

Dinámica Combinatoria para Funciones skew-product en el Cilindro

Trabajo presentado al Departamento de Matemáticas de la
Universitat Autònoma de Barcelona por

Leopoldo Morales López

Bajo la dirección de los profesores

Dr. Alseda i Soler Lluís

Dr. Mañosas Capellades Francesc

Índice general

Introducción	1
1. Teoría del Forcing para Bandas	5
1.1. Núcleo de un conjunto	5
1.2. Pseudo-curvas	8
1.3. Bandas	15
1.3.1. Definición y propiedades elementales	15
1.3.2. Ordenación y recubrimientos entre bandas	21
1.4. Teoría del Forcing	28
1.4.1. Dinámica combinatoria en el intervalo	29
1.4.2. Dinámica combinatoria de funciones de \mathcal{T}	34
1.5. Demostración del Teorema 1.5.2	38
2. Una aplicación skew-product sin curvas invariantes	41
2.1. Construcción de A	41
2.1.1. Construcción de los conjuntos $\{A_i\}_{i=0}^{\infty}$	41
2.1.2. Demostración del Teorema 2.1.10	50
2.2. La Función	50
2.2.1. Preliminares	50
2.2.2. Definición y Propiedades	52
Referencias	57

Introducción

En el año 1964 Sharkovskiĭ enunció y demostró un célebre teorema que supuso, entre otros aspectos, el inicio del estudio de lo que hoy conocemos como dinámica combinatoria en el intervalo. En dicho teorema se introduce la siguiente ordenación de los números naturales:

$$\begin{aligned} 3 &\succ 5 \succ 7 \succ 9 \succ \dots \succ \\ 2 \cdot 3 &\succ 2 \cdot 5 \succ 2 \cdot 7 \succ 2 \cdot 9 \succ \dots \succ \\ 2^2 \cdot 3 &\succ 2^2 \cdot 5 \succ 2^2 \cdot 7 \succ 2^2 \cdot 9 \succ \dots \succ \\ &\vdots \\ 2^n \cdot 3 &\succ 2^n \cdot 5 \succ 2^n \cdot 7 \succ 2^n \cdot 9 \succ \dots \succ \\ &\vdots \\ 2^\infty \dots &\succ 2^n \succ \dots \succ 2^3 \succ 2^2 \succ 2 \succ 1. \end{aligned}$$

El teorema en cuestión afirma lo siguiente:

Teorema 0.0.1 (Sharkovskiĭ) *Sea I un intervalo en la recta real. Sea $f \in \mathcal{C}^0(I, I)$ una función continua que tiene una órbita periódica de periodo q . Entonces, f también tiene una órbita periódica de periodo $p \in \mathbb{N}$ para cada $p \prec q$. Recíprocamente, para cada $q \in \mathbb{N} \cup \{2^\infty\}$ existe una función $f_q \in \mathcal{C}^0(I, I)$ tal que el conjunto de puntos periódicos de f_q es $\{p \in \mathbb{N}: p \preceq q\}$.*

Este resultado afirma que la existencia de órbitas periódicas de un determinado periodo en una aplicación del intervalo “fuerza” la existencia de órbitas periódicas de otros periodos. Un refinamiento de este teorema es lo que conocemos como teoría del *forcing de órbitas periódicas en el intervalo*.

Fijado un periodo, es inmediato observar que hay distintos tipos combinatorios de órbitas del mismo periodo. Sea $P = \{p_1 < \dots < p_n\}$ una órbita periódica de periodo n de una función f del intervalo. Podemos asociar a la órbita periódica una permutación σ , de orden n (a partir de ahora, n -ciclo) dada por $\sigma(i) = j$ si y solo si $f(p_i) = p_j$. Asociamos así a una órbita periódica P de periodo n un n -ciclo σ al que llamamos *pattern* de P .

Diremos que un pattern σ *fuerza* otro pattern τ si toda función del intervalo que tiene una órbita periódica con el pattern σ tiene también una órbita periódica con el pattern τ . La teoría del forcing en el intervalo prueba que la anterior relación es una relación de orden parcial y describe con exactitud el conjunto de patterns forzados por un pattern prefijado.

En el artículo [7] el Teorema de Sharkovskiĭ fue extendido a una clase de funciones triangulares en el cilindro. Concretamente funciones continuas $T : \mathbb{S}^1 \times I \rightarrow \mathbb{S}^1 \times I$ donde $T(\theta, x) = (\theta + \omega, f(\theta, x))$ con $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. A esta clase de funciones se las conoce en la literatura como *skew-product en el cilindro*.

Los objetos invariantes considerados en este caso, no son ya órbitas periódicas (ni tan solo objetos minimales) sino una generalización de curvas invariantes, que los autores llaman bandas periódicas. Intuitivamente una banda es un subconjunto compacto del cilindro tal que sus fibras en un conjunto residual de \mathbb{S}^1 son intervalos. Una banda n -periódica es un conjunto de n bandas disjuntas que se aplican por la función de manera periódica entre ellas.

El Teorema de Sharkovskiĭ se enuncia en [7] de la siguiente manera:

Teorema 0.0.2 *Sea $T : \mathbb{S}^1 \times I \rightarrow \mathbb{S}^1 \times I$ una función skew-product. Si T tiene una banda q -periódica y $p \in \mathbb{N}$ es tal que $p \prec q$, entonces T tiene también una banda p -periódica.*

El trabajo que presentamos en esta memoria tiene dos objetivos. El primero de ellos, es refinarn el resultado obtenido en [7] para obtener una teoría del forcing entre patterns de bandas periódicas. En particular demostraremos que para una clase muy general de patterns la relación de forcing en el intervalo y en nuestra clase coinciden.

El otro objetivo es responder a la pregunta natural de si existe un análogo del teorema anterior para curvas periódicas. Obtenemos una respuesta negativa al construir un ejemplo de una función skew-product con una pareja de curvas 2-periódica pero sin curvas invariantes. Hasta donde nosotros sabemos este es el primer ejemplo explícito de función skew-product sin curvas invariantes.

La memoria está organizada de la siguiente forma. En la Sección 1.1 desarrollamos el concepto de *núcleo de un conjunto*. El Lema 1.1.10 es el resultado central de dicha sección, por su utilidad, pues establece la manera en que podemos obtener el núcleo de un conjunto a partir de la función fibra. En la Sección 1.2 estudiamos la noción de *pseudo-curva*, que no es más que una reformulación de lo que se denomina banda pinchada núcleo en [7]. El Corolario 1.2.13 es muy importante ya que relaciona ambos conceptos. En la sección 1.3 introducimos el concepto de banda tal como es considerado en [7]. Finalmente, el Teorema de Sharkovskiĭ lo demostramos en la Sección 1.5 como un corolario de nuestro teorema principal, Teorema 1.5.2 en el cual, demostramos la equivalencia de la relación de forcing introducida por nosotros y la definida en el intervalo.

En el segundo Capítulo, presentamos la construcción de una función con la propiedad de que el único subconjunto propio, compacto y conexo del cilindro invariante por la función es una *pseudo-curva* que no es una curva. La primera sección de este capítulo está dedicada a la

construcción topológica de la pseudo-curva citada. En el Teorema 2.1.10 están enunciadas las propiedades básicas de este objeto. La última sección está dedicada a construir la función que lo dejará invariante. Las propiedades de dicha función se resumen en el Teorema 2.2.10.

1

Teoría del Forcing para Bandas

Denotaremos por Ω al cilindro $\mathbb{S}^1 \times I$, donde \mathbb{S}^1 e I denotan a \mathbb{R}/\mathbb{Z} y $[-2, 2] \subset \mathbb{R}$, respectivamente. Un punto en Ω se escribirá en coordenadas como (θ, x) , donde $\theta \in \mathbb{S}^1$ y $x \in I$. Denotamos también por $\pi: \Omega \rightarrow \mathbb{S}^1$ la proyección respecto de la primera componente. Claramente π es continua. Nuestro objetivo en este capítulo es estudiar ciertos conjuntos invariantes para una familia de funciones del cilindro. En toda la memoria denotaremos por

$$\mathcal{T} = \{T: \mathbb{S}^1 \times I \rightarrow \mathbb{S}^1 \times I, \text{ continua} : T(\theta, x) = (\theta + \omega, f(\theta, x)) \text{ con } \omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$

Llamaremos a esta clase de funciones *skew-product* del cilindro

Sean A un subconjunto compacto de Ω y $\theta \in \mathbb{S}^1$. La *fibra* de A sobre θ se define como $A \cap \pi^{-1}(\theta) = A \cap (\{\theta\} \times [-2, 2])$ y será denotada por A^θ .

Denotaremos por \mathcal{G} a la familia de todos los subconjuntos residuales de \mathbb{S}^1 . Recordemos que un conjunto es residual en \mathbb{S}^1 si es la intersección de una familia numerable de subconjuntos abiertos y densos en \mathbb{S}^1 . Es bien conocido que un subconjunto residual en \mathbb{S}^1 es denso.

Nuestro primer objetivo es definir con precisión la noción de conjunto núcleo y dar una caracterización de dichos conjuntos (Corolario 1.1.12).

1.1. Núcleo de un conjunto

La noción de núcleo de un conjunto compacto juega un papel esencial en la construcción de los conjuntos invariantes de una función skew-product. Esta sección está dedicada al estudio de las propiedades elementales del núcleo de un conjunto. Dado $A \subset \Omega$, denotaremos su clausura por \overline{A} .

Definición 1.1.1 *Sea $M \subseteq \Omega$. Diremos que el *núcleo* de M es*

$$\bigcap_{G \in \mathcal{G}} \overline{M \cap \pi^{-1}(G)},$$

*y lo denotamos por M^{nuc} . Si en particular $M = M^{\text{nuc}}$, diremos que M es *núcleo*.*

Observemos que todos los conjuntos núcleo son subconjuntos compactos de Ω . Para trabajar con ellos introducimos las definiciones siguientes.

Definición 1.1.2 *Sea X un espacio métrico compacto. Definimos 2^X como el espacio de los subconjuntos compactos de X , diferentes del vacío.*

Equipamos al espacio anterior con una métrica, íntimamente ligada con la métrica de X .

Definición 1.1.3 *Dado un espacio métrico compacto X , con una métrica d , definimos la métrica H_d del espacio 2^X , por:*

$$\begin{aligned} H_d(B, C) &= \max \left\{ \max_{b \in B} \min_{c \in C} d(c, b), \max_{c \in C} \min_{b \in B} d(c, b) \right\} \\ &= \max \left\{ \max_{b \in B} d(b, C), \max_{c \in C} d(c, B) \right\}. \end{aligned}$$

A esta métrica se le denomina métrica de Hausdorff inducida por d .

Los siguientes resultados son bien conocidos (véase por ejemplo [1, 5]).

Teorema 1.1.4 *Si X es un espacio métrico compacto, el espacio $(2^X, H_d)$ es compacto.*

Proposición 1.1.5 *Si X es un espacio métrico compacto y $T : X \rightarrow X$ es continua, entonces la función inducida $2^X \xrightarrow{T} 2^X$ es continua.*

El siguiente resultado relaciona la convergencia en 2^X respecto a la métrica de Hausdorff con la convergencia en X .

Lema 1.1.6 *Sea $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente en 2^X y sea $K = \lim K_n$. Entonces $p \in K$ si y solo si existe una sucesión de puntos $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $p_n \in K_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $\lim p_n = p$.*

Demostración. Sea $p \in K$. En virtud de la compacidad de K_i , para cada $i \in \mathbb{N}$ existe $p_i \in K_i$ tal que $d(p, p_i) = d(p, K_i)$. Dichos puntos nos definen la sucesión $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$. Demostraremos que $\lim p_i = p$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N$ se tiene $H_d(K, K_n) < \varepsilon$. Observemos que $d(p, p_n) = d(p, K_n) \leq H_d(K, K_n) < \varepsilon$ para toda $n \geq N$. Luego, $\lim p_i = p$. Ahora supondremos que $\lim p_i = p$, con $p_i \in K_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y demostraremos que $p \in K$. Por la compacidad de K , existe $k_i \in K$ tal que $d(p_i, k_i) = d(p_i, K)$. Observemos que $d(p_i, k_i) = d(p_i, K) \leq H_d(K_i, K)$. La convergencia de K_i a K nos asegura que $\lim H_d(K_i, K) = 0$, lo que implica $\lim d(p_i, k_i) = 0$. Entonces $\lim k_i = p$ y $p \in K$ dado que K es cerrado. \square

La caracterización de los conjuntos núcleo que buscamos viene dada por los puntos de continuidad de una función de \mathbb{S}^1 a 2^{Ω} semicontinua superiormente. En lo que sigue recordaremos esta noción y enunciaremos algunos resultados técnicos asociados.

Definición 1.1.7 *Sean X y Y dos espacios métricos compactos. Diremos que $F : Y \rightarrow 2^X$ es semicontinua superiormente en $p \in Y$, si para todo abierto U en X , tal que $F(p) \subset U$ se cumple que $V = \{y : F(y) \subset U\}$ es abierto en Y . Diremos que la función es semicontinua superiormente si lo es para toda $p \in Y$.*

Usaremos también la siguiente propiedad de las funciones semicontinuas superiormente (véase por ejemplo el Teorema 7.10 en [4]).

Proposición 1.1.8 *Sean X y Y compactos. Si $F: X \rightarrow 2^Y$ es semicontinua superiormente, entonces los puntos de continuidad de F forman un conjunto residual en X .*

Ahora definiremos una función que es útil para encontrar el núcleo de un conjunto.

Definición 1.1.9 *Sea $M \in 2^\Omega$, tal que $\pi(M) = \mathbb{S}^1$. Definimos $\varphi_M: \mathbb{S}^1 \rightarrow 2^\Omega$ como $\varphi_M(\theta) := M^\theta$ y $G_M := \{\theta \in \mathbb{S}^1 : \varphi_M \text{ es continua en } \theta\}$.*

Lema 1.1.10 *Sea $M \in 2^\Omega$ con $\pi(M) = \mathbb{S}^1$. Entonces, la función φ_M es semicontinua superiormente y el conjunto G_M es residual. Además*

$$\overline{M \cap \pi^{-1}(G_M)} = \bigcap_{G \in \mathcal{G}} \overline{M \cap \pi^{-1}(G)} = M^{\text{nuc}}.$$

Demostración. En primer lugar, veremos que la función φ_M es semicontinua superiormente. Sean $\theta \in \mathbb{S}^1$ y U abierto en Ω , tales que $\varphi_M(\theta) \subset U$. Demostraremos que el conjunto $V = \{\gamma \in \mathbb{S}^1 : \varphi_M(\gamma) \subset U\}$ es un abierto en \mathbb{S}^1 . Por definición $\gamma \in V$ si y solo si $\varphi_M(\gamma) \in \pi^{-1}(\gamma) \cap M \subset U$, lo que a su vez es equivalente a $\gamma \notin \pi(M \cap (\Omega \setminus U))$. Consecuentemente, $V = \mathbb{S}^1 \setminus \pi(M \cap (\Omega \setminus U))$ es abierto y φ_M es semicontinua superiormente. De la Proposición 1.1.8 deducimos que G_M es residual.

Para demostrar la última afirmación del lema, veremos primero que

$$\overline{M \cap \pi^{-1}(G_M)} \subset \overline{M \cap \pi^{-1}(G)}$$

para cada $G \in \mathcal{G}$. Sean $G \in \mathcal{G}$ y (θ, x) un punto arbitrario de $M \cap \pi^{-1}(G_M)$ (es decir, $\theta \in G_M$ y $(\theta, x) \in M^\theta$). Como G es residual, es denso en \mathbb{S}^1 . Por lo tanto, podemos tomar una sucesión $\{\theta_n\}_{n=1}^\infty$ contenida en G , tal que $\lim \theta_n = \theta$. Por la continuidad de φ_M en θ , $\lim \varphi_M(\theta_n) = \varphi_M(\theta)$. Por el Lema 1.1.6, existe una sucesión $\{(\theta_n, x_n)\}_{n=1}^\infty$ tal que $(\theta_n, x_n) \in \varphi_M(\theta_n) \subset M \cap \pi^{-1}(G)$ tal que $\lim (\theta_n, x_n) = (\theta, x)$. Por lo tanto, $(\theta, x) \in \overline{M \cap \pi^{-1}(G)}$. Consecuentemente, $M \cap \pi^{-1}(G_M) \subset \overline{M \cap \pi^{-1}(G)}$ y, por tanto, $\overline{M \cap \pi^{-1}(G_M)} \subset \overline{M \cap \pi^{-1}(G)}$.

Dado que $G_M \in \mathcal{G}$, de lo demostrado anteriormente se deduce

$$\overline{M \cap \pi^{-1}(G_M)} \subset \bigcap_{G \in \mathcal{G}} \overline{M \cap \pi^{-1}(G)} \subset \overline{M \cap \pi^{-1}(G_M)}. \quad \square$$

Definición 1.1.11 *Dado $M \in 2^\Omega$ tal que $\pi(M) = \mathbb{S}^1$ el conjunto residual G_M de la Definición 1.1.9 (Lema 1.1.10) se denominará residual de continuidad de la función fibra para M .*

El siguiente resultado, que usaremos frecuentemente, es una consecuencia inmediata del Lema 1.1.10.

Corolario 1.1.12 *Sea $M \subset \Omega$ compacto tal que $\pi(M) = \mathbb{S}^1$. Entonces las siguientes nociones son equivalentes:*

- (a) M es núcleo.
- (b) $M = \overline{M \cap \pi^{-1}(G_M)}$
- (c) $M = \overline{M \cap \pi^{-1}(G)}$ para todo residual G en \mathbb{S}^1 .

Demostración. La equivalencia entre (a) y (b) es inmediata a partir del Lema 1.1.10. Supongamos que $M = \overline{M \cap \pi^{-1}(G)}$ para todo residual G en \mathbb{S}^1 , entonces claramente

$$\bigcap_{G \in \mathcal{G}} \overline{M \cap \pi^{-1}(G)} = M.$$

Si M es núcleo y G' es un residual en \mathbb{S}^1 , es inmediata la relación

$$M = \bigcap_{G \in \mathcal{G}} \overline{M \cap \pi^{-1}(G)} \subset \overline{M \cap \pi^{-1}(G')},$$

por otro lado, la compacidad de M nos garantiza que $\overline{M \cap \pi^{-1}(G')} \subset M$, concluimos pues la igualdad deseada. \square

1.2. Pseudo-curvas

Recordemos que nuestro objetivo es caracterizar los objetos invariantes de ciertas funciones *skew-product*. Los conjuntos núcleo que cumplen la siguiente propiedad son un objeto especial de esta caracterización.

Definición 1.2.1 *Sea $A \in 2^\Omega$. Diremos que A es pinchado, si el conjunto*

$$P_A := \{\theta \in \mathbb{S}^1 : \text{Card}(A^\theta) = 1\}$$

es denso en \mathbb{S}^1 .

Observación 1.2.2 *Observemos que si A es pinchado, en particular $\pi(A) = \mathbb{S}^1$.*

El siguiente lema caracteriza al conjunto P_A , cuando A es pinchado.

Lema 1.2.3 *Si $A \in 2^\Omega$ es pinchado, entonces $P_A = G_A$ (es decir P_A es el conjunto de puntos de continuidad de la función φ_A). En particular P_A es residual.*

Demostración. En primer lugar veremos que $P_A \subset G_A$. Para ello fijamos $\theta \in P_A$ y denotamos $A^\theta = \{(\theta, a)\}$. Para ver que $\theta \in G_A$ es suficiente demostrar que φ_A es continua en θ .

Sea $\{\theta_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión en \mathbb{S}^1 tal que $\lim \theta_n = \theta$. Hay que ver que $\lim A^{\theta_n} = A^\theta$. Como 2^Ω es compacto basta ver que cualquier subsucesión convergente de $\{A^{\theta_n}\}_{n=1}^\infty$ converge a A^θ . Supongamos sin pérdida de generalidad que $\{A^{\theta_n}\}_{n=1}^\infty$ es convergente y sea $B = \lim A^{\theta_n}$. Por el Lema 1.1.6, $B \subset A^\theta$. Además, $B = A^\theta$ dado que $|A^\theta| = 1$.

Veremos ahora que $G_A \subset P_A$. Para ello, mostraremos que $|A^\theta| = 1$ para cada $\theta \in G_A$. Como P_A es denso en \mathbb{S}^1 , existe una sucesión $\theta_n \in P_A$, tal que $\lim \theta_n = \theta$ y $\varphi_A(\theta_n) = A^{\theta_n} = \{(\theta_n, a_n)\}$.

Por la continuidad de φ_A en θ , tenemos que $\{(\theta_n, a_n)\} = \varphi_A(\theta_n)$ converge a $\varphi_A(\theta) = A^\theta$. Lo anterior implica que $\{(\theta_n, a_n)\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en 2^Ω . Luego, $\{(\theta_n, a_n)\}_{n=1}^\infty$ es también una sucesión de Cauchy en Ω dado que $H_d(\{(\theta_n, a_n)\}, \{(\theta_m, a_m)\}) = d((\theta_n, a_n), (\theta_m, a_m))$. Por el Lema 1.1.6, $|A^\theta| = 1$. \square

El resultado anterior nos motiva a estudiar los conjuntos pinchados núcleo como objetos “cercanos” a curvas (denotados pseudo-curvas en este trabajo). Para ello introducimos la definición siguiente.

Definición 1.2.4 *Definimos*

$$\mathfrak{C} = \{(\varphi, G) : G \text{ es residual en } \mathbb{S}^1 \text{ y } \varphi : G \rightarrow I \text{ continua}\}.$$

Para $(\varphi, G), (\varphi', G') \in \mathfrak{C}$ definimos

$$d_\infty((\varphi, G), (\varphi', G')) = \sup_{\theta \in G \cap G'} d(\varphi(\theta), \varphi'(\theta)).$$

La función d_∞ tiene la siguiente propiedad que nos será útil para demostrar que es una pseudométrica.

Lema 1.2.5 *Dadas $(\varphi, G), (\varphi', G') \in \mathfrak{C}$ y G'' un denso de \mathbb{S}^1 tal que $G'' \subset G \cap G'$ entonces*

$$d_\infty(\varphi(\theta), \varphi'(\theta)) = \sup_{\theta \in G''} d(\varphi(\theta), \varphi'(\theta)).$$

Demostración. Sea

$$s = d_\infty(\varphi(\theta), \varphi'(\theta)).$$

La desigualdad

$$s \geq \sup_{\theta \in G''} d(\varphi(\theta), \varphi'(\theta)).$$

se sigue de que $G'' \subset G \cap G'$. Esto muestra que s es una cota superior del siguiente conjunto de distancias $\{d(\varphi(\theta), \varphi'(\theta)) : \theta \in G''\}$. Para mostrar que s es el supremo, demostraremos que para toda $\beta > 0$ existe $\alpha \in G''$ tal que $s - \beta < d(\varphi(\alpha), \varphi'(\alpha))$. Por la definición de s existe $\theta \in G \cap G'$ tal que $s - \beta < d(\varphi(\theta), \varphi'(\theta)) \leq s$. Sea $\varepsilon < \frac{d(\varphi(\theta), \varphi'(\theta)) - (s - \beta)}{2}$. Como φ y φ' son continuas en θ existe $\delta > 0$ tal que si $\theta' \in B_\delta(\theta)$ se tiene $d(\varphi(\theta), \varphi(\theta')) < \varepsilon$ y $d(\varphi'(\theta), \varphi'(\theta')) < \varepsilon$. Entonces se cumplen las siguientes desigualdades

$$d(\varphi(\theta), \varphi'(\theta)) - 2\varepsilon \leq d(\varphi(\theta'), \varphi'(\theta')) \leq d(\varphi(\theta), \varphi'(\theta)) + 2\varepsilon.$$

En virtud de la densidad de G'' en \mathbb{S}^1 , existe $\alpha \in B_\delta(\theta) \cap G''$. Consecuentemente

$$d(\varphi(\theta), \varphi'(\theta)) - 2\varepsilon \leq d(\varphi(\alpha), \varphi'(\alpha)).$$

La definición de ε nos garantiza que $s - \beta < d(\varphi(\theta), \varphi'(\theta)) - 2\varepsilon$. Entonces $s - \beta < d(\varphi(\alpha), \varphi'(\alpha)) \leq s$. \square

Ahora podemos demostrar que d_∞ es una pseudométrica.

Lema 1.2.6 *La función $d_\infty : \mathfrak{C} \times \mathfrak{C} \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una pseudométrica y cumple:*

$$d_\infty((\varphi, G), (\varphi', G')) = 0 \text{ si y solo si } \varphi(\theta) = \varphi'(\theta) \text{ para toda } \theta \in G \cap G'.$$

Demostración. La segunda afirmación es inmediata a partir de la definición de d_∞ . Probaremos ahora que d_∞ es una pseudométrica. Para ello basta probar que

$$d_\infty((\varphi, G), (\varphi', G')) \leq d_\infty((\varphi, G), (\varphi'', G'')) + d_\infty((\varphi'', G''), (\varphi', G')),$$

para cualquier terna $(\varphi, G), (\varphi', G'), (\varphi'', G'') \in \mathfrak{C}$. Dados $(\varphi, G), (\varphi', G'), (\varphi'', G'') \in \mathfrak{C}$ definimos $G''' = G \cap G' \cap G''$. Entonces es inmediato que G''' cumple

$$d_\infty((\varphi, G'''), (\varphi', G''')) \leq d_\infty((\varphi, G'''), (\varphi'', G''')) + d_\infty((\varphi'', G'''), (\varphi', G'''))$$

y, en virtud del Lema 1.2.5, concluimos la desigualdad deseada. \square

Introducimos ahora la noción de pseudo-curva. Dicha noción está contenida implícitamente en [7], bajo la noción de banda pinchada núcleo.

Dados $G \subset \mathbb{S}^1$ y $\varphi : G \rightarrow \mathbb{S}^1$ una función continua denotamos

$$\text{Grafo}(\varphi, G) := \{(\theta, \varphi(\theta)) \in \Omega : \theta \in G\}.$$

Definición 1.2.7 *Dado $(\varphi, G) \in \mathfrak{C}$, llamaremos pseudo-curva asociada a (φ, G) al conjunto $\overline{\text{Grafo}(\varphi, G)}$. Dicho conjunto será denotado por $A_{(\varphi, G)}$.*

Observación 1.2.8 *Si $(\varphi, G) \in \mathfrak{C}$ entonces $\pi(A_{(\varphi, G)}) = \mathbb{S}^1$.*

El siguiente lema establece que al momento de clausurar los elementos de \mathfrak{C} no añadimos puntos en las fibras que tenemos sobre el conjunto G .

Lema 1.2.9 *Para toda $(\varphi, G) \in \mathfrak{C}$ se cumple*

$$A_{(\varphi, G)} \cap \pi^{-1}(G) = \text{Grafo}(\varphi, G).$$

Demostración. La inclusión $\text{Grafo}(\varphi, G) \subset A_{(\varphi, G)} \cap \pi^{-1}(G)$ es trivial. Para la otra tomaremos $\theta \in G$ de manera que

$$(\theta, x) \in A_{(\varphi, G)} = \overline{\text{Grafo}(\varphi, G)}.$$

Sea $\{(\theta_n, \varphi(\theta_n))\}_{n=1}^\infty \subset \text{Grafo}(\varphi, G)$ tal que $\lim(\theta_n, \varphi(\theta_n)) = (\theta, x)$. La continuidad de $\varphi(\theta)$ en G implica que $x \in \varphi(\theta)$. De donde $(\theta, x) \in \text{Grafo}(\varphi, G)$. \square

Corolario 1.2.10 *Sea $(\varphi, G) \in \mathfrak{C}$. Entonces $A_{(\varphi, G)}$ es pinchada, $G \subset P_{A_{(\varphi, G)}}$ y*

$$A_{(\varphi, G)} = \overline{A_{(\varphi, G)} \cap \pi^{-1}(G)}.$$

En particular $A_{(\varphi, G)}$ es núcleo.

Demostración. Por el Lema 1.2.9 tenemos que $\text{Grafo}(\varphi, G) = A_{(\varphi, G)} \cap \pi^{-1}(G)$. Entonces $A_{(\varphi, G)}^\theta = \{(\theta, \varphi(\theta))\}$ si $\theta \in G$. Consecuentemente $A_{(\varphi, G)}$ es pinchado en G que es denso en \mathbb{S}^1 . Por otro lado, $A_{(\varphi, G)} = \overline{\text{Grafo}(\varphi, G)} = \overline{A_{(\varphi, G)} \cap \pi^{-1}(G)}$. Concluimos por el Corolario 1.1.12 que $A_{(\varphi, G)}$ es núcleo. \square

El siguiente colorario establece que toda pseudo-curva $A_{(\varphi, G)}$ también se puede obtener como la clausura del grafo de φ pero restringida a un subconjunto denso contenido en el residual original.

Corolario 1.2.11 *Sean $(\varphi, G) \in \mathfrak{C}$ y G' un denso en \mathbb{S}^1 tal que $G' \subset G$. Entonces*

$$A_{(\varphi, G)} = \overline{\text{Grafo}(\varphi|_{G'}, G')}.$$

Demostración. Sea $B = \overline{\text{Grafo}(\varphi|_{G'}, G')}$. Por la densidad de G' se cumple que $\pi(B) = \mathbb{S}^1$. Claramente $B \subset A_{(\varphi, G)}$ dado que $G' \subset G$. Por tanto si $A_{(\varphi, G)}$ es pinchado en θ , B también lo será y $A_{(\varphi, G)} \cap \pi^{-1}(\theta) = B \cap \pi^{-1}(\theta)$. En virtud del Lema 1.2.9 $A_{(\varphi, G)}$ es pinchado en $A_{(\varphi, G)} \cap \pi^{-1}(G) = B \cap \pi^{-1}(G)$. Entonces

$$A_{(\varphi, G)} = \overline{A_{(\varphi, G)} \cap \pi^{-1}(G)} = \overline{B \cap \pi^{-1}(G)} \subset B \subset A_{(\varphi, G)}.$$

En consecuencia $B = A_{(\varphi, G)}$. \square

Observación 1.2.12 *Una consecuencia del Corolario 1.2.11 es que hace más intuitiva la definición de pseudo-curva. La familia \mathfrak{C} también se puede definir como el conjunto de funciones continuas en un subconjunto denso de \mathbb{S}^1 .*

Como se ha apuntado anteriormente, en [7] la noción de pseudo-curva se formula como la de un conjunto pinchado y núcleo. Veremos que, efectivamente, ambas definiciones coinciden. Este resultado, además de su interés en relación a [7], será cómodo en las siguientes secciones.

Teorema 1.2.13 *Un conjunto de 2^Ω es una pseudo-curva si y solo si es pinchado y núcleo.*

Demostración. Sea $B \in 2^\Omega$ y supongamos que B es una pseudo-curva. Entonces existe $(\varphi, G) \in \mathfrak{C}$ tal que $B = \overline{\text{Grafo}(\varphi, G)}$. En virtud del Corolario 1.2.10, B es pinchado y $G \subset P_B$. Por el Lema 1.2.3 tenemos que la función fibra es continua en P_B . Luego, por los Lemas 1.1.10 y 1.2.9,

$$B = \overline{B \cap \pi^{-1}(G)} \subset \overline{B \cap \pi^{-1}(P_B)} = B^{\text{nuc}} \subset B.$$

Concluimos entonces que B es núcleo. Supongamos ahora que B es pinchado y núcleo. Sea P_B el residual en el que B es pinchado (Lema 1.2.3). Para toda $\theta \in P_B$ denotaremos $B^\theta = \{(\theta, b_\theta)\}$. Sea

$$\psi(\theta) := b_\theta.$$

Demostraremos que $(\psi, P_B) \in \mathfrak{C}$ y $B = \overline{\text{Grafo}(\psi, P_B)}$. Para ello veremos que si $\theta \in P_B$ entonces ψ es continua en θ . Sea $\{\theta_n\}_{n=1}^\infty \subset P_B$ una sucesión tal que $\lim \theta_n = \theta$. Sea $\{\psi(\theta_n)\}_{n=1}^\infty$

la correspondiente sucesión de imágenes. Por la compacidad de Ω podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que la sucesión $\{\psi(\theta_n)\}_{n=1}^\infty$ converge a x . Como $\{(\theta_n, \psi(\theta_n))\}_{n=1}^\infty \subset B$ y B es compacto $(\theta, x) \in B$. Por lo tanto $(\theta, x) \in B^\theta$ y en virtud de que B es pinchado en θ , tenemos que $x = b_\theta = \psi(\theta)$. Esto muestra la continuidad de ψ en P_B . Finalmente, la igualdad $B = \overline{\text{Grafo}(\psi, P_B)}$ es consecuencia directa del Corolario 1.2.11. \square

El siguiente lema nos relaciona la pseudométrica d_∞ y la métrica de Hausdorff.

Lema 1.2.14 Sean $(\varphi, G), (\varphi', G') \in \mathfrak{C}$ y $\varepsilon > 0$. Si $d_\infty((\varphi, G), (\varphi', G')) \leq \varepsilon$ entonces

$$H_d(A_{(\varphi, G)}, A_{(\varphi', G')}) \leq \varepsilon.$$

En particular $d_\infty((\varphi, G), (\varphi', G')) = 0$ si y solo si

$$A_{(\varphi, G)} = A_{(\varphi', G')}.$$

*Demuestra*cción. Sean $(\varphi, G), (\varphi', G') \in \mathfrak{C}$ y $\varepsilon > 0$. Supongamos que

$$d_\infty((\varphi, G), (\varphi', G')) \leq \varepsilon.$$

Haremos la demostración por reducción al absurdo. Supongamos que $H_d(A_{(\varphi, G)}, A_{(\varphi', G')}) > \varepsilon$. En virtud de la Definición 1.1.3 y la compacidad de $A_{(\varphi, G)}$ y de $A_{(\varphi', G')}$ existe $(\theta, x) \in A_{(\varphi, G)}$ tal que $d((\theta, x), A_{(\varphi', G')}) > \varepsilon$. Sea $\{(\theta_n, \varphi(\theta_n))\}_{n=1}^\infty \subset A_{(\varphi, G)}$ tal que $\theta_n \in G \cap G'$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $\lim(\theta_n, \varphi(\theta_n)) = (\theta, x)$ (Definición 1.2.7). Como

$$d((\theta_n, \varphi(\theta_n)), (\theta_n, \varphi'(\theta_n))) \leq d_\infty((\varphi, G), (\varphi', G')) \leq \varepsilon.$$

entonces $d((\theta_n, \varphi(\theta_n)), (\theta_n, \varphi'(\theta_n))) \leq \varepsilon$ para toda $n \in \mathbb{N}$. En virtud de la compacidad de $A_{(\varphi', G')}$ existe una parcial convergente $\{(\theta_{\alpha(n)}, \varphi'(\theta_{\alpha(n)}))\}_{n=1}^\infty \subset A_{(\varphi', G')}$ tal que

$$\lim(\theta_{\alpha(n)}, \varphi'(\theta_{\alpha(n)})) = (\theta, y) \in A_{(\varphi', G')}.$$

Entonces $d((\theta, x), (\theta, y)) \leq \varepsilon$ contradiciendo que $d((\theta, x), A_{(\varphi', G')}) > \varepsilon$.

Demostramos ahora la segunda afirmación. Supongamos primero que $d_\infty((\varphi, G), (\varphi', G')) = 0$. Entonces $d_\infty((\varphi, G), (\varphi', G')) \leq \varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$. Por la primera afirmación en este lema, también $H_d(A_{(\varphi, G)}, A_{(\varphi', G')}) \leq \varepsilon$ para toda ε . En consecuencia $H_d(A_{(\varphi, G)}, A_{(\varphi', G')}) = 0$. De donde $A_{(\varphi, G)} = A_{(\varphi', G')}$. Para concluir supondremos $A_{(\varphi, G)} = A_{(\varphi', G')}$. Sea $G'' = G \cap G'$. Entonces en virtud de la igualdad y el Lema 1.2.9

$$\text{Grafo}(\varphi, G) \cap \pi^{-1}(G'') = A_{(\varphi, G)} \cap \pi^{-1}(G'') = A_{(\varphi', G')} \cap \pi^{-1}(G'') = \text{Grafo}(\varphi', G') \cap \pi^{-1}(G'').$$

Entonces $\sup_{\theta \in G''} d(\varphi(\theta), \varphi'(\theta')) = 0$ y por el Lema 1.2.5 tenemos que $d_\infty((\varphi, G), (\varphi', G')) = 0$. \square

Definimos ahora una relación de equivalencia en el conjunto \mathfrak{C} inducida por sus pseudocurvas asociadas.

Definición 1.2.15 Dadas $(\varphi, G), (\varphi', G') \in \mathfrak{C}$ diremos que $(\varphi, G) \sim (\varphi', G')$ si y solo si $A_{(\varphi, G)} = A_{(\varphi', G')}$.

Lema 1.2.16 Sean $(\varphi, G), (\varphi', G') \in \mathfrak{C}$. Sea G'' un denso en \mathbb{S}^1 tal que $G'' \subset G \cap G'$. Si $\varphi(\theta) = \varphi'(\theta)$ para toda $\theta \in G''$ entonces $(\varphi, G) \sim (\varphi', G')$

Demostración. Si $\varphi(\theta) = \varphi'(\theta)$ para toda $\theta \in G''$ el Lema 1.2.5 nos implica

$$d_\infty((\varphi, G), (\varphi', G')) = 0$$

y en virtud del Lema 1.2.14 tenemos que $A_{(\varphi, G)} = A_{(\varphi', G')}$. \square

Lema 1.2.17 La relación “ \sim ” es una relación de equivalencia.

Demostración. Es claro que $(\varphi, G) \sim (\varphi, G)$, esto muestra la reflexividad. Probaremos la simetría de la siguiente manera. Sean $(\varphi, G), (\varphi', G') \in \mathfrak{C}$. Si $(\varphi, G) \sim (\varphi', G')$ entonces $A_{(\varphi, G)} = A_{(\varphi', G')}$ y consecuentemente $(\varphi', G') \sim (\varphi, G)$. Finalmente probaremos la transitividad. Sean $(\varphi, G), (\varphi', G'), (\varphi'', G'') \in \mathfrak{C}$ tales que $(\varphi, G) \sim (\varphi', G')$ y $(\varphi', G') \sim (\varphi'', G'')$. Entonces $A_{(\varphi, G)} = A_{(\varphi', G')}$ y $A_{(\varphi', G')} = A_{(\varphi'', G'')}$ en consecuencia $A_{(\varphi, G)} = A_{(\varphi'', G'')}$. Concluimos $(\varphi, G) \sim (\varphi'', G'')$. \square

Observación 1.2.18 El espacio cociente $(\mathfrak{C}, d_\infty)/\sim$ es un espacio métrico.

Lema 1.2.19 El espacio métrico $(\mathfrak{C}, d_\infty)/\sim$ es completo.

Demostración. Sea $\{(\varphi_n, G_n)\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de Cauchy en \mathfrak{C} . Sea $G = \bigcap_{i=1}^\infty G_n$. En virtud del Lema 1.2.5, la sucesión $\{(\varphi_n, G)\}_{n=1}^\infty$ también es de Cauchy en \mathfrak{C} . Sea $\theta \in G$. La sucesión $\{\varphi_n(\theta)\}_{n=1}^\infty \subset I$ es también una sucesión de Cauchy, por la definición de d_∞ . Sea $\varphi : G \rightarrow I$ tal que $\varphi(\theta) = \lim \varphi_n(\theta)$ para toda $\theta \in G$. Demostraremos que $(\varphi, G) \in \mathfrak{C}$. Sean $\theta \in G$ y la sucesión $\{\theta_n\}_{n=1}^\infty \subset G$ tal que $\lim \theta_n = \theta$. Dada $\varepsilon > 0$, existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} d(\varphi_k(\theta_n), \varphi(\theta_n)) &< \frac{\varepsilon}{3}, \text{ para toda } k \geq n(\varepsilon), \text{ por la definición de } \varphi \\ d(\varphi_k(\theta_n), \varphi_k(\theta)) &< \frac{\varepsilon}{3}, \text{ para toda } n \geq n(\varepsilon), \text{ pues } \varphi_k \text{ es continua} \\ d(\varphi_k(\theta), \varphi(\theta)) &< \frac{\varepsilon}{3}, \text{ para toda } k \geq n(\varepsilon), \text{ por la definición de } \varphi. \end{aligned}$$

Entonces tendremos

$$\begin{aligned} d(\varphi(\theta_n), \varphi(\theta)) &\leq d(\varphi(\theta_n), \varphi_k(\theta_n)) + d(\varphi_k(\theta_n), \varphi_k(\theta)) + d(\varphi_k(\theta), \varphi(\theta)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

para toda $n > n(\varepsilon)$. Concluimos pues la continuidad de φ en θ . Entonces $(\varphi, G) \in \mathfrak{C}$ y en consecuencia \mathfrak{C} es completo. \square

Definición 1.2.20 Sea A una pseudo-curva. Sea P_A el residual de continuidad de la función fibra para A (Lema 1.2.3). Sea φ_{P_A} , la función definida únicamente por el residual P_A , de manera que

$$\pi^{-1}(P_A) \cap A = \text{Grafo}(\varphi_{P_A}, P_A).$$

Diremos que (φ_{P_A}, P_A) es el representante canónico de su clase de equivalencia.

Notación 1.2.21 Llamaremos arco de curva a la gráfica, de una función continua $f: \Lambda \rightarrow I$, donde $\Lambda \subset \mathbb{S}^1$ es un conexo distinto de un punto. Si $\Lambda = \mathbb{S}^1$ entonces diremos que la gráfica de f es una curva. En particular una curva C cumple que $P_C = \mathbb{S}^1$ entonces $\varphi_{P_C} = f$ y $(f, \mathbb{S}^1) \in \mathfrak{C}$.

Lema 1.2.22 Si A es una pseudo-curva que contiene una curva C , entonces $A = C$.

Demostración. Como $C \subset A$ entonces $\varphi_{P_C}(\theta) = \varphi_{P_A}(\theta)$ para toda $\theta \in P_A$. En virtud del Lema 1.2.16, concluimos $A = C$. \square

Finalizamos esta sección estudiando el comportamiento de las pseudo-curvas bajo la acción de las aplicaciones skew-product.

Lema 1.2.23 Sean A una pseudo-curva y $T \in \mathcal{T}$. Entonces $T(A)$ es también una pseudo-curva.

Demostración. En virtud del Corolario 1.1.12 y el Lema 1.2.3, $A = \overline{A \cap \pi^{-1}(P_A)}$. La continuidad de T nos garantiza $T(A) = \overline{T(A) \cap \pi^{-1}(R_\omega(P_A))}$. Sea $G = P_{T(A)} \cap R_\omega(P_A)$. Como G es un residual contenido en $P_{T(A)}$ tendremos

$$(\varphi_{P_{T(A)}}|_G, G) \in \mathfrak{C}.$$

Finalmente por el Corolario 1.2.11, $T(A) = \text{Grafo}((\varphi_{P_{T(A)}}|_G, G))$. Concluimos pues que $T(A)$ es una pseudo-curva. \square

Sea $T \in \mathcal{T}$, recordemos que un conjunto A es T -invariante (respectivamente fuertemente T -invariante) si $T(A) \subset A$ (respectivamente $T(A) = A$). Además observemos que cualquier conjunto A , invariante por una función de \mathcal{T} , cumple que $\pi(A) = \mathbb{S}^1$. Un conjunto cerrado e invariante es T -minimal si no tiene ningún subconjunto propio cerrado e invariante.

Los siguientes resultados caracterizan las pseudo-curvas fuertemente invariantes por funciones de \mathcal{T} ; el primero dinámicamente y el segundo desde un punto de vista topológico.

Lema 1.2.24 Sea $T \in \mathcal{T}$. Toda pseudo-curva T -invariante por una función de \mathcal{T} es fuertemente T -invariante y T -minimal.

Demostración. Sean $T \in \mathcal{T}$, A una pseudo-curva fuertemente T -invariante y $B \subset A$ cerrado y T -invariante. En estas condiciones tenemos $\pi(B) = \mathbb{S}^1$ porque $T \in \mathcal{T}$ y $\pi^{-1}(P_A) \cap A = \pi^{-1}(P_A) \cap B$ porque A es pinchada.

Por otro lado, como B es cerrado y A es núcleo,

$$B \subset A = \overline{\pi^{-1}(P_A) \cap A} = \overline{\pi^{-1}(P_A) \cap B} \subset B. \quad \square$$

Lema 1.2.25 Una pseudo-curva fuertemente T -invariante por una función de \mathcal{T} , o bien es una curva o bien no contiene ningún arco de curva.

Demuestra Sean $T \in \mathcal{T}$, A una pseudo curva fuertemente T -invariante y $S \subset A$ un arco de curva. Podemos suponer que S es maximal respecto de la relación de inclusión. Es decir, no existe ningún arco de curva S' tal que $S \subsetneq S' \subset A$. Si $\pi(S) = \mathbb{S}^1$ entonces el Lema 1.2.22 nos garantiza que S es una curva. Por otro lado, si $\pi(S) \neq \mathbb{S}^1$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\pi(S) \cap R^n(\pi(S)) \neq \emptyset$ y $\pi(S) \subsetneq \pi(S) \cup R^n(\pi(S))$ ya que R es una rotación irracional. Dado que $T(A) = A$ y A es pinchada, $R^n(S) \cap S \neq \emptyset$ y $T^n(S) \cup S$ es un arco de curva contenido en A . Claramente $S \subsetneq T^n(S) \cup S$, lo que contradice la maximalidad de S . \square

1.3. Bandas

En esta sección introducimos el concepto de Banda. Es para dichos objetos para los que se demuestra el Teorema de Sharkovskiĭ. Retomamos las ideas fundamentales contenidas en [7], pero faremos una reinterpretación en términos de pseudo-curvas.

1.3.1. Definición y propiedades elementales

La definición en cuestión es:

Definición 1.3.1 Sea $A \in 2^\Omega$ tal que $\pi(A) = \mathbb{S}^1$. Diremos que A es una banda si $A^\theta = A \cap \pi^{-1}(\theta)$ es un intervalo para cada θ en un subconjunto residual de \mathbb{S}^1 . Si en particular todos los conjuntos A^θ son intervalos y $\delta(A) := \inf\{|A^\theta| : \theta \in \mathbb{S}^1\} > 0$ diremos que A es una banda sólida.

Observación 1.3.2 Una pseudo-curva es una banda núcleo.

Demostramos ahora un lema que implica la conexidad de las bandas sólidas.

Lema 1.3.3 Sea $K \in 2^\Omega$ tal que $\pi(K) = \mathbb{S}^1$. Supongamos que K^θ es conexo para toda $\theta \in \mathbb{S}^1$. Entonces, K es conexo.

Demuestra Supongamos que K no es conexo. Existen U y V cerrados de K disjuntos y diferentes del vacío tales que $U \cup V = K$. Nótese que U y V son compactos en Ω . Consecuentemente, $\pi(U)$ y $\pi(V)$ son cerrados en \mathbb{S}^1 y $\pi(U) \cup \pi(V) = \pi(K) = \mathbb{S}^1$. Como \mathbb{S}^1 es conexo existe $\theta \in \pi(U) \cap \pi(V)$ y para dicha θ tenemos

$$K^\theta = \pi^{-1}(\theta) \cap (U \cup V) = (\pi^{-1}(\theta) \cap U) \cup (\pi^{-1}(\theta) \cap V).$$

Los conjuntos $\pi^{-1}(\theta) \cap U$ y $\pi^{-1}(\theta) \cap V$ son cerrados, disjuntos y diferentes del vacío. Entonces K^θ no es conexa, lo que contradice la hipótesis. \square

Corolario 1.3.4 Sea A una banda sólida. Entonces A es conexa.

Demostración. Si A es una banda sólida, entonces A^θ es un intervalo para toda $\theta \in \mathbb{S}^1$. Por el Lema 1.3.3 A es conexa. \square

El siguiente lema establece que el conjunto de bandas es cerrado bajo la operación núcleo.

Lema 1.3.5 *Si A es una banda, entonces A^{nuc} también lo es. Más concretamente, si G_A es el residual de continuidad de la función fibra para A , entonces $A^\theta = (A^{\text{nuc}})^\theta$, para toda $\theta \in G_A$.*

Demostración. Sea A una banda y sea G_A el residual de continuidad de la función fibra asociada a A (Definición 1.1.11). En virtud del Lema 1.1.10, $A^{\text{nuc}} = \overline{\cup_{\theta \in G_A} A^\theta}$ y por lo tanto $A^\theta \subset (A^{\text{nuc}})^\theta$ para toda $\theta \in G_A$. Por otro lado $A^{\text{nuc}} \subset A$ garantiza $(A^{\text{nuc}})^\theta \subset A^\theta$. Concluimos pues que $A^\theta = (A^{\text{nuc}})^\theta$ para toda $\theta \in G_A$. Si A es una banda, por definición existe un residual G' tal que A^θ es un intervalo para toda $\theta \in G'$. Sea $G = G_A \cap G'$. Entonces G es un residual en \mathbb{S}^1 que cumple que $A^\theta = (A^{\text{nuc}})^\theta$ es un intervalo para toda $\theta \in G$. Por tanto A^{nuc} es una banda. \square

Definimos a continuación el concepto de función semicontinua superior e inferiormente. La definición es diferente de la Definición 1.1.7. La diferencia radica en que la que daremos a continuación es para funciones con valores reales y la primera que dimos era para funciones multivaluadas.

Definición 1.3.6 *Sea $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow I$. Diremos que f es semicontinua superiormente (resp. inferiormente) si para toda $\theta \in \mathbb{S}^1$ y para toda sucesión $\{\theta_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{S}^1$ tal que $\lim \theta_n = \theta$, se cumple $\lim f(\theta_n) \leq f(\theta)$ (resp. $\lim f(\theta_n) \geq f(\theta)$).*

La prueba del siguiente lema puede encontrarse en [3] y/o [6]

Lema 1.3.7 *Las siguientes afirmaciones son ciertas.*

- (a) *La función $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow I$ es semicontinua inferiormente (resp. semicontinua superiormente) si y solo si el conjunto $\{\theta \in \mathbb{S}^1 : f(\theta) > \lambda\}$ (resp. $\{\theta \in \mathbb{S}^1 : f(\theta) < \lambda\}$) es abierto para toda $\lambda \in I$.*
- (b) *La función $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow I$ es semicontinua inferiormente (resp. semicontinua superiormente) si y solo si el conjunto $\{(\theta, x) \in \Omega : x \geq f(\theta)\}$ (resp. $\{(\theta, x) \in \Omega : x \leq f(\theta)\}$) es cerrado en Ω .*
- (c) *Las funciones semicontinuas superiormente (resp. inferiormente) son continuas en un residual en \mathbb{S}^1 .*

Las siguientes funciones nos serán de mucha utilidad.

Definición 1.3.8 *Dado $A \in 2^\Omega$ tal que $\pi(A) = \mathbb{S}^1$, definimos las funciones*

$$\begin{aligned} M_A(\theta) &:= \max\{x \in I : (\theta, x) \in A\} \\ m_A(\theta) &:= \min\{x \in I : (\theta, x) \in A\}, \end{aligned}$$

y los conjuntos $A^+ := \overline{\text{Grafo}(M_A, \mathbb{S}^1)}$ y $A^- := \overline{\text{Grafo}(m_A, \mathbb{S}^1)}$.

Lema 1.3.9 *Sea $A \in 2^\Omega$, tal que $\pi(A) = \mathbb{S}^1$. La función M_A es semicontinua superiormente y la función m_A es semicontinua inferiormente.*

Demostración. Demostraremos que M_A es semicontinua superiormente. Sean $\theta \in \mathbb{S}^1$ y $\{(\theta_n, x_n)\}_{n=1}^\infty$ una sucesión contenida en A tal que $\lim \theta_n = \theta$. Si (θ, x) es un punto límite de la sucesión, la compacidad de A nos garantiza que $(\theta, x) \in A$, por lo tanto, $x \leq M_A(\theta)$. Entonces por la Definición 1.3.6 M_A es semicontinua superiormente. La semicontinuidad inferior de la función m_A se demuestra de manera análoga. \square

Las bandas núcleo no son necesariamente conexas en todas sus fibras, pero el siguiente lema nos da una condición suficiente para que sí lo sean.

Lema 1.3.10 *Sea A una banda núcleo. Sea $\mathbb{S}_A^1 := \{\theta \in \mathbb{S}^1 : M_{A-}(\theta) < m_{A+}(\theta)\}$. Entonces A^θ es un intervalo, no degenerado, para toda $\theta \in \mathbb{S}_A^1$.*

Demostración. Demostraremos que $A^\theta = \{\theta\} \times [m_A(\theta), M_A(\theta)]$ si $\theta \in \mathbb{S}_A^1$. Dado que A es una banda núcleo, por el Lema 1.1.10 existe un conjunto residual $G \subset \mathbb{S}^1$ tal que la función fibra es continua y A^α es un intervalo para toda $\alpha \in G$. Por el Corolario 1.1.12(c), $A = \overline{A \cap \pi^{-1}(G)}$.

Tomemos $(\theta, M_A(\theta))$ con $\theta \in \mathbb{S}_A^1$. En virtud de la observación anterior, existe una sucesión $\{(\theta_n, x_n)\}_{n=1}^\infty \in A \cap \pi^{-1}(G)$ tal que $\lim(\theta_n, x_n) = (\theta, M_A(\theta))$. Tomando si es necesario una parcial, podemos suponer que la sucesión $m_A(\theta_n)$ es convergente y tendremos que $a = \lim m_A(\theta_n) \leq M_{A-}(\theta)$. Veamos ahora que $\{\theta\} \times [M_{A-}(\theta), M_A(\theta)] \subset A^\theta$. Si $y \in [M_{A-}(\theta), M_A(\theta)]$ entonces existe $t \in [0, 1]$ tal que $y = ta - (1-t)M_A(\theta)$. Tendremos entonces que la sucesión $\{(\theta_n, tm_A(\theta_n) - (1-t)M_A(\theta_n))\}_{n=1}^\infty$ converge a (θ, y) . Observemos que $(\theta_n, tm_A(\theta_n) - (1-t)M_A(\theta_n)) \in A^{\theta_n}$ ya que $\theta_n \in G$, y por lo tanto $(\theta, y) \in A^\theta$. De manera análoga se prueba que $\{\theta\} \times [m_A(\theta), m_{A+}(\theta)] \subset A^\theta$ y como $m_{A+}(\theta) > M_{A-}(\theta)$ obtenemos

$$A^\theta = \{\theta\} \times [m_A(\theta), M_A(\theta)]$$

Para toda $\theta \in \mathbb{S}_A^1$. \square

Los siguientes tres resultados prueban que toda banda núcleo está limitada por dos pseudo-curvas que la determinan.

Lema 1.3.11 *Si A una banda núcleo entonces A^+ y A^- son pseudo-curvas.*

Demostración. Sea A una banda núcleo. Sea G'_A el residual donde la función fibra es continua (Definición 1.1.11) y G''_A el residual en que los conjuntos A^θ son intervalos. Tendremos entonces $A^\theta = [m_A(\theta), M_A(\theta)]$, para todo $\theta \in G_A = G'_A \cap G''_A$. Como la función fibra es continua en G_A obtenemos que las funciones $M_A(\theta)$ y $m_A(\theta)$ son continuas en G_A .

Para probar que A^+ y A^- son pseudo-curvas bastará con ver que $A^+ = \overline{\text{Grafo}(M_A, G_A)}$ y $A^- = \overline{\text{Grafo}(m_A, G_A)}$.

Es inmediato que $\overline{\text{Grafo}(M_A, G_A)} \subset A^+$. Veamos el recíproco. Sea $(\theta, x) \in A^+$. Como que A es núcleo y $A^+ \subset A$, para todo entorno $B_\varepsilon((\theta, x))$ existe un punto $(\theta', M_A(\theta')) \in B_\varepsilon((\theta, x))$. Como $B_\varepsilon((\theta, x))$ es un abierto, existe ε' tal que $B_{\varepsilon'}((\theta', M_A(\theta'))) \subset B_\varepsilon((\theta, x))$. En virtud de que A

es núcleo existe $(\alpha, M_A(\alpha)) \in B_{\varepsilon'}((\theta', M_A(\theta')))$ tal que $(\alpha, M_A(\alpha)) \in A \cap \pi^{-1}(G_A)$. Por lo tanto, $(\theta, x) \in \overline{\text{Grafo}(M_A, G_A)}$ y en consecuencia $A^+ \subset \overline{\text{Grafo}(M_A, G_A)}$. La demostración de que A^- es una pseudo-curva es análoga. \square

Corolario 1.3.12 *Si A es una pseudo-curva, entonces $A^+ = A^- = A$. Recíprocamente, si A es una banda núcleo y $A^+ = A^-$ entonces $A = A^+ = A^-$ y A es una pseudo-curva.*

Demostración. Sea A una pseudo-curva y P_A su residual de continuidad. Entonces la función M_A es continua en P_A . Por lo tanto $A^\theta = A^{+\theta}$ para todo $\theta \in P_A$, esto implica que $A = A^+$ (Lema 1.2.16). Un argumento análogo prueba que $A^- = A$. Veamos el recíproco. Por hipótesis tenemos que como $P_{A^+} = P_{A^-}$ entonces $P_A = P_{A^+}$ y por lo tanto A es pinchado. Dado que A es núcleo, el Teorema 1.2.13 nos garantiza que A es una pseudo-curva. \square

Las bandas núcleo están determinadas por las pseudo-curvas que las limitan. Demostramos esta idea intuitiva en el siguiente lema.

Lema 1.3.13 *Sean A y B bandas núcleo tales que $A^+ = B^+$ y $A^- = B^-$ entonces $A = B$.*

Demostración. Sea G el residual obtenido al interseccar los residuales de continuidad de la función fibra en A^+, A^-, A, B y los residuales donde las fibras de A y B son intervalos. Entonces tendremos que $A^\theta = B^\theta = \{\theta\} \times [m_A(\theta), M_A(\theta)]$ para toda $\theta \in G$. Como que A y B son bandas núcleo esto implica que $A = B$. \square

Las funciones de \mathcal{T} cumplen diferentes propiedades ligadas a las bandas y a los núcleos. Demostramos a continuación algunas de ellas.

Lema 1.3.14 *Sea $A \in 2^\Omega$, tal que $\pi(A) = \mathbb{S}^1$ entonces las cuatro afirmaciones siguientes son ciertas.*

- (a) $\pi(T(A)) = \mathbb{S}^1$.
- (b) *Si A es una banda entonces $T(A)$ también lo es.*
- (c) *Si A es núcleo entonces $T(A)$ también lo es.*
- (d) $T(A^{\text{nuc}}) = T(A)^{\text{nuc}}$.

Demostración. Dado que la función $T \in \mathcal{T}$, $\theta + \omega \in \pi(T(A))$ para todo $\theta \in \pi(A)$. Por lo tanto $\mathbb{S}^1 \subset \pi(T(A))$. Esto prueba (a).

Si A es una banda, entonces por la Definición 1.3.1 existe un residual $G \subset \mathbb{S}^1$ tal que A^θ es un intervalo para toda $\theta \in G$. Como que R_ω es una rotación, $R_\omega(G)$ es también un residual en \mathbb{S}^1 . Observemos que la función R_ω nos envia conjuntos residuales en conjuntos residuales de manera biyectiva. La continuidad de T nos garantiza que $T(A)^\theta = T(A^{\theta-\omega})$ es un intervalo para toda $\theta \in R_\omega(G)$. Esto prueba (b).

Supondremos ahora que A es núcleo. Sea G un residual de \mathbb{S}^1 . Por el Corolario 1.1.12 tenemos que $A = \overline{A \cap \pi^{-1}(R^{-1}(G))}$, y por la continuidad de T obtenemos

$$\overline{T(A) \cap \pi^{-1}(G)} = \overline{T(A \cap \pi^{-1}(R^{-1}(G)))} = T(\overline{A \cap \pi^{-1}(R^{-1}(G))}) = T(A).$$

Otra vez por el Corolario 1.1.12, $T(A)$ es n\'ucleo. Esto prueba (c).

Para demostrar (d), observemos que como $A^{\text{nuc}} \subset A$ tenemos $T(A^{\text{nuc}}) \subset T(A)$. Así, para todo residual G en \mathbb{S}^1 se cumple

$$T(A^{\text{nuc}}) \cap \pi^{-1}(G) \subset T(A) \cap \pi^{-1}(G).$$

Si tomamos el residual $G_{T(A)}$ en donde la func\'ion fibra es continua para el conjunto $T(A)$ tenemos que

$$\overline{T(A^{\text{nuc}}) \cap \pi^{-1}(G_{T(A)})} \subset \overline{T(A) \cap \pi^{-1}(G_{T(A)})} = T(A)^{\text{nuc}}.$$

Por (c) $T(A^{\text{nuc}})$ es n\'ucleo. Como $A^{\text{nuc}} \subset A$, por el Lema 1.1.10 y el Corolario 1.1.12 tenemos

$$T(A^{\text{nuc}}) = \overline{T(A^{\text{nuc}}) \cap \pi^{-1}(G_{T(A)})} \subset \overline{T(A) \cap \pi^{-1}(G_{T(A)})} = T(A)^{\text{nuc}}.$$

Veamos la inclusi\'on inversa. Se tiene

$$\begin{aligned} T(A)^{\text{nuc}} &= \overline{T(A)^{\text{nuc}} \cap \pi^{-1}(R_\omega(G))} \subset \overline{T(A) \cap \pi^{-1}(R_\omega(G))} \\ &= \overline{T(A \cap \pi^{-1}(G))} = T(\overline{A \cap \pi^{-1}(G)}) = T(A)^{\text{nuc}}. \end{aligned}$$

Esto acaba la demostraci\'on del lema. \square

El siguiente teorema es importante, pues podremos restringir nuestro estudio solo a bandas minimales con respecto a la inclusi\'on.

Teorema 1.3.15 *Sea $T \in \mathcal{T}$. Toda banda T -invariante, contiene una banda minimal (respecto a la relaci\'on de inclusi\'on) T -invariante. Toda banda minimal T -invariante es n\'ucleo y fuertemente T -invariante.*

Demostraci\'on. Sea A una banda T -invariante y sea $\mathfrak{A} = \{A_i : i \in I\}$ una familia anidada de bandas T -invariantes contenida en A (es decir si $i, j \in I$ entonces, o bien $A_i \subset A_j$ o bien $A_j \subset A_i$). Si $A_\infty := \cap_{i \in I} A_i$, entonces es inmediato que A_∞ es compacto, no vac\'io, T -invariante y $\pi(A_\infty) = \mathbb{S}^1$. Como A_∞ es compacto, para toda $k \in \mathbb{N}$, existe $A_{i(k)} \in \mathfrak{A}$ tal que $A_{i(k)} \subset B_{\frac{1}{k}}(A_\infty) = \{z \in \Omega : d(z, A_\infty) < \frac{1}{k}\}$ entonces, para la sucesi\'on $\{A_{i(k)}\}_{k=1}^\infty$ tenemos:

$$A_\infty \subset \bigcap_{k=1}^\infty A_{i(k)} \subset \bigcap_{k=1}^\infty (B_{\frac{1}{k}}(A_\infty)) = A_\infty$$

de donde podemos concluir que $A_\infty = \cap_{k=1}^\infty A_{i(k)}$. Definamos ahora $G_{A_\infty} := \cap_{k=1}^\infty G_{A_{i(k)}}$. Como cada $G_{A_{i(k)}}$ es un conjunto residual (Lema 1.1.10) y la intersecci\'on numerable de residuales es un residual, tenemos que G_{A_∞} es residual en \mathbb{S}^1 y la func\'ion fibra es continua para toda $A_{i(k)}$. Como $\{A_{i(k)}^\theta\}_{k=1}^\infty$ es una sucesi\'on anidada de intervalos para toda $\theta \in G_{A_\infty}$, entonces $A_\infty^\theta = \cap_{k=1}^\infty A_{i(k)}^\theta$ es tambi\'en un intervalo para toda $\theta \in G_{A_\infty}$. Consecuentemente A_∞ es una banda. Por lo que hemos demostrado que la cadena \mathfrak{A} tiene cotas inferiores. Entonces por el Lema de Zorn existen bandas T -invariantes minimales.

Demostraremos ahora la segunda afirmación del teorema. Si B es una banda minimal, entonces en virtud del Lema 1.3.5, $B^{\text{nuc}} \subset B$ es también una banda. Si B es T -invariante, tenemos que $T(B) \subset B$ y por el Lema 1.3.14(d), $T(B^{\text{nuc}}) = T(B)^{\text{nuc}} \subset B^{\text{nuc}}$. Así pues, B^{nuc} es una banda T -invariante. La minimalidad de B implica $B^{\text{nuc}} = B$, por tanto, B es núcleo. Finalmente si B es una banda núcleo T -invariante que no es fuertemente T -invariante, entonces $T(B) \subsetneq B$ es también una banda núcleo T -invariante (Lema 1.3.14(b,c)). Por tanto B no es minimal con esta propiedad. Por tanto $T(B) = B$. \square

El siguiente lema nos garantiza que la familia de bandas núcleo T -invariantes es cerrada bajo intersecciones no vacias.

Lema 1.3.16 *La intersección de dos bandas T -invariantes es o bien vacía, o bien una banda T -invariante.*

Demostración. Si A y B son dos bandas T -invariantes tales que $A \cap B \neq \emptyset$ entonces $\pi(A \cap B)$ es un compacto no vacío. Además A y B son T -invariantes. Entonces, $\pi(A \cap B)$ es R_ω -invariante y como R_ω es una rotación irracional tenemos que $\pi(A \cap B) = \mathbb{S}^1$. Sean G_A y G_B los residuales en donde las fibras de A y B son intervalos. Si $\theta \in G_A \cap G_B$ la fibra $(A \cap B)^\theta$ es también un intervalo, entonces las fibras de $A \cap B$ son intervalos en un residual. \square

La importancia del siguiente teorema, radica en que nos da una dicotomía en la “estructura” de las bandas núcleo fuertemente invariantes, solo pueden ser de dos tipos, o bien sólidas o bien pseudo-curvas. Lo cual simplifica notablemente el estudio de dichos objetos. Recordemos que \mathbb{S}_A^1 fue definido en el Lema 1.3.10.

Teorema 1.3.17 *Sea $T \in \mathcal{T}$ y sea A una banda núcleo fuertemente T -invariante. Entonces \mathbb{S}_A^1 es abierto y una y solo una de las dos afirmaciones siguientes se cumple.*

- (a) \mathbb{S}_A^1 es vacío y A es una pseudo-curva T -minimal, o
- (b) \mathbb{S}_A^1 es denso en \mathbb{S}^1 y A es una banda sólida.

Demostración. Por el Lema 1.3.9 m_{A+} es una función semicontinua inferiormente y M_{A-} es una función semicontinua superiormente. Entonces $m_{A+} - M_{A-}$ es una función semicontinua inferiormente. Por tanto, por el Lema 1.3.7(a), \mathbb{S}_A^1 es un abierto en \mathbb{S}^1 .

Supongamos ahora que $\overline{\mathbb{S}_A^1} \neq \mathbb{S}^1$. Bajo esta hipótesis, $\mathbb{S}^1 \setminus \overline{\mathbb{S}_A^1}$ es un abierto en \mathbb{S}^1 tal que si $\theta \in \mathbb{S}^1 \setminus \overline{\mathbb{S}_A^1}$ entonces $M_{A-}(\theta) \geq m_{A+}(\theta)$. Sean G_1 y G_2 los residuales donde las funciones M_A y m_A son continuas. Claramente las funciones M_{A+} , M_{A-} , m_{A+} , m_{A-} son continuas en $G = G_1 \cap G_2$ (Lema 1.3.7(c)). Tendremos entonces que para toda $\theta \in G$, $A^{+\theta} = \{(\theta, M_A(\theta))\}$ y $A^{-\theta} = \{(\theta, m_A(\theta))\}$ y por tanto $m_{A+}(\theta) = M_A(\theta)$ y $M_{A-}(\theta) = m_A(\theta)$. De donde, si $\theta \in G \cap (\mathbb{S}^1 \setminus \overline{\mathbb{S}_A^1})$ tendremos

$$M_A(\theta) = m_{A+}(\theta) \leq M_{A-}(\theta) = m_A(\theta).$$

Por otra parte como $M_A(\theta) \geq m_A(\theta)$ para toda $\theta \in \mathbb{S}^1$ obtenemos $M_A(\theta) = m_A(\theta)$ para toda $\theta \in G \cap (\mathbb{S}^1 \setminus \overline{\mathbb{S}_A^1})$. Por lo tanto A es pinchado en $G \cap (\mathbb{S}^1 \setminus \overline{\mathbb{S}_A^1})$. Ahora bien, dado que A es

fuertemente invariante, si A es pinchado en θ lo es también en $R_\omega^n(\theta)$ para cada n con lo que A es pinchado en un subconjunto denso de \mathbb{S}^1 y es una pseudo-curva. Sea P_A su residual de continuidad. Tendremos entonces que $P_A \subset \mathbb{S}^1 \setminus \mathbb{S}_A^1$ y por lo tanto

$$\mathbb{S}^1 = \overline{P_A} \subset \overline{\mathbb{S}^1 \setminus \mathbb{S}_A^1} = \mathbb{S}^1 \setminus \mathbb{S}_A^1$$

de donde $\mathbb{S}_A^1 = \emptyset$. La minimalidad de A es consecuencia del Lema 1.2.24.

Supongamos ahora que $\overline{\mathbb{S}_A^1} = \mathbb{S}^1$. Sea $\Theta' = \{\theta \in \mathbb{S}^1 : A^\theta \text{ es un intervalo}\}$. Por ser A fuertemente invariante tendremos que $R_\omega(\Theta') \subset \Theta'$. Por otra parte, como \mathbb{S}_A^1 es abierto y por el Lema 1.3.10, $\mathbb{S}_A^1 \subset \Theta'$ y existirá un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbb{S}^1 = \cup_{i=0}^k R_\omega^i(\Theta') \subset \Theta'$. Esto prueba que todas las fibras de A son intervalos.

Finalmente veremos que A es una banda sólida. Definamos

$$\mathbb{S}_A^1(k) := \{\theta \in \mathbb{S}_A^1 : M_{A^-}(\theta) < m_{A^+}(\theta) - \frac{1}{k}\}.$$

Por ser $m_{A^+}(\theta) - M_{A^-}(\theta)$ semicontinua inferiormente $\mathbb{S}_A^1(k)$ es abierto para toda $k \in \mathbb{N}$. Como $\mathbb{S}_A^1 = \cup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{S}_A^1(k)$ es no vacío, existe k' tal que $\mathbb{S}_A^1(k') \neq \emptyset$. Por ser ω un irracional, existe N de manera que $\mathbb{S}^1 = \cup_{n=1}^N R_\omega^{-n}(\mathbb{S}_A^1(k'))$. Como que T^i es uniformemente continua para toda $i \in \mathbb{N}$, sea $\delta_i > 0$ tal que

$$d((\theta, x), (\theta', x')) < \delta_i \Rightarrow d(T^i(\theta, x), T^i(\theta', x')) < \frac{1}{k'}.$$

Finalmente sea $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_N\}$. Probaremos que para todo $\theta \in \mathbb{S}^1$, $M_A(\theta) - m_A(\theta) \geq \delta$. Tomemos $\theta \in \mathbb{S}^1$ y $1 \leq j \leq N$ tal que $\theta \in R_\omega^{-j}(\mathbb{S}_A^1(k'))$. Sean $x_1, x_2 \in A^\theta$ tales que

$$\begin{aligned} T^j(\theta, x_1) &= (\theta + j\omega, M_{A^-}(\theta + j\omega)), \\ T^j(\theta, x_2) &= (\theta + j\omega, m_{A^+}(\theta + j\omega)). \end{aligned}$$

Como $R_\omega^j(\omega) \in \mathbb{S}_A^1(k')$, tendremos que $d(T^j(\theta, x_1), T^j(\theta, x_2)) > \frac{1}{k'}$ y por lo tanto $d((\theta, x_1), (\theta, x_2)) \geq \delta_j \geq \delta$. Así pues $|M_A(\theta) - m_A(\theta)| \geq |x_1 - x_2| > \delta$. \square

Corolario 1.3.18 *Sea A una banda n\'ucleo sólida T -invariante. Si A^+ y A^- también son T -invariantes, entonces $A^+ \cap A^- = \emptyset$.*

Dem\'onstraci\'on. Por el Lema 1.3.16 tenemos que si $A^+ \cap A^- \neq \emptyset$ entonces $A^+ \cap A^-$ es una banda T -invariante. Por otra parte el Lema 1.2.24 nos asegura que A^+ y A^- son conjuntos minimales y por lo tanto $A^+ \cap A^- = A^+ = A^-$. Del Corolario 1.3.12 deducimos que A es una pseudo-curva, lo que contradice la hip\'otesis. \square

1.3.2. Ordenaci\'on y recubrimientos entre bandas

En esta sección también hacemos uso de las definiciones dadas en [7], nuevamente las reinterpretamos en función de las pseudo-curvas y de los resultados que hemos obtenido en la sección anterior. Esta subsección finaliza con un teorema que puede ser entendido como la generalización teorema de punto fijo, claro esta en el contexto de bandas n\'ucleo.

Definición 1.3.19 Diremos que dos bandas A y B satisfacen $A < B$ si existe un residual G en \mathbb{S}^1 tal que para toda $\theta \in G$, $M_{A+}(\theta) < m_{B-}(\theta)$. Diremos que dos bandas son ordenadas si se cumple que $A < B$ o $A > B$.

Definición 1.3.20 Diremos que las bandas A y B están debilmente ordenadas, $A \leq B$ si $M_{A+}(\theta) \leq m_{B-}(\theta)$ para toda θ en un residual en \mathbb{S}^1 .

Observación 1.3.21 Si A y B son bandas núcleo, las siguientes propiedades son verdaderas.

- (a) $A^- \leq A^+$.
- (b) $A \leq B$ si y solo si $A^+ \leq B^-$.
- (c) Si $B \subset A$ entonces $A^- \leq B^- \leq B^+ \leq A^+$.

En lo que sigue veremos que dos pseudo-curvas debilmente ordenadas, definen una única banda núcleo que las tiene como tapas. Empecemos observando el siguiente resultado.

Lema 1.3.22 Sean A y B dos pseudo-curvas tales que $A \leq B$. Entonces $m_A(\theta) \leq M_B(\theta)$ para toda $\theta \in \mathbb{S}^1$.

Demostración. Sea

$$\Omega_{m_A} = \{(\theta, x) : x \geq m_A(\theta)\}.$$

Si $(\theta, M_B(\theta)) \in \Omega_{m_A}$ para toda $\theta \in \mathbb{S}^1$, tendremos que $m_A(\theta) \leq M_B(\theta)$ para toda $\theta \in \mathbb{S}^1$. Dado que B es una pseudo-curva, en particular es compacto y $M_B(\theta) \in B$ para toda $\theta \in \mathbb{S}^1$. Por lo anterior es suficiente demostrar que $B \subset \Omega_{m_A}$, lo hacemos como sigue. Como m_A es semicontinua inferiormente (Lema 1.3.9), El Lema 1.3.7(b) nos implica que Ω_{m_A} es cerrado en Ω . Como A y B son pseudo-curvas, el Corolario 1.3.12 nos garantiza $M_A(\theta) = M_{A+}(\theta)$ y $m_B(\theta) = m_{B-}(\theta)$ para toda $\theta \in \mathbb{S}^1$. Sea G el residual en \mathbb{S}^1 , tal que $M_{A+}(\theta) \leq m_{B-}(\theta)$ para toda $\theta \in G$. En consecuencia

$$m_A(\theta) \leq M_A(\theta) = M_{A+}(\theta) \leq m_{B-}(\theta) = m_B(\theta) \leq M_B(\theta),$$

para toda $\theta \in G$. De donde $\{(\theta, M_B(\theta)) : \theta \in G\} \subset \Omega_{m_A}$. En virtud de que Ω_{m_A} es cerrado y B es una pseudo-curva, el Corolario 1.3.12 nos implica $\overline{\{(\theta, M_B(\theta)) : \theta \in G\}} \subset \Omega_{m_A}$. \square

Así pues, tiene sentido la siguiente definición.

Definición 1.3.23 Sean A y B dos pseudo-curvas tales que $A \leq B$. Definimos

$$I_{AB} = \left(\bigcup_{\theta \in \mathbb{S}^1} [m_A(\theta), M_B(\theta)] \right)^{\text{nuc}}.$$

Lema 1.3.24 Las siguientes afirmaciones son ciertas

- (a) Si A y B son pseudo-curvas tales que $A \leq B$ entonces I_{AB} es una banda núcleo.
- (b) Sean A y B dos pseudo-curvas tales que $A \leq B$ entonces $I_{AB}^- = A$ y $I_{AB}^+ = B$.

(c) Sean A y B dos pseudo-curvas tales que $M_A(\theta) < m_B(\theta)$ para toda $\theta \in \mathbb{S}^1$ entonces I_{AB} es sólida y

$$I_{AB} = \bigcup_{\theta \in \mathbb{S}^1} [m_A(\theta), M_B(\theta)].$$

(d) Si A, A', B', B son pseudo-curvas tales que $A \leq A' \leq B' \leq B$, entonces $I_{A'B'} \subset I_{AB}$.

(e) Si C es una banda n\'ucleo entonces $I_{C-C+} = C$.

(f) Sean C y D dos bandas sólidas n\'ucleo disjuntas tales que $C < D$, entonces I_{C+D-} es también una banda sólida n\'ucleo.

(g) Sean C y D dos pseudo-curvas disjuntas tales que $C < D$, entonces I_{CD} es una banda n\'ucleo con interior diferente del vacio.

Dem\'onstraci\'on. Empezamos demostrando el apartado (a). Denotamos $\tilde{I}_{AB} = \bigcup_{\theta \in \mathbb{S}^1} [m_A(\theta), M_B(\theta)]$ y veremos que es compacto. Sea $\{(\theta_n, x_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset \tilde{I}_{AB}$ una sucesi\'on convergente con l\'ımite (θ, x) . Como

$$m_A(\theta_n) \leq x_n \leq M_B(\theta_n)$$

para toda $n \in \mathbb{N}$, la semicontinuidad inferior de m_A y la semicontinuidad superior de M_B implican $m_A(\theta) \leq x \leq M_B(\theta)$. Entonces $(\theta, x) \in \tilde{I}_{AB}$. Por lo tanto \tilde{I}_{AB} es compacto. Dado que todas las fibras de \tilde{I}_{AB} son intervalos, \tilde{I}_{AB} es una banda. Luego, por el Lema 1.3.5, $I_{AB} = (\tilde{I}_{AB})^{\text{nuc}}$ es una banda n\'ucleo. Esto termina la prueba de (a).

Veamos (b). Por el Lema 1.3.5

$$\left(\bigcup_{\theta \in \mathbb{S}^1} [m_A(\theta), M_B(\theta)] \right)^{\beta} = [m_A(\beta), M_B(\beta)] = I_{AB}^{\beta}$$

para toda β en un residual G de \mathbb{S}^1 . Sea G' el residual de continuidad de la funci\'on fibra en I_{AB} y (φ_{P_A}, P_A) el representante can\'onico de la pseudo-curva A . Tendremos entonces $I_{AB}^{\theta} = [\varphi_{P_A}(\theta), M_B(\theta)]$ para toda $\theta \in G \cap G' \cap P_A$. Como que $m_{I_{AB}}$ es continua en G' obtenemos que $(I_{AB}^-)^{\theta} = \{(\theta, \varphi_{P_A}(\theta))\} = A^{\theta}$ para toda $\theta \in G \cap G' \cap P_A$. Por el Lema 1.2.16 obtenemos $I_{AB}^- = A$. La prueba de que $I_{AB}^+ = B$ es an\'loga. Esto termina la prueba de (b).

Vamos ahora a probar (c). La hip\'otesis de que $M_A(\theta) < m_B(\theta)$ para toda $\theta \in \mathbb{S}^1$ implica que A y B son disjuntas. Sea

$$k = \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

Por ser A y B compactos disjuntos existen $x \in A$ e $y \in B$ tales que $k = d(x, y) > 0$. Tendremos entonces que $\text{diam}(I_{AB}^{\theta}) \geq k > 0$ para toda $\theta \in \mathbb{S}^1$. Ahora veremos que I_{AB}^{θ} es un intervalo para toda $\theta \in \mathbb{S}^1$. Notemos que en virtud del Lema 1.3.10, $\mathbb{S}^1_{(I_{AB})} = \mathbb{S}^1$, y I_{AB}^{θ} es un intervalo para toda $\theta \in \mathbb{S}^1$. Consecuentemente I_{AB} es una banda sólida n\'ucleo. As\'i, hemos demostrado (c).

Veamos ahora (d). Por (b) tenemos

$$I_{AB}^- = A, I_{AB}^+ = B, I_{A'B'}^- = A', I_{A'B'}^+ = B'.$$

Por el Lema 1.3.5 $I_{AB}^\theta = [m_A(\theta), M_B(\theta)]$ para θ en un residual G y $I_{A'B'}^\theta = [m_{A'}(\theta), M_{B'}(\theta)]$ para θ en un residual G' . Sea $G'' = G \cap G'$, entonces

$$I_{A'B'}^\theta = [m_{A'}(\theta), M_{B'}(\theta)] \subset [m_A(\theta), M_B(\theta)] = I_{AB}^\theta$$

para toda $\theta \in G''$. Por lo tanto por el Corolario 1.1.12, tenemos

$$I_{A'B'} = \overline{I_{A'B'} \cap \pi^{-1}(G'')} \subset \overline{I_{AB} \cap \pi^{-1}(G'')} = I_{AB}.$$

Esto muestra (d).

Ahora veremos (e). Por (b) tenemos que $I_{C-C^+}^- = C^-$ y $I_{C-C^+}^+ = C^+$ y por el Lema 1.3.13 obtenemos que $I_{C-C^+} = C$.

Ahora demostraremos (f). Sean C y D bandas sólidas núclee disjuntas verificando $C < D$. En virtud de la conexidad de D (Corolario 1.3.4)

$$\Omega \setminus D = \{(\theta, x) \in \Omega : x < m_D(\theta)\} \cup \{(\theta, x) \in \Omega : x > M_D(\theta)\},$$

los cuales son conjuntos ajenos. Como que M_D es semicontinua superiormente y m_D es semicontinua inferiormente, el Lema 1.3.7(b) nos implica que dichos conjuntos son abiertos. La condición $C < D$ combinada con la conexidad de C en cada fibra (Definición 1.3.1), establece $C^+ \subset C \subset \{(\theta, x) \in \Omega : x < m_D(\theta)\}$. En consecuencia $M_{C^+}(\theta') < m_{D^-}(\theta')$ para toda $\theta' \in G'$. Esto implica que estamos en las hipótesis de (c). Por lo tanto I_{C+D^-} es una banda sólida, esto muestra (f).

Finalmente demostraremos (g). Sea

$$\Omega' = \{(\theta, x) \in \Omega : x \leq M_C(\theta)\} \cup \{(\theta, x) \in \Omega : x \geq m_D(\theta)\}$$

Como que M_C es semicontinua superior y m_D es semicontinua inferior, el Lema 1.3.7(b) nos implica que Ω' es cerrado en Ω . En consecuencia $\Omega \setminus \Omega'$ es un abierto en Ω y la condición $C < D$ nos garantiza que es diferente del vacío. Entonces basta demostrar que $\Omega \setminus \Omega' \subset I_{CD}$. Demostraremos este hecho de la siguiente manera. Observemos que

$$\Omega \setminus \Omega' = \{(\theta, x) \in \Omega : M_C < m_D(\theta)\}.$$

Sea $(\theta, x) \in \Omega \setminus \Omega'$ entonces forzosamente $M_C(\theta) < m_D(\theta)$, por (b) $M_{I_{CD}^-}(\theta) < m_{I_{CD}^+}(\theta)$. Luego, por el Lema 1.3.10 $\theta \in \mathbb{S}^1$ y $I_{CD}^\theta = \{\theta\} \times [m_C(\theta), M_D(\theta)]$. Por lo tanto $(\Omega \setminus \Omega')^\theta \subset I_{CD}$. Esto prueba $(\Omega \setminus \Omega')^\theta \subset I_{CD}$ para toda $\theta \in \mathbb{S}^1$ y $\Omega \setminus \Omega' \subset I_{CD}$. Esto demuestra (g). Así concluimos la demostración. \square

Definición 1.3.25 Sean $T \in \mathcal{T}$, B y A bandas núclee. Diremos que T envía a A en B en sentido positivo si $T(A^-) \leq B^-$ y $T(A^+) \geq B^+$. Lo denominaremos como $A \xrightarrow{+} B$. Diremos que T envía A en B en sentido negativo si $T(A^-) \geq B^+$ y $T(A^+) \leq B^-$. Lo denominaremos como $A \xrightarrow{-} B$. Usaremos el símbolo $A \xrightarrow{\pm} B$ si no estamos interesados en aclarar cual de ellas se satisface.

Observación 1.3.26 Sea $T \in \mathcal{T}$. Supongamos que A, B y C son bandas núcleeo. Si T envia A en B en sentido positivo (resp. negativo), entonces $T(A^-) \leq T(A^+)$ (resp. $T(A^+) \leq T(A^-)$). Esto implica que si T envia A en C lo hará también en sentido positivo (resp. negativo).

Lema 1.3.27 Sea $T \in \mathcal{T}$. Sean A, D y B bandas núcleeo. Si $A \xrightarrow{\pm} B$ y $D \subset B$ entonces $A \xrightarrow{\pm} D$.

Demostración. Supongamos que $A \xrightarrow{\pm} B$ entonces combinando la hipótesis $D \subset B$ y la Observación 1.3.21(a)(c) las desigualdades $T(A^-) \leq B^- \leq D^- \leq D^+ \leq B^+ \leq T(A^+)$ son ciertas. Concluimos pues $A \xrightarrow{\pm} D$. Si $A \xrightarrow{\mp} B$ la demostración es análoga. \square

Notación 1.3.28 Cuando $T(A) = B$ y además $T(A^+) = B^+$ ($T(A^+) = B^-$) y $T(A^-) = B^-$ ($T(A^-) = B^+$), diremos que $T(A) \equiv B$.

Lema 1.3.29 Sean $T \in \mathcal{T}$, A y B dos bandas núcleeo. Si $A \xrightarrow{\pm} B$ con respecto a T , entonces $B \subset T(A)$.

Demostración. Supongamos $A \xrightarrow{\pm} B$. Como A es una banda núcleeo, por el Lema 1.3.14, $T(A)$ también lo es. Del Lema 1.3.11 tenemos que $A^+, A^-, T(A)^+, T(A)^-$ son pseudo-curvas y el Lema 1.2.23 nos garantiza que $T(A^+), T(A^-)$ también son pseudo-curvas y cumplen $T(A^+), T(A^-) \subset T(A)$. En virtud de $A \xrightarrow{\pm} B$ tenemos $T(A^-) \leq B^- \leq B^+ \leq T(A^+)$. Las seis pseudo-curvas cumplen:

$$T(A^-) \leq T(A^-) \leq B^- \leq B^+ \leq T(A^+) \leq T(A)^+.$$

Entonces por el Lema 1.3.24(d) y el Lema 1.3.24(e) tenemos que

$$B = I_{B^- B^+} \subset I_{T(A^-) T(A^+)} \subset I_{T(A^-) T(A^+)} = T(A).$$

La demostración del otro caso es análoga. \square

Corolario 1.3.30 Sea $T \in \mathcal{T}$. Si A es una pseudo-curva y $A \xrightarrow{\pm} B$ entonces B es una pseudo-curva y $T(A) \equiv B$.

Demostración. Como A es una pseudo-curva, por el Lema 1.2.23, $T(A)$ también lo es. En virtud del lema anterior $B \subset T(A)$ y como B es una banda núcleeo B es una pseudo-curva y por lo tanto $B = T(A)$. \square

Lema 1.3.31 Sea $T \in \mathcal{T}$ y A, B y B' bandas núcleeo.

- (a) Si $A \xrightarrow{\pm} B$, entonces existe una banda núcleeo $C \subset A$ tal que $T(C) \equiv B$.
- (b) Supongamos que $A \xrightarrow{\pm} B$ y $A \xrightarrow{\pm} B'$. Entonces si B y B' están débilmente ordenadas las bandas núcleeo C y C' , obtenidas en (a), también se pueden construir débilmente ordenadas, es decir: si $B \leq B'$ entonces $C \leq C'$ siempre que $A \xrightarrow{\pm} B$ y $C \geq C'$ cuando $A \xrightarrow{\mp} B$.

Demostración. Demostramos el lema en el caso en que $A \xrightarrow{\pm} B$. El otro caso se demuestra de manera análoga.

Primero demostraremos (a). Por el Lema 1.3.29 tenemos que $B^+ \subset B \subset T(A)$. Como B^+ es compacto $T^{-1}(B^+)$ es también compacto, y $A \cap T^{-1}(B^+)$ es compacto, no vacío y $\pi(A \cap T^{-1}(B^+)) = \mathbb{S}^1$. Sea

$$\varphi(\theta) := m_{A \cap T^{-1}(B^+)}(\theta).$$

Por el Lema 1.3.9 la función φ es semicontinua inferiormente. Sea G_φ el residual de \mathbb{S}^1 en donde φ es continua. Por tanto

$$C^+ := A_{(\varphi, G_\varphi)}$$

es una pseudo-curva. Claramente $A^- \leq C^+$. Consideremos ahora $I_{A^-C^+}$.

Por el Lema 1.3.24(b) tendremos que $I_{A^-C^+}^+ = C^+$. Por otra parte $I_{A^-C^+}^- \subset I_{A^-A^+}$ y del Lema 1.3.24(e) tendremos $I_{A^-C^+}^- \subset A$.

Por el Lema 1.2.23 $T(C^+)$ es una pseudo-curva y por construcción $T(C^+)$ y B^+ se cortan en un residual y por lo tanto $T(C^+) = B^+$. Como que $T(A^-) \leq B^-$ tendremos que $I_{A^-C^+}^- \xrightarrow{+} B$.

Consideremos el compacto no vacío $T^{-1}(B^-) \cap I_{A^-C^+}$. Definimos la función:

$$\psi(\theta) := M_{T^{-1}(B^-) \cap I_{A^-C^+}}(\theta).$$

De manera análoga a C^+ , la función ψ nos define la pseudo-curva C^- . Sea $C := I_{C^-C^+}$. Con los mismos argumentos que usamos para las propiedades de $I_{A^-C^+}$ podemos concluir que C cumple:

$$\begin{aligned} C &\subset I_{A^-C^+} \subset A, \quad I_{C^-C^+}^- = C^-, \quad I_{C^-C^+}^+ = C^+, \\ I_{C^-C^+}^- &\xrightarrow{+} B, \quad T(C^+) = B^+, \quad T(C^-) = B^-. \end{aligned}$$

Solo resta demostrar que $T(C) \subset B$ para obtener $T(C) \equiv B$. Supongamos que existe un punto $(\theta, c) \in C$ tal que $T((\theta, c)) \notin B$. Como B es compacto, existe un entorno $B_\varepsilon((\theta, c))$ tal que $T(B_\varepsilon((\theta, c))) \cap B = \emptyset$. Como que C es una banda núcleo, existe G_C un residual tal que para todo $\theta' \in G_C$ la fibra de C es un intervalo y la función fibra es continua (Lema 1.3.5). Dado que G_C es residual $B_\varepsilon((\theta, c)) \cap (C \cap \pi^{-1}(G_C)) \neq \emptyset$. Sea $(\beta, b) \in B_\varepsilon((\theta, c)) \cap (C \cap \pi^{-1}(G_C))$. Para dicho punto se cumple $m_C(\beta) < b < M_C(\beta)$ y $T((\beta, b)) = (\beta + \omega, b') \notin B$. Supongamos que $b' > M_B(\beta + \omega)$. Como $T(C^+) = B^+$ y $T(C^-) = B^-$ se tiene

$$\begin{aligned} T(\beta, M_C(\beta)) &= (\beta + \omega, M_B(\beta + \omega)), \\ T(\beta, m_C(\beta)) &= (\beta + \omega, m_B(\beta + \omega)). \end{aligned}$$

Además $T(C^\beta)$, es un intervalo. Luego, la continuidad de la función T restringida a la fibra β implica que existe $a \in [m_C(\beta), b]$ tal que

$$T((\beta, a)) = (\beta + \omega, M_B(\beta + \omega)).$$

contradicciendo que $M_B(\beta + \omega)) = \varphi(\beta + \omega) := m_{A \cap T^{-1}(B^+)}(\theta + \omega)$. Para el caso en que $b' < M_B(\beta + \omega)$ la demostración es análoga. Esto concluye la demostración de (a).

Para demostrar (b), supongamos que B y B' son dos bandas n\'ucleo tales que $A \xrightarrow{+} B$, $A \xrightarrow{+} B'$ y $B \leq B'$. Sea C' una banda n\'ucleo construida como en (a) tal que $T(C') \equiv B'$. Tendremos pues $T(C'^-) = B'^- > B^+$. Por otra parte $T(A^-) < B^-$ por hip\'otesis. Tendremos as\'i $I_{A^-C'^-} \xrightarrow{+} B$. Aplicando (a) a las bandas $I_{A^-C'^-}$ y B , obtendremos que existe una banda n\'ucleo C tal que $C \subset I_{A^-C'^-}$ y $T(C) \equiv B$. Como $C \subset I_{A^-C'^-}$ por la Observaci\'on 1.3.21(c) tenemos que $C^+ \leq C'^-$ de donde $C \leq C'$. As\'i pues hemos acabado la parte del lema en que $A \xrightarrow{+} B$. Como hemos dicho anteriormente el otro caso es an\'alogo. Esto concluye la demostraci\'on. \square

Teorema 1.3.32 *Sea $T \in \mathcal{T}$. Sea A una banda n\'ucleo tal que $A \xrightarrow{+} A$. Entonces existe una banda n\'ucleo $A_\infty \subset A$ tal que $T(A_\infty) \equiv A_\infty$.*

Demostraci\'on. Supongamos que $A \xrightarrow{+} A$. Definiremos inductivamente una sucesi\'on de bandas n\'ucleo. Por el Lema 1.3.31 y el Lema 1.3.27 existe una banda n\'ucleo $A_1 \subset A$ tal que $T(A_1) \equiv A$ y $A_1 \xrightarrow{+} A_1$. Sea $i \in \mathbb{N}$ y supongamos que para cada $j \leq i$ hemos definido bandas n\'ucleo A_j tales que $A_j \subset A_{j-1}$, $T(A_j) \equiv A_{j-1}$ y $A_j \xrightarrow{+} A_j$. Entonces aplicando el Lema 1.3.31 y el Lema 1.3.27 al conjunto A_i tenemos que existe A_{i+1} tal que $A_{i+1} \subset A_i$, $T(A_{i+1}) \equiv A_i$ y $A_{i+1} \xrightarrow{+} A_{i+1}$. Sea $\tilde{A}_\infty = \cap_{i=0}^\infty A_i$. Como cada A_i es una banda, existe un residual G_i , tal que si $\theta \in G_i$ entonces A_i^θ es un intervalo. Sea el conjunto residual $G = \cap_{i=0}^\infty G_i$. Entonces A_i^θ es un intervalo para toda $\theta \in G$. Por lo tanto $\tilde{A}_\infty^\theta = \cap_{i=0}^\infty A_i^\theta$ que es una intersecci\'on anidada de intervalos. Por consiguiente \tilde{A}_∞^θ es un intervalo para toda $\theta \in G$ y \tilde{A}_∞ es una banda. Tambi\'en tenemos

$$T(\tilde{A}_\infty) = T(\cap_{i=0}^\infty A_i) = \cap_{i=0}^\infty T(A_i) = \cap_{i=1}^\infty A_{i-1} = \tilde{A}_\infty.$$

Sea $A_\infty = (\tilde{A}_\infty)^{\text{nuc}}$ entonces por el Lema 1.3.14,

$$T(A_\infty) = T((\tilde{A}_\infty)^{\text{nuc}}) = (T(\tilde{A}_\infty))^{\text{nuc}} = (\tilde{A}_\infty)^{\text{nuc}} = A_\infty.$$

Para verificar que $T(A_\infty) \equiv A_\infty$ solo resta demostrar que $T(A_\infty^+) = A_\infty^+$ y $T(A_\infty^-) = A_\infty^-$. Demostraremos que $T(A_\infty^+) = A_\infty^+$. Sea

$$P = \{\theta \in \mathbb{S}^1 : A_i^\theta \text{ es un intervalo y } A_i^{+\theta} \text{ es pinchado para toda } i \geq 1\}.$$

Claramente P es residual. Por otro lado, como que $T(A_i^\theta) = A_{i-1}^{\theta+\omega}$ y $T(A_i^{+\theta}) = A_{i-1}^{+(\theta+\omega)}$ para toda $i \geq 1$ tendremos que $P + \omega \subset P$. Sea

$$Q = \{\theta \in \mathbb{S}^1 : \text{la funci\'on fibra para } A_\infty \text{ y para } \tilde{A}_\infty \text{ es continua en } \theta\}.$$

Demostraremos que $Q + \omega \subset Q$. Sea $\theta \in Q$. Veremos que $\theta + \omega \in Q$. Consideremos $\{\theta_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesi\'on tal que $\lim \theta_n = \theta + \omega$. En consecuencia, $\lim \theta_n - \omega = \theta$. En virtud de la continuidad de la funci\'on fibra para A_∞ en θ tenemos que $\lim A_\infty^{\theta_n - \omega} = A_\infty^\theta$. Tenemos entonces

$$\lim(A_\infty^{\theta_n}) = \lim T(A_\infty^{\theta_n - \omega}) = T(\lim A_\infty^{\theta_n - \omega}) = T(A_\infty^{\theta_n}) = A_\infty^{\theta_n - \omega},$$

donde la igualdad $\lim T(A_\infty^{\theta_n-\omega}) = T(\lim A_\infty^{\theta_n-\omega})$ es una consecuencia de la continuidad de la función T en 2^Ω (Proposición 1.1.5). Esto demuestra la continuidad de la función fibra de A_∞ en $\theta + \omega$. Un argumento análogo prueba la continuidad de la función fibra de \tilde{A}_∞ en $\theta + \omega$. Obtenemos así que $\theta + \omega \in Q$. Observemos que si $\alpha \in P$, entonces la fibra \tilde{A}_∞^α es un intervalo, ya que es una intersección anidada de intervalos. Si además $\alpha \in P \cap Q$ tendremos por el Lema 1.3.5, $\tilde{A}_\infty^\alpha = A_\infty^\alpha$ y por tanto A_∞^α es un intervalo. Sea $S = P \cap Q$. El conjunto S también es residual y $S + \omega \subset S$. Sea $\alpha \in S$. Como que A_∞^α es un intervalo y la función fibra en A_∞ es continua tendremos que la función M_{A_∞} es continua en α y por lo tanto A_∞^+ es pinchado en α . Pongamos $A_\infty^{+\alpha} = \{(\alpha, a(\alpha))\}$. Por otra parte, como que

$$A_\infty^\alpha = \tilde{A}_\infty^\alpha = \cap_{\alpha \geq 0} A_i^\alpha = \cap_{\alpha} A_i^\alpha = \{\alpha\} \times [b_i(\alpha), a_i(\alpha)],$$

tendremos que $a(\alpha) = \lim a_i(\alpha)$. Ahora bien, como $\alpha + \omega \in S$, las mismas consideraciones son ciertas para $\alpha + \omega$. Así pues, $A_\infty^{\alpha+\omega}$ es un intervalo y $A_\infty^{+(\alpha+\omega)}$ es pinchado y $a(\alpha + \omega) = \lim a_i(\alpha + \omega)$. Por otro lado $T(\alpha, a_i(\alpha)) = (\alpha + \omega, a_{i-1}(\alpha + \omega))$, ya que $T(A_i^+) = A_{i-1}^+$ y ambas son pinchadas en α y $\alpha + \omega$. Así,

$$T(\alpha, a(\alpha)) = \lim T(\alpha, a_i(\alpha)) = \lim (\alpha + \omega, a_{i-1}(\alpha + \omega)) = (\alpha + \omega, a(\alpha + \omega)).$$

Tendremos entonces que A_∞^+ y $T(A_\infty^+)$ se cortan en $S + \omega$ y en virtud del Lema 1.2.16, $T(A_\infty^+) = A_\infty^+$. La igualdad para A_∞^- se demuestra de manera análoga y concluimos $T(A_\infty) \equiv A_\infty$. Cuando $A_i \xrightarrow{-} A_{i-1}$ la demostración es análoga. Esto termina la demostración del lema. \square

Corolario 1.3.33 *Sea $T \in \mathcal{T}$ y A una banda núclee tal que $T(A) = A$. Entonces las siguientes situaciones son ciertas:*

- (a) *Si A cumple que $A \xrightarrow{+} A$, entonces A contiene una pseudo-curva T -invariante y minimal.*
- (b) *Si A cumple que $A \xrightarrow{-} A$, y no contiene una pseudo-curva T -invariante, entonces contiene una banda sólida núclee T -invariante A_∞ para la cual A_∞^+ y A_∞^- son permutadas por T . Ambos conjuntos son invariantes y minimales para la función T^2 .*

Demostración. Si $A \xrightarrow{+} A$ entonces $T(A_\infty^+) = A_\infty^+$ y por el Lema 1.2.24 A_∞^+ es minimal. Esto demuestra (a). Si $A \xrightarrow{-} A$ tenemos que $T(A_\infty^-) = A_\infty^+$ y $T(A_\infty^+) = A_\infty^-$ de donde $T^2(A_\infty^+) = A_\infty^+$ y $T^2(A_\infty^-) = A_\infty^-$ por lo tanto por el Lema 1.2.24 serán minimales para T^2 . \square

1.4. Teoría del Forcing

El objetivo de esta sección es introducir y estudiar la relación de forcing de los patterns de las funciones en \mathcal{T} . La razón que nos mueve a hacerlo es que podemos obtener mucha información de la dinámica de las funciones. Como consecuencia se puede obtener una caracterización de los conjuntos de periodos y cotas inferiores de la entropía topológica. Demostraremos que

dicha teoría para una subclase de patterns que definiremos más adelante, coincide con la de las funciones continuas en el intervalo. Suponiendo que la relación de forcing en el intervalo y para las funciones de \mathcal{T} coincide en la clase de todos los patterns, obtendremos el teorema de Sharkovskiĭ como un corolario. El caso general es análogo al del intervalo aunque técnicamente más complejo y será objeto de estudio más adelante.

Recordaremos, en primer lugar, dichos conceptos para el intervalo, luego introduciremos los conceptos análogos para las funciones de \mathcal{T} y, finalmente, enunciaremos y demostraremos el resultado principal de esta sección.

1.4.1. Dinámica combinatoria en el intervalo

Denotaremos el intervalo $[0, 1]$ por I , la clase de funciones continuas de I en si mismo por $C(I, I)$. Dada una función $f \in C(I, I)$, diremos que $p \in I$ es un punto n -periódico de f si $f^n(p) = p$ y $f^j(p) \neq p$ para toda $j = 1, 2, \dots, n-1$. Al conjunto de puntos $\{p, f(p), \dots, f^{n-1}(p)\}$ le llamamos órbita f -periódica. Dada una órbita periódica $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ diremos que esta *ordenada espacialmente* si $p_i < p_{i+1}$ para toda $i = 1, 2, \dots, n-1$. Siempre supondremos que las órbitas periódicas están ordenadas espacialmente.

Una herramienta crucial para estudiar la dinámica combinatoria del intervalo son los *grafos de Markov*.

Un *grafo combinatorio con signo* es un par $G = (V, F)$ donde V es el conjunto de *vértices* y F el *conjunto de flechas*, es un subconjunto de $V \times V \times \{+, -\}$. Una flecha (I, J, s) con $I, J \in V$ y $s \in \{+, -\}$ será denotada por $I \xrightarrow{s} J$.

Un *camino* de G es una sucesión de flechas $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ con $u_i = (v_i, v'_i, s_i)$ para $i = 1, 2, \dots, m$ y $v'_i = v_{i+1}$ para $i = 1, 2, \dots, m-1$. Es decir, un camino de G es una sucesión de flechas tal que cada una empieza en el vértice donde termina la anterior. El número m se denomina *longitud* del camino. Cuando $v'_m = v_1$ (es decir cuando el camino termina y empieza en el mismo vértice) α se llamará un *lazo de longitud m* .

Observemos que si α es un lazo, entonces $(u_2, u_3, \dots, u_m, u_1)$ es también un lazo de G . Este lazo se denominará un *desplazado de α* y será denotado por $R(\alpha)$. Para el iterado n -ésimo de R usaremos el símbolo R^n . Es decir, $R^n(\alpha) = (u_{1+n \pmod m}, u_{2+n \pmod m}, \dots, u_{m+n \pmod m})$. Notemos que $R^{km}(\alpha) = \alpha$ para todo $k \geq 0$.

Dados dos caminos $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ y $\beta = (w_1, w_2, \dots, w_l)$ tales que u_m termina en el mismo vértice donde empieza w_1 , se define la *concatenación de α y β* denotada por $\alpha\beta$, como el camino $(u_1, u_2, \dots, u_m, w_1, w_2, \dots, w_l)$. Cuando α es un lazo denotaremos por α^n , $n \geq 1$, la concatenación de α con si mismo n -veces. α^n se denomina una *n-repetición* de α .

Dado un camino $\alpha = v_1 \xrightarrow{s_1} v_2 \xrightarrow{s_2} \dots v_m \xrightarrow{s_m} v_{m+1}$ se define el *signo de α* , denotado $\text{Sign}(\alpha)$, como

$$\prod_{i=1}^m s_i$$

donde, en esta expresión, se usan las reglas obvias de multiplicación:

$$+ \cdot + = - \cdot - = +,$$

$$\text{y } + \cdot - = - \cdot + = -.$$

Sea α un lazo de un grafo combinatorio con signo G . Diremos que α es *simple* si no existe un lazo β tal que $\alpha = \beta^n$ con $n \geq 2$. Es decir, si α no es una n -repetición de β con $n \geq 2$. Observemos que, en este caso, $\alpha = \underbrace{\beta\beta\dots\beta}_n$ y que la longitud de β divide a la de α .

Sea $f \in C(I, I)$ donde I es un intervalo de \mathbb{R} y sea $P = \{p_1 < p_2 < \dots < p_n\}$ una órbita periódica de f . Cada intervalo de la forma $[p_i, p_{i+1}]$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ será denominado un intervalo P -básico de f . A dicha órbita P le asignamos un grafo combinatorio con signo, denominado P -grafo de f , de la siguiente manera. El conjunto V de vértices del P -grafo de f es exactamente el conjunto de intervalos básicos. Asimismo si $I = [a, b]$ y J son intervalos básicos, $I \xrightarrow{s} J$ es una flecha del P -grafo de f si y solo si

$$s = +, f(a) < f(b) \text{ y } J \subset [f(a), f(b)]$$

o bien $s = -, f(a) > f(b) \text{ y } J \subset [f(b), f(a)].$

Observación 1.4.1 Sean $I_1 \xrightarrow{s_1} J_1$ y $I_2 \xrightarrow{s_2} J_2$ flechas del P -grafo de f que empiezan en el mismo vértice. Entonces $s_1 = s_2$.

Un lazo $\alpha = I_0 \xrightarrow{s_0} I_1 \xrightarrow{s_1} \dots I_{m-1} \xrightarrow{s_{m-1}} I_m$ en un P -grafo de f se llamará *delgado* si de cada intervalo I_i sale una única flecha en el P -grafo de f . Es decir, si $I_i = [a_i, b_i]$ entonces

$$I_{i+1} = \begin{cases} [f(a_i), f(b_i)], & \text{cuando } s_i = + \\ [f(b_i), f(a_i)], & \text{cuando } s_i = - \end{cases}$$

para $i = 0, 1, 2, \dots, m-1$. Por el Lema 2.6.3(a) de [2], α es negativo.

Sea $f \in C(I, I)$ y P una órbita de f . Diremos que f es P -monótona si para cada intervalo P -básico I , $f|_I$ es estrictamente monótona.

Definición 1.4.2 Sea $\alpha = I_0 \xrightarrow{s_0} I_1 \xrightarrow{s_1} \dots I_{n-1} \xrightarrow{s_{n-1}} I_0$ un lazo de longitud n de un P -grafo de f y sea x un punto periódico de periodo n de f . Diremos que α y x están asociados si $f^i(x) \in I_i$ para $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Observación 1.4.3 Si α y x están asociados entonces $f^m(x)$ y $R^m(\alpha)$ también están asociados para toda $m \geq 1$.

El siguiente resultado relaciona lazos con puntos periódicos. Es una reescritura del Teorema 2.6.4 y del Lema 1.2.12 de [2].

Teorema 1.4.4 Sea $f \in C(I, I)$ y sea P una órbita periódica de f . Supongamos que f es P -monótona. Sea Θ una órbita periódica de f tal que $\Theta \cap P = \emptyset$. Entonces cada punto de Θ tiene un único lazo asociado en el P -grafo de f . Sea además α un lazo en el P -grafo de f . Entonces:

- (a) Si α es un lazo simple o una 2-repetición de un lazo delgado, entonces α tiene un punto periódico asociado. En este último caso, dicho punto pertenece a P .
- (b) Si α tiene un punto periódico asociado, entonces α es simple o bien es una 2-repetición de un lazo simple negativo.

En el conjunto de vértices de un P -grafo de f se puede definir el siguiente orden natural. Dados $I = [a, b]$ y $J = [c, d]$ tales que $I \neq J$ escribimos $I < J$ si y solo si $b \leq c$. Esta ordenación induce un orden lexicográfico en el conjunto de caminos del P -grafo de f . Más precisamente, dados dos caminos $\alpha = v_0 \xrightarrow{s_0} v_1 \xrightarrow{s_1} \cdots v_{m-1} \xrightarrow{s_{m-1}} v_m$ y $\beta = w_0 \xrightarrow{d_0} w_1 \xrightarrow{d_1} \cdots w_{l-1} \xrightarrow{d_{l-1}} w_l$ diremos que $\alpha < \beta$ si y solo si $l \geq m$ y $\beta = \alpha(w_m \xrightarrow{d_m} w_{m+1} \xrightarrow{d_{m+1}} \cdots w_{l-1} \xrightarrow{d_{l-1}} w_l)$ o bien existe $j \leq m$ tal que $v_i = w_i$ para $i = 0, 1, 2, \dots, j-1$ y

$$\begin{cases} v_j < w_j & \text{cuando } \text{Sign}(v_0 \xrightarrow{s_0} v_1 \xrightarrow{s_1} \cdots v_{j-1} \xrightarrow{s_{j-1}} v_j) = + \\ v_j > w_j & \text{cuando } \text{Sign}(v_0 \xrightarrow{s_0} v_1 \xrightarrow{s_1} \cdots v_{j-1} \xrightarrow{s_{j-1}} v_j) = - \end{cases}$$

Observemos que $v_i = w_i$ para $i = 0, 1, 2, \dots, j-1$, por la Observación 1.4.1 implica $s_i = d_i$ para $i = 0, 1, 2, \dots, j-1$. Luego,

$$\text{Sign}(v_0 \xrightarrow{s_0} v_1 \xrightarrow{s_1} \cdots v_{j-1} \xrightarrow{s_{j-1}} v_j) = \text{Sign}(w_0 \xrightarrow{d_0} w_1 \xrightarrow{d_1} \cdots w_{j-1} \xrightarrow{d_{j-1}} w_j).$$

El siguiente lema relaciona los iterados de un punto periódico con los desplazados de su lazo asociado.

Lema 1.4.5 *Sea $f \in C(I, I)$ y sea P una órbita periódica de f . Supongamos que f es P -monótona y que x e y son puntos periódicos de f de periodo n asociados a los lazos α y β respectivamente. Supongamos $x \neq y$ y $\alpha \neq \beta$. Entonces $x < y$ si y solo si $\alpha < \beta$.*

*Demuestra*ón. Sean $\alpha = v_0 \xrightarrow{s_0} v_1 \xrightarrow{s_1} \cdots v_{n-1} \xrightarrow{s_{n-1}} v_n$ y $\beta = w_0 \xrightarrow{d_0} w_1 \xrightarrow{d_1} \cdots w_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} w_0$. Como $\alpha \neq \beta$ existe $l \leq n-1$ tal que $v_i = w_i$ para $i = 0, 1, \dots, l-1$ y $v_l \neq w_l$.

Observemos que si $I = [a, b]$ es un intervalo básico de f y $z, t \in I$ con $z < t$ entonces la P -monotonía de f implica que

$$\begin{aligned} f(z) &< f(t) & \text{si } f(a) < f(b) \text{ y} \\ f(z) &> f(t) & \text{si } f(a) > f(b). \end{aligned}$$

Iterando esta observación, se tiene que, $x < y$ es equivalente a

$$\begin{aligned} f^l(x) &< f^l(y) & \text{si } \text{Sign}(v_0 \xrightarrow{s_0} v_1 \xrightarrow{s_1} \cdots v_{l-1} \xrightarrow{s_{l-1}} v_l) = + \text{ y} \\ f^l(x) &> f^l(y) & \text{si } \text{Sign}(v_0 \xrightarrow{s_0} v_1 \xrightarrow{s_1} \cdots v_{l-1} \xrightarrow{s_{l-1}} v_l) = -. \end{aligned}$$

En cualquier caso $x \neq y$ implica $f^l(x) \neq f^l(y)$. Dado que $f^l(x) \in v_l$ y $f^l(y) \in w_l$ y $v_l \neq w_l$ se tiene que $f^l(x) < f^l(y)$ es equivalente a $v_l < w_l$. Por tanto el lema se sigue de la definición de orden en el conjunto de caminos básicos del P -grafo de f . \square

Observación 1.4.6 En las mismas hipótesis que el Lema 1.4.5. Por la Observación 1.4.3 se tiene que dado $m \geq 1$, $f^m(x) < f^m(y)$ si y solo si $R^m(\alpha) < R^m(\beta)$.

Daremos ahora la definición de *pattern*, primero damos notación que nos será útil.

Notación 1.4.7 En esta memoria una permutación de orden n se representará como una aplicación biyectiva de $\{1, 2, \dots, n\}$ en si mismo. Es decir $\sigma = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ si y solo si $\sigma(i) = s_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$, como es usual, $\sigma^0(i) = i$ y $\sigma^n(i) = \sigma(\sigma^{n-1}(i))$ para toda $n \geq 1$.

Definición 1.4.8 Sea $f \in C(I, I)$, sea $P = \{p_1 < p_2 < \dots < p_n\}$ una órbita periódica de f y sea σ una permutación cíclica de orden n . Diremos que P tiene pattern σ si y solo si $f(p_i) = p_{\sigma(i)}$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Llamaremos a n el periodo del pattern. Si una función $f \in C(I, I)$ tiene una órbita f -periódica con pattern σ diremos que f exhibe σ . Observemos que cualquier permutación cíclica es el pattern de alguna órbita periódica de alguna función lineal del intervalo (ver la Definición 1.4.11).

El siguiente lema nos da una definición equivalente de pattern en términos de los iterados del punto mínimo de la órbita periódica, que usaremos más adelante.

Lema 1.4.9 Sea $f \in C(I, I)$ y sea $P = \{p_1 < p_2 < \dots < p_n\}$ una órbita periódica de f . Entonces P tiene pattern σ si y solo si $f^n(p_1) = p_{\sigma^n(1)}$ para toda $n \geq 0$.

Demostración. Demostraremos primero la parte “solo si”. Supongamos que P tiene pattern σ . Claramente $f^0(p_1) = p_1 = p_{\sigma^0(1)}$. Supongamos ahora que $f^n(p_1) = p_{\sigma^n(1)}$ para $n \geq 0$. Entonces,

$$f^{n+1}(p_1) = f(f^n(p_1)) = f(p_{\sigma^n(1)})$$

y, de la definición de pattern, se tiene,

$$f(p_{\sigma^n(1)}) = p_{\sigma(\sigma^n(1))} = p_{\sigma^{n+1}(1)}.$$

Supongamos ahora que $f^n(p_1) = p_{\sigma^n(1)}$ para cada $n \geq 0$, demostraremos que $f(p_i) = p_{\sigma(i)}$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$. Dado que P es una órbita periódica, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ existe una $j = j(i)$ tal que

$$p_i = f^j(p_1) = p_{\sigma^j(1)}.$$

Luego, $\sigma^j(1) = i$. Por tanto,

$$f(p_i) = f^{j+1}(p_1) = p_{\sigma(\sigma^j(1))} = p_{\sigma(1)}.$$

□

Ahora, definimos la relación de forcing entre dos patterns.

Definición 1.4.10 Dados dos patterns σ y ν , diremos que σ fuerza a ν si y solo si toda $f \in I$ que exhibe el pattern σ también exhibe el pattern ν .

La relación de forzamiento de patterns del intervalo será denotada por $\sigma \Rightarrow_I \nu$. Es una relación de orden parcial (ver [2]) y se caracteriza mediante las funciones σ -lineales.

Definición 1.4.11 Sea σ un pattern de periodo n y sea $P = \{\frac{i-1}{n-1}\}_{i=1}^n$ un conjunto de cardinalidad n en $[0, 1]$. Definimos la función σ -lineal f_σ como la función continua que es lineal entre los puntos de P y tal que $f_\sigma(p_i) = p_{\sigma(i)}$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Observemos que la función σ -lineal, en particular, es P -monótona.

El siguiente teorema caracteriza la relación de forzamiento en términos de funciones σ -lineales (vease por ejemplo [2]).

Teorema 1.4.12 Sean σ y ν patterns de órbitas lineales del intervalo y sea f_σ la función σ -lineal. Entonces $\sigma \Rightarrow_I \nu$ si y solo si f_σ exhibe el pattern ν .

Presentamos ahora una versión del Teorema de Sharkovskiĭ, aplicado a las funciones σ -lineales, en términos de la relación \Rightarrow_I . En primer lugar, definimos el *orden de Sharkovskiĭ* para los números naturales.

$$\begin{aligned}
 & 3 \succ 5 \succ 7 \succ 9 \succ \dots \succ \\
 & 2 \cdot 3 \succ 2 \cdot 5 \succ 2 \cdot 7 \succ 2 \cdot 9 \succ \dots \succ \\
 & 2^2 \cdot 3 \succ 2^2 \cdot 5 \succ 2^2 \cdot 7 \succ 2^2 \cdot 9 \succ \dots \succ \\
 & \vdots \\
 & 2^n \cdot 3 \succ 2^n \cdot 5 \succ 2^n \cdot 7 \succ 2^n \cdot 9 \succ \dots \succ \\
 & \vdots \\
 & 2^\infty \dots \succ 2^n \succ \dots \succ 2^3 \succ 2^2 \succ 2 \succ 1.
 \end{aligned}$$

El teorema de Sharkovskiĭ dice:

Teorema 1.4.13 (Sharkovskiĭ) Sea I un intervalo en la recta real. Sea $f \in C(I, I)$ una función continua que tiene un punto periódico de periodo q . Entonces, f también tiene un punto periódico de periodo $p \in \mathbb{N}$ para cada $p \prec q$. Recíprocamente, para cada $q \in \mathbb{N} \cup \{2^\infty\}$ existe una función $f_q \in C(I, I)$ tal que el conjunto de puntos periódicos de f_q es $\{p \in \mathbb{N}: p \preceq q\}$.

Una particularización de dicho teorema en términos de la relación \Rightarrow_I es (ver [2]):

Teorema 1.4.14 Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Entonces $n \succ m$ si y solo si para todo pattern σ de periodo n existe un pattern ν de periodo m tal que $\sigma \Rightarrow_I \nu$.

*Demuestra*ción. Supongamos que $n \succ m$. Sea σ un pattern de periodo n . Sea $f_\sigma \in C(I, I)$ la función σ -lineal. Como que n está en el conjunto de periodos de f_σ , tendremos que m está en el mismo conjunto. Entonces existe un pattern ν de periodo m tal que f_σ exhibe a ν . Concluimos $\sigma \Rightarrow_I \nu$. La otra implicación es inmediata. Esto concluye la demostración. \square

1.4.2. Dinámica combinatoria de funciones de \mathcal{T}

Enunciaremos ahora los conceptos básicos que nos serán de utilidad para la dinámica combinatoria Ω , los mismos serán una extensión de los definidos para el intervalo.

Definición 1.4.15 *Sea $p > 1$ un entero. Una banda $A \subseteq \Omega$ se llama p -periódica si $T^p(A) = A$ y si $A, T(A), \dots, T^{p-1}(A)$ son disjuntas y ordenadas por pares. Al conjunto $\{A, T(A), \dots, T^{p-1}(A)\}$ le llamamos órbita T -periódica de bandas.*

Observación 1.4.16 *A partir de ahora, por el Teorema 1.3.15, supondremos que las órbitas T -periódicas de bandas con las que trabajaremos tienen como elementos únicamente bandas minimales y por el Teorema 1.3.17, están formados por bandas sólidas núcleo o pseudo-curvas.*

Tendremos como hipótesis general que una órbita T -periódica de bandas $P = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ cumple $B_1 < B_2 < \dots < B_n$. Es decir, está ordenado espacialmente.

Ahora definiremos el grafo de Markov para las funciones en \mathcal{T} . En primer lugar, damos un concepto análogo al de intervalo básico.

Definición 1.4.17 *Dado $P = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ una órbita T -periódica de bandas. Cada banda de la forma*

$$I_{B_i^+ B_{i+1}^-}$$

será denominada banda básica. Observemos que por el Lema 1.3.24g cada banda básica tiene interior no vacío.

Observación 1.4.18 *Si $I_i \cap I_k \neq \emptyset$ entonces $|i - k| = 1$.*

Observación 1.4.19 *Todas las bandas básicas de una órbita T -periódica de bandas $P = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$, están contenidas en $I_{B_1^+ B_n^-}$.*

De manera análoga a como lo hicimos para el intervalo, definiremos los grafos combinatorios con signo, asociados a las funciones en \mathcal{T} . En este caso el conjunto de vértices es el conjunto de bandas básicas y existe una flecha con signo s de $I_{B_i^+ B_{i+1}^-}$ a $I_{B_j^+ B_{j+1}^-}$ si y solo si

$$I_{B_i^+ B_{i+1}^-} \xrightarrow{s} I_{B_j^+ B_{j+1}^-}$$

en el sentido de la Definición 1.3.25. Notemos que por la Definición 1.3.25 y el hecho que $T(I_k^-) \leq T(I_k^+)$ o $T(I_k^+) \leq T(I_k^-)$ tenemos que todas las flechas que salen de un vértice tienen el mismo signo. También entenderemos las nociones de *camino*, *lazo*, *lazo simple*, *desplazado de un lazo*, *concatenación de dos lazos*, *signo de un camino*, *lazo delgado* y *el orden en el conjunto de caminos del P -grafo* de manera análoga a como lo hicimos en el intervalo.

Lema 1.4.20 *Sea $T \in \mathcal{T}$. Supongamos que existen bandas básicas J_0, J_1, \dots, J_{n-1} , tales que*

$$J_0 \xrightarrow{s_0} J_1 \xrightarrow{s_1} \cdots J_{n-1} \xrightarrow{s_{n-1}} J_0.$$

Sea $s = \text{Sign}(J_0 \xrightarrow{s_0} J_1 \xrightarrow{s_1} \cdots J_{n-1} \xrightarrow{s_{n-1}} J_0)$. Entonces existe una banda núcleo C tal que $T^n(C) \equiv C$ y $T^i(C) \subset J_i$ para toda $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$. En particular $C \xrightarrow{s} C$, por T^n .

Demostración. En primer lugar por el Lema 1.3.31 existe una banda núcleo $K_{n-1} \subset J_{n-1}$ tal que $T(K_{n-1}) \equiv J_0$. Como $\text{Int}(J_0) \neq \emptyset$ tenemos $\text{Int}(K_{n-1}) \neq \emptyset$. Ahora supongamos que tenemos construida la banda núcleo $K_l \subset J_l$ para $1 \leq l \leq n-1$ y $\text{Int}(K_l) \neq \emptyset$. Entonces como $J_{l-1} \xrightarrow{s_{l-1}} J_l$ y $K_l \subset J_l$ por el Lema 1.3.27 $J_{l-1} \xrightarrow{s_{l-1}} K_l$. Por lo tanto existe una banda núcleo $K_{l-1} \subset J_{l-1}$ tal que $\text{Int}(K_{l-1}) \neq \emptyset$ y $K_{l-1} \xrightarrow{s_{l-1}} K_l$ y $T(K_{l-1}) \equiv K_l$. Iterando este procedimiento obtenemos una familia de bandas K_0, K_1, \dots, K_{n-1} . Como que $J_0 \xrightarrow{s} J_0$ por T^n y además $K_0 \subset J_0$, tenemos que $K_0 \xrightarrow{s} K_0$ de donde, por el Teorema 1.3.32 existe una banda núcleo C tal que $T^n(C) \equiv C$ y en particular $C \xrightarrow{s} C$. \square

Observación 1.4.21 *En las mismas hipótesis que Lema 1.4.20. Existe una familia K_0, K_1, \dots, K_{n-1} de bandas sólidas, que cumple las siguientes propiedades*

- (a) $K_l \subset J_l$ para toda $l = 1, 2, \dots, n-1$.
- (b) $T(K_{l-1}) \equiv K_l$.
- (c) $K_{l-1} \xrightarrow{s_{l-1}} K_l$.
- (d) $\text{Int}(K_l) \neq \emptyset$ para toda $l = 0, 1, \dots, n-1$.

Ahora generalizamos la Definición 1.4.2.

Definición 1.4.22 *Sea $T \in \mathcal{T}$. Sea $B = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ una órbita T -periódica de bandas y sea $m \in \mathbb{N}$. Sea A una banda m -periódica y $\alpha = (J_0, J_1, J_2, \dots, J_m)$ un lazo de longitud m en el B -grafo de T . Diremos que A y α están asociados si $A \subset J_0$ y $T^i(A) \subset J_i$ para $i = 0, \dots, m$.*

El siguiente lema es la extensión del Teorema 1.4.4 a funciones de \mathcal{T} .

Lema 1.4.23 *Sea $T \in \mathcal{T}$ y sea P una órbita T -periódica de bandas. Entonces cada lazo simple del P -grafo de T tiene una órbita T -periódica de bandas asociado a él.*

Demostración. Sea $\alpha = J_0 \xrightarrow{s_0} J_1 \xrightarrow{s_1} \cdots J_{n-1} \xrightarrow{s_{n-1}} J_0$ un lazo simple en el P -grafo de T . Por el Lema 1.4.20 existe una banda núcleo C tal que $T^n(C) \equiv C$ y $T^i(C) \subset J_i$ para toda $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Sea k el periodo de C y supongamos que $k \neq n$. Entonces $n = k \cdot m, m > 1$ y, claramente, $T^i(C) = T^{i+k}(C) = \cdots = T^{i+k(m-1)}(C), i = 1, 2, \dots, k$.

Si $C \cap B_i = \emptyset$ para toda $B_i \in P$ entonces $\{C, T(C), T^2(C), \dots, T^{k-1}(C)\} \subset \bigcup_{i=0}^{n-1} \text{Int}(J_i)$. Por tanto

$$I_i = I_{i+k} = \cdots = I_{i+k(m-1)},$$

para toda $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$. En consecuencia α es una m repetición del lazo

$$I_0 \xrightarrow{d_0} I_1 \xrightarrow{d_1} \cdots I_{k-1} \xrightarrow{d_{k-1}} I_0,$$

contradicciendo que sea un lazo simple. Por tanto C está asociada a α .

Supongamos ahora que $C \cap B_i \neq \emptyset$ para alguna $B_i \in P$. Veremos que α no es simple. Para ello reordenamos el lazo, si es necesario, de manera que $C \cap B_0 \neq \emptyset$. También observemos que como C y B_0 son T^n -invariantes, el Lema 1.3.16 implica que $C \cap B_0$ es una banda T^n -invariante. Dado que $C \subset I_0$,

$$C \cap B_0 \subset I_0 \cap B_0 = I_0^-.$$

Por lo tanto $C \cap B_0 = I_0^- = C^-$ es una pseudo-curva. En virtud de la Observación 1.4.21, existe una banda núcleo $K_0 \subset I_0$ tal que $C \subset K_0$ y $T^i(C) \subset T^i(K_0) \subset I_i$ para toda $i = 1, 2, \dots, n-1$. Como que $C = T^k(C) \subset T^k(K_0)$ tenemos $T^k(K_0) \subset I_0$. Consecuentemente $I_k = I_0$. Las bandas núcleo K_0 y $T^k(K_0)$ están contenidos en I_0 y contienen a C , aún más $C^- = K_0^- = (T^k(K_0))^-$. Por el Lema 1.3.24d $K_1 = K_0 \cap T^k(K_0)$ es una banda núcleo contenida propiamente en I_0 . Claramente $T^i(K_1) \subset T^i(K_0) \subset I_i$ y $T^i(K_1) \subset T^{k+i}(K_0) \subset I_{k+i}$. En consecuencia $I_i = I_{k+i}$ para $i = 0, 1, \dots, k-1$ y $T^k(K_1) \subset T^k(K_0) \subset I_0$. Como $K_1 \subseteq T^k(K_0)$ tenemos $T^k(K_1) \subset T^{2k}(K_0) \subset I_{2k}$ y por tanto $I_0 = I_{2k}$. Repitiendo este proceso encontramos, como en el caso anterior, un lazo

$$I_0 \xrightarrow{d_0} I_1 \xrightarrow{d_1} \cdots I_{k-1} \xrightarrow{d_{k-1}} I_0,$$

del cual α es una m repetición, contradiciendo que α es simple. \square

Lema 1.4.24 *Sea $T \in \mathcal{T}$ y sea P una órbita periódica de bandas de T . Supongamos que X e Y son bandas periódicas de T de periodo n asociados a los lazos α y β respectivamente. Supongamos $X \neq Y$ y $\alpha \neq \beta$. Entonces $X < Y$ si y solo si $\alpha < \beta$.*

Demuestra. Sean $\alpha = v_0 \xrightarrow{s_0} v_1 \xrightarrow{s_1} \cdots v_{n-1} \xrightarrow{s_{n-1}} v_n$ y $\beta = w_0 \xrightarrow{d_0} w_1 \xrightarrow{d_1} \cdots w_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} w_0$. Como $\alpha \neq \beta$ existe $l \leq n-1$ tal que $v_i = w_i$ para $i = 0, 1, \dots, l-1$ y $v_l \neq w_l$.

Observemos que si $I_{B_j^+ B_{j+1}^-}$ es un intervalo básico de T y $A, C \subset I_{B_j^+ B_{j+1}^-}$ con $A < C$ entonces el Lema 1.3.31 implica que podemos asegurar

$$\begin{aligned} T(A) < T(C) &\text{ si } T(B_j^+) < T(B_{j+1}^-) \text{ y} \\ T(A) > T(C) &\text{ si } T(B_j^+) > T(B_{j+1}^-). \end{aligned}$$

Iterando esta observación, se tiene que, $X < Y$ es equivalente a

$$\begin{aligned} T^l(X) < T^l(Y) &\text{ si } \text{Sign}(v_0 \xrightarrow{s_0} v_1 \xrightarrow{s_1} \cdots v_{l-1} \xrightarrow{s_{l-1}} v_l) = + \text{ y} \\ T^l(X) > T^l(Y) &\text{ si } \text{Sign}(v_0 \xrightarrow{s_0} v_1 \xrightarrow{s_1} \cdots v_{l-1} \xrightarrow{s_{l-1}} v_l) = -. \end{aligned}$$

En cualquier caso $X \neq Y$ implica $T^l(X) \neq T^l(Y)$. Dado que $T^l(X) \in v_l$ y $T^l(Y) \in w_l$ y $v_l \neq w_l$ se tiene que $T^l(X) < T^l(Y)$ es equivalente a $v_l < w_l$. Por tanto el lema se sigue de la definición de orden en el conjunto de caminos básicos del P -grafo de T . \square

Observación 1.4.25 En las mismas hipótesis que el Lema 1.4.24. Por la Observación 1.4.3 se tiene que dado $m \geq 1$, $T^m(X) < T^m(Y)$ si y solo si $R^m(\alpha) < R^m(\beta)$.

Como en el intervalo, el pattern de una órbita periódica de bandas $P = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$, de una función de \mathcal{T} , es la permutación cíclica asociada. Es decir, Diremos que P tiene pattern σ si y solo si $T(B_i) = B_{\sigma(i)}$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Llamaremos a n el periodo del pattern. Si una función $T \in \mathcal{T}$ tiene una órbita T -periódica de bandas con pattern σ diremos que T exhibe a σ . Por último, el Lema 1.4.9 y la relación de forcing (Definición 1.4.10) son también válidos para los patterns definidos en Ω , denotaremos la relación de forcing para Ω como \Rightarrow_{Ω} . En particular notemos que una permutación cíclica se puede ver tanto como un pattern del intervalo como una pattern de una función $T \in \mathcal{T}$. En el Lema 1.4.27 veremos que toda permutación cíclica es un pattern de una función de \mathcal{T} .

El siguiente lema relaciona los dos grafos combinatorios con signo definidos anteriormente.

Lema 1.4.26 Sea σ un pattern y sea f_{σ} la función σ -lineal asociada. Sea $T \in \mathcal{T}$, tal que existe una órbita T -periódica de bandas $P' = \{B_0, B_1, \dots, B_{n-1}\}$ con pattern σ . Entonces el f_{σ} -grafo con signo y el T -grafo con signo asociados a f_{σ} y a T respectivamente son iguales, en particular, los signos de todas sus flechas coinciden.

*Demuestra*cción. Sea $P = \left\{ \frac{i-1}{n-1} \right\}_{i=1}^n$ la órbita f_{σ} -periódica. Sea $\left[\frac{i}{n-1}, \frac{i+1}{n-1} \right]$ un intervalo básico. Supongamos que f_{σ} es creciente en $\left[\frac{i}{n-1}, \frac{i+1}{n-1} \right]$. Entonces $f_{\sigma} \left(\frac{i}{n-1} \right) < f_{\sigma} \left(\frac{i+1}{n-1} \right)$. En virtud de que P y P' tienen el mismo pattern,

$$f_{\sigma} \left(\frac{i}{n-1} \right) = \frac{\sigma(i)}{n-1} \text{ y } f_{\sigma} \left(\frac{i+1}{n-1} \right) = \frac{\sigma(i+1)}{n-1} \text{ si y solo si } T(B_i) = B_{\sigma(i)} \text{ y } T(B_{i+1}) = B_{\sigma(i+1)}.$$

Por lo tanto,

$$\left[\frac{j}{n-1}, \frac{j+1}{n-1} \right] \subset f_{\sigma} \left(\left[\frac{i}{n-1}, \frac{i+1}{n-1} \right] \right) \text{ si y solo si } B_j^+ \leq T(B_i^+) \text{ y } B_{j+1}^- \leq T(B_{i+1}^-).$$

En consecuencia, existe una flecha $\left[\frac{i}{n-1}, \frac{i+1}{n-1} \right] \xrightarrow{+} \left[\frac{j}{n-1}, \frac{j+1}{n-1} \right]$ si y solo si existe una flecha $I_{B_i^+ B_{i+1}^-} \xrightarrow{+} I_{B_j^+ B_{j+1}^-}$. Hacemos uso de un argumento análogo en el caso en que la función f_{σ} es decreciente. Esto concluye la demostración. \square

Lema 1.4.27 Sea $f \in C(I, I)$. Sea $T_f \in \mathcal{T}$ tal que $T_f(\theta, x) = (R_{\omega}(\theta), f(x))$. Entonces las siguientes afirmaciones son ciertas.

- (a) Si $\Theta = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ es una órbita periódica de f con pattern σ entonces $\mathbb{S}^1 \times \Theta$ es una órbita periódica de T_f con pattern σ .
- (b) Si B es una órbita periódica de T_f con pattern σ entonces existe una órbita periódica Θ de f con pattern σ tal que $\mathbb{S}^1 \times \Theta$ es una órbita periódica de T_f con pattern σ y $\mathbb{S}^1 \times \Theta \subset B$. En particular toda permutación cíclica es un pattern de una función de \mathcal{T} .

Demostración. Primero demostraremos (a). Supongamos que $\sigma = (i_0, i_1, \dots, i_{n-1})$ es el pattern asociado a Θ . Entonces $f(p_i) = p_{\sigma(i)}$. Definimos $B_i = \mathbb{S}^1 \times p_i, i = 1, 2, \dots, n$. Es inmediato que $P' = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ es una órbita T_f -periódica de bandas. Por otro lado, por la definición de T_f ,

$$T_f(B_i) = T_f(\mathbb{S}^1 \times \{p_i\}) = \mathbb{S}^1 \times \{f(p_i)\} = \mathbb{S}^1 \times \{p_{\sigma(i)}\}$$

por lo tanto Θ tiene asociado el pattern $\sigma = (i_0, i_1, \dots, i_{n-1})$. Ahora demostraremos (b). Sea $B = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ una T_f -órbita periódica de bandas con pattern σ . Entonces $T(B_i) = B_{\sigma(i)}$. Sea $\pi_2 : \Omega \rightarrow I$. Definamos $J_k = \pi_2(B_k), k = 1, \dots, n$ y observemos que los intervalos J_k son disjuntos dos a dos. Como $T_f(\theta, x) = (R_\omega(\theta), f(x))$ tenemos que $f(J_i) = J_{\sigma(i)}$ por lo tanto J_1 cumple que $f^k(J_1) = J_{\sigma^k(1)}, k = 1, \dots, n-1$. En particular, $f^n(J_1) = J_1$. Por el teorema de Bolzano existe un punto $p_1 \in J_1$ tal que $f^n(p_1) = p_1$ y $f^k(p_1) \in f^k(J_1) = J_{\sigma(k)}, k = 0, 1, 2, \dots, n-2$. Como los intervalos son disjuntos dos a dos, p_1 tiene periodo n . Definamos ahora $p_{\sigma(k)} = f^k(p_1)$. Entonces $\Theta = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ es una órbita periódica de f , tal que $f(p_i) = p_{\sigma(i)}$ para toda $i = 0, \dots, n-1$. Concluimos pues que la órbita periódica Θ tiene asociado el pattern σ y $\mathbb{S}^1 \times \Theta \subset B$. Esto termina la demostración. \square

1.5. Demostración del Teorema 1.5.2

Sean σ y ν patterns tales que $\sigma \neq \nu$ y $\sigma \Rightarrow_I \nu$. Observemos que el Teorema 1.4.12 implica que f_σ tiene una órbita periódica Θ de pattern ν . Como que $\sigma \neq \nu$ entonces $P \cap \Theta = \emptyset$ donde P es la órbita periódica de pattern σ de f_σ . Entonces por el Teorema 1.4.4 el mín Θ tiene un lazo α asociado que es simple o bien es una 2-repetición de un lazo simple negativo. El lazo α se denominara lazo (σ, ν) -minimal.

Definición 1.5.1 *Diremos que ν es simple si para todo pattern $\sigma \neq \nu$ tal que $\sigma \Rightarrow_I \nu$ el lazo (σ, ν) -minimal es simple.*

El teorema principal de este capítulo muestra que las relaciones de forcing \Rightarrow_I y \Rightarrow_Ω coinciden en la clase de patterns simples.

Teorema 1.5.2 *Sean σ y ν patterns del intervalo y supongamos que ν es simple. Entonces el pattern σ fuerza al pattern ν en I si y solo si el pattern σ fuerza al pattern ν en Ω .*

Demostración. Supondremos primero que $\sigma \Rightarrow_\Omega \nu$. Sea f_σ la función σ -lineal. En virtud del Lema 1.4.27a, la función $T_\sigma \in \mathcal{T}$ definida como $T_\sigma = (R_\omega, f_\sigma)$ también exhibe el pattern σ . Entonces, por hipótesis, T_σ también exhibe el pattern ν y en virtud del Lema 1.4.27b f_σ exhibe el pattern ν . Esto concluye la primera implicación.

Para la segunda, supondremos que $\sigma \Rightarrow_\Omega \nu$. Demostraremos que toda función $T \in \mathcal{T}$ que exhibe el pattern σ también exhibe el pattern ν . Si $\sigma = \nu$ no hay nada que demostrar, supondremos pues $\sigma \neq \nu$. Sea T una función que tiene una órbita periódica $B = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$

con pattern σ . Sea f_σ la función σ -lineal. Por el Teorema 1.4.12, f_σ tiene una órbita periódica $\Theta = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ de pattern ν . Como $\sigma \neq \nu$ tenemos que $\Theta \cap P = \emptyset$ donde P es la órbita periódica de pattern σ en f_σ . Por el Teorema 1.4.4 q_1 tiene un único lazo asociado α y dado que ν es simple, podemos suponer que α es simple. En virtud del Lema 1.4.26, T y f_σ tienen el mismo grafo con signo, por lo que el Lema 1.4.23 nos garantiza que existe una banda periódica X asociada al lazo α . Veremos que $\{X, T(X), \dots, T^{m-1}(X)\} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ tiene pattern ν . Para ello, demostraremos en primer lugar que $X = A_1$ es el mínimo de su órbita. Observemos que dado que q_1 tiene periodo m y α es simple se tiene que $q_1 \neq f^j(q_1)$ y $\alpha \neq R^j(\alpha)$ para todo $j = 1, 2, \dots, m-1$, (en caso de que $\alpha = R^j(\alpha)$ para alguna j , se puede ver que se puede construir un lazo β de manera que α es una repetición de β). Luego, como α y q_1 están asociados, la minimalidad de q_1 combinada con el Lema 1.4.5 y la Observación 1.4.3 nos garantiza que $\alpha < R^i(\alpha)$ para toda $i = 1, \dots, m-1$. Ahora, el Lema 1.4.24 y la Observación 1.4.3 nos implica que $X < T^i(X)$, para toda $i = 1, \dots, m-1$ pues α y X están asociados. Concluimos pues la minimalidad de X . La segunda propiedad que deseamos verificar es que $T(A_i) = A_{\sigma(i)}$ para toda $i = 1, 2, \dots, n$. Dado que $q_1 < q_2 < \dots < q_m$ la Observación 1.4.6 nos garantiza que $\alpha < R^{\sigma(2)}(\alpha) < \dots < R^{\sigma(n)}(\alpha)$ y la Observación 1.4.25 nos garantiza $A_1 < T^{\sigma(2)}(A_1) < \dots < T^{\sigma(n)}(A_1)$ por tanto, como $A_1 < A_2 < \dots < A_n$ se tiene $A_{\sigma(i)} = T(A_i)$, para toda $i = 1, 2, \dots, n$, luego, T también exhibe el pattern ν . Esto concluye la demostración del teorema. \square

La extensión del Teorema 1.5.2 a la clase de todos los patterns sigue las mismas líneas que la correspondiente demostración en el intervalo. Dicha generalización es el objetivo de un trabajo posterior.

Suponiendo cierto el teorema anterior para la clase de todos los patterns obtenemos como corolario el Teorema de Sharkovskiĭ para funciones de \mathcal{T} a partir del Teorema 1.4.14.

Corolario 1.5.3 *El Teorema de Sharkovskiĭ es cierto para las funciones $T \in \mathcal{T}$.*

Demostración. Sea $T \in \mathcal{T}$ tal que tiene una órbita periódica de bandas de periodo n . Sea σ el pattern de dicha órbita y sea $m \preceq n$. Por el Teorema 1.4.14 existe un pattern ν de periodo m tal que $\sigma \Rightarrow_I \nu$ y en virtud del Teorema 1.5.2 $\sigma \Rightarrow_\Omega \nu$ consecuentemente la función T tiene una órbita periódica de pattern ν y, un punto de periodo m . \square

Una aplicación skew-product sin curvas invariantes

El objetivo de este capítulo es la construcción explícita de una función $T \in \mathcal{T}$ sin curvas invariantes y con una pareja de curvas dos periódica. La idea básica es construir una aplicación $T \in \mathcal{T}$ exhibiendo una pseudo-curva conexa e invariante que divide el cilindro en dos zonas permutadas por T .

La primera sección de este capítulo está dedicada a la construcción de la pseudo-curva conexa invariante mientras que el segundo está dedicado a la construcción de la función que tiene a dicha pseudo-curva como subconjunto invariante.

2.1. Construcción de A

Antes de iniciar la construcción formal de nuestro ejemplo, presentamos una idea rápida de la construcción:

Dada la curva $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$, la construcción del conjunto se hará inductivamente, poniendo alrededor de la fibra de $i\omega$, $i \in \mathbb{Z}$ la clausura de la gráfica de la función $\sin(\frac{1}{x})$, convenientemente reescalada obteniendo de esta manera una sucesión A_n de pseudo-curvas de Ω .

Probaremos que la sucesión A_n converge con la métrica H_d (Definición 1.1.3) a un conjunto A que tiene las propiedades deseadas.

Los dos primeros elementos de nuestra sucesión se muestran en la Figura 1.

2.1.1. Construcción de los conjuntos $\{A_i\}_{i=0}^{\infty}$

La construcción de los elementos de la sucesión la hacemos por inducción. Damos en primer lugar notación que usamos en la misma.

Fijando $\omega \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$, usaremos $O^*(\omega)$ para denotar la *órbita completa de ω* (es decir, tanto sus iterados positivos como negativos) bajo la rotación de ángulo ω (mod 1). Además escribiremos estos elementos así: $l^* = l\omega$ (mód 1), para toda $l \in \mathbb{Z}$. En esta notación, $O^*(\omega) = \{l^* : l \in \mathbb{Z}\}$. Dado $B \subset \mathbb{S}^1$, denotaremos por $B + \omega$ al conjunto $\{b + \omega \text{ (mód 1)} : b \in B\}$.



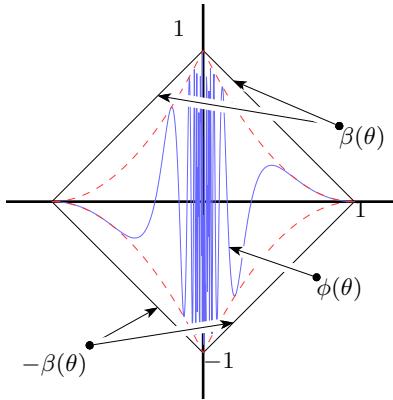
Figura 2.1. Primeros 2 pasos

Dado $\theta \in \mathbb{S}^1$ y $\delta < \frac{1}{2}$ sea $\varphi_\theta : [-\delta, \delta] \rightarrow \overline{B_\delta(\theta)}$ el homeomorfismo $\varphi_\theta(x) = z + x$ (mód 1) donde z (mód 1) = θ . Denotaremos $\varphi_\theta(-\delta)$ por $\theta - \delta$ y $\varphi_\theta(\delta)$ por $\theta + \delta$. También denotaremos la bola cerrada de centro θ y radio δ , $\overline{B_\delta(\theta)}$ por $[\theta - \delta, \theta + \delta]$. Finalmente denotaremos por $\psi_\theta : [\theta - \delta, \theta + \delta] \rightarrow [-\delta, \delta]$ el homeomorfismo inverso de φ_θ .

Definimos las funciones $\beta : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ y $\phi : [-1, 1] \setminus \{0\} \rightarrow [-1, 1]$, de la siguiente manera:

$$\beta(x) = 1 - |x| \quad \text{y} \quad \phi(x) = (1 - |x|)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Notemos que $-\beta(x) < \phi(x) < \beta(x)$, para toda $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$. Las gráficas de $-\beta$, β y ϕ son.

Figura 2.2. Gráficas de ϕ y $\pm\beta$

Observemos que las gráficas de $-\beta$ y β intersectan a la clausura de la gráfica de ϕ en $(0, -1)$ y $(0, 1)$.

Sean ahora $l \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $0 < \alpha < 2^{-n}$ y $l^* - \alpha, l^* + \alpha \notin O^*(\omega)$. También, sean $p_l = (l^*, a)$, $p_l^- = (l^* - \alpha, a^-)$ y $p_l^+ = (l^* - \alpha, a^+) \in \Omega$, donde $a^+, a^- \in (a - 2^{-n}, a + 2^{-n})$. En vista de la definición de β existe $\bar{\delta}(p_l^+, p_l^-) < \alpha$ tal que para toda $\delta < \bar{\delta}$ se tiene

$$\begin{aligned} a^+, a^- &\in [a - 2^{-n}\beta(\psi_l(l^* - \bar{\delta})), a + 2^{-n}\beta(\psi_l(l^* - \bar{\delta}))] \\ &\subset [a - 2^{-n}\beta(\psi_l(l^* - \delta)), a + 2^{-n}\beta(\psi_l(l^* - \delta))] \\ &\subset (a - 2^{-n}, a + 2^{-n}). \end{aligned}$$

Definimos una curva cerrada $\partial\mathcal{R}(l^*, n, \alpha, \delta, p_l, p_l^+, p_l^-)$ en Ω que consiste en las gráficas de las funciones $a + 2^{-n}\beta(\psi_l)|_{[l^* - \delta, l^* + \delta]}$ y $a - 2^{-n}\beta(\psi_l)|_{[l^* - \delta, l^* + \delta]}$, unidas con los arcos que unen a los puntos

$$\begin{aligned} p_l^- \text{ y } (l^* - \delta, a - 2^{-n}\beta(\psi_l(l^* - \delta))), \\ p_l^- \text{ y } (l^* - \delta, a + 2^{-n}\beta(\psi_l(l^* - \delta))), \\ p_l^+ \text{ y } (l^* + \delta, a - 2^{-n}\beta(\psi_l(l^* + \delta))), \\ p_l^+ \text{ y } (l^* + \delta, a + 2^{-n}\beta(\psi_l(l^* + \delta))). \end{aligned}$$

Ahora definimos el conjunto $\mathcal{R}(l^*, n, \alpha, \delta, p_l, p_l^+, p_l^-)$ como la clausura de la componente conexa de $\Omega \setminus \partial\mathcal{R}(l^*, n, \alpha, \delta, p_l, p_l^+, p_l^-)$ que contiene al punto $p_l = (l^*, a)$.

También $\Gamma\mathcal{R}(l^*, n, \alpha, \delta, p_l, p_l^+, p_l^-)$ será la clausura de la gráfica de la función

$$p_l + (-1)^i 2^{-n} \phi(\psi_l)|_{[l^* - \delta, l^* + \delta]}$$

y los segmentos que unen

$$\begin{aligned} p_l^- \text{ y } (l^* - \delta, p_l + (-1)^i 2^{-n} \phi(\psi_l(l^* - \delta))), \\ p_l^+ \text{ y } (l^* + \delta, p_l + (-1)^i 2^{-n} \phi(\psi_l(l^* + \delta))). \end{aligned}$$

Observación 2.1.1 Los conjuntos $\mathcal{R}(l^*, n, \alpha, \delta, p_l, p_l^+, p_l^-)$ y $\Gamma\mathcal{R}(l^*, n, \alpha, \delta, p_l, p_l^+, p_l^-)$ cumplen las propiedades siguientes

- (a) $\Gamma\mathcal{R}(l^*, n, \alpha, \delta, p_l, p_l^+, p_l^-) \subset \mathcal{R}(l^*, n, \alpha, \delta, p_l, p_l^+, p_l^-)$ y $\mathcal{R}(l^*, n, \alpha, \delta, p_l, p_l^+, p_l^-) \subset [l^* - \alpha, l^* + \alpha] \times [a - 2^{-n}, a + 2^{-n}]$.
- (b) $\Gamma\mathcal{R}(l^*, n, \alpha, \delta, p_l, p_l^+, p_l^-)$ y $\partial\mathcal{R}(l^*)$ coinciden solo en los puntos p_l^-, p_l^+ , $(l^*, a - 2^{-n})$ y $(l^*, a + 2^{-n})$.
- (c) $\text{diam}(\mathcal{R}(l^*, n, \alpha, \delta, p_l, p_l^+, p_l^-)) = 2 \cdot 2^{-n}$, que es la distancia entre los extremos de la vertical.
- (d) Para todo $l \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{R}(l^*, n, \alpha, \delta, p_l, p_l^+, p_l^-)$ es un compacto de Ω . Por tanto, dado que π es continua, por construcción

$$\pi(\mathcal{R}(l^*, n, \alpha, \delta, p_l, p_l^+, p_l^-)) = [l^* - \alpha, l^* + \alpha]$$

es un compacto conexo propio de \mathbb{S}^1 .

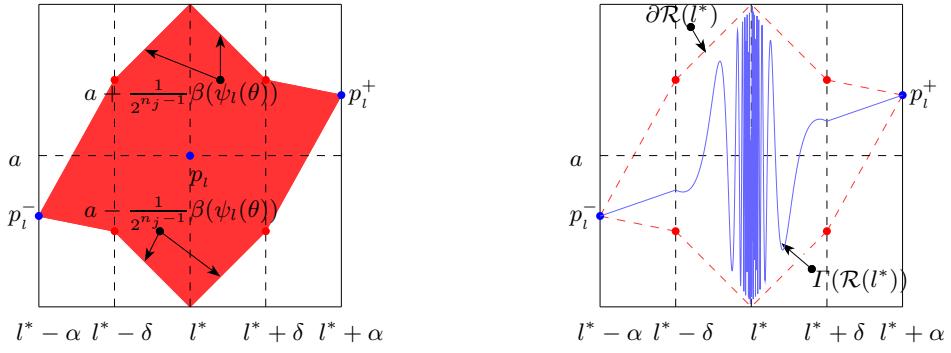


Figura 2.3. $\mathcal{R}(l^*, n, \alpha, \delta, p_l, p_l^+, p_l^-)$ y $\Gamma\mathcal{R}(l^*, n, \alpha, \delta, p_l, p_l^+, p_l^-)$

Ahora denotaremos por $\mathcal{R}(0^*)$ a $\mathcal{R}(0^*, 1, \alpha_0, \delta_0, p_0, p_0^+, p_0^-)$, donde $p_0 = (0^*, 0)$, $p_0^- = (0^* - \alpha, 0)$ y $p_0^+ = (0^* + \alpha, 0)$ y además α_0 es suficientemente pequeño para que

- (0.a) $(-1)^*, 1^*, (-2)^*, 2^* \notin \mathbb{S}^1 \setminus \pi(\mathcal{R}(0^*))$.
- (0.b) $3^* \notin \pi(\mathcal{R}(0^*))$.
- (0.c) $(\pi(\mathcal{R}(0^*)) - \omega) \cap \pi(\mathcal{R}(0^*)) = \emptyset$.

Definimos

$$A_0 = \Gamma\mathcal{R}(0^*) \cup (\mathbb{S}^1 \setminus \pi(\mathcal{R}(0^*)) \times \{0\}).$$

Notemos que en particular, A_0 es una pseudo-curva y tiene asociada un representante canónico $(\varphi_{A_0}, P_{A_0}) \in \mathfrak{C}$ donde $P_{A_0} = \mathbb{S}^1 \setminus \{0^*\}$.

En lo que sigue, para cada $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, denotaremos por Z_j el conjunto $\{i \in \mathbb{Z} : |i| \leq j\} = \{-j, -j+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, j-1, j\}$ y por Z_j^* el conjunto $\{i^* : i \in Z_j\}$.

Para definir los conjuntos A_i supongamos que para $j \in \{0, \dots, i-1\}$ hemos construido conjuntos A_j y parejas de conjuntos

$$\begin{aligned} \mathcal{R}((-j)^*) &= \mathcal{R}((-j)^*, n_j, \alpha_j, \delta_j, p_{-j}, p_{-j}^+, p_{-j}^-) \\ \mathcal{R}(j^*) &= \mathcal{R}(j^*, n_j, \alpha_j, \delta_j, p_j, p_j^+, p_j^-) \end{aligned}$$

con las propiedades siguientes:

- (A.1) Dados $z_1, z_2 \in Z_{i-1}$ tales que $|z_1| \geq |z_2|$ y $\mathcal{R}(z_1^*) \cap \mathcal{R}(z_2^*) \neq \emptyset$, entonces $|z_1| > |z_2|$ y $\mathcal{R}(z_1^*)$ está contenido en una de las dos componentes conexas de $\text{Int}(\mathcal{R}(z_2^*) \setminus A_{|z_2|}^{z_2^*})$.
- (A.2) Cada A_j es una pseudo-curva y tiene asociada un representante canónico $(\varphi_{A_j}, P_{A_j}) \in \mathfrak{C}$ donde $P_{A_j} = \mathbb{S}^1 \setminus Z_j^*$.
- (A.3) Para cada $j \neq 0$, los conjuntos A_j y A_{j-1} coinciden en el complemento de

$$\pi^{-1}(\text{Int}(\pi(\mathcal{R}(j^*))) \cup \text{Int}(\pi(\mathcal{R}((-j)^*)))).$$

(A.4) Para $z \in \{j, -j\}$ se tiene que $A_j \cap \pi^{-1}(\pi(\mathcal{R}(z^*))) = \Gamma\mathcal{R}(z^*)$.

(A.5) Además

(A.5.a) $2^{-n_j} < \delta_{j-1}$

(A.5.b) $(j+1)^*, (-(j+1))^*, (j+2)^*, (-(j+2))^* \notin \pi(\mathcal{R}(j^*)) \cup \pi(\mathcal{R}((-j)^*))$.

(A.5.c) $(j+3)^* \notin \pi(\mathcal{R}((-j)^*))$.

(A.5.d) $(\pi(\mathcal{R}((-j)^*)) - \omega) \cap \pi(\mathcal{R}(j^*)) = \emptyset$

(A.5.e) Si para algún $k \in Z_{j-1}^*$ se tiene que

$$\pi(\mathcal{R}(k)) \cap (\pi(\mathcal{R}((-j)^*)) - \omega) \neq \emptyset$$

entonces $(\pi(\mathcal{R}((-j)^*)) - \omega)$ está contenido en una de las dos componentes conexas de $\text{Int}(\pi(\mathcal{R}(k)) \setminus k)$.

(A.5.f) Para cada $i \in Z_{j-1}$ se tiene que $(\partial(\pi(\mathcal{R}(i^*))) + \omega) \cap \mathcal{R}(k^*) = \emptyset$ para toda k tal que $|k| \geq |i| + 1$.

Ahora sea $z \in \{i, -i\}$. Como $z^* \notin Z_{i-1}^*$, en virtud de la propiedad (A.2), $A_{i-1}^{z^*}$ es un único punto que denotaremos por $p_z = \{(z^*, a_z)\}$.

Tomemos ahora $n_i \in \mathbb{N}$ y $\alpha_i \in \mathbb{R}$ de manera que $\alpha_i < 2^{-n_i} < \delta_{i-1}$ y se cumplen las siguientes propiedades para $z = i$ y para $z = -i$. En primer lugar $z^* + \alpha_i, z^* - \alpha_i \notin O^*(\omega)$, para toda $u \in Z_{i-1}$ se tiene $u^* \notin [z^* - \alpha_i, z^* + \alpha_i]$ y $A_{i-1} \cap \pi^{-1}([z^* - \alpha_i, z^* + \alpha_i]) \subset (a_z - 2^{-n_i}, a_z + 2^{-n_i})$.

Si $p_z \notin \mathcal{R}(u)$ para toda $u \in Z_{i-1}^*$, tomamos α_i de manera que además, $[z^* - \alpha_i, z^* + \alpha_i] \cap \pi(\mathcal{R}(u)) = \emptyset$ para toda $u \in Z_{i-1}$. En caso contrario existe $k \in Z_{i-1}$ tal que $p_z \in \mathcal{R}(k^*)$ y $|k|$ es maximal con estas propiedades. En este caso tomaremos α_i y n_i de manera que

$$[z^* - \alpha_i, z^* + \alpha_i] \times [a_z - 2^{-n_i}, a_z + 2^{-n_i}] \subset \text{Int}(\mathcal{R}(k^*) \setminus A_{i-1}^{k^*}).$$

Adicionalmente a las propiedades anteriores, tomemos α_i suficientemente pequeño para que, además, se cumpla

(I) $(i+1)^*, (-(i+1))^*, (i+2)^*, (-(i+2))^* \notin \pi(\mathcal{R}(i^*)) \cup \pi(\mathcal{R}((-i)^*))$.

(II) $(i+3)^* \notin \pi(\mathcal{R}((-i)^*))$.

(III) $(\pi(\mathcal{R}((-i)^*)) - \omega) \cap \pi(\mathcal{R}(i^*)) = \emptyset$

Observese que para todo entero $k \in Z_{i-1}$ se tiene $k^* \pm \alpha_k \notin O^*(\omega)$. Por tanto si $(-(i+1))^* \in [k^* - \alpha_k, k^* + \alpha_k]$ se tiene $(-(i+1))^* \in (k^* - \alpha_k, k^* + \alpha_k)$. Luego, tomando α_i suficientemente pequeño, se puede conseguir también

(IV) Si para algún $k \in Z_{i-1}^*$ se tiene que $\pi(\mathcal{R}(k)) \cap (\pi(\mathcal{R}((-i)^*)) - \omega) \neq \emptyset$ entonces $\pi(\mathcal{R}((-i)^*)) - \omega$ está contenido en una de las dos componentes conexas de $\text{Int}(\pi(\mathcal{R}(k)) \setminus k)$.

Por construcción, para $z \in \{i, -i\}$ se tiene $z^* + \alpha_i, z^* - \alpha_i \notin O^*(\omega)$ y, por la propiedad (A.2), $A_{i-1}^{z^* + \alpha_i}$ y $A_{i-1}^{z^* - \alpha_i}$ son un único punto que denotaremos por p_z^+ y p_z^- respectivamente.

Definimos entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{R}((-i)^*) &= \mathcal{R}((-i)^*, n_i, \alpha_i, \delta_i, p_{-i}, p_{-i}^+, p_{-i}^-) \\ \mathcal{R}(i^*) &= \mathcal{R}(i^*, n_i, \alpha_i, \delta_i, p_i, p_i^+, p_i^-)\end{aligned}$$

donde $\delta_i < \min\{\bar{\delta}(p_i^+, p_i^-), \bar{\delta}(p_{-i}^+, p_{-i}^-)\}$ y A_i de manera que

(a) Los conjuntos A_i y A_{i-1} coinciden en el complemento de

$$\pi^{-1}(\text{Int}(\pi(\mathcal{R}(i^*))) \cup \text{Int}(\pi(\mathcal{R}((-i)^*))))$$

(b) Para $z \in \{j, -j\}$ se tiene que $A_j \cap \pi^{-1}(\pi(\mathcal{R}(z^*))) = \Gamma\mathcal{R}(z^*)$.

Por tanto hemos construido conjuntos $\pi(\mathcal{R}((-i)^*)), \pi(\mathcal{R}(i^*))$ y A_i tales que las propiedades A.(1-5) se verifican para toda $j = 0, 1, \dots, i$. Esto termina la construcción inductiva de la sucesión A_i .

Lema 2.1.2 *La sucesión $\{n_i\}_{i=1}^\infty$ es estrictamente creciente y $\lim \text{diam } \mathcal{R}(i^*) = \lim \text{diam } \mathcal{R}((-i)^*) = 0$. Además, si $\{i_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{Z}$ es una sucesión estrictamente creciente en valor absoluto tal que $\mathcal{R}(i_{k+1}^*) \subset \mathcal{R}(i_k^*)$ para todo k , entonces*

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{R}(i_k^*)$$

se reduce a un solo punto.

Demostración. El hecho que la sucesión n_i es creciente se sigue de la propiedad (A.5.a) y de la definición de los conjuntos $\mathcal{R}(z^*)$:

$$2^{-n_{i+1}} < \delta_i < \alpha_i < 2^{-n_i}.$$

La afirmación siguiente se deduce de la Observación 2.1.1 (c) y del hecho de que la sucesión n_i es creciente. La última afirmación es inmediata a partir de lo dicho anteriormente. \square

Las siguientes observaciones son consecuencia inmediata de la definición de los conjuntos A_i y $\mathcal{R}(i^*)$, omitimos sus demostraciones por ser obvias.

Observación 2.1.3 *Los conjuntos $\mathcal{R}(i^*)$ y A_n cumplen:*

- (P.1) $A_n^{l^*} = A_{|l|}^{l^*}$ para todo $n > |l|$. En particular $A_n^{l^*}$ es un intervalo para todo $n > |l|$.
- (P.2) Si $\theta \in \text{Bd}(\pi(\mathcal{R}(i^*)))$ entonces $\theta, \theta + \omega \notin \pi(\mathcal{R}(k^*))$ para toda k tal que $|k| > |i|$ y se cumple $A_n^\theta = A_i^\theta$ y $A_n^{\theta+\omega} = A_i^{\theta+\omega}$ para toda $n > i$.
- (P.3) Cada A_n es una pseudo-curva y tiene asociada un representante canónico $(\varphi_{A_n}, P_{A_n}) \in \mathfrak{C}$ donde $P_{A_n} = \mathbb{S}^1 \setminus Z_n^*$. En particular A_n es pinchada en toda $\theta \in \mathbb{S}^1 \setminus Z_n^*$ y se denota por $A_n^\theta = \{(\theta, a_i(\theta))\}$. Además si $\theta \in [l^* - \delta_{|l|}, l^* + \delta_{|l|}]$ entonces

$$a_{|l|}(\theta) = a_{|l|-1}(l^*) + (-1)^{|l|} 2^{-n_{|l|}} \phi(\psi_l(\theta)).$$

- (P.4) Si $\gamma \notin \pi(\mathcal{R}(k^*))$ para toda $k \in \mathbb{N}$ tal que $N < |k| < L$ entonces $A_n^\gamma = A_{N_\gamma}^\gamma$ para toda $n \in \mathbb{N}$ tal que $N < n < L$.
- (P.5) Para toda i se cumple $A_i \cap \pi^{-1}(\pi(\mathcal{R}(i^*))) \subset \mathcal{R}(i^*)$.
- (P.6) Para toda $N \in \mathbb{N}$ se cumple $\cup_{i=1}^N \pi(\mathcal{R}(i^*)) \neq \mathbb{S}^1$.
- (P.7) Dada $j \in \mathbb{Z}$ para toda $\theta \in [j^* - \delta_{|j|}, j^* + \delta_{|j|}]$ se cumple

$$\mathcal{R}(j^*)^\theta = \{\theta\} \times [a_{|j|-1}(j^*) - 2^{-n_{|j|}} \beta(\psi_j(\theta)), a_{|j|-1}(j^*) + 2^{-n_{|j|}} \beta(\psi_j(\theta))].$$

El siguiente lema, nos da la propiedad más importante, para nosotros, que tienen los conjuntos A_i .

Lema 2.1.4 Para toda $i \in \mathbb{Z}$ tenemos que $A_k \cap \pi^{-1}(\pi(\mathcal{R}(i^*))) \subset \mathcal{R}(i^*)$ si $k \geq |i| - 1$.

*Demuestra*ción. Basta que observemos que si $\mathcal{R}(j^*) \cap \mathcal{R}(i^*) \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{R}(j^*) \subset \mathcal{R}(i^*)$ para $j \in \mathbb{Z}$ tal que $|i| \leq |j| \leq k$. \square

Lema 2.1.5 El conjunto A_i es una pseudo-curva para toda $i \in \mathbb{N}$.

*Demuestra*ción. Fijemos $i \in \mathbb{N}$, por la Observación 2.1.1,

$$A_i^{j^*} = \{j^*\} \times \left[a_{j^*} - \frac{1}{2^{n_j}}, a_{j^*} + \frac{1}{2^{n_j}} \right]$$

para toda $j \in \mathbb{N}$ tal que $|j| \leq |i|$.

Por otro lado, por (P.3) en la Observación 2.1.3, tenemos que la fibra sobre toda $\theta \neq j^*$ tal que $|j| \leq i$, es un punto.

Ahora, sea $P_{A_i} = \{\theta \in \mathbb{S}^1 : \theta \neq j^*, |j| \leq i\}$, entonces por (P.3) en la Observación 2.1.3 cada A_i es la clausura de una función continua de $\mathbb{S}^1 \setminus Z_i^*$ en $[-2, 2]$. Lo anterior implica que A_i es una pseudo-curva. \square

Ahora demostraremos unos resultados que nos serán de utilidad para la demostración del Teorema 2.1.10.

Lema 2.1.6 Sean $i \in \mathbb{Z}$ y $\theta \in \text{Int}(\pi(\mathcal{R}(i^*)))$. Entonces, $A^\theta \subset \mathcal{R}(i^*)$.

*Demuestra*ción. Por el Lema 1.1.6, para cada $(\theta, a) \in A$ existe una sucesión $\{(\theta_n, x_n)\}$ con $(\theta_n, x_n) \in A_n$ tal que $\lim(\theta_n, x_n) = (\theta, a)$. En particular $\lim \theta_n = \theta$ y como $\theta_n \in \text{Int}(\pi(\mathcal{R}(i^*)))$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\theta_n \in \pi(\mathcal{R}(i^*))$ para toda $n \geq N$. Por el Lema 2.1.4, $A_n^{\theta_n} \subset \mathcal{R}(i^*)$ para todo $n \geq N$. Consecuentemente, $(\theta, a) \in \mathcal{R}(i^*)$ dado que $\mathcal{R}(i^*)$ es cerrado. \square

Lema 2.1.7 Sea $\theta \in \mathbb{S}^1$ para el cual existe $N_\theta \in \mathbb{N}$ tal que $A_n^\theta = A_{N_\theta}^\theta$ para toda $n \geq N_\theta$. Entonces $A^\theta = A_{N_\theta}^\theta$.

*Demuestra*ción. Por el Lema 1.1.6 tenemos que $A_{N_\theta}^\theta \subset A^\theta$. Para demostrar la inclusión contraria consideraremos dos casos.

Case 2.1. 1 $\theta = l^* \in O^*(\omega)$ para algún $l \in \mathbb{Z}$.

En este caso podemos tomar $N_\theta = |l|$ y tenemos que $\theta \in \text{Int}(\mathcal{R}(l^*))$. Por el Lema 2.1.6, $A^\theta \subset \pi^{-1}(\{l^*\}) \cap \mathcal{R}(l^*) = A_{|l^*|}^{l^*}$.

Case 2.2. 2 $\theta \notin O^*(\omega)$.

Entonces en virtud de la Observación 2.1.3 (P. 3), existe $a \in I$ tal que $A_{N_\theta}^\theta = \{(\theta, a)\}$. Demostraremos que $(\theta, b) \notin A^\theta$ para todo $(\theta, b) \neq (\theta, a)$. Fijemos $(\theta, b) \neq (\theta, a)$ y sea $\beta = d(b, a)$.

Si $(\theta, a) \in \mathcal{R}(k^*)$ para una infinidad de k 's, por la Observación 2.1.3 (P. 2), existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $(\theta, a) \in \mathcal{R}(m^*)$, $\theta \in \text{Int}(\pi(\mathcal{R}(m^*)))$ y $\text{diam}(\mathcal{R}(m^*)) < \frac{\beta}{2}$ (y, por tanto, $(\theta, b) \notin \mathcal{R}(m^*)$). Por el Lema 2.1.6, $A^\theta \subset \mathcal{R}(m^*)$ y, por tanto, $(\theta, b) \notin A^\theta$.

Supongamos ahora que existe un numero finito de enteros k tales que $(\theta, a) \in \mathcal{R}(k^*)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que N_θ es mayor que el valor absoluto de dichos enteros k , y sea $M > N_\theta$ tal que $2^{-(n_M-1)} < \frac{\beta}{4}$ (dicho M existe en virtud del Lema 2.1.2).

En virtud de la Observación 2.1.1(4) y de la Observación 2.1.3 (P.6),

$$\tilde{S} := \left(\bigcup_{i=0}^M \{i^*, (-i)^*\} \right) \cup \left(\bigcup_{N_\theta < |j| < M} \pi(\mathcal{R}(j^*)) \right)$$

es un cerrado propio de \mathbb{S}^1 y, por hipótesis, $\theta \notin \tilde{S}$. Por tanto, existe un cerrado conexo V tal que $\theta \in \text{Int}(V)$ y $V \cap \tilde{S} = \emptyset$. Además en virtud de la Observación 2.1.3 (P. 3), $A_M \cap \pi^{-1}(V)$ es un arco de curva continua que contiene al punto (θ, a) . Adicionalmente, reduciendo V si es necesario, podemos suponer que

$$\pi^{-1}(V) \cap A_M \subset V \times \left[a - \frac{\beta}{4}, a + \frac{\beta}{4} \right].$$

Queremos demostrar que

$$A_n^\gamma \subset \{\gamma\} \times \left[a - \frac{\beta}{2}, a + \frac{\beta}{2} \right]$$

para toda $\gamma \in V$ y $n \geq M$.

Sea $\gamma \in V$. Si $\gamma \notin \pi(\mathcal{R}(k^*))$ para toda k tal que $|k| \geq M$, entonces en virtud de la Observación 2.1.3 (P. 4) $A_n^\gamma \subset \{\gamma\} \times \left[a - \frac{\beta}{4}, a + \frac{\beta}{4} \right]$ para toda $n \geq M$.

En caso contrario, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $|m| \geq M$, $\gamma \in \pi(\mathcal{R}(m^*))$ y $|m|$ es minimal con estas propiedades. De la Observación 2.1.3 (P. 4) $A_n^\gamma = A_M^\gamma$ para $n = M, M+1, \dots, |m|-1$. Consecuentemente, por el Lema 2.1.4, $A_n^\gamma \subset \mathcal{R}(m^*)$ para todo $n \geq M$. Además, por el Lema 2.1.2,

$$\text{diam}(A_n^\gamma) \leq \text{diam}(\mathcal{R}(m^*)) \leq 2^{-(n_{|m|}-1)} < 2^{-(n_M-1)} < \frac{\beta}{4}.$$

Por consiguiente, dado que $A_M^\gamma \subset \{\gamma\} \times \left[a - \frac{\beta}{4}, a + \frac{\beta}{4} \right] \cap \mathcal{R}(m^*)$, se tiene

$$A_n^\gamma \subset \{\gamma\} \times \left[a - \frac{\beta}{2}, a + \frac{\beta}{2} \right]$$

para toda $n \geq M$. Esto termina la demostración de la afirmación anterior.

Por el Lema 1.1.6, todo punto de A^θ es límite de una sucesión $\{(\gamma_n, x_n)\}_{n=1}^\infty$ tal que $(\gamma_n, x_n) \in A_n$ para toda n . Claramente existe $\tilde{M} \geq M$ tal que $\gamma_n \in V$ para toda $n \geq \tilde{M}$. Luego,

$$(\gamma_n, x_n) \in A_n^{\gamma_n} \subset \{\gamma_n\} \times \left[a - \frac{\beta}{2}, a + \frac{\beta}{2}\right] \subset V \times \left[a - \frac{\beta}{2}, a + \frac{\beta}{2}\right]$$

para toda $n \geq \tilde{M}$. Dado que $V \times \left[a - \frac{\beta}{2}, a + \frac{\beta}{2}\right]$ es cerrado, se tiene $A^\theta \subset \{\theta\} \times \left[a - \frac{\beta}{2}, a + \frac{\beta}{2}\right]$, con lo cual $(\theta, b) \notin A^\theta$. \square

Tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.1.8 *La sucesión $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ es convergente en 2^Ω .*

*Demuestra*cción. Para cada $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sea (φ_{A_i}, P_{A_i}) el representante canónico de la pseudo-curva A_i . Mostraremos que la sucesión $\{(\varphi_{A_i}, P_{A_i})\}_{i=0}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en \mathfrak{C} , por que lo que calcularemos $d_\infty(\varphi_{A_{i-1}}, \varphi_{A_i})$.

$$d_\infty(\varphi_{A_{i-1}}, \varphi_{A_i}) = \max_{\theta \in P_{A_i} \cap P_{A_{i-1}}} |\varphi_{A_{i-1}}(\theta) - \varphi_{A_i}(\theta)|$$

Por (A.3) $\varphi_{A_{i-1}}(\theta) = \varphi_{A_i}(\theta)$ si

$$\theta \in \mathbb{S}^1 \setminus (\pi^{-1}(\text{Int}(\pi(\mathcal{R}(i^*))) \cup \text{Int}(\pi(\mathcal{R}((-i)^*))))).$$

En virtud del Lema 2.1.4,

$$A_i \cap \pi^{-1}(\pi(\mathcal{R}(k^*))) \subset \mathcal{R}(k^*) \text{ y } A_{i-1} \cap \pi^{-1}(\pi(\mathcal{R}(k^*))) \subset \mathcal{R}(k^*)$$

para $k \in \{i, -i\}$. Por lo que toda

$$|\varphi_{A_{i-1}}(\theta) - \varphi_{A_i}(\theta)| < \text{diam}(\mathcal{R}(i^*)) = 2^{-n_i},$$

si

$$\theta \in \pi^{-1}(\text{Int}(\pi(\mathcal{R}(i^*))) \cup \text{Int}(\pi(\mathcal{R}((-i)^*))))$$

de donde

$$d_\infty(\varphi_{A_{i-1}}, \varphi_{A_i}) < 2^{-n_i}.$$

Concluimos entonces que

$$\{(\varphi_{A_i}, P_{A_i})\}_{i=0}^\infty$$

es una sucesión de Cauchy y por el Lema 1.2.19 convergente. Por lo tanto por el Lema 1.2.14 la sucesión $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ es convergente. \square

Concluimos esta subsección con la siguiente definición.

Definición 2.1.9 *Denotamos por A al límite de la sucesión A_i en 2^Ω .*

2.1.2. Demostración del Teorema 2.1.10.

El siguiente teorema, sumariza las propiedades fundamentales del conjunto A . El Teorema 2.1.10 es central en este capítulo.

Teorema 2.1.10 *El conjunto A es una pseudo-curva conexa que no contiene arcos de curva.*

Demostración. Por el Lema 2.1.8 A es una pseudo-curva, por lo que solo debemos mostrar que es conexa. Por el Lema 1.3.3 bastará ver que A^θ es conexo para todo $\theta \in \mathbb{S}^1$. Si $\theta \in P_A$ Por ser A una pseudo-curva, $|A^\theta| = 1$ y por lo tanto A^θ es conexo. Si $\theta \notin P_A$ entonces $\theta = l^*$ para cierto $l \in \mathbb{Z}$. Por el Lema 2.1.7 A^{l^*} es un intervalo y es por tanto conexo.

Probaremos finalmente que A no contiene segmentos de curva. Supongamos que existen U un abierto conexo en \mathbb{S}^1 y una función continua $\rho: U \rightarrow I$ tal que $\text{Grafo}(\rho) \subset A$. Como $O^*(\omega)$ es denso en \mathbb{S}^1 , podemos tomar $l^* \in U, l \in \mathbb{Z}$. Dado que $\text{Grafo}(\rho)$ es un arco de curva se verifican las siguientes dos propiedades. Primero, $\rho(l^*) \cap A^{l^*}$ es un solo en punto que denotamos por (l^*, x_{l^*}) . Segundo, para toda sucesión $\{\theta_n\} \subset G \cap U$ tal que $\lim \theta_n = l^*$, se cumple que $\lim(\theta_n, \rho(\theta_n)) = (l^*, x_{l^*})$. Por otro lado, como A es núcleo tenemos que $(l^*, a) \in A$ si y solo si $(l^*, a) = \lim(\theta_n, a_n)$ para una sucesión $\{(\theta_n, a_n)\} \subset A$ tal que $\{\theta_n\} \subset G$. Como A es pinchado en G , tenemos $A^\theta = \text{Grafo}(\rho)^\theta = \{(\theta, \rho(\theta))\}$ para toda $\theta \in U \cap G$. Obtenemos así que $A^{l^*} = \{(l^*, x_{l^*})\}$ contradiciendo el hecho observado anteriormente que $A^{l^*} = A_{|l|}^{l^*}$ que, por construcción, es un intervalo no degenerado. Esto termina la demostración del Teorema. \square

2.2. La Función

2.2.1. Preliminares

Las siguientes definiciones, las podemos enunciar en virtud de (A. 5.a).

Definición 2.2.1 *Sea $i \in \mathbb{N}$. Definimos $g_{-i} : \mathcal{R}((-i)^*) \rightarrow \mathcal{R}((-i+1)^*)$ en tres diferentes casos:*

1. g_{-i}^θ es la función $\lambda(\theta)(-1)2^{n_i-n_{i-1}}(x - a_i(\theta)) + a_{i-1}(\theta + \omega)$ si $\theta \in [(-i)^* - \alpha_i, (-i)^* - \delta_i]$.
2. g_{-i}^θ es la función $(-1)2^{n_i-n_{i-1}}(x - a_{i-1}((-i)^*) + a_{i-2}((-i)^* + 1)$ si $\theta \in [(-i)^* - \delta_i, (-i)^* + \delta_i]$.
3. g_{-i}^θ es la función $\lambda(\theta)(-1)2^{n_i-n_{i-1}}(x - a_i(\theta)) + a_{i-1}(\theta + \omega)$ si $\theta \in ((-i)^* + \delta_i, (-i)^* + \alpha_i]$.

Para 1 y 3 $\lambda(\theta) : [(-i)^* - \alpha_i, (-i)^* - \delta_i] \cup [(-i)^* + \delta_i, (-i)^* + \alpha_i] \rightarrow [0, 1]$ es una función continua que en los valores frontera, cumple $\lambda((-i)^* \pm \delta_i) = 1$, $\lambda((-i)^* \pm \alpha_i) = 0$ y en los otros puntos

$$\lambda(\theta) < \min \left\{ \frac{a_{i-1}^-(\theta + \omega) - a_{i-1}(\theta + \omega)}{(2^{n_i-n_{i-1}})(a_i^+(\theta) - a_i(\theta))}, \frac{a_{i-1}^+(\theta + \omega) - a_{i-1}(\theta + \omega)}{(2^{n_i-n_{i-1}})(a_i^-(\theta) - a_i(\theta))} \right\}.$$

donde $\mathcal{R}((-i)^*)^\theta = [a_i^+(\theta), a_i^-(\theta)]$ y $\mathcal{R}((-i+1)^*)^{\theta+\omega} = [a_{i-1}^+(\theta + \omega), a_{i-1}^-(\theta + \omega)]$.

Definición 2.2.2 *Sea $i \in \mathbb{N}$. Definimos $g_i : \mathcal{R}(i^*) \rightarrow \mathcal{R}((i+1)^*)$ en cinco diferentes casos*

1. g_i^θ es la función constante al punto $a_{i+1}(\theta + \omega)$ si $\theta \in [i^* - \alpha_i, i^* - \alpha_{i+1}]$.
2. g_i^θ es la aplicación connected the dots map que envía $\partial(\mathcal{R}(i^*))$ en $\partial(\mathcal{R}((i+1)^*))$ invirtiendo orientación y $a_i(\theta)$ en $a_{i+1}(\theta + \omega)$ si $\theta \in (i^* - \alpha_{i+1}, i^* - \delta_{i+1})$
3. g_i^θ es $(-1)2^{n_i - n_{i+1}}(x - a_{i-1}(i^*)) + a_i((i+1)^*)$ si $\theta \in [i^* - \delta_{i+1}, i^* + \delta_{i+1}]$
4. g_i^θ es la aplicación connected the dots map que envía $\partial(\mathcal{R}(i^*))$ en $\partial(\mathcal{R}((i+1)^*))$ invirtiendo orientación y $a_i(\theta)$ en $a_{i+1}(\theta + \omega)$ si $\theta \in (i^* + \delta_{i+1}, i^* + \alpha_{i+1})$
5. g_i^θ es la función constante al punto $a_{i+1}(\theta + \omega)$ si $\theta \in [i^* + \alpha_{i+1}, i^* + \alpha_i]$.

Notemos que 1 y 5 se pueden definir, pues en virtud de (A. 2) y (A. 5.b) el conjunto $A_{i+1} \cap \pi^{-1}((\pi(\mathcal{R}(i^*)) + \omega) \setminus \pi(\mathcal{R}((i+1)^*)))$ es una curva.

Demostraremos ahora el Lema 2.2.3

Lema 2.2.3 *Sea $i \in \mathbb{N}$. Las funciones g_{-i} y g_i cumplen:*

(-i.1) *El conjunto $\pi^{-1}([(-i)^* - \delta_i, (-i)^* + \delta_i]) \cap \mathcal{R}((-i)^*)$ es homeomorfo al conjunto*

$$\pi^{-1}([(-i+1)^* - \delta_i, (-i+1)^* + \delta_i]) \cap \mathcal{R}((-i+1)^*)$$

mediante la función g_{-i} que dilata uno en el otro.

(-i.2) *El conjunto $g_{-i}(\pi^{-1}([(-i)^* - \alpha_i, (-i)^* - \delta_i]) \cap \mathcal{R}((-i)^*))$ es un subconjunto propio de*

$$\pi^{-1}([(-i+1)^* - \alpha_i, (-i+1)^* - \delta_i]) \cap \mathcal{R}((-i+1)^*).$$

El conjunto $g_{-i}(\pi^{-1}([(-i)^ + \delta_i, (-i)^* + \alpha_i]) \cap \mathcal{R}((-i)^*))$ es un subconjunto propio de*

$$\pi^{-1}([(-i+1)^* + \delta_i, (-i+1)^* + \alpha_i]) \cap \mathcal{R}((-i+1)^*).$$

(-i.3) $g_{-i}(A_i \cap \pi^{-1}(\pi(\mathcal{R}((-i)^*)))) = A_{i-1} \cap \pi^{-1}(\pi(\mathcal{R}((-i)^*)) + \omega)$.

(i.1) *El conjunto $\pi^{-1}([i^* - \delta_{i+1}, i^* + \delta_{i+1}] \cap \mathcal{R}(i^*))$ es homeomorfo al conjunto*

$$\pi^{-1}([(i+1)^* - \delta_{i+1}, (i+1)^* + \delta_{i+1}]) \cap \mathcal{R}((i+1)^*)$$

mediante la función g_i que dilata uno en el otro.

(i.2) *El conjunto $\pi^{-1}([i^* - \alpha_{i+1}, i^* - \delta_{i+1}]) \cap \mathcal{R}(i^*)$ es homeomorfo a*

$\pi^{-1}([(i+1)^* - \alpha_{i+1}, (i+1)^* - \delta_{i+1}]) \cap \mathcal{R}((i+1)^*)$ mediante la función g_i .

El conjunto $\pi^{-1}([i^ + \delta_{i+1}, i^* + \alpha_{i+1}]) \cap \mathcal{R}(i^*)$ es homeomorfo a*

$\pi^{-1}([(i+1)^* + \delta_{i+1}, (i+1)^* + \alpha_{i+1}]) \cap \mathcal{R}((i+1)^*)$ mediante la función g_i .

(i.3) $g_i(A_i \cap \pi^{-1}(\pi(\mathcal{R}(i^*)))) = A_{i+1} \cap \pi^{-1}(\pi(\mathcal{R}(i^*)) + \omega)$.

y en particular son continuas.

Demostración. La demostración de (-i,1) la hacemos de la siguiente manera. Primero observemos que como $\theta \in [(-i) - \delta_i^*, (-i) + \delta_i^*]$ en consecuencia $\theta + \omega \in [(-i+1) - \delta_i^*, (-i+1) + \delta_i^*]$.

Ahora bien, de la Observación 2.1.3.7 y de que las funciones coordenadas son funciones lineales, basta demostrar que los extremos de $\mathcal{R}((-i)^*)^\theta$ son enviados a los de $\mathcal{R}((-i+1)^*)^{\theta+\omega}$.

Aplicando la función al extremo $a_{i-1}((-i)^*) - 2^{-n_i} \beta(\psi_{-i}(\theta))$, tendremos que

$$g_{-i}^\theta(a_{i-1}((-i)^*) - 2^{-n_i} \beta(\psi_{-i}(\theta))) = 2^{-n_{i-1}} \beta(\psi_{-i}(\theta)) + a_{i-2}((-i+1)^*).$$

Por hipótesis $\beta(\psi_{-i}(\theta)) = \beta(\psi_{-i+1}(\theta + \omega))$ en consecuencia, la imagen de dicho extremo es $a_{i-2}((-i+1)^*) + 2^{-n_{i-1}} \beta(\psi_{-i+1}(\theta + \omega))$. Procediendo de manera análoga para el otro extremo tendremos lo que deseábamos demostrar.

De la definición de g_{-i} es inmediato que para demostrar $(-i,3)$, solo resta ver

$$g_{-i}(\pi^{-1}([(-i)^* - \delta_i, (-i)^* + \delta_i]) \cap A_i) = \pi^{-1}([(-i+1)^* - \delta_i, (-i+1)^* + \delta_i]) \cap A_{i-1}.$$

Es inmediato que $g_{-i}(A_i^{(-i)^*}) = A_{i-1}^{(-i+1)^*}$ por lo que supondremos $\theta \in [(-i)^* - \delta_i, (-i)^* + \delta_i] \setminus \{(-i)^*\}$. Tenemos pues que

$$(\theta, a_i(\theta)) = (\theta, a_{i-1}((-i)^*) + (-1)^i 2^{-n_i} \phi(\psi_{-i}(\theta))),$$

por lo tanto $g_i^\theta(a_i(\theta)) = (-1)^{i+1} 2^{-n_{i-1}} \phi(\psi_{-i}(\theta)) + a_{i-2}((-i+1)^*)$ pero por hipótesis $\psi_{-i}(\theta) = \psi_{-i+1}(\theta + \omega)$ de donde $g_i^\theta(a_i(\theta)) = a_{i-1}(\theta + \omega)$.

Para $(-i,2)$, hemos visto que $g_{-i}^\theta(a_i(\theta)) = a_{i-1}(\theta + \omega)$ por lo que podemos reescribir la función g_{-i}^θ así

$$g_{-i}^\theta(x) = (-1) 2^{n_i - n_{i-1}} (x - a_{i-1}) + a_{i-2}(\theta + \omega),$$

lo cual nos muestra que las contenciones se cumplen y también la continuidad de g_{-i} .

La demostración de $(i,1)$ y la de $(i,3)$ son análogas a la manera en que demostramos $(-i,1)$ y $(-i,3)$. La demostración de $(i,2)$ se sigue de que g_i^θ es una función lineal a dos trozos. Finalmente, la continuidad de g_i se sigue de que las funciones lineales a dos trozos tienen como límite, por un lado la función lineal definida en los extremos del intervalo central $[i^* - \delta_{i+1}, i^* + \delta_{i+1}]$ y en los otros, tiene como límite la función constante definida en

$$\pi(\mathcal{R}(i^*)) \setminus [i^* - \alpha_{i+1}, i^* + \alpha_{i+1}]. \quad \square$$

2.2.2. Definición y Propiedades

Definición 2.2.4 Dada $l \in \mathbb{Z}$, diremos que $\mathfrak{A}(\mathcal{R}(l^*)) = k$ si $\mathcal{R}(l^*)$ está contenido en exactamente k conjuntos $\mathcal{R}(j^*)$, $l \neq j$ por lo que $|j| < |l|$. Definiremos $\mathfrak{Z}_k = \{i \in \mathbb{Z} : \mathfrak{A}(\mathcal{R}(i^*)) = k\}$ y \mathfrak{z}_k será el elemento con valor absoluto mínimo en \mathfrak{Z}_k .

La siguiente observación es inmediata.

Observación 2.2.5 La sucesión $\{\mathfrak{z}_k\}_{k=0}^\infty$ cumple que $\lim \mathfrak{z}_k = \infty$

Diremos que $B_k = \bigcup_{i \in \mathfrak{Z}_k} \pi(\mathcal{R}(i^*))$

Lema 2.2.6 *El conjunto B_k es denso en \mathbb{S}^1 para toda $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

Demostración. Demostraremos este lema por inducción. Es inmediato que B_0 es denso pues $O^*(\omega)$ es denso y $O^*(\omega) \subset B_0$. Supongamos ahora que B_n es denso en \mathbb{S}^1 . Demostraremos que B_{n+1} es también denso.

Observemos primero que para toda $i \in \mathbb{Z}$ tenemos que

$$\overline{(\pi(\mathcal{R}(i^*)) \cap O^*(\omega)) \setminus \{i^*\}} = \pi(\mathcal{R}(i^*)).$$

Sea $i \in \mathfrak{Z}_n$ y $j^* \in (\pi(\mathcal{R}(i^*)) \cap O^*(\omega)) \setminus \{i^*\}$ entonces $j^* \in B_{n+1}$ por lo tanto $B_n \subset \overline{B_{n+1}}$ y entonces $\overline{B_{n+1}} = \mathbb{S}^1$. \square

Notación 2.2.7 *Fijado un conjunto $\mathcal{R}(i^*)$, para cada $\theta \in \pi(\mathcal{R}(i^*))$ diremos que $\mathcal{R}(i^*)^\theta = \{\theta\} \times [m_i(\theta), M_i(\theta)]$, escribimos*

$$I_\theta = [-2, m_i(\theta)] \cup [m_i(\theta), M_i(\theta)] \cup [M_i(\theta), 2].$$

En particular m_i, M_i son funciones continuas y $m_i, M_i : \pi(\mathcal{R}(i^*)) \rightarrow I$.

Definiremos inductivamente una sucesión de funciones $F_n : \Omega \rightarrow \Omega$.

Definimos F_0 como:

- (F_{0.1}) F_0^θ es la aplicación *connected the dots map* que envia -2 a 2 , $a(\theta)$ a $a(\theta + \omega)$ y 2 a -2 si $\theta \in \mathbb{S}^1 \setminus B_0$
- (F_{0.2}) F_0^θ es la función lineal a tres o a dos trozos, tal que $F_0^\theta(2) = -2$, $F_0^\theta(-2) = 2$ y $F_0^\theta(x) = g_j^\theta(x)$ para toda $(\theta, x) \in \mathcal{R}(j^*)^\theta$, donde $\theta \in B_0$ y $j \in \mathfrak{Z}_0$ es el único entero tal que $\theta \in \pi(\mathcal{R}(j^*))$.

Suponiendo que hemos construido la función $F_n : \Omega \rightarrow \Omega$ definiremos la función

$$F_{n+1}(\theta, x) = \begin{cases} F_n(\theta, x), & (\theta, x) \notin \pi^{-1}(B_{n+1}) \\ g_i(\theta, x) & (\theta, x) \in \mathcal{R}(i^*), i \in \mathfrak{Z}_{n+1} \\ \frac{2-g_i((\theta, m_i(\theta)))}{2-F_n((\theta, m_i(\theta)))} (F_n(\theta, x) - 2) + 2 & \theta \in \pi(\mathcal{R}(i^*)), (\theta, x) \in [-2, m_i(\theta)] \\ \frac{2+g_i((\theta, M_i(\theta)))}{2+F_n((\theta, M_i(\theta)))} (F_n(\theta, x) + 2) - 2 & \theta \in \pi(\mathcal{R}(i^*)), (\theta, x) \in [M_i(\theta), 2] \end{cases}$$

Claramente $F_n \in \mathcal{T}$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Lema 2.2.8 *La sucesión de funciones F_n cumple las propiedades*

- (a) *Cada F_n es una función continua.*
- (b) *Cada F_n^θ es una función lineal a trozos y monótona decreciente.*
- (c) *La sucesión $\{F_n\}_{n=0}^\infty$ es convergente.*

Demostración. La continuidad de las F_n la mostramos por inducción.

Dado que F_0^θ es continua para toda $\theta \in \mathbb{S}^1$ para demostrar que F_0 es continua basta ver que para toda sucesión θ_n convergente a θ se tiene que $F_0^{\theta_n}$ converge uniformemente a F_0^θ .

Si $\theta \in \text{Int}(B_0)$, existe $i \in \mathfrak{Z}_0$ de manera que $\theta \in \text{Int}(\pi(\mathcal{R}(i^*)))$. Entonces, para toda sucesión $\{\theta_n\}_{n=1}^\infty$ tal que $\lim \theta_n = \theta$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\theta_n \in \pi(\mathcal{R}(i^*))$ para toda $n \geq N$, en virtud de la definición de F_0 , tenemos que $F_0|_{\pi^{-1}(\pi(\mathcal{R}(i^*)))}$ es continua, en consecuencia $F_0^{\theta_n}$ converge uniformemente a F_0^θ .

Si $\theta \notin \text{Int}(B_0)$ observemos primero que si $\theta \in \partial(\pi(\mathcal{R}(i^*)))$ para alguna $i \in \mathfrak{Z}_0$ y consideramos solo sucesiones θ_n contenidas en $\text{Int}(\pi(\mathcal{R}(i^*)))$ tenemos que por la definición de $F_0|_{\pi^{-1}(\pi(\mathcal{R}(i^*)))}$ se cumple que $\lim F_0^{\theta_n} = F_0^\theta$ la cual es una función lineal a dos trozos.

Ahora en virtud de Lema 2.2.6 $\text{Int}(B_0)$ es denso. Entonces, calcularemos las funciones límite en $\Omega \setminus \pi^{-1}(\text{Int}(B_0))$ y veremos que coinciden con la definición de F_0 en dicho conjunto.

Sea $\theta \in \mathbb{S}^1 \setminus \text{Int}(B_0)$ y $\theta_n \in \text{Int}(B_0)$ tal que $\lim \theta_n = \theta$. En virtud de que $\theta_n \in \text{Int}(B_0)$ tenemos $\theta_n \in \pi(\mathcal{R}((j_n)^*))$ para algún $j_n \in \mathfrak{Z}_0$. Por otro lado, por la observación anterior y de que $\theta \notin B_0$ podemos suponer que $\lim |j_n| = \infty$ consecuentemente $\lim \text{diam}(\mathcal{R}((j_n)^*)) = 0$.

Veamos ahora que $d(F_0^\theta, F_0^{i^*}) \leq 2 \cdot \text{diam}(\mathcal{R}((i+1)^*)) = 4 \cdot 2^{n_{i+1}}$, para toda $i \in \mathfrak{Z}_0$ y $\theta \in \pi(\mathcal{R}(i^*))$. En virtud de que $\theta \in \pi(\mathcal{R}(i^*))$ la gráfica de g_i^θ está contenida en el cuadrado $\mathcal{R}(i^*)^{i^*} \times \mathcal{R}((i+1)^*)^{(i+1)^*}$, un simple cálculo muestra

$$F_0^{i^*}(x) - 4 \cdot 2^{n_{i+1}} \leq F_0^\theta(x) \leq F_0^{i^*}(x) + 4 \cdot 2^{n_{i+1}}$$

para toda x , pues las gráficas de éstas funciones intersectan a dicho cuadrado en un solo punto, consecuentemente $d(F_0^\theta, F_0^\gamma) \leq 4 \cdot 2^{n_{i+1}}$, para toda $\theta, \gamma \in \pi(\mathcal{R}(i^*))$.

Ahora demostramos que $\lim F_0^{\alpha_n} = F_0^\theta$ donde $\alpha_n \in \partial(\pi(\mathcal{R}(j_n^*)))$ para toda j_n . En virtud de la Propiedad (A. 5f), la gráfica de $F_0^{\alpha_n}$ son dos trozos de recta con intersección en $(a(\alpha_n), a(\alpha_n + \omega))$. Entonces, en virtud de (P.2) en la Observación 2.1.3 y el Lema 2.1.7, tenemos que A es pinchado en los puntos en cuestión y tenemos que $\lim(a(\alpha_n), a(\alpha_n + \omega)) = (a(\theta), a(\theta + \omega))$ y $\lim F_0^{\alpha_n} = F_0^\theta$ será una función lineal a dos trozos, de donde $\lim F_0^{\alpha_n} = F_0^\theta$.

Así pues, dado que $d(F_0^{\theta_n}, F_0^{\alpha_n}) \leq 4 \cdot 2^{n_{i+1}}$ y $n_{j_n} \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$ obtenemos el resultado deseado.

Suponiendo ahora que F_n es continua, demostraremos que F_{n+1} también lo es. Es claro que para toda $\theta \in \text{Int}(\pi(\mathcal{R}(j^*)))$ y $j \in \mathfrak{Z}_{n+1}$ la función F_{n+1}^θ es continua y toda sucesión que converge a θ totalmente contenida en $\pi(\mathcal{R}(j^*))$ cumple que la correspondiente sucesión de funciones converge a F_{n+1}^θ . Solo nos resta ver que pasa en la frontera de $\pi(\mathcal{R}(j^*))$. Tomemos $\theta_k \in \text{Int}(\pi(\mathcal{R}(j^*)))$ y $\lim \theta_k = \alpha_j \in \partial \pi(\mathcal{R}(j^*))$ entonces en virtud de que $j \in \mathfrak{Z}_{n+1}$ existe $i \in \mathfrak{Z}_n$ tal que $\mathcal{R}(j^*) \subset \mathcal{R}(i^*)$ como $(\alpha_j, M_j(\alpha_j)) = (\alpha_j, m_j(\alpha_j)) \in \mathcal{R}(i^*) \cap A_i$ tenemos que

$$\begin{aligned} g_j(\alpha_j, m_j(\alpha_j)) &= g_i(\alpha_j, M_j(\alpha_j)) = F_n(\alpha_j, m_j(\alpha_j)) \\ &= (\alpha_j, M_j(\alpha_j)) = g_i(\alpha_j, m_j(\alpha_j)) \\ &= g_j(\alpha_j, m_j(\alpha_j)) \end{aligned}$$

por la definición de F_n luego,

$$\begin{aligned}\lim F_n(\theta_k, m_i(\theta_k)) - g_i(\theta_k, m_i(\theta_k)) &= 0 \\ \lim F_n(\theta_k, M_i(\theta_k)) - g_i(\theta_k, M_i(\theta_k)) &= 0.\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\lim \frac{2 - g_i((\theta, m_i(\theta_k)))}{2 - F_n((\theta, m_i(\theta_k)))} (F_n(\theta_k, x) - 2) + 2 &= F_n(\alpha_i, x) \\ \lim \frac{2 + g_i((\theta_k, M_i(\theta_k)))}{2 + F_n((\theta_k, M_i(\theta_k)))} (F_n(\theta_k, x) + 2) - 2 &= F_n(\alpha_i, x),\end{aligned}$$

concluimos pues que la función F_{n+1} es continua.

Por otro lado, cada F_n^θ es monótona decreciente y lineal a pedazos por construcción.

Ahora demostraremos que la sucesión F_n converge.

Sea $i \in \mathfrak{Z}_{n+1}$, entonces la distancia entre F_n y F_{n+1} en $\pi^{-1}(\pi(\mathcal{R}(i^*)))$ será

$$\left| (F_n(\theta, x) - 2) \left(\frac{F_n((\theta, m_i(\theta))) - g_i((\theta, m_i(\theta)))}{2 - F_n((\theta, m_i(\theta)))} \right) \right|$$

si $x < m_i$,

$$\left| (F_n(\theta, x) + 2) \left(\frac{F_n((\theta, M_i(\theta))) - g_i((\theta, M_i(\theta)))}{2 + F_n((\theta, M_i(\theta)))} \right) \right|$$

si $x > M_i(\theta)$ y $|F_n(\theta, x) - g_i(\theta, x)|$ si $(\theta, x) \in \mathcal{R}(i^*)$.

Observemos que $|F_n((i^*, m_i(i^*))) - g_i((i^*, m_i(i^*)))|$ y $|F_n((i^*, M_i(i^*))) - g_i((i^*, M_i(i^*)))|$ son los valores máximos de las dos primeras distancias.

Se verifica entonces que $|F_n((i^*, m_i(i^*))) - g_i((i^*, m_i(i^*)))|$, $|F_n(\theta, x) - g_i(\theta, x)|$ y $|F_n((i^*, M_i(i^*))) - g_i((i^*, M_i(i^*)))|$ son menores que $\text{diam}(\mathcal{R}((j+1)^*)) = 2^{-n_{|j+1|}}$. Concluimos entonces que la sucesión es de Cauchy y por lo tanto convergente. \square

Definición 2.2.9 Denotamos por F al límite de la sucesión F_n .

Observemos que $F \in \mathcal{T}$ y que no es un homeomorfismo.

Teorema 2.2.10 La función $F : \Omega \rightarrow \Omega$ satisface que $F(A) = A$, y A es el único conjunto conexo compacto invariante por la función F . En particular, la función F no tiene curvas invariantes en Ω .

Demostración. Observemos que por definición, si $i \in \mathfrak{Z}_k$ entonces $F_n(A^{i^*}) = A^{(i+1)^*}$ para toda $n \geq k$, consecuentemente $F(A^{r^*}) = A^{(r+1)^*}$ para toda $r \in \mathbb{Z}$ y en virtud de que $\bigcup_{r \in \mathbb{Z}} A^{r^*}$ es denso en A , tenemos que $F(A) = A$.

Por último, como A es conexo y $\pi(A) = \mathbb{S}^1$, $\Omega \setminus A$ es desconexo. Como $F(A) = A$ dichas componentes conexas son imagen la una de la otra, de donde concluimos que si existiera una curva fija contenida en Ω ésta intersectaría a A y por lo tanto estaría contenida en A . Como A no contiene curvas, concluimos que no existen curvas fijas en Ω , bajo la función F . \square

En general las pseudo-curvas invariantes no son conexas. De manera similar a nuestra construcción, podemos exhibir pseudo-curvas invariantes (por una función $T \in \mathcal{T}$) que sean totalmente desconexas.

Referencias

1. Aubin Jean Pierre, Frankowska Hélène, *Set-Valued Analysis*, Birkhäuser Boston, 1990.
2. Alseda Lluís, Llibre Jaume, Misiurewicz Michał, *Combinatorial Dynamics and Entropy in Dimension One*, World Scientific, 2000.
3. G. Choquet, *Lectures on Analysis*, Vol I, Benjamin Inc., New York, 1989.
4. G. Choquet, *Topology*, Academic Press Inc., New York, 1966.
5. Illanes Alejandro y Nadler Sam B. , *Hyperspaces fundamentals and recent advances*, Marcel Dekker, Inc, 1999.
6. H. L. Royden, *Real Analysis*, Macmillan Company, New York, 1968.
7. Roberta Fabbri, Tobias Jäger, Russell Johnson y Gerhard Keller, *A Sharkovskii-type Theorem for Minimally Forced Interval Maps*. Topol. Methods Nonlinear Anal.26 (2005),no. 1, 163-188.
8. A. N. Sharkovskii, *Co-existence of the cycles of a continuous mapping of the line into itself (in Russian)*, Ukrain Math. Zh. 16 (1) (1964), 61–71.