

**(5958: PLN APLICADO A LOS EXÁMENES DE SELECTIVIDAD DE MATEMÁTICAS)**

Memoria del Proyecto Fin de Carrera  
de Ingeniería en Informática  
realizado por  
Jose Enrique Sánchez Moral  
y dirigido por  
Yolanda Benítez Fernández  
Bellaterra, 14 de septiembre de 2015

El abajo firmante, Yolanda Benítez Fernández  
profesor/a de l'Escola d'Enginyeria de la UAB,

**CERTIFICA:**

Que el trabajo al que corresponde esta memoria ha sido realizado bajo su  
dirección por Jose Enrique Sánchez Moral

Y para que conste firma la presente.

Firmado:



Bellaterra, 14 de septiembre de 2015



# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
1.1. Motivación . . . . .	5
1.2. Objetivos . . . . .	5
1.3. Organización de la memoria . . . . .	6
<b>2. Planificación</b>	<b>7</b>
2.1. Metodología . . . . .	7
2.2. Planificación inicial . . . . .	8
2.3. Coste estimado . . . . .	9
2.4. Viabilidad . . . . .	9
<b>3. Viabilidad de la resolución automática</b>	<b>10</b>
3.1. Definición del problema . . . . .	10
3.2. Viabilidad de la resolución automática . . . . .	10
3.2.1. Reconocimiento de objetos . . . . .	11
3.2.2. Interpretación . . . . .	12
3.2.3. Resolución . . . . .	13
3.2.4. Explicación . . . . .	13
3.2.5. Conclusión . . . . .	13
3.3. Solución propuesta . . . . .	14
<b>4. Fundamentos</b>	<b>15</b>
4.1. Matemáticas . . . . .	15
4.2. PLN . . . . .	15
4.3. Framenet . . . . .	16
4.4. FreeLing . . . . .	16
<b>5. Lenguaje para interpretar los enunciados</b>	<b>17</b>
<b>6. Herramienta para la creación de marcos semánticos</b>	<b>20</b>
6.1. Requisitos . . . . .	20
6.2. Casos de uso . . . . .	20
6.3. Diseño . . . . .	20
6.4. Implementación . . . . .	21
6.5. Resultados . . . . .	21
6.6. Ejemplo . . . . .	21
<b>7. Conclusiones</b>	<b>23</b>
7.1. Desviación de la planificación . . . . .	23
7.2. Conclusiones . . . . .	24
7.3. Ampliaciones y mejoras . . . . .	24
<b>8. Anexos</b>	<b>26</b>
8.1. Interpretación de los enunciados de álgebra . . . . .	26
8.1.1. Matrices y determinantes . . . . .	26
8.1.2. Sistemas de ecuaciones . . . . .	34
<b>Bibliografía</b>	<b>38</b>

# 1. Introducción

Este proyecto trata sobre la aplicación de la inteligencia artificial (IA) a la resolución automática de los exámenes de selectividad de matemáticas II. Estos exámenes son un conjunto de pruebas que realizan los alumnos que quieren acceder a estudios universitarios que otorgan títulos oficiales. Aunque la ley LOMCE eliminará la selectividad a partir del curso 2017-2018 [1], sigue siendo interesante ser capaz de responder automáticamente al tipo de preguntas que plantean estos exámenes.

## 1.1. Motivación

Por un lado, los informes internacionales como el Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes (PISA), el Estudio Internacional de Progreso en Comprensión Lectora (PIRLS) o el Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias (TIMSS), que miden las competencias de los alumnos en comprensión lectora, matemáticas y ciencias señalan los malos resultados de España. Concretamente, en la página 65 del volumen I del PIRLS-TIMSS de 2011 se dice: “Los peores resultados son en matemáticas... España se sitúa entre los países de la OCDE con peores resultados” [2].

Además, dos estudios de la Universidad de Granada señalan que: el 60 % de los universitarios encuestados padecen ansiedad matemática [3]; el 80 % de los estudiantes de primer curso de magisterio de educación primaria de esa Universidad también la sufren y que, según estudios previos, esa ansiedad condicionará el rendimiento de los alumnos de estos futuros profesores [4].

De lo anterior, podemos deducir que hay una cantidad significativa de personas que tienen dificultades con las matemáticas. Aunque tanto los informes como los estudios mencionados hay que tomarlos con cautela. Por ejemplo, hay diversas críticas sobre la validez del informe PISA [5][6].

Por otro lado, la inteligencia artificial sigue avanzando incluso en tareas que creíamos reservadas a las personas como: la conducción autónoma [7], empezar a entender las emociones [8], detectar el sarcasmo [9], redactar noticias [10] o responder a preguntas en lenguaje natural [11][12]. Aunque este éxito sigue siendo en sistemas especializados [13], es suficiente para amenazar una parte significativa del empleo actual [14][15].

Recapitulando, mientras que un subconjunto de la población tiene problemas con materias clave, ejemplificado en este caso con las matemáticas, la inteligencia artificial progresa y con el tiempo irá eliminando el empleo que no requiera demasiada formación.

A pesar de ser una competidora, la IA también puede convertirse en nuestra aliada si la aprovechamos para mejorar la educación, por ejemplo, mediante la informática educativa, la pedagogía computacional [16] o mediante asistentes virtuales aplicados a la educación [17].

## 1.2. Objetivos

El objetivo principal de este proyecto es servir de base para la construcción de un software capaz de resolver los exámenes de selectividad de matemáticas II como lo haría una persona. Esto da lugar a los siguientes subobjetivos: estudiar la viabilidad, adquirir los conocimientos necesarios e iniciar el proyecto.

El estudio de viabilidad de este software, no confundir con el estudio de viabilidad del proyecto, implica investigar si es posible adaptar las técnicas y herramientas actuales para lograr el objetivo principal y explicar cómo debería ser la solución.

A lo largo de mis estudios universitarios, he cursado dos asignaturas sobre inteligencia artificial que me han permitido obtener unos conocimientos básicos sobre esta materia. Esos conocimientos son los que me impulsaron a creer que la construcción de este software era posible, pero son demasiado elementales para poder crear el programa de resolución automática. Así que una de las metas más

importantes es obtener la formación que vaya a necesitar.

Por último, es esencial iniciar el desarrollo en fases tempranas para detectar problemas no previstos y abordar la complejidad de manera incremental.

### **1.3. Organización de la memoria**

Con el objetivo de cumplir las metas propuestas en el apartado anterior, en la sección dedicada a la planificación se analiza la metodología a seguir en el proyecto, posteriormente se concreta en una planificación inicial y finalmente se analiza el coste y la viabilidad.

En la sección siguiente se estudia detalladamente si es posible resolver automáticamente los exámenes de selectividad de matemáticas II. Esta cuestión se aborda teniendo en cuenta cuatro aspectos: el reconocimiento de objetos, la interpretación, la resolución y la explicación.

Las siguientes secciones se centran en los primeros pasos para la creación de un programa que pueda interpretar los enunciados. La primera aborda algunos conocimientos básicos sobre matemáticas y lingüística computacional, la segunda habla sobre una herramienta para crear marcos semánticos y en la última se detalla un lenguaje formal creado para satisfacer dos necesidades: ayudarnos a crear los marcos conceptuales y saber qué requisitos debe cumplir el lenguaje al que finalmente traduzcamos los enunciados. En relación a estas secciones, en el anexo hay una lista de los 60 ejercicios que forman el corpus, de los cuales cerca de 20 están traducidos a ese lenguaje.

Finalmente, en las conclusiones se compara la planificación inicial con la planificación final, se analizan los resultados obtenidos comparándolos con los objetivos iniciales y se da una lista de posibles ampliaciones y mejoras.

## 2. Planificación

En esta sección se empieza describiendo la metodología utilizada en este trabajo, después se muestra como se traduce en una planificación inicial y un coste estimado, finalmente se analiza la información anterior para determinar si los objetivos propuestos en la introducción son viables.

### 2.1. Metodología

Este proyecto se divide en 4 grandes etapas: toma de contacto, determinar la viabilidad de la resolución automática de los exámenes de selectividad de matemáticas II, empezar el desarrollo de una solución y elaborar la documentación asociada al proyecto.

Teniendo en cuenta que este trabajo ha sido propuesto por el alumno, la primera fase se centra en encontrar un tutor y elaborar una propuesta convincente. La propuesta se realiza consultando los apuntes de la asignatura de inteligencia artificial e información en Internet y tiene dos objetivos: hacerse una idea intuitiva de si el proyecto es viable y determinar, sin concretar demasiado, como podría solucionar el problema.

A partir de la información obtenida en la fase anterior se llega a la conclusión de que hay dos recursos clave (contenido y criterios de los exámenes de selectividad de matemáticas II y los propios exámenes) y tres tecnologías clave (visión computacional, lingüística computacional y sistemas expertos). Sabiendo qué hace falta, ya estamos en disposición de establecer, a grandes rasgos, como vamos a desarrollar el proyecto.

El siguiente punto importante es averiguar si la idea de resolver automáticamente los exámenes de selectividad de matemáticas II es plausible. Para poder hacerlo, tenemos que encontrar los recursos clave mencionados anteriormente y adquirir los conocimientos básicos de inteligencia artificial en los tres campos de los que se ha hablado en el párrafo anterior.

De la visión computacional queremos tres cosas: saber si es posible convertir de manera precisa un documento a un conjunto de archivos cuya información podamos procesar; un programa que pueda realizar la conversión anterior para usarlo con los exámenes que vayamos encontrando; las técnicas que nos permitan procesar un gráfico y obtener la información que necesitamos.

La lingüística computacional será el tema central de esta investigación, así que en primer lugar obtendremos una formación básica que nos permita entender la documentación que tendremos que consultar. El siguiente objetivo es averiguar si el procesamiento del lenguaje natural permite procesar los enunciados de los exámenes de matemáticas. Por último, es necesario buscar artículos de investigación y/o libros que estén relacionados con lo que queremos hacer.

En lo que respecta a los sistemas expertos, su interés se debe a dos motivos: es un campo de la inteligencia artificial que abarca todos los elementos que vamos a necesitar en este proyecto; el motor de inferencia, una pieza clave en los sistemas expertos, es fundamental a la hora de resolver los ejercicios. Por lo tanto, de esta tecnología tenemos que obtener un conocimiento general y profundizar un poco en los sistemas de inferencia.

El tercer punto importante es empezar a construir el software para resolver ejercicios. Aunque esta etapa está condicionada por la investigación preliminar sobre procesamiento del lenguaje natural, se espera usar la metodología de desarrollo iterativo e incremental y avanzar en la creación del programa.

Por último, se reservarán unas semanas para la elaboración de la documentación. En este caso, la documentación consta de la memoria y la presentación.

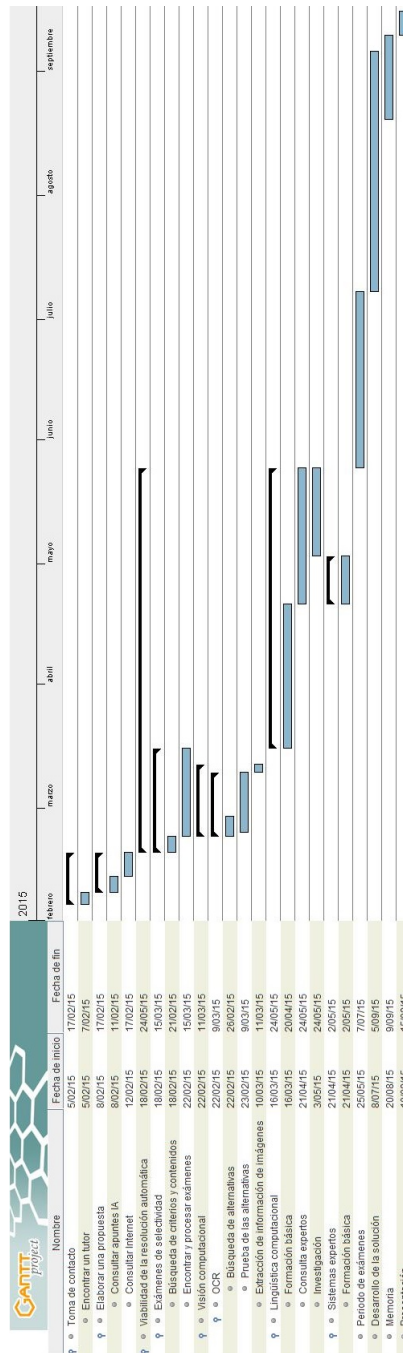


Figura 1: Diagrama de Gantt con la planificación inicial

## 2.2. Planificación inicial

Atendiendo a la metodología propuesta en el apartado anterior, se propone una planificación inicial contenida en el diagrama de Gantt de la figura 1. En la planificación se pueden observar dos cosas destacables: hay tareas que se ejecutan en paralelo y hay un tiempo dedicado al período de exámenes.

La visión computacional y la búsqueda de exámenes se realizan en paralelo porque se espera encontrar un programa capaz de convertir los documentos a un formato como Latex. La parte de consultar a expertos sobre lingüística computacional y la formación sobre sistemas expertos se realizan a la vez para no perder tiempo. Finalmente, el desarrollo de la solución y la elaboración de la memoria no se serializan para aprovechar al máximo el tiempo para elaborar el software.

El periodo del 25 de mayo al 7 de Julio se dedica en exclusiva a estudiar para mis exámenes. Aunque este tiempo no forma parte del proyecto, se incluye para justificar ese intervalo de tiempo.



### 2.3. Coste estimado

Podemos dividir el coste del proyecto en dos: el salario y el coste de herramientas y servicios externos.

Para calcular mi salario primero obtenemos el total de horas invertidas. Del 5-02-2015 al 24-05-2015 y del 8-07-2015 al 15-09-2015 hay 179 días si incluimos las fechas de inicio y final. Estimando una media de 4,5 horas diarias, tenemos  $179 \cdot 4,5 = 805,5$  horas. Una vez obtenidas las horas, buscamos el precio por hora que nos corresponde. Como este proyecto está centrado en la investigación y aún soy un estudiante pregraduado, el sueldo adecuado es el asignado a un ayudante de investigación durante 2015. Ese importe se puede encontrar en el BOE y es de  $16,04\text{€}/h$  [18]. Por lo tanto, el sueldo final es de  $805,5h \cdot 16,4\text{€}/h = 12,920,22\text{€}$ .

Respecto al coste de herramientas y servicios externos, aunque en la sección sobre viabilidad de la resolución automática se dan referencias a servicios y herramientas de pago, solamente se ha usado software gratuito para la elaboración del proyecto. Aún así, podríamos tener en cuenta el coste de desplazamientos, impresiones y otros gastos motivados por el proyecto.

En total podríamos estimar el coste del proyecto en  $13.000\text{€}$ .

### 2.4. Viabilidad

Una vez que se ha planteado la metodología y la planificación para cumplir los objetivos planteados al principio es el momento de analizar si realmente conducen a la consecución de esos objetivos. Para ello vamos a examinarlos uno a uno teniendo en cuenta las subtarefas asociadas y el tiempo disponible.

En primer lugar, se reservan alrededor de tres meses y medio para la adquisición de los conocimientos necesarios, dos meses y medio de los cuales están compartidos con el objetivo de averiguar si es posible resolver los exámenes automáticamente. En ese tiempo hay que adquirir conocimientos básicos sobre visión computacional, sistemas expertos y algo más avanzados sobre lingüística computacional. En el caso de la visión computacional y los sistemas expertos parece un objetivo factible, respecto a la lingüística computacional la meta parece más difícil de llevar a cabo y dependerá de hasta que punto tenga que profundizar en ella.

Para establecer si es plausible resolver automáticamente los exámenes de selectividad de matemáticas II se establece un tiempo de dos meses y medio compartidos con el objetivo anterior. Este tiempo estará dedicado a concretar el problema, analizar como resolverlo y buscar soluciones existentes. La viabilidad de este propósito dependerá de si tengo que analizar muy detalladamente los diferentes elementos del problema y la solución para poder dar una respuesta.

Por último, el tiempo para desarrollar una posible solución será de 2 meses y dos o tres semanas se compartirán con la elaboración de la documentación. La viabilidad de este objetivo depende totalmente de los dos anteriores, concretamente de si se ha avanzado lo suficientemente rápido en la adquisición de los conocimientos necesarios y se ha encontrado una propuesta viable de solución, al menos parcial.

En conclusión, no es seguro que los objetivos sean totalmente viables. En el caso de que alguno de ellos no lo sea, se buscará la manera de simplificarlo para poder abordarlo parcialmente.

### 3. Viabilidad de la resolución automática

En esta sección se pretende responder, lo más exhaustivamente posible, a la pregunta de si es posible resolver automáticamente los exámenes de selectividad de matemáticas II. Para abordar esta pregunta, primero se realiza una definición general del problema, luego se estudia la cuestión desde cuatro puntos de vista y, por último, se propone un método para crear el software que intentará resolver automáticamente los ejercicios.

#### 3.1. Definición del problema

El problema a tratar en este proyecto es la resolución automática de los exámenes de selectividad de matemáticas bajo las mismas condiciones que se le exigirían a una persona. Es decir, a partir de un examen en formato electrónico el programa tiene que ser capaz de procesar los diferentes elementos de cada enunciado (lenguaje natural, lenguaje matemático y gráficos) y para cada uno de ellos debe plantear el ejercicio, resolverlo y finalmente mostrar los pasos debidamente justificados y la solución expresada claramente. Además, no podrá utilizar recursos fuera del contenido establecido para la asignatura.

Recordemos que las pruebas de acceso a la universidad (PAU) o selectividad son un conjunto de exámenes de diversas materias, a las que se presentan los alumnos que han acabado bachillerato o un ciclo formativo de grado superior y quieren estudiar en la universidad para obtener un título oficial. De las diferentes asignaturas de matemáticas consideradas en las pruebas de acceso, solamente tendremos en cuenta la de matemáticas II. Se excluye la de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales para simplificar el problema a tratar, ya que el contenido y la forma de los enunciados es diferente.

Hay dos elementos que ayudarán a delimitar el problema y por lo tanto, son claves para entender de que manera nos podemos aproximar a él. Por un lado, los boletines oficiales del Estado y de las comunidades autónomas, las actas de reuniones entre la universidad y los profesores de los alumnos que se van a examinar en esa universidad y la información que publican las universidades. Todos estos elementos ayudarán a establecer el contenido y criterios de corrección de manera precisa.

Por otro lado, los exámenes de años anteriores servirán para conocer de que forma se suele usar y combinar el lenguaje natural, el lenguaje matemático y los gráficos. Estas muestras representativas del lenguaje usado, conocidas en lingüística como corpus no etiquetado, tratadas adecuadamente, permitirán desarrollar y adaptar los diferentes recursos al caso particular que estamos considerando.

La estimación inicial del tamaño del corpus, considerando los años que hace que existen las PAU, el número de comunidades, que cada comunidad elabora diversos exámenes, que cada examen dispone de dos opciones y que cada opción contiene varios ejercicios, es que hay miles de ejercicios de años anteriores. Aún así, podría haber dificultades para acceder a esos ejercicios que limitasen el número de cuestiones disponibles, al menos inicialmente. Con el objetivo de mantener un compromiso entre maximizar el corpus y disminuir la complejidad del problema, sólo se tratarán ejercicios en español.

A pesar de que en los exámenes de selectividad ha habido errores [19][20][21][22] y contenido fuera del programa [23][24], se supone que eso no debería ser así y no es necesario tener en cuenta esas posibilidades.

#### 3.2. Viabilidad de la resolución automática

Dado que el problema que tratamos de resolver es muy específico e implica una gran diversidad de elementos, en lugar de plantear el estado del arte considerando el problema en general, lo mejor es hacerlo considerando las subtarefas que se deben llevar a cabo.

### 3.2.1. Reconocimiento de objetos

En esta fase, a partir de un documento o imagen de entrada, obtenemos un documento y diversas imágenes donde quedan representados los diferentes elementos de cada enunciado. Estos elementos son el lenguaje natural, los símbolos matemáticos y los gráficos. El software capaz de realizar esta función es conocido como OCR.

Ahora vamos a analizar en detalle los requisitos sobre el formato del documento de entrada, el formato del examen, el formato deseado de salida y evaluaremos las opciones disponibles para saber si alguna satisface los requerimientos impuestos.

#### El formato del documento fuente

Tendremos en cuenta tres formas posibles de obtener el documento: en formato “vídeo”, en el caso de un móvil cuya cámara enfoca al examen; en formato imagen, ya sea un documento escaneado o una fotografía; en formato pdf.

#### El formato del examen

Podemos acceder a una gran cantidad de exámenes en [25]. La mayoría de los exámenes contienen información superflua que no nos interesa: indicaciones sobre el tiempo, las calculadoras, indicación que el examen es de selectividad y matemáticas, la nota de cada ejercicio, etc. Además, para simplificar el problema, consideraremos que el año, la comunidad y la convocatoria no son relevantes. Por lo tanto, no será necesario que el programa pueda tratar todos estos datos.

La información relevante que tenemos que recuperar sin pérdida, incluyendo el formato, es el enunciado de todos los ejercicios. En general un enunciado se compone de una introducción y diferentes apartados cuyo lenguaje está formado por una combinación de lenguaje natural y símbolos matemáticos. Además, los enunciados pueden tener una o más imagen asociadas.

El idioma del examen será el castellano.

#### El formato deseado de salida

Sobre la información irrelevante, no nos preocupa lo que pase con ella ni si hay pérdida de datos.

La información relevante debe ser accesible en forma de imágenes y un documento en formato Latex lo más simple posible.

#### Evaluación de las opciones disponibles

Para evaluar las opciones disponibles consideraremos la capacidad y resultados ofrecidos por algunas de las mejores herramientas, clasificándolas según el archivo de entrada que aceptan, teniendo en cuenta que deben procesar el contenido de un examen de matemáticas.

En el caso de OCR que trabajen con la cámara del móvil, no hay muchas opciones. Photomath solamente puede procesar fórmulas simples, así que no nos sirve.

En el caso de trabajar con una imagen, este proyecto [26] plantea la digitalización de 50.000 páginas de literatura matemática al año. Para lograrlo describen un sistema basado en diversos OCR. El problema es que la precisión es del 99% para el texto y 98% para los símbolos matemáticos. Nosotros necesitamos una precisión del 100%, ya que no nos planteamos la opción de que el software pueda ser lo suficiente flexible para funcionar con pequeños errores en el texto de entrada. La opción de corrección manual tampoco es admisible, ya que no parece adecuado ir pidiendo al usuario que corrija los errores.

Por último, se considera la opción de usar InftyReader, probablemente el mejor OCR para convertir pdf con lenguaje científico, incluyendo el castellano, a otros formatos como Latex o MathML. En el proyecto anterior también se había usado este OCR, pero esperaba que al procesar pdf, en lugar imágenes, la precisión aumentase. El resultado es bastante satisfactorio pero aún así sigue habiendo errores no admisibles.

En conclusión, las opciones evaluadas no aseguran un 100% de precisión en la conversión. Por lo tanto, hace falta corregir manualmente los errores, asegurar que las etapas posteriores son capaces de tratar enunciados con pequeños errores o pasar la ambigüedad a etapas posteriores para que pueda ser resuelta.

### **3.2.2. Interpretación**

Una vez tenemos identificados los diferentes elementos que forman el enunciado, el siguiente paso es analizarlos para traducirlos a una interpretación del mismo.

Para interpretar los elementos gráficos se puede combinar la extracción de características, para analizar la imagen en general, con un OCR como el desarrollado en esta tesis [27] para identificar símbolos matemáticos. No está claro que esta solución funcione en general, pero por cuestiones de tiempo no puedo seguir profundizando en este aspecto. De aquí en adelante no tendremos en cuenta las imágenes.

Ahora analizaremos los requisitos sobre los documentos de entrada y salida y qué opciones hacen algo parecido a lo que necesitamos.

#### **Documento de entrada**

El documento de entrada será un archivo Latex que contendrá un ejercicio. El ejercicio será el único contenido que habrá entre las etiquetas de principio y final del documento Latex.

El lenguaje del ejercicio estará formado por una combinación de español, símbolos matemáticos delimitados por el símbolo del dólar y el código Latex para definir apartados.

Para disminuir la complejidad del problema, no se tendrán en cuenta imágenes ni ejercicios de modelización.

#### **Documento de salida**

La salida esperada debe ser la interpretación del enunciado en un lenguaje formal que pueda ser procesado por un motor de inferencia capaz de resolver el ejercicio.

#### **Evaluación de las opciones disponibles**

Para comprender y traducir el lenguaje natural combinado con el lenguaje matemático, lo ideal es preprocesar el lenguaje matemático y luego analizarlo todo junto mediante el procesamiento del lenguaje natural (PLN). Un ejemplo de este proceso se pueden ver en este artículo [28] sobre un sistema de diálogo para la demostración asistida.

Como alternativa, a la opción propuesta en el artículo del párrafo anterior, para describir semánticamente las fórmulas matemáticas, tenemos MathML [29]. La conversión de Latex a MathML se puede realizar mediante la herramienta LaTeXML, aunque no es totalmente precisa.

Sobre la traducción de lenguaje natural a un lenguaje formal es interesante considerar la metodología propuesta en este artículo [30]. Concretamente, el método basado en la satisfacción de plantillas es parecido a lo propuesto en el artículo sobre el asistente de demostraciones.

Seguramente, el software más avanzado para el procesamiento del lenguaje es Watson. Aunque se trata de un programa especializado en un subcampo del PLN llamado pregunta-respuesta (QA, question answering) y en este proyecto se necesita un traductor, sus diferentes algoritmos [31][32] logran hacer gran parte de lo que necesitamos aquí.

Pero para llevar a cabo este proyecto hacen falta herramientas que podamos adaptar a nuestras necesidades. En este sentido, destacan FreeLing y Corenlp. Ambas son frameworks libres para el procesamiento del lenguaje natural que agrupan una gran cantidad de algoritmos y recursos lingüísticos que se pueden modificar para ajustarlos a nuestro caso.

Recapitulando, hay una gran cantidad de herramientas y algoritmos que realizan parte de lo que nosotros necesitamos. En principio parece, que la solución es plausible si no consideramos gráficos ni ejercicios de modelización pero, para asegurarlo, hay que estudiar detalladamente el lenguaje de los exámenes y eso es lo que se empieza a hacer en secciones posteriores.

### **3.2.3. Resolución**

Esta etapa es la encargada de resolver el ejercicio partiendo de una interpretación del enunciado. En este contexto, los dos aspectos más importantes son el razonamiento y la realización de operaciones.

Respecto al razonamiento, los motores de inferencia permiten obtener conclusiones partiendo de una base de conocimiento y usando los mecanismos de inferencia. Dado el problema que estamos intentando resolver, parece que no hace falta considerar la incertidumbre y nos podemos limitar a un motor de inferencia basado en reglas. Por lo tanto, a priori, un demostrador automático de teoremas es la mejor opción.

En cuanto a la realización de operaciones, software como Maple, Matlab/Octave, SageMath y Mathematica permiten definir y manipular objetos matemáticos con la potencia de un lenguaje de programación.

Teniendo en cuenta el estudio sobre los tipos de ejercicios de matemáticas de selectividad [33] y el boletín oficial de una de las comunidades sobre el contenido del examen [35], parece que las herramientas anteriores pueden realizar todas las operaciones necesarias. En cuanto al razonamiento, analizando los documentos anteriores, una vez que el ejercicio se ha planteado, no parece que la resolución sea difícil.

### **3.2.4. Explicación**

Una vez que se ha encontrado una solución es el momento de presentarla de manera adecuada.

WolframAlpha es uno de los sistemas más completos a la hora de responder a preguntas de diferentes ámbitos, incluido el matemático, resolverlas y presentar la solución de manera detallada [34]. Considerando su capacidad para explicar la resolución de los ejercicios y el tipo de ejercicios que puede resolver, esta etapa de la resolución automática parece factible.

### **3.2.5. Conclusión**

Aunque la etapa de reconocimiento de objetos no parece factible por ahora, podemos olvidarnos de ella y suponer que tenemos un archivo Latex con el enunciado. Partiendo de este documento, el mayor problema lo encontramos en la interpretación del enunciado. Es necesario recopilar más información sobre la forma de usar el lenguaje para poder asegurar que se pueden interpretar correctamente. Aún así, como dice [36] “existen aplicaciones profesionales (refiriéndose a traductores) que permiten obtener buenos resultados con textos especializados en dominios bien delimitados”, por lo tanto, se espera que aquí suceda lo mismo.

Una vez interpretado el enunciado, parece factible realizar las otras dos etapas sin demasiados problemas.

### **3.3. Solución propuesta**

La solución propuesta para todo el problema es la creación de un sistema experto, en otras palabras, la creación de un sistema informático que imita el comportamiento de un especialista en un cierto ámbito. El motivo de esta decisión es que este tipo de sistemas abordan todos los componentes que hacen falta para la resolución de nuestro problema.

La solución propuesta para abordar la interpretación y resolución de los enunciados se basa en adaptar, a nuestro caso particular, el proceso seguido en el artículo mencionado anteriormente sobre un sistema de diálogo para la demostración asistida en el contexto de la teoría de conjuntos [28].

Los pasos que siguen los investigadores son: recopilación de un corpus (en su caso tienen que simularlo), breve estudio de algunos fenómenos del lenguaje, procesamiento del lenguaje en diversas etapas: preprocesamiento, procesamiento de las expresiones matemáticas, representación independiente del dominio e interpretación propia del dominio. El resultado de cada interacción se integra mediante un gestor de demostraciones y este, a su vez, se comunica con el demostrador automático de teoremas.

El resto de la memoria trata la cuestión de cómo adaptar el artículo anterior a nuestro caso.

## 4. Fundamentos

En esta sección se explicarán los conocimientos teóricos y programas que usaremos en la parte restante de la memoria. Se empieza por recordar los contenidos de matemáticas y luego se aborda el procesamiento del lenguaje natural, primero de manera general, más tarde se aborda el proyecto Framenet y por último se habla sobre la librería FreeLing.

### 4.1. Matemáticas

Para abordar los fundamentos de matemáticas primero hablaremos sobre los contenidos y luego daremos indicaciones sobre donde se puede encontrar documentación sobre ellos.

El examen de selectividad de matemáticas está basado en los contenidos impartidos en la asignatura de matemáticas II de 2º de Bachillerato. En el BOE del 21/07/2015 [37] podemos encontrar los contenidos previstos este año para esta asignatura. Por otra parte, los contenidos de la selectividad también se recogen en los boletines oficiales, para simplificar, podemos fijarnos en lo que se dice en el BOE y el BOA [35].

Como en esta memoria no hay sitio para explicar los contenidos del examen, se listarán algunos recursos muy interesantes de donde obtener esa información.

En [38] hay centenares de vídeos con explicaciones del temario de matemáticas II.

En [39] detalladamente todo el temario de matemáticas II.

En [40], en el apartado de 2º de Bachillerato, hay tres resúmenes organizados por temas con lo más importante del temario.

### 4.2. PLN

El procesamiento del lenguaje natural es un campo de las ciencias de la computación y la lingüística cuyo objetivo es que los sistemas informáticos puedan tratar el lenguaje humano.

Para abordar el estudio del lenguaje más fácilmente, la lingüística suele dividirlo en los siguientes niveles:

Fonético: aborda las características relacionadas con el sonido. En nuestro caso no nos interesa.

Morfológico: estudia la estructura interna de las palabras y las categorías gramaticales. En PLN se usan etiquetas para representar su contenido.

Sintáctico: analiza la relación entre las palabras de una frase. Los dos modelos principales de representación son el de dependencias y el de constituyentes.

Semántico: estudia el significado de las palabras y su influencia en el significado de la frase. En PLN se usan las redes semánticas para representar el análisis de este nivel y posteriores.

Pragmático: investiga el significado de la frase teniendo en cuenta el contexto.

Discurso: aborda la relación entre las frases.

Mientras que los niveles morfológico y sintáctico se pueden abordar con bastante éxito, todavía no hay una solución general para pasar del árbol sintáctico a una red semántica [41] (página 96). Por lo tanto, una parte muy importante del PLN es adaptar el lingware a nuestras necesidades.

### 4.3. Framenet

Framenet es un proyecto del International Computer Science Institute (Estados Unidos) que está creando una base de datos del léxico inglés basada en una teoría del significado llamada marcos semánticos. En paralelo, hay un proyecto para la creación de esta misma base de datos pero para el español.

Los marcos semánticos son descripciones esquemáticas de un tipo de evento, relación o entidad y los participantes del mismo, llamados elementos del marco, que pueden ser opcionales o obligatorios. Estas descripciones se anotan sintácticamente y semánticamente.

Los elementos léxicos relacionados con un marco se denominan unidades léxicas de ese marco. Las entradas léxicas de estos elementos se deducen mediante el corpus y la estructura de los marcos asociados. Posteriormente, se puede pasar del análisis sintáctico al semántico localizando estos elementos y viendo como la estructura sintáctica de su entrada léxica se realiza en la frase.

Básicamente, este es el papel que realizaba la Functional generative description (FGD), la cual no está disponible en español, en el artículo que tratamos de adaptar a nuestro caso. Así que trataremos de usar Framenet donde ellos usaban la FGD.

### 4.4. FreeLing

FreeLing [42] es un framework libre, gratuito, multiplataforma, disponible en varios idiomas y especializado en el PLN creado por Lluís Padró y mantenido por el TALP Research Center, el cual está asociado a la UPC.

Este programa está formado por diversos módulos configurables, todos ellos disponibles en el caso del español, que pueden separar palabras, analizar morfológica y sintácticamente, resolver correferencias, detectar fechas, números, nombres, etc.

En el momento de compilar FreeLing sobre distribuciones recientes de GNU/Linux puede aparecer el problema descrito aquí [43], que el creador del software resuelve en esa misma conversación.

Se recomienda no usar Windows pues hay ciertos problemas al analizar algunas palabras y el equipo de FreeLing advierte de que no son ellos quienes mantienen esa versión [44]. Si bien estos problemas ocurren raramente, es mejor prevenir.

En este proyecto se usará este software como una librería disponible desde el lenguaje de programación Java. Como FreeLing está escrito en C++, primero hay que generar una API usando SWIG, el proceso está explicado en la documentación de FreeLing.



## 5. Lenguaje para interpretar los enunciados

En este capítulo se presenta un lenguaje formal que servirá para interpretar los enunciados. El objetivo de este lenguaje es doble: por un lado, nos proporcionará información semántica de los enunciados que nos facilitará el proceso de creación de los marcos; por el otro, servirá como una recopilación de los requisitos que debe cumplir el lenguaje que finalmente usemos.

En lo que resta de sección, se explicarán los diferentes elementos del lenguaje.

### Contextos

Definiremos tres tipos de contextos según su finalidad:

- Punto de partida: Recopila los objetos y restricciones sobre ellos.
- Proceso: Impone condiciones sobre la manera en que se obtiene la solución.
- Punto final: Detalla aquello que queremos obtener.

Todos los demás elementos del lenguaje estarán dentro de uno de estos contextos.

### Define()

El objetivo de este comando es mostrarnos información acerca de algún objeto, por ejemplo, definir un objeto o enunciar un teorema. En nuestro caso lo usaremos combinado con el comando op(operación, elementos involucrados), donde

- operación: +, ·, rang
- elementos: matrix

Un ejemplo típico podría ser:

Define(op(+, matrix))

para definir la suma de matrices.

### Declaraciones de objetos

El formato de la declaración será:

nombreVariable  $\in$  tipo

donde el tipo puede ser:

- matrix
- $\mathbb{R}$ : por defecto todos los números y variables se consideran de este tipo.
- $\mathbb{N}$ : no incluye el zero.
- $\mathbb{R}^*$ : conjunto de todos los números reales excepto el 0.

Para declarar una variable  $a$  de tipo real, sólo tendríamos que hacer:

$a \in \mathbb{R}$

### matrix

Este objeto representa las matrices y se compone de los siguientes métodos:

- `rang()`: calcula el rango de la matriz.
- `rang(V)`: calcula el rango de la matriz según el parámetro `V`.
- `(F, C)`: crea una matriz con `F` filas y `C` columnas.
- `setMinors(O, V)` establece que el determinante de todos los menores de orden `O` de la matriz tendrán valor `V`.
- `setElements(V)` hace que todos los elementos de la matriz tengan valor `V`.
- `setElements(V, C)` establece que `C` elementos de la matriz tengan valor `V`.
- `replaceElement(M, V, 0)` devuelve una copia de la matriz `M` con la restricción de que un elemento, no se establece cual hasta que haga falta hacerlo, con valor `V` pase a tener valor `0`.
- `one(F, C)`: crea una matriz con `F` filas, `C` columnas, unos en la diagonal y ceros en las posiciones restantes.
- `row(N)`: devuelve la fila `N` de la matriz asociada.

Además tenemos los siguientes elementos asociados:

- `rang.properties`: se refiere a las propiedades de la operación rango aplicada a las matrices.
- `det.properties`: se refiere a las propiedades de la operación determinante aplicada a las matrices.

## Def

Nos permite incorporar conocimiento nuevo, en nuestro caso la usamos para definir un operador:  
`Def.op( $A^t$ , transpose(A))`

## Test

Crea un ambiente controlado donde las cosas pueden fallar sin que eso suponga un problema. La usaremos de dos formas:

- `Test(OP)`: lleva a cabo la operación e indica si ha tenido éxito.
- `Test(OP, OB)`: nos indica si al objeto `OB` se le puede aplicar el operador `OP`.

## Find

El comando `Find(OB)` busca una posible realización del objeto `OB`.

## FindAll

El comando `FindAll(OB)` devuelve el conjunto de objetos que cumplen las restricciones impuestas a `OB`.

## Operadores habituales

Los operadores `=`, `<`, `>` tienen el significado habitual.

### **=copy**

Crea una nueva copia de un objeto desligado de él. Es decir, las nuevas restricciones sobre alguno de los dos, no tendrán efecto en el otro.

**!**

Convierte una restricción en su complementaria.

**using**

Indica que una operación se tiene que efectuar siguiendo unas ciertas condiciones. Se suele usar en el contexto Proceso.

**Verbose**

El comando Verbose(OP, D) indica que se quiere saber como se efectua la operacion OP teniendo en cuenta los requerimientos especificados en D. Por ejemplo, Verbose(A.rang(), matrix.rang.properties) indica que hay que usar las propiedades del rango para explicar como se ha calculado el rango de A.

**LC**

El comando LC(E, C) indica si E es una combinación lineal del conjunto de elementos C.

**{ }**

Sirve para crear un conjunto de elementos.

## 6. Herramienta para la creación de marcos semánticos

Uno de los recursos lingüísticos más importantes para la interpretación de los enunciados son los marcos semánticos. Por lo tanto, nuestro objetivo es crear estos marcos para así poderlos aplicar al análisis de los enunciados.

A pesar de que hay herramientas para etiquetar corpus, es difícil encontrar alguna que haga lo que necesitamos y pueda tratar algunos aspectos del lenguaje Latex. Así que crearemos una pequeña aplicación que nos facilite esta tarea.

Lo ideal sería que la aplicación hiciese prácticamente todo el trabajo y nosotros sólo tuviésemos que hacer pequeñas correcciones pero, debido al poco tiempo disponible, limitaremos significativamente el alcance de este software.

### 6.1. Requisitos

El programa debe ser capaz de obtener los enunciados de álgebra del archivo fuente del libro [45].

El programa tiene que encontrar todos los verbos. Puesto que estamos creando los recursos lingüísticos, es aceptable que el software se equivoque y no acierte encontrando los verbos. Lo importante es que no haya falsos negativos. En el caso de los falsos positivos, simplemente se descartarán.

Tiene que mostrar una lista de todos los contextos donde aparece cada verbo.

### 6.2. Casos de uso

Solamente habrá un tipo de usuario y un caso de uso: obtener contexto.

Caso **obtener contexto**: leerá el fichero fuente del libro, parseará el contenido para obtener los enunciados, eliminará el lenguaje Latex, obtendrá los contextos de cada verbo y, finalmente, los guardará en un archivo.

### 6.3. Diseño

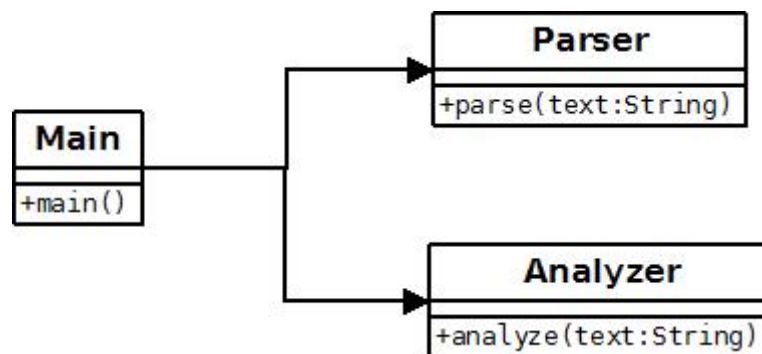


Figura 2: Diseño

Básicamente la clase Main leerá el fichero, se comunicará con las otras para que procesen los datos y guardará el resultado en un fichero.

La clase Parser extraerá los enunciados y eliminará el código Latex, excepto el necesario para los símbolos matemáticos.

La clase Analyzer guardará el contexto de aparición de cada verbo a medida que analiza las frases y luego los devolverá.

## 6.4. Implementación

El lenguaje utilizado para desarrollar el programa ha sido Java 7.

Para el análisis lingüístico se usa la librería FreeLing.

Para procesar correctamente los contextos matemáticos se ha modificado el archivo tokenizer.dat que se puede encontrar en `freelingDirectory/data/es` y se han añadido las líneas:

```
LATEX_MATH → 0 (\$\$(.|\s)*?[^\\]\$\$)
LATEX_MATH2 > 0 (\$(.|\s)*?[^\\]\$)
LATEX_MATH3 > 0 (\\begin\{displaymath\}(.|\s)*?\\end\{displaymath\})
```

justo después de

<RegExps>

El programa se compila con el comando

```
javac -cp freeling.jar;. Main.java
```

y se ejecuta con el comando

```
java -cp freeling.jar;. Main
```

suponiendo que la librería `freeling.jar` está en el mismo directorio que el programa.

## 6.5. Resultados

Como se esperaba el analizador da falsos positivos y señala como verbos algunos elementos que no lo son. Aún así, esto no es preocupante.

Los enunciados del tipo:

Primera parte del enunciado. Calcula:

- a) operación 1.
- b) operación 2.

No se analizan correctamente, ya que lo interpreta como:

Primera parte del enunciado.  
Calcula: operación 1.  
operación 2.

en lugar de:

Primera parte del enunciado.  
Calcula: operación 1.  
Calcula: operación 2.

Por lo tanto, hay que conseguir replicar, cuando haga falta, la última parte del enunciado general.

## 6.6. Ejemplo

Veamos un ejemplo de como queda uno de los contextos obtenidos con el programa. En este caso, los contextos seleccionados son los del verbo **dar**.

**Dar** un ejemplo de dos matrices que no pueden sumarse ni multiplicarse.

**Dar** un ejemplo de dos matrices  $A, B$  con 2 filas y 2 columnas, tales que  $A \cdot B$  no coincida con  $B \cdot A$ .

**Dar** un ejemplo de una matriz con 3 filas y 4 columnas que tenga rango 2.

**Dadas** las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pruebe que la matriz inversa de  $A$  es  $A^{-1} = -A^2 + A + 2I$ .

**Dadas** las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 3 & x & y \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & x & y \end{pmatrix}$ , estudie si existen números

reales  $x$  e  $y$  tales que la matriz  $B$  es la inversa de la matriz  $A$ .

**Dar** un ejemplo de un sistema de 2 ecuaciones lineales con 3 incógnitas que sea incompatible.

**Dar** un ejemplo de una sistema de 3 ecuaciones lineales con tres incógnitas que sea compatible e indeterminado.

**Dar** un ejemplo de un sistema de 3 ecuaciones lineales con tres incógnitas que sea incompatible.

**Dar** un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas que sea compatible e indeterminado.

Analizando estos ejemplos podemos ver dos usos del verbo:

En uno, el verbo en infinitivo se usa para ordenar que se realice una operación. En este caso, podemos interpretarlo como sinónimo de proporciona, busca, etc.

En el otro, el verbo en participio nos ofrece información. En este caso, podemos interpretarlo como sinónimo de sea, considera, etc.

## 7. Conclusiones

Para acabar la memoria, en esta sección se analiza el proceso seguido en relación a la planificación inicial, los resultados obtenidos comparandolos con los objetivos planteados y se proponen algunas ampliaciones y mejoras teniendo en cuenta lo que se ha conseguido hasta ahora.

### 7.1. Desviación de la planificación

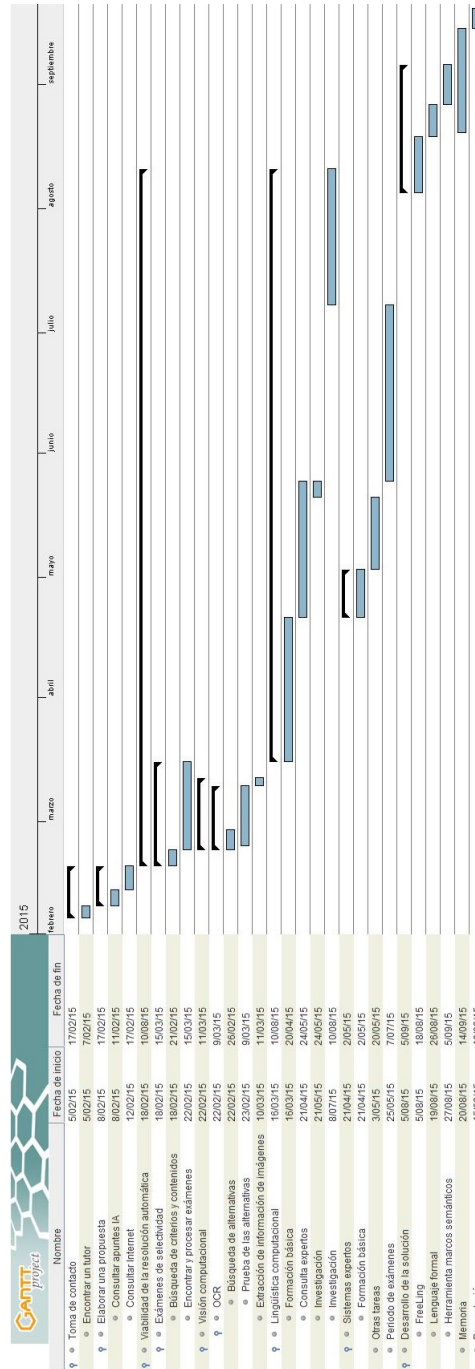


Figura 3: Diagrama de Gantt del tiempo dedicado finalmente a cada tarea

Al principio del proyecto, después de la toma de contacto, se realizó una planificación inicial que se puede consultar en la figura 1. Una vez finalizado el proyecto, se ha realizado otro diagrama de Gantt que se muestra en la figura 3. En los siguientes párrafos analizaremos las diferencias.

La principal diferencia entre las dos planificaciones se debe a la tarea crítica de buscar expertos en procesamiento del lenguaje natural para resolver algunas dudas y pedir consejo. En principio, es-

peraba no tardar demasiado en encontrar un experto al que le pudiese plantear algunas dudas sobre lo que investigaba. Finalmente tardé varias semanas.

Parte del retraso en la búsqueda de expertos se vio compensando por el tiempo que estaba establecido dedicarle a los sistemas expertos. El tiempo restante se utilizó para buscar artículos de investigación sobre el examen de selectividad de matemáticas, buscar exámenes en formato Latex, buscar parsers para Latex y entregas de otras asignaturas.

El tiempo dedicado de más a la tarea problemática desplazó a la investigación sobre lingüística computacional y esto acabó afectando al desarrollo de la solución y la elaboración de la documentación. El efecto sobre el desarrollo de la solución fue que pude dedicarle menos tiempo y durante el tiempo que se paralelizó con la elaboración de la documentación, tuve que dedicarle menos tiempo a la segunda para compensar.

Aunque el proyecto ha acabado algunos días más tarde de lo esperado, ese tiempo se ve compensando por los días no contemplados que se dedicaron a entregas de otras asignaturas.

## 7.2. Conclusiones

Ahora es el momento de recordar los objetivos iniciales y examinar su cumplimiento.

Para responder a si es posible resolver automáticamente los exámenes de selectividad de matemáticas II, tendremos en cuenta dos casos. En el caso de las preguntas de modelización o que dependen de la interpretación de una imagen, se requiere un estudio más exhaustivo para poder dar una respuesta. En el caso de las preguntas restantes, es muy probable que sí se puedan resolver con éxito. La falta de una afirmación contundente se debe a que es necesario examinar con mayor profundidad los exámenes desde el punto de vista lingüístico. Para acabar de responder esta cuestión, recordemos que los OCR probados no han conseguido un resultado satisfactorio convirtiendo el documento a un conjunto de objetos que luego podamos procesar, así que en la respuesta anterior se descarta esta fase.

Respecto a la valoración de los conocimientos adquiridos, hay que tener en cuenta que han servido para ofrecer una solución detallada, aunque parcial, del primer objetivo y el tiempo de más dedicado a investigar ha disminuido el tiempo disponible para desarrollar la solución.

Por último, el objetivo de empezar a desarrollar la solución se ha concretado en una propuesta de solución, la herramienta para ayudar a crear los marcos conceptuales y el lenguaje al que traducir los enunciados.

En resumen, al principio subestime el tiempo necesario para la adquisición de los conocimientos necesarios y eso ha afectado al alcance del proyecto. Aún así, se ha logrado satisfacer aproximadamente los objetivos iniciales.

## 7.3. Ampliaciones y mejoras

La finalidad de este proyecto es servir como punto de partida para crear un software que resuelva cuestiones matemáticas parecidas a la de los exámenes de selectividad de matemáticas II. Aún queda mucho para lograr ese objetivo, pero aquí daremos una lista de ampliaciones que nos acercarán a él.

A partir de ahora, el objetivo principal es adaptar el proceso seguido en el artículo sobre demostraciones asistadas del que se ha hablado. El primer paso para lograrlo es acabar el programa que ayuda a la creación de los marcos semánticos, o encontrar uno que pueda adaptar, y empezar a usarlo. Después, hay que pensar como procesar las fórmulas matemáticas, si usando MathML o con el lenguaje propuesto en el artículo y con qué software procesarlas. Una vez finalizado lo anterior, hay que seguir adaptando el resto del proceso.



Otro punto importante es incrementar el corpus, ya que es necesario tener una gran cantidad de ejemplos de ejercicios para crear y adaptar los recursos necesarios y verificar que se pueden interpretar las imágenes de los ejercicios.

Una vez ampliado el corpus, hay que recurrir a la visión computacional para crear y adaptar los algoritmos necesarios para interpretar las imágenes. Si no se pueden procesar todas, al menos un subconjunto de ellas.

Por último, una vez establecido qué requisitos debe cumplir el motor de inferencia, mediante el lenguaje al que se traduce los enunciados, es el momento de buscar una herramienta que se pueda adaptar a nuestras necesidades.

## 8. Anexos

### 8.1. Interpretación de los enunciados de álgebra

En este anexo se muestra la interpretación, con el lenguaje formal del que se ha hablado en una sección anterior de la memoria, de los ejercicios de selectividad de álgebra recopilados en este libro [45]. Los ejercicios que se listan más abajo forman el corpus con el que se ha trabajado en este proyecto, pero por razones de tiempo sólo una parte de ellos está interpretado.

#### 8.1.1. Matrices y determinantes

##### a.1. Definir la suma y el producto de matrices.

[Punto final]  
Define(op(+, matrix))  
Define(op(·, matrix))

**Dar un ejemplo de dos matrices que no pueden sumarse ni multiplicarse.**

[Punto de partida]  
\_A ∈ matrix  
\_B ∈ matrix  
Test(\_A + \_B)=FAIL  
Test(\_A · \_B)=FAIL

[Punto final]  
Find(\_A, \_B)

##### a.2. Determinar todos los números reales $x$ para los que es positivo el determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & x \\ 1-x & x+1 & -1 \\ 2 & 0 & x \end{vmatrix}$$

[Punto de partida]  
 $x \in \mathbb{R}$   
\_D =  $\begin{vmatrix} 3 & -3 & x \\ 1-x & x+1 & -1 \\ 2 & 0 & x \end{vmatrix}$   
\_D > 0

[Punto final]  
FindAll(x)

##### a.3. Calcular todas las matrices $X$ tales que $AX + B = X$ , donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

[Punto de partida]  
X ∈ matrix  
AX + B = X  
A =  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$   
B =  $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

[Punto final]  
FindAll(X)

**a.4. Calcular la matriz  $X$  tal que  $AX = B$ , donde**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

[Punto de partida]  
X ∈ matrix  
AX = B  
A =  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$   
B =  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

[Punto final]  
Find(X)

**a.5. Calcular dos números naturales  $a, b$  menores que 10 y tales que la siguiente matriz  $A$  tenga rango 2:**

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & b \\ 0 & 5 & a \\ 3 & 1 & b \end{pmatrix}$$

[Punto de partida]  
 $a, b \in \mathbb{N}$   
 $a, b < 10$   
A =  $\begin{pmatrix} 2 & 2 & b \\ 0 & 5 & a \\ 3 & 1 & b \end{pmatrix}$   
A.rang() = 2

[Punto final]  
Find(a,b)

**a.6. Definir el producto de matrices.**

[Punto final]  
Define(op(·, matrix))

**Dar un ejemplo de dos matrices  $A, B$  con 2 filas y 2 columnas, tales que  $A \cdot B$  no coincida con  $B \cdot A$ .**

[Punto de partida]  
A in matrix(2,2)  
B in matrix(2,2)  
Test(A · B = B · A)=FALSE

[Punto final]  
Find(A, B)

**a.7. Determinar todas las matrices  $X$  tales que  $A \cdot X = X \cdot A$ , donde:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[Punto de partida]

$X \in \text{matrix}$

$A \cdot X = X \cdot A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[Punto final]

FindAll(X)

**a.8. Hallar una matriz con tres filas y tres columnas que tenga tres elementos nulos y tal que ninguno de sus menores de orden dos sea nulo.**

[Punto de partida]

$\_A \in \text{matrix}(3,3)$

$\_A.\text{setElements}(0, 3)$

$!\_A.\text{setMinors}(2, 0)$

[Punto final]

Find( $\_A$ )

**a.9. Definir el concepto de rango de una matriz.**

[Punto final]

Define(op(rang,matrix))

**Dar un ejemplo de una matriz con 3 filas y 4 columnas que tenga rango 2.**

[Punto de partida]

$\_A \in \text{matrix}(3,4)$

$\_A.\text{rang}() = 2$

[Punto final]

Find( $\_A$ )

**a.10. ¿Puede aumentar el rango de una matriz cuadrada de 3 filas al sustituir un coeficiente no nulo por 0? ¿Y permanecer igual?. Justificar las respuestas.**

[Punto de partida]

$\_A \in \text{matrix}(3,3)$

$\_c \neq 0$

$\_B = \text{matrix.replaceElement}(\_A, \mathbb{R}^*, 0)$

[Punto final]

Test(Find( $\_B.\text{rang}() > \_A.\text{rang}()$ )) = TRUE

Test(Find( $\_B.\text{rang}() = \_A.\text{rang}()$ )) = TRUE

**a.11. Sea  $A$  una matriz cuadrada tal que  $A^2 = A + I$ , donde  $I$  es la matriz unidad. Demuestra que la matriz  $A$  es invertible.**

[Punto de partida]

$\_n \in \mathbb{N}$

$A \in \text{matrix}(\_n, \_n)$

$A^2 = A + I$

```
I = matrix.one(_n, _n)
```

```
[Punto final]
```

```
Test(inv, A)=TRUE
```

**a.12. Escribe un ejemplo de una matriz de rango 2, con 3 filas y 4 columnas, que no tenga ningún coeficiente nulo.**

```
[Punto de partida]
```

```
_A ∈ matrix(3,4)
```

```
_A.rang = 2
```

```
_A.setElements( $\mathbb{R}^*$ )
```

```
[Punto final]
```

```
Find(_A)
```

**a.13.**

a) Calcula el rango de la matriz  $A$ , según los valores del parámetro  $a$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

b) Escribe las propiedades del rango que hayas usado.

```
[Punto de partida]
```

```
a ∈  $\mathbb{R}$ 
```

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

```
[Proceso]
```

```
using matrix.rang.properties
```

```
[Punto final]
```

```
Verbose(A.rang(a), matrix.rang.properties)
```

**a.14. Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden 3.**

a) Si sabemos que el determinante de la matriz  $2A$  es  $|2A| = 8$ . ¿Cuánto vale el determinante de  $A$ ? Escribe la propiedad de los determinantes que hayas usado para obtener este valor.

```
[Punto de partida]
```

```
A ∈ matrix(3,3)
```

```
_B = 2A
```

```
|2A| = 8
```

```
[Proceso]
```

```
using matrix.det.properties
```

```
[Punto final]
```

```
Verbose(A.det(), matrix.det.properties)
```

b) Calcula para qué valores de  $x$  se cumple que  $|2A| = 8$ , siendo  $A$  la matriz

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & 2 \\ x & 2-x & 1 \end{pmatrix}$$

[Punto de partida]

$x \in \text{real}$

$B = 2A$

$|2A| = 8$

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & 2 \\ x & 2-x & 1 \end{pmatrix}$$

[Punto final]

FindAll(x)

a.15. Calcula la matriz  $X$  tal que  $A^2X = A$ , donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[Punto de partida]

$X \in \text{matrix}$

$A^2X = A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[Punto final]

Find(X)

a.16. Determina el rango de la matriz  $A$  según los valores de  $b$ :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & b \\ b & b-3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

[Punto de partida]

$b \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & b \\ b & b-3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

[Punto final]

A.rang(b)

a.17.

a) Define el concepto de rango de una matriz.

[Punto final]

Define(op(rang, matrix))

b) Determina razonadamente si la tercera fila de la matriz  $A$  es combinación lineal de las dos primeras

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[Punto de partida]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[Punto final]

Verbose((LC(A.row(3), {A.row(1), A.row(2)}))=TRUE)

**a.18. Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden 3. Sabemos que el determinante de  $A$  es  $|A| = 2$ .  
Calcula los siguientes determinantes:**

a)  $|2A|$ .

[Punto de partida]

$A \in \text{matrix}(3,3)$

$A.\text{det}() = 2$

[Punto final]

$(2A).\text{det}()$

b)  $|A^{-1}|$ .

[Punto de partida]

$A \in \text{matrix}(3,3)$

$A.\text{det}() = 2$

[Punto final]

$\text{inv}(A).\text{det}()$

c)  $|A \cdot A^t|$  ( $A^t$  es la traspuesta de la matriz  $A$ ).

[Punto de partida]

$A \in \text{matrix}(3,3)$

$A.\text{det}() = 2$

$\text{Def.op}(A^t, \text{transpose}(A))$

[Punto final]

$(A \cdot A^t).\text{det}()$

d) **Determinante de la matriz obtenida al intercambiar las dos primeras columnas de  $A$ .**

[Punto de partida]

$A \in \text{matrix}(3,3)$

$A.\text{det}() = 2$

$\_B = \text{copy } A$

$\_B.\text{row}(1) = A.\text{row}(2)$

$\_B.\text{row}(2) = A.\text{row}(1)$

[Punto final]

$B.\text{det}()$

e)] **Determinante de la matriz que se obtiene al sumar a la primera fila de  $A$  la segunda multiplicada por 2.**

[Punto de partida]

$A \in \text{matrix}(3,3)$   
 $A.\text{det}() = 2$   
 $\_B = \text{copy } A$   
 $\_B.\text{row}(1) = \_B.\text{row}(1) + 2 \cdot A.\text{row}(2)$

[Punto final]  
 $\_B.\text{det}()$

**a.19. Determine el rango de la matriz  $A$  siguiente según los valores del parámetro  $b$ :**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b & b \\ 1 & 0 & 1 \\ b & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

[Punto de partida]

$b \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b & b \\ 1 & 0 & 1 \\ b & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

[Punto final]

$A.\text{rang}(b)$

**a.20. Considere las matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

.

a) Diga razonadamente cuál es el rango de la matriz  $A \cdot B$ .

b) Clasifique y resuelva el sistema de ecuaciones:

$$A \cdot B \cdot X = O$$

**a.21. Considere la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$ .**

a) Calcule el determinante de  $A$  y compruebe la igualdad

$$|A| = (b-a)(c-a)(c-b)$$

b) ¿Qué relación debe existir entre  $a$ ,  $b$  y  $c$  para que el rango de la matriz  $A$  sea igual a 1? Justifique la respuesta.

**a.22. Determine el rango de la matriz  $A$  según los valores de  $b$ :**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ b+1 & 1 & 1 \\ 1 & b & b-1 \end{pmatrix}$$

**a.23.**

a) Defina el concepto de rango de una matriz.



b) Calcule el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Diga, razonadamente, si la segunda columna de la matriz  $A$  anterior es combinación lineal de las otras dos columnas.

a.24.

a) Sean  $B$  y  $C$  matrices cuadradas de orden 3. Diga cuándo, por definición,  $C$  es la matriz inversa de  $B$ .

b) Diga razonadamente si la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene inversa, y si la respuesta es afirmativa calcule la matriz  $A^{-1}$ .

a.25. Determine el rango de la matriz  $A$  según los valores de  $a$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a+1 & -1 & a-2 \\ -1 & a+1 & 2 \end{pmatrix}$$

a.26. Calcule las matrices de la forma  $X = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{pmatrix}$  que cumplen la ecuación:

$$X \cdot X^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde  $X^t$  es la matriz traspuesta de  $X$

a.27.

a) Diga, razonadamente, si la tercera columna de la matriz  $A$  siguiente es combinación lineal de las dos primeras columnas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Calcule el rango de la matriz  $A$ .

a.28. Calcule la matriz inversa de la matriz  $A = B^2 - 2 \cdot C$ , siendo

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a.29. Calcule los valores de  $a$  para los que el determinante de la matriz  $B$  es igual a 32,  $|B| = 32$ , siendo  $B = 2 \cdot A^2$  y

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & -a \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a.30. ¿Existe alguna matriz  $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & x \end{pmatrix}$  que cumpla

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

y sea NO nula? Razone la respuesta.

a.31. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pruebe que la matriz inversa de  $A$  es  $A^{-1} = -A^2 + A + 2I$ .

a.32. Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 3 & x & y \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & x & y \end{pmatrix}$ , estudie si existen

números reales  $x$  e  $y$  tales que la matriz  $B$  es la inversa de la matriz  $A$ .

a.33.

a) Calcule el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Calcule la matriz inversa de  $A$ .

c) Calcule el determinante de la matriz  $B = \frac{1}{2}A^3$  sin obtener previamente  $B$ .

a.34. Considere las matrices  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ .

a) Calcule la matriz  $A = 3B^2 - C$ .

b) Halle la inversa  $A^{-1}$  de la matriz  $A$ .

### 8.1.2. Sistemas de ecuaciones

b.1. La matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo es  $M$ . Hallar un sistema equivalente tal que todos los elementos de la diagonal principal de la nueva matriz asociada sean nulos:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b.2. Dar un ejemplo de un sistema de 2 ecuaciones lineales con 3 incógnitas que sea incompatible.

b.3. Discutir el siguiente sistema de ecuaciones lineales según el parámetro  $a$ :

$$\begin{array}{rcl} (a-3)x & + & 4z = 2 \\ x & - & 2z = -1 \\ -x & + & ay + 2z = a \end{array}$$

b.4. Discutir el siguiente sistema de ecuaciones lineales según el valor del parámetro  $a$ :

$$\left. \begin{array}{rcl} ax & - & ay & + & az & = & a \\ & & & & (3-2a)z & = & 1 \\ x & + & (a-1)y & & & = & 0 \end{array} \right\}$$

b.5. Discutir el siguiente sistema de ecuaciones lineales según el valor del parámetro  $a$ :

$$\begin{array}{rcccc} & a & y & + & (a+1) & z & = & a \\ a & x & & + & & z & = & a \\ x & & & + & a & z & = & a \end{array}$$

b.6. La matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo es  $M$ . Hallar un sistema equivalente tal que los tres coeficientes que están por encima de la diagonal principal de la nueva matriz asociada sean nulos:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

b.7. Discutir el siguiente sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro  $a$ :

$$\begin{array}{rcccc} & ay & + & az & = & 0 \\ x & & + & z & = & 0 \\ 4x & - & 2y & + & az & = & a \end{array}$$

b.8. Determinar el valor del parámetro  $a$  para que las siguientes ecuaciones lineales sean linealmente dependientes

$$\begin{array}{rcccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ & & y & + & 2z & = & a \end{array}$$

b.9. Dar un ejemplo de una sistema de 3 ecuaciones lineales con tres incógnitas que sea compatible e indeterminado. Interpretálo geoméricamente.

b.10. Determinar un valor del parámetro  $a$  para que el siguiente sistema de ecuaciones lineales sea compatible e indeterminado.

$$\begin{array}{rcccc} x & +y & +z & = & a \\ x & -y & +z & = & 1 \\ x & -3y & +z & = & 0 \end{array}$$

b.11. Dar un ejemplo de un sistema de 3 ecuaciones lineales con tres incógnitas que sea incompatible. Interpretálo geoméricamente.

b.12. Resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{rcccc} y & -x & = & z \\ x & -z & = & y \\ y & +z & = & x \end{array}$$

b.13. Dar un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas que sea compatible e indeterminado. Interpretarlo geoméricamente.

b.14. Discute el sistema de ecuaciones lineales

$$\left. \begin{array}{rcccc} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ x & + & (1+b)y & - & bz & = & 2b \\ x & + & by & + & (1+b)z & = & 1 \end{array} \right]$$

según los valores de  $b$ .

b.15. Resuelve el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{rcccc} x & +2y & -z & = & 1 \\ x & +y & -z & = & 1 \\ x & & -z & = & 1 \end{array}$$

b.16.

a) Enuncia el Teorema de Rouché-Frobenius.

b) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales, según los valores del parámetro  $a$ :

$$\begin{aligned}x + y + z &= a \\x + y + az &= 1 \\x + ay + z &= 1\end{aligned}$$

b.17. Discute, en función del parámetro  $a$ , el sistema de ecuaciones (NO es necesario resolverlo en ningún caso)

$$\begin{aligned}-x + 2y + z &= 1 \\ax - y + 2z &= 2 \\2x + (a-1)z &= 2\end{aligned}$$

b.18. Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales, según el valor del parámetro  $a$ :

$$\begin{aligned}ax + ay &= 0 \\x + z &= a \\-2y + az &= a\end{aligned}$$

No es necesario resolver el sistema en ningún caso.

b.19.

a) Discute el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left. \begin{aligned}2x - y + z &= 1 \\-x + y - z &= 0 \\y - z &= 1\end{aligned} \right\}$$

b) Resuelve el anterior sistema.

b.20. Discute, en función del parámetro  $b$ , el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned}bx + by &= 1 \\3x + bz &= b-2 \\-y + z &= b-3\end{aligned} \right\}$$

(no es necesario resolverlo en ningún caso).

b.21.

a) Diga, justificando la respuesta, si es de Cramer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned}y - z &= 1 \\-x + 4z &= 0 \\2y - z &= 1\end{aligned} \right\}$$

b) Resuelva el anterior sistema de ecuaciones.

b.22. Discuta, en función del parámetro  $a$ , el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned}x + y &= a+1 \\-2x - y + az &= -2 \\(a+1)x + y - z &= 2\end{aligned} \right\}$$

(no es necesario resolverlo en ningún caso).

b.23. Discuta, en función del parámetro  $a$ , el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned}-x + 2y + z &= a \\x + (a-1)y + az &= 0 \\ax + 2y + z &= -1\end{aligned} \right\}$$

(no es necesario resolverlo en ningún caso).

b.24. Discuta, en función del parámetro  $b$ , el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{r} y + bz = 1 + b \\ x + z = 3 - b \\ bx - by = 1 - b \end{array} \right\}$$

(no es necesario resolverlo en ningún caso).

b.25. Discuta, en función del parámetro  $a$ , el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{r} x - y + 2z = a \\ -x + y - az = 1 \\ x + ay + (1 + a)z = -1 \end{array} \right\}$$

(no hay que resolverlo en ningún caso).

b.26.

a) Encuentre, razonadamente, un valor del parámetro  $a$  para el que sea compatible determinado el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{r} ax + 2y + z = a + 1 \\ (a + 1)x - y - az = -1 \\ -x + y + z = 2a \end{array} \right\}$$

b) Resuelva el sistema para el valor de  $a$  encontrado.

b.27.

a) Estudie para cuáles valores del parámetro  $m$  es compatible determinado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{r} (1 - 2m)x - y - z = -1 \\ (m - 1)x + y - z = 2 \\ m^2x + y + z = 3 \end{array} \right\}$$

b) Resuelva el anterior sistema de ecuaciones para  $m = 0$ .

b.28.

a) Estudie cómo es el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{r} x + y - 4z = 2 \\ 2x - y - z = 1 \\ x - 2y + 3z = -1 \end{array} \right\}.$$

b) Resuelva el anterior sistema de ecuaciones.

b.29. Considere el sistema compatible determinado de dos ecuaciones con dos incógnitas

$\left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{array} \right\} \equiv S$ , cuya solución es el punto  $P_0 = (2, -1)$  de  $\mathbb{R}^2$ . Sea  $S'$  el sistema que se obtiene al añadir a  $S$  una tercera ecuación  $ax + by = c$ . Conteste razonadamente las siguientes preguntas:

a) ¿Puede ser  $S'$  compatible determinado?

b) ¿Puede ser  $S'$  incompatible?

c) ¿Puede ser  $S'$  compatible indeterminado?

## Bibliografía

- [1] Rafael Torres.  
¿Cómo será el acceso a la Universidad después de la LOMCE?  
Tribuna de opinión de la Universidad de Cantabria, 2015  
[http://web.unican.es/vozequipo/Documents/Comunicados/supresion\\_Selectividad\\_R-Torres.pdf](http://web.unican.es/vozequipo/Documents/Comunicados/supresion_Selectividad_R-Torres.pdf)
- [2] PIRLS - TIMSS 2011. Estudio Internacional de progreso en comprensión lectora, matemáticas y ciencias.  
IEA. Volumen I  
INFORME ESPAÑOL  
<http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/internacional/pirlstimss2011voll-1.pdf?documentId=0901e72b81825be4>
- [3] 6 de cada 10 universitarios presentan “ansiedad matemática” o miedo a esta materia, según un estudio  
CanalUGR, 2009  
<http://150.214.243.131/index.php/medios-impresos/item/25846-6-de-cada-10-universitarios-presentan-ansiedad-matematica-o-miedo-a-esta-materia-segun-un-estudio>
- [4] Javier Sánchez Mendías, Isidoro Segovia Alex y Antonio Miñán Espigares  
EXPLORACIÓN DE LA ANSIEDAD HACIA LAS MATEMÁTICAS EN LOS FUTUROS MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA  
Profesorado  
VOL.15, N° 3 (Diciembre 2011)  
<http://www.ugr.es/~recfpro/rev153COL6.pdf>
- [5] ¿El informe PISA es objetivo? Los académicos se rebelan...  
El confidencial, 2014  
[http://www.elconfidencial.com/alma-corazon-vida/2014-04-01/el-informe-pisa-es-objetivo-los-academicos-se-rebelan\\_109944/](http://www.elconfidencial.com/alma-corazon-vida/2014-04-01/el-informe-pisa-es-objetivo-los-academicos-se-rebelan_109944/)
- [6] Anthony Abreu  
¿Por qué los PISA no son una adecuada herramienta de medición?  
Consultado por última vez el 10-09-2015  
<http://educablog.me/2012/02/09/414/>
- [7] El coche autónomo de Google ya tiene fecha de lanzamiento  
CincoDías  
Consultado por última vez el 10-09-2015  
[http://cincodias.com/cincodias/2015/05/15/motor/1431680158\\_975445.html](http://cincodias.com/cincodias/2015/05/15/motor/1431680158_975445.html)
- [8] El robot Pepper se agota en un minuto al salir a la venta en Japón  
El mundo, 2015  
<http://www.elmundo.es/tecnologia/2015/06/20/55850420e2704eff328b456e.html>
- [9] Investigadores de la Universitat Politècnica de València desarrollan un método automático para detectar la ironía en los comentarios de los usuarios de las redes sociales.  
Prensa UPV  
Consultado por última vez el 10-09-2015  
<https://www.upv.es/noticias-upv/noticia-5401-deteccion-de-la-es.html>
- [10] Los robots se cuelan en las redacciones  
El país, 2014  
[http://ccaa.elpais.com/ccaa/2014/06/11/catalunya/1402501862\\_484856.html](http://ccaa.elpais.com/ccaa/2014/06/11/catalunya/1402501862_484856.html)
- [11] La nueva era de la computación  
El país, 2015  
[http://elpais.com/elpais/2015/07/02/eps/1435845247\\_202110.html](http://elpais.com/elpais/2015/07/02/eps/1435845247_202110.html)

- [12] IBM Watson responderá a (casi) todas tus preguntas, estés donde estés  
Xataka, 2014  
<http://www.xataka.com/otros/ibm-watson-respondera-a-casi-todas-tus-preguntas-estes-donde-estes>
- [13] Inteligencia artificial, sí, pero parcial  
El país, 2006  
[http://elpais.com/diario/2006/05/17/futuro/1147816801\\_850215.html](http://elpais.com/diario/2006/05/17/futuro/1147816801_850215.html)
- [14] Un robot puede dejarle sin empleo  
Expansión, 2015  
<http://www.expansion.com/tecnologia/2015/03/15/5505e36b22601d714f8b457b.html?cid=SIN8901>
- [15] Carl Benedikt Frey and Michael A. Osborne  
THE FUTURE OF EMPLOYMENT: HOW SUSCEPTIBLE ARE JOBS TO COMPUTERISATION?  
Oxford Martin School, 2013  
[http://www.oxfordmartin.ox.ac.uk/downloads/academic/The\\_Future\\_of\\_Employment.pdf](http://www.oxfordmartin.ox.ac.uk/downloads/academic/The_Future_of_Employment.pdf)
- [16] JOSÉ GONZÁLEZ FLÓREZ, GERMÁN VARGAS GUILLÉN  
De la <Informática Educativa>a la <Pedagogía Computacional>. (De J. PIAGET & S. PAPERT a A. NEWELL & H.A. SIMON)  
1999  
<https://profesorvargasguillen.files.wordpress.com/2011/06/de-la-informc3a1tica-educativa-a-la-pedagogc3ada-computacional.pdf>
- [17] Mauricio Dorfman, Andrea Grondona, Néstor Mazza, Patricio Mazza  
Asistentes Virtuales de Clase como complemento a la educación universitaria presencial  
2011  
[http://www.sustentum.com/sustentum/pubs/AVC\\_JAIIO40\\_V1.0.pdf](http://www.sustentum.com/sustentum/pubs/AVC_JAIIO40_V1.0.pdf)
- [18] BOLETÍN OFICIAL DEL ESTADO  
11 de febrero de 2015  
<http://www.boe.es/boe/dias/2015/02/11/pdfs/BOE-A-2015-1343.pdf>
- [19] Los alumnos denuncian un error en el examen de Química de Selectividad  
Hoy, 2012  
<http://www.hoy.es/v/20120621/regional/alumnos-denuncian-error-examen-20120621.html>
- [20] Selectividad 2013, llena de errores  
La vanguardia, 2013  
<http://www.lavanguardia.com/participacion/cartas/20130613/54375625137/selectividad-2013-errores.html>
- [21] Suspense para la selectividad catalana  
ABC, 2013  
<http://www.abc.es/sociedad/20130615/abci-suspense-selectividad-catalana-201306150402.html>
- [22] Varios errores de enunciado en los exámenes de la PAU  
El periódico, carta de un lector, 2015  
<http://www.elperiodico.com/es/cartas/entre-todos/varios-errores-enunciado-los-examenes-pau/126457.shtml>
- [23] Error en el examen de selectividad: el texto de Aristóteles que no debía ser preguntado  
El mundo, 2015  
<http://www.elmundo.es/madrid/2015/06/16/557ff498e2704e5d288b4575.html>
- [24] Quejas por un posible error en un examen de Selectividad  
El periódico de Aragón, 2012

<http://www.elperiodicodearagon.com/noticias/aragon/quejas-posible-error-examen-selectividad.764805.html>

- [25] Web con exámenes de selectividad  
Consultado por última vez el 10-09-2015  
<http://www.selectividadonline.com/examenes-selectividad>
- [26] Petr Sojka  
DML-CZ:From Scanned Image to Mathematical Knowledge Sharing  
2005  
<http://www.fi.muni.cz/usr/sojka/presentations/iknow2005-sojka-pres4.pdf>
- [27] Álvaro Muñoz, F  
Mathematical Expression Recognition based on Probabilistic Grammars  
2015  
<https://riunet.upv.es/handle/10251/51665>
- [28] Magdalena Wolska and Ivana Kruijff-Korbayová  
Analysis of mixed natural and symbolic language input in mathematical dialogs  
ACL '04 Proceedings of the 42nd Annual Meeting on Association for Computational Linguistics.  
Article No. 25  
<http://dl.acm.org/citation.cfm?id=1218959>
- [29] Jürgen Stuber<sup>1</sup> and Mark van den Brand  
Extracting Mathematical Semantics from LATEX Documents  
Principles and Practice of Semantic Web Reasoning, 2003  
<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.198.8849&rep=rep1&type=pdf>
- [30] Rohit J. Kate, Yuk Wah Wong and Raymond J. Mooney  
Learning to Transform Natural to Formal Languages  
Proceedings of the Twentieth National Conference on Artificial Intelligence (AAAI-05), pp. 1062–1068, Pittsburgh, PA, July 2005.  
<http://www.cs.utexas.edu/ml/papers/transform-aaai-05.pdf>
- [31] Alejandro Delgado Sánchez  
¿Qué es y cómo funciona Watson? (La solución cognitiva de IBM) (Try IT! 3/20)  
2015  
<https://www.youtube.com/watch?v=9xTo7EKL6aA>
- [32] Journal of Research and Development. Including IBM Systems Journal.  
VOLUME 56, NUMBER 3/4, MAY/JUL. 2012  
<http://ieeexplore.ieee.org/xpl/tocresult.jsp?reload=true&isnumber=6177717>
- [33] Josu Ruiz de Gauna Gorostiza, Joxemari Sarasua Fernández y Jesús Miguel García Iturrioz.  
Una tipología y clasificación de los ejercicios de matemáticas de selectividad  
Epsilon - Revista de Educación Matemática 2011, Vol. 28(2), nº 78, pp. 21-38  
<http://thales.cica.es/epsilon/sites/thales.cica.es.epsilon/files/regalo781.pdf>
- [34] Web de Wolframalpha  
Consultada por última vez el 10-09-2015  
<http://www.wolframalpha.com/examples/StepByStepSolutions.html>
- [35] Extracto del BOE y BOA sobre el contenido y criterios del examen de selectividad de matemáticas II  
Consultado por última vez el 10-09-2015  
<http://wzar.unizar.es/servicios/acceso/accespau/progr/matemii.pdf>
- [36] Llisterri, J.  
Lingüística y tecnologías del lenguaje.



Lynx. Panorámica de Estudios Lingüísticos, 2, 9-71. (2003)  
[http://liceu.uab.es/~joaquim/publicacions/Llisterri\\_03\\_Linguistica\\_Tecnologias\\_Lenguaje.pdf](http://liceu.uab.es/~joaquim/publicacions/Llisterri_03_Linguistica_Tecnologias_Lenguaje.pdf)

- [37] BOE del 21 de julio de 2015  
<http://www.boe.es/boe/dias/2015/07/21/pdfs/BOE-A-2015-8149.pdf>
- [38] Web con vídeos sobre matemáticas II  
Consultada por última vez el 10-09-2015  
<http://matematicasbachiller.com/videos/2-bachillerato>
- [39] Página personal dedicada a apuntes sobre las matemáticas de bachillerato  
Consultada por última vez el 10-09-2015  
<http://personales.unican.es/gonzaleof/>
- [40] Página personal de Isaac Musat Hervás acerca de las matemáticas  
Consultada por última vez el 10-09-2015  
<http://www.musat.net/>
- [41] Alexander Gelbukh y Grigori Sidorov. Procesamiento automático del español con enfoque en recursos léxicos grandes. Segunda edición ampliada y revisada  
Primera edición, 2006  
Segunda edición, 2010  
ISBN: 978-607-414-171-9  
<http://www.gelbukh.com/libro-procesamiento-2/procesamiento-automatico.pdf>
- [42] Lluís Padró and Evgeny Stanilovsky.  
FreeLing 3.0: Towards Wider Multilinguality  
Proceedings of the Language Resources and Evaluation Conference (LREC 2012) ELRA.  
Istanbul, Turkey. May, 2012.
- [43] Conversación en el foro de FreeLing sobre un problema de instalación en Ubuntu  
Consultada por última vez el 10-09-2015  
[http://nlp.lsi.upc.edu/freeling/index.php?option=com\\_simpleboard&Itemid=65&func=view&id=3871&catid=5](http://nlp.lsi.upc.edu/freeling/index.php?option=com_simpleboard&Itemid=65&func=view&id=3871&catid=5)
- [44] Conversación en el foro de FreeLing sobre un análisis erróneo en Windows.  
Consultada por última vez el 10-09-2015  
[http://nlp.lsi.upc.edu/freeling/index.php?option=com\\_simpleboard&Itemid=65&func=view&id=4102&catid=3](http://nlp.lsi.upc.edu/freeling/index.php?option=com_simpleboard&Itemid=65&func=view&id=4102&catid=3)
- [45] Vicente González Valle.  
Ejercicios resueltos de selectividad Matemáticas II Universidad de Extremadura.  
El documento al que se enlaza ha sido actualizado, en este proyecto se usa una versión anterior sin los exámenes de 2015  
[http://www.vicentegonzalezvalle.es/?page\\_id=142](http://www.vicentegonzalezvalle.es/?page_id=142)

## **Resum**

Aquest projecte tracta sobre la resolució automàtica dels exàmens de selectivitat de matemàtiques II. En un primer moment s'aborda la qüestió de si és plausible, arribant a la conclusió que és molt probable que sí es pugui, encara que fa falta estudiar amb més detall el procés d'interpretació dels enunciats.

En segon lloc, es busca la manera d'adaptar al nostre cas el procés seguit en un article sobre programari d'assistència a les demostracions. Per aconseguir-ho s'ha començat el desenvolupament d'una eina que assisteixi en la creació dels marcs semàntics.

## **Resumen**

Este proyecto trata sobre la resolución automática de los exámenes de selectividad de matemáticas II. En un primer momento se aborda la cuestión de si es plausible, llegando a la conclusión de que es muy probable que sí se pueda, aunque hace falta estudiar con más detalle el proceso de interpretación de los enunciados.

En segundo lugar, se busca la manera de adaptar a nuestro caso el proceso seguido en un artículo sobre software de asistencia a las demostraciones. Para lograrlo se ha empezado el desarrollo de una herramienta que asista en la creación de los marcos semánticos.

## **Abstract**

This project is about the automatic resolution of math university entrance exams. At first the question whether it is plausible is discussed, concluding that it is highly probable, but need to examine further the process of interpretation of statements.

Secondly, is being looked a way to adapt to our case the process followed in an article of assistance demonstrations software. To achieve this it has begun developing a tool to assist in the creation of semantic frames.