



Projecte Fi de Carrera

Enginyeria Tècnica de Telecomunicació

Estudi comparatiu
dels filtres de Kalman i IMM
per a navegació

Andreu Comajuncosas Fortuño

Director: Gonzalo Seco Granados

Departament de Telecomunicació i Enginyeria de Sistemes

Escola d'Enginyeria
Universitat Autònoma de Barcelona

Febrer 2013



El sotasignant, *Gonzalo Seco Granados*, Professor de l'Escola d'Enginyeria de la Universitat Autònoma de Barcelona,

CERTIFICA:

Que el projecte presentat en aquesta memòria de Projecte Fi de Carrera ha estat realitzat sota la seva direcció per l'alumne *Andreu Comajuncosas Fortuño*.

I, perquè consti a tots els efectes, signa el present certificat.

Bellaterra, 28 de gener de 2013.

Signatura: *Gonzalo Seco Granados*

ÍNDEX

ÍNDEX DE FIGURES.....	7
GLOSSARI	9
1. OBJECTIUS.	11
1.1. PROPÒSIT.....	11
1.2. METODOLOGIA.....	12
1.3. ESTRUCTURA DE LA MEMÒRIA.....	12
2. SISTEMES HÍBRIDS DE NAVEGACIÓ.....	13
2.1. GPS.....	14
2.1.1. ELEMENTS DEL SISTEMA.....	14
2.1.2. NIVELLS DE SERVEI.....	16
2.1.3. SENYALS DELS SATÈL·LITS.....	17
2.1.4. CODIFICACIÓ.....	17
2.1.5. CÀLCUL DE LA POSICIÓ DEL RECEPTOR.....	18
2.1.6. FONTS D'ERROR.....	20
2.1.7. APLICACIONS.....	25
2.2. UNITAT DE MESURA INERCIAL.....	27
2.2.1. ACCELERÒMETRES.....	28
2.2.2. GIROSCOPIS.....	31
2.2.3. MAGNETÒMETRES.....	34
2.2.4. IMU INTEGRADES.....	36
3. FILTRES DE FUSIÓ I SUAVITZAT DE DADES.....	39
3.1. FILTRE DE KALMAN.....	39
3.2. FILTRE IMM.....	42
3.2.2. INTERACCIÓ DELS MODELS.....	45
3.2.3. FILTRATGE.....	45
3.2.4. ACTUALITZACIÓ DE LES PROBABILITATS.....	47
3.2.5. PREDICCIÓ D'ESTAT I COVARIÀNCIA.....	47
3.3. ALTRES FILTRES.....	48
4. COMPARACIÓ DE PRESTACIONS DELS FILTRES.....	51
4.1. TRAJECTÒRIA DEL VEHICLE.....	51
4.2. MESURES DELS SENSORS.....	53
4.3. PROVES DEL FILTRE DE KALMAN.....	56
4.4. PROVES DEL FILTRE IMM.....	61
4.5. COMPARACIÓ DELS FILTRES.....	71
5. CONCLUSIONS.....	81
5.1. RESULTATS.....	81
5.2. LÍNIES OBERTES.....	81
6. REFERÈNCIES.....	83
6.1. REFERÈNCIES PRINCIPALS.....	83
6.1.1. LLIBRES.....	83
6.2.2. REVISTES.....	83
6.2. REFERÈNCIES COMPLEMENTÀRIES.....	84
6.2.1. LLIBRES.....	84
6.2.2. REVISTES.....	84
6.2.3. LLOCS WEB.....	85
ANNEX: CODI.....	93
RESUM.....	105

ÍNDIX DE FIGURES

FIGURA 1. CONSTEL·LACIÓ DE SATÈL·LITS GPS [1]	14
FIGURA 2. DISTRIBUCIÓ DE SATÈL·LITS EN ELS PLANS ORBITALS [2]	15
FIGURA 3. XARXA D'ESTACIONS DE SEGUIMENT [2]	16
FIGURA 4. MODULACIÓ DEL MISSATGE DE NAVEGACIÓ [9]	17
FIGURA 5. ESTRUCTURA DEL MISSATGE DE NAVEGACIÓ [11]	18
FIGURA 6. POSICIÓ DEL RECEPTOR A PARTIR DE LES DISTÀNCIES ALS SATÈL·LITS [9]	19
FIGURA 7. DESVIACIÓ ATMOSFÈRICA DELS SENYALS GPS [13]	21
FIGURA 8. ERROR DE CAMÍ MÚLTIPLE [18]	22
FIGURA 9. PRECISIÓ DE LA POSICIÓ AMB SATÈL·LITS BEN SEPARATS [13]	24
FIGURA 10. DILUCIÓ DE LA PRECISIÓ QUAN ELS SATÈL·LITS SÓN ALINEATS [13]	24
FIGURA 11. BALANCEIG, CAPCINEIG I GUINYADA [28]	27
FIGURA 12. ESQUEMA GENERAL D'UN ACCELERÒMETRE [29]	28
FIGURA 13. ACCELERÒMETRE AMB LVDT [30]	29
FIGURA 14. ACCELERÒMETRE AMB GALGUES EXTENSOMÈTRIQUES [31]	30
FIGURA 15. ACCELERÒMETRE PIEZOELÈCTRIC [32]	31
FIGURA 16. PRINCIPI DE FUNCIONAMENT D'UN GIROSCOPI [33]	32
FIGURA 17. FUNCIONAMENT D'UN GIROSCOPI VIBRATORI EN FORMA DE DIAPASÓ [36]	33
FIGURA 18. GIROSCOPIS RLG I FOG [37]	34
FIGURA 19. MAGNETÒMETRE FLUXGATE [39]	35
FIGURA 20. IMU STRAPDOWN (FIXADA AL VEHICLE) [41]	36
FIGURA 21. IMU GIMBAL (AMB SUSPENSIO CARDAN) [41]	36
FIGURA 22. IMU INTEGRADA D'ANALOG DEVICES [44]	38
FIGURA 23. IMU INTEGRADA AMB COMPONENTS SEPARATS [46]	38
FIGURA 24. FILTRE DE KALMAN.	41
FIGURA 25. FILTRE IMM AMB DOS MODELS.	43
FIGURA 26. EXEMPLE DE TRAJECTÒRIA (1).	54
FIGURA 27. EXEMPLE DE TRAJECTÒRIA (2).	54
FIGURA 28. MESURES I TRAJECTÒRIA.	55
FIGURA 29. FILTRE DE KALMAN BEN SINTONITZAT.	56
FIGURA 30. FILTRE DE KALMAN AMB MASSA INÈRCIA.	57
FIGURA 31. FILTRE DE KALMAN AMB MASSA SOROLL.	57
FIGURA 32. SINTONIA DEL FILTRE DE KALMAN. ERROR DE PIC DE POSICIÓ.	59
FIGURA 33. SINTONIA DEL FILTRE DE KALMAN. ERROR RMS DE POSICIÓ.	59
FIGURA 34. SINTONIA DEL FILTRE DE KALMAN. ERROR DE PIC DE VELOCITAT.	60
FIGURA 35. SINTONIA DEL FILTRE DE KALMAN. ERROR RMS DE VELOCITAT.	60
FIGURA 36. FILTRE IMM BEN SINTONITZAT.	62
FIGURA 37. PROBABILITAT DEL MODEL DE MANIOBRES.	63
FIGURA 38. FILTRE IMM AMB MASSA INÈRCIA.	64
FIGURA 39. FILTRE IMM AMB MASSA SOROLL.	64
FIGURA 40. SINTONIA DEL FILTRE IMM. ERROR DE PIC DE POSICIÓ (1).	65
FIGURA 41. SINTONIA DEL FILTRE IMM. ERROR RMS DE POSICIÓ (1).	65
FIGURA 42. SINTONIA DEL FILTRE IMM. ERROR DE PIC DE POSICIÓ (2).	67
FIGURA 43. SINTONIA DEL FILTRE IMM. ERROR RMS DE POSICIÓ (2).	67
FIGURA 44. SINTONIA DEL FILTRE IMM. ERROR DE PIC DE VELOCITAT.	68
FIGURA 45. SINTONIA DEL FILTRE IMM. ERROR RMS DE VELOCITAT.	68
FIGURA 46. FILTRE IMM AMB VARIACIÓ DEL PRIMER MODEL (1).	69
FIGURA 47. FILTRE IMM AMB VARIACIÓ DEL PRIMER MODEL (2).	69
FIGURA 48. FILTRE IMM. PROBABILITAT MÉS BAIXA DE TRANSICIÓ DE MODELS.	70
FIGURA 49. FILTRE IMM. PROBABILITAT MÉS ALTA DE TRANSICIÓ DE MODELS.	70
FIGURA 50. COMPARACIÓ DELS FILTRES DE KALMAN I IMM.	71
FIGURA 51. TRAJECTÒRIA AMB MANIOBRA SUAUA.	72
FIGURA 52. ERROR DE PIC DE POSICIÓ AMB MANIOBRES SUAUS.	74
FIGURA 53. ERROR RMS DE POSICIÓ AMB MANIOBRES SUAUS.	74
FIGURA 54. ERROR DE PIC DE VELOCITAT AMB MANIOBRES SUAUS.	75
FIGURA 55. ERROR RMS DE VELOCITAT AMB MANIOBRES SUAUS.	75
FIGURA 56. TRAJECTÒRIA AMB MANIOBRA BRUSCA.	76

FIGURA 57. ERROR DE PIC DE POSICIÓ AMB MANIOBRES BRUSQUES.	77
FIGURA 58. ERROR RMS DE POSICIÓ AMB MANIOBRES BRUSQUES.	77
FIGURA 59. ERROR DE PIC DE VELOCITAT AMB MANIOBRES BRUSQUES.	78
FIGURA 60. ERROR RMS DE VELOCITAT AMB MANIOBRES BRUSQUES.	78

GLOSSARI

AHRS – Attitude and Heading Reference System – Sistema de Referència d'Orientació i Direcció

AKF – Adaptive Kalman Filter – Filtre de Kalman Adaptatiu

CIF – Covariance Intersection Filter – Filtre d'Intersecció de Covariàncies

CKF – Cubature Kalman Filter – Filtre de Kalman de Quadratura

CVG – Coriolis Vibratory Gyroscope – Giroscopi Vibratori Coriolis

DMM – Dynamic Multiple Model – Model Múltiple Dinàmic

EGNOS – European Geostationary Navigation Overlay System – Sistema Europeu Geostacionari de Navegació amb Superposició

EIF – Extended Information Filter – Filtre d'Informació Estès

EKF – Extended Kalman Filter – Filtre de Kalman Estès

FOG – Fiber Optic Gyroscope – Giroscopi de Fibra Òptica

GLONASS – Глобальная Навигационная Спутниковая Система – Sistema Global de Navegació per Satèl·lit

GNSS – Global Navigation Satellite System – Sistema Global de Navegació per Satèl·lit

GPBE – Generalized Pseudo-Bayesian Estimator – Estimador Pseudo-Bayesià Generalitzat

GPS – Global Positioning System – Sistema de Posicionament Global

HRG – Hemispherical Resonator Gyro – Giroscopi Ressonador Hemisfèric

IE – Input Estimation – Estimació de l'Entrada

IEKF – Iterated Extended Kalman Filter – Filtre de Kalman Estès Iterat

IF – Information Filter – Filtre d'Informació

IMM – Interacting Multiple Model – Model Múltiple Interactiu

IMU – Inertial Measurement Unit – Unitat de Mesura Inercial

INS – Inertial Navigation System – Sistema de Navegació Inercial

IRNSS – Indian Regional Navigational Satellite System – Sistema Regional Indi de Navegació per Satèl·lit

LVDT – Linear Variable Differential Transformer – Transformador Diferencial de Variació Lineal

MEMS – Microelectromechanical System – Sistema Microelectromecànic

PIGA – Pendulous Integrating Gyroscopic Accelerometer – Acceleròmetre Giroscòpic Integrador Pendular

PDAF – Probabilistic Data Association Filter – Filtre d'Associació de Dades Probabilístiques

PF – Particle Filter – Filtre de Partícules

PDOP – Position Dilution of Precision – Dilució de la Precisió de Posició

PPS – Precise Positioning Service – Servei de Posicionament Precís

QZSS – Quasi-Zenith Satellite System – Sistema de Satèl·lits Quasi-Zenitals

RLG – Ring Laser Gyroscope – Giroscopi d'Anell Làser

SMM – Static Multiple Model – Model Múltiple Estàtic

SPS – Standard Positioning Service – Servei de Posicionament Estàndard

UERE – User Equivalent Range Error – Error de Rang Equivalent de l'Usuari

VSD – Variable State Dimension – Dimensió Variable de l'Estat

1. OBJECTIUS.

1.1. PROPÒSIT.

Els sistemes híbrids de navegació (aided navigation systems) són cada vegada més necessaris en tot tipus de vehicles: aeris (avions de passatgers i càrrega, i petits vehicles aeris no tripulats), marítims (vaixells de tota mida i també submarins), i vehicles terrestres de tota mena. Fins i tot resulten útils en dispositius personals intel·ligents, i serveixen d'ajut en els desplaçaments a peu.

La major part d'aquests sistemes híbrids de navegació són basats en sistemes de posicionament per satèl·lit com el GPS (amb alguna excepció, com els submarins), complementats amb diversos sensors auxiliars: acceleròmetres, giroscopis o magnetòmetres.

La fusió de les dades dels sistemes de posicionament per satèl·lit i dels sensors auxiliars permet obtenir una mesura de la posició més exacta i sense interrupcions. Tanmateix, tots aquests sensors tenen els inevitables errors de mesura, i és necessari suavitzar les dades de les trajectòries.

Per a aquest fi s'utilitzen diversos algorismes de filtratge, el més comú dels quals és el filtre de Kalman. Una alternativa en general més eficient, però amb una major complexitat i cost computacional, és el filtre IMM (Interacting Multiple Model).

Aquests filtres poden actuar de manera independent sobre les dades del GPS i dels sensors auxiliars, fusionant els resultats posteriorment (arquitectura feblement acoblada); o bé actuar sobre les dades del GPS i dels sensors auxiliars ja fusionades (arquitectura fortament acoblada).

El propòsit d'aquest projecte és realitzar un estudi comparatiu dels filtres de Kalman i IMM, avaluant quantitativament les seves prestacions en una aplicació determinada: el suavitzat de les mesures d'un GPS en una arquitectura feblement acoblada.

1.2. METODOLOGIA.

S'ha particularitzat l'estudi dels filtres de Kalman i IMM per al moviment d'un petit vehicle aeri no tripulat. S'han seleccionat dos models simples per al filtre IMM, adients per al moviment típic d'un vehicle com aquest. S'han codificat els algorismes dels dos filtres en Matlab, i s'ha estudiat l'efecte de diversos paràmetres de disseny dels filtres sobre les seves prestacions finals.

1.3. ESTRUCTURA DE LA MEMÒRIA.

Al capítol 2 es descriuen els sistemes híbrids de navegació, compostos d'una banda pels GPS, i de l'altra per les unitats de mesura inercial.

Al capítol 3 es mencionen les alternatives per a la fusió de les dades i per a la tria de l'algorisme de filtratge, i s'estudien amb més detall els algorismes dels filtres de Kalman i IMM.

Al capítol 4 es comparen les prestacions d'aquests dos algorismes, aplicats a les mesures d'un GPS.

Al capítol 5, finalment, es resumeixen els resultats i s'enumeren algunes línies obertes per a treballs futurs.

2. SISTEMES HÍBRIDS DE NAVEGACIÓ.

El diccionari normatiu de l'Institut d'Estudis Catalans dóna dues accepcions per al mot “navegació”:

1 - Acció de navegar [amb una nau, generalment per aigua].

2 - Conjunt de tècniques que permeten d'establir el camí que ha de seguir un vehicle, especialment una nau o una aeronau, per tal de traslladar-se d'un indret a un altre.

El primer significat, més del llenguatge comú, té a veure amb l'execució de les maniobres per al moviment, de manera manual o automàtica, i tant en naus aquàtiques com en aeronaus o en vehicles terrestres.

El segon significat és el que resulta de major interès en l'àmbit de l'enginyeria: per tal d'establir el camí (o trajectòria) del vehicle, cal determinar el seu estat. Les variables d'estat més importants són les que determinen la posició del vehicle, la seva orientació, i l'evolució de la posició amb el temps (velocitat i acceleració).

En aquest capítol es descriuen els sensors més utilitzats per a determinar l'estat d'un vehicle: els sistemes globals de navegació per satèl·lit (GNSS – Global Navigation Satellite System), especialment el sistema GPS (Global Positioning System), que permet determinar la posició; i els sensors cinemàtics, que permeten determinar l'orientació i complementar la mesura de la posició. Un sistema híbrid de navegació integra sensors d'ambdós tipus.

El GPS és més exacte que els sensors cinemàtics perquè no acumula els errors, però també és més lent i menys fiable, doncs sovint hi ha interrupcions en el senyal rebut dels satèl·lits.

Els sensors cinemàtics acostumen a estar integrats en una unitat de mesura inercial (IMU – Inertial Measurement Unit), que mesura les velocitats angulars amb giroscopis i les integra per a obtenir l'orientació; i que mesura també l'acceleració amb acceleròmetres, i la integra per a obtenir la velocitat i la posició.

Ocasionalment s'utilitzen altres sensors auxiliars, com els magnetòmetres, que mesuren el camp magnètic terrestre per a complementar les mesures d'orientació i posició, i els baròmetres, que mesuren la pressió atmosfèrica per a complementar la mesura de l'altitud.

2.1. GPS.

El sistema GPS serveix per a determinar la posició, la velocitat, i el temps en un receptor, a partir d'informació transmesa per satèl·lit. Els receptors GPS es troben per un cost assequible, i amb dimensions reduïdes. La cobertura del sistema és universal (a l'aire lliure), i l'exactitud és bastant uniforme a qualsevol lloc.

2.1.1. ELEMENTS DEL SISTEMA.

El sistema GPS es pot dividir en tres segments: el segment espacial, el segment de control i el segment d'usuari.

El segment espacial consisteix en una constel·lació de 24 satèl·lits (Figura 1), més alguns de reserva. Són distribuïts en 6 plans orbitals, amb 4 satèl·lits a cada pla. Les òrbites són gairebé circulars, amb una inclinació de 55° respecte l'Equador, un període d'unes 12 h., i una alçada respecte la superfície de la Terra d'uns 20200 km.



Figura 1. Constel·lació de satèl·lits GPS [1]

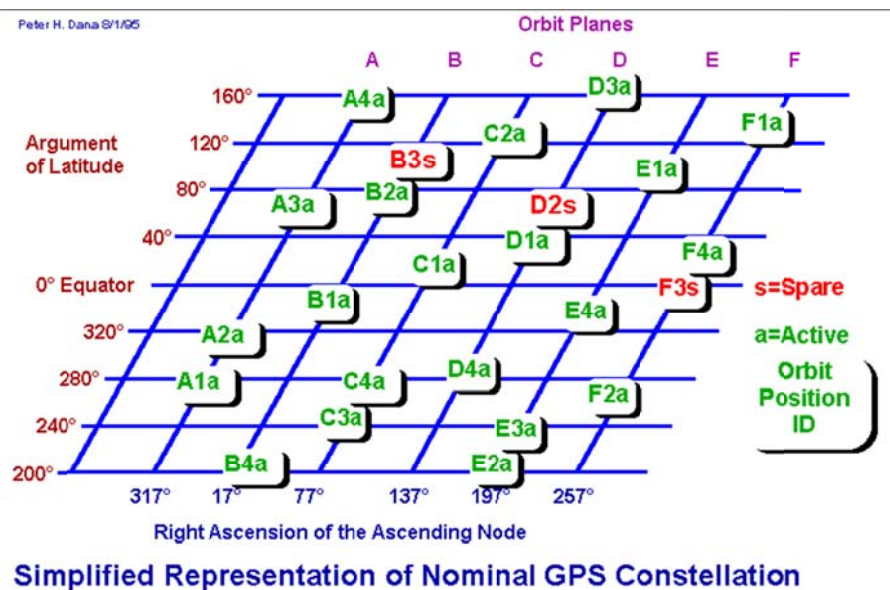


Figura 2. Distribució de satèl·lits en els plans orbitals [2]

Els 6 plans orbitals són distribuïts uniformement donant la volta a la Terra, per tant hi ha una separació entre ells de 60° (Figura 2).

D'aquesta manera queda garantit que qualsevol receptor a la superfície de la Terra tindrà visió directa de 4 satèl·lits, com a mínim, en qualsevol moment; encara que habitualment hi haurà visió directa d'entre 6 i 10 satèl·lits.

S'estudia canviar aquesta configuració uniforme dels satèl·lits en 6 plans orbitals per una altra configuració menys simètrica que sigui més tolerant a les fallades [3].

El segment de control consisteix en una xarxa d'estacions de seguiment i una central (Figura 3), que van mesurant i corregint els paràmetres orbitals dels satèl·lits, i sincronitzant els seus rellotges atòmics interns amb una exactitud de pocs ns. L'estació central és controlada per la Força Aèria dels Estats Units.

El segment d'usuari són els receptors. Incorporen una antena, un rellotge força estable, una etapa d'entrada de radiofreqüència (amb amplificació, filtratge, i desplaçament en freqüència), una etapa de banda base amb diversos canals que operen en paral·lel, cadascun d'ells seguint el senyal d'un satèl·lit diferent, una etapa de navegació que calcula posició, velocitat i temps a partir de les mesures anteriors, i una pantalla per a la presentació gràfica dels resultats.



Figura 3. Xarxa d'estacions de seguiment [2]

Hi ha una gran varietat de marques de receptors amb diverses prestacions, però moltes d'elles utilitzen els mateixos circuits integrats. A [4] hi ha una taula comparativa de les característiques dels circuits més estesos (exactitud de posició i velocitat, sensibilitat, nombre de canals, rapidesa de càlcul i dimensions). És important també, encara que no aparegui a la taula, el consum de potència.

Algun d'aquests circuits integrats és preparat també per al sistema GALILEO.

2.1.2. NIVELLS DE SERVEI.

El sistema GPS proporciona dos nivells de servei:

- SPS – Sistema de Posicionament Estàndard. Disponible per a tots els usuaris. La descripció oficial de la norma és a [5].
- PPS – Sistema de Posicionament Precís. Restringit per a usuaris autoritzats. La descripció oficial de la norma és a [6].

En ser una tecnologia d'origen militar, el nivell de servei per a usuaris civils és inferior. Fins a l'any 2000, fins i tot s'introduïa un error d'unes desenes de metres al nivell SPS, anomenat Disponibilitat Selectiva (SA – Selective Availability). S'ha anunciat que la Disponibilitat Selectiva no es tornarà a reintroduir, facilitant així la navegació de l'aviació civil [7], i que la propera generació de satèl·lits ja no serà capaç d'implementar-la [8].

2.1.3. SENYALS DELS SATÈL·LITS.

Els satèl·lits transmeten senyals utilitzant diverses freqüències portadores:

- L1 = 1575.42 MHz. Per als serveis SPS i PPS.
- L2 = 1227.60 MHz. Per al servei PPS.

S'utilitzen tres freqüències més, pròximes a aquestes, per a aplicacions més específiques, tant actuals com futures.

2.1.4. CODIFICACIÓ.

El codi C/A (coarse/acquisition) és un nombre pseudo-aleatori de 1023 bits, modulats sobre la freqüència L1 a 1.023 Mbit/s; per tant la seva durada és 1 ms. Aquest codi és específic per a cada satèl·lit, i permet al receptor identificar el satèl·lit, doncs tots ells emeten senyal a la mateixa freqüència.

El codi P (precise) és un altre nombre pseudoaleatori molt més llarg, de $6.1871 \cdot 10^{12}$ bits, modulats sobre les freqüències L1 i L2 a 10.23 Mbit/s; la durada del codi complet és d'una setmana. S'utilitza en el servei restringit PPS, encriptant-lo per a obtenir l'anomenat codi Y, que és el que transmeten els satèl·lits.

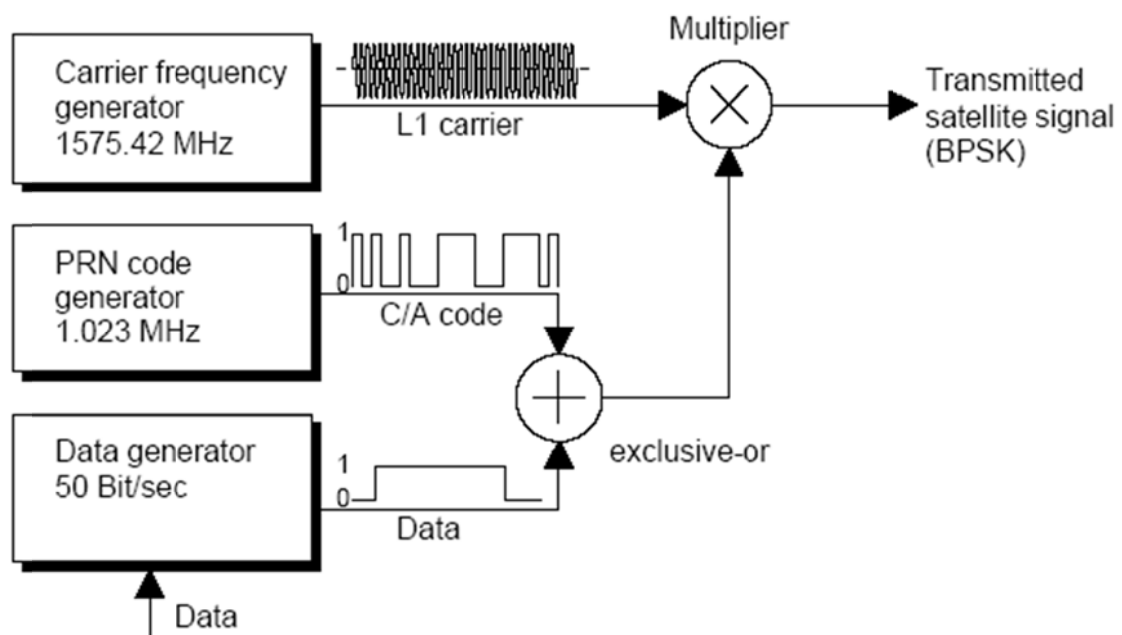


Figura 4. Modulació del missatge de navegació [9]

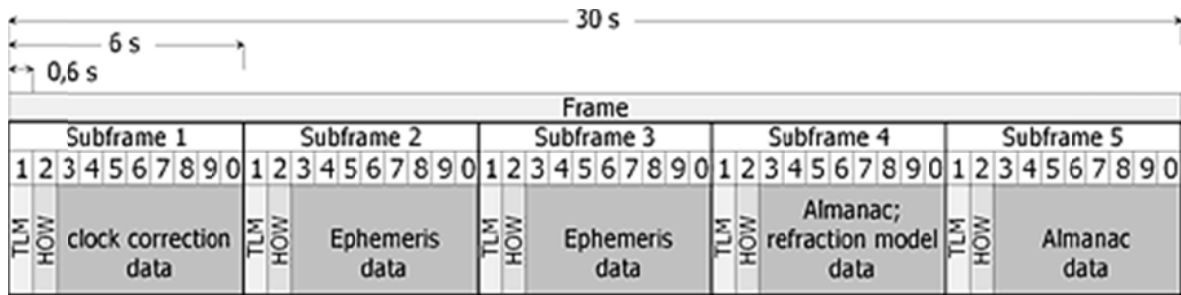


Figura 5. Estructura del missatge de navegació [11]

El missatge de navegació té una longitud de 1500 bits, és modulats sobre L1 a 50 bit/s, i conté la informació útil que el satèl·lit transmet als receptors. La Figura 4 il·lustra com es combinen el codi C/A i el missatge de navegació amb la freqüència portadora L1.

L'estructura interna del missatge de navegació és descrita detalladament a [10], i de forma més simplificada a [11] (Figura 5). És dividit en 50 paraules de 30 bits, que ocupen 0.6 s cadascuna d'elles.

Les tres parts més importants del missatge de navegació són el temps del satèl·lit, les efemèrides (òrbita i posició del satèl·lit), i l'almanac (informació no tan exacta sobre les òrbites i estat de funcionament dels altres satèl·lits, dividida en 25 missatges de navegació successius, útil per a una posada en marxa més ràpida del receptor).

2.1.5. CÀLCUL DE LA POSICIÓ DEL RECEPTOR.

El càlcul de la posició del receptor necessita les dades rebudes de quatre satèl·lits, i és basat en la triangulació. Són necessaris quatre satèl·lits enlloc de tres, per a poder calcular les tres coordenades de l'espai, i la correcció del temps al receptor. A [12] hi ha una descripció qualitativa clara del mètode de càlcul. Els paràgrafs següents resumeixen el càlcul de [9], però adaptant la notació a la de [Far08].

Com que els rellotges dels satèl·lits són sincronitzats amb precisió, i emeten els missatges de navegació en moments precisos, el receptor pot mesurar els temps de trànsit dels missatges $\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3, \Delta t_4$

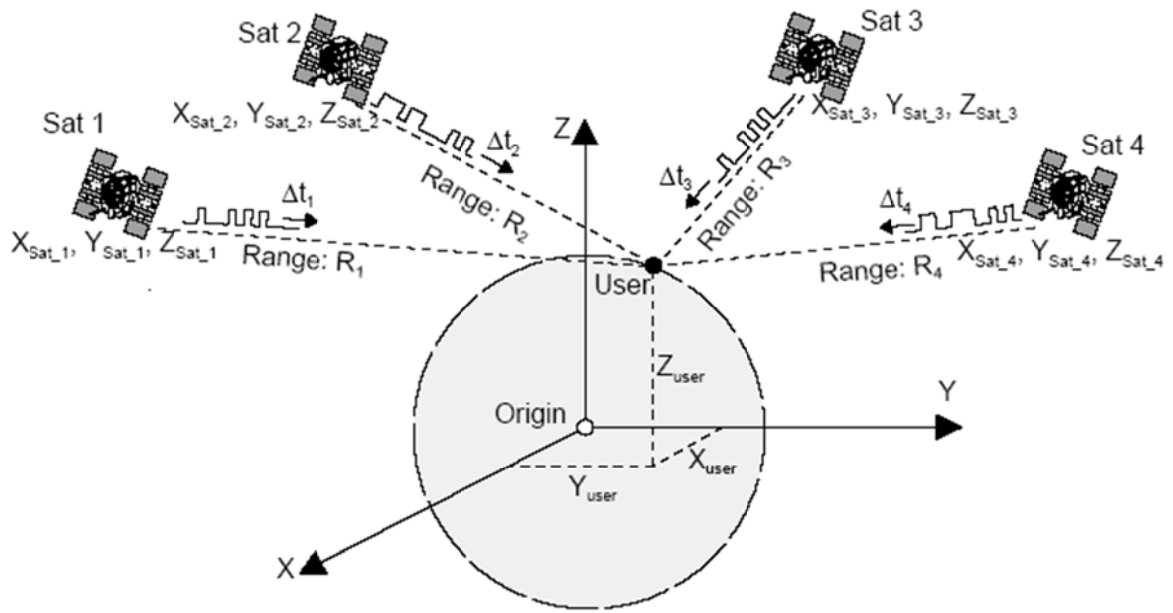


Figura 6. Posició del receptor a partir de les distàncies als satèl·lits [9]

Si el rellotge del receptor també fos ben sincronitzat, a partir dels temps es podrien calcular les distàncies (o rangs) als quatre satèl·lits, i a partir d'aquí, la posició del receptor, tal com s'indica a la Figura 6. Però sincronitzar el rellotge del receptor amb la precisió requerida tindria un cost econòmic molt elevat, per això s'utilitzen rellotges estàndard als receptors.

Aleshores, suposant que el rellotge del receptor avança un temps Δt_0 des que s'han emès els missatges de navegació, les distàncies o rangs calculats són més grans que els reals, i s'anomenen pseudodistàncies o pseudorangs. La relació entre el pseudorang de cada satèl·lit i les coordenades del receptor és:

$$\tilde{\rho}_r^i = \sqrt{(x_s^i - x_r)^2 + (y_s^i - y_r)^2 + (z_s^i - z_r)^2} + c\Delta t_0 \quad (1)$$

on $\tilde{\rho}$ indica el pseudorang mesurat, x , y , z són les coordenades dels satèl·lits o del receptor en un sistema cartesià centrat al centre de la Terra, el subíndex s indica el satèl·lit, el subíndex r indica el receptor, el superíndex i indica quin dels quatre satèl·lits, i c és la velocitat de les ones electromagnètiques.

Les quatre equacions (1) tenen quatre incògnites: les tres coordenades de posició del receptor i el retard de temps del seu rellotge. Formen un sistema no lineal, que es resoldrà utilitzant una posició estimada i substituint les quatre equacions dels pseudorangs per les seves aproximacions lineals:

$$\tilde{\rho}_r^i = \hat{\rho}_r^i + \frac{\hat{x}_r - x_s^i}{\hat{\rho}_r^i} \Delta x_r + \frac{\hat{y}_r - y_s^i}{\hat{\rho}_r^i} \Delta y_r + \frac{\hat{z}_r - z_s^i}{\hat{\rho}_r^i} \Delta z_r + c \Delta t_0 \quad (2)$$

on les estimacions s'indiquen amb un accent circumflex, com a $\hat{\rho}_r^i$, i les desviacions de la posició del receptor respecte la posició estimada, amb $\Delta x_r, \Delta y_r, \Delta z_r$.

El sistema resultant de quatre equacions amb quatre incògnites (2) és lineal, i es pot resoldre pels mètodes matricials habituals. Les solucions s'utilitzen per a recalculer la posició estimada, i el procés s'itera fins que les desviacions són menors que l'error desitjat. Habitualment unes quatre iteracions són suficients.

2.1.6. FONTS D'ERROR.

Els pseudorangs calculats a l'apartat 2.1.5. tenen diverses fonts d'error, que influiran sobre el càlcul de la posició (i també del temps). Com que aquestes fonts d'error són bastant independents, l'error de cada pseudorang es podrà calcular com la suma quadràtica.

Errors dels satèl·lits:

Els errors dels satèl·lits són dos: de temps i de posició.

L'error de temps és l'error del rellotge intern del satèl·lit; malgrat que és un rellotge atòmic amb una precisió (i cost econòmic) molt elevats, el seu petit error, multiplicat per la velocitat de la llum, pot influir fins a uns 2 metres en el càlcul del pseudorang [13].

L'error de posició dels satèl·lits s'anomena també error d'efemèrides. L'òrbita i la posició de cada satèl·lit pot variar lleugerament respecte l'òrbita teòrica, degut a la influència gravitatòria de la lluna i el sol. Les efemèrides, com s'ha comentat a l'apartat 2.1.4, es transmeten cada 30 segons, però les correccions de les efemèrides poden trigar unes dues hores en actualitzar-se, provocant un error d'uns 2 metres en cada pseudorang.

Si el receptor GPS incorpora telèfon mòbil, és possible corregir aquest error descarregant les efemèrides actualitzades d'alguns llocs web, com [14]. Només són vàlides per a determinades zones i models de receptors GPS, però permeten una millora del càlcul de la posició i una arrencada més ràpida [15]. Tanmateix, el cost econòmic pot ser excessiu per a un usuari estàndard [16].

Errors atmosfèrics:

La velocitat de les ones electromagnètiques en el buit és c , però en l'aire és lleugerament inferior. Els satèl·lits són a una alçada molt superior als límits de l'atmosfera, per tant els senyals de microones que emeten es propaguen inicialment a velocitat c . Quan arriben a la ionosfera, a uns 1000 km d'alçada, comença a disminuir molt lleugerament la velocitat del senyal. També es produeix una curvatura del senyal, de manera anàloga a la refracció de la llum quan incideix sobre la interfície entre dos medis de diferent densitat i índex de refracció. En el cas de l'atmosfera no hi ha pròpiament una interfície, sinó que els seus límits són graduals, per això el canvi de direcció del senyal no és brusc, sinó que té una certa curvatura. Si el satèl·lit és en posició zenital no hi ha curvatura del senyal i els errors atmosfèrics són mínims, però si és a prop de l'horitzó els errors augmenten, doncs el senyal ha de travessar més atmosfera (Figura 7).

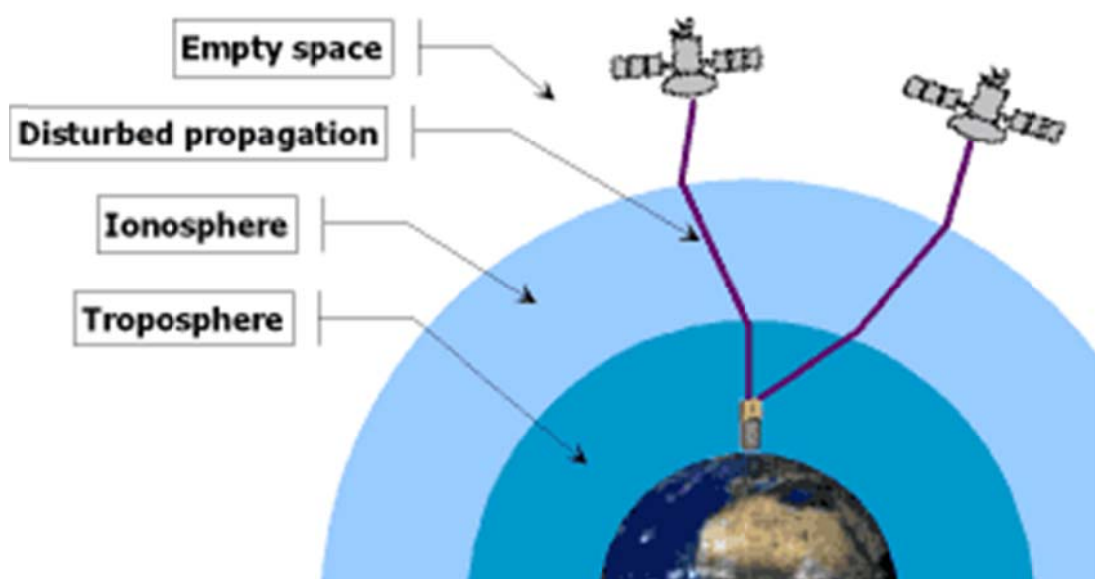


Figura 7. Desviació atmosfèrica dels senyals GPS [13]

Un altre efecte que es produeix és la dispersió: el canvi de velocitat és lleugerament diferent per a senyals de diferents freqüències. Així, alguns receptors GPS de gamma alta mesuren els diferents retards dels senyals L1 i L2 (apartat 2.1.3) per a calcular amb més precisió la correcció atmosfèrica. Altres receptors que només treballen amb el senyal L1 poden rebre aquestes correccions des d'altres satèl·lits auxiliars, com els del sistema EGNOS a Europa, o altres sistemes similars a Amèrica i Àsia [17].

A la troposfera, la capa més baixa de l'atmosfera, es produeix un altre error, més petit, però de correcció molt més difícil. Les variacions de la humitat de l'aire també corben els senyals electromagnètics, però aquestes variacions climàtiques són difícilment previsibles i ràpidament canviant.

L'error ionosfèric en cada pseudorang és d'uns 4 metres, i l'error troposfèric, al voltant d'un metre.

Errors del receptor:

El receptor mesura el temps de trànsit del senyal de cada satèl·lit (apartat 2.1.5.) comparant el senyal rebut amb un altre senyal idèntic generat internament. Els circuits electrònics que fan la comparació tenen un error d'uns 10^{-8} s, que multiplicat per c representen uns 3 metres.

Una altra font d'error al receptor és produïda per la dificultat de distingir el senyal directe del satèl·lit dels senyals rebotats en edificis, accidents orogràfics, o el propi terra (Figura 8). La magnitud d'aquest error és al voltant d'un metre.

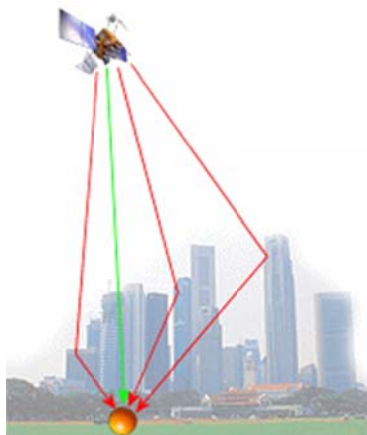


Figura 8. Error de camí múltiple [18]

Quan el receptor GPS és en un vehicle en moviment aquest error és fàcil d'eliminar. S'estan desenvolupant tècniques addicionals per a la seva reducció [19].

Efectes relativistes:

El sistema GPS és la situació de la vida quotidiana en què té una influència més directa la Teoria de la Relativitat. La Relativitat Especial prediu una dilatació del temps en qualsevol cos en moviment a una velocitat elevada, i els satèl·lits del sistema GPS ho són. La Relativitat General prediu també una dilatació del temps en qualsevol cos sotmès a un camp gravitatori intens [Ein84]. Com que els satèl·lits són sotmesos a un camp molt menys intens que a la superfície de la Terra, el que es produeix és una contracció del temps, que numèricament compensa i supera la dilatació de la Relativitat Especial.

Per tal de compensar aquest efecte, la freqüència real a què s'ajusten en terra els rellotges atòmics dels satèl·lits és 10.22999999543 Mhz, perquè quan estiguin en òrbita funcionin als 10.23 Mhz desitjats [20].

Un altre efecte relativista, l'efecte Sagnac, és degut a que el receptor GPS sobre la superfície de la Terra s'està movent en realitat també a gran velocitat degut a la pròpia rotació de la Terra. Aquest efecte és explicat amb detall a [21]; la seva influència numèrica sobre l'error és molt petita.

En conjunt, els efectes relativistes no provoquen cap error en la mesura dels pseudorangs doncs ja són compensats.

Dilució de la precisió:

Les posicions relatives dels satèl·lits que el receptor utilitza per a calcular la posició són molt importants per a reduir l'error de mesura. Aquest efecte s'il·lustra molt millor gràficament.

A la Figura 9, les circumferències negres són els rangs, o distàncies, calculats des de cada satèl·lit fins al receptor. Per tant el receptor es troba en el punt A, que és el punt de tall de les dues circumferències, i típicament és a prop de la superfície de la Terra (l'altre punt de tall és prou lluny de la Terra perquè no calgui considerar-lo, i els satèl·lits addicionals ho confirmaran). En realitat les circumferències haurien de ser esferes, per això

calen tres satèl·lits enlloc de dos, però en dues dimensions el dibuix s'entén millor. També cal un quart satèl·lit, que ajuda a calcular el retard del rellotge del receptor.

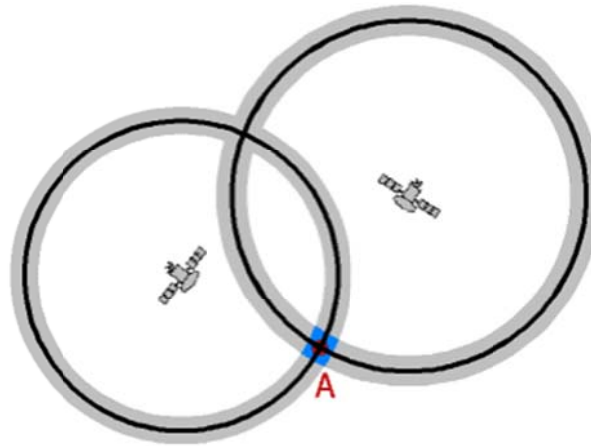


Figura 9. Precisió de la posició amb satèl·lits ben separats [13]

Les dues zones grises als costats de les circumferències indiquen els marges d'error, per tant el marge d'error de la posició del receptor és al quadrat fosc al voltant del punt A.

A la Figura 10, els dos satèl·lits no són tan separats, vistos des de la posició del receptor, i la superposició dels marges d'error no és un quadrat sinó un rombe molt més allargat. Per tant l'error de posició en aquest cas és molt més gran; aquest efecte és la dilució de precisió de la posició (PDOP). Es defineixen també les dilucions de precisió horitzontal, vertical, en el temps, i global [13].

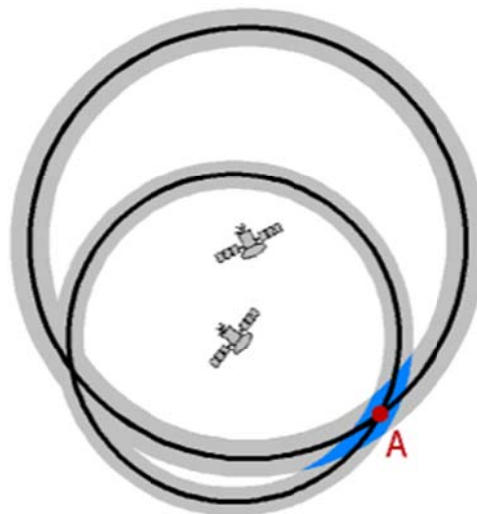


Figura 10. Dilució de la precisió quan els satèl·lits són alineats [13]

Per aquest motiu, les mesures amb GPS són més precises en llocs on hi ha una àmplia regió del cel ben visible, així el receptor pot triar satèl·lits més separats. Just al costat d'un gran edifici, que tapa la meitat del cel, la precisió és menor. El mateix efecte es produeix quan s'intenta ajustar una muntura motoritzada d'un telescopi portàtil d'aficionat; és més precís fer-ho amb dues estrelles ben separades en el cel que amb dues estrelles pròximes.

A la referència [20] hi ha càlculs detallats de dilucions de precisió (en altres capítols).

Error global:

La suma quadràtica dels errors considerats en els apartats anteriors dona l'error global del rang (UERE – User Equivalent Range Error). Amb els valors numèrics aproximats triats en els apartats anteriors, expressats en metres, l'equació (3) dona un error d'uns 6 metres.

$$UERE = \sqrt{2^2 + 2^2 + 4^2 + 1^2 + 3^2 + 1^2} \approx 6 \text{ m} \quad (3)$$

Diferents referències donen valors diferents per aquest error; és un valor aproximat que depèn bastant de les condicions de la mesura. Referències antigues inclouen també l'error degut a la disponibilitat selectiva, que es va eliminar l'any 2000 com s'ha explicat a l'apartat 2.1.2.

Per obtenir l'error global cal multiplicar aquest resultat pel valor numèric (escalar) de PDOP. Per exemple, per PDOP = 4 s'obté un error global d'uns 24 metres.

2.1.7. APLICACIONS.

Les aplicacions del sistema GPS són molt diverses. L'origen d'aquesta tecnologia és militar, i també ho són moltes de les seves aplicacions més sofisticades. En aquesta memòria s'ometran, però són detallades en diverses referències, com [22].

El govern americà disposa també d'un lloc web multilingüe per a divulgar-ne les aplicacions civilitzades [23].

L'aplicació més popular és òbviament l'ajut a la navegació d'automòbils i a la localització d'adreces. Aquesta aplicació ha permès un desenvolupament industrial que ofereix receptors GPS de gamma baixa i preu assequible, que han permès un important estalvi de temps i cost en la circulació de vehicles, especialment de vehicles comercials. Un exemple de les prestacions d'un d'aquests receptors és a [Pee04].

En el transport col·lectiu també resulta útil el GPS, per a tenir controlades la posició i la velocitat dels trens, incrementant la seguretat i l'exactitud en la previsió de les hores d'arribada [24].

En el transport marítim i aeri, el GPS permet optimitzar la trajectòria, estalviant així combustible.

La possibilitat d'obtenir una mesura molt exacta del temps també és útil en multitud d'aplicacions, com les estacions base de telefonia mòbil, i permet disposar d'una exactitud en la mesura del temps propera a la d'un rellotge atòmic, amb un cost molt reduït [25].

Hi ha moltes altres aplicacions, en muntanyisme, topografia, control de desastres naturals o d'espècies en perill d'extinció, ...

En conjunt, la tecnologia GPS resulta ser notablement útil. S'ha desenvolupat ràpidament en molt pocs anys i té encara moltes possibilitats de millora.

Les principals d'aquestes millores consisteixen en l'increment de la seva precisió, disminuint l'error que s'ha calculat com a exemple a l'apartat 2.1.6. Existeixen moltes possibilitats per a aconseguir aquest increment de precisió, algunes de les quals són descrites a [Far07]. A més del sistema EGNOS i similars, o la integració del GPS amb la telefonia mòbil, altres alternatives són el GPS Diferencial, que utilitza també els senyals emesos des d'una xarxa d'estacions fixes a terra, o els sistemes de navegació inercials, que integren el senyal provinent dels satèl·lits amb sensors de moviment.

Altres millores que s'estan encara implementant constitueixen el sistema anomenat GPS III, descrit a [26].

El GPS té tanmateix un inconvenient molt greu: és sota el control tècnic de l'exèrcit més bel·licós del planeta, el dels Estats Units. En àrees tan crítiques com el transport aeri,

si el GPS arribés a desplaçar els altres sistemes de navegació, podria ser anul·lat en qualsevol moment per interessos militars, causant un greu problema a la resta del món.

Per a contrarestar aquest problema s'han desenvolupat o experimentat altres sistemes, com el rus GLONASS, el xinès COMPASS, el japonès QZSS, l'indi IRNSS i l'europeu GALILEO [27]. Aquest darrer encara no és operatiu però ho serà aviat, i podrà coexistir amb el GPS oferint més garanties de seguretat en el servei.

2.2. UNITAT DE MESURA INERCIAL.

Una Unitat de Mesura Inercial (IMU – Inertial Measurement Unit) és un conjunt de tres acceleròmetres perpendiculars entre sí, i tres giroscopis també perpendiculars. Les acceleracions mesurades pels acceleròmetres i les velocitats angulars mesurades pels giroscopis s'integren per obtenir la velocitat, la posició, i l'orientació. Una IMU pot contenir també tres magnetòmetres.

Quan la IMU és fixada correctament al vehicle, els acceleròmetres mesuren les acceleracions frontal, lateral i vertical, i els giroscopis mesuren les velocitats angulars de balanceig (roll), capcineig (pitch) i guinyada (yaw), indicades a la Figura 11.

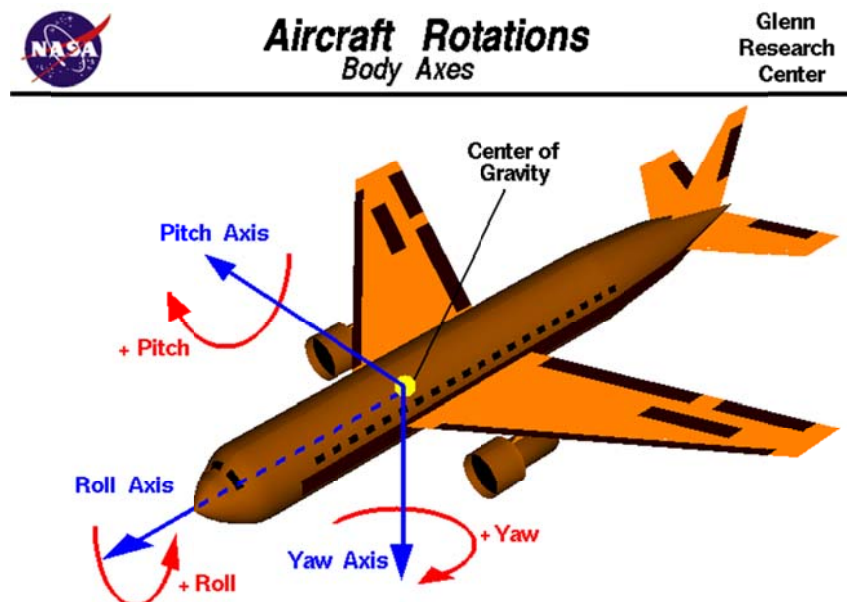


Figura 11. Balanceig, capcineig i guinyada [28]

La IMU acostuma a incorporar la compensació d'errors d'offset i factor d'escala. Les unitats més senzilles que donen únicament les dades dels sensors s'anomenen ISA (Inertial Sensor Assembly). Les unitats més complexes, que inclouen la computació dels algorismes que calculen posició, velocitat i orientació, s'anomenen INS (Inertial Navigation System) o AHRS (Attitude and Heading Reference System) [Tol05].

Respecte un GPS, una IMU té l'avantatge d'una major autonomia, ja que no rep ni emet cap radiació, i pot operar per tant en entorns on el senyal dels satèl·lits no és visible. Tanmateix, té els inconvenients que l'error és acumulatiu, és més cara (deu vegades o més), la inicialització és més lenta (alguns minuts), i generalment és més gran i pesada.

2.2.1. ACCELERÒMETRES.

Existeixen diverses tecnologies per al disseny i fabricació d'acceleròmetres, descrites en llibres d'instrumentació i sensors o en altres referències com [Arc00] o [Chr97]. Moltes d'elles són aplicables als acceleròmetres d'una Unitat de Mesura Inercial.

La major part dels acceleròmetres es basen en una massa unida a una carcassa per un element elàstic amb esmorteïment, que ajuda a evitar les oscil·lacions (Figura 12). L'acceleració provoca un moviment relatiu de la massa, que torna a la seva posició original quan l'acceleració desapareix.

Existeixen també acceleròmetres angulars, amb un disc que pivota sobre el seu centre, frenat per una molla en espiral.

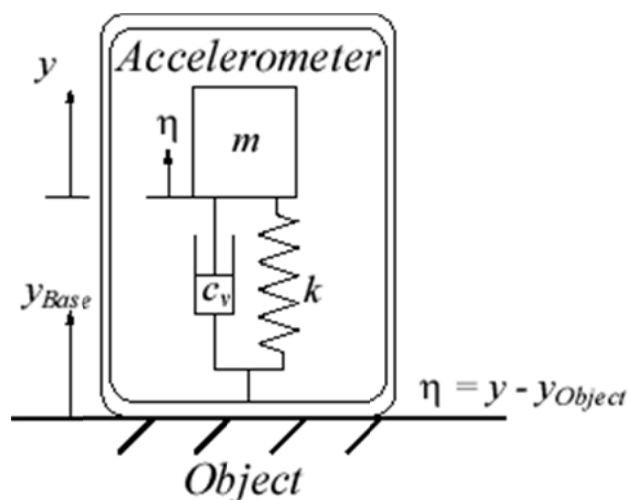


Figura 12. Esquema general d'un acceleròmetre [29]

Acceleròmetre potenciomètric:

La massa de l'acceleròmetre és unida al cursor d'un potenciometre. Sovint cal una amplificació mecànica per al moviment del cursor. Cal assegurar un bon contacte del cursor, encara que això augmenti l'esmoreïment per fricció. És senzill i adequat per a una IMU, pel seu rang d'acceleració i bon funcionament a baixa freqüència.

Acceleròmetre amb LVDT:

El LVDT és un transformador diferencial de variació lineal, constituït per un primari i dos secundaris en oposició sobre el mateix nucli magnètic. Aquest nucli flotant del transformador constitueix la massa inercial de l'acceleròmetre, mentre que el propi transformador és fixat a la carcassa de l'acceleròmetre, per tant les acceleracions provocaran un moviment relatiu del nucli del transformador respecte la seva posició d'equilibri. En aquesta posició d'equilibri la tensió de sortida del LVDT és zero, doncs els dos secundaris són en oposició. Fora de l'equilibri, apareix una tensió de sortida fins i tot per a desplaçaments del nucli molt petits. Aquest acceleròmetre té una alta sensibilitat i un baix esmoreïment per fricció (Figura 13). És adequat per a una IMU.

Els acceleròmetres de reluctància, molt similars, tenen un imant permanent com a nucli. No resulten útils per a les IMU doncs només donen sortida quan la massa inercial és en moviment. Mesuren per tant acceleracions alternes (vibracions) [30].

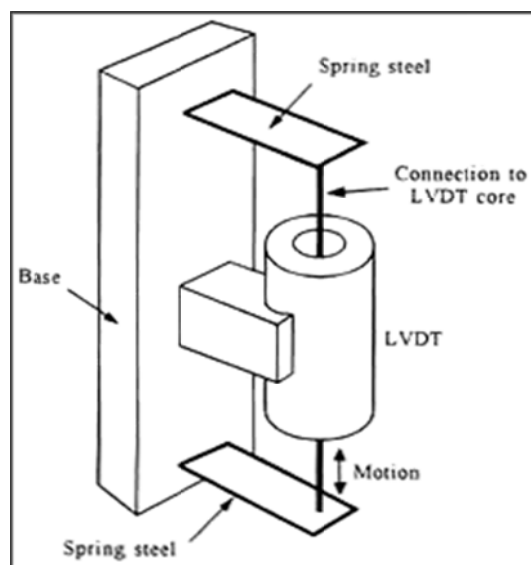


Figura 13. Acceleròmetre amb LVDT [30]

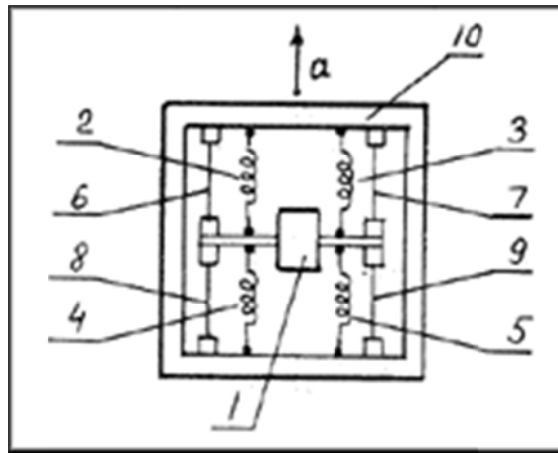


Figura 14. Acceleròmetre amb galgues extensomètriques [31]

Acceleròmetre amb galgues extensomètriques:

La massa inercial (Figura 14, 1) és suspesa de la carcassa de l'acceleròmetre (10) amb elements elàstics (2, 3, 4, 5) i quatre fils pretesats amb galgues extensomètriques enganxades (6, 7, 8, 9). L'acceleració provoca un petit moviment de la massa inercial, que deforma lleugerament les galgues extensomètriques i varia una mica la seva resistència. Les quatre galgues es connecten en pont de Wheatstone, amb la polaritat adequada per a compensar els errors de dilatació tèrmica, i la sortida del pont s'amplifica per a donar una tensió proporcional a l'acceleració.

Es poden utilitzar galgues semiconductores enlloc de les metàl·liques habituals, obtenint una millor sensibilitat però una pitjor linealitat.

Aquesta tecnologia es pot miniaturitzar i integrar l'acceleròmetre en un sistema microelectromecànic (MEMS).

Acceleròmetre piezoelèctric:

La massa inercial és en contacte amb un cristall piezoelèctric, de quars o d'altres materials ceràmics similars (Figura 15). L'acceleració provoca que la massa pressioni el cristall i generi càrrega elèctrica entre els seus extrems. Un circuit amplificador de càrrega, com el descrit a [32], converteix aquesta càrrega en tensió, més fàcil de tractar, i disminueix la impedància de sortida fins a un valor útil. Aquest tipus d'acceleròmetre no és gaire adequat per a una IMU, doncs treballa millor amb vibracions de mitjana o alta freqüència.

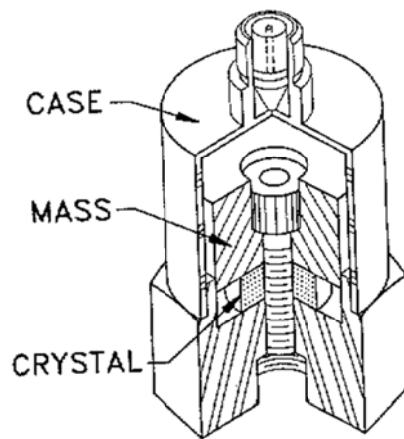


Figura 15. Acceleròmetre piezoelèctric [32]

A més d'aquests models estàndard d'acceleròmetre, algunes IMU n'incorporen d'altres més especialitzats [Tol05]: acceleròmetre electromagnètic, on el suport de la massa inercial és aguantat per una força electromagnètica; acceleròmetre drag cup, on el parell creat per l'acceleració en una de les peces mòbils es compensa amb un imant giratori; acceleròmetre de cables vibratoris, que subjecten la massa inercial i vibren en ressonància; i acceleròmetre PIGA (Pendulous Integrating Gyroscopic Accelerometer), on l'acceleració varia la velocitat de precessió en un giroscopi. Aquest darrer, més car i sofisticat, té una alta sensibilitat i exactitud i un ampli rang d'acceleracions; és utilitzat a les IMU per a míssils balístics.

2.2.2. GIROSCOPIS.

Un giroscopi permet mesurar velocitats angulars i orientacions, i és basat en la conservació del moment angular d'un rotor que gira ràpidament (Figura 16). La carcassa exterior és fixada al vehicle en moviment, i unida al rotor mitjançant tres anells perpendiculars, que giren lliurement amb baixa fricció, de manera que els canvis d'orientació de la carcassa gairebé no transmeten parell de gir al rotor. El rotor es manté girant en una direcció de l'espai fixa, i l'orientació del vehicle es mesura a partir dels angles relatius dels tres anells respecte el rotor, amb diversos tipus de sensors: resistiu (potenciòmetre), inductiu, capacitiu, o fotoconductor. El rotor es pot fer girar amb un motor, d'alterna o de contínua, amb una molla de rellotge, o amb una càrrega pirotècnica. El giroscopi és el component més car d'una IMU, però també el més important per a la seva exactitud.

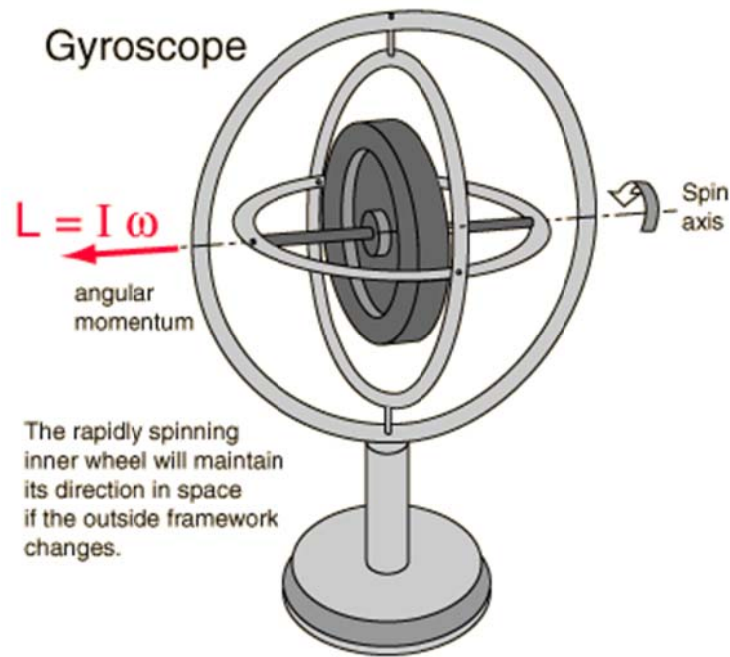


Figura 16. Principi de funcionament d'un giroscopi [33]

Existeixen també altres models de giroscopi amb tecnologies més modernes.

Giroscopi d'efecte Coriolis giratori:

L'efecte Coriolis és la desviació aparent de la trajectòria d'un objecte que es mou amb velocitat constant en un sistema de referència giratori. Col·locant un acceleròmetre a la perifèria del rotor del giroscopi, i el giroscopi dins del vehicle sotmès a acceleracions i rotacions, l'acceleròmetre mesura l'acceleració de Coriolis produïda per les rotacions externes [Tol05].

Giroscopi d'estructura vibratòria:

Es basa en la conservació del pla de vibració de qualsevol estructura, encara que el seu suport roti. L'estructura vibrant pot ser un cristall piezoelèctric, un fil, una barra, una roda, un ressonador hemisfèric HRG (com una copa de vi), un ressonador cilíndric CVG, o un diapasó en miniatura (tuning fork) (Figura 17).

Els giroscopis d'estructura vibratòria són més senzills i barats que els mecànics, i es poden miniaturitzar per a integrar-los en sistemes MEMS, amb l'aspecte d'un circuit integrat estàndard. A [34] hi ha detallades consideracions sobre el seu disseny. A [35], també sobre altres tipus de giroscopis i acceleròmetres amb tecnologia MEMS.

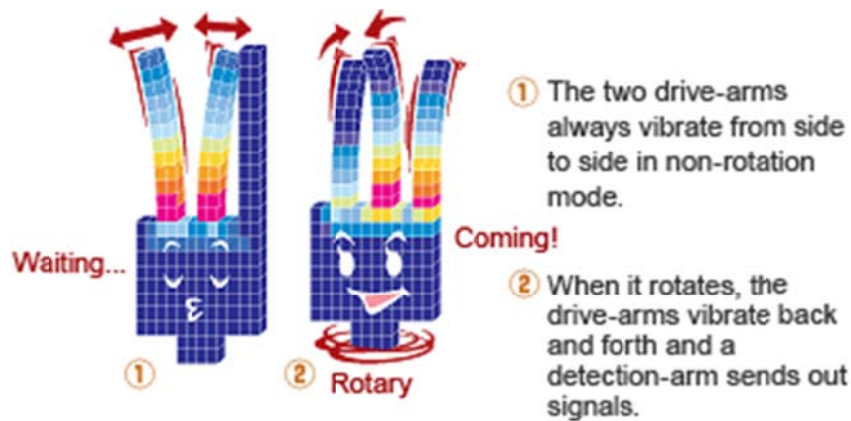


Figura 17. Funcionament d'un giroscopi vibratori en forma de diapasó [36]

Giroscopi d'anell làser:

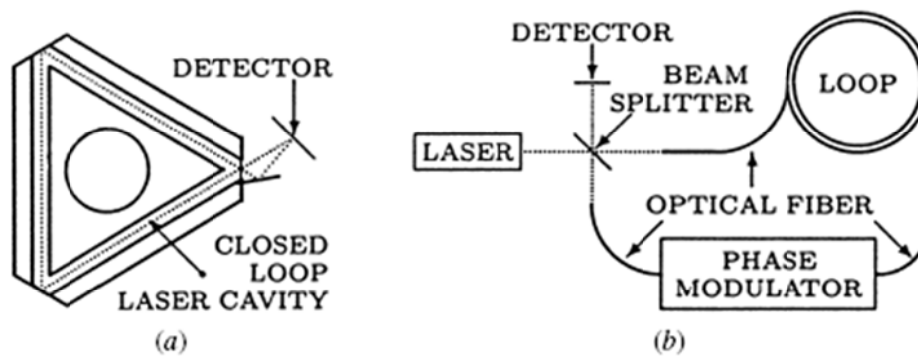
La llum làser es caracteritza per ser molt direccional, monocromàtica, i coherent. El fet que sigui coherent vol dir que tots els fotons d'un raig tenen la mateixa fase. Això facilita l'observació d'interferències.

El giroscopi d'anell làser (RLG) té una cavitat triangular amb miralls als tres vèrtexs (Figura 37), per on es fan circular dos rajos de llum làser en sentits oposats, horari i antihorari. La posició d'un dels miralls és ajustable amb precisió, per tal que la longitud de la cavitat sigui un múltiple enter de la longitud d'ona dels fotons, i s'observin les típiques franges d'interferència constructiva.

Quan el sistema és en rotació es produeix un efecte relativista, l'efecte Sagnac: la velocitat de la llum és absoluta, però la longitud efectiva de la cavitat, entre emissor i receptor, ha variat lleugerament degut al moviment de rotació, s'ha escurçat per un dels sentits del raig de llum, i s'ha allargat per l'altre sentit. Això varia el patró d'interferència de manera proporcional a la velocitat de rotació.

Aquest tipus de giroscopi es troba en IMU de cost elevat per a avions i míssils; és més sofisticat, exacte i robust que els mecànics o els MEMS però també més car.

A baixa velocitat de rotació les freqüències dels rajos horari i antihorari són molt pròximes i es pot produir el bloqueig (lock-in). Diversos canvis en el disseny permeten corregir aquest problema [37].



Laser gyroscopes: (a) ring laser gyro (RLG); (b) fiber optic gyro.

Figura 18. Giroscopis RLG i FOG [37]

Giroscopi de fibra òptica:

El giroscopi de fibra òptica (FOG) (Figura 18) té un funcionament semblant al d'anell làser, però amb una major resolució ja que el camí òptic és molt més llarg, en passar per moltes voltes (fins a milers) de l'anell de fibra òptica. La modulació de fase, i un processament addicional del senyal, incrementa encara més la resolució [Tol05].

Igual que el RLG, la seva manca de parts mòbils el fa més robust i insensible a les vibracions, i s'utilitza també en IMU d'altres prestacions.

2.2.3. MAGNETÒMETRES.

Els magnetòmetres mesuren el camp magnètic terrestre, i són incorporats en algunes IMU com a ajuda per al posicionament, i sobretot per a la orientació del vehicle. N'hi ha tres, en direccions perpendiculars.

Els magnetòmetres més utilitzats són els basats en sensors d'efecte Hall, que donen una tensió proporcional al camp magnètic. També n'hi ha de basats en les magnetoresistències, que varien amb el camp magnètic, i que inclouen els telèfons mòbils més moderns per a realitzar la funció de brúixola [38]. Les magnetoresistències tenen un consum de potència inferior als sensors d'efecte Hall, però són més propenses a adquirir una magnetització permanent. En un dispositiu com una IMU, que pot estar sotmès a camps electromagnètics, requeririen una desmagnetització periòdica, i l'estalvi de potència consumida no és gaire important.

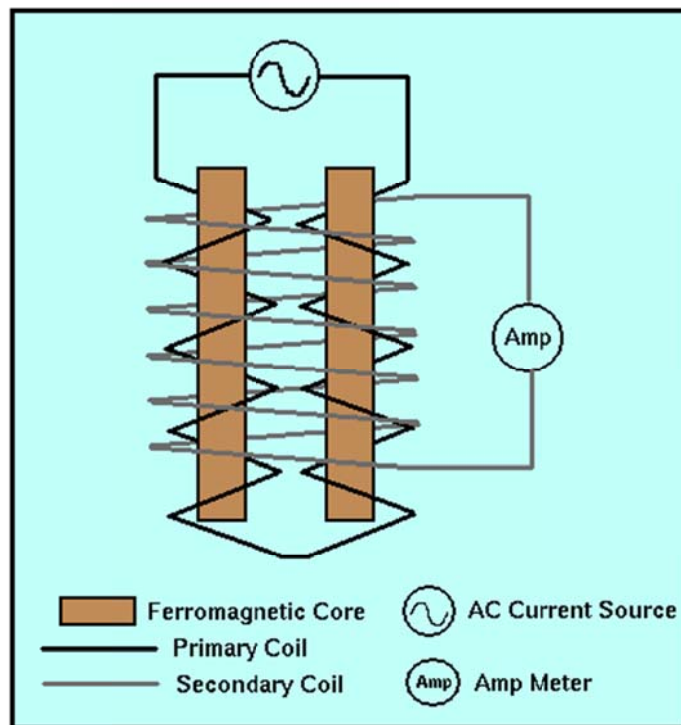


Figura 19. Magnetòmetre fluxgate [39]

Tant els magnetòmetres d'efecte Hall com els de magnetoresistència es poden fabricar com a circuit integrat. Una altra tecnologia de magnetòmetres adequada per a una IMU és la dels magnetòmetres d'inducció o de saturació (fluxgate), amb un pes i dimensions més gran però amb bones prestacions.

Els magnetòmetres fluxgate tenen un nucli magnètic dividit en dues meitats (Figura 19), un primari bobinat en sentits oposats a les dues meitats del nucli, i un secundari bobinat en el mateix sentit a les dues meitats del nucli. Un corrent altern aplicat sobre el primari produeix camps magnètics oposats a les dues meitats del nucli, i una tensió propera a zero al secundari. El camp magnètic extern augmenta la tensió generada en una meitat del nucli, i disminueix la tensió de signe contrari generada a l'altra meitat, donant una tensió neta proporcional al camp magnètic [39].

A [40] hi ha una àmplia varietat de dissenys alternatius per a magnetòmetres fluxgate i d'altres tipus, tots ells utilitzats a la navegació espacial.

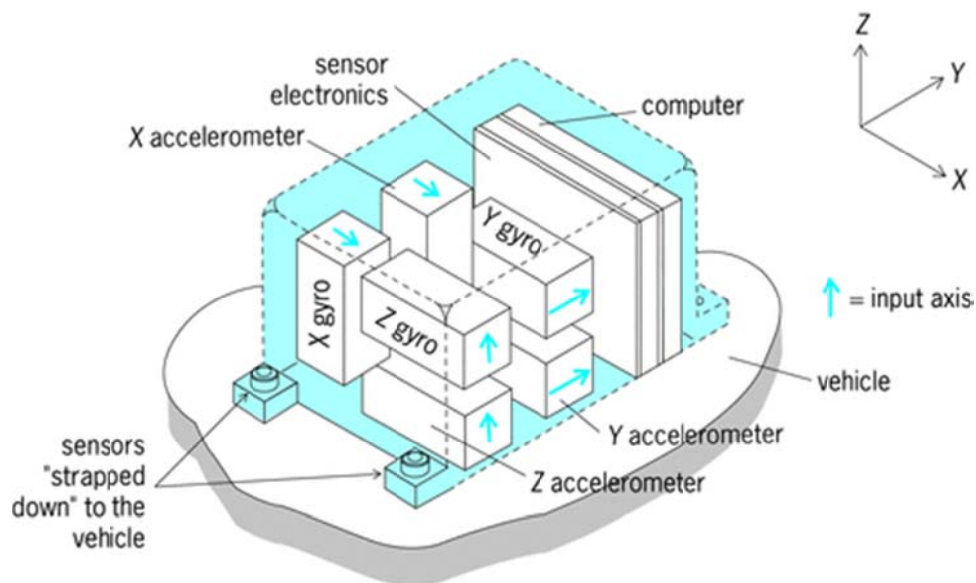


Figura 20. IMU Strapdown (fixada al vehicle) [41]

2.2.4. IMU INTEGRADES.

Una IMU (Unitat de Mesura Inercial) integrada inclou dins d'una mateixa caixa tres acceleròmetres, tres giroscopis, i possiblement tres magnetòmetres. Existeixen dos tipus de configuracions per a les IMU integrades: Strapdown (fixada al vehicle) (Figura 20) i Gimbal (amb suspensió Cardan) (Figura 21).

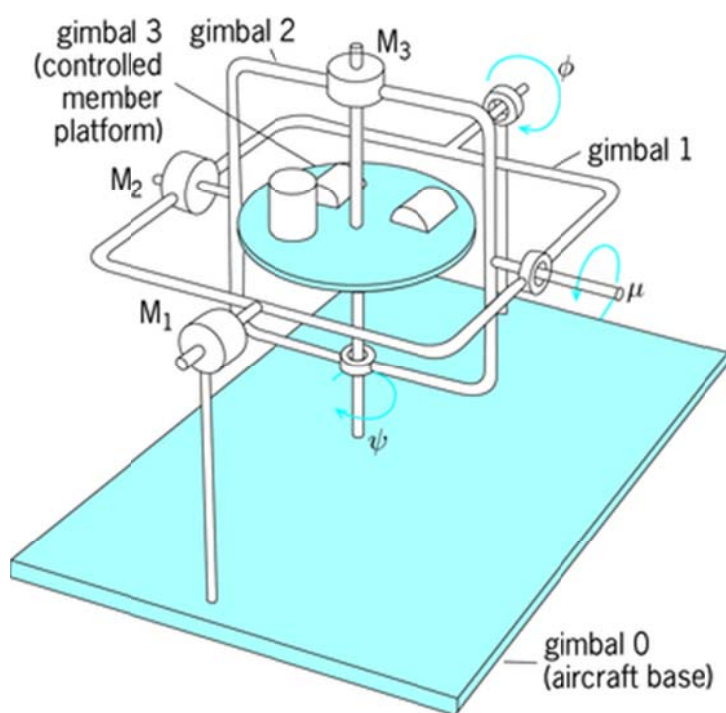


Figura 21. IMU Gimbal (amb suspensió Cardan) [41]

La configuració Strapdown és fixada directament al vehicle, amb algun aïllador per a absorbir les vibracions. És més petita i lleugera i té un consum de potència més baix. Tanmateix, com que els sensors han de seguir tots els moviments del vehicle, han de tenir més ample de banda i rang dinàmic; això fa que captin més soroll i augmentin els errors de no linealitat. També requereix més càlculs posteriors amb les dades dels sensors.

La configuració Gimbal munta els sensors sobre una plataforma que es manté estable respecte el sistema de referència extern, malgrat les rotacions del vehicle. La plataforma es manté unida al vehicle mitjançant tres o quatre anells amb eixos de rotació perpendiculars (suspensió de Cardan). Els eixos contenen sensors per a mesurar els seus angles de gir, i actuadors de gir que utilitzen les mesures dels giroscopis per a mantenir la plataforma dels sensors estable, en un llaç de realimentació. Les mesures finals són més precises ja que s'eliminen moltes fonts d'error, i requereixen menys potència de càlcul, però és una configuració més difícil de fabricar, cara i feixuga. El quart anell és necessari en vehicles molt maniobrables per a evitar possibilitats de bloqueig.

Una variació de la configuració Gimbal són els sistemes d'esfera flotant, que tenen els sensors dins d'una esfera que flota dins d'una altra esfera plena de líquid [Tol05]. Aquestes són les IMU més cares i sofisticades, amb un cost de centenars de milers d'euros per unitat, i són paradoxalment d'un sol ús, doncs s'utilitzen en míssils balístics.

Per a la navegació aèria, el desenvolupament dels giroscopis d'anell làser i de fibra òptica ha permès que les prestacions dels sistemes Strapdown igualin les dels Gimbal, amb una millor robustesa i facilitat de manteniment [42].

Les IMU integrades són àmpliament disponibles. El cercador Globalspec enllaça a més de 50 fabricants [43]. Les unitats més econòmiques (entre 60 € i 1000 €) són les basades en tecnologia microelectromecànica, com les d'Analog Devices [44]. Unitats de gamma mitjana, com les de Honeywell (uns 4000 €), es troben fins i tot en distribuïdors generals com Farnell [45].

També es pot integrar una IMU a partir dels components separats, i hi ha tutorials de com fer-ho [46]. Cal tenir especial cura en l'alineació dels acceleròmetres i dels giroscopis.

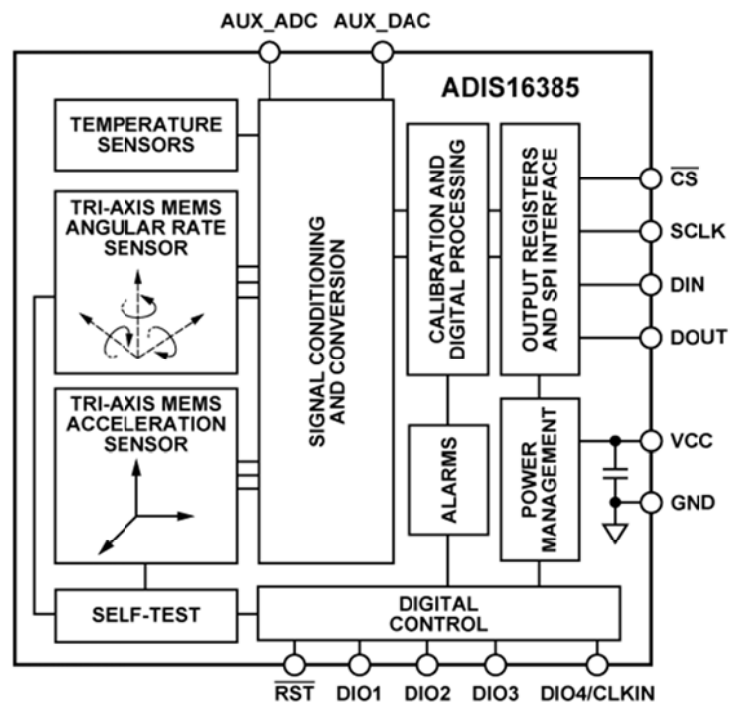


Figura 22. IMU integrada d'Analog Devices [44]

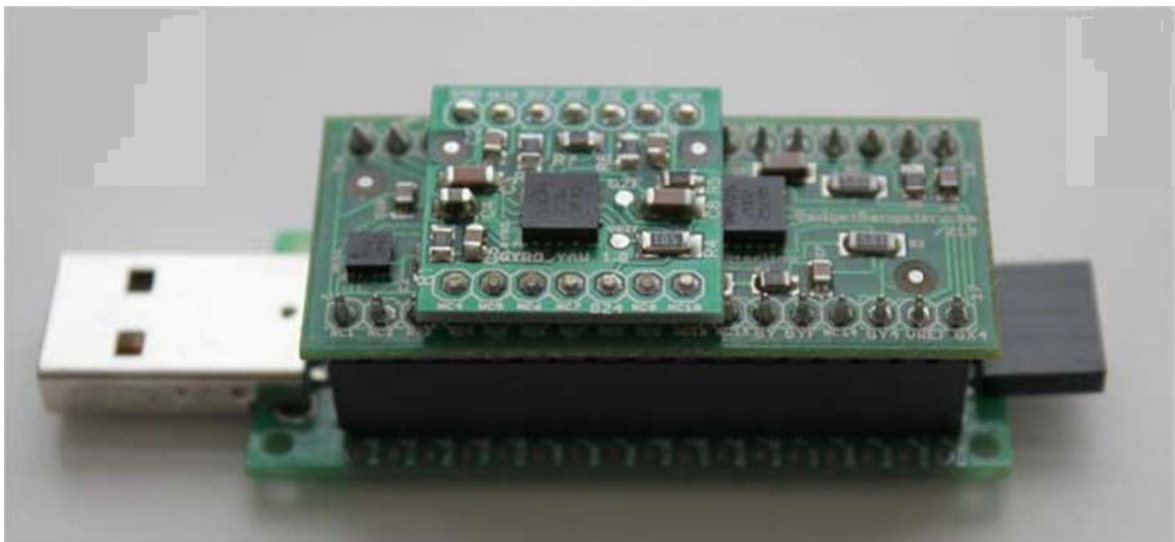


Figura 23. IMU integrada amb components separats [46]

3. FILTRES DE FUSIÓ I SUAVITZAT DE DADES.

Les dades sobre l'estat d'un vehicle (posició, velocitat, orientació...), obtingudes amb GPS i unitats de mesura inercial, s'han de fusionar i suavitzar per reduir els errors de mesura, i els errors del propi procés. El filtre de Kalman és l'algorisme de filtratge més utilitzat per a aquest fi, però també existeixen algorismes derivats o alternatius com l'IMM (Interacting Multiple Model).

A més de fusionar i suavitzar les mesures, aquests filtres són capaços de predir l'estat aproximat del sistema en els períodes en què hi ha mesures perdudes; actuen més com a estimadors que com a filtres.

Existeixen diverses arquitectures per a la fusió de les dades del GPS i de la IMU. Una arquitectura feblement acoblada conté filtres de Kalman separats per al GPS i per a la IMU. Les sortides d'un dels filtres poden actuar com a entrades addicionals per a l'altre filtre.

Una arquitectura fortament acoblada, en canvi, conté un únic filtre que integra totes les dades dels sensors. En aquest cas el model és molt més complex; es pot arribar a vectors d'estat amb 65 variables [Tol05]: posició, velocitat, acceleració, velocitat angular de gir, acceleració de gir, errors de temps del GPS, sortides de la IMU, errors de factor d'escala i desalineació,... Un vector d'estat de dimensió 65 comporta matrius molt grans i requereix una gran potència de càlcul. Una manera d'afrontar problemes com aquest és utilitzant tècniques de lògica difusa [Jwo12]

3.1. FILTRE DE KALMAN.

L'estat del vehicle en el temps de mostreig k es designa amb el vector $X(k)$. Aquest estat té un soroll de procés $V(k)$. L'equació d'estat que descriu l'evolució de l'estat X amb el temps és:

$$X(k+1) = F \cdot X(k) + \Gamma \cdot V(k) \quad (4)$$

sent F la matriu de transició d'estat, i Γ la matriu de guany del soroll de procés.

El vector de mesures $Z(k)$ té normalment dimensió inferior al vector d'estat $X(k)$, és a dir, no totes les variables d'estat són mesurades. A més, els errors dels sensors (GPS i sensors inercials) introdueixen un soroll de mesura $W(k)$. L'equació de la mesura és:

$$Z(k) = H \cdot X(k) + W(k) \quad (5)$$

sent H la matriu de mesura.

Per tal de fer el filtratge, es fa una primera predicció o estimació de l'estat $\hat{X}(k+1)$ en el temps $k+1$ a partir de la predicció de l'estat $\hat{X}(k)$ en el temps k :

$$\hat{X}(k+1) = F \cdot \hat{X}(k) \quad (6)$$

predicció que no incorpora el soroll de procés.

La predicció de la mesura $\hat{Z}(k+1)$ en el temps $k+1$ és:

$$\hat{Z}(k+1) = H \cdot \hat{X}(k+1) \quad (7)$$

sense incorporar tampoc el soroll de mesura.

La predicció de la mesura $\hat{Z}(k+1)$ es pot comparar amb la mesura real $Z(k+1)$, i el residu o diferència s'utilitzarà posteriorment per a corregir la predicció de l'estat $\hat{X}(k+1)$:

$$RES(k+1) = Z(k+1) - \hat{Z}(k+1) \quad (8)$$

Per a aquesta correcció de la predicció de l'estat s'utilitzarà un guany, el guany de Kalman, que s'obtindrà a partir de la covariància $P(k)$ de l'estat. Es fa una primera predicció de la covariància de l'estat $P(k+1)$ en el temps $k+1$:

$$P(k+1) = F \cdot P(k) \cdot F^T + \Gamma \cdot Q \cdot \Gamma^T \quad (9)$$

sent Q la matriu de covariància del soroll de procés.

Després es calcula la covariància d'innovació $S(k+1)$:

$$S(k+1) = H \cdot P(k+1) \cdot H^T + R \quad (10)$$

sent R la matriu de covariància del soroll de mesura.

Ara ja es pot calcular el guany $W(k+1)$ del filtre de Kalman:

$$W(k+1) = P(k+1) \cdot H^T \cdot S^{-1}(k+1) \quad (11)$$

Amb aquest guany es pot corregir la predicció de la covariància de l'estat $P(k+1)$:

$$P(k+1) = P(k+1) - W(k+1) \cdot S(k+1) \cdot W^T(k+1) \quad (12)$$

I finalment, es pot corregir també la predicció de l'estat $\hat{X}(k+1)$, que indica la posició estimada del vehicle:

$$\hat{X}(k+1) = \hat{X}(k+1) + W(k+1) \cdot RES(k+1) \quad (13)$$

Aquest valor $\hat{X}(k+1)$ és doncs el resultat de l'aplicació del filtre de Kalman, i juntament amb la covariància de l'estat $P(k+1)$, s'utilitza com a valor de partida per a la següent iteració, en el temps de mostreig $k+2$.

La figura 24 resumeix l'algorisme del filtre de Kalman.

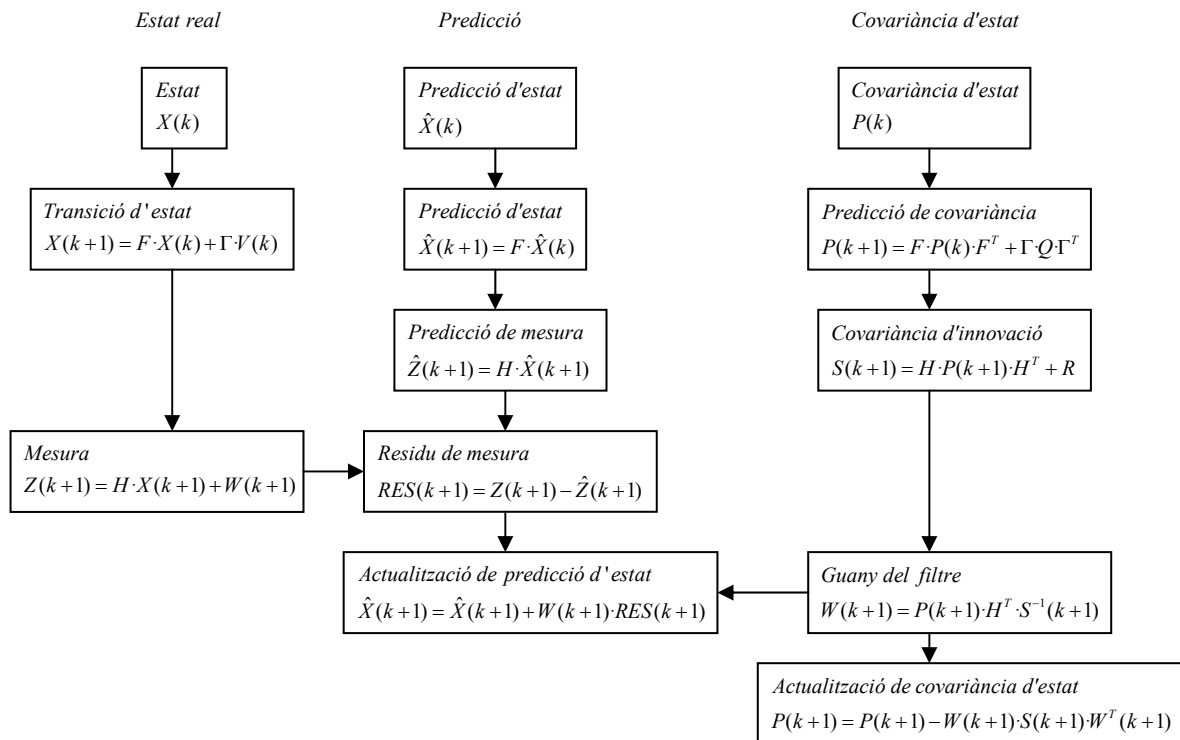


Figura 24. Filtre de Kalman.

3.2. FILTRE IMM.

El filtre de Kalman funciona prou bé quan el model del sistema és lineal (vehicle en moviment suau), però no tant per a les fortes no-linealitats (maniobres brusques). Sempre que l'escenari sigui bastant diferent del model lineal en què es basa el filtre, les seves prestacions no seran bones.

Si s'intenten absorbir les maniobres brusques amb un soroll de procés gran, el filtre serà sorollós (filtrarà poc) durant les fases de moviment suau. Si el soroll de procés és petit, per suavitzar bé el soroll del senyal durant el moviment suau, aleshores no hi haurà un bon seguiment de les maniobres brusques. El filtre de Kalman s'adapta bé doncs a un dels models del moviment, però no a tots. Si s'introdueixen més variables en el model del sistema, per intentar descriure bé tant el moviment suau com les maniobres, la complexitat pot augmentar bastant.

El filtre de Kalman estès (EKF) pot ser una solució per a sistemes no lineals, però les seves prestacions tampoc són ideals, ja que és molt sensible a la precisió de les mesures inicials [Tol05].

El filtre interactiu multimodel (IMM) s'adapta millor a la combinació de fases de vol suau i fases de maniobres brusques, i en general a qualsevol situació en què les dades responguin a models diferents, doncs utilitza més d'un model per al sistema, cadascun d'ells adaptat a diferents característiques del moviment.

Els models poden diferir simplement en el valor numèric del soroll de procés (un valor petit s'adaptarà millor al moviment suau, i un valor gran a les maniobres brusques), o bé poden incorporar variables diferents o addicionals, facilitant que cada model s'adapti millor a les mesures d'un tipus de sensor determinat.

Cada model es tracta amb un filtre de Kalman, i tots ells funcionen en paral·lel. L'estimació de l'estat s'obté mitjançant la interacció (barreja) de les estimacions dels diferents models. Amb cada mesura, s'estima la probabilitat que el sistema correspongui al model de cada filtre, i es pren l'estimació del filtre més probable, o bé una combinació de les estimacions de tots els filtres, amb diferents pesos.

La figura 25 resumeix les fases de l'algorisme del filtre IMM, amb dos models. En els apartats següents es desenvolupen amb més detall.

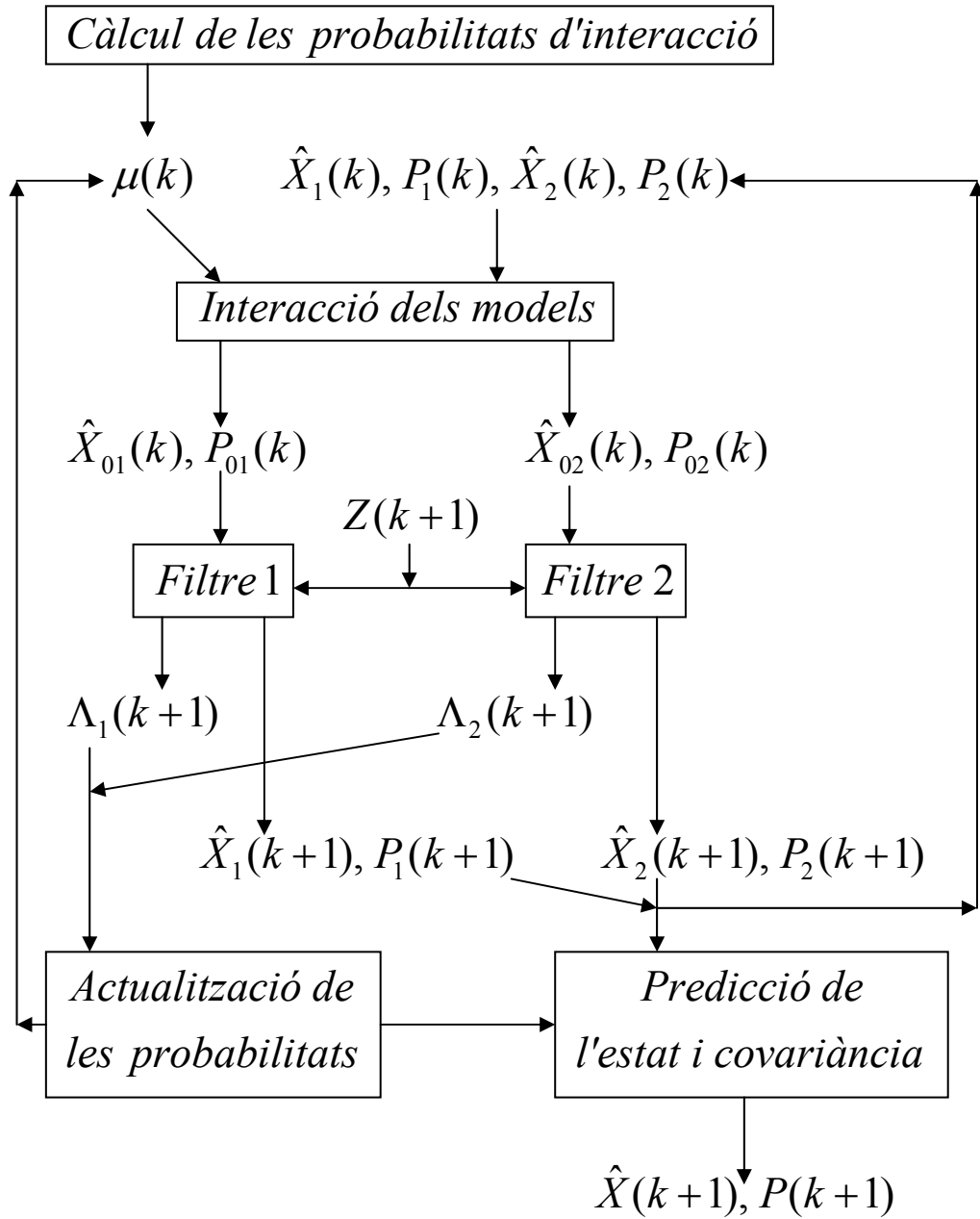


Figura 25. Filtre IMM amb dos models.

3.2.1. CÀLCUL DE LES PROBABILITATS D'INTERACCIÓ.

Les probabilitats de transició entre els models són descrites en forma matricial; per exemple, en cas d'utilitzar dos models la probabilitat de transició del model i al model j és Π_{ij} , i la matriu de probabilitat de transició és:

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Naturalment, la suma de les probabilitats de cada fila és 1; qualsevol model i es pot mantenir en el següent temps de mostreig, o es pot passar a algun altre model j dels r models possibles:

$$\sum_{j=1}^r \Pi_{ij} = 1 \quad (15)$$

A [Tol05] hi ha referències a estudis sobre com fixar els valors de la matriu de probabilitat de transició. Una possibilitat raonable, descrita a [Kir00], és fer-ho a partir del número de mostres abans de cada canvi de model (moviment suau o maniobres brusques).

Les probabilitats inicials de cada model i es designen amb μ_i ; aleshores, la probabilitat C_j que el sistema estigui en l'estat descrit pel model j , en el següent període de mostreig, és:

$$C_j = \sum_{i=1}^r \Pi_{ij} \mu_i \quad (16)$$

Donat un cert estat j , la probabilitat que vingui de l'estat i en l'anterior període de mostreig es designa amb μ_{ij} , i es pot calcular amb:

$$\mu_{ij} = \frac{\Pi_{ij} \mu_i}{C_j} \quad (17)$$

3.2.2. INTERACCIÓ DELS MODELS.

Cadascun dels models, en el temps de mostreig k , proporciona una predicció de l'estat $\hat{X}_i(k)$. El filtre interactiu multimodel combina aquestes prediccions a l'inici de cada cicle, obtenint una predicció inicial de l'estat per a ser utilitzada per cadascun dels filtres:

$$\hat{X}_{0j}(k) = \sum_{i=1}^r \mu_{ij}(k) \hat{X}_i(k) \quad (18)$$

Anàlogament, a partir de la predicció de la covariància de l'estat $P_i(k)$ proporcionada per cadascun dels models, s'obté una predicció inicial de la covariància de l'estat per a ser utilitzada per cadascun dels filtres:

$$P_{0j}(k) = \sum_{i=1}^r \mu_{ij}(k) \left\{ P_i(k) + [\hat{X}_i(k) - \hat{X}_{0j}(k)] [\hat{X}_i(k) - \hat{X}_{0j}(k)]^T \right\} \quad (19)$$

3.2.3. FILTRATGE.

L'evolució de l'estat del vehicle amb el temps es descriu amb la mateixa equació d'estat utilitzada a l'apartat del filtre de Kalman:

$$X(k+1) = F \cdot X(k) + \Gamma \cdot V(k) \quad (20)$$

sent F la matriu de transició d'estat, $V(k)$ el soroll de procés, i Γ la matriu de guany del soroll de procés.

El vector de mesures es descriu també amb la mateixa equació:

$$Z(k) = H \cdot X(k) + W(k) \quad (21)$$

sent H la matriu de mesura, i $W(k)$ el soroll de mesura.

Cadascun dels filtres fa una predicció inicial de l'estat $\hat{X}_j(k+1)$ en el temps $k+1$ a partir de la predicció $\hat{X}_{0j}(k)$ de l'equació (18):

$$\hat{X}_j(k+1) = F \cdot \hat{X}_{0j}(k) \quad (22)$$

Igualment, cadascun dels filtres fa una predicció inicial de la covariància de l'estat $P_j(k+1)$ en el temps $k+1$ a partir de la predicció $P_{0j}(k)$ de l'equació (19):

$$P_j(k+1) = F \cdot P_{0j}(k) \cdot F^T + \Gamma \cdot Q_j \cdot \Gamma^T \quad (23)$$

sent Q_j la matriu de covariància del soroll de procés per al model j .

La predicció de la mesura $\hat{Z}_j(k+1)$ en el temps $k+1$ per a cada model j és:

$$\hat{Z}_j(k+1) = H \cdot \hat{X}_j(k+1) \quad (24)$$

Per cadascun dels filtres, es compara la predicció de la mesura $\hat{Z}_j(k+1)$ amb la mesura real $Z(k+1)$, obtenint un residu o diferència:

$$RES_j(k+1) = Z(k+1) - \hat{Z}_j(k+1) \quad (25)$$

Després es calcula la covariància d'innovació $S_j(k+1)$:

$$S_j(k+1) = H \cdot P_j(k+1) \cdot H^T + R \quad (26)$$

sent R la matriu de covariància del soroll de mesura.

El guany $W_j(k+1)$ de cadascun dels filtres de Kalman és:

$$W_j(k+1) = P_j(k+1) \cdot H^T \cdot S_j^{-1}(k+1) \quad (27)$$

L'estat $\hat{X}_j(k+1)$ estimat per cadascun dels models es pot corregir amb el guany de cada filtre:

$$\hat{X}_j(k+1) = \hat{X}_j(k+1) + W_j(k+1) \cdot RES_j(k+1) \quad (28)$$

La covariància de l'estat $P_j(k+1)$ estimada per cada model també es pot corregir:

$$P_j(k+1) = P_j(k+1) - W_j(k+1) \cdot S_j(k+1) \cdot W_j^T(k+1) \quad (29)$$

3.2.4. ACTUALITZACIÓ DE LES PROBABILITATS.

Al final del cicle cal actualitzar les probabilitats de cada model, per a la següent iteració; això es fa a partir d'una distància estadística (escalar), calculada amb el residu i amb la covariància d'innovació:

$$d_j^2(k+1) = RES_j^T(k+1) \cdot S_j^{-1}(k+1) \cdot RES_j(k+1) \quad (30)$$

Així, cada model té una funció de versemblança $\Lambda_j(k+1)$:

$$\Lambda_j(k+1) = \frac{\exp\left(-\frac{d_j^2(k+1)}{2}\right)}{\sqrt{(2\pi)^2 |S_j(k+1)|}} \quad (31)$$

que permet actualitzar les probabilitats de cada model:

$$\mu_j(k+1) = \frac{\Lambda_j(k+1) \cdot C_j(k)}{C} \quad (32)$$

sent $C_j(k)$ la probabilitat que el sistema estigui en l'estat descrit pel model j , definida a l'equació (16), i sent C una constant de normalització:

$$C = \sum_{j=1}^r \Lambda_j(k+1) \cdot C_j(k) \quad (33)$$

3.2.5. PREDICCIÓ D'ESTAT I COVARIÀNCIA.

Finalment es poden combinar els estats estimats per cadascun dels models $\hat{X}_j(k+1)$ per obtenir l'estat estimat global $\hat{X}(k+1)$:

$$\hat{X}(k+1) = \sum_{j=1}^r \mu_j(k+1) \cdot \hat{X}_j(k+1) \quad (34)$$

Igualment es poden combinar les covariàncies d'estat estimades $P_j(k+1)$ per obtenir la covariància d'estat estimada global:

$$P(k+1) = \sum_{j=1}^r \mu_j(k+1) \left\{ P_j(k+1) + \left[\hat{X}_j(k+1) - \hat{X}(k+1) \right] \left[\hat{X}_j(k+1) - \hat{X}(k+1) \right]^T \right\} \quad (35)$$

La predicció de la mesura $\hat{Z}(k+1)$ és:

$$\hat{Z}(k+1) = H \cdot \hat{X}(k+1) \quad (36)$$

Les tres darreres equacions descriuen l'estat del vehicle, encara que no són necessàries per a l'algorisme del filtre.

3.3. ALTRES FILTRES.

A més dels filtres de Kalman i IMM, estudiats en aquest treball, existeixen variacions d'aquests algorismes, o algorismes alternatius, que també s'utilitzen per a la fusió i suavitzat de dades dels sensors. Alguns d'ells són mencionats a [Tol05] i [Bar01].

EKF – Extended Kalman Filter – Filtre de Kalman Estès. Linealització del filtre de Kalman amb sèries de Taylor, per a models no lineals del sistema (maniobres brusques). És molt sensible a la precisió de les dades inicials. L'avaluació de les derivades en els punts estimats enlloc dels punts exactes també causa un error.

IEKF – Iterated Extended Kalman Filter – Filtre de Kalman Estès Iterat. Es fan una o més relinealitzacions per a compensar errors.

AKF – Adaptive Kalman Filter – Filtre de Kalman Adaptatiu. El guany del filtre es sintonitza adaptant-se a les variacions dels senyals mesurats pels sensors, com l'acceleració [Li 13].

CKF – Cubature Kalman Filter – Filtre de Kalman de Quadratura. És adequat per a sistemes no lineals amb moltes variables. El terme “quadratura” fa referència a la integració numèrica; en anglès s'utilitza “cubature” per a integrals múltiples.

PF – Particle Filter – Filtre de Partícules. Apropiat per a sistemes no lineals i no gaussians. Es basa en simulacions repetides (mètodes de Monte Carlo), representant les densitats de probabilitat de manera puntual (“partícules”).

IF – Information Filter – Filtre d'Informació. És matemàticament equivalent al filtre de Kalman, amb la matriu de covariància de l'estat $P(k)$ substituïda per la seva inversa, la matriu d'informació $Y(k)$. És més senzill d'implementar quan cal fusionar la informació de molts sensors.

EIF – Extended Information Filter – Filtre d'Informació Estès. Adaptació del filtre d'informació per a models no lineals.

CIF – Covariance Intersection Filter – Filtre d'Intersecció de Covariàncies. Útil per a combinar dues o més estimacions en un sistema de processament descentralitzat.

PDAF – Probabilistic Data Association Filter – Filtre d'Associació de Dades Probabilístiques. Útil per al seguiment d'un vehicle amb múltiples mesures, algunes d'elles falses. El filtre assigna una probabilitat a cada mesura, i les combina.

IE – Input Estimation – Estimació de l'Entrada. Model de les maniobres com una entrada desconeguda, estimació de la seva magnitud i temps d'inici, començant en una finestra lliscant de les darreres mesures, i correcció posterior de l'estimació de l'estat. Requereix molts més filtres en paral·lel que l'IMM, amb prestacions similars [Bar89].

VSD – Variable State Dimension – Dimensió Variable de l'Estat. Model d'ordre baix en moviment suau (per exemple, posicions i velocitats), i d'ordre alt en maniobres (per exemple, posicions, velocitats i acceleracions). Les acceleracions per tant no es consideren soroll, sinó part de l'estat. Cal una reinicialització en detectar les maniobres.

SMM – Static Multiple Model – Model Múltiple Estàtic. Cada model es tracta amb un filtre de Kalman, i tots els models funcionen en paral·lel, però no hi ha barreja entre els models, cadascun s'executa de manera independent, amb la seva estimació d'estat, covariància, i funció de versemblança, que finalment es combinen per produir una estimació global.

DMM – Dynamic Multiple Model – Model Múltiple Dinàmic. Els models poden anar commutant amb el temps, depenent de tota la història del sistema; per aquest motiu la seva implementació no és pràctica, i s'utilitzen mètodes subòptims com l'IMM o el GPB.

GPBE – Generalized Pseudo-Bayesian Estimator – Estimador Pseudo-Bayesià Generalitzat. Considera únicament el darrer (o els dos darrers) període de mostreig, enlloc de tota la història del sistema.

4. COMPARACIÓ DE PRESTACIONS DELS FILTRES.

Els algorismes del filtre de Kalman i del filtre IMM s'han codificat com a funcions de Matlab, i s'han fet algunes proves per a comparar les seves prestacions, aplicant-los al moviment d'un vehicle. S'ha triat el moviment típic d'un petit vehicle aeri no tripulat, amb una velocitat de 15 m/s (54 km/h.)

4.1. TRAJECTÒRIA DEL VEHICLE.

Per tal d'il·lustrar la diferència entre un filtre adaptatiu, com el filtre IMM, i un que no ho és, com el filtre de Kalman simple, s'ha considerat una trajectòria del vehicle que alterna quatre trams rectes i quatre corbes tancades de 90°, de manera que el vehicle retorni a la seva posició inicial.

És suficient considerar el moviment del vehicle en dues dimensions, en un pla horitzontal. A [Bar01] es justifica, amb referència a un article anterior dels mateixos autors, que els models de moviment vertical i horitzontal es poden desacoblar. Per tant, el vector d'estat $X(k)$ en el temps k s'ha definit amb dimensió 4 (posició i velocitat en les dues coordenades x,y del pla horitzontal).

$$X(k) = [x(k) \quad \dot{x}(k) \quad y(k) \quad \dot{y}(k)]^T \quad (37)$$

La matriu de transició d'estat F , que descriu l'evolució de l'estat amb el temps, és doncs:

$$X(k+1) = F \cdot X(k) \quad (38)$$

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \dot{x}(k+1) \\ y(k+1) \\ \dot{y}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \dot{x}(k) \\ y(k) \\ \dot{y}(k) \end{bmatrix}$$

Per conveniència a la representació gràfica de les trajectòries, s'ha triat el punt inicial de la trajectòria a una distància de 2000 m de l'origen de coordenades, en cadascuna

de les dues coordenades, i s'ha triat la velocitat inicial de 15 m/s en direcció x, amb velocitat inicial nul·la en direcció y.

$$X(0) = [2000 \quad 15 \quad 2000 \quad 0]^T \quad (39)$$

El temps de mostreig triat ha estat $T = 10 \text{ s}$, un temps típic entre les mesures d'un GPS. S'han pres 40 mostres en cadascun dels 4 trams rectes, i 20 mostres en cadascuna de les 4 corbes. Això fa un total de 240 mostres, corresponents a un temps de vol de 40 minuts, i a una distància total recorreguda de 36 km.

S'ha introduït un soroll de procés $V(k)$ per a modelitzar les pertorbacions externes sobre el moviment del vehicle (com els canvis en la velocitat i direcció del vent). Aquest soroll s'ha modelitzat com a acceleració, i provocarà sobre el vehicle petits canvis en la seva velocitat. S'ha triat un valor petit per a aquest error, amb una desviació estàndard de 0.002 m/s^2 . La matriu de guany del soroll de procés Γ , que relaciona aquest soroll amb l'estat del vehicle (posició i velocitat) és doncs:

$$X(k+1) = F \cdot X(k) + \Gamma \cdot V(k)$$

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \dot{x}(k+1) \\ y(k+1) \\ \dot{y}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \dot{x}(k) \\ y(k) \\ \dot{y}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} & 0 \\ T & 0 \\ 0 & \frac{T^2}{2} \\ 0 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x(k) \\ V_y(k) \end{bmatrix} \quad (40)$$

Les corbes s'han modelitzat mitjançant una acceleració $A = [A_x \quad A_y]^T$. Com que són corbes de 90° , uns valors d'acceleració $A_x = \pm 0.075 \text{ m/s}^2$ i $A_y = \pm 0.075 \text{ m/s}^2$, durant un temps de 200 s, que és la durada dels trams de gir, provoquen unes variacions de velocitat de 15 m/s. Els quatre trams rectes es caracteritzen, cadascun d'ells, per unes velocitats en m/s:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 15 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_5 \\ \dot{y}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_7 \\ \dot{y}_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -15 \end{bmatrix} \quad (41)$$

Per tant, en els quatre trams de gir són necessàries unes acceleracions en m/s^2 :

$$\begin{bmatrix} A_{x2} \\ A_{y2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.075 \\ +0.075 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} A_{x4} \\ A_{y4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.075 \\ -0.075 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} A_{x6} \\ A_{y6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +0.075 \\ -0.075 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} A_{x8} \\ A_{y8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +0.075 \\ +0.075 \end{bmatrix} \quad (42)$$

I en els quatre trams rectes les acceleracions són òbviament:

$$\begin{bmatrix} A_{x1} \\ A_{y1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{x3} \\ A_{y3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{x5} \\ A_{y5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{x7} \\ A_{y7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (43)$$

Aquestes acceleracions s'introdueixen a l'equació del procés com:

$$X(k+1) = F \cdot X(k) + \Gamma \cdot V(k) + G \cdot A(k) \quad (44)$$

sent $A(k)$ les acceleracions en cadascun dels trams, i G la matriu de guany d'acceleració, que és idèntica a la matriu de guany de soroll de procés Γ , encara que per claredat de les fórmules s'han escrit per separat.

A les figures 26 i 27 s'il·lustren dos exemples de trajectòries del vehicle. El punt de sortida és $x = 2000$ m, $y = 2000$ m. S'observa que els punts d'arribada no coincideixen exactament amb el punt de sortida, i són diferents per cada exemple de trajectòria. Això és degut al soroll de procés $V(k)$ que s'ha introduït. Amb una desviació estàndard del soroll de procés menor o major que 0.002 m/s^2 , els punts d'arribada haguessin estat més o menys propers al punt de sortida.

4.2. MESURES DELS SENSORS.

El vector de mesures no té perquè contenir totes les variables del vector d'estat. S'ha començat mesurant únicament les posicions:

$$Z(k) = [x(k) \quad y(k)]^T \quad (45)$$

Per tant la matriu de mesura és senzillament:

$$Z(k) = H \cdot X(k) \quad (46)$$

$$\begin{bmatrix} x(k) \\ y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(k) \\ \dot{x}(k) \\ y(k) \\ \dot{y}(k) \end{bmatrix}$$

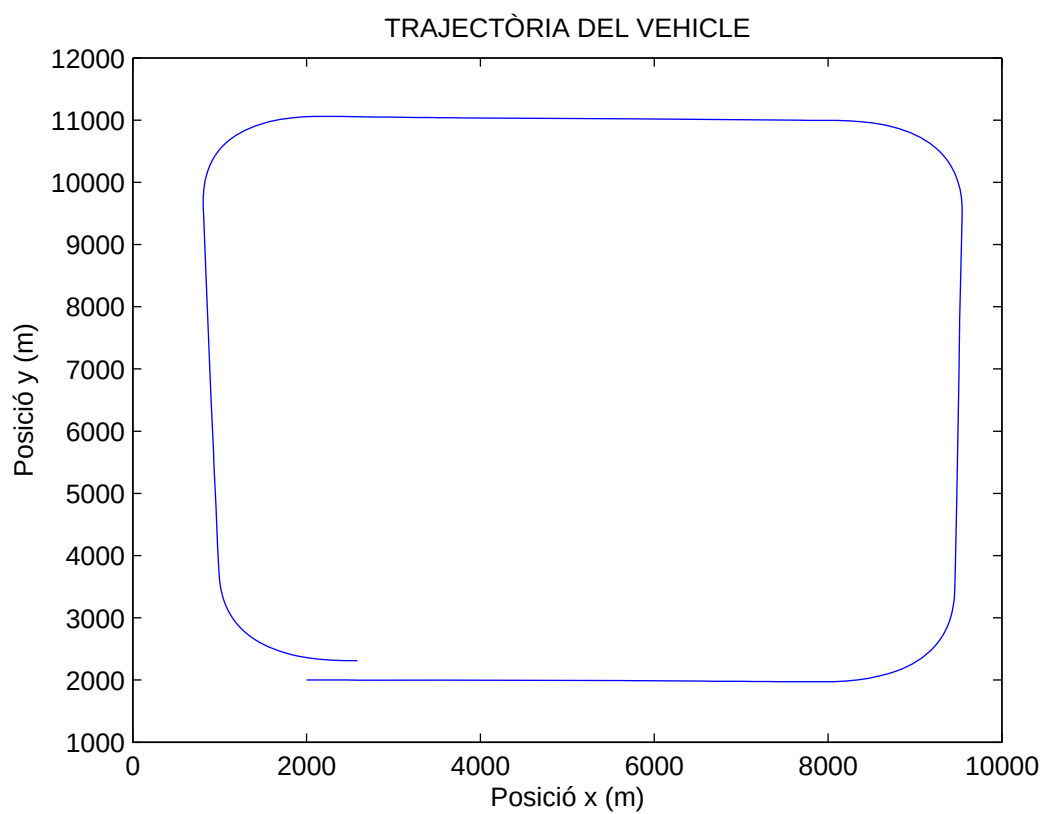


Figura 26. Exemple de trajectòria (1).

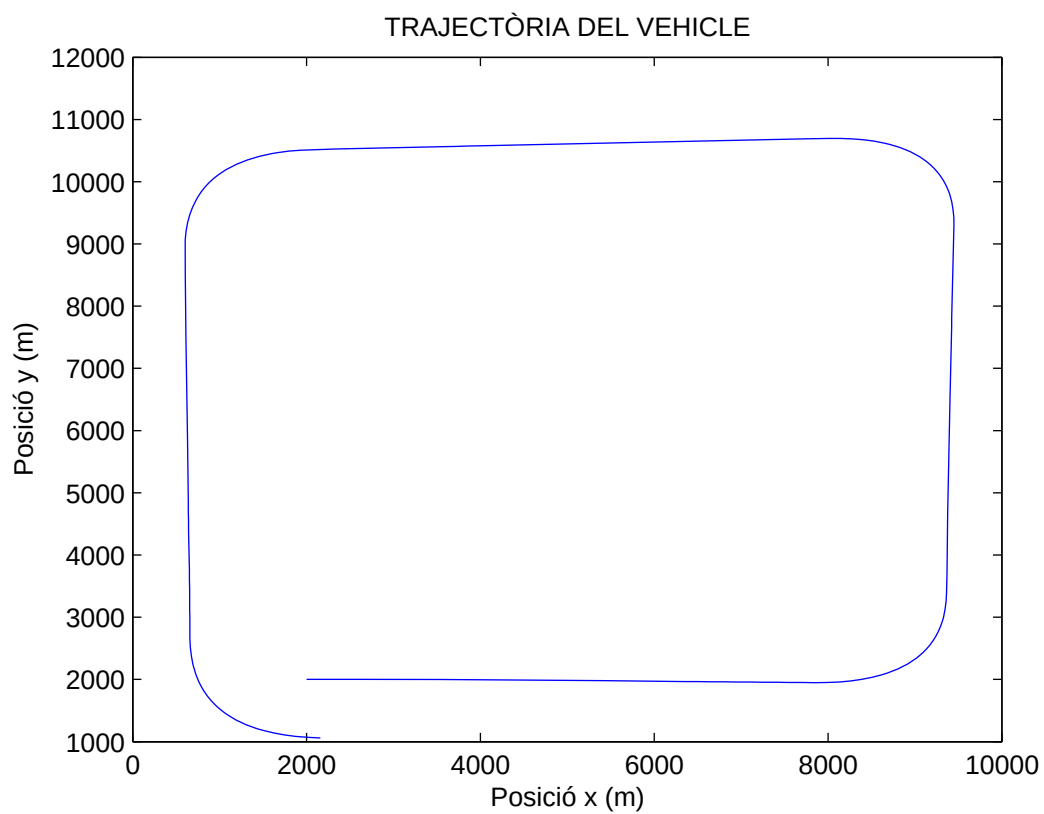


Figura 27. Exemple de trajectòria (2).

Aquestes mesures de posició, que són proporcionades pel GPS, tenen un cert error de mesura. A l'apartat 2.1.6. s'ha considerat un error de posició d'un GPS d'uns 24 m, sense cap de les millores de precisió descrites a l'apartat 2.1.7. Per avaluar els filtres s'ha arrodonit l'error de posició cap amunt fins als 100 m de desviació estàndard, valor molt més conservador però que seria indicatiu del pitjor cas, i que permet il·lustrar millor les diferències de prestacions entre els filtres estudiats. L'error de mesura es designa amb $W(k) = [W_x(k) \ W_y(k)]^T$, i s'inclou a l'equació de mesura:

$$Z(k) = H \cdot X(k) + W(k) \quad (47)$$

La figura 28 il·lustra les mesures obtingudes pels sensors, amb el seu error, i la trajectòria de referència. Cal tenir present que les dades de la trajectòria de referència s'inclouen únicament per a comprovar visualment la menor o major exactitud de les mesures, però aquestes dades de la trajectòria de referència no són accessibles per als filtres. Els filtres treballen únicament amb les mesures.

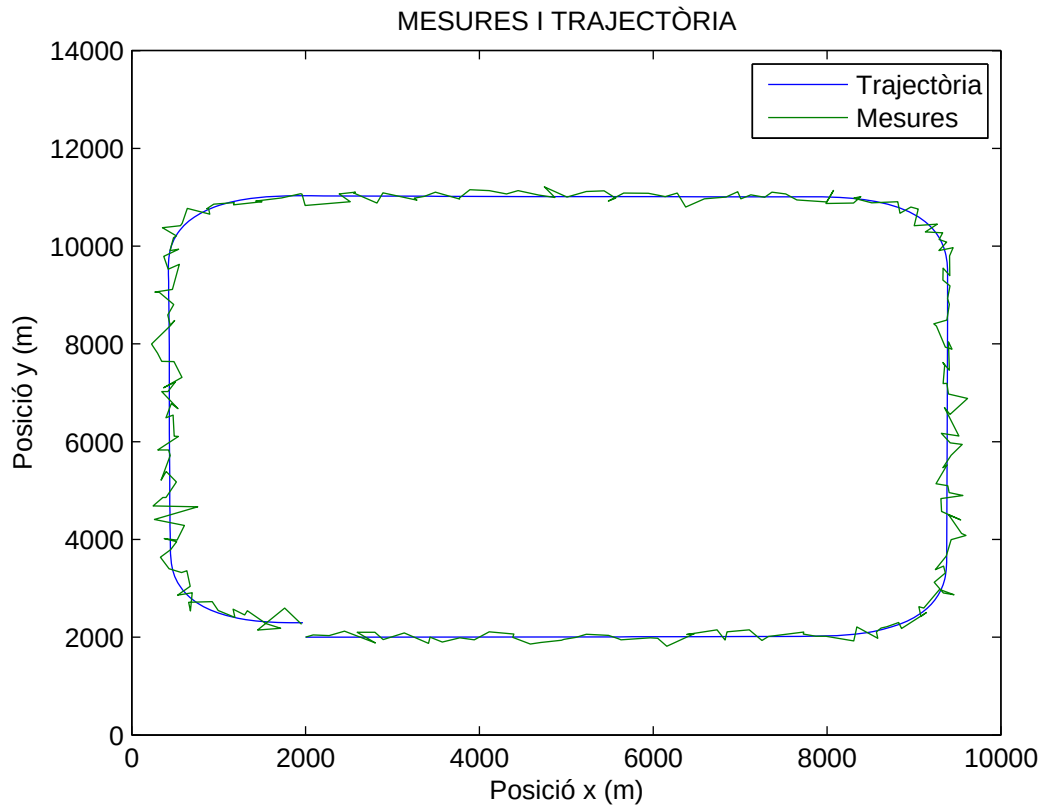


Figura 28. Mesures i trajectòria.

4.3. PROVES DEL FILTRE DE KALMAN.

El filtre de Kalman té accés únicament a les dades de les mesures, i no sap en quins moments el vehicle s'accelera i comença a maniobrar. L'acceleració es modelitza com a soroll de procés, amb una desviació estàndard σ_A . Si es coneixen aproximadament les acceleracions a què està sotmès el vehicle, sembla raonable modelitzar-les amb una acceleració similar. En el nostre cas es podria utilitzar:

$$\sigma_A \approx \sqrt{2} \cdot 0.075 \text{ m/s}^2 \approx 0.1 \text{ m/s}^2 \quad (48)$$

La figura 29 mostra el resultat d'aplicar a les dades mesurades el filtre de Kalman amb $\sigma_A \approx 0.1 \text{ m/s}^2$. Les prestacions del filtre són prou bones; d'una banda, suavitza bastant el soroll de mesura (encara que no del tot), i d'altra banda, segueix prou bé el moviment del vehicle a les corbes, (encara que no tan bé com als trams rectes, ja que en alguna de les corbes s'observa una petita inèrcia).

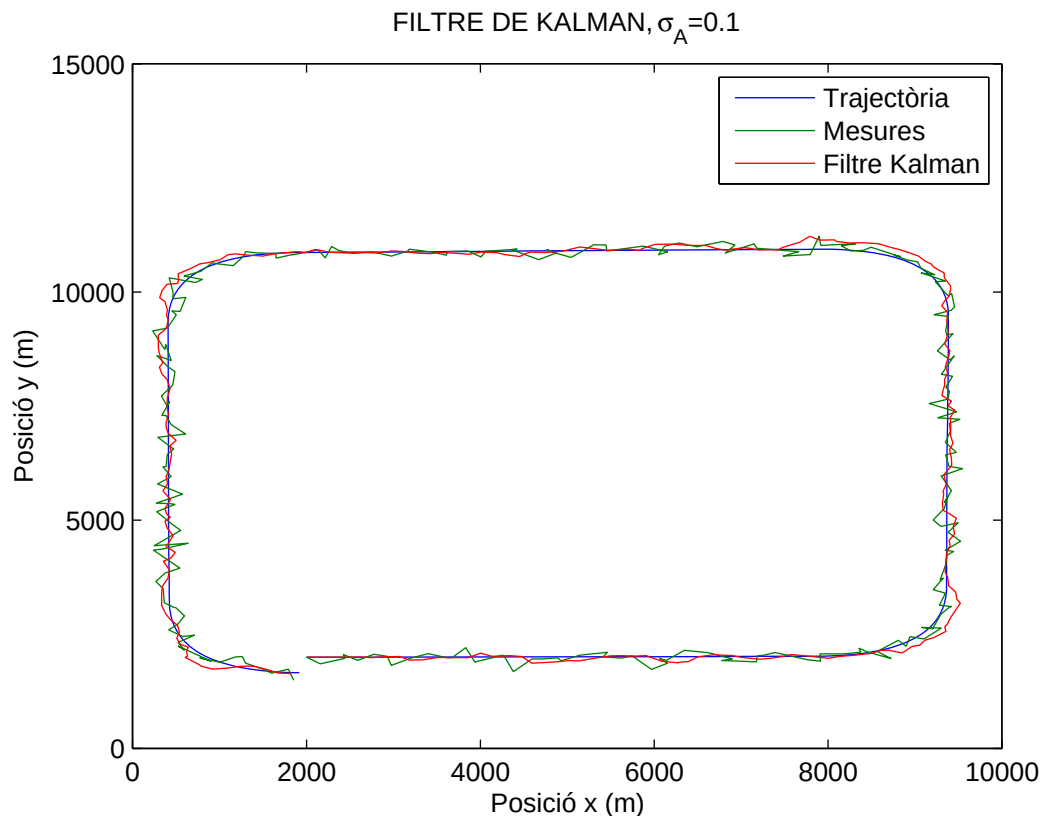


Figura 29. Filtre de Kalman ben sintonitzat.

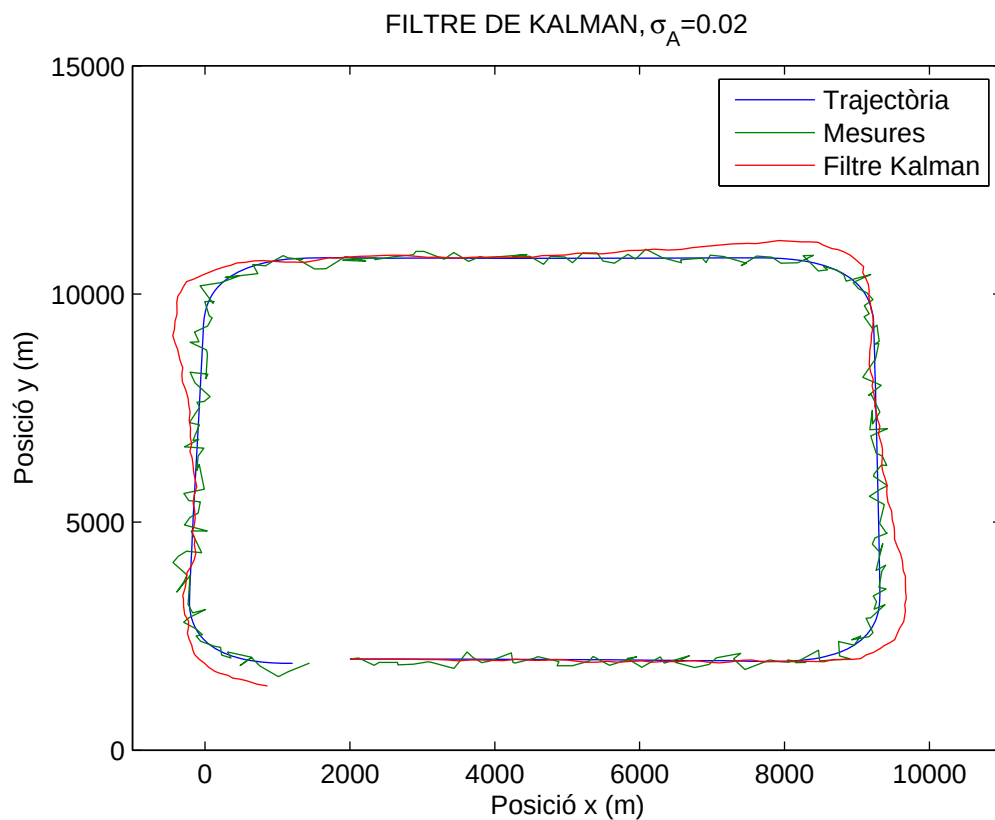


Figura 30. Filtre de Kalman amb massa inèrcia.

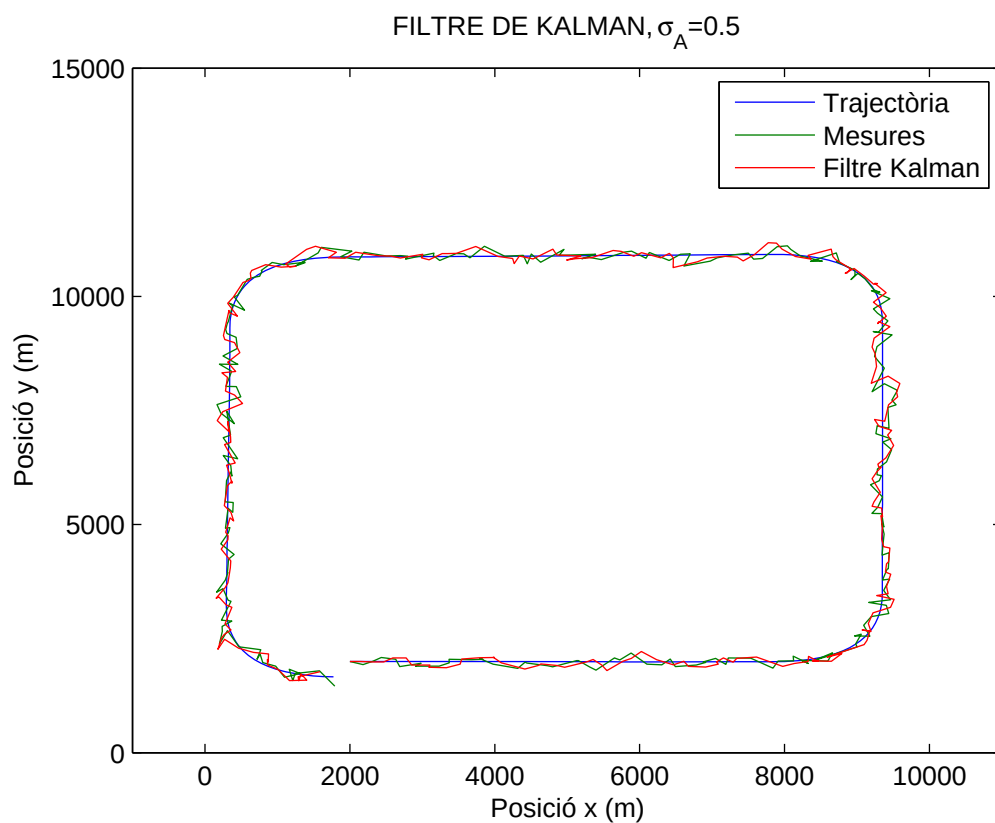


Figura 31. Filtre de Kalman amb massa soroll.

Les figures 30 i 31 mostren dos exemples del filtre de Kalman mal sintonitzat. En el primer cas, amb un paràmetre d'acceleració massa petit, cinc vegades inferior a l'òptim ($\sigma_A = 0.02 \text{ m/s}^2$), el soroll de mesura queda completament eliminat, però el seguiment de la trajectòria quan hi ha maniobres brusques és molt dolent, el filtre té molta inèrcia.

En el segon cas, amb un paràmetre d'acceleració massa gran, cinc vegades superior a l'òptim ($\sigma_A = 0.5 \text{ m/s}^2$), el seguiment de la trajectòria és molt bo, fins i tot durant les maniobres brusques, però el filtre filtra molt poc, no elimina el soroll de mesura.

La sintonització aproximada del filtre de Kalman a $\sigma_A = 0.1 \text{ m/s}^2$ es pot intentar millorar. S'ha calculat d'una banda l'error de posició de pic, que és la distància màxima en tota una trajectòria entre la posició estimada pel filtre i la posició real. D'altra banda, s'ha calculat l'error de posició rms en tota la trajectòria, sumant els quadrats dels errors de tots els punts i fent l'arrel quadrada. Donat que el vector d'estat conté també les velocitats, s'ha repetit el càlcul per als errors de pic i rms de velocitat. Tots aquests paràmetres, especialment els rms, permeten avaluar el filtre d'una manera quantitativa, no únicament qualitativa com s'ha fet fins ara.

Tanmateix, hi ha molta variabilitat en aquests errors d'una trajectòria a una altra, per això s'ha calculat la mitjana de cadascun dels errors en 1000 trajectòries diferents.

Tot aquest càlcul s'ha repetit per diferents valors del paràmetre d'acceleració σ_A , al voltant de 0.1 m/s^2 , que és el valor que semblava òptim a les gràfiques del principi d'aquest apartat. S'ha provat des de $\sigma_A = 0.07 \text{ m/s}^2$ fins a $\sigma_A = 0.22 \text{ m/s}^2$, amb increments de 0.01 m/s^2 . A les figures 32 a 35 es mostren els resultats.

El valor òptim és $\sigma_A = 0.13 \text{ m/s}^2$, molt proper al valor de 0.1 m/s^2 estimat qualitativament. L'execució ha requerit un temps de càlcul considerable, d'alguns minuts, ja que amb menys de 1000 trajectòries les gràfiques són més irregulars.

Aquest mètode de sintonia quantitativa del filtre de Kalman resulta útil, sobretot, quan les acceleracions a què està sotmès el vehicle són molt variables i desconegudes. Així no cal una estimació prèvia.

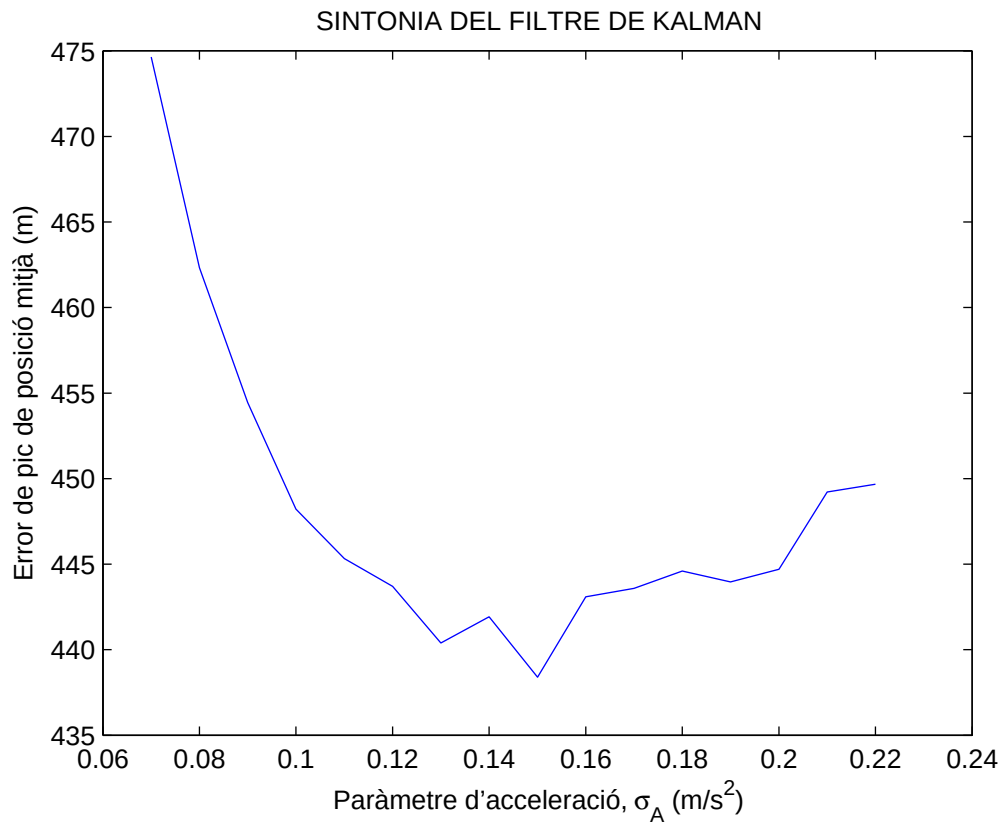


Figura 32. Sintonia del filtre de Kalman. Error de pic de posició.

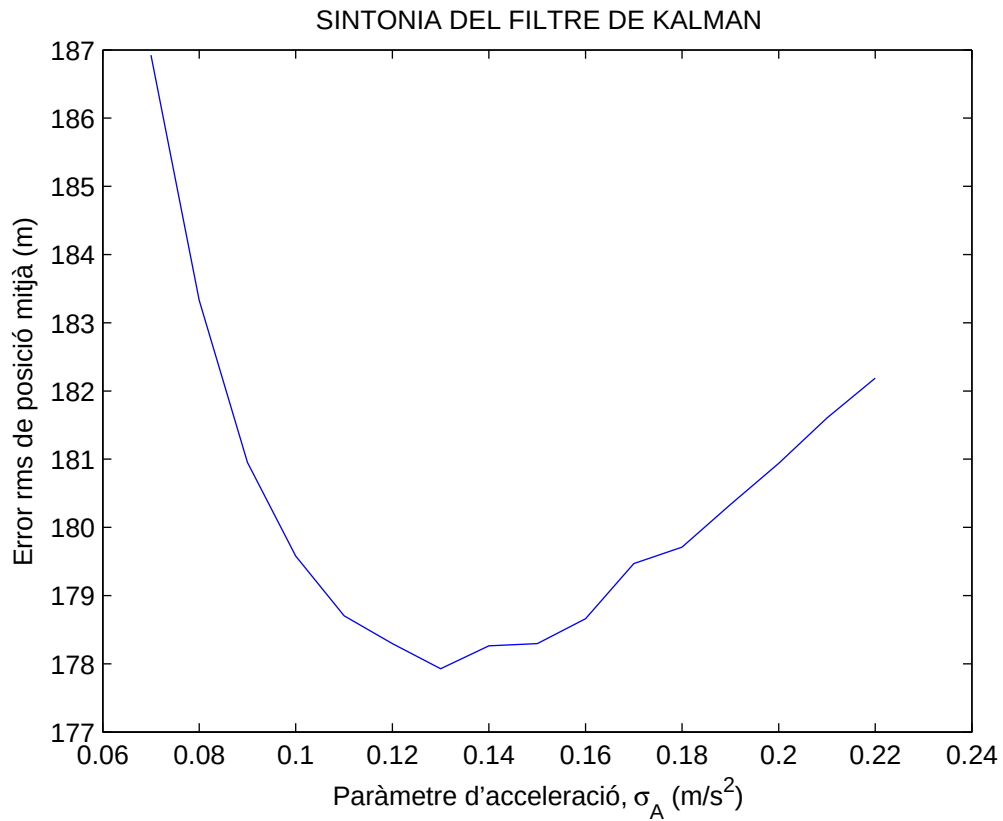


Figura 33. Sintonia del filtre de Kalman. Error rms de posició.

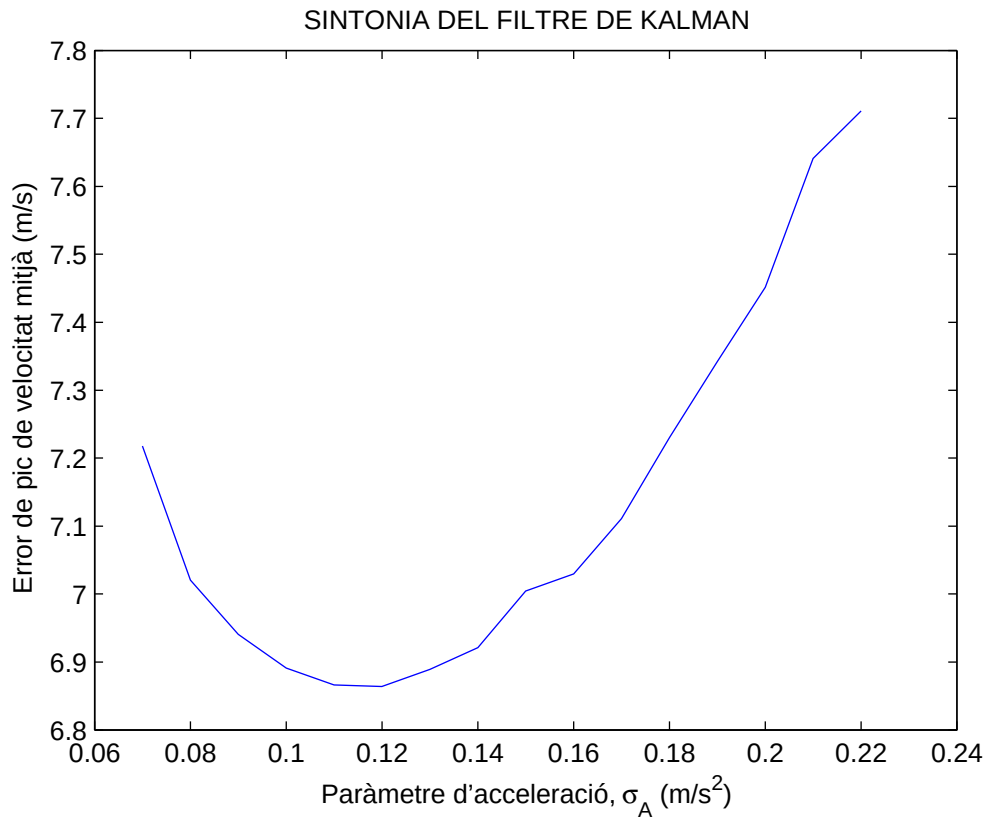


Figura 34. Sintonia del filtre de Kalman. Error de pic de velocitat.

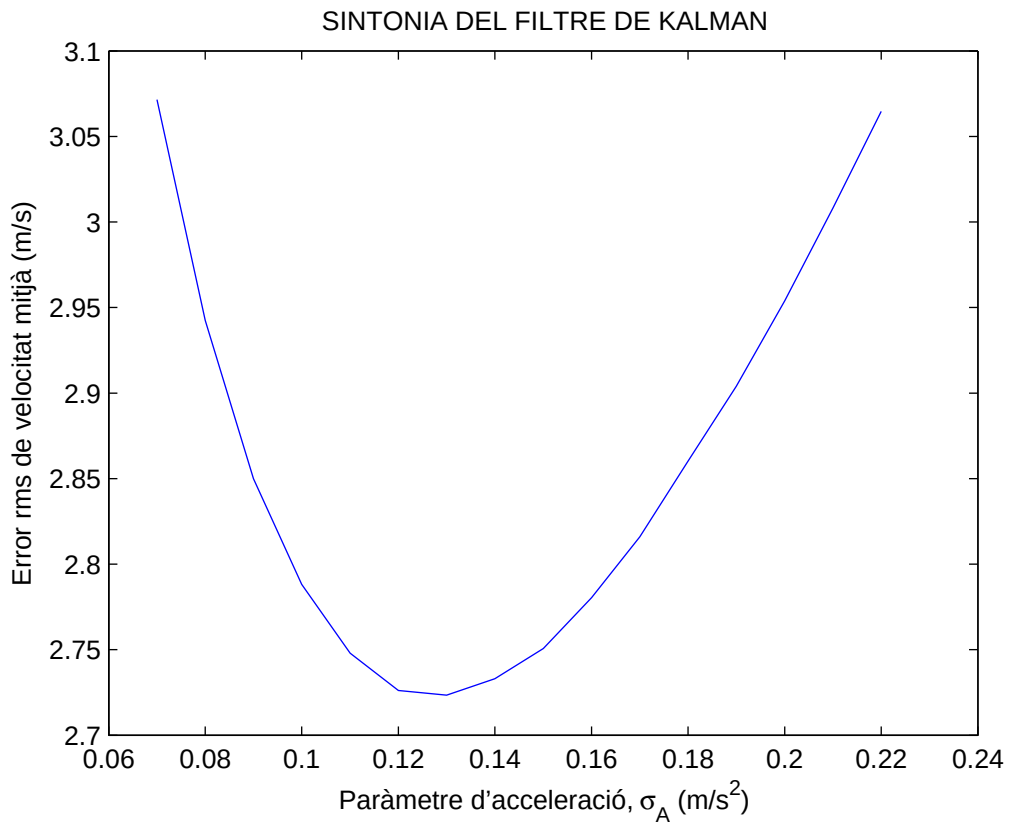


Figura 35. Sintonia del filtre de Kalman. Error rms de velocitat.

4.4. PROVES DEL FILTRE IMM.

El filtre IMM triat per a les proves és el més simple, amb dos models únicament [Kir00]. Els dos models triats consideren l'acceleració com a soroll de procés, com el filtre de Kalman de l'apartat anterior, amb diferents desviacions estàndard σ_A . El primer model, amb $\sigma_{A1} = 0.02 \text{ m/s}^2$, un valor petit, és adequat per als trams rectes. El segon model, amb $\sigma_{A2} = 0.1 \text{ m/s}^2$, més gran, és millor per a les maniobres brusques.

La matriu de transició de probabilitat és:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0.975 & 0.025 \\ 0.05 & 0.95 \end{bmatrix} \quad (49)$$

Els valors de les probabilitats de transició entre models s'han determinat a partir del número de mostres de cada tram. Els trams rectes són de 40 mostres, per tant podem suposar que la probabilitat de canvi al model 2 és $1/40 = 0.025$, i la probabilitat de permanència en el model 1 és 0.975. Els trams de gir són de 20 mostres, per tant la probabilitat de canvi al model 1 és $1/20 = 0.05$, i la probabilitat de permanència en el model 2 és 0.95.

En una situació real el número de mostres en cada tram abans del canvi no serà conegut a priori, per tant caldrà fer una estimació aproximada de la probabilitat de canvi de model. No és necessari que aquesta estimació sigui gaire exacta, doncs els resultats finals del filtre són poc sensibles a la tria de les probabilitats, dins d'un marge [Bar89]. Una probabilitat de permanència en el model més baixa (i probabilitat de canvi de model més alta) dóna menys error durant les maniobres però més error en moviment suau, és a dir, augmenta l'ample de banda. Una probabilitat de permanència en el model més alta (i probabilitat de canvi de model més baixa), dóna més error durant les maniobres i menys error en moviment suau, és a dir, disminueix l'ample de banda, al contrari que la situació anterior.

Existeixen possibilitats més sofisticades per a la tria dels models. [Tol05], que estudia el moviment d'un automòbil terrestre, utilitza un model físic diferent per a les maniobres brusques, amb una variable d'estat addicional (la velocitat angular de gir).

[Bar01] utilitza fins a tres models diferents; un de més senzill, de velocitat constant sense soroll de procés, i un altre amb acceleració constant i tampoc sense soroll de procés.

El resultat d'aplicar el filtre IMM, amb els valors de σ_A indicats a l'inici d'aquest apartat ($\sigma_{A1} = 0.02 \text{ m/s}^2$, $\sigma_{A2} = 0.1 \text{ m/s}^2$), es mostra a la figura 36. S'observa un bon seguiment de les maniobres brusques i un filtratge del soroll acceptable en els trams de moviment suau.

A la figura 37 es mostra la probabilitat del model de maniobres en tota la trajectòria. S'observen clarament les quatre zones de probabilitat alta, corresponents als quatre girs, i les quatre zones de probabilitat baixa, corresponents als quatre trams rectes. Hi ha un cert retard en la detecció de les maniobres, sobretot al final de cadascuna d'elles, més que al principi. Les quatre zones de maniobres corresponen a les mostres 40-60, 100-120, 160-180, i 220-240.

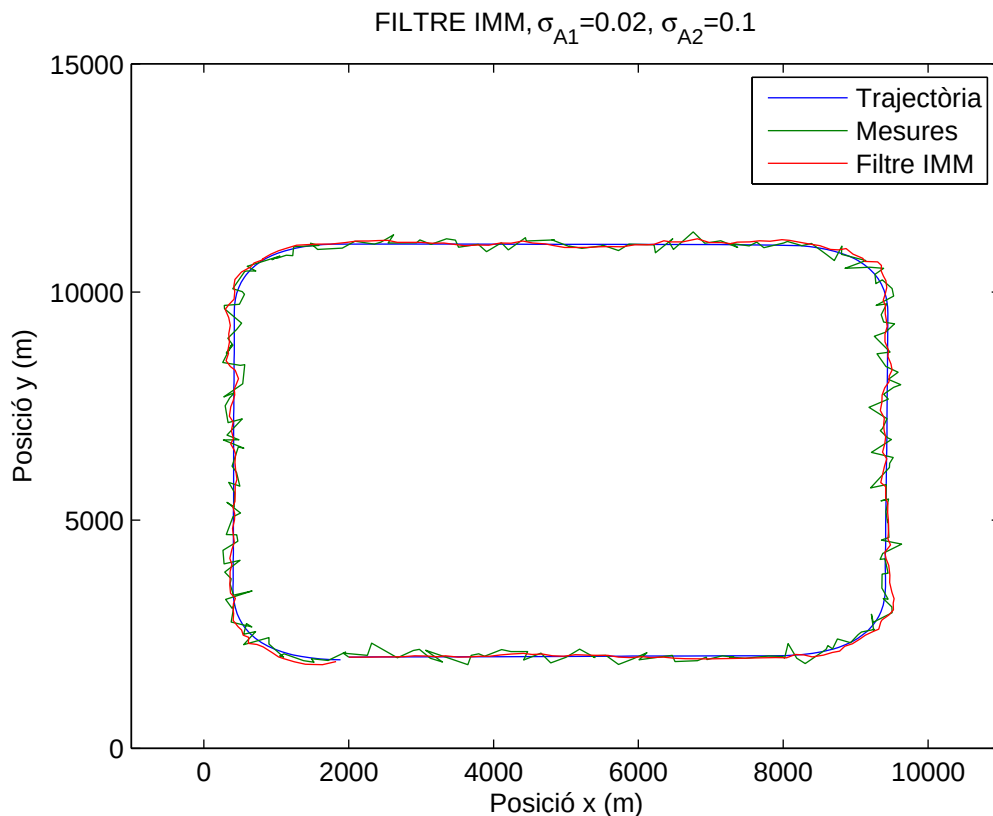


Figura 36. Filtre IMM ben sintonitzat.

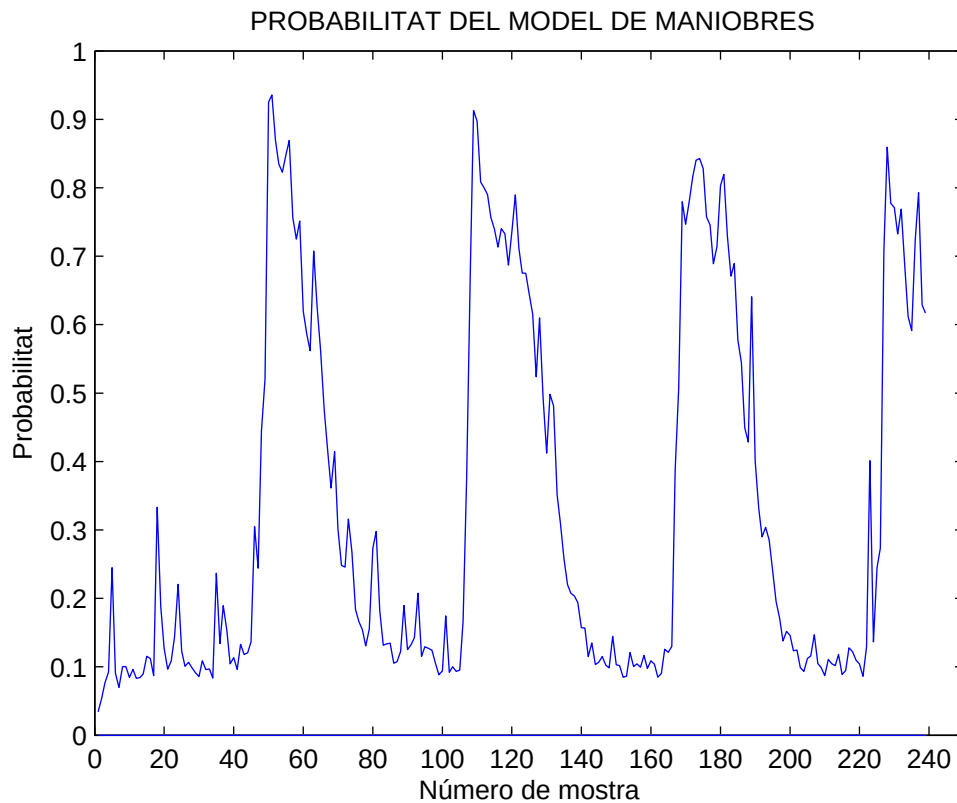


Figura 37. Probabilitat del model de maniobres.

Les figures 38 i 39 mostren dos exemples del filtre IMM variant el paràmetre σ_{A2} . En el primer cas, amb $\sigma_{A2} = 0.02 \text{ m/s}^2$, el soroll de mesura queda molt ben filtrat, però hi ha massa inèrcia, el seguiment de les maniobres brusques és deficient.

En el segon cas, amb $\sigma_{A2} = 0.5 \text{ m/s}^2$, el seguiment de les maniobres brusques és bo, i encara que en algunes zones el soroll de mesura es filtra menys, no sembla que hi hagi un empitjorament global de les prestacions del filtre.

Per ajustar la sintonia òptima del filtre IMM, s'ha fet com amb el filtre de Kalman: calcular les mitjanes dels errors de posició i velocitat, de pic i rms, per 1000 trajectòries.

Amb el mateix rang de valors del paràmetre d'acceleració en maniobres σ_{A2} que el filtre de Kalman, des de $\sigma_{A2} = 0.07 \text{ m/s}^2$ a $\sigma_{A2} = 0.22 \text{ m/s}^2$, els errors de velocitat són similars i els errors de posició són apreciablement millors: errors de pic de 280 m enlloc de 440 m, i errors rms de 115 m enlloc de 180 m, tal com es mostra a les figures 40 i 41. A més, els errors globals sembla que puguin disminuir encara més per σ_{A2} més gran.

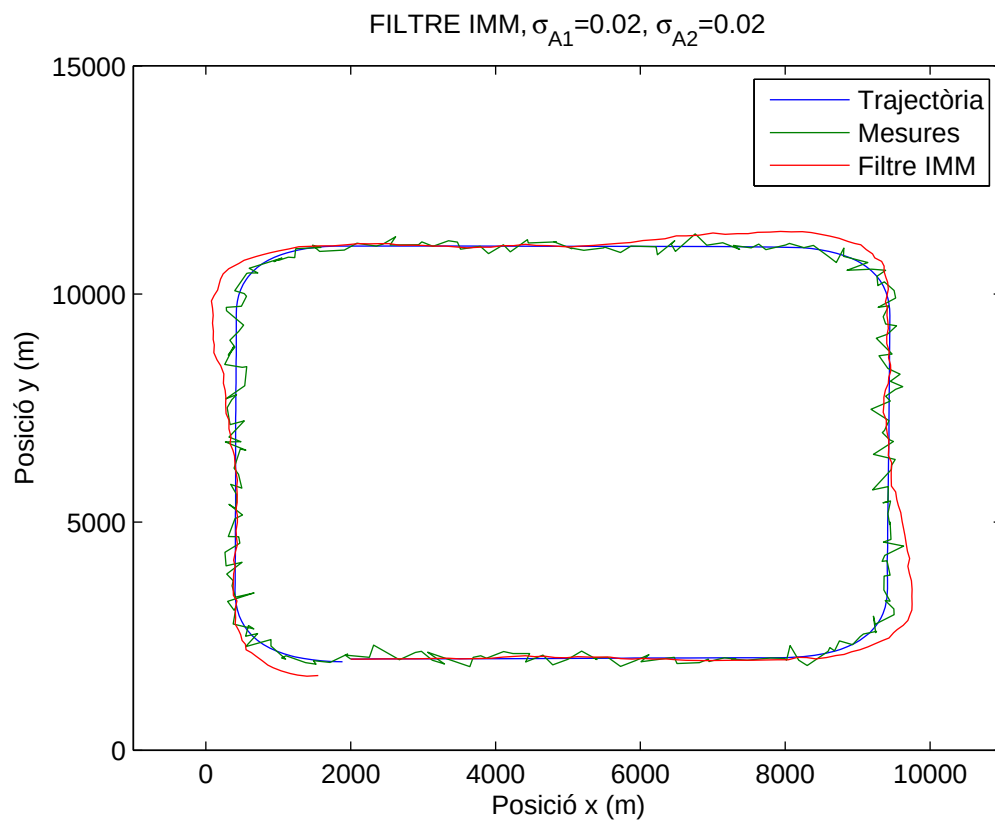


Figura 38. Filtre IMM amb massa inèrcia.

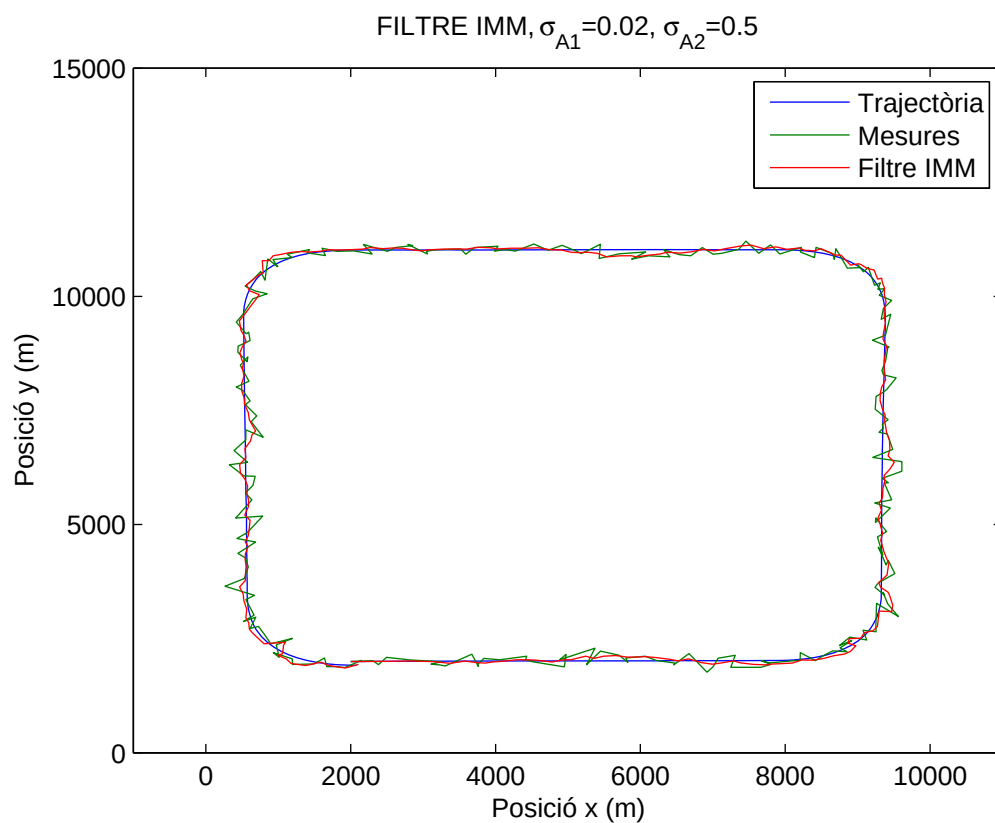


Figura 39. Filtre IMM amb massa soroll.

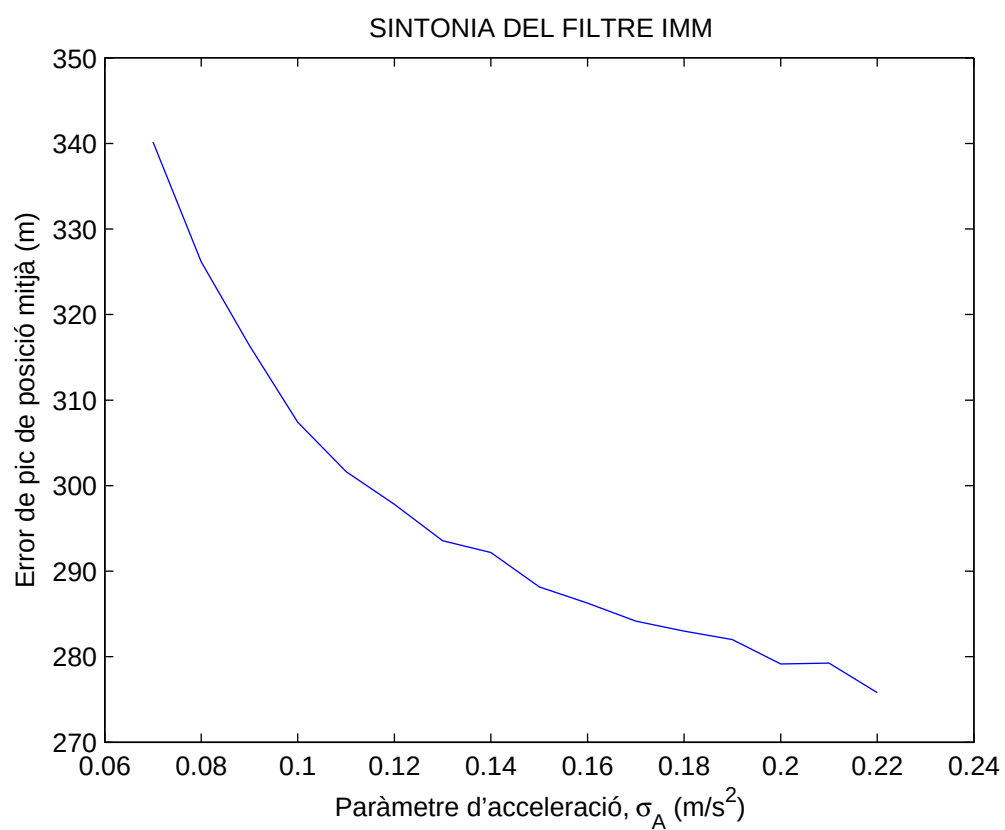


Figura 40. Sintonia del filtre IMM. Error de pic de posició (1).

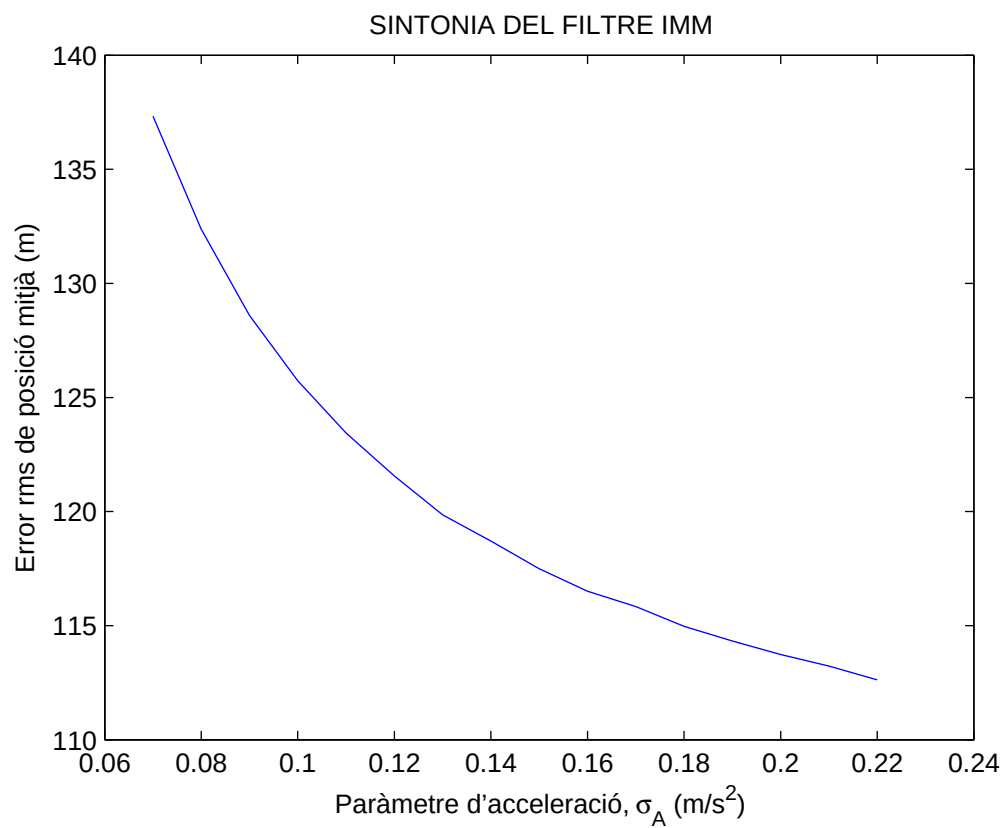


Figura 41. Sintonia del filtre IMM. Error rms de posició (1).

S'ha repetit la simulació amb valors més grans del paràmetre d'acceleració, obtenint els resultats de les figures 42 i 43 per als errors de posició, i 44 i 45 per als errors de velocitat. L'error de posició de pic disminueix una mica més, fins a 220 m, i l'error de posició rms disminueix fins a 107 m, mantenint-se baixos en un rang força ampli del paràmetre d'acceleració, entre 0.5 m/s^2 i 5 m/s^2 aproximadament.

L'error de velocitat de pic presenta un mínim clar a 0.15 m/s^2 , i l'error de velocitat rms també presenta un mínim clar a 0.2 m/s^2 . Es pot prendre doncs com a valor òptim del paràmetre d'acceleració en maniobres $\sigma_{A2} = 0.2 \text{ m/s}^2$, que té un error rms de velocitat òptim i un error de posició prou bo.

Les figures 46 i 47 mostren la influència del desajust del paràmetre σ_{A1} , la desviació estàndard de l'acceleració en el primer model. Si és massa petita no s'hi aprecia cap diferència, i si és massa gran el soroll no queda tan ben filtrat, igual que en un filtre simple de Kalman amb el paràmetre d'acceleració massa gran.

Les figures 48 i 49 mostren la variació en el comportament del filtre quan varia la matriu de probabilitat de transició de models. S'aprecia poca variació en aquest comportament. Les dues figures corresponen a:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0.99 & 0.01 \\ 0.01 & 0.99 \end{bmatrix} \quad \Pi = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix} \quad (50)$$

En el primer cas, de probabilitat de canvi de model més baixa, hi ha menys error en moviment suau, i en el segon cas, de probabilitat de canvi de model més alta, menys error en maniobres.

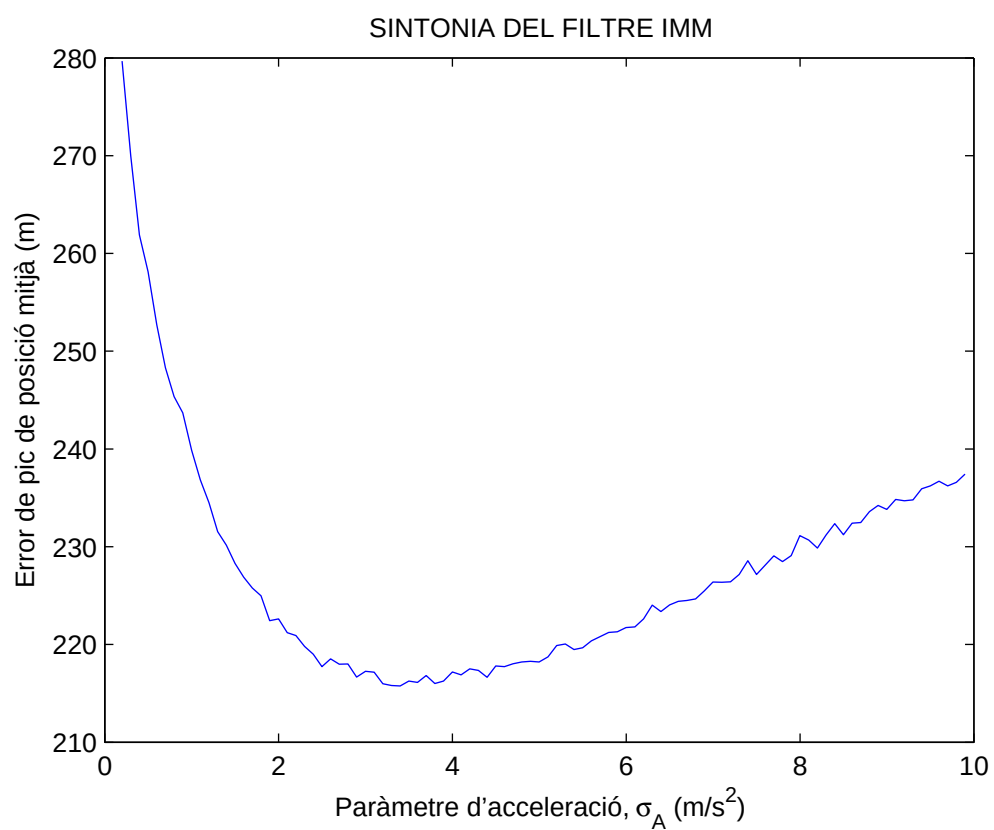


Figura 42. Sintonia del filtre IMM. Error de pic de posició (2).

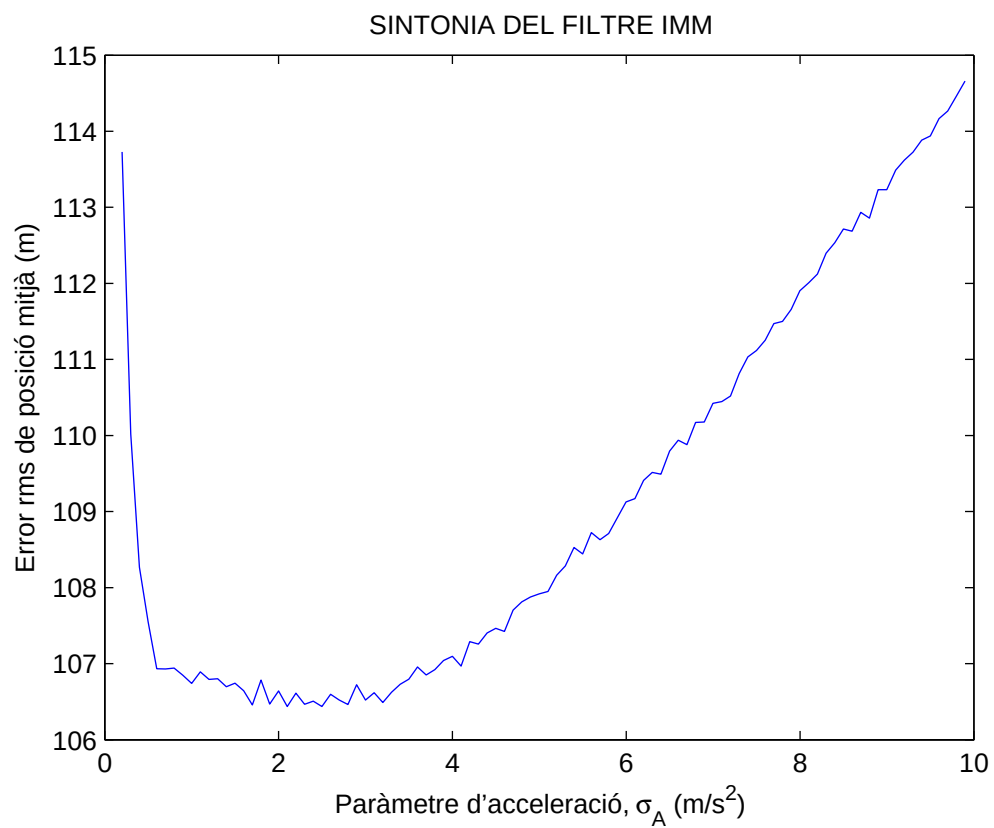


Figura 43. Sintonia del filtre IMM. Error rms de posició (2).

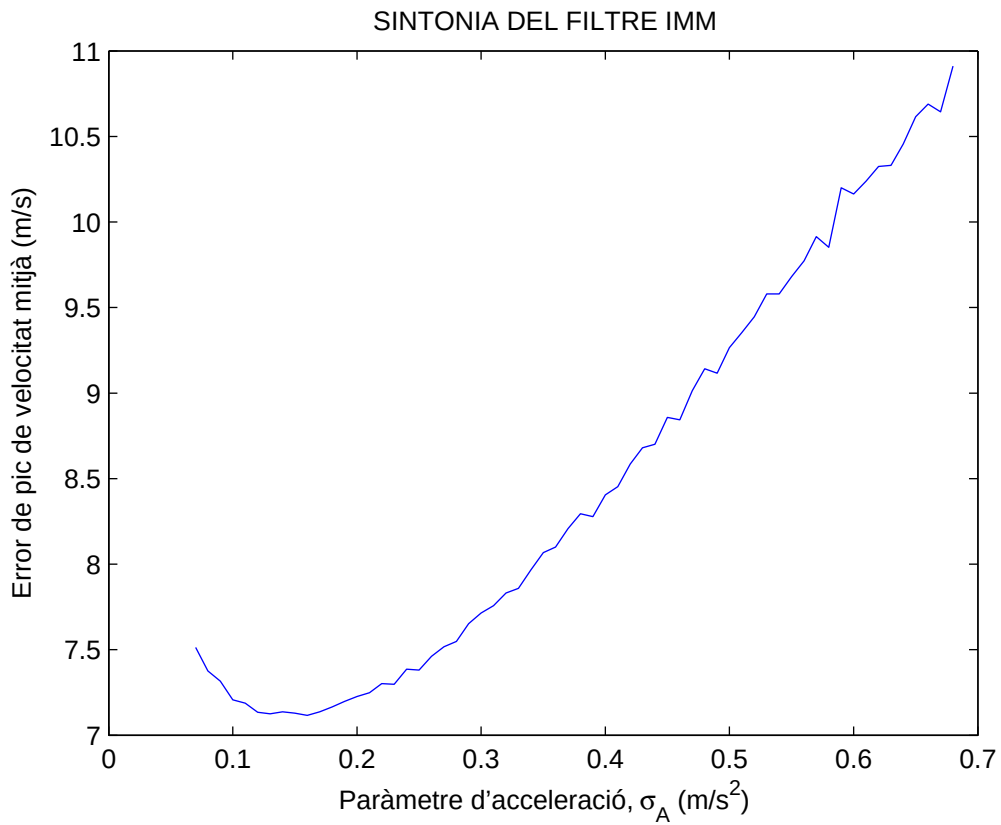


Figura 44. Sintonia del filtre IMM. Error de pic de velocitat.

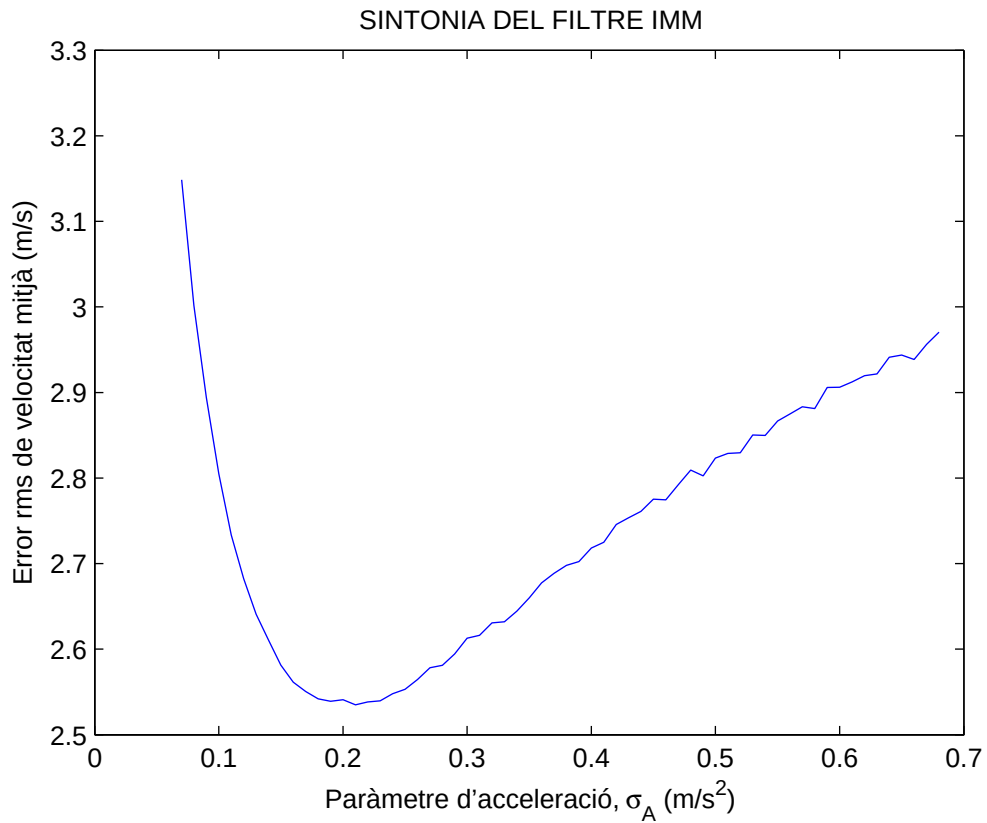


Figura 45. Sintonia del filtre IMM. Error rms de velocitat.

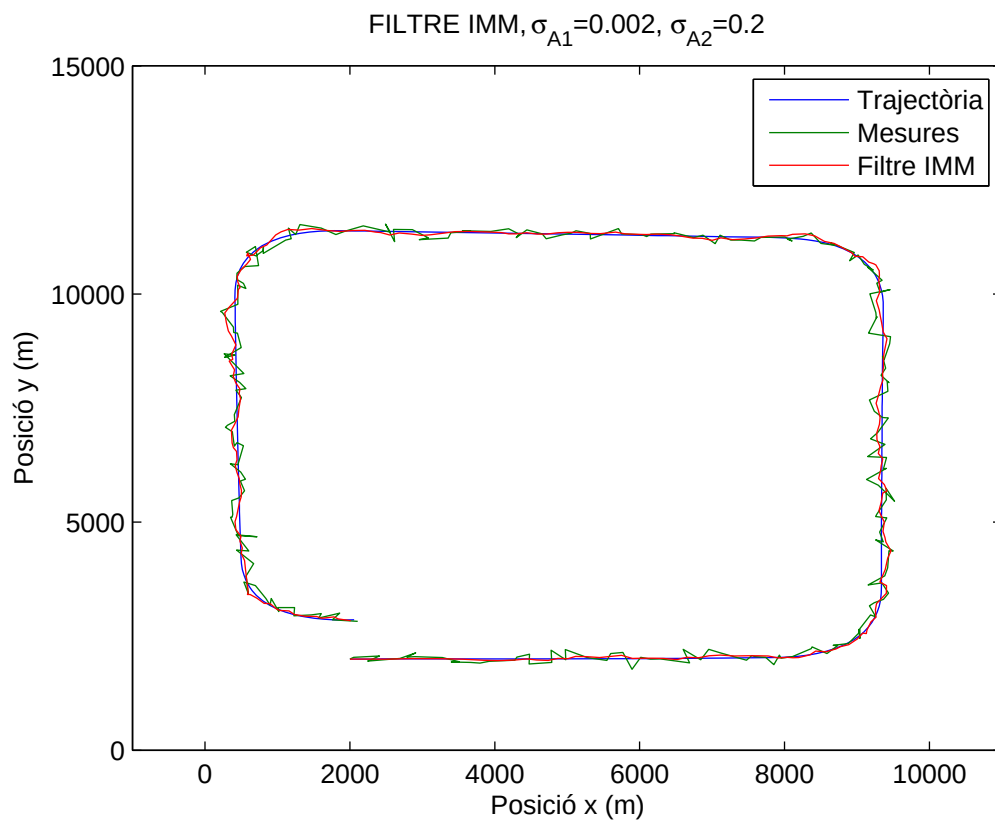


Figura 46. Filtre IMM amb variació del primer model (1).

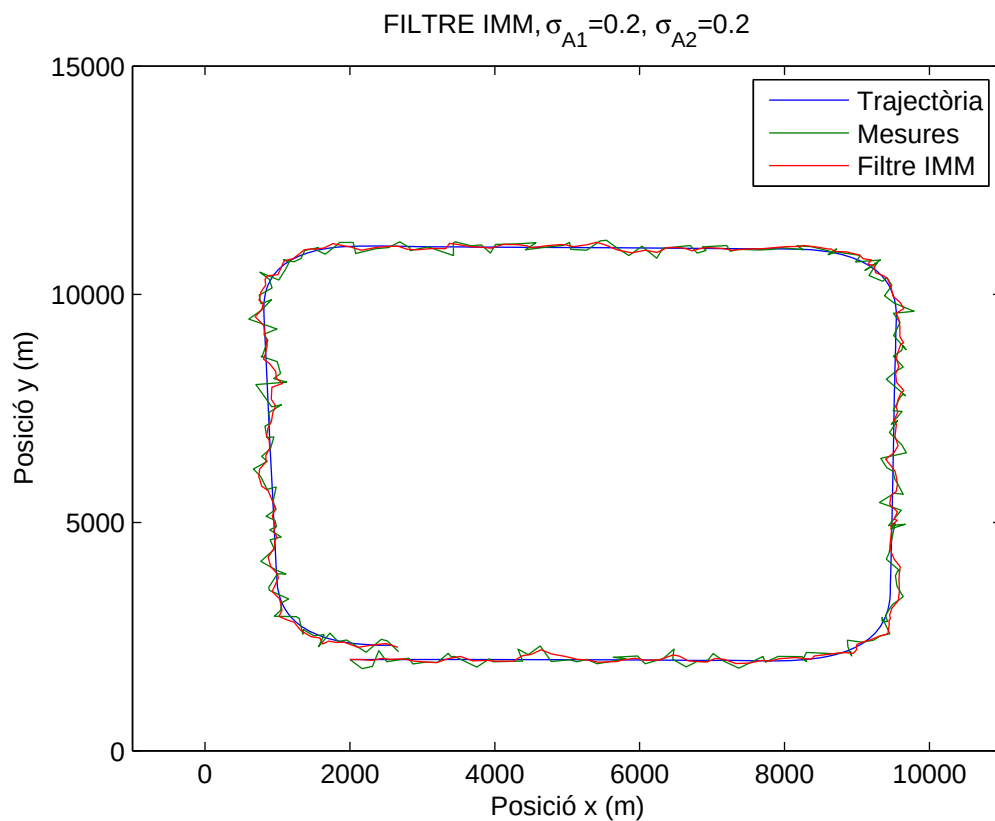


Figura 47. Filtre IMM amb variació del primer model (2).

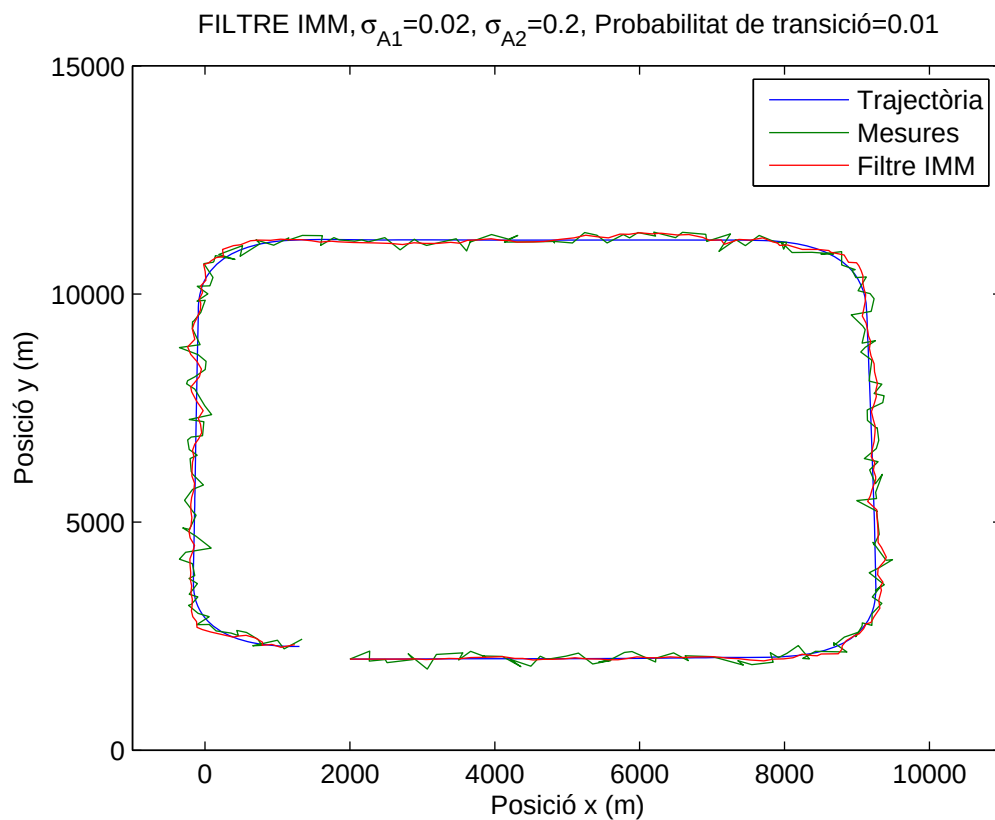


Figura 48. Filtre IMM. Probabilitat més baixa de transició de models.

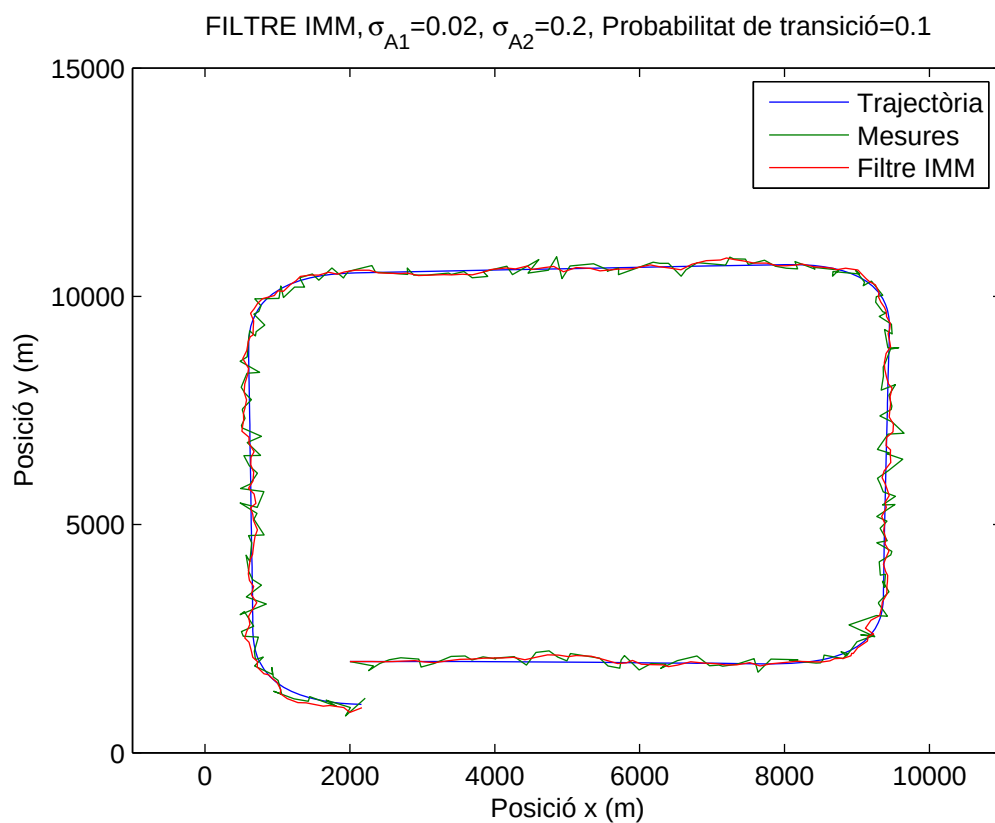


Figura 49. Filtre IMM. Probabilitat més alta de transició de models.

4.5. COMPARACIÓ DELS FILTRES.

A la figura 50 es comparen els filtres de Kalman i IMM, amb els paràmetres òptims obtinguts als apartats anteriors. Per a poder comparar-los millor, s'ha deixat la corba de la trajectòria però s'ha eliminat la de la mesura. La diferència entre els dos filtres és petita, però el filtre IMM és una mica més proper a la trajectòria real. Les figures 32,33, i 40 a 43 també mostren que, quantitativament, els errors de posició del filtre IMM en la situació analitzada són significativament menors.

S'ha comparat també el comportament dels dos filtres en altres situacions, amb maniobres més suaus i amb maniobres més brusques. És d'esperar que amb maniobres més brusques el filtre IMM funcioni millor, però es vol comprovar si això també és així per a maniobres suaus, de manera que la seva utilització quedi justificada malgrat el cost computacional superior. Per comparar els filtres amb maniobres suaus s'ha canviat la trajectòria utilitzada fins ara per una altra amb dos trams rectes més curts (la meitat que en els exemples anteriors), i una lleugera corba entre els dos, il·lustrada a la figura 51.

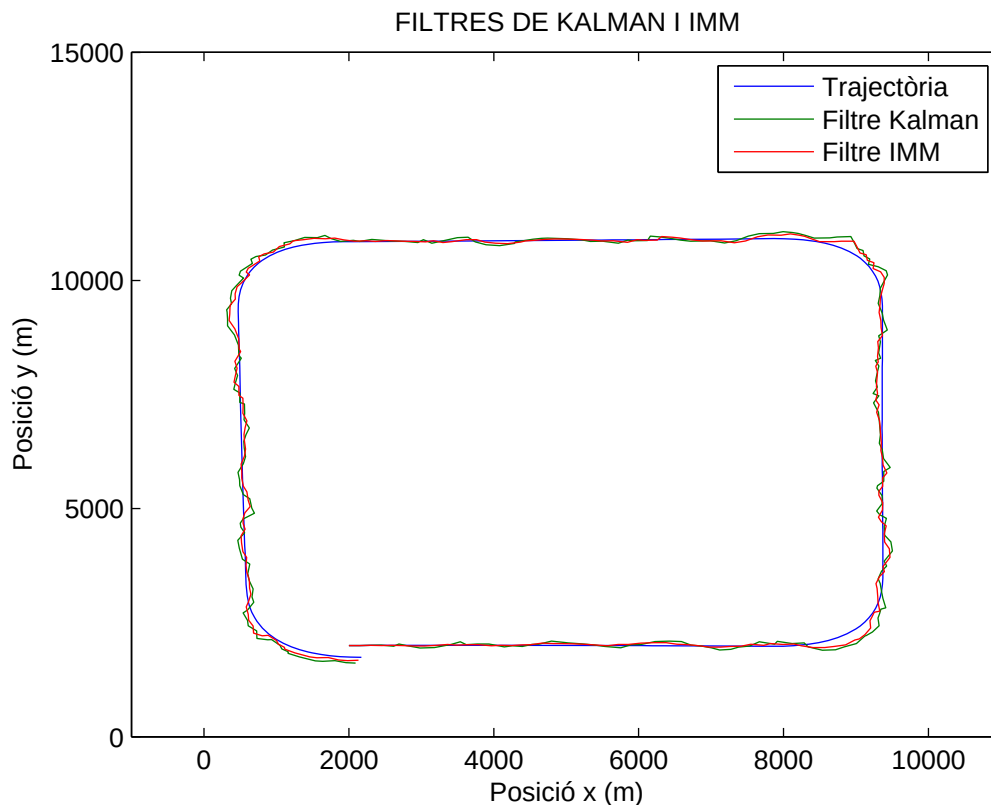


Figura 50. Comparació dels filtres de Kalman i IMM.

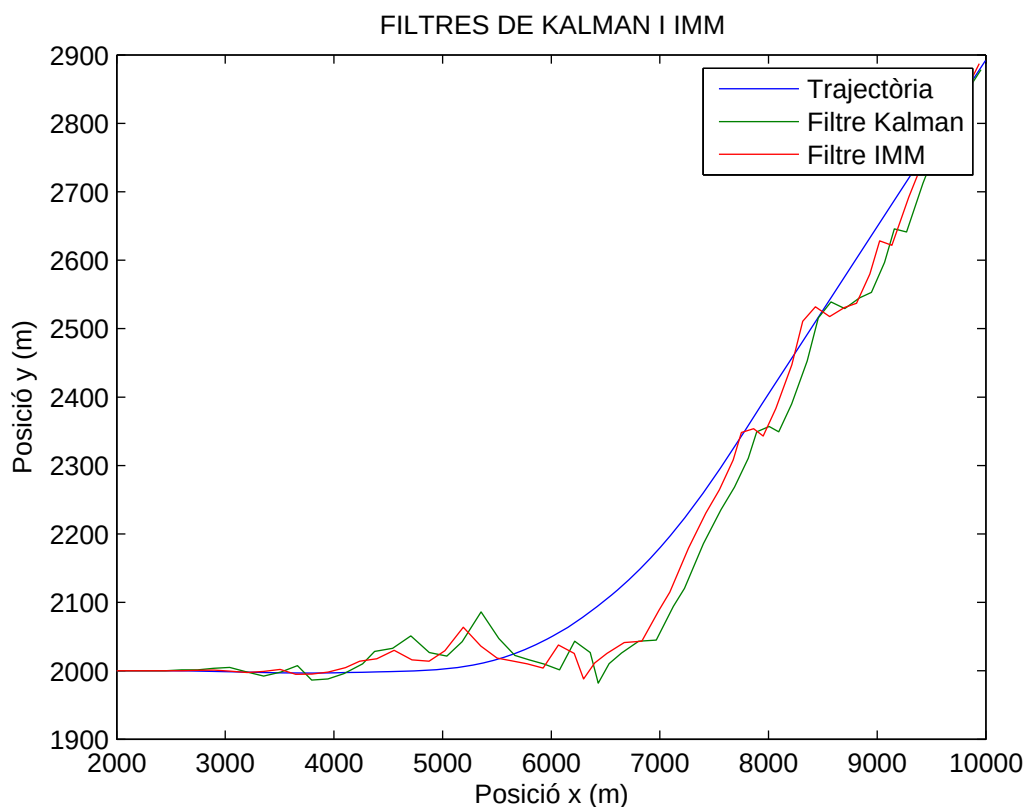


Figura 51. Trajectòria amb maniobra suau.

Cal observar que les escales dels eixos x, y en aquesta gràfica no són iguals: un moviment de 900 m en la direcció y correspon a un altre de 4000 m en la direcció x ; el gir és més lleuger del que a la gràfica pugui semblar. L'escala més petita de l'eix y també dóna la impressió que els errors en aquesta direcció són més grans del que són en realitat, en comparació amb les figures dels apartats anteriors. Per claredat, tampoc s'han representat en aquesta gràfica les dades de mesura, deixant únicament la trajectòria de referència.

S'han analitzat 40 trajectòries diferents amb maniobres suaus, amb una durada de la maniobra de 200 s en totes elles i una velocitat inicial de 15 m/s , començant per una acceleració molt petita de 0.0025 m/s^2 , i amb increments de 0.0025 m/s^2 fins a gairebé 0.1 m/s^2 . Igual que en els exemples dels apartats anteriors, aquestes acceleracions són iguals en l'eix x (de frenada) i en l'eix y (cap amunt a la gràfica).

La variació de les longituds dels trams de la trajectòria ha dut a ajustar lleugerament la matriu de probabilitat de transició de models en el filtre IMM, que és ara:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.05 & 0.95 \end{bmatrix} \quad (51)$$

Els altres paràmetres dels filtres de Kalman i IMM ($\sigma_A, \sigma_{A1}, \sigma_{A2}$) s'han ajustat proporcionalment a l'acceleració de cadascuna de les 40 trajectòries, amb uns factors de proporcionalitat similars als òptims que s'han obtingut a les simulacions dels apartats anteriors.

Per a cada trajectòria s'ha definit un índex de maniobrabilitat, similar a l'utilitzat a [Kir00] i [Bar01], però amb el paràmetre d'acceleració σ_A enlloc del soroll de procés σ_v , doncs en aquest cas l'acceleració es modelitza com a soroll de procés:

$$\lambda = \frac{\sigma_A T^2}{\sigma_w} \quad (52)$$

Les figures 52 a 55 presenten els errors de posició i velocitat, de pic i rms, dels filtres de Kalman i IMM, en funció dels índexs de maniobrabilitat de les 40 trajectòries. Totes les simulacions s'han repetit 100 vegades i se n'ha fet la mitjana.

S'observa clarament que els errors de posició del filtre IMM són inferiors als del filtre de Kalman, fins i tot en el cas de maniobres suaus. En el cas dels errors de velocitat, no hi ha una diferència apreciable; l'error rms, més significatiu, és lleugerament menor per al filtre IMM, i l'error de pic és gairebé igual.

Per a les maniobres brusques és d'esperar que això també sigui així. Les trajectòries utilitzades en aquest cas són també dos trams rectes de 200 s, units per una corba de 90° en 200 s. La velocitat inicial és de 15 m/s, l'acceleració en la direcció del moviment és de -0.075 m/s (de manera que la velocitat en la direcció x quedarà anul·lada en 200 s, fent així el gir de 90°), i s'introdueix una acceleració lateral en direcció y, començant amb 0.025 m/s² i amb increments de 0.025 m/s² fins a gairebé 1 m/s². Aquest valor gran d'acceleració, mantingut durant 200 s, és poc realista per a un petit vehicle aeri no tripulat, però s'ha arribat fins a aquest valor a les simulacions per tal d'il·lustrar el comportament dels filtres.

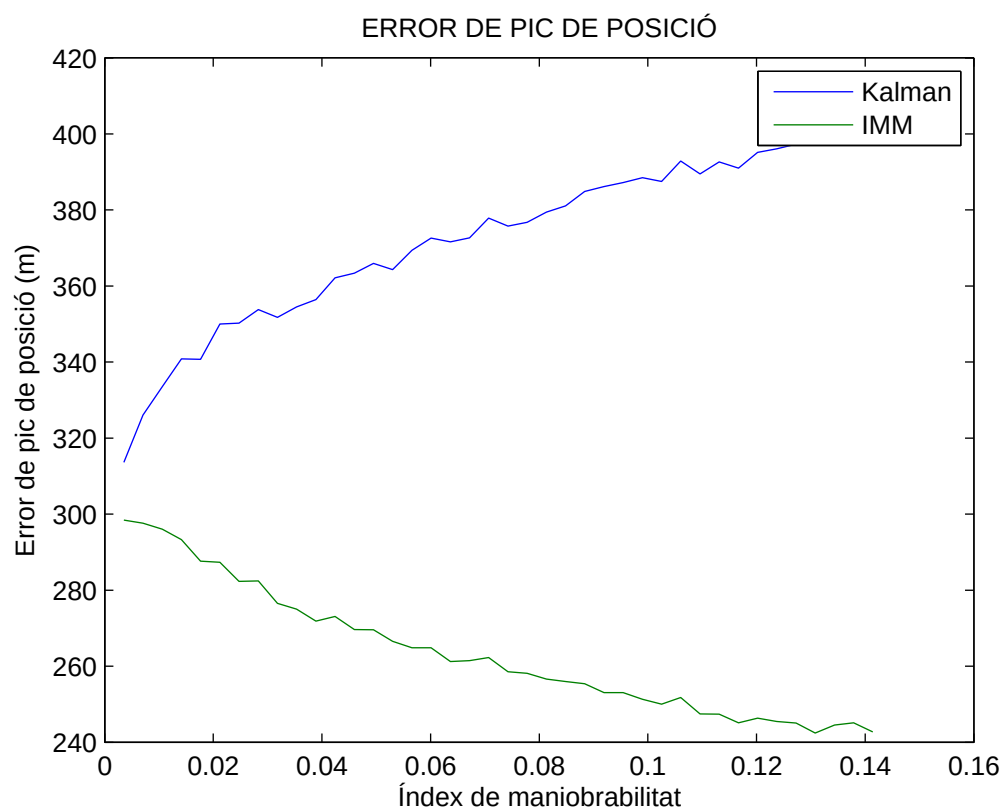


Figura 52. Error de pic de posició amb maniobres suaus.

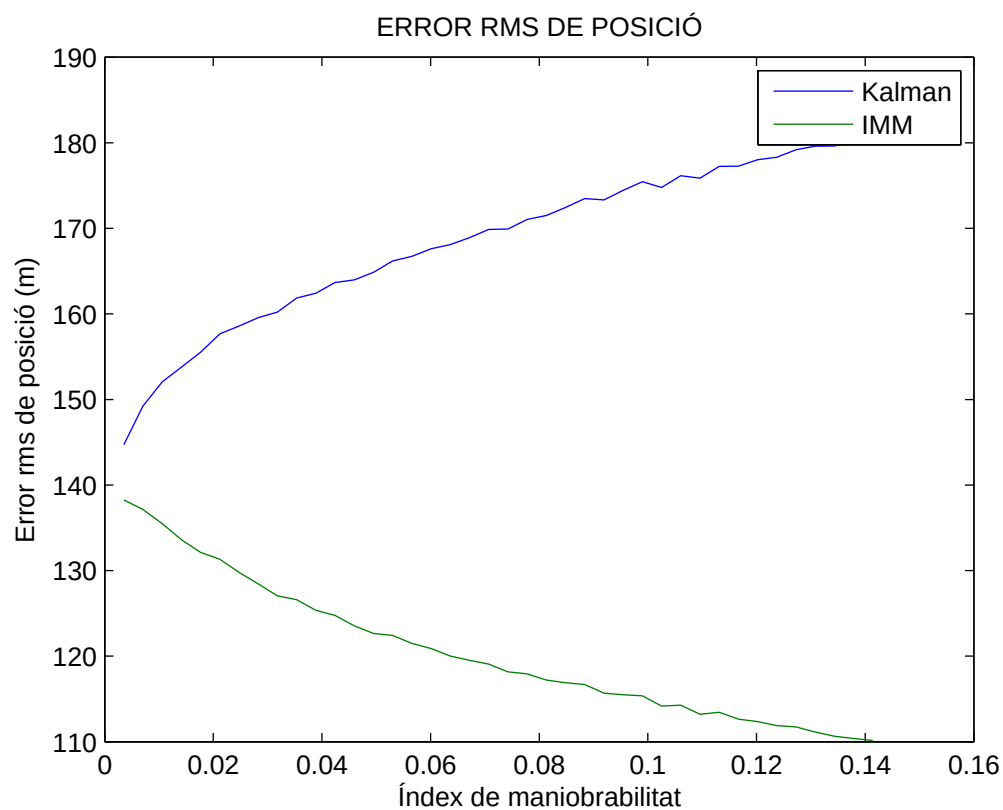


Figura 53. Error rms de posició amb maniobres suaus.

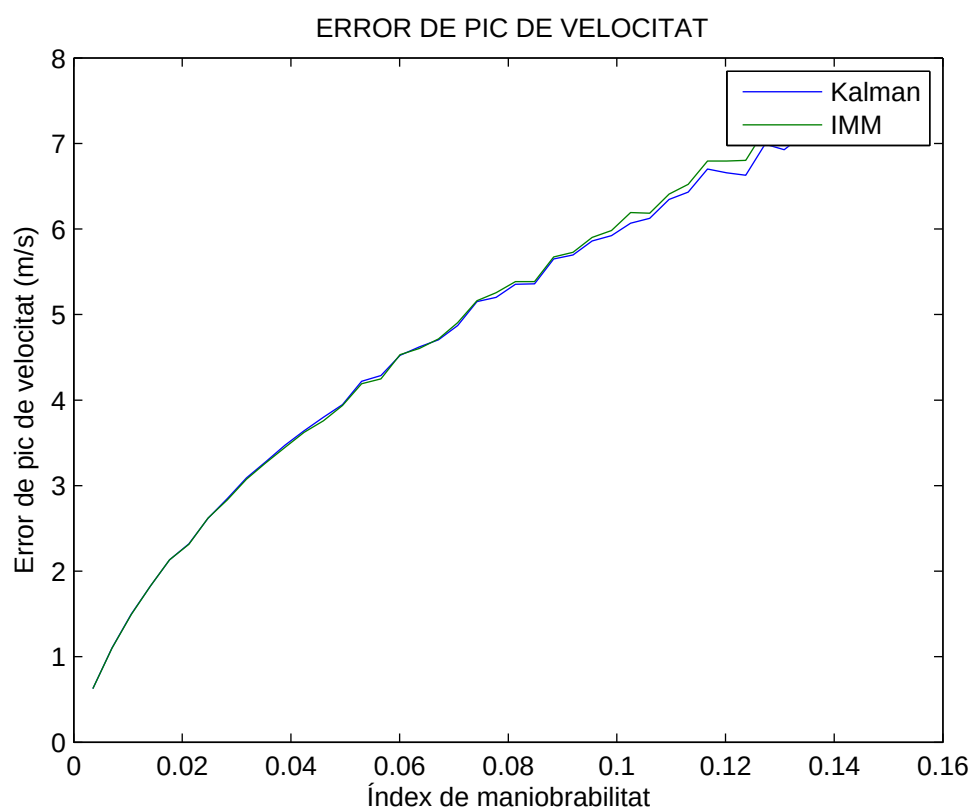


Figura 54. Error de pic de velocitat amb maniobres suaus.

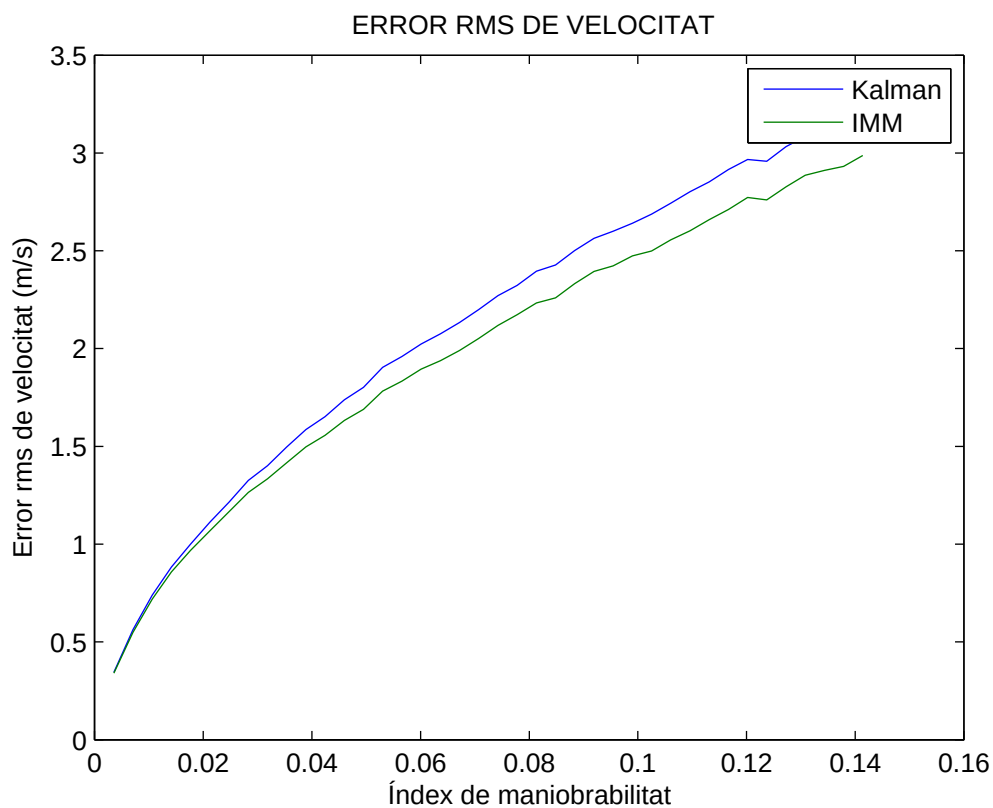


Figura 55. Error rms de velocitat amb maniobres suaus.

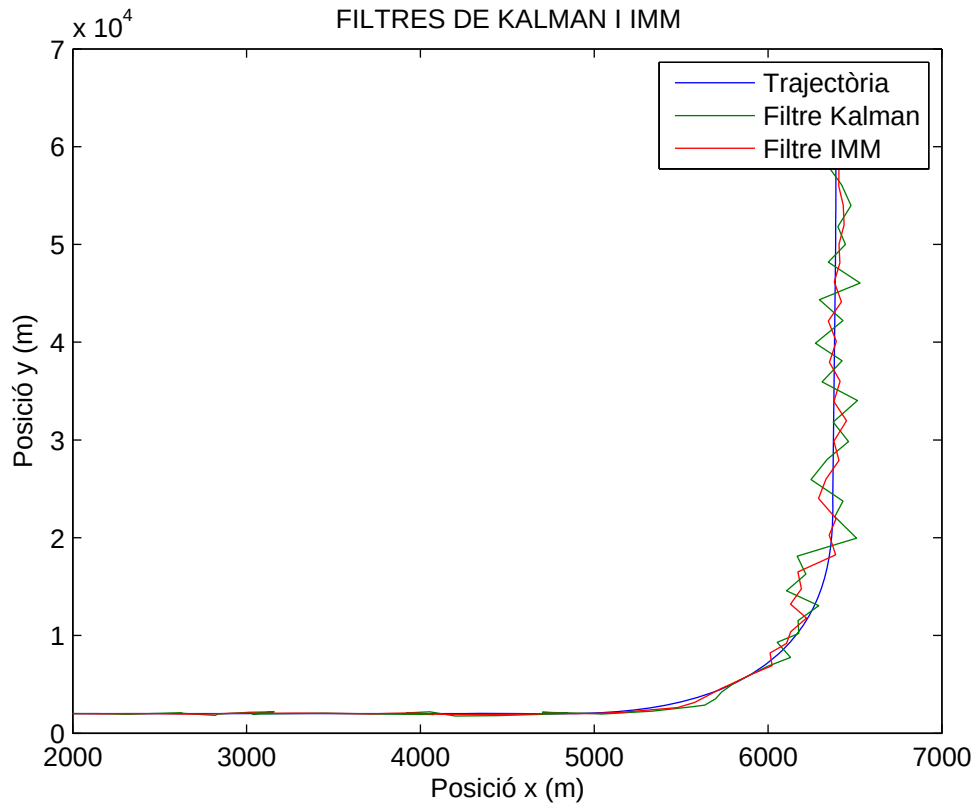


Figura 56. Trajectòria amb maniobra brusca.

Com en el cas anterior, també s'han analitzat 40 trajectòries diferents, amb acceleracions progressivament més altes. Una d'elles s'il·lustra a la figura 56. Cal observar també la diferència en les escales dels eixos, que fa que els errors de posició en la direcció y semblin més petits del que són en realitat.

Els paràmetres dels filtres de Kalman i IMM ($\sigma_A, \sigma_{A1}, \sigma_{A2}$) s'han ajustat per a cadascuna de les 40 trajectòries amb valors pròxims als òptims, per exemple:

$$\sigma_A = \sqrt{0.075^2 + A_y^2} \quad (53)$$

Per simplicitat, no s'ha inclòs el petit factor corrector obtingut a les simulacions de l'apartat 4.3., ja que no és garantit que aquest factor sigui exactament el mateix si l'acceleració és més alta.

Les figures 57 a 60 mostren els errors de posició i velocitat, de pic i rms, dels filtres de Kalman i IMM, en funció dels índexs de maniobrabilitat de les 40 trajectòries, també amb les simulacions repetides 100 vegades per a cadascuna d'elles.

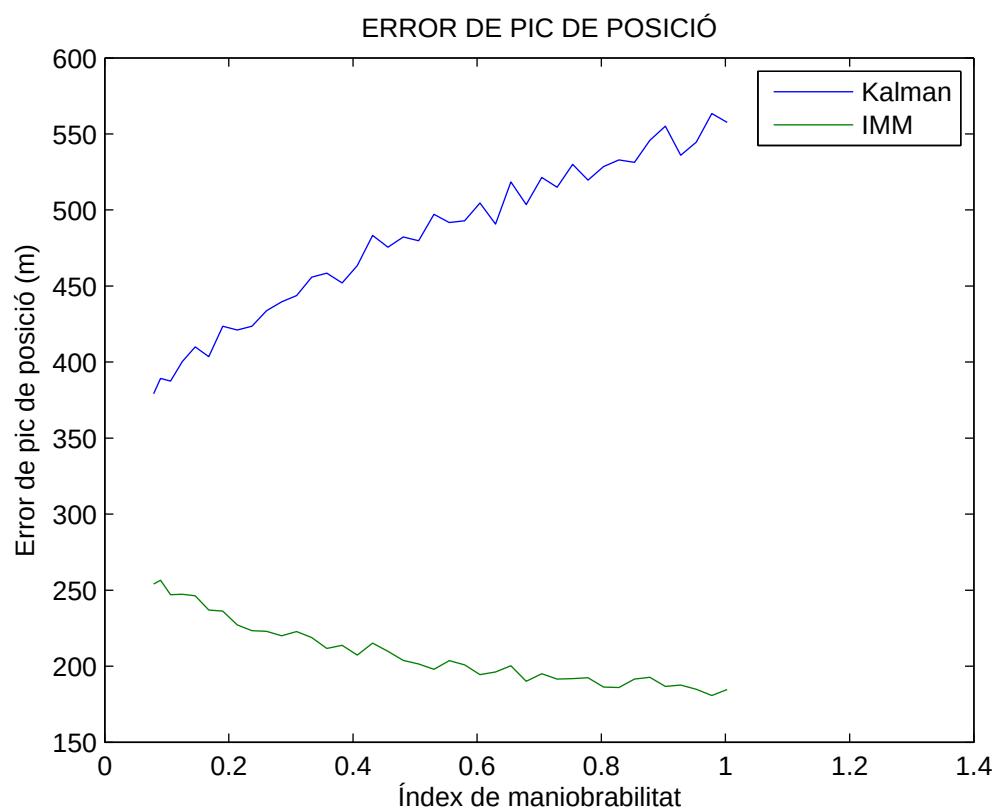


Figura 57. Error de pic de posició amb maniobres brusques.

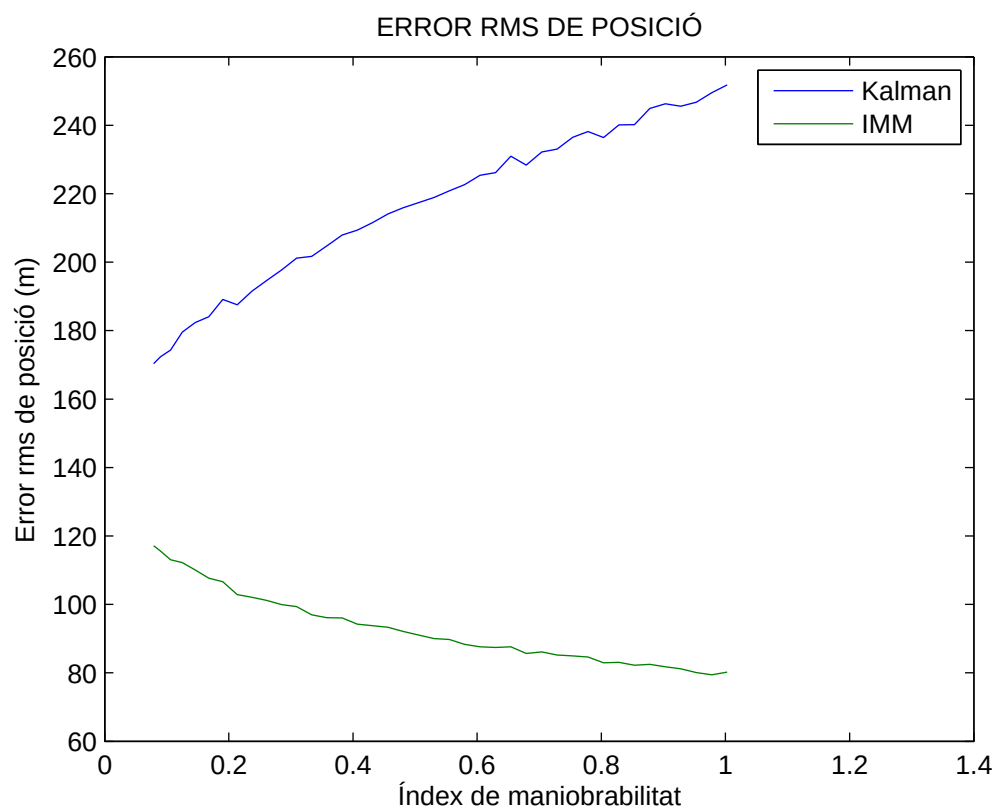


Figura 58. Error rms de posició amb maniobres brusques.

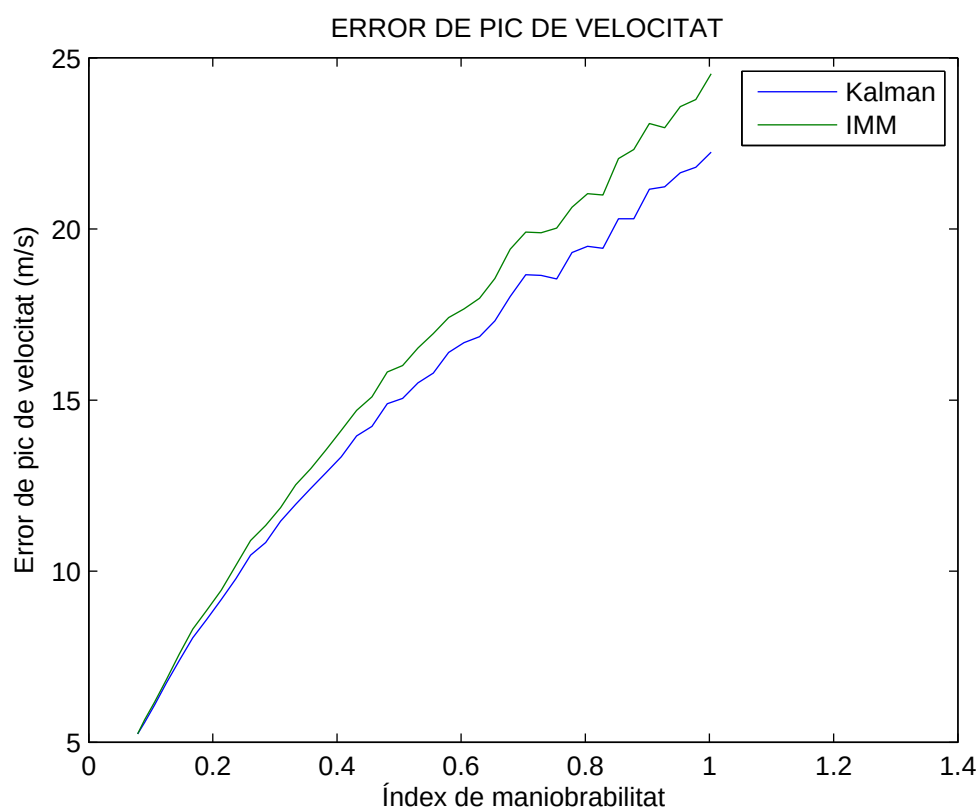


Figura 59. Error de pic de velocitat amb maniobres brusques.

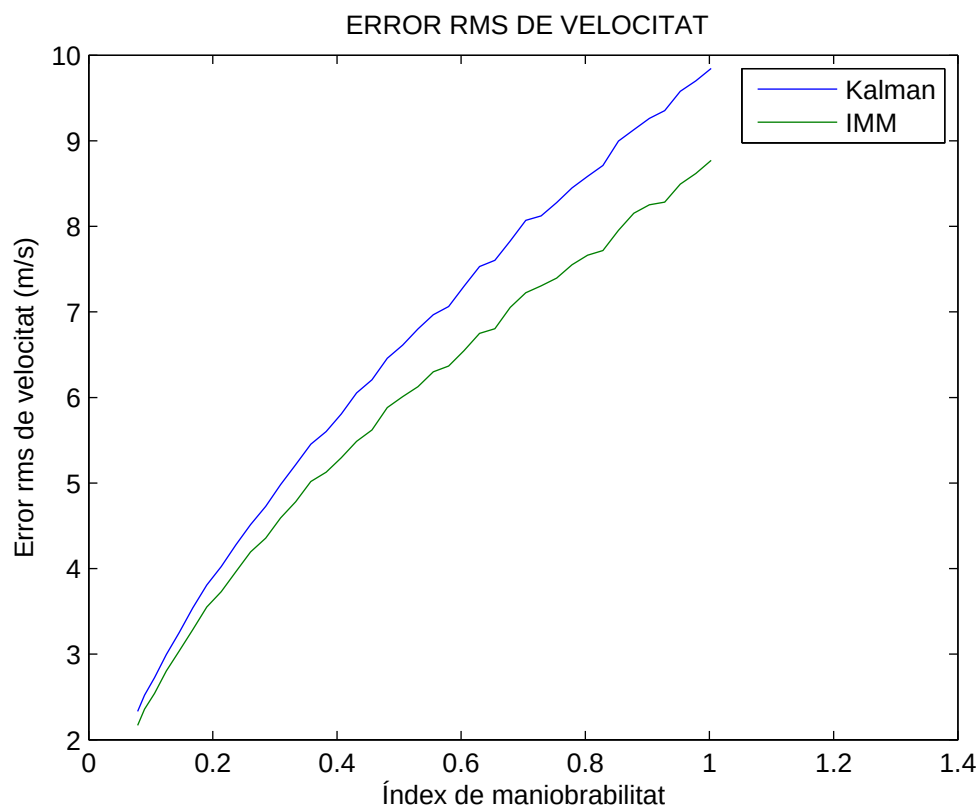


Figura 60. Error rms de velocitat amb maniobres brusques.

Com es preveia, el filtre IMM és superior per a maniobres brusques, disminuint lleugerament el seu error de posició en augmentar la brusquedat de la maniobra. El filtre de Kalman, en canvi, es va degradant conforme augmenta el valor de l'índex de maniobrabilitat. En el cas dels errors de velocitat, com abans, la diferència no és important; l'error de pic del filtre de Kalman és lleugerament inferior, però l'error rms, més significatiu, és lleugerament millor per al filtre IMM.

5. CONCLUSIONS.

5.1. RESULTATS.

S'han codificat en Matlab els algorismes dels filtres de Kalman i IMM, i s'han aplicat a una trajectòria amb soroll de procés i soroll de mesura, amb fases de moviment suau i de maniobres brusques. D'aquesta manera s'han suavitzat les dades de posició mesurades.

S'han escrit alguns programes per a obtenir gràfiques il·lustratives de les trajectòries filtrades, variant els paràmetres dels filtres (desviacions estàndard de soroll de procés, que modelitzen les acceleracions, i matriu de probabilitat de transició de models en el filtre IMM).

S'han calculat numèricament els errors de posició i velocitat, de pic i rms, en tota una trajectòria, i la mitjana en repetides trajectòries, per tal de sintonitzar els filtres amb els paràmetres òptims.

Finalment, s'han aplicat els filtres a maniobres suaus i maniobres brusques, amb una àmplia variació de l'índex de maniobrabilitat en diferents trajectòries. S'ha comprovat que el filtre IMM correctament sintonitzat té menys error que el filtre de Kalman en tots els casos, malgrat que la seva complexitat i el temps de càlcul són superiors. (A les referències consultades, sense una sintonització precisa dels filtres, el filtre IMM es mostrava superior al filtre de Kalman per índexs de maniobrabilitat alts, però equivalent per índexs de maniobrabilitat baixos).

5.2. LÍNIES OBERTES.

El camp de treball d'aquest projecte és molt ampli, i obre moltes possibilitats per a estudis addicionals:

- Aplicació dels filtres a les dades mesurades pels sensors en un vehicle real.
- Suavitzat de les mesures de sensors inercials (amb errors acumulatius).

- Fusió de les dades de GPS i sensors inercials, en una arquitectura fortament acoblada (introducció al capítol 3). Aquesta possibilitat té una complexitat bastant superior.
- Control de la integritat de les mesures (problema freqüent a les dades provinents dels GPS, especialment per a vehicles terrestres en entorns urbans).
- Augment del nombre de models en el filtre IMM, per acomodar diversos tipus de maniobres.
- Utilització de models més sofisticats (gir coordinat, [Bar01]) enlloc del simple soroll d'acceleració, o de models adaptats a les particularitats de diversos sensors inercials.
- Optimització del temps de càlcul, aprofitant les simetries de les matrius de covariància [Far08].
- Estudi de diferents algorismes de filtratge ([Bar01], [Tol05]).
- Programació d'una interfície gràfica en Matlab per a variar les trajectòries i els paràmetres dels filtres.

6. REFERÈNCIES.

6.1. REFERÈNCIES PRINCIPALS.

6.1.1. LLIBRES.

[Bar01] Bar-Shalom, Y., Rong Li, X., Kirubarajan, T, *Estimation with Application to Tracking and Navigation*, Wiley, 2001

[Far08] Farrell, J.A., *Aided Navigation. GPS with High Rate Sensors*, McGraw-Hill, 2008

[Tol05] Toledo, R. *Un Sistema de Navegación de Alta Integridad para Vehículos en Entornos Desfavorables*, Tesis Doctoral, Universidad de Murcia, 2005

6.2.2. REVISTES.

[Bar89] Bar-Shalom, Y., Chang, K.C., Blom, H.A.P., *Tracking a Maneuvering Target Using Input Estimation Versus the Interacting Multiple Model Algorithm*, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, March 1989

[Kir00] Kirubarajan, T., Bar-Shalom, Y., *Kalman Filter vs. IMM Estimator: When Do We Need the Latter?*, Signal and Data Processing of Small Targets, Oliver Drummond Editor, 2000

[Tol07] Toledo, R., Zamora, M.A., Úbeda, B., Gómez, A.F., *High-Integrity IMM-EKF-Based Road Vehicle Navigation With Low-Cost GPS/SBAS/INS*, IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, September 2007

6.2. REFERÈNCIES COMPLEMENTÀRIES.

6.2.1. LLIBRES.

[Chr97] Christiansen, D., *Electronics Engineers' Handbook*, IEEE Press - McGraw-Hill, 1997.

El capítol 29 conté una descripció detallada dels sistemes de navegació electrònica. A les pàgines 29.96 – 29.99 hi ha una descripció breu i clara del sistema GPS, encara que una mica antiquada. El capítol 13.2 conté una descripció de les tecnologies d'acceleròmetres i giroscopis.

[Ein84] Einstein, A., Infeld, L., *L'evolució de la física*, Edicions 62, 1984.

A les pp. 152-163 hi ha una explicació senzilla i entenedora de la dilatació del temps a la Relativitat Especial. A les pp. 175-197, una altra explicació no tan entenedora de la Relativitat General. Ambdós efectes expliquen la contracció del temps en els rellotges dels satèl·lits del sistema GPS.

[Far07] Farrell, J.L., *GNSS Aided Navigation & Tracking*, American Literary Press, 2007.

Detallada descripció dels sistemes de navegació inercials per a la millora de la precisió del GPS.

6.2.2. REVISTES.

[Arc00] Arcega, F., Abad, P., *Medida de velocidad y de aceleración. Diversidad de soluciones*, Automática e Instrumentación, gener 2000.

Descripció de les tecnologies d'acceleròmetres.

[Jwo12] Jwo, D., Yang, C., Chuang, C., Lin, K., *A Novel Design for the Ultra-Tightly Coupled GPS/INS Navigation System*, The Journal of Navigation, 2012.

Disseny d'un sistema integrat GPS/IMU amb arquitectura fortament acoblada, utilitzant tècniques de lògica difusa.

[Li 13] Li, W., Wang, J., *Effective Adaptive Kalman Filter for MEMS-IMU/Magnetometers Integrated Attitude and Heading Reference Systems*, The Journal of Navigation, 2013.

Filtre de Kalman amb guany variable segons l'acceleració mesurada pels sensors.

[Pee04] Peeraerts, P., *Birada sistemo helpas pli kaj pli da ŝoforoj*, Revista *Monato*, setembre 2004.

Comentari general sobre la tecnologia GPS i el test d'un receptor de baix cost TomTom Go, en una revista generalista, no especialitzada; disponible també online a <http://www.esperanto.be/fel/2004/008419.html>

6.2.3. LLOCS WEB.

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Global_Positioning_System

La wikipedia és d'una fiabilitat discutible, però la versió en anglès resulta útil per a localitzar altres referències i per a trobar il·lustracions d'utilització lliure, com a: http://commons.wikimedia.org/wiki/Global_Positioning_System

[2] Dana, P., *Global Positioning System Overview*,
<http://www.colorado.edu/geography/gcraft/notes/gps/gps.html>

Descripció general del sistema GPS, de la Universitat de Colorado.

[3] Massatt, P., Brady, W., *Optimizing Performance Through Constellation Management*,
<http://www.aero.org/publications/crosslink/summer2002/03.html>

Article de la revista *Crosslink* que analitza les diferents possibilitats per a la configuració orbital dels satèl·lits.

[4] <http://gpstekreviews.com/2007/04/14/gps-receiver-chip-performance-survey/>

Comparació dels circuits integrats per a GPS de diversos fabricants.

[5] *GPS Standard Positioning Service Performance Standard*,
<http://pnt.gov/public/docs/2008-SPSPS.pdf>

Descripció oficial detallada del nivell de servei SPS (2008).

- [6] *GPS Precise Positioning Service Performance Standard*,
http://gps.afspc.af.mil/gpsoc/documents/PPS_PS_Signed_Final_23_Feb_07.pdf

Descripció oficial detallada del nivell de servei PPS (2007).

- [7] http://www.faa.gov/about/office_org/headquarters_offices/ato/service_units/techops/nav_services/gnss/faq/gps/

Pàgina de la Federal Aviation Administration, amb qüestions sobre GPS que afecten l'aviació civil.

- [8] *DoD Permanently Discontinues Procurement Of Global Positioning System Selective Availability*, <http://www.defenselink.mil/releases/release.aspx?releaseid=11335>

Anunci del Departament de Defensa sobre l'eliminació de la Disponibilitat Selectiva.

- [9] Zogg, J., *Essentials of Satellite Navigation Compendium*, Ublox, 2007, [http://www.u-blox.com/customersupport/docs/GPS_Compndium\(GPS-X-02007\).pdf](http://www.u-blox.com/customersupport/docs/GPS_Compndium(GPS-X-02007).pdf)

Extens i detallat llibre sobre navegació per satèl·lit, que compara els sistemes GPS, GLONASS i GALILEO, disponible online al web del fabricant de circuits integrats per a GPS Ublox.

- [10] *GPS SPS Signal Specification*,
<http://www.navcen.uscg.gov/pubs/gps/sigspec/gpssps1.pdf>

Descripció oficial detallada del missatge de navegació.

- [11] *How GPS Works: Composition of the Data Signal*,
http://www.kowoma.de/en/gps/data_composition.htm

Explicació simplificada de l'estructura del missatge de navegació.

- [12] Langley, R., *The Mathematics of GPS*, GPS World, 1991,
<http://gauss.gge.unb.ca/gpsworld/EarlyInnovationColumns/Innov.1991.07-08.pdf>

Descripció qualitativa del mètode de càlcul de la posició del receptor.

- [13] *Sources of Errors in GPS*, <http://www.kowoma.de/en/gps/errors.htm>

Explicació detallada de les fonts d'error, de la dilució de precisió i de la disponibilitat selectiva.

- [14] *Tech Tip: Ephemeris Server*, <http://www.tdc.co.uk/index.php?key=ephemeris>

Efemèrides actualitzades cada 10 minuts, només per a determinades zones i models de receptors GPS.

- [15] La Mance, J., Jarvinen, J., De Salas, J., *Assisted GPS: A Low-Infrastructure Approach*, <http://www.gpsworld.com/gpsworld/article/articleDetail.jsp?id=12287> , 2002

Millora de la precisió del càlcul de posició en GPS amb connexió a internet.

- [16] Fung, D., *Watch out for data charges on your GPS phone*, <http://www.cnet.com.au/mobilephones/phones/0,239025953,339281483,00.htm>, 2007

Costos de la integració de GPS amb telèfons mòbils.

- [17] http://www.esa.int/esaNA/GGG63950NDC_egnos_0.html

Pàgina de l'Agència Espacial Europea que descriu com el sistema EGNOS augmenta la precisió de les mesures GPS.

- [18] Person, J., *Writing Your Own GPS Applications, Part II*, http://www.c-sharpcorner.com/UploadFile/jperson2000/Maps_NET08182008123137PM/Maps_NET.aspx , 2008

Il·lustració de l'error de camí múltiple.

- [19] Soloviev, A., *Identifying Urban Multipath Reflections with Integrated GPS/Inertial/LASER Data*, <http://techtalk.sidt.gpsworld.com/?p=188> , 2008

Reducció de l'error de camí múltiple utilitzant sensors auxiliars.

- [20] Rizos, C., *GPS Satellite Signals: The Transmitted Signal*,
http://www.gmat.unsw.edu.au/snap/gps/gps_survey/chap3/312.htm , 2000

Completa referència sobre topografia GPS de la Universitat de Nova Gal·les del Sud.

- [21] Ashby, N. *Relativity and the Global Positioning System*,
http://www.ipgp.jussieu.fr/~tarantola/Files/Professional/GPS/Neil_Ashby_Relativity_GPS.pdf , 2002

Article de la revista Physics Today amb una detallada explicació a un nivell més alt de l'efecte Sagnac, i altres efectes relativistes en el GPS.

- [22] Baijal, R., Arora, M., *GPS: A military perspective*,
<http://www.gisdevelopment.net/technology/gps/techgp0048.htm>

Resum de les aplicacions militars del sistema GPS.

- [23] *Global Positioning System, Serving the World*, <http://www.gps.gov/index.html>

Pàgina del govern americà amb un resum general de les aplicacions del GPS.

- [24] *Intelligent Railroad Systems*, <http://www.fra.dot.gov/us/content/783>

Ús del GPS en el transport ferroviari.

- [25] *National Institute of Standards and Technology, Time and Frequency Division*,
<http://tf.nist.gov/>

Aplicacions del GPS en cronometria.

- [26] Lazar, S., *Modernization and the Move to GPS III*,
<http://www.aero.org/publications/crosslink/summer2002/07.html>

Article de la revista Crosslinks, descrivint les millores del sistema GPS III.

- [27] <http://www.esa.int/esaNA/galileo.html>

Pàgina oficial de l'Agència Espacial Europea sobre el sistema GALILEO.

- [28] *The Beginner's Guide to Aeronautics*, NASA Glenn Research Center,
<http://www.grc.nasa.gov/WWW/k-12/airplane/index.html>

Pàgina didàctica de la NASA sobre aeronàutica, enfocada a estudiants d'ensenyament secundari però amb gran quantitat d'informació útil.

- [29] *efunda, Engineering Fundamentals*,
http://www.efunda.com/formulae/vibrations/sdof_eg_accelerometer.cfm

Pàgina amb fórmules i dades sobre molts àmbits de l'enginyeria.

- [30] Johnson, C., *Types of Accelerometers*, NI Developer Zone, National Instruments,
<http://zone.ni.com/devzone/cda/ph/p/id/284>

- [31] Khazan, A., *Unbonded Strain Gage Accelerometer*, NI Developer Zone, National Instruments, <http://zone.ni.com/devzone/cda/ph/p/id/292>

Pàgina del fabricant National Instruments amb una molt àmplia informació de suport per als seus productes, tutorials i exemples de codi.

- [32] Candler, R., *Introduction to Sensors*, Stanford University, 2008
http://www.stanford.edu/class/me220/data/lectures/lect10/lect_6.html

Documentació del curs d'Introducció als Sensors per a Enginyeria Mecànica, de la Universitat de Stanford.

- [33] Nave, C., *Hyperphysics*, Georgia State University, 2012,
<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/gyr.html>

Pàgina amb explicacions breus i gràfiques sobre molts conceptes de Física.

- [34] Apostolyuk, V., *Theory and Design of Micromechanical Vibratory Gyroscopes*,
<http://www.astrise.com/research/library/memsgyro.pdf>

Article a la web del fabricant de sistemes de navegació Astrise sobre la integració de giroscopis vibratoris en sistemes MEMS.

- [35] Bernstein, J., *An Overview of MEMS Inertial Sensing Technology*, Sensors Weekly, 2003, <http://www.sensorsmag.com/sensors/acceleration-vibration/an-overview-mems-inertial-sensing-technology-970>

Article amb molts detalls i exemples de giroscopis i acceleròmetres amb tecnologia MEMS.

- [36] http://cfm.citizen.co.jp/english/library/crystal_02.html

Web del fabricant Citizen amb explicacions gràfiques sobre giroscopis MEMS.

- [37] Grewal, M., Weill, L., Andrews, A., *Global Positioning Systems, Inertial Navigation, and Integration*, Wiley, 2007, <http://www.globalspec.com/reference/14786/160210/chapter-9-1-5-inertial-navigation-systems-laser-technology-and-lightwave-gyroscopes>

Globalspec és un cercador de productes per a molts àmbits de l'enginyeria que permet localitzar ràpidament els fabricants de qualsevol dispositiu, i dona accés a les webs dels fabricants i a gran quantitat d'informació tècnica, incloent amplis extractes de llibres, com aquest. Requereix registre gratuït.

- [38] Jones, W., *A Compass in Every Smartphone*, IEEE Spectrum, Feb. 2010, <http://spectrum.ieee.org/semiconductors/devices/a-compass-in-every-smartphone>

Spectrum és la revista generalista de l'IEEE, distribuïda a tots els membres. Aquest article il·lustra l'ús dels magnetòmetres de magnetoresistència als telèfons mòbils.

- [39] Boyd, T., *Geophysical Surveying Using Magnetism Methods*, Rensselaer Polytechnic Institute, <http://gretchen.geo.rpi.edu/roecker/AppGeo96/lectures/mag/fluxgate.html>

Explicació del funcionament del magnetòmetre fluxgate.

- [40] Snare, R., *A History of Vector Magnetometry in Space*, Institute of Geophysics and Planetary Physics, UCLA, <http://www-ssc.igpp.ucla.edu/personnel/russell/ESS265/History.html>

Explicació històrica de diversos dissenys per a magnetòmetres fluxgate.

[41] <http://accessscience.com/>

Pàgina didàctica de l'editorial McGraw-Hill.

[42] King, A.D., *Inertial Navigation – Forty Years of Evolution*, GEC Review, 1998, http://www.imar-navigation.de/downloads/papers/inertial_navigation_introduction.pdf

Excel·lent resum de les configuracions i la història de les IMU integrades.

[43] <http://www.globalspec.com/SpecSearch/Suppliers?Comp=98&RegEvent=login>

Fabricants d'Unitats de Mesura Inercial al cercador Globalspec.

[44] *MEMS Inertial Measurement Units*, Analog Devices, <http://www.analog.com/en/mems-sensors/mems-inertial-measurement-units/products/index.html>

Unitats de Mesura Inercials del fabricant Analog Devices, basades en tecnologia microelectromecànica.

[45] <http://es.farnell.com/honeywell-s-c/6df-1n2-c2-hwl/6df-inertial-measurement-unit-7/dp/2143910>

Unitat de Mesura Inercial de gamma mitjana, al web de Farnell, distribuïdor general de productes tècnics.

[46] Baluta, S., *A Guide to Using IMU in Embedded Applications*, Starlino Electronics, 2009, http://www.starlino.com/imu_guide.html

Tutorial per a la integració d'acceleròmetres i giroscopis en una IMU.

ANNEX: CODI.

Seguidament s'inclou el codi en Matlab dels filtres de Kalman i IMM, i alguns dels programes que utilitzen el codi d'aquests filtres per a obtenir les gràfiques de les trajectòries, de la sintonia dels filtres, o dels errors.

Només s'han imprès alguns dels programes; la resta són variacions d'aquests.

```

% FiltreKalman   Funció del filtre de Kalman

function [ZKAL] = FiltreKalman (Z, F, GAMMA, H, MOSTRES, SIGMAW, ...
    SIGMAACCEL)
% Z: mesures reals, F: matriu de transició d'estat,
% GAMMA: matriu de guany del soroll de procés, H: matriu de mesura,
% SIGMAW: desv.est. del soroll de mesura
% SIGMAACCEL: acceleració modelitzada com a soroll de procés

% Inicialitzacions
XKAL=zeros(4,MOSTRES); %Definició de la matriu de dades estimades
ZKAL=zeros(2,MOSTRES); %Definició de la matriu de mesures estimades
XKAL(:,1)=[2000;15;2000;0]; %Valors inicials de posició i velocitat
ZKAL(:,1)=[2000;2000]; %Valors inicials de les mesures
P=zeros(4); %Covariància de l'estat, inicialitzada a zero
Q=SIGMAACCEL^2*eye(2); %Covariància del soroll del procés
R=SIGMAW^2*eye(2); %Covariància del soroll de la mesura
S=zeros(2); %Covariància d'innovació
WKAL=zeros(4,2); %Guany del filtre de Kalman

for k=1:(MOSTRES-1)
    XKAL(:,k+1)=F*XKAL(:,k); %Predicció de l'estat
    P=F*P*F.'+GAMMA*Q*GAMMA.'; %Predicció de la covariància de l'estat
    % (La matriu de la covariància de l'estat queda sobreescrita)
    ZKAL(:,k+1)=H*XKAL(:,k+1); %Predicció de la mesura
    RES=Z(:,k+1)-ZKAL(:,k+1); %Residu de la mesura - vector d'innovació
    % (Si el residu és massa gran, pot indicar una mesura incorrecta)
    S=H*P*H.'+R; %Covariància d'innovació
    WKAL=P*H.'/S; %Guany del filtre de Kalman
    XKAL(:,k+1)=XKAL(:,k+1)+WKAL*RES; %Actualització de l'estimació
                                   %d'estat
    P=P-WKAL*S*WKAL.'; %Actualització de la covariància de l'estat
end

```

```

%FiltreIMM   Funció del filtre IMM

function [ZIMM] = FiltreIMM (Z, F, GAMMA, H, MOSTRES, SIGMAW, PI, ...
    SIGMAACCEL1, SIGMAACCEL2)
% Z: mesures reals, F: matriu de transició d'estat,
% GAMMA: matriu de guany del soroll de procés, H: matriu de mesura,
% SIGMAW: desv.est. del soroll de mesura
% PI: matriu de probabilitats de transició de models IMM
% SIGMAACCEL1, SIGMAACCEL2: acceleració modelitzada com a soroll
%   de procés en els dos models IMM

% Filtres de Kalman - IMM, inicialitzacions
XKAL1=zeros(4,MOSTRES);
XKAL2=zeros(4,MOSTRES);
XIMM=zeros(4,MOSTRES); %Definició de la matriu de dades
ZKAL1=zeros(2,MOSTRES);
ZKAL2=zeros(2,MOSTRES);
ZIMM=zeros(2,MOSTRES); %Definició de la matriu de mesura
XKAL1(:,1)=[2000;15;2000;0];
XKAL2(:,1)=[2000;15;2000;0];
XIMM(:,1)=[2000;15;2000;0]; %Valors inicials de posició i velocitat
ZKAL1(:,1)=[2000;2000];
ZKAL2(:,1)=[2000;2000];
ZIMM(:,1)=[2000;2000]; %Valors inicials de les mesures
P1=zeros(4);
P2=zeros(4);
P=zeros(4); %Covariància de l'estat, inicialitzada a zero
Q1=SIGMAACCEL1^2*eye(2); %Covariància del soroll del procés, model 1
Q2=SIGMAACCEL2^2*eye(2); %Covariància del soroll del procés, model 2
R=SIGMAW^2*eye(2); %Covariància del soroll de la mesura
S1=zeros(2);
S2=zeros(2);
S=zeros(2); %Covariància d'innovació
WKAL=zeros(4,2); %Guany del filtre de Kalman
MU1=0.99; %Probabilitat inicial del model 1
MU2=0.01; %Probabilitat inicial del model 2

for k=1:(MOSTRES-1)
    % Càlcul de les probabilitats d'interacció
    C1=PI(1,1)*MU1+PI(2,1)*MU2; %probabilitat del model 1
    C2=PI(1,2)*MU1+PI(2,2)*MU2; %probabilitat del model 2
    MU11=PI(1,1)*MU1/C1; %estat final 1, probabilitat que vingui de 1
    MU12=PI(1,2)*MU1/C2; %estat final 2, probabilitat que vingui de 1
    MU21=PI(2,1)*MU2/C1; %estat final 1, probabilitat que vingui de 2
    MU22=PI(2,2)*MU2/C2; %estat final 2, probabilitat que vingui de 2

    % Interacció dels models, predicció inicial de l'estat
    XKAL10=MU11*XKAL1(:,k)+MU21*XKAL2(:,k);
    XKAL20=MU12*XKAL1(:,k)+MU22*XKAL2(:,k);
    % Interacció dels models, covariància inicial
    P10=MU11*(P1+(XKAL1(:,k)-XKAL10)*(XKAL1(:,k)-XKAL10).') ...
        +MU21*(P2+(XKAL2(:,k)-XKAL10)*(XKAL2(:,k)-XKAL10).');
    P20=MU12*(P1+(XKAL1(:,k)-XKAL20)*(XKAL1(:,k)-XKAL20).') ...
        +MU22*(P2+(XKAL2(:,k)-XKAL20)*(XKAL2(:,k)-XKAL20).');

    % Filtratge
    XKAL1(:,k+1)=F*XKAL10; %Predicció de l'estat
    XKAL2(:,k+1)=F*XKAL20; %Predicció de l'estat

```

```

P1=F*P10*F.'+GAMMA*Q1*GAMMA.'; %Predicció de la covariància de
                                %l'estat
P2=F*P20*F.'+GAMMA*Q2*GAMMA.'; %Predicció de la covariància de
                                %l'estat
% (Les matrius de la covariància de l'estat queden sobreescrites)
ZKAL1(:,k+1)=H*XKAL1(:,k+1); %Predicció de la mesura
ZKAL2(:,k+1)=H*XKAL2(:,k+1); %Predicció de la mesura
RES1=Z(:,k+1)-ZKAL1(:,k+1); %Residu de la mesura -- vector
                                %d'innovació
RES2=Z(:,k+1)-ZKAL2(:,k+1); %Residu de la mesura -- vector
                                %d'innovació
% (Si el residu és massa gran, pot indicar una mesura incorrecta)
S1=H*P1*H.'+R; %Covariància d'innovació
S2=H*P2*H.'+R; %Covariància d'innovació
WKAL1=P1*H.'/S1; %Guany del filtre de Kalman
WKAL2=P2*H.'/S2; %Guany del filtre de Kalman
XKAL1(:,k+1)=XKAL1(:,k+1)+WKAL1*RES1; %Actualització de l'estimació
                                %d'estat
XKAL2(:,k+1)=XKAL2(:,k+1)+WKAL2*RES2; %Actualització de l'estimació
                                %d'estat
P1=P1-WKAL1*S1*WKAL1.'; %Actualització de la covariància de l'estat
P2=P2-WKAL2*S2*WKAL2.'; %Actualització de la covariància de l'estat

% Actualització de les probabilitats
D1Q=RES1.'/S1*RES1; %Distància estadística quadrat (escalar)
D2Q=RES2.'/S2*RES2; %Distància estadística quadrat (escalar)
LAMBDA1=exp(-D1Q/2)/sqrt((2*pi)^2*det(S1)); %Funció de versemblança
LAMBDA2=exp(-D2Q/2)/sqrt((2*pi)^2*det(S2)); %Funció de versemblança
C=LAMBDA1*C1+LAMBDA2*C2; %Constant de normalització
MU1=LAMBDA1*C1/C; %Actualització de les probabilitats dels models
MU2=LAMBDA2*C2/C; %Actualització de les probabilitats dels models

% Predicció d'estat, covariància i mesura
XIMM(:,k+1)=MU1*XKAL1(:,k+1)+MU2*XKAL2(:,k+1); %Predicció de l'estat
P=MU1*(P1+(XKAL1(:,k+1)-XIMM(:,k+1))*(XKAL1(:,k+1)-XIMM(:,k+1)).')
    ...
    +MU2*(P2+(XKAL2(:,k+1)-XIMM(:,k+1))*(XKAL2(:,k+1)-XIMM(:,k+1)).');
ZIMM(:,k+1)=H*XIMM(:,k+1); %Predicció de la mesura
end

```



```

% Simulació de la trajectòria d'un vehicle en dues dimensions,
% amb soroll de procés i soroll de mesura

T=10; %Temps de mostreig
MOSTRES=240; %Número de mostres
X=zeros(4,MOSTRES); %Definició de la matriu de dades
Z=zeros(2,MOSTRES); %Definició de la matriu de mesura
X(:,1)=[2000;15;2000;0]; %Valors inicials de posició i velocitat
Z(:,1)=[2000;2000]; %Valors inicials de les mesures
% posició x = 2000 m, posició y = 2000 m
% velocitat x = 15 m/s, velocitat y = 0

F=[1 T 0 0;0 1 0 0;0 0 1 T;0 0 0 1]; %Matriu del procés
GAMMA=[T^2/2 0;T 0;0 T^2/2;0 T]; %Matriu de soroll del procés
G=[T^2/2 0;T 0;0 T^2/2;0 T]; %Matriu d'entrada d'acceleració
                                %(modelitzada com a soroll de procés)
H=[1 0 0 0; 0 0 1 0]; %Matriu de la mesura

SIGMAV=0.002; %Desviació estàndard del soroll del procés, en m/s2
SIGMAW=100; %Desviació estàndard del soroll de la mesura, en m

SIGMAACCEL=0.13; %Acceleració modelitzada com a soroll, Kalman
PI=[0.975 0.025; 0.05 0.95]; %Probabilitat de transició de models IMM
SIGMAACCEL1=0.02; %Acceleració modelitzada com a soroll, model 1
SIGMAACCEL2=0.2; %Acceleració modelitzada com a soroll, model 2

ACC=0.075; %Acceleració de gir en cada component
ACCEL=[0;0]; %Valors inicials d'acceleració
for k=1:(MOSTRES-1)
    if (k==40) ACCEL=[-ACC; ACC]; end;
    if (k==60) ACCEL=[0; 0]; end;
    if (k==100) ACCEL=[-ACC; -ACC]; end;
    if (k==120) ACCEL=[0; 0]; end;
    if (k==160) ACCEL=[ACC; -ACC]; end;
    if (k==180) ACCEL=[0; 0]; end;
    if (k==220) ACCEL=[ACC; ACC]; end;
    V=SIGMAV*randn(2,1); %Soroll gaussià del procés
    W=SIGMAW*randn(2,1); %Soroll gaussià de la mesura
    X(:,k+1)=F*X(:,k)+G*ACCEL+GAMMA*V; %Equació del procés
    Z(:,k+1)=H*X(:,k+1)+W; %Equació de la mesura
end

ZKAL = FiltreKalman (Z, F, GAMMA, H, MOSTRES, SIGMAW, SIGMAACCEL);
ZIMM = FiltreIMM (Z, F, GAMMA, H, MOSTRES, SIGMAW, PI, ...
    SIGMAACCEL1, SIGMAACCEL2);

%plot(X(1,:),X(3,:),Z(1,:),Z(2,:),ZKAL(1,:),ZKAL(2,:));
%legend('Trajectòria', 'Mesures', 'Filtre Kalman');
%title(['FILTRE DE KALMAN, \sigma_A=',num2str(SIGMAACCEL)]);

%plot(X(1,:),X(3,:),Z(1,:),Z(2,:),ZIMM(1,:),ZIMM(2,:));
%legend('Trajectòria', 'Mesures', 'Filtre IMM');
%title(['FILTRE IMM, \sigma_A_1=',num2str(SIGMAACCEL1), ...
%      ', \sigma_A_2=',num2str(SIGMAACCEL2)]);

%plot(X(1,:),X(3,:),Z(1,:),Z(2,:),ZIMM(1,:),ZIMM(2,:));
%legend('Trajectòria', 'Mesures', 'Filtre IMM');
%title(['FILTRE IMM, \sigma_A_1=',num2str(SIGMAACCEL1), ...

```

```

%      ', \sigma_A_2=', num2str(SIGMAACCEL2), ', Probabilitat de
% transició=0.1'];

plot(X(1,:), X(3,:), ZKAL(1,:), ZKAL(2,:), ZIMM(1,:), ZIMM(2,:));
legend('Trajectòria', 'Filtre Kalman', 'Filtre IMM');
title('FILTRES DE KALMAN I IMM');

xlabel('Posició x (m)');
ylabel('Posició y (m)');
axis([-1000 11000 0 15000]);

```

```

% Sintonització del filtre de Kalman

T=10; %Temps de mostreig
MOSTRES=240; %Número de mostres
X=zeros(4,MOSTRES); %Definició de la matriu de dades
Z=zeros(2,MOSTRES); %Definició de la matriu de mesura
X(:,1)=[2000;15;2000;0]; %Valors inicials de posició i velocitat
Z(:,1)=[2000;2000]; %Valors inicials de les mesures
% posició x = 2000 m, posició y = 2000 m
% velocitat x = 15 m/s, velocitat y = 0

F=[1 T 0 0;0 1 0 0;0 0 1 T;0 0 0 1]; %Matriu del procés
GAMMA=[T^2/2 0;T 0;0 T^2/2;0 T]; %Matriu de soroll del procés
G=[T^2/2 0;T 0;0 T^2/2;0 T]; %Matriu d'entrada d'acceleració
                                %(modelitzada com a soroll de procés)
H=[1 0 0 0; 0 0 1 0]; %Matriu de la mesura

ACC=0.075; %Acceleració de gir en cada component

SIGMAV=0.002; %Desviació estàndard del soroll del procés, en m/s2
SIGMAW=100; %Desviació estàndard del soroll de la mesura, en m
%PI=[0.975 0.025; 0.05 0.95]; %Probabilitat de transició de models IMM
%SIGMAACCEL1=0.02; %Acceleració modelitzada com a soroll, model 1
%SIGMAACCEL2=0.2; %Acceleració modelitzada com a soroll, model 2

SIGMAACCEL=0.07; %Acceleració modelitzada com a soroll, Kalman
                %Valor inicial
TAULASINTONIA=zeros(16,3);

for i=1:16
    i %Número d'iteració, únicament per a estimar el temps de càlcul
    TAULASINTONIA(i,1)=SIGMAACCEL;
    SUMERRORPOSKALPIC=0;
    %SUMERRORPOSIMMPIC=0;
    SUMERRORPOSKALRMS=0;
    %SUMERRORPOSIMMRMS=0;
    REPETICIONS=1000; %Número de repeticions

    for j=1:REPETICIONS %Execució repetida dels filtres
        ACCEL=[0;0]; %Valors inicials d'acceleració

        for k=1:(MOSTRES-1)
            if (k==40) ACCEL=[-ACC; ACC]; end;
            if (k==60) ACCEL=[0; 0]; end;
            if (k==100) ACCEL=[-ACC; -ACC]; end;
            if (k==120) ACCEL=[0; 0]; end;
            if (k==160) ACCEL=[ACC; -ACC]; end;
            if (k==180) ACCEL=[0; 0]; end;
            if (k==220) ACCEL=[ACC; ACC]; end;
            V=SIGMAV*randn(2,1); %Soroll gaussià del procés
            W=SIGMAW*randn(2,1); %Soroll gaussià de la mesura
            X(:,k+1)=F*X(:,k)+G*ACCEL+GAMMA*V; %Equació del procés
            Z(:,k+1)=H*X(:,k+1)+W; %Equació de la mesura
        end

        ZKAL = FiltreKalman (Z, F, GAMMA, H, MOSTRES, SIGMAW,
                            SIGMAACCEL);
        %ZIMM = FiltreIMM (Z, F, GAMMA, H, MOSTRES, SIGMAW, PI, ...

```

```

%   SIGMAACCEL1, SIGMAACCEL2);

% Càlculs dels errors - Inicialitzacions
ERRORPOSKALPIC=0; %Error de pic de posició - Kalman
ERRORPOSKALRMS=0; %Error rms de posició - Kalman
%ERRORPOSIMMPIC=0; %Error de pic de posició - IMM
%ERRORPOSIMMRMS=0; %Error rms de posició - IMM
SUMQUADKAL=0; %Suma dels quadrats de les distàncies - Kalman
%SUMQUADIMM=0; %Suma dels quadrats de les distàncies - IMM

for k=1:(MOSTRES-1)
    ERRORQUADKAL=(Z(1,k)-ZKAL(1,k))^2+(Z(2,k)-ZKAL(2,k))^2;
    %Quadrat de la distància - Kalman
    ERRORPOSKAL=sqrt(ERRORQUADKAL); %Error de posició de cada
    %punt
    if (ERRORPOSKAL>ERRORPOSKALPIC) ERRORPOSKALPIC=ERRORPOSKAL;
    end;
    %Actualització de l'error de pic de posició
    SUMQUADKAL=SUMQUADKAL+ERRORQUADKAL;
    %Actualització de la suma dels quadrats
    %ERRORQUADIMM=(Z(1,k)-ZIMM(1,k))^2+(Z(2,k)-ZIMM(2,k))^2;
    %Quadrat de la distància - IMM
    %ERRORPOSIMM=sqrt(ERRORQUADIMM); %Error de posició de cada
    %punt
    %if (ERRORPOSIMM>ERRORPOSIMMPIC) ERRORPOSIMMPIC=ERRORPOSIMM;
    %end;
    %Actualització de l'error de pic de posició
    %SUMQUADIMM=SUMQUADIMM+ERRORQUADIMM;
    %Actualització de la suma dels quadrats
end

ERRORPOSKALRMS=sqrt(SUMQUADKAL/MOSTRES);
%ERRORPOSIMMRMS=sqrt(SUMQUADIMM/MOSTRES);
SUMERRORPOSKALPIC=SUMERRORPOSKALPIC+ERRORPOSKALPIC;
%SUMERRORPOSIMMPIC=SUMERRORPOSIMMPIC+ERRORPOSIMMPIC;
SUMERRORPOSKALRMS=SUMERRORPOSKALRMS+ERRORPOSKALRMS;
%SUMERRORPOSIMMRMS=SUMERRORPOSIMMRMS+ERRORPOSIMMRMS;
end

MITJANAERRORPOSKALPIC=SUMERRORPOSKALPIC/REPETICIONS;
%MITJANAERRORPOSIMMPIC=SUMERRORPOSIMMPIC/REPETICIONS;
MITJANAERRORPOSKALRMS=SUMERRORPOSKALRMS/REPETICIONS;
%MITJANAERRORPOSIMMRMS=SUMERRORPOSIMMRMS/REPETICIONS;
TAULASINTONIA(i,2)=MITJANAERRORPOSKALPIC;
TAULASINTONIA(i,3)=MITJANAERRORPOSKALRMS;
SIGMAACCEL=SIGMAACCEL+0.01;
end

TAULASINTONIA;
figure;
plot(TAULASINTONIA(:,1),TAULASINTONIA(:,2));
title('SINTONIA DEL FILTRE DE KALMAN');
xlabel('Paràmetre d\'acceleració, \sigma_A (m/s^2)');
ylabel('Error de pic de posició mitjà (m)');
figure;
plot(TAULASINTONIA(:,1),TAULASINTONIA(:,3));
title('SINTONIA DEL FILTRE DE KALMAN');
xlabel('Paràmetre d\'acceleració, \sigma_A (m/s^2)');
ylabel('Error rms de posició mitjà (m)');

```

```

% Comparació dels filtres de Kalman i IMM

T=10; %Temps de mostreig
MOSTRES=60; %Número de mostres
X=zeros(4,MOSTRES); %Definició de la matriu de dades
Z=zeros(2,MOSTRES); %Definició de la matriu de mesura
X(:,1)=[2000;15;2000;0]; %Valors inicials de posició i velocitat
Z(:,1)=[2000;2000]; %Valors inicials de les mesures
% posició x = 2000 m, posició y = 2000 m
% velocitat x = 15 m/s, velocitat y = 0

F=[1 T 0 0;0 1 0 0;0 0 1 T;0 0 0 1]; %Matriu del procés
GAMMA=[T^2/2 0;T 0;0 T^2/2;0 T]; %Matriu de soroll del procés
G=[T^2/2 0;T 0;0 T^2/2;0 T]; %Matriu d'entrada d'acceleració
                                %(modelitzada com a soroll de procés)
H=[1 0 0 0; 0 0 1 0]; %Matriu de la mesura

SIGMAV=0.002; %Desviació estàndard del soroll del procés, en m/s2
SIGMAW=100; %Desviació estàndard del soroll de la mesura, en m
%SIGMAACCEL=0.13; %Acceleració modelitzada com a soroll, Kalman
PI=[0.95 0.05; 0.05 0.95]; %Probabilitat de transició de models IMM
%SIGMAACCEL1=0.02; %Acceleració modelitzada com a soroll, model 1
%SIGMAACCEL2=0.2; %Acceleració modelitzada com a soroll, model 2

%ACC=0.075 %Acceleració de gir en cada component
ACC=0.025;
TAULAINDEX=zeros(25,5);

for i=1:40
    i
    SIGMAACCEL=sqrt(0.075^2+ACC^2); %Acceleració modelitzada com a
                                %soroll, Kalman
    SIGMAACCEL1=SIGMAACCEL*2/13; %Acceleració modelitzada com a soroll,
                                %model 1
    SIGMAACCEL2=SIGMAACCEL*20/13; %Acceleració modelitzada com a soroll,
                                %model 2
    INDMAN=sqrt(0.075^2+ACC^2)*T^2/SIGMAW; %Índex de maniobrabilitat
    TAULAINDEX(i,1)=INDMAN;
    SUMERRORPOSKALPIC=0;
    SUMERRORPOSIMMPIC=0;
    SUMERRORPOSKALRMS=0;
    SUMERRORPOSIMMRMS=0;
    REPETITIONS=100; %Número de repeticions

    for j=1:REPETITIONS %Execució repetida dels filtres
        ACCEL=[0;0]; %Valors inicials d'acceleració

        for k=1:(MOSTRES-1)
            if (k==20) ACCEL=[-0.075; ACC]; end;
            if (k==40) ACCEL=[0; 0]; end;
            V=SIGMAV*randn(2,1); %Soroll gaussià del procés
            W=SIGMAW*randn(2,1); %Soroll gaussià de la mesura
            X(:,k+1)=F*X(:,k)+G*ACCEL+GAMMA*V; %Equació del procés
            Z(:,k+1)=H*X(:,k+1)+W; %Equació de la mesura
        end

        ZKAL = FiltreKalman (Z, F, GAMMA, H, MOSTRES, SIGMAW,
                                SIGMAACCEL);
    end
end

```

```

ZIMM = FiltreIMM (Z, F, GAMMA, H, MOSTRES, SIGMAW, PI, ...
    SIGMAACCEL1, SIGMAACCEL2);

% Càlculs dels errors - Inicialitzacions
ERRORPOSKALPIC=0; %Error de pic de posició - Kalman
ERRORPOSKALRMS=0; %Error rms de posició - Kalman
ERRORPOSIMMPIC=0; %Error de pic de posició - IMM
ERRORPOSIMMRMS=0; %Error rms de posició - IMM
SUMQUADKAL=0; %Suma dels quadrats de les distàncies - Kalman
SUMQUADIMM=0; %Suma dels quadrats de les distàncies - IMM

for k=1:(MOSTRES-1)
    ERRORQUADKAL=(Z(1,k)-ZKAL(1,k))^2+(Z(2,k)-ZKAL(2,k))^2;
    %Quadrat de la distància - Kalman
    ERRORPOSKAL=sqrt(ERRORQUADKAL); %Error de posició de cada
    %punt
    if (ERRORPOSKAL>ERRORPOSKALPIC) ERRORPOSKALPIC=ERRORPOSKAL;
end;
    %Actualització de l'error de pic de posició
    SUMQUADKAL=SUMQUADKAL+ERRORQUADKAL;
    %Actualització de la suma dels quadrats
    ERRORQUADIMM=(Z(1,k)-ZIMM(1,k))^2+(Z(2,k)-ZIMM(2,k))^2;
    %Quadrat de la distància - IMM
    ERRORPOSIMM=sqrt(ERRORQUADIMM); %Error de posició de cada
    %punt
    if (ERRORPOSIMM>ERRORPOSIMMPIC) ERRORPOSIMMPIC=ERRORPOSIMM;
end;
    %Actualització de l'error de pic de posició
    SUMQUADIMM=SUMQUADIMM+ERRORQUADIMM;
    %Actualització de la suma dels quadrats
end

ERRORPOSKALRMS=sqrt(SUMQUADKAL/MOSTRES);
ERRORPOSIMMRMS=sqrt(SUMQUADIMM/MOSTRES);
SUMERRORPOSKALPIC=SUMERRORPOSKALPIC+ERRORPOSKALPIC;
SUMERRORPOSIMMPIC=SUMERRORPOSIMMPIC+ERRORPOSIMMPIC;
SUMERRORPOSKALRMS=SUMERRORPOSKALRMS+ERRORPOSKALRMS;
SUMERRORPOSIMMRMS=SUMERRORPOSIMMRMS+ERRORPOSIMMRMS;
end

MITJANAERRORPOSKALPIC=SUMERRORPOSKALPIC/REPETICIONS;
MITJANAERRORPOSIMMPIC=SUMERRORPOSIMMPIC/REPETICIONS;
MITJANAERRORPOSKALRMS=SUMERRORPOSKALRMS/REPETICIONS;
MITJANAERRORPOSIMMRMS=SUMERRORPOSIMMRMS/REPETICIONS;
TAULAINDEX(i,2)=MITJANAERRORPOSKALPIC;
TAULAINDEX(i,3)=MITJANAERRORPOSIMMPIC;
TAULAINDEX(i,4)=MITJANAERRORPOSKALRMS;
TAULAINDEX(i,5)=MITJANAERRORPOSIMMRMS;
ACC=ACC+0.025;

%figure;
%plot(X(1,:),X(3,:),ZKAL(1,:),ZKAL(2,:),ZIMM(1,:),ZIMM(2,:));
%legend('Trajectòria','Filtre Kalman','Filtre IMM');
%title('FILTRES DE KALMAN I IMM');
%xlabel('Posició x (m)');
%ylabel('Posició y (m)');
end

figure;

```

```

plot(TAULAINDEX(:,1),TAULAINDEX(:,2),TAULAINDEX(:,1),TAULAINDEX(:,3));
legend('Kalman','IMM');
title('ERROR DE PIC DE POSICIÓ');
xlabel('Índex de maniobrabilitat');
ylabel('Error de pic de posició (m)');

figure;
plot(TAULAINDEX(:,1),TAULAINDEX(:,4),TAULAINDEX(:,1),TAULAINDEX(:,5));
legend('Kalman','IMM');
title('ERROR RMS DE POSICIÓ');
xlabel('Índex de maniobrabilitat');
ylabel('Error rms de posició (m)');

```


RESUM.

Resum:

Els sistemes híbrids de navegació integren mesures de posició i velocitat provinents de satèl·lits (GPS) i d'unitats de mesura inercials (IMU). Les dades d'aquests sensors s'han de fusionar i suavitzar, i per a aquest propòsit existeixen diversos algorismes de filtratge, que tracten les dades conjuntament o per separat.

En aquest treball s'han codificat en Matlab els algorismes dels filtres de Kalman i IMM, i s'han comparat les seves prestacions en diverses trajectòries d'un vehicle. S'han avaluat quantitativament els errors dels dos filtres, i s'han sintonitzat els seus paràmetres per a minimitzar aquests errors.

Amb una correcta sintonia dels filtres, s'ha comprovat que el filtre IMM és superior al filtre de Kalman, tant per maniobres brusques com per maniobres suaus, malgrat que la complexitat i el temps de càlcul requerit són majors.

Summary:

Aided navigation systems integrate position and speed measurements provided by satellites (GPS) and inertial measurement units (IMU). Data from these sensors must be fused and smoothed, and several filtering algorithms have been developed for this purpose. They use data from all sensors together or separately.

In this work, Kalman and IMM filter algorithms have been coded in Matlab, and they have been applied to several vehicle paths, in order to compare their performances. Errors in both filters have been quantitatively estimated, and filter parameters have been tuned to minimize these errors.

It has been seen that IMM filter is better than Kalman, when both of them are properly tuned, and both for sharp maneuvers and for smooth ones, although IMM filter is more complex and time demanding.

Resumen:

Los sistemas híbridos de navegación integran medidas de posición y velocidad provenientes de satélites (GPS) y de unidades de medida inerciales (IMU). Los datos de estos sensores deben fusionarse y suavizarse, y a tal efecto existen diversos algoritmos de filtrado, que tratan los datos conjuntamente o por separado.

En este trabajo se han codificado en Matlab los algoritmos de los filtros de Kalman e IMM, y se han comparado sus prestaciones en diversas trayectorias de un vehículo. Se han evaluado cuantitativamente los errores de ambos filtros, y se han sintonizado sus parámetros para minimizar dichos errores.

Con una sintonía correcta de los filtros, se ha comprobado que el filtro IMM es superior al filtro de Kalman, tanto para maniobras bruscas como suaves. Ello no obstante, la complejidad y el tiempo de cálculo requerido son mayores.