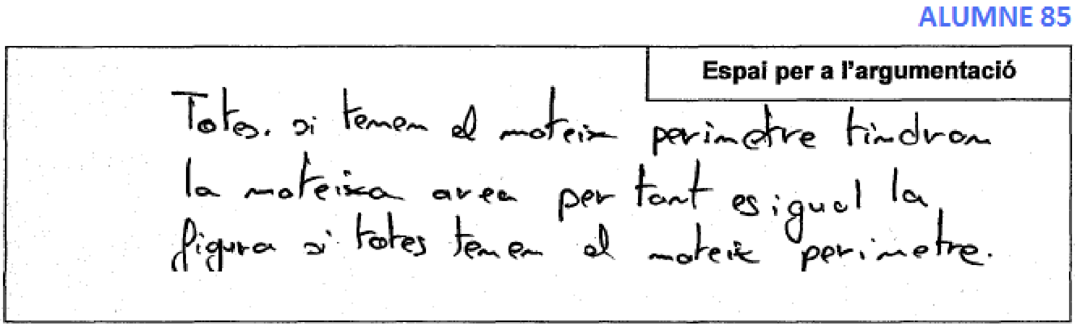
Si considerem la totalitat dels qüestionaris que presenten incorreccions en el problema 4, és a dir, els 59 tests, observem que 3 d'ells (5'08 %) manifesten l'error descrit en la *categoria D*. La taula 4.16 resumeix aquestes dades i les presenta per a cadascuna de les poblacions estudiades (Berga i l'Arboç):

PROBLEMA 4

	TOTAL (sobre 59 qüest.)		BERGA (sobre 49 qüest.)		L'ARBOÇ (sobre 10 qüest.)	
ERROR	Nombre	Percentatge	Nombre	Percentatge	Nombre	Percentatge
CATEGORIA D	3	5'08%	1	2'04%	2	20,00%

Taula 4.16: *Resultats de l'anàlisi dels errors per a la categoria D*.

A continuació es mostra la resposta de l'alumne 85 de l'Institut de l'Arboç, la qual serveix per il·lustrar aquesta unitat de significat per al problema 4:


ALUMNE 85

Espai per a l'argumentació

Totes. si tenen el mateix perimetre tindran la mateixa area per tant es igual la figura si totes tenen el mateix perimetre.

Figura 4.15: *Model de resposta de la categoria D per al problema 4 (alumne 85).*

A més a més, la taula 4.17 resumeix la informació que s'ha presentat al llarg d'aquest apartat i el gràfic 4.13 permet una visualització millor de les dades. Vegem-ho:

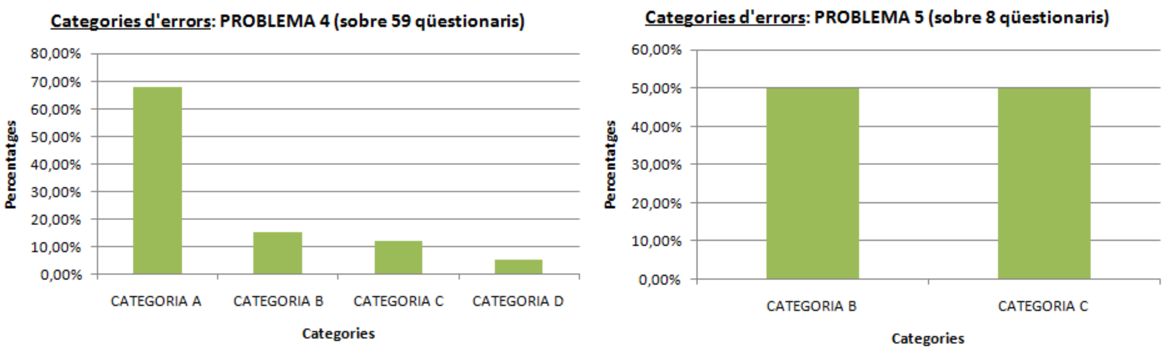
PROBLEMA 4

	TOTAL (sobre 59 qüest.)		BERGA (sobre 49 qüest.)		L'ARBOÇ (sobre 10 qüest.)	
ERROR	Nombre	Percentatge	Nombre	Percentatge	Nombre	Percentatge
CATEGORIA A	40	67,80%	35	71,43%	5	50,00%
CATEGORIA B	9	15,25%	7	14,29%	2	20,00%
CATEGORIA C	7	11,86%	6	12,24%	1	10,00%
CATEGORIA D	3	5,08%	1	2,04%	2	20,00%

PROBLEMA 5

	TOTAL (sobre 8 qüest.)		BERGA (sobre 3 qüest.)		L'ARBOÇ (sobre 5 qüest.)	
ERROR	Nombre	Percentatge	Nombre	Percentatge	Nombre	Percentatge
CATEGORIA A	-	-	-	-	-	-
CATEGORIA B	4	50,00%	-	-	4	80,00%
CATEGORIA C	4	50,00%	3	100,00%	1	20,00%
CATEGORIA D	-	-	-	-	-	-

Taula 4.17: *Resum dels resultats de l'anàlisi d'errors per als problemes 4 i 5.*



Gràfic 4.13: *Gràfics per visualitzar l'anàlisi dels errors per als problemes 4 i 5.*

En resum, després de realitzar l'anàlisi i la classificació dels errors per als problemes 4 i 5 de l'instrument de recollida de dades, s'observa que la *categoria A* és la que engloba un nombre més gran de respostes. Així, els errors més freqüents que es detecten són els causats per l'ús de teoremes i/o definicions equivocades. Concretament, en el problema 4 s'observa que molts estudiants es confonen a l'hora d'aplicar el *teorema de Pitàgores*. Per aquest motiu, a continuació s'analitza l'apartat (**c**) del problema 6 del qüestionari, amb l'objectiu de comprovar si aquesta tipologia d'errors també apareix en un altre problema de naturalesa geomètrica.

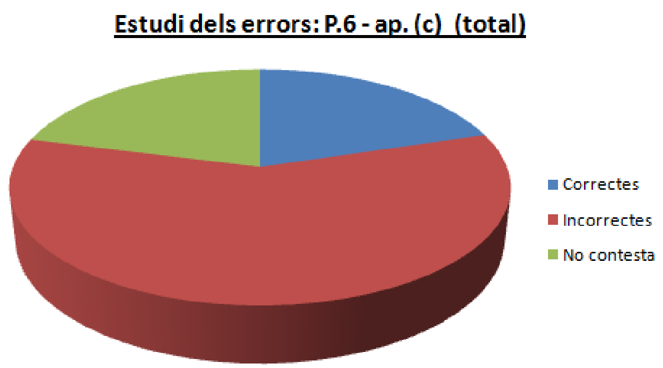
En aquest problema es pregunta als estudiants que construeixin diversos paral·lelograms a partir d'unes indicacions. Aleshores, se'ls demana que calculin la longitud de la base de cada paral·lelogram, l'altura i la seva àrea. El que es realitza a continuació és estudiar si els alumnes comenten algun tipus d'error a l'hora de determinar l'altura dels paral·lelograms, és a dir, es determina quants estudiants calculen erròniament l'altura i es classifiquen els errors que cometen segons la seva tipologia.

Si considerem la totalitat de la població estudiada, és a dir, els 138 alumnes, observem que 28 d'ells (20'29 %) calculen correctament l'altura dels paral·lelograms, 81 alumnes (58'70 %) ho realitzen de forma errònia i 29 estudiants (21'01 %) no responen l'apartat (**c**) del problema 6 del qüestionari. La taula 4.18 i el gràfic 4.14 resumeixen aquestes dades i les presenten per a cadascuna de les poblacions estudiades (Berga i l'Arboç):

PROBLEMA 6 - APARTAT [c]

	TOTAL ALUMNES		INSTITUT BERGA		INSTITUT L'ARBOÇ	
RESPOSTA	Nombre	Percentatge	Nombre	Percentatge	Nombre	Percentatge
Correcta	28	20,29%	19	22,09%	9	17,31%
Incorrecta	81	58,70%	50	58,14%	31	59,62%
No contesta	29	21,01%	17	19,77%	12	23,08%

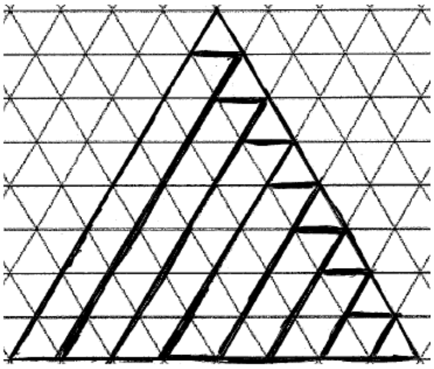
Taula 4.18: *Resultats de l'anàlisi dels errors del problema 6 – apartat (**c**).*



Gràfic 4.14: *Resultats de l'anàlisi dels errors del problema 6 – apartat (**c**).*

Convé comentar que els 81 participants que calculen erròniament l'altura dels paral·lelograms confonen la longitud d'un costat del paral·lelogram amb la seva altura, és a dir, no identifiquen l'altura d'aquestes figures com la recta perpendicular entre la base i el costat oposat. Per aquest motiu detectem un error causat per l'aplicació d'una definició matemàtica equivocada i, per tant, es tracta d'errors que formen part de la *categoria A*.

Finalment, es mostra la resposta de l'alumne 59 de l'Institut Guillem de Berguedà, la qual serveix per il·lustrar aquesta tipologia d'error:



Base (en cm)	Altura (en cm)	Àrea (en cm^2)
1	7	7
2	6	12
3	5	15
4	4	16
5	3	15
6	2	12
7	1	7

Figura 4.16: *Model de resposta de la categoria A per al problema 6 – apartat (**c**) (alumne 59)*.

5. CONCLUSIONS I PROSPECTIVA

5.1. CONCLUSIONS

En primer lloc, convé comentar que les conclusions d'aquest treball d'investigació són de caràcter local. Tanmateix, no s'ha considerat si els resultats obtinguts a l'estudi es poden, o no, extrapolar a altres poblacions i/o situacions. Per donar resposta a la pregunta d'investigació, és a dir, per *caracteritzar com resolen un problema d'extrems els estudiants que no estan familiaritzats amb les regles del càlcul diferencial*, s'han definit amb detall tres objectius de recerca i a continuació s'exposen les conclusions obtingudes per a cadascun.

- **Respecte el primer objectiu d'investigació**

Els problemes d'extrems figuren de forma explícita en el currículum de Matemàtiques de segon de batxillerat (apartat 1.2.2, pàg. 5) com una aplicació del càlcul amb derivades. Aquesta memòria presenta un estudi centrat en alumnes de primer curs de batxillerat que no coneixen les regles i tècniques del càlcul diferencial. Per això, el primer objectiu de recerca investiga *la percepció que tenen els estudiants de la relació entre àrees i perímetres; i entre àrees i volums*.

Diversos estudis posen de manifest que sovint els alumnes menors de 15 anys confonen la relació entre el perímetre i l'àrea de les figures geomètriques (apartat 2.5.1, pàg. 22). Ara bé, a partir d'aquesta edat, la problemàtica es redueix molt notablement i la gran majoria accepten la no conservació de l'àrea fixat el perímetre (apartat 2.5.1, pàg. 23). Així, en aquesta recerca és interessant estudiar si pels participants:

– *La igualtat d'àrea entre dues figures implica, erròniament, una igualtat de perímetre*. El problema 1 de l'instrument de recollida de dades tracta aquest fet i permet descobrir que el 81'16 % dels 138 estudiants analitzats (83'72 % dels 86 alumnes de Berga i 76'92 % dels 52 participants de l'Arboç) responen la pregunta adequada des del punt de vista matemàtic, és a dir, la gran majoria dels participants accepten la no conservació del perímetre fixada l'àrea de diverses figures geomètriques. Per tant, és raonable concloure que el punt de partida dels alumnes estudiats és força adequat per treballar problemes senzills d'extrems en què es vulguin optimitzar àrees o perímetres de figures geomètriques.

– *La igualtat de volum entre dues figures implica, equivocadament, una igualtat d'àrea*. El problema 2 del qüestionari està dissenyat per tractar aquest tema i permet descobrir que el 76’09 % dels 138 estudiants analitzats (82’56 % dels 86 alumnes de Berga i 65’38 % dels 52 participants de l’Arboç) manifesten, erròniament, que l’àrea total de dues figures geomètriques es conserva pel fet d’existir una igualtat dels seus volums. Per tant, és prudent concloure que el punt de partida d’aquests estudiants no és el més favorable per treballar problemes de màxims i mínims en què es necessiti optimitzar l’àrea de figures geomètriques on el volum està fixat.

– *La igualtat d’àrea entre dues figures implica, erròniament, una igualtat de volum*. El problema 3 de l’instrument tracta aquesta problemàtica i permet esbrinar que el 68’84 % dels 138 estudiants analitzats (70’93 % dels 86 alumnes de Berga i 65’38 % dels 52 participants de l’Arboç) responen que el volum de dues figures geomètriques es conserva pel fet d’existir una igualtat entre les seves superfícies laterals. Com en el cas anterior, el percentatge d’alumnes que manifesten aquesta confusió és alt i, per això, és assenyat concloure que el punt de partida d’aquests estudiants davant de problemes d’extrems en què convé optimitzar el volum fixada la superfície lateral no és adequat des del punt de vista matemàtic.

Finalment, la diagnosi d’aquestes problemàtiques obre algunes portes interessants, les quals s’exposen en la prospectiva d’aquesta memòria (apartat 5.2).

- **Respecte el segon objectiu d’investigació**

Diversos estudis i destacats autors han investigat les estratègies de resolució que segueixen els alumnes per donar resposta a problemes matemàtics en diferents contextos (apartat 2.4, pàg. 15). Com s’ha comentat anteriorment, els problemes d’extrems sovint es treballen a l’aula de batxillerat com una simple aplicació del càlcul amb derivades. Tot i així, alguns investigadors consideren que és interessant estudiar aquesta tipologia de problemes fent ús de mètodes elementals (apartat 2.4.1, pàg. 18).

El segon objectiu de la investigació pretén *identificar algunes estratègies que segueixen els estudiants a l’hora de resoldre un problema de màxims i mínims sense fer ús de les tècniques del càlcul diferencial*. Segons la definició de *problema* acceptada per a la realització del treball (apartat 2.2, pàg. 10), s’han proposat els problemes 4 i 5 de l’instrument de recollida de dades amb la intenció d’estudiar aquest objectiu de recerca. L’anàlisi de les respostes dels diversos qüestionaris permet identificar múltiples estratègies de resolució en els problemes 4 i 5. Es pot afirmar que totes elles s’engloben en sis categories de resposta (apartat 4.2.2, pàg. 46), que són les següents: *assaig i error* (categoria 1), *fer una llista o un recompte* (categoria 2), *conjecturar* (categoria 3), *particularització d’un resultat més general* (categoria 4), *buscar una funció que serveixi de* *patró i experimentar* (categoria 5) i *sense estratègia detectada en el nivell que s'emmarca aquest treball* (categoria 6). La naturalesa dels dos problemes analitzats fa que les estratègies de resolució associades a la categoria 4 només es detectin en el problema 4 i quelcom semblant es produeix per a la categoria 5, ja que només apareixen representants d'aquesta unitat de significat en el problema 5. La resta de categories són comunes per als dos problemes proposats.

El capítol anterior del treball conté una àmplia anàlisi i discussió dels resultats associats a l'estudi d'aquests dos problemes. Ara bé, en termes de síntesi convé destacar que el 69'57 % dels 138 participants (66'28 % dels 86 alumnes de Berga i 75 % dels 52 estudiants de l'Arboç) utilitza l'estratègia de *conjecturar* per resoldre el problema 4 i el 68'84 % dels 138 alumnes (67'44 % dels participants de Berga i 71'15 % dels estudiants de l'Arboç) l'aplica per respondre el problema 5. Això fa que *conjecturar* sigui l'estratègia majoritària utilitzada per afrontar aquests problemes. De totes maneres, només un 12'32 % dels 138 participants *conjectura la solució, la verifica i l'argumenta* en el problema 4 i un 8'7 % dels 138 estudiants ho realitza en el problema 5.

Per tant, es conclou que una part important dels alumnes analitzats és capaç d'intuir una resposta per aquests dos problemes, però un percentatge inferior té els recursos matemàtics suficients per argumentar la solució donada. Aquest fet es referma si tenim present que només en el 7'97 % de les respostes dels 138 participants no s'ha pogut *detectar una estratègia en el nivell que s'emmarca aquest treball* a l'hora d'analitzar el problema 4 i el mateix es produeix en el 12'32 % de les respostes dels 138 alumnes per al problema 5.

Finalment, es conclou que en el 92'03 % de les respostes del problema 4 i en el 87'68 % de les solucions del problema 5, es pot detectar una estratègia de resolució en el nivell d'aquesta recerca. Així, la major part dels participants tenen la intuïció i les eines matemàtiques suficients per afrontar els dos problemes de màxims i mínims proposats. Per tant, és raonable pensar que el col·lectiu estudiat podria resoldre alguns problemes senzills d'extrems a l'aula de matemàtiques fent ús de mètodes elementals, els quals es treballarien abans d'introduir el càlcul diferencial.

- **Respecte el tercer objectiu d'investigació**

Diversos autors han realitzat investigacions amb el propòsit de determinar i classificar els errors que cometen els estudiants a l'hora de resoldre diferents tipologies de problemes (apartat 2.5, pàg. 19). Després de determinar les estratègies de resolució dels problemes 4 i 5 de l'instrument de recerca, és necessari poder classificar els errors que han comès els alumnes. Així, el tercer objectiu del treball consisteix en *detectar alguns errors dels* *estudiants a l'hora de resoldre un problema d'extrems sense estar familiaritzats amb les eines del càlcul amb derivades*.

Una vegada finalitzat l'anàlisi i l'exposició dels resultats de la investigació, es visualitza que el 42'75 % dels 138 participants comet algun error en la resolució del problema 4 i només el 5'8 % presenta una solució incorrecta des del punt de vista matemàtic en el problema 5. Per tant, es pot pensar que la naturalesa geomètrica del problema 4 propicia l'aparició de més errors que el context aritmètic del problema 5.

A més, es decideix que els errors realitzats pels alumnes de la investigació es poden englobar en quatre unitats de significat (apartat 4.2.3, pàg. 60), però per classificar els errors del problema 5 només en són necessàries dues: les categories B i C; i cadascuna d'elles conté el 50 % de les respostes errònies dels estudiants per aquest problema. D'altra banda, en el cas del problema 4, és la categoria A: *errors causats per l'ús de teoremes i/o de definicions equivocades* la que inclou un nombre més gran de respostes errònies. Concretament, s'observa que el 67'8 % de les respostes dels 59 qüestionaris analitzats presenten un error en aplicar el *teorema de Pitàgores* i/o a l'hora d'usar la definició de *perímetre* d'una figura geomètrica. Aquest fet resulta sorprenent donada l'edat dels participants (16'47 anys de mitjana). Per això, es comprova si les respostes de l'apartat (**c**) del problema 6, que també és geomètric, presenten algun error de la tipologia que recull la categoria A. D'aquesta manera, es descobreix que el 58'7 % dels 138 estudiants responen incorrectament aquest apartat. A més, s'observa que les 81 respostes equivocades presenten un error a l'hora de calcular l'altura dels paral·lelograms, perquè en tots els casos es produeix una confusió entre l'*altura* de la figura geomètrica i el seu *costat*.

Finalment, es conclou que una part destacada dels participants en aquesta recerca manifesten errors importants a l'hora de resoldre un problema d'extrems de naturalesa geomètrica i aquests errors són, en gran part, producte d'usar teoremes i/o definicions matemàtiques de forma equivocada. Aquest és el cas d'usar erròniament el *teorema de Pitàgores* o la confusió de les definicions de *perímetre* i d'*altura* d'un paral·lelogram.

5.2. PROSPECTIVA

Com s'ha exposat al llarg dels capítols anteriors, aquesta recerca facilita informació de com resolen un problema d'extrems els estudiants que no coneixen les tècniques del càlcul diferencial. Les limitacions de l'estudi fan que no es puguin abordar tots els aspectes amb suficient profunditat. A més, l'anàlisi de les dades obtingudes obre noves línies d'investigació que són les següents:

A. Identificar els motius pels quals una part important de l'alumnat presenta una visió equivocada, des del punt de vista matemàtic, de la relació entre l'àrea i el volum de diverses figures geomètriques. Així, seria adequat dissenyar situacions didàctiques, basades en la resolució de problemes, que facin possible la superació d'aquesta confusió.

B. Plantejar el mateix estudi en un col·lectiu més ampli d'alumnes, per tal de determinar amb l'exhaustivitat més gran possible les estratègies i els errors comesos pels participants en resoldre problemes senzills d'extrems per mètodes elementals.

C. Detectar i aprofundir en els motius pels quals una part important dels alumnes manifesten errors greus quan apliquen teoremes i/o definicions matemàtiques elementals.

D. Realitzar entrevistes a diversos participants per aprofundir en algunes estratègies i certs errors detectats a l'hora de resoldre els problemes de màxims i mínims proposats en la recerca.

E. Estudiar la incidència que té en l'aprenentatge la resolució de problemes senzills d'extrems per mètodes elementals. La investigació s'hauria de centrar en alumnes que no coneixen el càlcul diferencial i que cursen quart d'ESO o primer de batxillerat. A més, convé valorar la repercussió que té l'ús de les Tecnologies de la Informació i la Comunicació (TIC) a l'hora de resoldre problemes de màxims i mínims.

F. Contrastar el nivell de comprensió dels estudiants quan resolen problemes d'extrems per mètodes elementals *vs.* les tècniques estàndards del càlcul diferencial.

BIBLIOGRAFIA

A. LLIBRES I ARTICLES BÀSICS PER AL TREBALL

ALAYO, F. (1990). *El lenguaje de funciones y gráficas*. Madrid: Centro de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia.

BLANCO, J.L. (1996). La resolución de problemas. Una revisión teórica. *Revista Suma*, 21, 11 - 20.

CASTRO, E. (2008). Resolución de problemas: Ideas, tendencias e influencias en España. Seminari 2 del XII Simposi de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), Badajoz, 1 – 34 (en paper).

DE GUZMÁN, M. (1992). Tendències innovadores en Educació Matemàtica. *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, núm. 7, 7 - 33.

DICKSON, L., BROWN, M. i GIBSON, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona: Labor.

FRANCHI, L. i HERNÁNDEZ, A. (2003). Tipología de errores en el área de la geometría plana. *Investigación Arbitrada*, 24, 63 – 71.

GINÉ, C. (2009). *Plantejament i interpretació de problemes contextualitzats d'extrems*. Treball de final de màster, Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra.

MASON, J., BURTON, L. i STACEY, K. (1988). *Pensar matemáticamente*. Barcelona: Labor.

MAYER, R.E. (1983). *Pensamiento, resolución de problemas y cognición*. Barcelona: Ediciones Paidós.

MODICA, E. (2010). Maximum / minimum problems solved using an algebraic way. *Teaching Mathematics and Its Applications*, 29, 41 – 47.

MORENO, S. i CUEVAS, C.A. (2004). Interpretaciones erróneas sobre los conceptos de máximos y mínimos en el cálculo diferencial. *Educación matemàtica*, 16, 93 – 104.

NATANSÓN, I.P. (1977). *Problemas elementales de máximo y mínimo. Suma de cantidades infinitamente pequeñas*. Moscú: Editorial MIR.

PICART, A. (2009). *Lloc geomètric per descobriment: estratègies i bloquejos*. Treball de final de màster, Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra.

PÓLYA, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos.

– (1970): *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

– (1981): *Mathematical discovery: on understanding, learning, and teaching problem solving*. New York: John Wiley & Sons.

PUIG, L. (2008). Presencia y ausencia de la resolución de problemas en la investigación y el currículo. Seminari 2 del XII Simposi de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), Badajoz, 1 – 16 (en paper).

PUJOL, R. (2007). *Diagnosi sobre la disposició de l'alumnat a aprendre a través de la resolució de problemes*. Tesina, Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra.

SCHOENFELD, A.H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press.

TALL, D. (1996). *Functions and Calculus*. En J. Bishop *et al.* (Eds.), International Handbook of Mathematics Education (pàg. 289 – 325). Dordrecht, Països Baixos: Kluwer Academic Publishers.

VALLE, M.C., JUÁREZ, M.A. i GUZMÁN, M.E. (2007). Estrategias generales en la resolución de problemas de la olimpiada mexicana de matemáticas. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 9(2). Recuperat el 5 de febrer de 2010, a: http://redalyc.uaemex.mx/pdf/155/15590209.pdf

VILA, A. i CALLEJO, M.L. (2004). *Matemáticas para aprender a pensar: el papel de las creencias en la resolución de problemas*. Madrid: Narcea.

B. LLIBRES I ARTICLES COMPLEMENTARIS

ARNAL, J. (1997). *Metodologies de la investigació educativa*. Barcelona: Publicacions de la Universitat Oberta de Catalunya.

BOYER, C. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

GONZÁLEZ, P.M. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Revista Suma*, 45, 17 - 28.

MANKIEWICZ, R. (2000). *Historia de las matemáticas: del cálculo al caos*. Barcelona: Paidós.

MONTESINOS, J.L. (2000). *Historia de las matemáticas en la enseñanza secundaria*. Madrid: Síntesis.

NCTM (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Sevilla: SAEM THALES.

NOLLA, R. (2001). *Estudis i activitats sobre problemes clau de la Història de la Matemàtica. Per a una aproximació genètica al tractament de les idees matemàtiques*. Llicència d'estudis retribuïda, Departament d'Educació.

TORRECILLAS, B. (2003). *Fermat: el mago de los números*. Madrid: Nivola libros y ediciones.

VILA, A. (2001). *Resolució de problemes de matemàtiques: Identificació, origen i formació dels sistemes de creences en l'alumnat. Alguns efectes sobre l'abordatge dels problemes*. Tesi doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra.

C. ALTRES REFERÈNCIES

Decret 143/2007, de 26 de juny, pel qual s'estableix l'ordenació dels ensenyaments de l'Educació Secundària Obligatòria, DOGC núm. 4915 § 21870 (2007).

Decret 142/2008, de 15 de juliol, pel qual s'estableix l'ordenació dels ensenyaments del batxillerat, DOGC núm. 5183 § 59042 (2008).

ÍNDEXS

ÍNDEX DE FIGURES, TAULES I GRÀFICS

ANNEXOS

ÍNDEX D'ANNEXOS

ANNEX 1: L'EVOLUCIÓ HISTÒRICA DELS PROBLEMES DE MÀXIMS I MÍNIMS

Les primeres dades que tenim provenen dels grecs. Aquests coneixien moltes propietats de màxim i mínim, tot i que sovint n'enunciaven els resultats sense un intent seriós de donar-ne la demostració. Algunes d'aquestes propietats eren les següents:

- Un segment rectilini és la línia més curta entre dos punts.
- Un arc de cercle màxim és la corba més curta que uneix dos punts d'una superfície esfèrica.
- Entre totes les corbes planes tancades de la mateixa longitud, la circumferència tanca l'àrea més gran.
- Entre totes les superfícies tancades d'igual àrea, l'esfera tanca el volum més gran.

Diversos matemàtics grecs van intentar resoldre, geomètricament, aquesta tipologia de problemes d'extrems. Per això, convé mencionar dos d'ells: **Zenodorus** (c. 200 aC – c. 140 aC) i **Pappus d'Alexandria** (c. 290 dC – c. 350 dC), els quals es van interessar per provar que entre totes les figures planes, el cercle té major àrea que qualsevol polígon isoperimètric.

Des de l'època dels grecs fins a finals del segle XV no van haver-hi grans avenços en aquest camp. Això és degut a què la caiguda de l'Imperi Romà d'Occident l'any 476 dC es considera l'inici de l'Edat Mitjana. Bona part dels reis i emperadors medievals europeus van adoptar el cristianisme com la religió oficial i van reprimir tota altra religió; així com la ciència, la qual va ser perseguida. Moltes obres científiques i biblioteques senceres van ser cremades pels fanàtics religiosos. L'Església i els inquisidors no acceptaven cap desviació de la paraula literal de la Bíblia o de l'obra aristotèlica.

Enmig d'aquesta situació no és estrany que la matemàtica, igual que la resta de ciències, no progressés, a Europa, durant aquesta època. Bona part dels pocs treballs en matemàtiques d'aquest període es van realitzar en els monestirs i, també, per **Leonardo Pisano** en la seva obra més destacada, el *Liber Abacci* (1202).

A finals de l'Edat Mitjana, Europa va començar a actualitzar-se en els coneixements matemàtics i cada vegada va anar avançant més. Això va ser produït, entre altres motius, per tres fets de finals del segle XV, que són els següents:

a) Els turcs conquereixen Constantinoble l'any 1453. Això va suposar l'inici de l'era de la pólvora i la desaparició, en gran mesura, dels senyors feudals i, a poc a poc, la caiguda del poder absolut de l'Església.

b) Es van produir, en aquesta època, els grans descobriments: Cristòfol Colon descobreix Amèrica (1492), Vasco da Gama creua el Cap de Bona Esperança (1499) en el seu viatge cap a la Índia i Fernando de Magallanes (1519 – 1522) va ser el primer europeu en viatjar des de l'oceà Atlàntic fins a l'oceà Pacífic. En aquests moments les ciències exactes van rebre un fort estímul, ja que va millorar la rellotgeria, l'astronomia i la trigonometria.

c) El més destacat va ser la invenció de la impremta (Johannes Gutenberg, 1456), fet que va suposar una difusió, a més gran escala, de la informació i va trencar el monopoli de l'Església sobre el coneixement escrit. A partir d'aquest moment, els llibres van passar a estar a disposició de sectors més amplis de la població. En particular, els llibres de matemàtiques van passar a tenir una difusió molt més àmplia i, molts d'ells es van publicar en altres idiomes, a més del llatí.

Els matemàtics del segle XVI es dedicaren fonamentalment a l'aritmètica, l'àlgebra i la trigonometria, mentre que la geometria quedava estancada amb els resultats dels grecs i no seria fins a finals d'aquest segle quan es recuperaria la tradició grega.

De totes maneres, un dels matemàtics que va destacar en aquest període va ser **François Viète** (1540 – 1603). La seva obra és capital per a la simbolització de l'àlgebra i la seva aplicació a la geometria. Va introduir l'ús de les consonants per representar quantitats conegudes i de vocals per a les desconegudes. Va definir un mètode d'aproximació de les arrels de les equacions numèriques, les relacions entre coeficients i arrels, i també, la solució geomètrica de l'equació cúbica.

A principis del segle XVII es disposava d'un llenguatge algebraic acceptable per a la teoria d'equacions, es tenien els coneixements de la geometria grega i anaven sorgint noves corbes resultants de les trajectòries de punts mòbils per l'acció de forces. Per aquest motiu, els tipus de problemes més treballats durant la primera meitat del segle XVII foren els corresponents al càlcul d'àrees, volums i centres de gravetat; els relacionats amb el càlcul de màxims i mínims, i el càlcul de tangents a les corbes.

D'entre els matemàtics que es van ocupar de la determinació d'extrems i d'aconseguir un mètode general per al càlcul de tangents a les línies corbes, podem destacar els següents: **Johannes Kepler** (1571 – 1630), **René Descartes** (1596 – 1650), **Pierre de Fermat** (1601 – 1665) i **Isaac Barrow** (1630 – 1677).

Kepler, a principis de segle, determinà el valor màxim d'una expressió mitjançant quadres de valors numèrics. Uns anys més tard, gràcies a una bona producció de vi, li van encarregar que calculés com havien de ser els barrils per tal que, contenint la mateixa quantitat de vi, tinguessin el menor cost de fusta possible. Per aquest motiu, Kepler va estudiar les curvatures d'alguns cossos de revolució. També afirmà que en les proximitats d'un màxim o d'un mínim la variació es fa imperceptible.

Fermat (1629) i **Descartes** (1637) desenvoluparen, independentment, la geometria analítica que permetia l'estudi de corbes a partir de les equacions algebraiques que les caracteritzaven.

Descartes considerà que tota corba queda definida per una propietat determinada que és vàlida per a tots els seus punts, i que tot punt queda determinat per les seves coordenades. Així, l'equació en coordenades que expressa la propietat geomètrica que determina la corba representa completament la corba. La nova geometria era, a la vegada, una nova eina tan per a l'estudi de les corbes com per a la determinació dels seus trets principals. Fent ús d'aquesta novetat, Descartes va donar un mètode general per al càlcul de la tangent a una corba en un punt.

Pel que fa al problema dels màxims i mínims, fou **Fermat** qui, l'any 1629, va fer importants descobriments que estan relacionats amb els seus treballs sobre llocs geomètrics. En el més important d'aquests, titulat *Methodus ad disquirendam maximan et miniman* (*Mètodes per a trobar màxims i mínims*), si s'interpreta en terminologia moderna, Fermat exposa un mètode enginyós per trobar els punts en els quals una funció polinòmica de la forma $y = f(x)$ pren un valor màxim o mínim. Fermat compara el valor de $f(x)$ en un cert punt amb el valor $f(x+E)$ en un punt pròxim. En general, aquests dos valors són diferents, però, en un màxim o en un mínim d'una corba contínua, la diferència és quasi imperceptible. Per tant, per trobar els punts que corresponen a valors màxims o mínims d'una funció, Fermat iguala $f(x)$ amb $f(x+E)$ i convé tenir en compte que aquests valors són molt propers. Com més petita sigui la diferència entre els dos punts, més a prop està la igualtat de ser certa. Així, després de dividir-ho tot per *E*, considera $E = 0$. El resultat li permet calcular les abscisses dels màxims i mínims de la funció polinòmica. Essencialment, es pot apreciar l'inici del procés que actualment s'anomena *diferenciació*.

Barrow, el 1670, presenta un mètode per al càlcul de tangents a partir del *triangle característic*, un triangle en el qual un costat és un petit arc de la corba que té el punt de tangència com un dels extrems. Barrow va ser qui més es va aproximar al nou Anàlisi, el qual formularien més tard **Isaac Newton** i **Gottfried Leibniz**.

D'aquesta manera començava un llarg procés que portaria a finals del segle XVII al naixement del Càlcul Infinitesimal, de la mà de Newton i Leibniz i permetria calcular el valor màxim o mínim de qualsevol funció diferenciable. La rellevància d'aquests dos matemàtics fa que a continuació es comenti, breument, la seva obra.

Isaac Newton (1642 – 1727) va ser l'introductor en òptica del concepte de freqüència de les ones lluminoses, va estudiar la dispersió de la llum blanca a través d'un prisma i va construir el primer telescopi reflector (1671). La seva mecànica, exposada al 1687 en els *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, constitueix la base de tots els desenvolupaments posteriors en aquest camp de la ciència; la seva base fonamental és el principi d'inèrcia, la proporcionalitat entre la força i l'acceleració i la igualtat entre forces d'acció i de reacció. Newton va introduir el concepte de la gravitació universal i va explicar el moviment dels planetes, les marees,... La seva aportació més destacada al camp de la matemàtica va ser la teoria del càlcul infinitesimal, que va elaborar al mateix temps que Leibniz (1646 – 1716) inventava el càlcul diferencial.

D'altra banda, **Gottfried Leibniz** (1646 – 1716) va descobrir el càlcul diferencial i integral (1676), independentment d'Isaac Newton, i és l'introductor de la notació per derivades i integrals que encara usem avui en dia. També és l'inventor del sistema binari, molt usat actualment, i anticipa la lògica moderna i l'anàlisi. Va fer moltes contribucions a la física, a la tecnologia, a la medicina,... Fou elegit per unanimitat membre de la *Royal Society* de Londres, gràcies a un model per realitzar les quatre operacions bàsiques. A més, obtingué un famós desenvolupament en sèrie de $\pi/4$.

L'any 1696, poc temps després d'haver-se introduït a les matemàtiques la nova branca del càlcul diferencial, **Johann Bernoulli** (1667 – 1748) va destacar per treballar una quantitat àmplia de problemes, dels quals el dels isoperímetres és dels més antics. Fins llavors, en els problemes estudiats mitjançant les regles del càlcul diferencial, la quantitat de la que es buscava el mínim només depenia d'una o més variables numèriques. Ara bé, Bernoulli presentà un problema en què la quantitat que es considerava depenia de tota una corba, fet que constituí una diferència essencial i posava el problema fora de l'abast directe del càlcul diferencial del moment. El problema en qüestió és el de la braquistòcrona o corba del descens més ràpid i consisteix en determinar d'entre totes les corbes que uneixen dos punts *P* i *Q* situats en el mateix pla vertical, quina és aquella en què una bala que surt de *P* a velocitat inicial zero i que es mou per la força de la gravetat, arriba a *Q* en el mínim temps possible.

El primers mètodes de resolució els van trobar Bernoulli i altres investigadors, però no eren gaire generals i estaven molt enfocats a resoldre aquest problema en qüestió. De totes maneres, no va passar gaire temps fins que **Leonhard Euler** (1707 – 1783) i **Joseph Louis Lagrange** (1736 – 1813) van desenvolupar mètodes més generals per resoldre problemes d'extrems en què l'element independent no era una sola variable numèrica o un nombre finit d'aquestes, sinó tota una corba o una família. Aquest mètode es denominà *càlcul de variacions*.

A continuació, donada la gran importància que tingué Euler per a les matemàtiques del segle XVIII, tot seguit fem un breu resum de la seva obra.

Leonhard Euler (1707 – 1783) presenta una obra molt àmplia, ja que es va dedicar a molts camps del saber, com la música, la mecànica, l'astronomia, l'òptica,... En matemàtiques, L. Euler és un dels principals artífexs de l'auge de l'analítica durant el segle XVIII. És l'autor de la *Introductio in Analysis Infinitorum* (1748); *Institutiones Calculi Differentialis* (1755); *Institutiones Calculi Integralis* (1768 – 1770). El seu tractat *Mechanica, sive motus scientia analytica exposita* (1736) és la primera gran obra en què la mecànica del punt material és concebuda i exposada com una ciència racional.

Finalment, cal comentar que **Jakob Steiner** (1796 – 1863) utilitzant mètodes elementals va provar que si existia una solució del problema isoperimètric, aleshores havia de ser un cercle. Més tard, l'any 1884, **Hermann Schwartz** (1843 – 1921) va demostrar la propietat isoperimètrica per a una esfera de tres dimensions i el matemàtic italià **Ennio de Giorgi** (1928 – 1996) va estendre aquesta propietat per a espais que tenen una dimensió més gran que tres.

<u>ANNEX 2</u>: INSTITUCIONS QUE PROMOUEN LA RESOLUCIÓ DE PROBLEMES EN EDUCACIÓ MATEMÀTICA

L'any 1980, el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) va publicar *An Agenda for Action* i situà com a primer ítem en la seva llista de recomanacions la idea de què la resolució de problemes ha de ser l'eix de la matemàtica escolar i el principal objectiu de l'ensenyament de les matemàtiques.

Aquesta recomanació general es concretava en <u>sis accions</u> en què s'implicava el professorat, els investigadors i les administracions educatives. Vegem-les:

I. El currículum de matemàtiques s'ha d'organitzar al voltant de la resolució de problemes.
II. La definició i el llenguatge de la resolució de problemes en matemàtiques s'ha de desenvolupar i ampliar amb la finalitat d'incloure un ampli espectre d'estratègies, processos i maneres de presentació que englobin tot el potencial de les aplicacions matemàtiques.
III. El professorat de matemàtiques ha de crear un ambient adequat a la classe per tal que pugui sorgir la resolució de problemes.
IV. S'han de desenvolupar materials curriculars apropiats per ensenyar a resoldre problemes a tots els nivells.
V. Els programes de matemàtiques dels anys 80 han d'implicar l'alumnat en el procés de resolució de problemes i han de presentar aplicacions a tots els nivells.
VI. Els investigadors han de prioritzar, durant la dècada dels anys 80, les investigacions sobre la naturalesa de la resolució de problemes i les vies efectives per aconseguir resolutors de problemes.

L'any 1982, l'*Association of Teachers of Mathematics* (ATM) va publicar l'informe *Cockcroft* sobre l'ensenyament de les matemàtiques en centres de primària i secundària d'Anglaterra i Gales i va establir que l'habilitat de resoldre problemes és el nucli central de l'ensenyament i aprenentatge de les matemàtiques. Així, elaborà un document on es va afirmar que la resolució de problemes hauria de passar a ser el tema principal de les classes de primària, en substitució de l'aritmètica rutinària.

Més tard, l'any 1989, en els *Principles and Standards for School Mathematics* s'inclou la resolució de problemes com una de les normes que s'ha de desenvolupar en el currículum escolar de matemàtiques. En aquest text, el NCTM proposa cinc punts generals per a tot l'alumnat:

I. Aprendre a valorar les matemàtiques.
II. Adquirir confiança en la pròpia aptitud.
III. Adquirir la capacitat de resoldre problemes matemàtics.
IV. Aprendre a comunicar-se matemàticament.
V. Aprendre a raonar matemàticament.

En general, es proposà deixar de banda la pràctica tradicional, la qual consistia en resumir els resultats matemàtics en forma d'habilitats, conceptes i aplicacions i, considerar que aquests resultats formin part de propòsits més generals de la resolució de problemes i de la comunicació. Així, s'arriba a afirmacions com les següents:

> *Conèixer matemàtiques significa ser capaç d'usar-les amb propòsits definits. Per aprendre matemàtiques, els estudiants s'han d'involucrar en explorar, conjecturar i raonar, més que en l'aprenentatge de memòria de regles i procediments...*
>
> (NCTM, 1991, pàg. 5)

> *La resolució de problemes, en el seu sentit més ampli, significa quasi el mateix que l'ús de les matemàtiques.*
>
> (NCTM, 1991, pàg. 139)

L'any 2000, en els *Principles and Standards for School Mathematics* del NCTM es profunditza en sis criteris que estaven implícits en els Estàndards de 1989 (NTCM, 1989) i són el següents:

I. Equitat: l'excel·lència en educació matemàtica requereix igualtat, elevades expectatives i un gran recolzament a tots els estudiants.
II. Currículum: ha de ser coherent, centrat en allò més rellevant i articulat en diferents nivells.
III. Ensenyament: convé saber el que coneixen i necessiten els estudiants, per tal d'estimular-los i conduir-los cap a un bon aprenentatge.
IV. Aprenentatge: per aprendre matemàtiques és indispensable la comprensió i activar un nou coneixement des de l'experiència.
V. Avaluació: ha de recolzar l'aprenentatge i convé que proporcioni informació útil tant al professorat com a l'alumnat.
VI. Tecnologia: és una eina essencial en l'ensenyament i aprenentatge de les matemàtiques.

Finalment, convé esmentar el projecte PISA (*Program for International Student Assessment*), promugut per l'OCDE (*Organisation for Economic Co-operation and Development*), per tal d'avaluar els coneixements i les habilitats adquirides per l'alumnat de 15 anys de diversos països en les àrees de comprensió lectora, matemàtiques i ciències. Aquest projecte incideix en la idea de plantejar el coneixement matemàtic sobre la base de les *competències*, confrontant-les amb la visió tradicional del *saber* en termes de conceptes, fets, algorismes i tècniques. De totes maneres, cal tenir en compte que el projecte OCDE/PISA no és un document comparable als que s'han comentat al llarg d'aquest annex, ja que es tracta d'un projecte de creació d'indicadors per a l'avaluació.

ANNEX 3: VERSIÓ DEFINITIVA DE L'INSTRUMENT DE RECOLLIDA DE DADES

Universitat Autònoma de Barcelona

Les següents activitats formen part d'una investigació sobre Resolució de Problemes que es realitza en el context del treball final del Màster de Recerca en Didàctica de les Matemàtiques i de les Ciències que imparteix la Universitat Autònoma de Barcelona.

La resolució de cada problema has de fer-la amb bolígraf i en el mateix full on figura l'enunciat i, si el necessites, pots demanar-ne un altre. Si vols rectificar alguna cosa, tatxa-la de manera que es continuï llegint el que hi ha sota.

La informació que ens proporcionis es tractarà amb la més absoluta confidencialitat. Agraïm la teva valuosa col·laboració.

DADES PERSONALS							
Curs		Grup	A	B	C	D	E
Data							

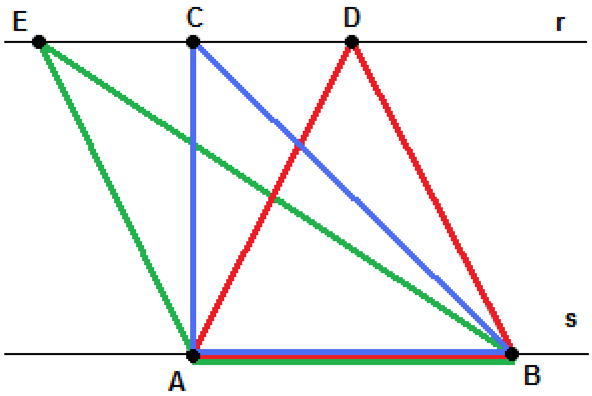
Itinerari de batxillerat			
	Tecnològic	Científic	Biosanitari
	Econòmic	Social	Altres

Data de naixement	
Edat actual	

Gènere		
	Noi	Noia

Miquel Ferrer Puigdellívol.
Estudiant del Màster de Recerca en Didàctica de les Matemàtiques.

Problema 1: Fixa't en la següent il·lustració:



Com pots observar, s'han representat dues rectes paral·leles: *r* i *s*. Sobre la recta *s* s'han marcat els punts *A* i *B*, i sobre la recta *r* s'han assenyalat els punts *C* , *D* i *E*. A més, s'han unit els punts *A*, *B*, *C*; *A*, *B*, *D*; i *A, B, E*; de manera que s'han construït els triangles *ABC* (triangle blau), *ABD* (triangle vermell) i *ABE* (triangle verd). Aquests tres triangles tenen la mateixa àrea. Creus que també tenen el mateix perímetre? Encercla la resposta que millor s'ajusti al teu punt de vista:

a) Els tres triangles tenen la mateixa àrea i, per tant, també tenen el mateix perímetre.

b) El triangle blau (el *ABC*) és el que tindrà major perímetre.

c) El triangle vermell (el *ABD*) és el de major perímetre.

d) El triangle verd (el *ABE*) és el que té un perímetre més gran.

Espai per fer anotacions

Qüestió 1.1: En una escala de l'1 (molt fàcil) al 10 (molt difícil) encercla el número que, des del teu punt de vista, millor s'ajusta a la dificultat d'aquest problema:

Problema 1

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Problema 2: Actualment, hi ha llaunes d'un refresc de cola de 330 ml amb dues formes diferents: una més alta i prima i l'altra més baixa i ampla (vegeu la figura). Ambdues contenen la mateixa quantitat de refresc, és a dir, tenen el mateix volum. Creus que és necessària la mateixa quantitat de llauna per fabricar cadascuna d'elles? Encercla la resposta que millor s'ajusti al teu punt de vista:

a) Penso que el recipient més alt i prim té més quantitat de llauna.

b) Em sembla que la quantitat de llauna necessària per fabricar els dos recipients ha de ser la mateixa, ja que les dues tenen el mateix volum.

c) Penso que el recipient més baix i ample té més quantitat de llauna.

d) No sé per on començar el problema i, per això, cap de les respostes anteriors s'ajusta al meu punt de vista.

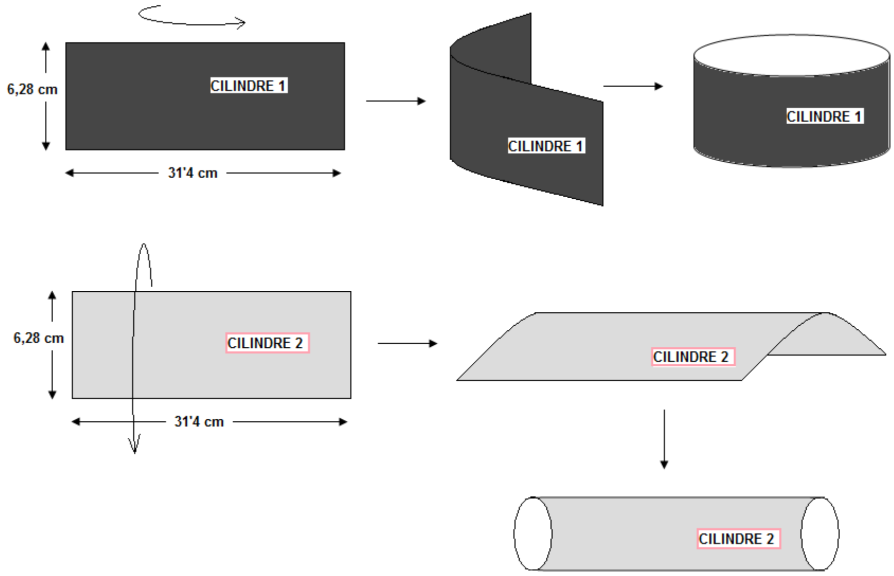
Espai per fer anotacions

Qüestió 1.2: En una escala de l'1 (molt fàcil) al 10 (molt difícil) encercla el número que, des del teu punt de vista, millor s'ajusta a la dificultat d'aquest problema:

Problema 2

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Problema 3: Es disposa de dues làmines iguals de cartolina (una grisa fosca i l'altra grisa clara) de forma rectangular, que presenten 31,4 cm de llargada i 6,28 cm d'altura. Amb cadascuna d'elles es vol construir un cilindre, però doblegant-les de dues maneres diferents, tal com s'observa a la següent il·lustració:



Així, s'obtenen dos cilindres, un de més ample i baix (cilindre 1, de color gris fosc) i un altre de més estret i alt (cilindre 2, de color gris clar). Els dos cilindres tenen la mateixa superfície lateral. Creus que els dos cilindres també tenen el mateix volum? Encercla la resposta que millor s'ajusti al teu punt de vista:

a) Els dos cilindres tenen el mateix volum, ja que els dos tenen la mateixa superfície lateral.

b) El cilindre més ample i baix (el gris fosc) té un volum més gran.

c) El cilindre més estret i alt (el gris clar) té un volum més gran.

d) No sé per on començar el problema i, per això, cap de les respostes anteriors s'ajusta al meu punt de vista.

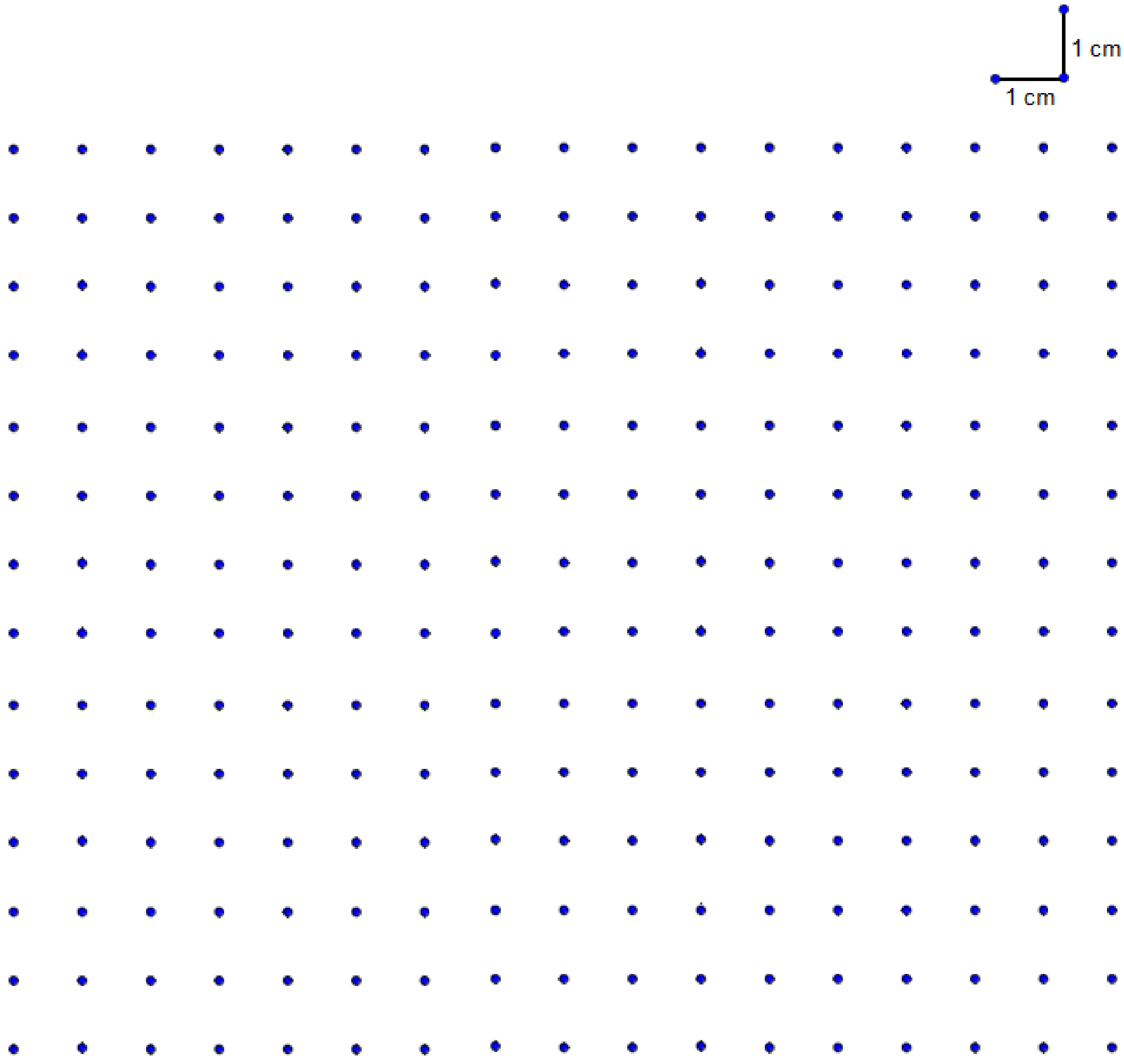
	Espai per fer anotacions

Qüestió 1.3: En una escala de l'1 (molt fàcil) al 10 (molt difícil) encercla el número que, des del teu punt de vista, millor s'ajusta a la dificultat d'aquest problema:

Problema 3

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

<u>Problema 4</u>: De totes les figures de 8 cm de perímetre que es poden representar sobre el següent diagrama dibuixa la que tingui l'àrea més gran (és a dir, l'àrea màxima). Argumenta la teva elecció.



Espai per a l'argumentació

<u>Qüestió 1.4</u>: En una escala de l'1 (molt fàcil) al 10 (molt difícil) encercla el número que, des del teu punt de vista, millor s'ajusta a la dificultat d'aquest problema:

Problema 4

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

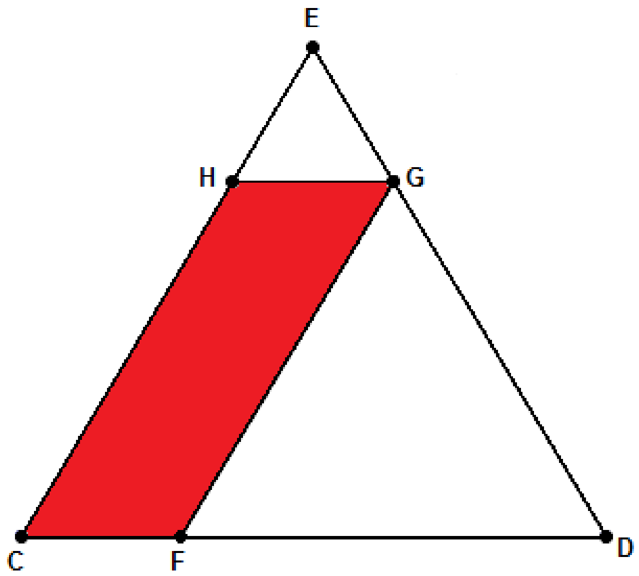
Problema 5: Sabem que dos números enters i positius sumen 100. Determina quins són aquests números de manera que el seu producte sigui el més gran possible (és a dir, màxim). Argumenta la teva resposta.

Qüestió 1.5: En una escala de l'1 (molt fàcil) al 10 (molt difícil) encercla el número que, des del teu punt de vista, millor s'ajusta a la dificultat d'aquest problema:

Problema 5

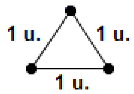
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

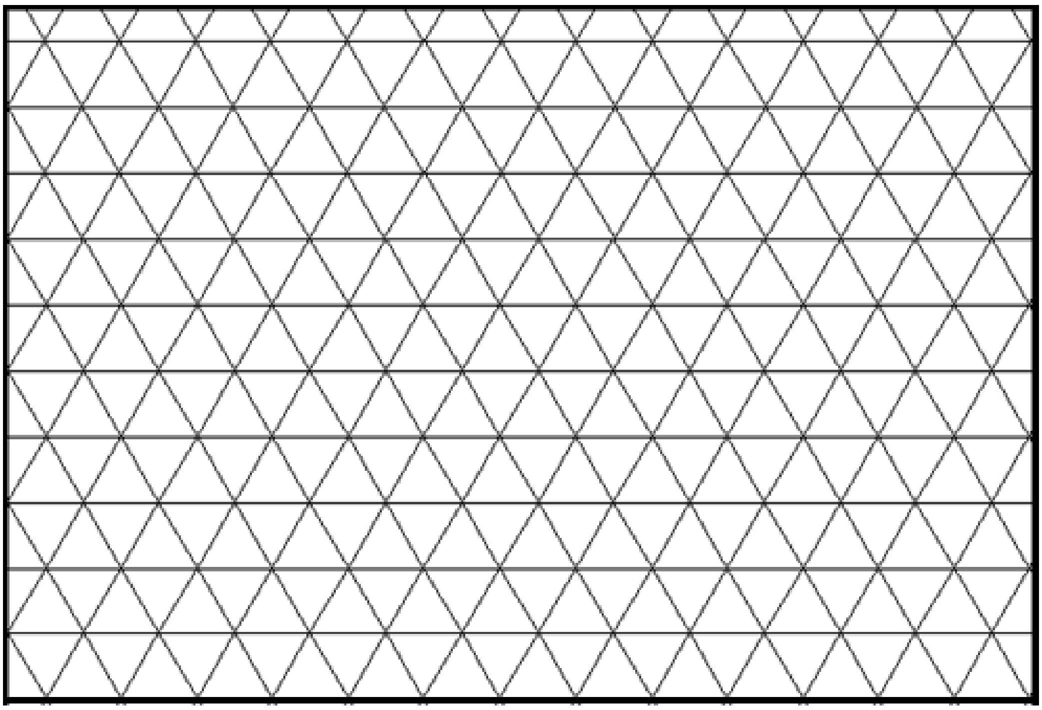
<u>Problema 6</u>: Considerem el triangle de vèrtexs *C*, *D* i *E*, tal com es pot veure a la figura. Passant pel punt *F*, situat en el costat *CD*, dibuixem una recta paral·lela al costat *CE* que talla el costat *DE* en el punt *G*. La recta que passa per *G* i que és paral·lela al segment *CD* talla el costat *CE* en el punt *H*. On cal situar el punt *F* del segment *CD* per tal que el paral·lelogram *CFGH* tingui àrea màxima?



Inicialment, et pot semblar complicat respondre aquesta pregunta. A continuació et donem algunes indicacions que et poden ajudar a resoldre el problema.

a) Sobre el retall de paper triangular que se t'adjunta, dibuixa un triangle, com el de la figura anterior, de 8 unitats de costat. Pren com a unitat els triangles equilàters del full, és a dir 1 unitat (1 u.) = 1 cm:





b) Divideix la base del triangle en 8 parts iguals i, per a cadascuna, construeix un paral·lelogram de la mateixa manera que s'indica a l'enunciat del problema. Així, hauries d'obtenir 7 paral·lelograms. Ho has aconseguit?

Sí **No**

c) Calcula l'àrea de cadascun dels paral·lelograms. Recorda que per fer-ho has de multiplicar la longitud de la base per la longitud de l'altura de cada paral·lelogram. En aquest cas et serà útil prendre les mesures amb un regle o bé usar que 1 unitat = 1 cm. Així, completa la taula següent:

<u>Base</u> (en cm)	**<u>Altura</u> (en cm)**	**<u>Àrea</u> (en cm^2)**

d) Representa sobre uns eixos de coordenades l'àrea dels paral·lelograms en funció de la seva base. Uneix els punts que has representat amb una corba.

e) Quin és el paral·lelogram que té l'àrea més gran? Com són els seus costats? I els seus angles? Com s'anomena aquest tipus de paral·lelogram?

f) Com són els angles de tots els paral·lelograms que has representat? Argumenta la teva resposta.
Creus que aquest fet és general per a tots els paral·lelograms construïts de la forma que t'indica l'enunciat del problema? Argumenta la teva resposta.

g) Quin és el perímetre de tots els paral·lelograms que has representat? Argumenta la teva resposta.
Creus que aquest fet és general per a tots els paral·lelograms construïts de la forma que t'indica l'enunciat del problema? Argumenta la teva resposta.

h) En general, on creus que s'ha de situar el punt *F* del segment *CD* per tal que l'àrea del paral·lelogram *CFGH* sigui màxima? Argumenta la teva resposta.
Nota: Et pot ser útil usar la informació dels apartats anteriors.

Qüestió 1.6: En una escala de l'1 (molt fàcil) al 10 (molt difícil) encercla el número que, des del teu punt de vista, millor s'ajusta a la dificultat d'aquest problema:

Problema 6

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Qüestió 2: A l'hora de respondre els problemes anteriors, t'has sentit bloquejat en algun moment, és a dir, no sabies què fer, no entenies el problema, no podies veure quina estratègia seguir,...? Si és així, en quin moment s'ha produït aquest bloqueig? Has aconseguit sortir-te'n? Si és així, com ho has fet? Explica el teu cas particular.

<u>ANNEX 4</u>: RESUM DE LES DADES OBTINGUDES DURANT EL PROCÉS D'ANÀLISI

A continuació es presenten, en forma de taula, les dades que s'han obtingut després de realitzar l'anàlisi de les respostes dels qüestionaris. S'inclou el codi de l'alumne, l'institut, l'itinerari de batxillerat, l'edat, el sexe i les respostes dels problemes 1, 2 i 3. A més, es presenten les estratègies de resolució del problema 4, els errors detectats, les estratègies seguides en el problema 5 i els errors realitzats pels participants. Finalment, es mostra si la resposta de l'alumne a l'apartat (**c**) del problema 6 ha estat correcta o incorrecta.

Convé destacar que la notació seguida per indicar les estratègies i els errors és la mateixa que la utilitzada en els apartats 4.2.2 i 4.2.3 de la memòria.

CODI	IES	BATX.	ED.	SEXE	P1	P2	P3	ESTR. P4	ER.P4	ER. P4	ESTR. P5	ER.P5	ER. P5	P.6[c]
1	Berga	Econ.	17	Noi	**d**	**b**	**a**	**S.E.D.**	Incor.	D	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	N/C
2	Berga	Econ.	16	Noi	**a**	**b**	**b**	**C.S.**	Incor.	A	**C.S.**	Cor.	S.E.	N/C
3	Berga	Social	17	Noi	**d**	**b**	**d**	**A.E.**	Incor.	D	**A.E.**	Cor.	S.E.	N/C
4	Berga	Social	17	Noi	**d**	**b**	**b**	**P.R.G.**	Incor.	B	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	N/C
5	Berga	Altres	16	Noi	**d**	**b**	**a**	**C.S.V.A.**	Cor.	S.E.	**C.S.**	Cor.	S.E.	N/C
6	Berga	Econ.	16	Noi	**a**	**c**	**b**	**P.R.G.**	Incor.	B	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	N/C
7	Berga	Econ.	16	Noi	**d**	**b**	**b**	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	N/C
8	Berga	Econ.	16	Noi	**d**	**b**	**b**	**C.S.**	Incor.	B	**A.E.**	Incor.	D	N/C
9	Berga	Social	17	Noi	**d**	**b**	**d**	**C.S.**	Cor.	S.E.	**C.S.**	Cor.	S.E.	Incor.
10	Berga	Social	16	Noi	**d**	**d**	**a**	**C.S.**	Incor.	D	**S.E.D.**	N/C	N/C	Incor.
11	Berga	Econ.	16	Noi	**c**	**b**	**b**	**S.E.D.**	N/C	N/C	**S.E.D.**	N/C	N/C	N/C
12	Berga	Econ.	16	Noi	**d**	**b**	**a**	**C.S.**	Incor.	A	**A.E.**	Cor.	S.E.	N/C
13	Berga	Social	17	Noia	**d**	**b**	**b**	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	**A.E.**	Cor.	S.E.	Cor.
14	Berga	Econ.	17	Noi	**d**	**b**	**a**	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	**C.S.**	Cor.	S.E.	Incor.
15	Berga	Social	16	Noi	**d**	**b**	**a**	**C.S.V.**	Incor.	B	**A.E.**	Cor.	S.E.	Incor.
16	Berga	Social	17	Noi	**d**	**d**	**b**	**C.S.**	Incor.	A	**S.E.D.**	N/C	N/C	N/C
17	Berga	Econ.	16	Noia	**d**	**b**	**a**	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	Incor.
18	Berga	Econ.	16	Noia	**d**	**b**	**a**	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	**C.S.V.A.**	Cor.	S.E.	Incor.
19	Berga	Econ.	16	Noia	**d**	**b**	**a**	**C.S.**	Cor.	S.E.	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	N/C
20	Berga	Social	16	Noia	**d**	**b**	**b**	**C.S.**	Cor.	S.E.	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	Incor.
21	Berga	Econ.	16	Noia	**d**	**b**	**a**	**C.S.**	Cor.	S.E.	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	N/C
22	Berga	Social	16	Noia	**d**	**b**	**d**	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	**A.E.**	Cor.	S.E.	Incor.
23	Berga	Social	16	Noi	**d**	**b**	**b**	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	Incor.
24	Berga	Social	17	Noia	**d**	**b**	**a**	**A.E.**	Incor.	A	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	Incor.
25	Berga	Social	17	Noia	**d**	**b**	**a**	**C.S.**	Incor.	A	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	Incor.
26	Berga	Social	18	Noia	**d**	**b**	**a**	**C.S.**	Incor.	A	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	Incor.
27	Berga	Social	17	Noi	**d**	**b**	**a**	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	Incor.
28	Berga	Econ.	16	Noia	**d**	**b**	**a**	**C.S.**	Incor.	A	**A.E.**	Cor.	S.E.	Incor.
29	Berga	Social	16	Noia	**d**	**b**	**a**	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	Incor.
30	Berga	Econ.	16	Noia	**d**	**b**	**a**	**A.E.**	Incor.	A	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	Incor.
31	Berga	Econ.	17	Noia	**d**	**b**	**a**	**C.S.V.**	Incor.	A	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	Incor.
32	Berga	Biosan.	16	Noi	**d**	**b**	**a**	**C.S.V.**	Incor.	A	**S.E.D.**	Incor.	D	Incor.

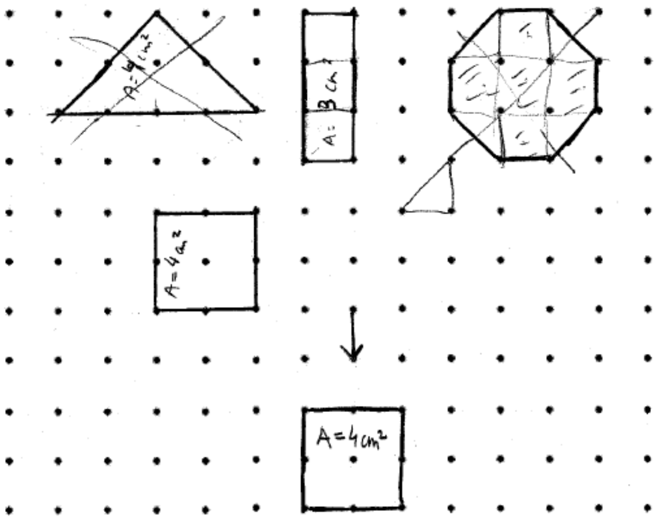
33	Berga	Biosan.	16	Noia	**d**	**c**	**d**	**P.R.G.**	Incor.	A	**C.S.V.A.**	Cor.	S.E.	Cor.
34	Berga	Biosan.	16	Noia	**d**	**b**	**a**	**A.E.**	Incor.	A	**Ll.R.**	Cor.	S.E.	Incor.
35	Berga	Biosan.	16	Noia	**d**	**a**	**b**	**C.S.V.A.**	Incor.	A	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	Incor.
36	Berga	Biosan.	16	Noia	**d**	**c**	**a**	**C.S.**	Incor.	B	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	Cor.
37	Berga	Biosan.	16	Noi	**d**	**c**	**a**	**C.S.**	Cor.	S.E.	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	Incor.
38	Berga	Tecno.	17	Noi	**d**	**b**	**a**	**S.E.D.**	Incor.	A	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	N/C
39	Berga	Biosan.	16	Noi	**d**	**b**	**a**	**S.E.D.**	N/C	N/C	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	N/C
40	Berga	Tecno.	16	Noi	**d**	**a**	**c**	**C.S.**	Cor.	S.E.	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	Incor.
41	Berga	Biosan.	16	Noi	**d**	**b**	**a**	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	Incor.
42	Berga	Tecno.	16	Noi	**a**	**b**	**a**	**C.S.**	Incor.	A	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	Incor.
43	Berga	Tecno.	16	Noi	**a**	**b**	**a**	**C.S.**	Incor.	A	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	Incor.
44	Berga	Biosan.	16	Noia	**d**	**b**	**a**	**C.S.**	Incor.	A	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	Cor.
45	Berga	Biosan.	17	Noi	**a**	**b**	**a**	**A.E.**	Incor.	A	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	Cor.
46	Berga	Biosan.	17	Noia	**d**	**a**	**a**	**C.S.**	Incor.	A	**Ll.R.**	Cor.	S.E.	Incor.
47	Berga	Tecno.	16	Noia	**d**	**a**	**b**	**P.R.G.**	Cor.	S.E.	**C.S.V.A.**	Cor.	S.E.	Cor.
48	Berga	Biosan.	16	Noia	**d**	**b**	**a**	**C.S.**	Incor.	A	**A.E.**	Cor.	S.E.	N/C
49	Berga	Biosan.	16	Noia	**d**	**b**	**a**	**C.S.**	Incor.	A	**S.E.D.**	N/C	N/C	Incor.
50	Berga	Biosan.	17	Noia	**d**	**b**	**a**	**A.E.**	Incor.	A	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	Incor.
51	Berga	Biosan.	16	Noia	**d**	**b**	**a**	**C.S.**	Cor.	S.E.	**C.S.**	Cor.	S.E.	Incor.
52	Berga	Científic	16	Noi	**a**	**b**	**a**	**A.E.**	Incor.	A	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	Incor.
53	Berga	Biosan.	16	Noia	**d**	**b**	**a**	**C.S.**	Cor.	S.E.	**S.E.D.**	N/C	N/C	Cor.
54	Berga	Tecno.	16	Noi	**d**	**b**	**a**	**C.S.V.A.**	Cor.	S.E.	**Ll.R.**	Cor.	S.E.	Cor.
55	Berga	Econ.	16	Noia	**d**	**b**	**a**	**A.E.**	Incor.	A	**C.S.V.A.**	Cor.	S.E.	N/C
56	Berga	Tecno.	17	Noi	**a**	**b**	**a**	**P.R.G.**	Incor.	A	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	Incor.
57	Berga	Biosan.	17	Noia	**d**	**b**	**b**	**C.S.V.A.**	Cor.	S.E.	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	Incor.
58	Berga	Tecno.	17	Noi	**d**	**b**	**a**	**A.E.**	Incor.	A	**A.E.**	Cor.	S.E.	Cor.
59	Berga	Tecno.	16	Noi	**d**	**c**	**a**	**C.S.**	Incor.	A	**Ll.R.**	Cor.	S.E.	Incor.
60	Berga	Científic	16	Noia	**d**	**b**	**a**	**C.S.**	Incor.	B	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	Cor.
61	Berga	Científic	16	Noia	**d**	**a**	**b**	**P.R.G.**	Cor.	S.E.	**S.E.D.**	N/C	N/C	Cor.
62	Berga	Científic	17	Noia	**d**	**b**	**a**	**C.S.V.A.**	Cor.	S.E.	**Ll.R.**	Cor.	S.E.	Incor.
63	Berga	Científic	16	Noi	**d**	**b**	**a**	**A.E.**	Cor.	S.E.	**A.E.**	Cor.	S.E.	Incor.
64	Berga	Científic	16	Noi	**d**	**b**	**a**	**C.S.V.A.**	Cor.	S.E.	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	Cor.
65	Berga	Científic	17	Noi	**d**	**b**	**a**	**A.E.**	Cor.	S.E.	**C.S.**	Cor.	S.E.	Incor.
66	Berga	Científic	16	Noi	**d**	**a**	**b**	**P.R.G.**	Cor.	S.E.	**C.S.**	Cor.	S.E.	Incor.
67	Berga	Tecno.	16	Noi	**d**	**b**	**b**	**C.S.V.**	Incor.	A	**S.E.D.**	N/C	N/C	Cor.
68	Berga	Científic	17	Noia	**a**	**b**	**a**	**C.S.V.A.**	Cor.	S.E.	**S.E.D.**	N/C	N/C	Incor.
69	Berga	Científic	16	Noi	**d**	**b**	**a**	**C.S.**	Incor.	A	**C.S.**	Cor.	S.E.	Incor.
70	Berga	Científic	16	Noia	**d**	**b**	**a**	**C.S.**	Incor.	A	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	Cor.
71	Berga	Científic	16	Noi	**d**	**b**	**a**	**C.S.**	Cor.	S.E.	**C.S.**	Cor.	S.E.	Cor.
72	Berga	Científic	16	Noia	**d**	**b**	**a**	**C.S.**	Incor.	A	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	Incor.
73	Berga	Tecno.	16	Noia	**d**	**b**	**a**	**S.E.D.**	N/C	N/C	**S.E.D.**	N/C	N/C	Cor.
74	Berga	Científic	17	Noia	**a**	**b**	**b**	**S.E.D.**	Incor.	D	**Ll.R.**	Cor.	S.E.	Incor.
75	Berga	Científic	16	Noia	**d**	**b**	**a**	**C.S.V.A.**	Incor.	B	**C.S.V.A.**	Cor.	S.E.	Incor.
76	Berga	Científic	17	Noia	**a**	**b**	**c**	**S.E.D.**	N/C	N/C	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	Incor.
77	Berga	Tecno.	16	Noia	**d**	**b**	**a**	**C.S.**	Cor.	S.E.	**S.E.D.**	Incor.	D	Incor.
78	Berga	Científic	16	Noia	**d**	**b**	**a**	**S.E.D.**	N/C	N/C	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	Cor.
79	Berga	Altres	17	Noia	**d**	**c**	**b**	**C.S.**	Incor.	D	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	Incor.
80	Berga	Científic	16	Noia	**d**	**b**	**a**	**A.E.**	Cor.	S.E.	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	Incor.
81	Berga	Científic	16	Noia	**d**	**b**	**a**	**C.S.**	Incor.	A	**C.S.V.A.**	Cor.	S.E.	Incor.
82	Berga	Científic	16	Noi	**a**	**c**	**a**	**S.E.D.**	Incor.	D	**C.S.**	Cor.	S.E.	Incor.
83	Berga	Científic	16	Noi	**d**	**b**	**b**	**C.S.**	Incor.	A	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	Cor.
84	Berga	Científic	18	Noi	**a**	**b**	**a**	**C.S.**	Incor.	A	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	Cor.
85	Berga	Científic	17	Noi	**a**	**b**	**a**	**A.E.**	Incor.	E	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	Incor.
86	Berga	Tecno.	16	Noi	**d**	**b**	**a**	**C.S.**	Incor.	A	**S.E.D.**	N/C	N/C	Incor.
87	L'Arboç	Econ.	17	Noia	**d**	**c**	**b**	**C.S.V.A.**	Cor.	S.E.	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	Incor.

88	L'Arboç	Econ.	17	Noia	**d**	**c**	**b**	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	**C.S.V.A.**	Cor.	S.E.	Incor.
89	L'Arboç	Social	17	Noi	**c**	**c**	**b**	**Ll.R.**	Cor.	S.E.	**S.E.D.**	N/C	N/C	Incor.
90	L'Arboç	Altres	17	Noi	**d**	**c**	**c**	**C.S.V.A.**	Cor.	S.E.	**A.E.**	Cor.	S.E.	N/C
91	L'Arboç	Altres	17	Noia	**a**	**b**	**d**	**C.S.**	Cor.	S.E.	**A.E.**	Cor.	S.E.	N/C
92	L'Arboç	Econ.	17	Noi	**d**	**b**	**a**	**Ll.R.**	Cor.	S.E.	**S.E.D.**	N/C	N/C	Incor.
93	L'Arboç	Econ.	18	Noi	**d**	**a**	**a**	**C.S.V.A.**	Cor.	S.E.	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	Incor.
94	L'Arboç	Social	17	Noia	**d**	**b**	**a**	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	**S.E.D.**	N/C	N/C	Incor.
95	L'Arboç	Social	17	Noia	**d**	**b**	**a**	**A.E.**	Cor.	S.E.	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	Incor.
96	L'Arboç	Social	17	Noia	**d**	**b**	**a**	**C.S.V.A.**	Cor.	S.E.	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	Incor.
97	L'Arboç	Social	17	Noia	**d**	**b**	**a**	**C.S.V.A.**	Cor.	S.E.	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	N/C
98	L'Arboç	Social	17	Noia	**d**	**b**	**a**	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	N/C
99	L'Arboç	Econ.	17	Noi	**d**	**b**	**a**	**C.S.**	Incor.	E	**C.S.**	Cor.	S.E.	Cor.
100	L'Arboç	Social	16	Noi	**d**	**c**	**a**	**C.S.**	Incor.	A	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	Incor.
101	L'Arboç	Social	17	Noi	**d**	**b**	**b**	**C.S.**	Cor.	S.E.	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	Incor.
102	L'Arboç	Social	16	Noi	**d**	**c**	**b**	**C.S.**	Cor.	S.E.	**C.S.**	Incor.	B	Incor.
103	L'Arboç	Social	16	Noi	**d**	**a**	**b**	**C.S.**	Cor.	S.E.	**C.S.**	Cor.	S.E.	N/C
104	L'Arboç	Social	16	Noi	**a**	**b**	**a**	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	Cor.
105	L'Arboç	Social	16	Noi	**a**	**d**	**a**	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	**C.S.V.A.**	Cor.	S.E.	Incor.
106	L'Arboç	Econ.	16	Noia	**a**	**b**	**a**	**C.S.V.A.**	Cor.	S.E.	**Ll.R.**	Cor.	S.E.	Incor.
107	L'Arboç	Econ.	17	Noi	**d**	**d**	**a**	**C.S.**	Cor.	S.E.	**C.S.**	Cor.	S.E.	Incor.
108	L'Arboç	Econ.	16	Noi	**N/C**	**d**	**d**	**C.S.**	Cor.	S.E.	**B.F.P.**	Cor.	S.E.	N/C
109	L'Arboç	Social	17	Noia	**d**	**b**	**a**	**C.S.**	Incor.	A	**C.S.**	Incor.	D	Incor.
110	L'Arboç	Social	16	Noi	**a**	**b**	**a**	**C.S.**	Cor.	S.E.	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	Incor.
111	L'Arboç	Científic	16	Noi	**d**	**c**	**c**	**C.S.**	Incor.	A	**C.S.**	Cor.	S.E.	Incor.
112	L'Arboç	Científic	16	Noi	**d**	**b**	**a**	**C.S.**	Cor.	S.E.	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	N/C
113	L'Arboç	Científic	16	Noi	**d**	**b**	**a**	**C.S.V.A.**	Cor.	S.E.	**C.S.V.A.**	Cor.	S.E.	Incor.
114	L'Arboç	Científic	17	Noi	**d**	**b**	**a**	**C.S.**	Incor.	A	**C.S.**	Cor.	S.E.	N/C
115	L'Arboç	Científic	17	Noia	**d**	**b**	**a**	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	**C.S.V.A.**	Cor.	S.E.	Incor.
116	L'Arboç	Tecno.	17	Noi	**d**	**b**	**a**	**A.E.**	Cor.	S.E.	**C.S.V.A.**	Cor.	S.E.	Incor.
117	L'Arboç	Científic	16	Noi	**d**	**b**	**a**	**C.S.**	Cor.	S.E.	**A.E.**	Cor.	S.E.	Incor.
118	L'Arboç	Tecno.	16	Noi	**d**	**b**	**a**	**A.E.**	Cor.	S.E.	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	Incor.
119	L'Arboç	Científic	16	Noi	**d**	**b**	**a**	**C.S.**	Cor.	S.E.	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	Incor.
120	L'Arboç	Tecno.	18	Noi	**d**	**b**	**a**	**C.S.**	Cor.	S.E.	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	N/C
121	L'Arboç	Tecno.	17	Noi	**d**	**b**	**a**	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	Cor.
122	L'Arboç	Tecno.	17	Noi	**a**	**b**	**b**	**C.S.V.A.**	Cor.	S.E.	**A.E.**	Cor.	S.E.	Incor.
123	L'Arboç	Científic	17	Noi	**d**	**c**	**a**	**C.S.**	Cor.	S.E.	**C.S.**	Cor.	S.E.	Incor.
124	L'Arboç	Científic	17	Noi	**d**	**b**	**a**	**C.S.**	Cor.	S.E.	**C.S.**	Cor.	S.E.	Cor.
125	L'Arboç	Tecno.	17	Noi	**d**	**b**	**a**	**C.S.**	Cor.	S.E.	**S.E.D.**	Incor.	B	Incor.
126	L'Arboç	Científic	16	Noia	**a**	**b**	**a**	**C.S.**	Cor.	S.E.	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	N/C
127	L'Arboç	Científic	16	Noia	**d**	**b**	**a**	**C.S.**	Incor.	B	**C.S.**	Cor.	S.E.	Incor.
128	L'Arboç	Científic	17	Noia	**d**	**b**	**b**	**C.S.**	Incor.	A	**S.E.D.**	Incor.	B	N/C
129	L'Arboç	Científic	16	Noia	**d**	**b**	**b**	**C.S.V.A.**	Cor.	S.E.	**C.S.**	Cor.	S.E.	Incor.
130	L'Arboç	Científic	16	Noia	**d**	**b**	**b**	**C.S.**	Incor.	B	**C.S.**	Cor.	S.E.	Incor.
131	L'Arboç	Científic	17	Noi	**d**	**b**	**a**	**S.E.D.**	Incor.	D	**C.S.**	Cor.	S.E.	N/C
132	L'Arboç	Tecno.	17	Noi	**a**	**c**	**b**	**S.E.D.**	Incor.	E	**C.S.**	Cor.	S.E.	Cor.
133	L'Arboç	Tecno.	17	Noi	**d**	**b**	**a**	**Ll.R.**	Cor.	S.E.	**Ll.R.**	Cor.	S.E.	Cor.
134	L'Arboç	Tecno.	17	Noia	**a**	**c**	**b**	**P.R.G.**	Cor.	S.E.	**C.S.V.**	Cor.	S.E.	Cor.
135	L'Arboç	Tecno.	17	Noi	**d**	**c**	**b**	**Ll.R.**	Cor.	S.E.	**C.S.V.A.**	Cor.	S.E.	Cor.
136	L'Arboç	Tecno.	17	Noi	**d**	**c**	**a**	**Ll.R.**	Cor.	S.E.	**B.F.P.**	Cor.	S.E.	Cor.
137	L'Arboç	Tecno.	17	Noi	**N/C**	**c**	**b**	**A.E.**	Cor.	S.E.	**Ll.R.**	Cor.	S.E.	Incor.
138	L'Arboç	Tecno.	17	Noi	**d**	**b**	**a**	**Ll.R.**	Cor.	S.E.	**A.E.**	Incor.	B	Incor.

ANNEX 5: ALTRES EXEMPLES PER A LES UNITATS DE SIGNIFICAT DE L'APARTAT 4.2.2

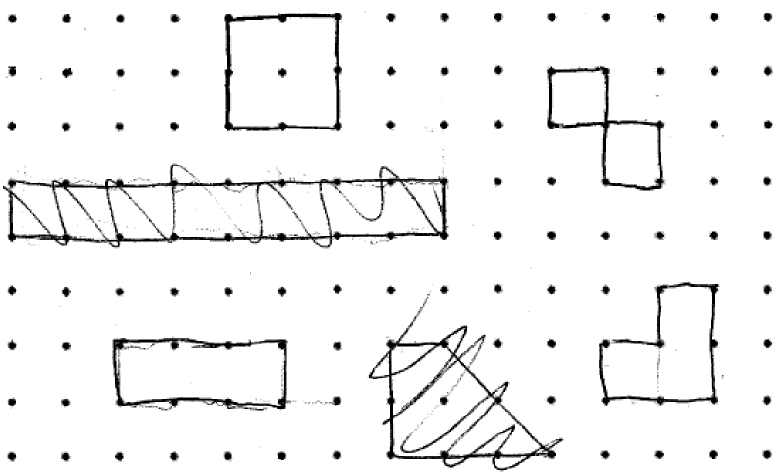
Aquest annex conté altres exemples que serveixen per il·lustrar les unitats de significat que s'han detectat en els problemes 4 i 5 de l'instrument de recollida de dades. A l'interior del treball s'ha decidit exemplificar les categories fent ús de respostes del problema 5, quan s'ha detectat l'estratègia en els dos problemes analitzats. Per això, a continuació s'inclouen models de les categories: A.E.; Ll.R.; C.S.; C.S.V.; C.S.V.A.; S.E.D.; corresponents a diverses respostes del problema 4 del qüestionari. Vegem-ho:

CATEGORIA 1: **Assaig i error (A.E.)**:



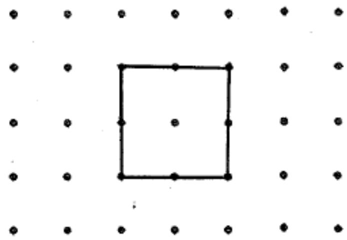
Model de resposta de la categoria 1 per al problema 4 (alumne 137 de l'Arboç).

CATEGORIA 2: **Fer una llista o un recompte (Ll.R.)**:



Model de resposta de la categoria 2 per al problema 4 (alumne 92 de l'Arboç).

<u>CATEGORIA 3.1</u>: Conjecturar la solució sense verificar-la ni argumentar-la (C.S.):



Model de resposta de la categoria 3 (C.S.) per al problema 4 (alumne 19 de Berga).

<u>CATEGORIA 3.2</u>: Conjecturar la solució i verificar-la (C.S.V.):

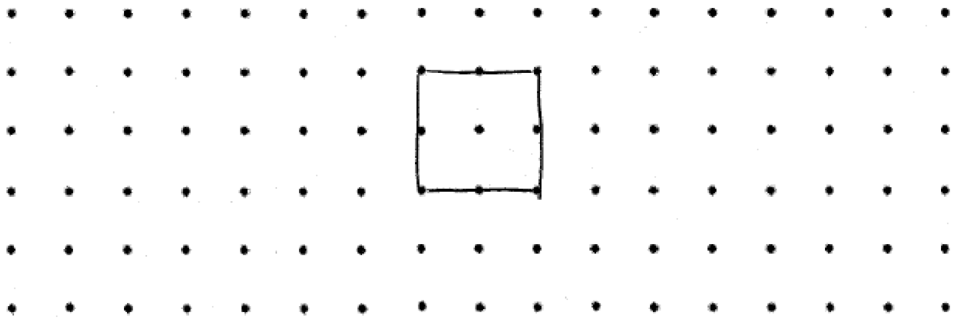


Figura 4

Espai per a l'argumentació

Un quadrat és la figura de 8 cm de perímetre, amb una àrea de 4 cm^2.

Model de resposta de la categoria 3 (C.S.V.) per al problema 4 (alumne 121 de l'Arboç).

<u>CATEGORIA 3.3</u>: Conjecturar la solució, verificar-la i argumentar-la (C.S.V.A.):

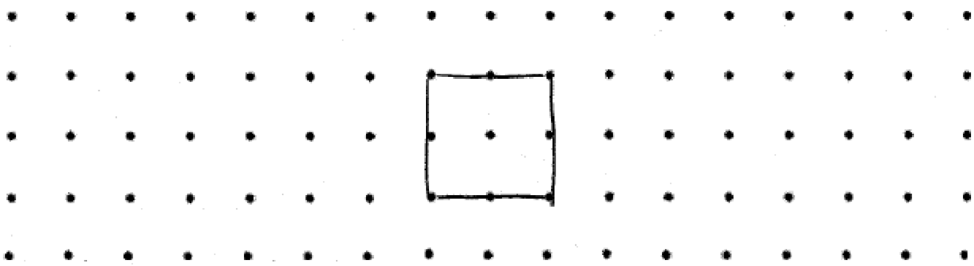


Figura 4

Espai per a l'argumentació

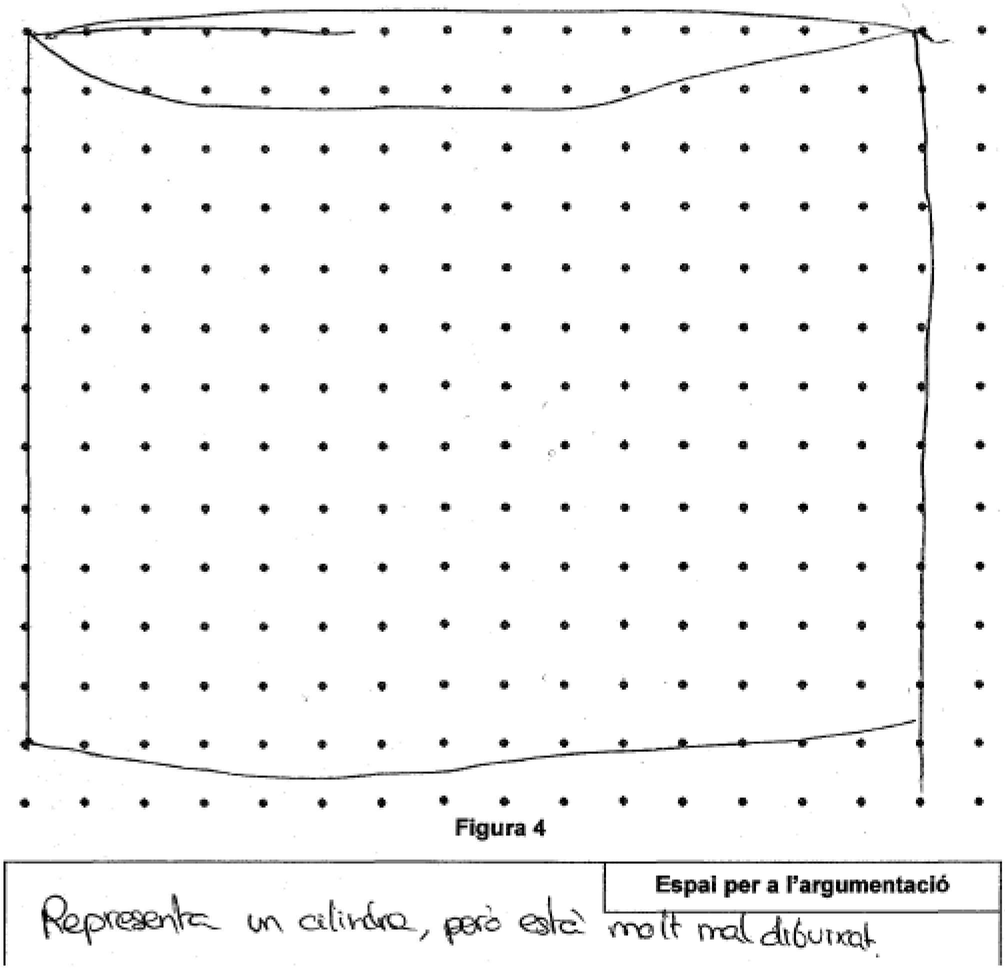
te de ser el quadrat per força ja que amb perimetre 8cm els costats tenen de fer 2 i l'area del quadrat és $2 \cdot 2 = 4\ cm^2$

havia pensat en fer un rectangle pero tindria de ser amb les dimencions 1x3, i per tant l'area seria més petita

$1 \times 3 = 3 \quad 3 < 4$

Model de resposta de la categoria 3 (C.S.V.A.) per al problema 4 (alumne 54 de Berga).

<u>CATEGORIA 6</u>: Sense estratègia detectada en el nivell que s'emmarca aquest treball (S.E.D.):



Model de resposta de la categoria 6 per al problema 4 (alumne 74 de Berga).