El mejor orden de ejecución de una serie de proyectos de inversión*

Joan Pasqual i Rocabert
Departament d'Economia Aplicada
Universitat Autònoma de Bàrcelona

1. Introducción

Dada una serie de proyectos con distinta rentabilidad y duración, lo ideal sería ejecutarlos todos simultáneamente ya que aplazar la ejecución de cualquier proyecto rentable supone incurrir en un coste de oportunidad. Sin embargo, debido a restricciones físicas o por la limitación de los recursos disponibles, la solución ideal es inalcanzable. Se trata pues de hallar la mejor ordenación en la ejecución de estos proyectos de forma que se maximice el VAN conjunto en un lapso de tiempo total L predeterminado, respetando las restricciones existentes. De todos los tipos de restricciones posibles, se examinará aquí la influencia de una limitación extrema: sólo se puede ejecutar un proyecto a la vez, de manera que para llevar a cabo un nuevo proyecto hay que esperar a que el anterior haya terminado. No hace falta añadir que los criterios clásicos, como el VAN, la TIR o el cociente beneficio-coste (CBC), lejos de ser equivalentes como se señala en Remer y Nieto (1995), como ya se pone de manifiesto despues de una lectura atenta de Cantor y Lippman (1983), funcionan bien en casos simples y muy concretos, como la compra de acciones, y no son capaces de resolver el problema que se presenta en este trabajo. La conclusión es obvia, el problema de la selección de proyectos no tiene una solución general, cada problema cualitativamente distinto tiene su propia regla de optimalidad.

Existen numerosas aplicaciones: desde determinar el mejor orden para cultivos sucesivos y distintos en un mismo campo o hallar la programación óptima para un teatro hasta la secuencia óptima para grandes infraestructuras o la organización temporal idónea de grandes acontecimientos por parte de una ciudad, como una Exposición Universal o unos Juegos Olímpicos. Mediante algunos ajustes, caben aplicaciones de relativa menor entidad, como el problema de ajustar las fases de ejecución de un proyecto de forma que se optimicen los flujos de cobros y pagos, planteado en Dayanand y Padman (1997).

En suma, se trata de resolver *el problema del cazadotes o el problema de la viuda* (al patrimonio por el matrimonio): hallar la sucesión óptima de conyugues en orden a conseguir el mayor VAN posible en un tiempo total predeterminado, cuando sólo puede tomarse uno a la vez, todos tienen características distintas, tanto por la rentabilidad neta que proporcionan -en sentido lato- como por su duración, que conviene que sea corta en relación con la vida de la viuda o del cazadotes. Por ejemplo, sea X, Y y Z los tres candidatos que han sido seleccionados, cuyas características se detallan a continuación:

	0	1	2	3	VAN	TIR	CBC
X	-100	40	40	140	*74,61*	40%	*1,746*
Y	-100	160			45,45	**60%**	1,455

* Este trabajo forma parte de un proyecto de investigación financiado por la CICYT (referencia: SEC96-2300).

Z	-100	50	50	150	**99.47**	*50%*	**1,99**

Las seis posibilidades distintas de matrimonio son:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
XYZ	-100	40	40	140	-100	**160**	-100	50	50	150
XZY	-100	40	40	140	-100	50	50	150	-100	160
YXZ	-100	160	-100	40	40	140	-100	50	50	150
YZX	-100	160	-100	50	50	150	-100	40	40	140
ZXY	-100	50	50	150	-100	40	40	140	-100	160
ZYX	-100	50	50	150	-100	160	-100	40	40	140

y proporcionan los siguientes resultados:

	VAN	TIR	CBC	elegido por:
XYZ	161,8	42,8%	1,72	
XZY	163,8	42,3%	1,76	
YXZ	163,3	*50,4%*	1,68	
YZX	169,8	**54,2%**	1,71	TIR
ZXY	*171,6*	48,5%	**1,80**	VAN y CBC
ZYX	**172,6**	50,1%	*1,77*	

Resolver esta secuencia óptima de matrimonios es más bien simple, porque todos requieren una única inversión inicial y es la misma para todos los candidatos. Sin embargo, aunque el VAN y el CBC coinciden, señalan una opción distinta de la que recomienda la TIR y, lo que es peor, ninguno de estos populares criterios para la selección de proyectos es capaz de hallar la solución, que es ZYX por cuanto proporciona el VAN mayor.

En primer lugar se calcula el coste de oportunidad por retrasar un proyecto rentable, esto es, el coste de posposición (CPP), y se obtiene una primera condición para determinar el mejor orden entre dos candidatos. A continuación, en la sección 2, se estudia bajo que circunstancias un proyecto X que es postergado por otro proyecto rentable D, pierde todo su valor debido al CPP, con lo que D actúa como destructor de X: resultaría preferible ejecutar sólo X en lugar de primero D y luego X. En la sección 3. se determina el valor de reserva (VR) de un proyecto, que es límite para que (el valor de) un proyecto no sea destruido, y se emplea para estudiar las propiedades de las relaciones de orden que pueden establecerse. En la sección 4 se analiza el mejor orden entre dos proyectos y las propiedades de las cadenas optimizadas de proyectos. En la sección 5 se presenta una regla óptima para ordenar N proyectos, basada en el VR y, por lo tanto permite asignar a cada proyecto un índice, un número que es independiente de los otros proyectos, y sirve para saber el lugar que le corresponde en la cola. Por último, en la misma sección 5 se sugieren extensiones para proseguir la investigación.

1. El coste de posposición (CPP)

Cuando se retrasa la ejecución de un proyecto, entonces se incurre en un coste de oportunidad -ver Pasqual y Tarrío (1995)- que es tanto mayor cuanto más altos sean el VAN y la duración de la demora. En lo que sigue se partirá de una serie limitada de proyectos de inversión A, B, ..., N, con duraciones $a \geq 1$, $b \geq 1$, ..., $n \geq 1$, respectivamente. La rentabilidad se mide por el Valor Actual Neto (VAN) y, dada una tasa de descuento predeterminada y estrictamente positiva ($r > 0$), son rentables por hipótesis: $VAN(r) > 0$. Así, el proyecto -o la serie de proyectos- A se considera mejor que el B si y sólo si A tiene un mayor VAN:

$$A > B \Leftrightarrow VAN(A) > VAN(B) \qquad (1)$$

Como no todos los proyectos pueden ejecutarse simultáneamente, es inevitable postergar proyectos para que sean ejecutados más adelante, por lo que interesa medir el coste en el que se incurre por este concepto.

Determinar el coste de posposición (CPP) es inmediato. Sea VAN(X; 0) el valor actual neto del proyecto X ejecutado en el momento 0. Si la operación de inversión se lleva a cabo con una demora de D periodos y nada más ha variado, necesariamente debe cumplirse:

$$VAN(X; 0) = VAN(X; D)\cdot(1+r)^{D} \qquad (2)$$

El coste debido al atraso en la ejecución del proyecto X durante D períodos, que se designa por CPP(X; D), no es más que la diferencia entre lo que se obtiene con el proyecto postergado, VAN(X; D), y lo que se hubiera obtenido sin posposición, VAN(X; 0). Es decir:

$$CPP(X; D) = VAN(X; D) - VAN(X; 0) =$$

$$= - VAN(X, 0)[1- (1+r)^{-D}] \qquad (3)$$

en donde

$$[1 - (1+r)^{-D}] \qquad (4)$$

es el coste, en valor absoluto, de posponer un proyecto marginal, esto es un proyecto con $VAN = 1$.

Es fácil ver que CPP(X; D) es siempre negativo -supone un coste- para todo proyecto rentable ($VAN > 0$ con $r > 0$):

$$CPP(X; D) = - VAN(X, 0)[1- (1+r)^{-D}] < 0 \Leftrightarrow VAN(X, 0) > 0 \qquad (5)$$

Dados dos proyectos rentables cualesquiera, A y B, el VAN es máximo cuando se ejecutan todos a la vez, obteniéndose VAN(A+B), siendo

$$VAN(A+B) > \max\{VAN(AB), VAN(BA) \qquad (6)$$

Si la ejecución simultánea no es posible, entonces se trata de determinar si es preferible ejecutar primero el X y después el Y, con lo que se obtendría un valor total de VAN(XY) o al revés, consiguiéndose una rentabilidad total de VAN(YX). Dados dos proyectos cualesquiera X e Y de duración x e y, con una rentabilidad de VAN(X) y VAN(Y) respectivamente, entonces,

$\underline{X \textit{ equivale} \text{ al } Y}$ si $x = y$, con VAN(X) = VAN(Y) (7)

esto es,

$$VAN(XY) = VAN(X) + VAN(Y)[(1+r)^{-x} = VAN(BA) =$$

$$= VAN(Y) + VAN(X)[(1+r)^{-y}$$

en donde x e y representan las duraciones de X e Y respectivamente

X equivale a Y $\Rightarrow$ XY = YX $\forall$ X, Y (el recíproco no se cumple)

X idéntico a Y $\Rightarrow$ X equivale a Y $\forall$ X, Y (el recíproco no se cumple)

X equivale a X $\forall$ X

X *equivale* a Y e Y *equivale* a Z $\Rightarrow$ X *equivale* a Z, $\forall$ X, Y, Z

La primera propiedad de la ordenación de proyectos es pues la que da lugar al problema que se está estudiando, ya que

si A y B no son equivalentes AB $\neq$ BA (8)

Este resultado se extiende a cualquier cantidad de proyectos A,BC..., N, en general:

HAB...N $\neq$ AB...NH (9)

El problema empieza por determinar el mejor orden entre dos proyectos genéricos X e Y con duraciones de x e y respectivamente:

el orden XY será preferible a YX $\Leftrightarrow$ VAN(XY) > VAN(YX) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow VAN(X, 0)+VAN(Y, 0)\cdot[(1+r)^{-x}] > VAN(Y, 0)+VAN(X, 0)\cdot[(1+r)^{-y}]$$

$$\Leftrightarrow VAN(Y, 0)\cdot[(1+r)^{-x}] - VAN(Y, 0) > VAN(X, 0)\cdot[(1+r)^{-y} - VAN(X, 0)$$

$$\Leftrightarrow VAN(Y, 0)\cdot[(1+r)^{-x} - 1] > VAN(X, 0)\cdot[(1+r)^{-y} - 1]$$

$$\Leftrightarrow VAN(Y, 0)\cdot[(1+r)^{-x} -1] > VAN(X, 0)\cdot[(1+r)^{-y} - 1] \qquad (10)$$

$$\Leftrightarrow CPP(X, y) > CPP(Y, x) \quad \text{por (3)} \qquad (11)$$

2. Los proyectos destructores

Dados dos proyectos rentables cualesquiera A y D, es evidente que

AA > A $\forall$ A (12)

$$AD > A \qquad \forall A, D \qquad (13)$$

$$DA > D \qquad \forall A, D \qquad (14)$$

y, sin embargo:

$$\exists\ A, D \text{ tal que } DA < A \qquad (D \text{ es } \textit{destructor}) \qquad (15)$$

Como sucede en el siguiente caso:

	0	1	2	3	4	5	6	VAN	TIR
A	-2000	3190						**900**	59,5%
D	-100	100	100	100	221,5			300	**101,4%**
AD	-2000	3190	-100	100	100	100	221,5	**1147,9**	61,3%
DA	-100	100	100	100	221,5	-2000	3190	858,8	**89,1%**

VAN(A) = 900, VAN(D) = 300, d = 5, r = 10%, entonces VAN(DA) = 300 + $900(1,1)^{-5}$ = 858,8 < VAN(A), a pesar de que VAN(AD) > VAN(A), lo que demuestra (15).

El resultado es general, puesto que tanto A como D pueden representar cadenas compuestas por M y N proyectos respectivamente. Un proyecto como el D recibe el apelativo de *destructor potencial*, si en función de la posición que ocupa en la cadena destruye valor (DA) -cumple (15)- o añade valor al conjunto (AD), y de *destructor* cuando, dada la posición que ocupa (DA), disminuye el valor del conjunto. La propiedad (15) obliga a ser muy cautos ante la aplicación de las reglas habituales para jerarquizar proyectos y cualquier criterio simple. Por otra parte, el ejemplo empleado es tan poco extremo que es inevitable pensar que el resultado (15) se presentará en la práctica con harta frecuencia.

3. El valor de reserva (VR)

La cuestión ahora es determinar hasta que punto la adición de un proyecto puede ser destructiva o, dicho de forma más rigurosa, de determinar el *valor de reserva* (VR). Sea W un proyecto rentable con duración w, su valor de reserva VR(W) es el valor más alto de VAN(X) tal que:

$$\text{VAN(W)} - \text{VAN(X)}\cdot[1 - (1+r)^{-w}] \geq 0$$

es decir, el valor más alto para el VAN(X) de un proyecto cualquiera X, que se ejecuta inmediatamente después del proyecto W, de modo que la cadena WX no sea peor que X o , lo que es lo mismo, el beneficio por incorporar W, VAN(W), no sea inferior al coste que provoca, CCP(X, w). El VAN mayor para el proyecto hipotético X que cumple la condición anterior, es precisamente el valor de reserva de W, designado por VR(W):

$$\text{VR(W)} = \text{VAN(W)}/[1 - (1+r)^{-w}] \qquad (16)$$

en donde $[1 - (1+r)^{-w}]$, por (4), es el coste de posponer un proyecto de valor unitario (VAN = 1). Nótese que el VR de un proyecto, a diferencia del CPP, depende sólo de los parámetros de este proyecto.

En resumen, un proyecto W es destructor -se cumple (15)- cuando, para algún proyecto X de la cadena:

$$WX < X \Leftrightarrow VAN(W) + VAN(X)\cdot(1+r)^{-w} < VAN(X)$$

$$\Leftrightarrow VAN(W) < VAN(X)\cdot[1 - (1+r)^{-w}]$$

$$\Leftrightarrow VAN(X) > VAN(W)/[1 - (1+r)^{-w}] \qquad (17)$$

y como $VAN(W)/[1 - (1+r)^{-w}]$ es el valor de reserva de W, VR(W) definido en (16), puede escribirse

$$W \text{ es destructor} \Leftrightarrow VAN(X) > VR(W) \qquad (18)$$

Para cualquier proyecto X se cumple que

$$VR(X) > VAN(X) \qquad (19)$$

ya que, por hipótesis, la duración es mayor que la unidad y la tasa de descuento es estrictamente positiva.

Nótese que (17) puede expresarse

$$WX < X \Leftrightarrow VAN(X) > VAN(W)/[1 - (1+r)^{-w}]$$

$$\Leftrightarrow VAN(X)\cdot[1 - (1+r)^{-w}] > VAN(W)$$

$$\Leftrightarrow CPP(X; w) > VAN(W) \qquad (20)$$

esto es, W es destructor de X si W tiene un VAN inferior al coste por posponer X.

Por observación de la expresión (18), se desprende que VAN(W) > VAN(X) es una condición suficiente para que W no sea destructor y VAN(W) < VAN(X) una condición necesaria para que lo sea. En consecuencia, la ordenación de proyectos de mayor a menor VAN tiene la particularidad de que la cadena resultante, aunque no sea óptima, no contiene ningún proyecto destructor, resultado que no puede garantizarse siguiendo otros métodos de selección clásicos, como el popular criterio de ordenación según el cociente beneficio/coste o la TIR.

Propiedades del valor de reserva VR. El VR de un proyecto X aumenta con el VAN y disminuye con la duración. Al variar la tasa de descuento (r), el VAN(X), que es el numerador del VR -ver (16)- disminuye porque se supone que es una inversión, mientras que la derivada del denominador respecto a r vale $(1+r)^{-x}\cdot Ln(1+r) > 0$, por lo tanto[1] $\delta VR/\delta r > 0$.

Dados dos proyectos cualesquiera X e Y, VR(X) + VR(Y) > max{VR(XY), VR(YX)}> max{VR(X), VR(Y)}. VR(X) tiende a cero cuando VAN(X) tiende a cero y VR(X) tiende a infinito cuando VAN(X) tiende a infinito. Si la duración x del proyecto X vale

[1] Si el proyecto no fuera una inversión sino que tuviera características de crédito, el VAN disminuye con la tasa r y el resultado de $\delta VR/\delta r$ es de signo libre.

uno, $VR(X) = VAN(X) \cdot [(1+r)/r]$, cuando x tiende a cero VR(X) tiende a infinito, cuando x tiende a infinito VR(X) tiende a VAN(X).

A partir de (16), es inmediato deducir que nunca conviene que un proyecto destructor D se ejecute antes que otro proyecto X, esto es, cuando el valor de reserva de D, VR(D), es inferior al valor actual de X:

$$VR(D) < VAN(X) \Rightarrow DX < X \text{ y } XD > X \qquad \forall\, X$$

$$VR(D) < VAN(X) \Rightarrow XD > DX \qquad \forall\, X \quad (21)$$

Por fortuna, la regla práctica que acaba de anunciarse es siempre factible, porque dado un par cualquiera de proyectos es imposible que ambos sean destructores (no existe simetría):

D destruye a A $\Rightarrow$ A no destruye a D (el recíproco no se cumple) (22)

En efecto, si D destruye a A se ha de cumplir:

$$VR(D) < VAN(A)$$

pero $VAN(D) < VR(D)$ y $VAN(A) < VR(A)$, resultando

$$VAN(D) < VR(D) < VAN(A) < VR(A)$$

y se obtiene la condición para que A no destruya D.

La falta de simetría expresada en (22) implica que no existe reflexividad:

D no destruye a D (23)

La relación de destrucción es transitiva,

A destruye a B y B destruye a C $\Rightarrow$ A destruye a C (24)

En efecto,

A destruye a B $\Leftrightarrow$ $VR(A) < VAN(B)$

B destruye a C $\Leftrightarrow$ $VR(B) < VAN(C)$

y como $VAN(B) < VR(B)$ para todo B, se puede escribir

$$VR(A) < VAN(B) < VR(B) < VAN(C)$$

y A destruye a C, al ser $VR(A) < VAN(C)$.

Si D destruye a A y, además D destruye a B, entonces D destruye a AB y a BA. En otras palabras:

$$DA < A \text{ y } DB < B \Rightarrow DAB < AB \text{ y } DBA < BA \qquad (25)$$

Sin embargo, si D no destruye B, entonces la anterior relación de destrucción **(25)** no se mantendrá a pesar de que D destruye A. Es decir,

$$DA < A \text{ y } DB > B \Rightarrow DBA > BA \qquad (26)$$

De hecho, que DA < A es irrelevante en este caso, porque basta con **que** DB **>** B **para** que DBA > BA ya que el mejor orden de ejecución de dos proyectos no depende de los proyectos que preceden a ambos ni de los que les sigan, como **se** demuestra **a** continuación:

Si el orden XY es preferible al YX entonces, para cualquier proyecto H **de** duración h, se cumple que HXY es mejor que HYX y XYH es preferible **a** YXH. Dicho de otro modo,

$$XY > YX \Rightarrow HXY > HYX \qquad \forall\, X, Y, H \qquad (27)$$

$$XY > YX \Rightarrow XYH > YXH \qquad \forall\, X, Y, H \qquad (28)$$

La demostración de (27) es simple. Si se ejecuta H en el momento 0 **y el** segundo proyecto -el XY- se inicia en el momento h, o sea inmediatamente después **de** terminado H, entonces,

$$VAN(HXY) = VAN(H) + [VAN(XY)](1+r)^{-h}$$

$$VAN(HYX) = VAN(H) + [VAN(YX)](1+r)^{-h}$$

$$VAN(HXY) - VAN(HYX) =$$

$$= [VAN(XY)](1+r)^{-h} - [VAN(YX)](1+r)^{-h} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow VAN(XY) > VAN(YX) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow XY > YX$$

El mismo razonamiento es aplicable a (28), cuando el proyecto H **se** ejecuta inmediatamente después de terminado el segundo proyecto. En particular, **si DB > B** entonces esta relación de desigualdad no cambia si se añade un proyecto adicional **a** ambos lados, esto es DBA > BA, lo que demuestra (26).

En una serie de proyectos ordenados de una forma específica AB...**LMN** puede haber cualquier cantidad de proyectos destructores. Pueden serlo todos, **por** ejemplo, **A** destruye a B, B destruye a C, ..., M destruye a N:

$$VR(A) < VAN(B) < VR(B) < VAN(C) < \ldots < VR(M) < VAN(N) \quad \mathbf{(29)}$$

En este caso extremo se llega al poco intuitivo resultado que ejecutar el proyecto **N es** preferible a ejecutar todos los proyectos en el orden predeterminado A...**N, a** pesar **de** que todos los proyectos son rentables por hipótesis:

$$A \text{ destruye } B,\ B \text{ destruye } C, \ldots, M \text{ destruye } N \Rightarrow N > A\ldots N \quad \mathbf{(30)}$$

En efecto, si cada proyecto es destructor del que le sigue y como la relación de destrucción es transitiva:

$AB < B \Rightarrow$ es preferible eliminar A

$BC < C \Rightarrow$ es preferible eliminar B

...

$MN < N \Rightarrow$ es preferible eliminar M

y queda sólo el proyecto N. Se obtiene un mejor resultado ejecutando sólo N que cualquier combinación de proyectos en un orden como el (29) en el que cada proyecto es destructor del que le sigue..

En una cadena puede suceder que no exista ningún proyecto destructor. Esto es:

$$VR(A) > VR(B) > VAN(B) > VR(C) > ... > VR(M) > VAN(N) \quad (31)$$

Por ejemplo, en los proyectos A, B y C siguientes, es preferible ejecutar sólo el proyecto A que la cadena CBA y el orden óptimo es la cadena ABC (los cálculos se realizan con una tasa de descuento de r = 10%):

	0	1	2	3	VAN	TIR	VR
A	-100	220			**100**	120%	**576,2**
B	-30	0	65		32,7	47,2	95,4
C	-1	0	0	15	10,3	**146,6**	32,4

$$VAN(CBA) = 10{,}3 + 32{,}7 \cdot 1{,}1^{-4} + 100 \cdot 1{,}1^{-7} = 83{,}95 < VAN(A) = 100 <$$

$$< VAN(ABC) = 100 + 32{,}7 \cdot 1{,}1^{-2} + 10{,}3 \cdot 1{,}1^{-5} = 133{,}42$$

Si la cadena A...KLMN está ordenada como en (29) y se añade un proyecto Z que se ejecuta inmediatamente antes que el K, entonces Z no será destructor del conjunto de proyectos KLMN si Z no es destructor de K, aunque Z sea destructor de N. Es decir:

$$K...N \text{ cumple (29) y Z no destruye } K \Rightarrow ZK...N > K...N \quad (32)$$

aunque $ZN < N$, como se ha visto en (26)

Sea Φ un proyecto de duración no nula y con todos los flujos igual a cero o con VAN nulo. Entonces, es inmediato que

$$\Phi X < X \qquad \forall X \text{ con } VAN(X) > 0 \qquad (33)$$

lo que significa que un proyecto como el Φ siempre es destructor[2]

Paradójicamente, aunque está claro que

$$X = X\Phi \qquad \forall X$$

cualquier cadena de proyectos rentables que incluya un proyecto como el Φ, aumenta de valor si se suprime Φ. Para que la afirmación no sea cierta, sería necesario que una vez ejecutado el proyecto anterior al Φ ya no tuviera sentido llevar a cabo ninguna otra inversión (se supone que el fin del mundo está próximo, por ejemplo). En el caso contrario, ejecutada la cadena de proyectos AB...NΦ se plantearía otra secuencia de proyectos XY...W y la supuesta neutralidad de Φ quedaría en entredicho ya que AB...NΦXY...W tiene un VAN menor que AB...NXY...W.

4. El orden óptimo de dos proyectos

Una forma de determinar el mejor orden de dos proyectos es empleando la función de valor de reserva VR(·) ya presentada (16). Sea el proyecto X que dura x períodos y el Y que dura y períodos. Recordando la expresión (10),

el orden XY será preferible a YX $\Leftrightarrow$ VAN(XY) > VAN(YX) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \text{VAN}(Y, 0)\cdot[(1+r)^{-x} - 1] > \text{VAN}(X, 0)\cdot[(1+r)^{-y} - 1] \qquad (10)$$

$$\Leftrightarrow \text{VAN}(X, 0)/[1 - (1+r)^{-x}] > \text{VAN}(Y, 0)/[1 - (1+r)^{-y}]$$

$$\Leftrightarrow \text{VR}(X) > \text{VR}(Y)$$

$$XY > YX \Leftrightarrow \text{VR}(X) > \text{VR}(Y) \qquad (34)$$

y como VR(Y) > VAN(Y), la condición (34) implica que

$$\text{VR}(X) > \text{VR}(Y) > \text{VAN}(Y)$$

de donde para cumplir XY > YX es necesario que X no sea destructor de Y, aunque no es suficiente, mientras que basta con que Y destruya X, como ya se ha visto en (22). Nótese que aplicando la regla (34) se llega a una situación como la expresada en (31) en la que ningún proyecto es destructor.

La condición (34) indica que XY será tanto mejor que YX, es decir, será preferible ejecutar el proyecto X en primer lugar:

cuánto mayor sea VAN(X, 0)

cuánto menor sea la duración T de X

cuánto menor sea la tasa de descuento r

[2] En rigor no es necesario que VAN(Φ) = 0, se puede mantener el habitual supuesto de que el VAN es estrictamente positivo, porque para que se cumpla (33) basta con que el VAN(Φ) sea despreciable en términos relativos a los demás proyectos. Por otra parte, si VAN(X) < 0, entonces $\Phi X > X$.

o bien, si se prefiere, el orden de ejecución XY será tanto mejor que el YX:

cuánto menor sea VAN(Y, 0), o sea, el VAN del proyecto que se retrasa

cuánto mayor sea la duración M de Y, esto es, la demora para el proyecto que se pospone

cuánto mayor sea la tasa de descuento r

Estas propiedades se mantienen en el caso de N proyectos. Si todos los proyectos tuvieran el mismo VAN y haciendo abstracción de los problemas que provoca la existencia de indivisibilidades, la selección sería muy simple, bastaría con ejecutarlos por orden de menor a mayor duración.

Del mismo modo, si la duración de los proyectos considerados fuera idéntica, el mejor orden de ejecución surgiría de la ordenación según el VAN de mayor a menor. Dicho de otra forma:

Entre dos proyectos puede existir una relación de dominancia:

el proyecto X *domina* al Y si $x \leq y$, con $VAN(X) \geq VAN/(Y)$ (35)

con por lo menos una desigualdad estricta (o $VAN(X) > VAN(Y)$ o $x < y$ o ambos).

$$X \text{ domina a } Y \Rightarrow XY > YX \qquad \text{(el recíproco no se cumple)}$$

$$XY > YX \Leftrightarrow VAN(X)+[VAN(Y)]\cdot(1+r)^{-x} > VAN(Y) + [VAN(X)]\cdot(1+r)^{-y}$$

$$\Leftrightarrow VAN(X)[1- (1+r)^{-y}] > VAN(Y)[1- (1+r)^{-x}]$$

y, para que esta última expresión sea verdadera, (35) constituye una condición suficiente, por lo tanto

$$X \text{ domina } Y \Rightarrow VR(X) > VR(Y) \quad \text{(el recíproco no se cumple)} \quad (36)$$

La dominancia tal como se ha definido, es *transitiva*. $\forall$ X, Y, Z: (37)

X *domina* a Y e Y *domina* a Z $\Rightarrow$ X *domina* a Z

X *domina* a Y e Y es *equivalente* a Z $\Rightarrow$ X *domina* a Z

X *es equivalente* a Y e Y *domina* a Z $\Rightarrow$ X *domina* a Z

Por lo tanto, si en un conjunto de proyectos resulta que un proyecto X domina a otro Y y éste domina (o es equivalente) a Z, entonces el orden XYZ es el mejor de entre las seis formas posibles de ordenar tres proyectos. No es necesario tener en consideración ninguna de la ordenaciones que contengan relaciones dominadas y pueden eliminarse del conjunto de alternativas.

Dados los proyectos X, Y y H, entonces

$$XYH \neq HXY \tag{38}$$

salvo por casualidad. Designando la cadena XY por A, entonces la comparación es entre AH y HA, que no siempre es equivalente como se vio en (8).

La ordenación de proyectos tiene la *propiedad transitiva*. Dados tres proyectos cualesquiera A, B y C:

$$AB > BA \text{ y } BC > CB \Rightarrow AC > CA. \tag{39}$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supóngase que AB > BA, entonces, VR(A) > VR(B), y como BC > CB, VR(B) > VR(C), con lo que VR(A) > VR(B) > VR(C) y AC > CA.

Como la ordenación de los proyectos A, B y C tiene la propiedad transitiva, entonces el orden ABC es siempre el mejor de entre los seis posibles. La demostración es inmediata; aplicando las propiedades (27) y (28) resulta:

$$AB > BA \Leftrightarrow \{CAB > CBA\ [\mathbf{1}] \text{ y } ABC > BAC\ [\mathbf{2}], \forall C\}$$

$$BC > CB \Leftrightarrow \{ABC > ACB\ [\mathbf{3}] \text{ y } BCA > CBA\ [\mathbf{4}], \forall A\}$$

$$AC > CA \Leftrightarrow \{BAC > BCA\ [\mathbf{5}] \text{ y } ACB > CAB\ [\mathbf{6}], \forall B\}$$

por lo tanto, se pueden establecer las dos cadenas siguientes:

$$\mathbf{ABC} \underset{[3]}{>} ACB \underset{[6]}{>} CAB \underset{[1]}{>} CBA$$

$$\mathbf{ABC} \underset{[2]}{>} BAC \underset{[5]}{>} BCA \underset{[4]}{>} CBA$$

y el orden ABC queda situado en primer lugar en los dos cadenas posibles (la relación entre ACB y BAC y entre CAB y BCA queda indeterminada). En resumen, ∀ A, B, C

$$AB > BA \text{ y } BC > CB \Rightarrow AC > BC \text{ y ABC es el orden óptimo} \tag{40}$$

La relación entre los proyectos es *independiente respecto a las alternativas irrelevantes*. Sean X, Y, H tres proyectos tales que XH > HX y HY > YH, con lo que, por (40), el mejor orden es XHY. Para que exista independencia, se ha de cumplir que al suprimir la alternativa H se mantiene la ordenación entre X e Y, o sea XY > YX, lo que es cierto por transitividad. Por lo tanto, ∀ X, H, Y:

$$\text{XHY es el orden óptimo de X, H e Y} \Rightarrow XY > YX \tag{41}$$

Dicho de otra manera, el orden óptimo de una serie de proyectos no se altera al suprimir una alternativa.

Sin embargo, la relación de orden que se establece entre dos proyectos cualesquiera no es independiente respecto a todas las alternativas que puedan existir. Si el orden XY es preferible al YX, esto no significa que para cualquier proyecto H se cumpla que XHY siempre es mejor que YHX; por el contrario:

$$\exists \text{ X, Y, H tal que YHX} > \text{XHY a pesar de que XY} > \text{YX} \quad (42)$$

Para demostrarlo basta con un contraejemplo. Sean los proyectos X, Y y H:

	0	1	2	3	VAN	TIR	VR
X	-100	250			127,27	150%	**733,3**
Y	-100	100	100	200	**223,82**	100%	706,1
H	-1	1	4		3,2	**156%**	12,9

EL valor de reserva de X, VR(X) = 733,3, es mayor que el de Y, VR(Y) = 706,1, por lo tanto el orden de ejecución XY es preferible al YX, lo que no impide que YHX > XHY:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	VAN
XHY	-100	250	-1	1	4	-100	100	100	200	268,9
YHX	-100	100	100	200	-1	1	4	-100	250	**291,3**

La propiedad (42) puede resultar molesta en algunas situaciones. Por ejemplo, si después de optimizar el orden de una serie de proyectos se presenta la obligación de incluir un nuevo proyecto en una posición determinada, esto obliga a reconsiderar todo el problema y el resultado será un *second best*. Por el contrario, si la posición del proyecto adicional no está condicionada de ninguna forma, basta con ubicarlo en el lugar que le corresponde según su VR sin que sea preciso cuestionar el orden de los demás proyectos.

5. El orden óptimo de N proyectos

Dado un conjunto de proyectos, siempre es posible asignar a cada uno de ellos un valor de reserva (VR) -ver (16)- y ordenar los proyectos de mayor a menor VR. Como se ha visto en (34), el VR sirve para ordenar de forma óptima dos proyectos cualesquiera, siendo transitiva esta relación -(39)-. Además, para toda tríada de proyectos A, B y C, si VR(A) > VR(B) > VR(C) se cumple que el mejor orden de entre los seis posibles (n!), es precisamente ABC -(40)-. Por lo tanto, si VR(A) > ... > VR(N), ABC es la mejor ordenación para estos tres proyectos, BCD lo es para los proyectos B, C y D, con lo que ABCD es el mejor orden para A, B, C, y D, (se procedería del mismo modo hasta completar la lista de proyectos). En consecuencia, la regla de ordenación óptima para dos proyectos se extiende a N proyectos. Dados los proyectos A, B, ..., N:

$$\text{VR(A)} > \ldots > \text{VR(N)} \Rightarrow \text{el orden óptimo es A...N} \quad (43)$$

Aplicando esta regla al ejemplo presentado en la introducción, resulta

	0	1	2	3	VAN	TIR	CBC	VR
X	-100	40	40	140	*74,61*	40%	*1,746*	235,4
Y	-100	160			45,45	**60%**	1,455	261,9
Z	-100	50	50	150	**99,47**	*50%*	**1,99**	**313,8**

y la ordenación de mayor a menor VR señala el mejor orden, el ZYX:

	VAN	elegido por:
XYZ	161,8	
XZY	163,8	
YXZ	163,3	
YZX	169,8	TIR
ZXY	*171,6*	VAN y CBC
ZYX	**172,6**	**VR**

Nótese que este caso era particularmente fácil de resolver, porque las tres primeras ordenaciones (XYZ, XZY y YXZ) están dominadas porque Z domina a X -ver (35)- y a pesar de esto, los criterios VAN TIR y CBC son incapaces de hallar la solución.

Cuando en la cadena hay dos o más proyectos equivalentes -de igual VR, ver (8)- entonces el orden entre estos proyectos es indiferente, pero siempre deben ejecutarse juntos. Por ejemplo, si los proyectos J, K y L son equivalentes, cualquiera de las seis ordenaciones posibles para estos tres proyectos es óptima: A...JKL...N = A...KLJ...N = ... = A...JLK...N, por lo que cabe substituirlo por un proyecto conjunto Q, Q = JKL y operar con Q como si fuera un único proyecto.

Hasta aquí se ha supuesto que los proyectos considerados no pueden repetirse, pero esta hipótesis se puede relajar. Si las posibilidades de repetición son ilimitadas, entonces dados los proyectos A, ..., N, ordenados por su VR como en (43), en el óptimo sólo se ejecutaría el proyecto con mayor VR, el A, ya que AA > AB, AAA > AAB > ABB, etc. Cuando existe alguna limitación a la cantidad de repeticiones, en el óptimo se ejecutarán los proyectos con mayor VR tantas veces como sea factible y se procede de este modo hasta agotar el ámbito temporal del programa de inversiones. En cualquier caso se simplifica el problema substituyendo los proyectos que pueden repetirse por un proyecto conjunto. Por ejemplo, si A admite tres repeticiones, B cinco y C dos, se define A' = AAA, B' = BBBBB, C' = CC, y el procedimiento a seguir para encontrar el óptimo es el habitual.

Cabe relajar también la hipótesis de que todas las oportunidades de inversión se conocen desde un principio y en ningún momento se añaden nuevos proyectos. Dada una serie optimizada de proyectos -como en (43)- puede suceder que deba incluirse un nuevo proyecto U, rentable o no, con exigencias respecto a la posición dentro de la cadena o la fecha de ejecución. Si la necesidad de inclusión es ineludible pero no hay más condiciones, la solución es obvia, se coloca U donde le corresponde por su VR (en el último lugar si VR(U) < 0). En otro caso, la posición estará condicionada de algún modo, U debe ejecutarse antes de la fecha en que estaba previsto ejecutar H por ejemplo; esta condición será problemática sólo si VR(U) < VR(H) ya que, en ausencia de la restricción se ejecutaría U después de H. Con todo, la restricción no afecta a la ordenación de los demás proyectos, ya que el mejor orden entre los proyectos H...N no queda afectado por los proyectos que les preceden (27). Si la condición tomara la forma "ejecutar U antes que H", sin límite de fecha, no conviene eliminar H porque aunque U fuera destructor de H, (UH < H), por (13) resulta que UH > U; por lo tanto lo mejor es ejecutarlos juntos -UH- tratarlos como un sólo proyecto y ubicarlos en la cadena en función del VR resultante, VR(UH).

Algunos modelos de selección de proyectos funcionan correctamente sólo cuando todas las alternativas son inversiones -como en Cantor y Lippman (1983), aunque no mencionan esta limitación- cuando la realidad suele ser más compleja, ya que en un mismo programa se suceden inversiones, créditos y proyectos que pueden denominarse regalos y pérdidas[3]. El presente modelo acepta proyectos con cualquiera de las cuatro categorías básicas ya mencionadas y no se necesita supuesto alguno respecto a su rentabilidad: todos los resultados y reglas de ordenación son aplicables a cualquier proyecto, sea del tipo que sea, y con independencia del valor de los parámetros que los caracterizan.

Asimismo, es más realista pensar que van surgiendo oportunidades de inversión de forma continuada, lo que tampoco provoca problemas insalvables aunque, en general no se alcanzará un óptimo. En ausencia de información acerca de cómo serán las oportunidades que se irán presentando, poco más se puede hacer que ir ordenando los proyectos a medida que se recibe la información y ejecutar en cada momento el proyecto con un mayor VR. Algunos de estos nuevos proyectos no se podrán mantener sin ejecutar tanto tiempo como se desee -congelados- sino que o bien se ejecutan dentro de un lapso de tiempo predeterminado o desaparecen. En este último caso, cabe que se pierdan oportunidades porque en el momento que se presentan ya esté en marcha un proyecto (que se supone imparable); se incurrirá en un coste de oportunidad, pero no siempre, debido a que el criterio de ordenar según el VR da prioridad a los proyectos cortos, lo que disminuye la probabilidad de que se pierdan oportunidades de inversión.

Supóngase ahora que está en marcha un proyecto como el L que puede pararse antes de que haya terminado por completo, y surge la oportunidad de llevar a cabo el proyecto Z que es mejor que el L. Sea L' el proyecto caracterizado por los flujos entre el momento en que se toma la decisión y el final previsto para L, y L" que expresa cómo quedarían los flujos de L si terminara antes de tiempo[4]. Entonces se trata de comparar la

[3] En una inversión se producen antes los costes -en promedio financiero- que los beneficios y la pendiente del VAN es negativa. En un crédito ocurre lo contrario, en promedio financiero se producen antes los beneficios que los costes y la pendiente del VAN es positiva. Se entiende aquí por regalo el proyecto que no tiene ningún flujo estrictamente negativo y pendiente negativa para el VAN y por pérdida el proyecto que no tiene ningún flujo estrictamente positivo y pendiente positiva para el VAN-ver Pasqual (1994) y, para una definición más completa, Pasqual (1998): *Criterios de valoración para políticas y proyectos* (no publicado)-. El modelo de Cantor y Lippman se puede extender con facilidad al caso de N créditos, pero no parece que sea capaz de tratar, una serie con inversiones y créditos y, por supuesto, no funciona cuando todos los flujos del proyecto tienen un mismo signo (el caso de regalos y pérdidas).

[4] Los flujos pasados o bien son costes irrecuperables -*sunk cost*- o se trata de beneficios irrenunciables; en todo caso no se modifican, con independencia de que se interrumpa el proyecto o continúe hasta agotar su duración y, por este motivo, no deben tenerse en consideración.

serie L'M...N con la serie L"ZM...N, lo que se reduce a comparar L' con L"Z: Será conveniente truncar L, dejándolo en L" y ejecutar Z cuando VR(L"Z) > VR(L').

La introducción de riesgo cambia el tipo de problema, al igual que si se contempla el caso de selección en paralelo -ver por ejemplo Vishwanath (1992)-, cuando en lugar de buscarse la optmización de una cadena de proyectos se pretende lo mismo con m cadenas, y su estudio se deja para futuras investigaciones.

Referencias Bibliográficas

Cantor, D. G. y Lippman, S. A. (1983). "Investment selection with imperfect capital markets" *Econometrica, Vol 51, No. 4, p 1121-1144.*

Dayanand, N. y Padman, R. (1997) "On modelling payments in projects". *Journal of Operational Research Society, Vol 47, p. 906-918.*

Pasqual, J. (1994). *La rentabilidad de un proyecto público*. Universitat Autònoma de Barcelona, Servei de Publicacions. Bellaterra.

Pasqual, J. y Tarrío J. A. (1995). "Optimal time-phasing of investment. A consolidated spurius model". *Applied Economic Letters, V*ol 2 No. 10, p. 321-322.

Remer, D. S. y Nieto A. P. (1995). "A compendium and comparison of 125 project evaluation techiques". *International Journal of Production Economics, Vol 42, p. 79-96 y 101-129.*

Samuelson, P. A. (1976) "Economics of forestry in a evolving society". *Economic Inquiry, vol 14, 446-492.*

Vishwanath, T. (1992). "Optimal ordering for parallel project selection". *International Economic Review, Vol. 33, No. 1, p. 79-89*

Weitzman, M. L. (1979). "Optimal search for the best alternative". *Econometrica, No. 3, p. 641-654.*