

# Computando a Von Neumann.

Herramientas para la solución y el análisis del modelo económico de Von Neumann

Manuel Muiños  
[mmuinosp@ucm.es](mailto:mmuinosp@ucm.es)

## Índice

|   |    |
|---|----|
| Computando a Von Neumann. ....                        | 1  |
| Guía de lectura para los no matemáticos .....         | 4  |
| Introducción.....                                     | 5  |
| 1. Por qué estudiar el modelo Von Neumann.....        | 5  |
| 2. Para qué estudiar los algoritmos.....              | 9  |
| El modelo.....  | 12 |
| 3. Planteamiento y condiciones del modelo .....       | 12 |
| 4. Relación con otros modelos.....                    | 18 |
| 5. Generalizando el modelo .....                      | 21 |
| Algoritmos sin variables internas .....               | 29 |
| 6. Consideraciones previas sobre los algoritmos.....  | 29 |
| 7. Autovalores.....                                   | 31 |
| 8. Bisección .....                                    | 35 |
| 9. Programación lineal secuencial .....               | 39 |
| 10. Simplex.....                                      | 41 |
| Algoritmos con variables internas .....               | 45 |
| 11. Muestreo .....                                    | 45 |
| 12. Divide et impera .....                            | 49 |
| 13. Autovalores con variables internas.....           | 54 |
| 14. Simplex con variables internas.....               | 58 |
| 15. Consideraciones finales sobre los algoritmos..... | 59 |
| Referencias .....                                     | 64 |

## Índice detallado

|   |    |
|---|----|
| Computando a Von Neumann.....                                     | 1  |
| Guía de lectura para los no matemáticos.....                      | 4  |
| Introducción.....   | 5  |
| 1. Por qué estudiar el modelo Von Neumann.....                    | 5  |
| 1.1. El modelo en palabras.....                                   | 5  |
| 1.2. Parecido entre modelo y realidad.....                        | 5  |
| 1.3. Diferencias entre el modelo y la realidad.....               | 6  |
| 1.4. Un mundo cruel, pero no tanto.....                           | 7  |
| 1.5. Más allá de Von Neumann.....                                 | 8  |
| 2. Para qué estudiar los algoritmos.....                          | 9  |
| 2.1. Para resolver el modelo.....                                 | 9  |
| 2.2. Para estudiar el mecanismo de asignación en la realidad..... | 10 |
| El modelo.....  | 12 |
| 3. Planteamiento y condiciones del modelo.....                    | 12 |
| 3.1. Planteamiento.....   | 12 |
| 3.2. Condiciones de máximo.....                                   | 13 |
| 3.3. Precios y ley de la rentabilidad.....                        | 13 |
| 3.4. Dualidad.....  | 15 |
| 3.5. Ejemplo.....   | 16 |
| 4. Relación con otros modelos.....                                | 18 |
| 4.1. Matrices IO de Leontief.....                                 | 18 |
| 4.2. Ecuaciones de Sraffa.....                                    | 18 |
| 4.3. Matrices de Leslie.....                                      | 19 |
| 4.4. Teoría de juegos.....  | 20 |
| 4.5. Programas lineales.....                                      | 20 |
| 4.6. Otras relaciones.....  | 20 |
| 5. Generalizando el modelo.....                                   | 21 |
| 5.1. Signos de los balances materiales.....                       | 21 |
| 5.2. Procesos en tiempo discreto.....                             | 23 |
| 5.3. Procesos en tiempo continuo.....                             | 24 |
| 5.4. Procesos con variables internas.....                         | 25 |
| Algoritmos sin variables internas.....                            | 29 |
| 6. Consideraciones previas sobre los algoritmos.....              | 29 |
| 6.1. Tiempo discreto o continuo.....                              | 29 |
| 6.2. Sin variables internas o con variables internas.....         | 29 |
| 6.3. Tamaño del problema.....                                     | 30 |
| 6.4. Precisión de las soluciones.....                             | 30 |
| 7. Autovalores.....   | 31 |
| 7.1. Algoritmo.....   | 32 |
| 7.2. Interpretación económica.....                                | 32 |
| 7.3. Anexo: solución del problema de autovalores.....             | 33 |
| 8. Bisección.....   | 35 |
| 8.1. Algoritmo.....   | 35 |
| 8.2. Anexo: determinación de $\alpha_{sí}$ y $\alpha_{no}$ .....  | 36 |
| 9. Programación lineal secuencial.....                            | 39 |
| 9.1. Algoritmo.....   | 40 |
| 9.2. Anexo: linealización de VN.....                              | 40 |

|  |    |
|--|----|
| 10. Simplex .....  | 41 |
| 10.1. Algoritmo .....  | 41 |
| 10.2. Interpretación económica .....   | 43 |
| 10.3. Anexo: Simplex dual .....  | 44 |
| Algoritmos con variables internas .....  | 45 |
| 11. Muestreo .....   | 45 |
| 11.1. Algoritmo .....  | 45 |
| 11.2. Interpretación económica .....   | 46 |
| 11.3. Anexo: tipos de muestras.....  | 47 |
| 12. Divide et impera .....   | 49 |
| 12.1. Algoritmo .....  | 49 |
| 12.2. Interpretación económica .....   | 51 |
| 12.3. Anexo: cálculo de la maximización del beneficio en un único proceso..... | 53 |
| 13. Autovalores con variables internas.....                                    | 54 |
| 13.1. Algoritmo .....  | 54 |
| 13.2. Interpretación económica .....   | 55 |
| 13.3. Anexo: solución del problema de autovalores con variables internas.....  | 55 |
| 14. Simplex con variables internas .....                                       | 58 |
| 14.1. Algoritmo .....  | 58 |
| 14.2. Interpretación económica .....   | 59 |
| 15. Consideraciones finales sobre los algoritmos.....                          | 59 |
| 15.1. Recapitulación sobre los algoritmos.....                                 | 59 |
| 15.2. Anexo: principales propiedades de los algoritmos .....                   | 60 |
| 15.3. Anexo: motores .....   | 60 |
| 15.4. Anexo: algoritmos combinados .....                                       | 61 |
| 15.5. Anexo: bibliografía sobre los algoritmos estudiados .....                | 62 |
| Referencias .....  | 64 |
| R.1. Textos de John von Neumann.....   | 64 |
| R.2. Códigos de algoritmos .....   | 65 |
| R.3. Referencias sobre algoritmos.....   | 65 |
| R.4. Referencias generales.....  | 66 |
| R.5. Biografías y documentales.....  | 69 |

# Guía de lectura para los no matemáticos

Este texto se centra en la relación entre los mecanismos de asignación reales y los algoritmos para resolver los modelos económicos. Para ello, cuando es imprescindible, se utilizan matemáticas muy sencillas.

Aun así el lector sin una formación matemática puede sentirse abrumado por algunos capítulos. A este lector le recomiendo la “Introducción”, capítulos 1 y 2, en donde no hay matemáticas en absoluto.

Opcionalmente, puede mirar la sección 3.1, para dar un vistazo superficial al planteamiento matemático del modelo, pero sin que sea necesario que se pare a comprender las ecuaciones. A continuación puede pasar a la sección 3.5, donde se detalla un ejemplo de las ecuaciones y su solución, pero de nuevo sin preocuparse por el significado de los símbolos.

Si está interesado en el vínculo con otros modelos, puede dar otro vistazo al capítulo 4, pero sin detenerse tampoco en las ecuaciones, por otra parte muy sencillas.

Si el lector no matemático desea profundizar más, puede leer las secciones de los capítulos dedicados a cada algoritmo que contienen la descripción del mismo y su interpretación económica (las secciones 1ª y 2ª de los capítulos 7, 10, 11, 12, 13 y 14, y también la sección 1ª de los capítulos 8 y 9). De aquí puede pasar a la sección 1ª del capítulo 15, donde se resume muy brevemente la interpretación económica de los algoritmos. El resto de estos capítulos son más técnicos, y están titulados como Anexo para que pueda prescindir fácilmente de ellos.

Para entender el papel de John von Neumann en la ciencia contemporánea, puede ser de ayuda alguno de los documentales que se citan en las Referencias, en la sección R.5.

# Introducción

## ***1. Por qué estudiar el modelo Von Neumann***

### **1.1. El modelo en palabras**

El modelo de John von Neumann, en adelante VN, es extremadamente simple. Pero veremos que, a pesar de su sencillez, nos dice mucho sobre la realidad.

El modelo estudia unos procesos productivos, cada uno de los cuales consume una lista de cosas para producir otra lista de cosas en el instante siguiente. El modelo se centra en las situaciones en las que todos los procesos crecen con la misma tasa de expansión, de manera que, en el conjunto de la economía y para cada una de las cosas o bienes, el consumo total no supera la producción total desde el instante anterior. Y de todas las situaciones en las que esto es posible, el modelo escoge la que permite la mayor tasa de expansión.

En definitiva, el modelo solo supone el crecimiento máximo.

### **1.2. Parecido entre modelo y realidad**

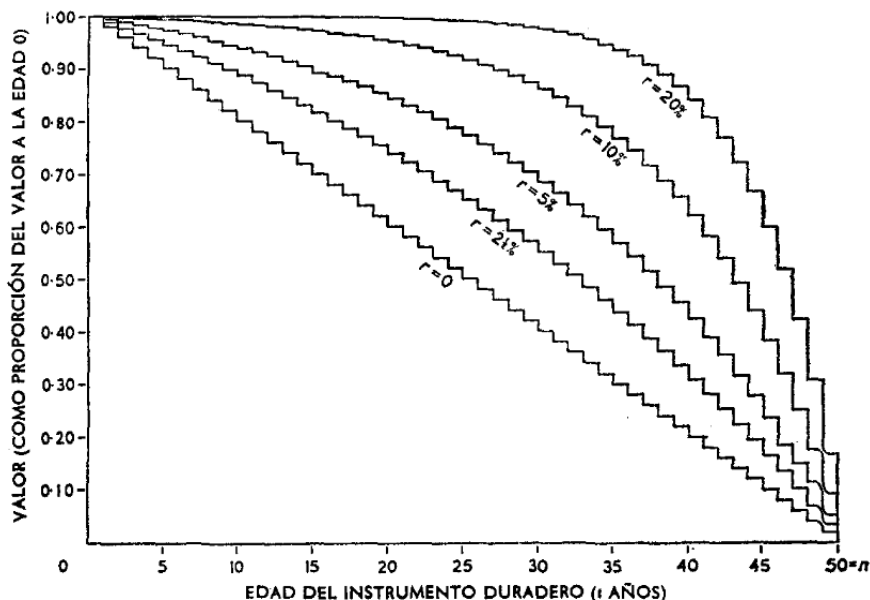
El crecimiento máximo es un comportamiento muy peculiar, y a primera vista puede resultar poco claro que tenga algo que ver con la realidad en la que vivimos. No parece que algo tan simple pueda decirnos cosas importantes, que tengan que ver con los hechos. Pero a veces las apariencias engañan.

En el modelo, tal como lo hemos descrito, no hemos supuesto nada sobre los precios (de hecho, no los hemos mencionado), y no hemos supuesto tampoco que los procesos que operan tengan que ser los más rentables. Pero veremos que se puede demostrar que, para que un crecimiento sea el máximo, es necesario desde el punto de vista lógico que existan unos números que cumplen las propiedades de los precios, y que se satisfagan unas condiciones que implican la ley de la rentabilidad. Así que los precios y la ley de la rentabilidad son una necesidad lógica en el modelo. No tenemos que suponerlos porque, suponiendo el crecimiento máximo, tenemos como consecuencia lógica los precios y la ley de la rentabilidad.

Pero tenemos mucho más, porque a partir del desarrollo del modelo se pueden demostrar muchas otras propiedades que sabemos que se cumplen en la realidad, como la ley del interés compuesto (los precios decrecen geométricamente en el tiempo), las fórmulas de depreciación de los bienes duraderos, el precio de la tierra como su renta perpetua, la distribución espacial de la producción y los transportes, el precio de las materias que hay que eliminar con costes, y muchas otras propiedades.

Esto puede parecer bastante impresionante: sólo suponiendo el crecimiento máximo podemos explicar todo eso, y así dar un contraste empírico con la realidad. Pero no debemos dejarnos impresionar demasiado. Hay que advertir ya que el modelo sólo puede usarse como primera una aproximación muy grosera de los capitalismos, sólo como un primer acercamiento. No obstante, antes de entrar a explicar las muchas diferencias entre modelo y realidad, vamos a detallar un ejemplo del parecido.

Alguna de las propiedades que se observan en la realidad, y que se cumplen en el modelo, tiene una expresión matemática que dista de ser sencilla, como las fórmulas de depreciación. Por ejemplo, representaremos la fórmula del precio para cualquier edad de una materia duradera con eficiencia constante, en el caso de que la vida máxima sea de 50 años, y para diversos tipos de interés<sup>1</sup>



Desde luego, la fórmula no es simple. Sin embargo éste resulta ser el precio de las materias duraderas con eficiencia constante en el modelo. Pero no porque la hayamos supuesto, o porque la hayamos introducido desde fuera en el modelo, sino porque cuando resolvemos las ecuaciones del modelo con materias duraderas éste resulta ser su precio; así, sin ningún supuesto *ad hoc* añadido. Esta fórmula simplemente es una necesidad lógica del crecimiento máximo. Además el modelo no sólo explica esta fórmula concreta, sino también los precios de las que tienen eficiencia no constante, los precios de las materias con depreciación “radioactiva o por evaporación”, y en general todas las fórmulas de depreciación.

Está claro que estas coincidencias solo pueden explicarse a partir de un parecido profundo entre modelo y realidad. Este parecido nos da la oportunidad de analizar la realidad a través del modelo, por ejemplo para entender los precios y las contabilidades en la realidad a partir del papel que juegan en el modelo. Porque estudiando el modelo estamos estudiando indirectamente la realidad.

### 1.3. Diferencias entre el modelo y la realidad

Pero también están claras las grandes distancias entre los capitalismos y el modelo.

<sup>1</sup> Para los interesados en el cálculo mercantil, la fórmula resulta

$$y_t = \frac{(1+r)^n - (1+r)^t}{(1+r)^n - 1} y_0$$

donde  $y_t$  es el precio del bien a la edad  $t$ ,  $y_0$  el precio cuando el bien es nuevo,  $r$  el tipo de interés, y  $n$  la vida máxima del bien. El gráfico está extraído de Sraffa, página 102, quién deduce esta fórmula en sus ecuaciones, que son un caso particular de VN, como veremos.

En el modelo se supone un crecimiento proporcional. Es evidente que en los capitalismos esto no es lo que se observa, y que en la realidad hay crisis, caos, desproporciones.

El modelo supone implícitamente que los bienes o materias son perfectamente divisibles. Pero en la realidad muchas cosas no son divisibles en absoluto.

El modelo supone que hay rendimientos constantes a escala. Pero en la realidad también hay rendimientos crecientes o decrecientes.

El modelo supone que los procesos no cambian su estructura interna, y que por ejemplo no hay progreso técnico. En la realidad es muy evidente la importancia del progreso técnico.

El modelo supone que el crecimiento del sistema no choca nunca con las limitaciones que le impone el entorno. Pero los capitalismos reales no pueden evitar esas barreras.

El modelo supone que toda la asignación se establece con el fin de maximizar el crecimiento. Pero en los capitalismos reales, por lo menos en algunos países, una parte de la asignación no tiene ese fin, como la asignación familiar o los “estados de bienestar”.

Estas limitaciones y distancias con la realidad son todas el resultado de la simplificación extrema con las que hemos construido el modelo.

Pero incluso el modelo tiene lo que podríamos llamar limitaciones internas, como a la hora de tratar la tierra cuando es “escasa”, cuando no puede incorporarse del entorno. Entonces la cantidad de tierra no podrá crecer proporcionalmente, y la solución del modelo ya no se parece a los capitalismos reales.

Hemos detallado solo algunas de las limitaciones más llamativas. Por supuesto, todos los modelos tienen limitaciones, y si no tuvieran limitaciones no serían modelos. Pero debemos ser muy conscientes y subrayar que Von Neumann también las tiene. Por todo ello el modelo sólo puede considerarse una primera aproximación grosera, y no una teoría precisa del comportamiento del capitalismo.

#### **1.4. Un mundo cruel, pero no tanto**

Los modelos económicos tienen la mala fama de ser idealizaciones de la realidad, no por ser abstracciones sino por parecer ensoñaciones. Algunos modelos realmente parecen sueños o utopías matemáticas salidas de la cabeza de algún iluso.

VN en su formulación original, en cambio, no describe ningún sueño ni ninguna utopía, sino más bien una pesadilla y una distopía, un mundo cruel y despiadado en donde todo está subordinado al beneficio sin ninguna otra consideración. De hecho, un mundo bastante más cruel y despiadado que la economía real en la que vivimos, por lo menos en algunos países. Porque en algunos países los capitalismos no son lo que podríamos llamar “capitalismos salvajes” o “capitalismos puros”, sino que han sido matizados por instituciones como “el estado de bienestar”, la familia, el sistema político y legal, etc. En su formulación original, tal como lo escribió John von Neumann, sin embargo, VN

describe un capitalismo puro y duro, sin ningún matiz, un totalitarismo radical del beneficio.

Por ejemplo, en su formulación original, en VN las personas son tratadas como cualesquiera otros insumos. Por supuesto, se puede pensar que eso también es así en los capitalismos reales, porque el empresario, que es quién decide la asignación, trata al empleado en la misma consideración que a cualquier otro insumo, sólo en tanto en cuanto produce un beneficio. Pero, por lo menos en algunos países, en los capitalismos hay leyes laborales, hay vacaciones pagadas, hay pensiones de invalidez. Los capitalismos reales no son capitalismos salvajes, ni los asalariados están sometidos a la categoría de animales de trabajo. VN en su formulación original, tal como lo redactó John von Neumann, sí es un capitalismo salvaje.

No obstante, podemos modificar fácilmente el modelo para tener en cuenta la humanización de la asignación que incorpora la asignación familiar o el “estado de bienestar”. Además hay capitalismos y capitalismos. Algunos desgraciadamente se parecen más a VN que aquellos en los que hay un “estado de bienestar” arraigado, o instituciones que humanizan la asignación en alguna medida.

Pero desde el estudio de VN no se puede defender una visión optimista del funcionamiento del capitalismo “puro”, sin la presencia de esas instituciones que humanicen parcialmente la asignación. En VN no establece la asignación para atender las necesidades de la gente, sino sólo para maximizar el beneficio. En un sistema así el ser humano es sólo un insumo, un medio de producción, hasta el punto que podemos imaginar una economía automática, con toda la producción robotizada, y con una solución para VN perfectamente válida. En definitiva, la dinámica de VN, la del capitalismo “puro”, subordina al ser humano a la categoría de insumo.

En cualquier caso, desde el estudio VN también hay que señalar que los capitalismos, “puros” o “humanizados”, ciertamente consiguen algo muy difícil, que es establecer una asignación medianamente coherente, y éste no es un mérito pequeño. Más adelante insistiremos en este punto, tan importante.

## **1.5. Más allá de Von Neumann**

VN incluye como casos particulares las matrices input-output de Leontief, las ecuaciones de Sraffa, la Teoría de Juegos, las matrices de Leslie, y otros modelos que han demostrado tener gran utilidad. Pero VN es más general, y puede tratar situaciones que no pueden ser estudiadas por esos modelos, por lo menos no de manera rigurosa. Por eso VN puede usarse para estudiar esos aspectos, que escapan a la formulación original de esos modelos.

Por ejemplo, VN tiene como caso particular las matrices input-output. Pero con estas matrices no hay una manera rigurosa de tratar los diferentes tiempos de producción. Pueden hacerse “trucos” para intentar atacar el problema, pero no se puede resolver de manera rigurosa por las limitaciones propias de esas matrices. Sin embargo, con VN sí se pueden tratar de manera plenamente rigurosa los tiempos de producción distintos en cada proceso. En definitiva, si pretendemos trabajar de manera rigurosa con matrices IO, teniendo en cuenta los tiempos de producción, tenemos que hacerlo con VN.



No obstante, la gran virtud del modelo no es que sirva de generalización o mejora de otros modelos anteriores, sino que es un fundamento firme para desarrollos a realizar en el futuro. Y aquí tenemos que diferenciar entre dos tipos de desarrollos posibles.

Por una parte, están lo que podríamos describir como desarrollos “internos”, los que suponen una generalización del propio modelo pero conservando sus características más importantes. Algunos de esos desarrollos se describen en este trabajo.

Mucho más importante son los desarrollos “externos” al modelo, el desarrollo de otros modelos que superan la formulación matemática de VN, aunque tomándolo como referencia o como caso particular. Sin duda, cabe esperar en este aspecto una mejora sustancial de nuestra comprensión de la realidad, porque esos modelos superarán algunas de las limitaciones intrínsecas de VN. Pero en ese avance VN será de gran ayuda, porque es una teoría firme, coherente y sin fallas lógicas. Y es esa firmeza y coherencia la que garantiza que lo que se construya a partir de él no se derrumbe con facilidad. Cabe esperar que esos modelos futuros, que serán mucho mejores que VN, incluyan a VN como caso particular, al igual que VN incluye como caso particular a las matrices input-output de Leontief o a las ecuaciones de Sraffa. Esto, sin duda, es lo mejor que puede ofrecer el modelo: sus desarrollos a partir del mismo.

No obstante el vínculo de VN con otros modelos anteriores, los desarrollos “internos” del propio modelo y los desarrollos “externos” superando al modelo, puede explicarse mucho mejor una vez que hayamos realizado su planteamiento matemático, y por eso dejamos su tratamiento para capítulos posteriores de este escrito.

## ***2. Para qué estudiar los algoritmos***

Pudiera parecer que estudiar unos algoritmos para un problema matemático, VN u otro cualquiera, es una cuestión puramente técnica, que solo resulta útil si se necesita encontrar la solución del problema. Vamos a señalar porque éste no es el caso.

### **2.1. Para resolver el modelo**

Por supuesto, los algoritmos muy a menudo nos permiten resolver VN. Veremos que, de hecho, nos permitirán encontrar todas las soluciones del problema si éste no es muy grande; incluso de manera exacta bajo determinadas condiciones. Y esto sin duda resultará muy útil al investigador teórico, porque encontrar las soluciones de VN no es en general algo fácil.

También resultará útil encontrar la solución de VN al investigador empírico que intenta modelizar la realidad. Hoy en día los datos de los que disponemos son muy pobres, pero es de esperar que pronto tengamos datos mucho más detallados, no sólo por la mejora de los procedimientos estadísticos, sino por la propia mejora de los instrumentos (por ejemplo, datos obtenidos de satélites). Con unos datos mucho mejores, el investigador empírico podrá modelizar la realidad de una manera mucho más fina. Y para ello necesitará algoritmos que puedan resolver problemas muy grandes.

E incluso resultará útil poder resolver VN desde el punto de vista didáctico, para que los estudiantes (y los teóricos) puedan jugar con los problemas, de manera que puedan hacerse una idea mucho más clara de su forma de operar.

Además, veremos que los algoritmos que estudiaremos nos permitirán subrayar el vínculo de VN con otros problemas matemáticos, como el problema de autovalores, los juegos, o la programación lineal. Este vínculo es muy importante, porque por ejemplo nos permite trasladar verdades que sabemos ciertas para esos problemas a VN, y por lo tanto al estudio de la economía real.

## **2.2. Para estudiar el mecanismo de asignación en la realidad**

Pero de todos los usos de los algoritmos, quizá el más interesante es la posibilidad que ofrecen de estudiar el proceso de asignación real a partir de la forma de operar de alguno de ellos.

En efecto, los mecanismos en la realidad tienen que realizar una tarea complicada, paralela a la que tienen que efectuar los algoritmos para VN: resolver el problema de la asignación en una economía. Por eso algunos algoritmos parece como si imitaran a los mecanismos reales, porque la tarea de calcular la asignación sobre el papel es paralela a la de calcular la asignación en la realidad. Los algoritmos realizan sobre el papel, o sobre los chips, una tarea similar a la que efectúan los mecanismos económicos en la realidad. Y por ello a veces los algoritmos operan imitando los mecanismos reales.

Pero esta relación que afirmamos aquí entre los algoritmos y los mecanismos reales no es original, ni exclusiva de nuestro modelo. Walras, con su famoso *tâtonnement*, ya intentó dar un algoritmo para explicar cómo se podía intentar resolver sus ecuaciones y también para ilustrar cómo funcionaba la asignación en la realidad. El algoritmo de Walras no es muy eficiente desde el punto de vista computacional, pero es una ilustración de cómo unos precios podrían llegar a coordinar las acciones de una serie de sujetos económicos.

De la misma manera, algunos de nuestros algoritmos sirven para entender cómo los mecanismos económicos reales tienden a provocar una economía parecida en alguna medida a VN, y por ello son una manera de comprender el parecido entre el modelo y los capitalismos. Si en la realidad operan mecanismos que se comportan de forma similar a ciertos algoritmos matemáticos, y si estos algoritmos matemáticos tienden a encontrar la solución de VN, se comprende que los mecanismos reales tiendan a provocar una economía que se parece a VN. Así que podemos dar una primera explicación del parecido entre los capitalismos y VN con una razón profunda: el modelo se parece a la realidad, porque la realidad tiende a comportarse como el algoritmo para resolver el modelo.

Este parecido entre mecanismo y algoritmo hace realmente interesantes a algunos en particular, como el algoritmo que hemos llamado Simplex, o el que hemos llamado Divide et impera. Veremos que estos dos algoritmos operan de una manera que cualquier observador de los mecanismos económicos en los capitalismos identificará como familiar.

Investigando la eficiencia o la convergencia de los algoritmos estamos también investigando estos aspectos de los mecanismos reales. Aunque el parecido tenga limitaciones, la convergencia de los algoritmos tiene su paralelo con la de los mecanismos reales. Esto nos permite hacernos una idea de las principales dificultades que pueden darse con los mecanismos económicos reales, y de su influencia en fenómenos como las crisis económicas, por ejemplo.

También comprobaremos que en ellos son claves conceptos como los precios y contabilidades de la realidad. Estudiando el papel que juegan en los algoritmos comprenderemos mucho mejor el papel que juegan en la realidad.

Igualmente veremos que con alguno de ellos se comprende mejor la necesidad de atomizar la asignación en la realidad, en unidades de producción o empresas, y de un mecanismo que coordine esas unidades atomizadas, a través del mecanismo de precios.

En definitiva, estudiar los algoritmos es mucho más que analizar un método para resolver unas ecuaciones. Es una manera de estudiar indirectamente cómo funciona la realidad.

# El modelo

## 3. Planteamiento y condiciones del modelo

### 3.1. Planteamiento

El modelo económico original de John von Neumann estudia el crecimiento máximo para unas matrices de insumos y productos dadas.

Por ejemplo, supongamos que tenemos dos materias (bienes o mercancías), trigo y hierro, y tres procesos de producción. El primer proceso consume 280 arrobas de trigo y 12 toneladas de hierro para producir 575 arrobas de trigo. El segundo proceso consume 120 arrobas de trigo y 8 toneladas de hierro para producir 20 toneladas de hierro. El tercer proceso consume, como el primero, 280 arrobas de trigo y 12 toneladas de hierro, pero produce sólo 400 arrobas de trigo. Las matrices de insumos **A** y de productos **B** resultan

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 280 & 12 \\ 120 & 8 \\ 280 & 12 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 575 & 0 \\ 0 & 20 \\ 400 & 0 \end{bmatrix}$$

Resolver el modelo consiste en encontrar el número de veces que tiene que operar cada proceso, encontrar sus *intensidades*, para que la economía crezca con el mayor *factor de expansión* posible, siempre que para cada materia el consumo total no sea superior a la producción total descontando esa expansión, siempre que se cumplan los *balances materiales*.

En nuestro ejemplo, las intensidades  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  (el número de veces que opera cada proceso) no pueden ser negativas, y el factor de expansión  $\alpha$  (1 más la tasa de crecimiento o expansión) tiene que ser positivo, lo que anotaremos como

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \\ x_3 &\geq 0 \\ \alpha &> 0 \end{aligned}$$

También el consumo total tiene que ser menor o igual que la producción total, descontando la expansión de la economía, lo que puede escribirse

$$\begin{aligned} x_1 280 + x_2 120 + x_3 280 &\leq (x_1 575 + x_3 400) / \alpha \\ x_1 12 + x_2 8 + x_3 280 &\leq x_2 20 / \alpha \end{aligned}$$

que con palabras significa

$$\begin{aligned} \text{consumo total de trigo} &\leq \text{producción total de trigo} / \text{factor de expansión} \\ \text{consumo total de hierro} &\leq \text{producción total de hierro} / \text{factor de expansión} \end{aligned}$$

Si se cumplen estas condiciones para unos  $\alpha$ ,  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  entonces es posible un crecimiento proporcional, la economía se puede expandir con ese factor  $\alpha$ .

De todos los factores de expansión e intensidades que cumplan estas condiciones (por lo tanto, para los que existe un crecimiento proporcional) buscamos aquellos con los que el factor de expansión es mayor. Esto podemos escribirlo, reordenando un poco, como

$$\begin{aligned} & \max_{\alpha, x_1, x_2, x_3} \alpha \\ & -(x_1 280 + x_2 120 + x_3 280) + (x_1 575 + x_3 400) / \alpha \geq 0 \\ & -(x_1 12 + x_2 8 + x_3 280) + x_2 20 / \alpha \geq 0 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \\ & \alpha > 0 \end{aligned}$$

En notación abreviada o matricial nos queda

$$\begin{aligned} & \max_{\alpha, \mathbf{X}} \alpha \\ & \mathbf{X}(-\mathbf{A} + \mathbf{B} / \alpha) \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{X} \geq \mathbf{0} \\ & \alpha > 0 \end{aligned}$$

### 3.2. Condiciones de máximo

VN es un problema de maximización restringida, donde el objetivo es el factor de expansión  $\alpha$  y las restricciones los balances materiales  $\mathbf{X}(-\mathbf{A} + \mathbf{B} / \alpha)$ . Para estudiar este problema, usaremos el *método de Lagrange*, que es un procedimiento estándar en estos casos. El lagrangiano queda

$$L = \alpha + \mathbf{X}(-\mathbf{A} + \mathbf{B} / \alpha)\mathbf{Y}$$

donde  $\mathbf{Y}$  son los multiplicadores de Lagrange correspondientes a cada restricción. Hay un multiplicador de Lagrange por cada restricción, por cada balance material, y por lo tanto por cada materia.

Para que los problemas de maximización restringida con variables no negativas tengan solución (y si se cumplen ciertas condiciones de regularidad, que no vamos a detallar aquí) es necesario que las derivadas del lagrangiano con respecto a las variables positivas sean iguales a 0, y que las derivadas del lagrangiano con respecto a las variables nulas sean iguales o menores que 0. Por lo tanto, como la derivada del lagrangiano con respecto a la intensidad del proceso  $i$  resulta

$$\frac{dL}{dx_i} = (-\mathbf{A}_{i,*} + \mathbf{B}_{i,*} / \alpha)\mathbf{Y}$$

donde  $\mathbf{A}_{i,*}$  y  $\mathbf{B}_{i,*}$  son los insumos y productos del proceso  $i$ , nos queda

$$\text{para las } x_i > 0, \text{ para los procesos que operan, } (-\mathbf{A}_{i,*} + \mathbf{B}_{i,*} / \alpha)\mathbf{Y} = \mathbf{0}$$

$$\text{para las } x_i = 0, \text{ para los procesos que no operan, } (-\mathbf{A}_{i,*} + \mathbf{B}_{i,*} / \alpha)\mathbf{Y} \leq \mathbf{0}$$

También derivando el lagrangiano con respecto al factor de expansión, tenemos

$$\frac{dL}{d\alpha} = 1 + \mathbf{X}(-\mathbf{B} / \alpha^2)\mathbf{Y} = 0$$

### 3.3. Precios y ley de la rentabilidad

Si interpretamos los multiplicadores de Lagrange  $\mathbf{Y}$  como *precios*,  $-\mathbf{A} \mathbf{Y}$  son los precios de los insumos o costes, y  $\mathbf{B} \mathbf{Y} / \alpha$  son los precios de los productos actualizados o ingresos actualizados. Por lo tanto  $(-\mathbf{A} + \mathbf{B} / \alpha)\mathbf{Y} = -\mathbf{A} \mathbf{Y} + \mathbf{B} \mathbf{Y} / \alpha$  son los beneficios

actualizados, a los que llamaremos también *balances contables*. En definitiva, las condiciones de máximo que se corresponden a las intensidades determinan que para los procesos que operan los beneficios actualizados se anulen, y para los procesos que no operan los beneficios actualizados se anulen o sean negativos; en el modelo se cumple la *ley de la rentabilidad*.

Vemos pues que en el crecimiento máximo están implícitos los precios, como multiplicadores de Lagrange, y las contabilidades, como condiciones de máximo. Pero no porque los hayamos supuesto, sino como una necesidad lógica.

Además se puede demostrar que los  $\mathbf{Y}$  además cumplen muchas otras propiedades vinculadas a los precios, como por ejemplo la ley del interés compuesto, las leyes de depreciación de las materias duraderas, o la ley del precio de la tierra como su renta perpetua.

Pero hay que subrayar en que el modelo no supone ninguna de estas leyes, y de hecho tampoco supone que se cumpla la ley de la rentabilidad y ni siquiera que existan los precios. Simplemente los multiplicadores de Lagrange  $\mathbf{Y}$  del problema, interpretados como precios, cumplen todas estas leyes que muchos economistas señalaron que se cumplen de manera tendencial en los capitalismo reales.

Ese parecido entre los multiplicadores de Lagrange del modelo y los precios de la realidad y entre las condiciones de máximo y las contabilidades no puede ser una casualidad. Que los precios y la ley de la rentabilidad sean unas consecuencias lógicas del modelo, sin que tengamos que suponerlos, es una prueba clara de que éste se parece en muchos sentidos a los capitalismo reales. Esto nos indica un camino para entender el papel que juegan los precios y las contabilidades en la realidad, estudiando el papel que juegan en el modelo.

### **3.3.1. Condiciones de máximo y multiplicadores de Lagrange**

Como hemos señalado los multiplicadores de Lagrange del modelo admiten la interpretación de precios y las condiciones de máximo la de contabilidades.

En todos los problemas de maximización restringida el multiplicador de Lagrange que se corresponde a una restricción es la tasa a la que se modifica la función objetivo en el máximo ante una “pequeña” (infinitésima) variación en esa restricción.

En nuestro caso la función objetivo es el factor de expansión  $\alpha$ , las restricciones los balances materiales, y una “pequeña” variación en un balance material es equivalente a suponer que introducimos en el sistema una “pequeña” cantidad de la materia correspondiente. Por lo tanto, el multiplicador de Lagrange correspondiente al balance material de la materia  $j$ , el precio  $y_j$ , es la tasa a la que aumentaría el factor de expansión  $\alpha$  si introdujéramos en el sistema una “pequeña” cantidad de la materia  $j$  (creciendo en el tiempo, como el resto de la economía). El precio es la tasa a la que aumentaría el factor de expansión si introdujéramos en el sistema una “pequeña” cantidad de la materia correspondiente.

En todos los problemas de maximización restringida la condición de máximo es la tasa a la que aumenta la función objetivo ante una pequeña variación en la variable correspondiente.

En nuestro caso las variables son las intensidades con las que operan los procesos  $x_i$  (además del factor de expansión), y la condición de máximo es el balance contable. Por lo tanto el balance contable es la tasa a la que aumentaría el factor de expansión ante una variación de la intensidad correspondiente. Por eso el balance contable de un proceso que opera debe ser 0, porque si fuera positivo podríamos aumentar el crecimiento aumentando su intensidad, y si fuera negativo reduciéndola. Y el balance contable de un proceso que no opera debe ser no-positivo, porque si fuera positivo podríamos aumentar el factor de expansión aumentando su intensidad; pero puede ser 0 o negativo, porque no podemos reducir más una intensidad que ya es nula.

### 3.4. Dualidad

El modelo tal como lo hemos planteado es el estudio del crecimiento proporcional máximo. Pero ya John von Neumann explicó que a este modelo, que llamaremos *primal*, le corresponde otro, su *dual*, que puede interpretarse como el cálculo de los precios para los que existe el menor *factor de interés* de manera que se cumpla la ley de la rentabilidad. El primal es lo que conocemos como un problema de asignación, y el dual un problema de valoración. Ambos problemas se implican mutuamente, de manera que de la solución de uno de ellos podemos obtener la del otro.

El dual nos queda

$$\begin{aligned} \min_{\alpha, \mathbf{Y}} \alpha \\ (-\mathbf{A} + \mathbf{B} / \alpha) \mathbf{Y} \leq \mathbf{0} \\ \mathbf{Y} \geq \mathbf{0} \\ \alpha > 0 \end{aligned}$$

que significa que buscamos los precios con el mínimo factor de interés (1 más el tipo de interés), que anotamos también como  $\alpha$ , de manera que se cumplan los balances contables (la ley de la rentabilidad), con precios no negativos y factor de interés positivo.

El lagrangiano del dual resulta ser el mismo que el del primal,

$$L = \alpha + \mathbf{X}(-\mathbf{A} + \mathbf{B} / \alpha) \mathbf{Y}$$

Para que los problemas de minimización restringida con variables no negativas tengan solución, y si se cumplen ciertas condiciones de regularidad, es necesario que las derivadas del lagrangiano con respecto a las variables positivas sean iguales a 0, y que las derivadas del lagrangiano con respecto a las variables nulas sean iguales o mayores o iguales que 0. Por lo tanto, como la derivada del lagrangiano con respecto al precio de la materia  $j$  resulta

$$\frac{dL}{dy_j} = \mathbf{X}(-\mathbf{A}_{*,j} + \mathbf{B}_{*,j} / \alpha)$$

donde  $\mathbf{A}_{*,j}$  y  $\mathbf{B}_{*,j}$  son los consumos y producciones de la materia  $j$  para cada proceso, nos queda

$$\text{para los } y_j > 0, \text{ para los precios positivos, } \mathbf{X}(-\mathbf{A}_{*,j} + \mathbf{B}_{*,j} / \alpha) = \mathbf{0}$$

$$\text{para las } y_j = 0, \text{ para los precios nulos, } \mathbf{X}(-\mathbf{A}_{*,j} + \mathbf{B}_{*,j} / \alpha) \geq \mathbf{0}$$

En definitiva, para las materias con precio positivo los balances materiales se cumplen como igualdades, y para las materias con precio nulo los balances materiales se cumplen como desigualdades.

Derivando el lagrangiano con respecto al factor de expansión, tenemos, como en el primal,

$$\frac{dL}{d\alpha} = 1 + \mathbf{X}(-\mathbf{B} / \alpha^2)\mathbf{Y} = 0$$

Por lo tanto, ambos problemas, el primal y el dual, se implican mutuamente. En el problema de asignación, o primal, tenemos que:

- a las variables intensidades les corresponden como condiciones de máximo los balances contables,
- a las restricciones balances materiales les corresponden como multiplicadores de Lagrange los precios.

Vemos que en el problema de valoración, o dual, nos queda:

- a las variables precios les corresponden como condiciones de mínimo los balances materiales,
- a las restricciones balances contables les corresponden como multiplicadores de Lagrange las intensidades.

El primal tiene como multiplicadores de Lagrange y condiciones las variables y restricciones del dual, y viceversa. Además el máximo factor de expansión es igual al mínimo factor de interés.

La dualidad es una propiedad que también muestran otros problemas, además de VN, como los programas lineales o la Teoría de juegos.

### 3.5. Ejemplo

Este trabajo tiene como uno de sus fines primordiales describir algoritmos para computar el modelo, para resolverlo. No obstante, adelantaremos ya la solución de nuestro ejemplo, sin explicar por ahora cómo la hemos encontrado.

Nuestras matrices son

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 280 & 12 \\ 120 & 8 \\ 280 & 12 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 575 & 0 \\ 0 & 20 \\ 400 & 0 \end{bmatrix}$$

El problema queda

$$\begin{aligned} & \max_{\alpha, x_1, x_2, x_3} \alpha \\ & -(x_1 280 + x_2 120 + x_3 280) + (x_1 575 + x_3 400) / \alpha \geq 0 \\ & -(x_1 12 + x_2 8 + x_3 280) + (x_2 20) / \alpha \geq 0 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \\ & \alpha > 0 \end{aligned}$$

que significa:

buscamos las intensidades con el mayor factor de expansión,



de manera que se cumpla el balance material actualizado para el trigo, y que se cumpla el balance material actualizado para el hierro, siempre que las intensidades de los procesos no sean negativas y siempre que el factor de expansión sea positivo.

Las condiciones de máximo resultan:

$$\begin{aligned}
 -280y_1 - 12y_2 + (575y_1)/\alpha &\leq 0, & \text{si } x_1 > 0 \text{ se aplica} = \\
 -120y_1 - 8y_2 + (20y_2)/\alpha &\leq 0, & \text{si } x_2 > 0 \text{ se aplica} = \\
 -280y_1 - 12y_2 + (400y_1)/\alpha &\leq 0, & \text{si } x_3 > 0 \text{ se aplica} = \\
 1 - (x_1 575y_1 + x_2 20y_2 + x_3 400y_1)/\alpha^2 &= 0 \\
 y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \\
 \alpha > 0
 \end{aligned}$$

Interpretando los multiplicadores de Lagrange como precios, significan:

El beneficio actualizado del proceso 1° es menor o igual a 0, y si opera es igual,  
 El beneficio actualizado del proceso 2° es menor o igual a 0, y si opera es igual,  
 El beneficio actualizado del proceso 3° es menor o igual a 0, y si opera es igual,  
 1 menos el precio total de los productos entre  $\alpha^2$  es igual a 0,  
 los precios del trigo y del hierro no son negativos,  
 y el factor de interés debe ser positivo.

Para que exista una solución de VN tienen que cumplirse las restricciones y las condiciones de máximo.

La solución resulta con un factor de expansión  $\alpha = 1.25$ , por lo que la economía crece un 25% en cada paso temporal. Las intensidades de los procesos son  $\mathbf{X} = [4, 6, 0]$ , el primer proceso opera 4 veces, el segundo proceso 6 veces, y el tercer proceso no opera. Los precios son  $\mathbf{Y} = [1/2624, 15/2624]$ , una tonelada de hierro vale lo que 15 arrobas de trigo. (Si multiplicáramos las intensidades y dividiéramos los precios por un número positivo cualquiera, las ecuaciones también se cumplirían.)

Vemos que el consumo total resulta  $\mathbf{X} \mathbf{A} = [1840, 96]$ , que no supera la producción actualizada total,  $\mathbf{X} \mathbf{B} / \alpha = [2300, 120] / 1.25 = [1840, 96]$ , se cumplen los balances materiales  $\mathbf{X}(-\mathbf{A} + \mathbf{B} / \alpha) = [0,0]$ .

Los costes de los procesos resultan  $-\mathbf{A} \mathbf{Y} = - [460/2624, 240/2624, 460/2624]$ , los ingresos actualizados  $\mathbf{B} \mathbf{Y} / \alpha = [460/2624, 240/2624, 320/2624]$ , y por lo tanto los beneficios actualizados de los procesos quedan  $(-\mathbf{A} + \mathbf{B} / \alpha) \mathbf{Y} = [0, 0, -60/2624]$ . Como vemos, los dos primeros procesos operan y por eso obtienen beneficios actualizados nulos, mientras que el tercer proceso no opera porque obtendría beneficios actualizados negativos; se cumplen los balances contables o ley de la rentabilidad.

También se cumple que la derivada con respecto al factor sea cero,  $1 - \mathbf{X} (\mathbf{B} / \alpha^2) \mathbf{Y} = 0$ .

La evolución del sistema en el tiempo resulta (las intensidades crecen con el factor de expansión en el tiempo, mientras que los precios decrecen con ese mismo factor):

| Tiempo $t$ | Intensidades $\mathbf{X}_t$ | Precios $\mathbf{Y}_t$ |
|------------|-----------------------------|------------------------|
| ...        | ...                         | ...                    |
| -2         | [2.56, 3.84, 0]             | [0.000595, 0.008932]   |
| -1         | [3.2, 4.8, 0]               | [0.000476, 0.007146]   |
| 0          | [4, 6, 0]                   | [0.000381, 0.005716]   |
| 1          | [5, 7.5, 0]                 | [0.000305, 0.004573]   |
| 2          | [6.25, 9.375, 0]            | [0.000244, 0.003659]   |
| ...        | ...                         | ...                    |

## 4. Relación con otros modelos

El modelo de John Von Neumann incluye como casos particulares otros modelos y teorías. Aquí apuntaremos alguna de esas relaciones.

### 4.1. Matrices IO de Leontief

VN incluye como caso particular el modelo cerrado de Leontief. Para resolver éste modelo con VN tenemos que escribir en  $\mathbf{A}$  la matriz de insumos (con la salvedad de que Leontief escribe los procesos en columnas, y no en filas como Von Neumann), y en  $\mathbf{B}$  una matriz identidad. Las ecuaciones de Leontief para el caso cerrado son

$$\mathbf{X} \mathbf{A} = \mathbf{X}$$

$$\mathbf{A} \mathbf{Y} = \mathbf{Y}$$

donde la primera expresión significa que el consumo total de cada materia es igual a su producción, y la segunda expresión significa que los costes totales de cada proceso son iguales a los ingresos. La solución de estas ecuaciones es la del modelo Von Neumann, resultando el factor de expansión igual a 1.

La gran ventaja de VN sobre las matrices IO es que puede tratar la producción conjunta (con la inclusión de la matriz de productos  $\mathbf{B}$ ), la selección de técnicas (con matrices rectangulares), las materias y los procesos duraderos, etc.

Se ha pretendido en ocasiones tratar estos aspectos con las matrices IO sin recurrir a VN, pero para ello se usan “trucos” que no son rigurosos. Un planteamiento verdaderamente riguroso de estas cuestiones implica usar VN.

### 4.2. Ecuaciones de Sraffa

Las ecuaciones de Sraffa pueden escribirse, bajo producción conjunta,

$$\mathbf{A} \mathbf{Y} (1+g) = \mathbf{B} \mathbf{Y}$$

donde  $g$  es la tasa de ganancia. Significan que los costes multiplicados por 1 más la tasa de ganancia son iguales a los ingresos.

Estas ecuaciones son equivalentes a las condiciones de máximo de VN para los procesos que operan, en donde  $(1+g) = \alpha$ . En definitiva, los precios de Sraffa son idénticos a los de VN, y la tasa de ganancia de Sraffa más 1 es el factor de expansión de Von Neumann.

Pero la gran ventaja de VN sobre Sraffa es que con VN podemos estudiar también la asignación, las intensidades con las que operan los procesos, además de poder tratar de una manera directa la selección de técnicas y otros aspectos como los procesos duraderos.

En realidad algunos de estos desarrollos están de alguna manera implícitos en Sraffa. Por ejemplo, Sraffa no estudia las intensidades ni los balances materiales, pero sí estudia la “mercancía patrón” (aunque no vamos a entrar en explicar este concepto). Las ecuaciones para calcular la composición de esta mercancía patrón, el sistema patrón, pueden escribirse

$$\mathbf{X A} (1+R) = \mathbf{X B}$$

que son equivalentes a las ecuaciones de balance material de VN, en el caso cuadrado, y en donde de nuevo  $(1+R) = \alpha$ . Los “multiplicadores del sistema patrón” (que tampoco vamos a explicar) son las intensidades de VN.

Igualmente, Sraffa ya trató las materias duraderas de una manera similar a cómo se hace en el artículo original de Von Neumann (o cómo la trataron los clásicos desde Torrens).

Después veremos que el algoritmo de los autovalores para VN lo que hace es aplicar estas ecuaciones a todas las combinaciones cuadradas de procesos posibles. También en Sraffa se encuentran sugerencias, por ejemplo a la hora de tratar el desplazamiento de los métodos de producción, que apuntan a algoritmos como el Simplex.

### 4.3. Matrices de Leslie

En las matrices de Leslie se estudian las poblaciones (a menudo sólo las hembras) detallándolas por edades. Por ejemplo, para una población dividida en seis edades tenemos

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 \\ s_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_4 & 0 \end{bmatrix}$$

donde  $r_i$  es el número de hijos que tiene cada edad  $i$ , o tasa de reproducción, y  $s_i$  es el número de supervivientes en cada edad  $i$ , o tasa de supervivencia.

Las matrices de Leslie permiten estudiar la evolución de una población, teniendo en cuenta su estructura de edades. Así si escribimos la población por edades en un determinado instante 0 en un vector  $\mathbf{n}_0$ , la población en el instante siguiente  $\mathbf{n}_1$  será  $\mathbf{L n}_0$ . Por esto mismo la población en un instante cualquiera  $t$  será

$$\mathbf{n}_t = \mathbf{L}^t \mathbf{n}_0.$$

Una población sometida a una matriz de Leslie convergerá en el tiempo a una estructura por edades relativa constante, si dos tasas de reproducción consecutivas son mayores que 0 y si las tasas de supervivencia son mayores que 0.

La estructura de esa población estable podemos calcularla resolviendo VN, sin más que escribir en la matriz  $\mathbf{A}$  una matriz identidad, y en la matriz  $\mathbf{B}$  la traspuesta de  $\mathbf{L}$ . Las intensidades de VN se corresponden a la estructura de la población estable, el factor de expansión de VN nos informa de la tasa de crecimiento de esa población, y los precios de VN son lo que demógrafos, ecólogos y biólogos llaman valores-reproductivos, aunque no nos detendremos a explicar este concepto ahora (pero sí haremos notar que la categoría valor puede tener sentido incluso allí donde no hay intercambios de ninguna clase).

## 4.4. Teoría de juegos

John von Neumann fue, por supuesto, el creador de la Teoría de Juegos, en gran medida fundamentada por él, y ya indicó la relación de su modelo con esta teoría.

Así, en una nota al pie de la página 5 de su artículo original, Von Neumann señala este vínculo, e incluso indica una manera de resolver un juego usando VN: escribiendo la matriz **A** con todos los elementos iguales a 1, y la matriz **B** como la matriz de pagos de un juego, la solución del modelo es la solución del juego, de manera que  $\alpha$  es el valor del juego (prescindiremos de la no negatividad del factor al resolver VN), y **X** e **Y** son las estrategias de cada uno de los jugadores. En definitiva, podemos calcular con VN la solución de un juego para una matriz de pagos.

También véase la nota de la página 154 de su “Teoría de Juegos”, escrita con Morgenstern.

Más adelante veremos que si un  $\alpha$  es solución de VN, entonces se pueden calcular las intensidades y precios correspondientes resolviendo un juego. Pero la simetría no es completa, porque no podremos resolver VN sólo con un juego, mientras que sí podemos resolver un juego con VN. En cualquier caso, veremos que los juegos son muy útiles a la hora de encontrar la solución de VN.

## 4.5. Programas lineales

Otro problema importante en Economía que es un caso particular de VN son los programas lineales. En realidad, hay un vínculo entre la Teoría de Juegos y los programas lineales, de manera que un problema puede ser resuelto con el otro. También la dualidad es una característica típica de los programas lineales o los juegos. Pero la simetría con VN tampoco es perfecta, en el sentido de que podemos resolver con VN un juego o un programa lineal, pero con estos problemas no podemos resolver directamente VN; VN incluye como casos particulares los juegos y los programas lineales, pero lo contrario no es verdad. No obstante veremos los programas lineales y los juegos (iterados, no uno sólo) sí son extremadamente útiles para resolver el modelo.

## 4.6. Otras relaciones

No queremos abrumar al lector con una lista muy grande de relaciones, pero sí apuntaremos alguna más.

John von Neumann, en la primera página de su artículo original, señala el vínculo del modelo con la Termodinámica, más en concreto el vínculo entre el factor de expansión y los potenciales termodinámicos. No vamos a entrar a profundizar en esto, porque se escapa de nuestro objetivo, pero véanse los artículos de Bródy.

También, y vinculado con lo anterior o con las matrices de Leslie, hay que señalar la relación del modelo con la teoría de Darwin. En efecto, los sistemas que han diseñados por la selección natural tienden a comportarse de acuerdo a un crecimiento máximo. Por lo tanto VN puede verse como un desarrollo de la teoría de Darwin. Pero no insistiremos en esto tampoco.

Igualmente, es importante señalar la relación del modelo con la Teoría de autómatas autoreproductivos, iniciada también por Von Neumann, que ha sido vinculada a Darwin y a la Termodinámica.

## **5. Generalizando el modelo**

Explicaremos brevemente varias generalizaremos del modelo, para poder atacar problemas más amplios. Me limito a apuntar algunas que afectan directamente al planteamiento matemático del problema y al desarrollo de los algoritmos.

Algunas de estas generalizaciones contienen como caso particular otras que exponemos más adelante; el tiempo discreto es un caso particular del tiempo continuo; los procesos sin variables internas son un caso particular los procesos con esas variables; y los procesos con variables internas en tiempo continuo contienen a todos los demás. Pero no nos limitamos a la versión más general, porque el cálculo es más sencillo con las menos generales, y eso será importante a la hora de estudiar los algoritmos.

Pero hay muchos otros aspectos que se pueden tratar para generalizar VN. Por ejemplo, puede estudiarse la manera en la que hay que tratar las materias duraderas (que nos permite deducir las leyes de depreciación), la distribución espacial (que nos permite obtener una geografía económica completa), la forma en la que hay que incorporar en el modelo los aspectos demográficos (que nos permite estudiar toda la estructura laboral), la manera en la que tratar los flujos impuestos a través de la frontera del sistema (que nos permite modelizar el estado), o como tratar la evolución cíclica de los procesos de producción (lo que nos permite tratar los ciclos diarios, anuales, etc). No haremos referencia a ninguno de estos aspectos, porque están tratados con detalle en mi tesis doctoral, y porque además pueden estudiarse sin necesidad de modificar el planteamiento matemático del modelo, tal como los desarrollamos aquí, y por lo tanto sin modificar los algoritmos.

### **5.1. Signos de los balances materiales**

En el modelo original se supone que el consumo no es superior a la producción descontando la expansión, por lo que los balances materiales  $\mathbf{X}(-\mathbf{A} + \mathbf{B}/\alpha)$  deben ser no-negativos, se cumplen como desigualdades del tipo  $\geq$ . Esto es equivalente a suponer que todas las materias (bienes o mercancías) pueden ser eliminadas de manera gratuita, que los precios no son negativos y que las materias efectivamente eliminadas tienen precio nulo.

Pero hacer este supuesto para todas las materias es muy poco realista, porque por ejemplo nos impide estudiar los procesos de eliminación de los desperdicios con costes, procesos muy importantes en las sociedades reales. Por eso nosotros escribiremos los balances materiales con igualdades, de manera que el consumo deba ser igual a la producción descontada la expansión, para poder tratar estos desperdicios con costes. Con el modelo original no podemos estudiar esa cuestión.

Al escribir los balances materiales con igualdades nos encontramos con que algunos precios pueden ser negativos, como los de las materias que efectivamente hay que eliminar con costes. Pero esto es exactamente lo que ocurre en los capitalismos reales. En efecto, las basuras, los residuos radioactivos, los desperdicios que hay que eliminar

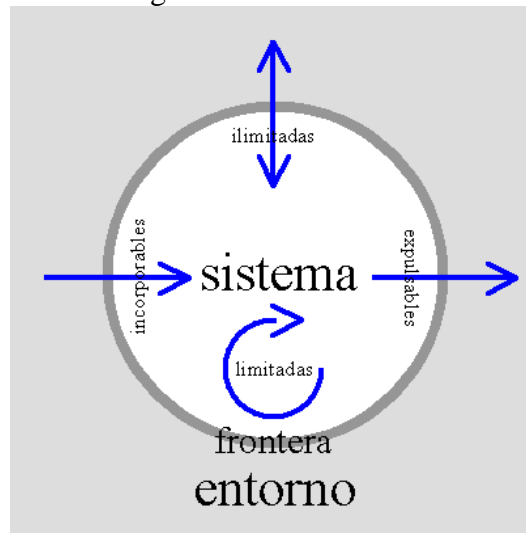
con costes, tienen en la realidad precios negativos, hay que pagar por su venta, hay que pagar a quién se haga cargo de ellos.

No obstante, escribiendo el modelo con igualdades también podemos estudiar el modelo original, simplemente incluyendo unos procesos de eliminación gratuita para cada materia, por lo que nuestro modelo con igualdades tiene al original con desigualdades como caso particular. Y entonces los precios no serán en ningún caso negativos.

De manera más general, diferenciaremos varios tipos posibles de materias, según puedan expulsarse o incorporarse del sistema al entorno:

- materias expulsables*, si pueden expulsarse desde el sistema al entorno,
- materias incorporables*, si pueden incorporarse al sistema desde el entorno,
- materias ilimitadas*, si son a la vez expulsables e incorporables,
- materias limitadas*, si no son ni expulsables ni incorporables.

Aclararemos la exposición con un gráfico



### 5.1.1. Planteamiento y condiciones de máximo

Fijémonos que podemos estudiar los cuatro casos escribiendo los balances materiales como igualdades, sin más que añadir un proceso de eliminación gratuita para cada materia expulsable, añadiendo un proceso de incorporación gratuita para cada materia incorporable, y añadiendo un proceso de incorporación gratuita y otro de eliminación gratuita para cada materia ilimitada. Por ello, y salvo que indiquemos lo contrario, en lo sucesivo trataremos en adelante con balances materiales escritos como igualdades, habiendo añadido en su caso los procesos de incorporación o eliminación gratuita que sean necesarios.

Escribiendo los procesos como igualdades, es fácil demostrar (a partir de las condiciones de máximo para los procesos de incorporación o eliminación gratuita que haya que incorporar) que una materia expulsable tendrá precio no-negativo, y si es efectivamente eliminada tendrá precio nulo; una materia incorporable tendrá precio no-positivo, y si es efectivamente incorporada precio nulo; una materia ilimitada tendrá siempre precio nulo; una materia limitada puede mostrar un precio de cualquier signo. Pero escribiendo los procesos así no necesitamos suponer que los precios obedecen algún signo, sino que los deducimos.

## 5.2. Procesos en tiempo discreto

En el modelo original tenemos sólo dos matrices, la de insumos y la de productos, donde los productos se obtienen un paso temporal después que el consumo de los insumos. Con el modelo original se puede estudiar de forma limitada una estructura temporal de un proceso más completa, con más pasos temporales, añadiendo unas materias que simbolizan la evolución del proceso en el tiempo. Pero, como además se supone implícitamente la eliminación gratuita, eso implica que los procesos pueden ser interrumpidos en cualquier instante. Y esta situación, de nuevo, es muy poco realista. Por ejemplo, la producción en una central nuclear no puede interrumpirse sin más, sino que hay que afrontar numerosos costes para su desmantelamiento.

Para tratar estos aspectos, nosotros escribiremos varias matrices:  $\mathbf{f}_0$  para el instante 0 en el que se inician los procesos,  $\mathbf{f}_1$  para el instante 1 un paso temporal después,  $\mathbf{f}_2$  para el instante 2 para el instante temporal siguiente, y así con todos los instantes temporales que necesitemos. En cada una de estas matrices puede haber consumos, que escribiremos como números negativos, y producciones, que escribiremos como números positivos, de manera que producciones y consumos pueden estar intercalados de cualquier manera.

Un ejemplo con cuatro pasos temporales sería

$$\mathbf{f}_0 = \begin{bmatrix} -280 & 0 \\ -120 & 0 \\ -280 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -12 \\ 0 & 15 \\ 400 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} 575 & 0 \\ 0 & -8 \\ 0 & -12 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El primer proceso consume 280 de trigo en el instante 0 y 12 de hierro en el instante 1 para producir 575 de trigo en el instante 2; el segundo consume 120 de trigo en el instante 0, produce 15 de hierro en el 1, consume 8 de hierro en el 2 y produce 5 de hierro en el 3; el tercero consume 280 de trigo en el 0, produce 400 de trigo en el 1 y consume 12 de hierro en el 2.

Así podemos estudiar el caso en el que los procesos no pueden ser interrumpidos con varios pasos temporales, algo que no puede hacerse con el modelo original. Y si un proceso puede ser interrumpido simplemente escribiremos, además del proceso sin interrumpir, el proceso interrumpido, por lo que también podemos estudiar esa situación.

### 5.2.1. Planteamiento y condiciones de máximo

Anotaremos la matriz de flujos actualizados de cada materia en cada proceso como  $\mathbf{F}(\alpha)$ . Los balances materiales quedan

$$\mathbf{X}\mathbf{F}(\alpha) = \mathbf{X} \left( \frac{\mathbf{f}_0}{\alpha^0} + \frac{\mathbf{f}_1}{\alpha^1} + \frac{\mathbf{f}_2}{\alpha^2} + \frac{\mathbf{f}_3}{\alpha^3} + \frac{\mathbf{f}_4}{\alpha^4} + \dots \right) = \mathbf{X} \sum_{r=0} \frac{\mathbf{f}_r}{\alpha^r}$$

El problema resulta, con los balances materiales ya con igualdades como señalamos en la sección anterior,

$$\begin{aligned} & \underset{\alpha, \mathbf{X}}{\text{Max}} \alpha \\ & \mathbf{X}\mathbf{F}(\alpha) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{X} \geq \mathbf{0} \\ & \alpha > 0 \end{aligned}$$

y las condiciones de máximo

$$\mathbf{F}(\alpha)\mathbf{Y} \leq 0, \quad \text{y si el proceso opera se aplica} =$$

$$1 + \mathbf{X} \frac{d\mathbf{F}(\alpha)}{d\alpha} \mathbf{Y} = 0$$

$\mathbf{F}(\alpha)$   $\mathbf{Y}$  siguen siendo los beneficios actualizados, por lo que sigue cumpliéndose la ley de la rentabilidad. Obviamente, las matrices de insumos y productos son un caso particular de esta forma de escribir los procesos, haciendo  $\mathbf{f}_0 = -\mathbf{A}$  y  $\mathbf{f}_1 = \mathbf{B}$ .

### 5.3. Procesos en tiempo continuo

Con el modelo original no hay forma de estudiar el caso con tiempo continuo, ni siquiera de manera limitada.

Para hacer esto, nosotros escribiremos la matriz con los flujos actualizados de cada materia en cada proceso,  $\mathbf{F}(\alpha)$ , con los flujos divididos entre el factor de expansión elevado al instante en el que se realizan.

Así para nuestro ejemplo con sólo una matriz de insumos y una matriz de productos, nuestra matriz de flujos actualizados resulta

$$\mathbf{F}(\alpha) = -\mathbf{A}/\alpha^0 + \mathbf{B}/\alpha^1 = -\mathbf{A} + \mathbf{B}/\alpha = \begin{bmatrix} -280 + 575/\alpha & -12 \\ -120 & -8 + 20/\alpha \\ -210 + 400/\alpha & -12 \end{bmatrix}$$

Si en cambio en el primer proceso la producción se efectuara en el instante 3.2652, el segundo proceso en el instante  $\sqrt{5}$ , y en el tercer proceso en el instante 6 y además con un consumo añadido de 100 arrobas de trigo en el instante 9, la matriz quedaría

$$\mathbf{F}(\alpha) = \begin{bmatrix} -280 + 575/\alpha^{3.2652} & -12 \\ -120 & -8 + 20/\alpha^{\sqrt{5}} \\ -210 + 400/\alpha^6 - 100/\alpha^9 & -12 \end{bmatrix}$$

Por supuesto, no hay dificultad en tratar cualquier otro caso, con producciones y consumos intercalados en cualquier instante, o con flujos que evolucionan de acuerdo funciones continuas dependientes del tiempo,  $\mathbf{f}(r)$ . En éste caso, los flujos actualizados resultan

$$\mathbf{F}(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{\mathbf{f}(r)}{\alpha^r} dr$$

Los balances materiales actualizados serán las intensidades por la matriz de flujos actualizados,  $\mathbf{X} \mathbf{F}(\alpha)$ . Y, obviamente, el caso en tiempo discreto es un caso particular del caso en tiempo continuo. La conveniencia de diferenciar ambos casos a la hora de resolver los modelos la explicaremos más adelante.

#### 5.3.1. Planteamiento y condiciones de máximo

Tanto el problema como las condiciones de máximo tienen la misma formulación que en tiempo discreto.



## 5.4. Procesos con variables internas

Las matrices de insumos o productos, o los procesos descritos en tiempo discreto o continuo tal como los hemos generalizado, suponen que cada proceso sólo puede operar de una manera predefinida, con unos flujos de consumo y producción internos dados.

Al hacer esto estamos suponiendo implícitamente que en la economía sólo se tiene que decidir la escala o intensidad de cada proceso. Pero en la realidad las decisiones económicas no se refieren sólo a la escala a la que tienen que operar los procesos, sino que dentro de cada proceso a menudo también hay que escoger entre muchas formas posibles de operar.

Una de las herramientas habituales en la literatura para tratar estos aspectos son las funciones de producción. Éstas describen las producciones (a veces se supone que las máximas) que se obtienen para cada combinación de insumos consumidos. No obstante las funciones de producción determinan una estructura muy limitada, por ejemplo en el plano temporal. Por eso describiremos aquí una manera más general de tratar estos aspectos, que llamaremos funciones de flujos o también variables internas. Aunque en la tesis sí se hizo referencia a las funciones de producción y a su tratamiento dentro del modelo, no se estudió esta manera más general, por lo que aquí nos detendremos un poco más.

Nosotros estudiaremos el caso en el que los procesos operan con una intensidad que crece de manera proporcional en el tiempo con el factor de expansión, como pasaba con las matrices de insumos y productos. Pero los flujos internos en el proceso, los consumos y producciones que se desarrollan desde el inicio del proceso, están determinados por unas variables internas que no cambian con el tiempo, y que también son incógnitas a establecer, junto con la intensidad del proceso.

Un ejemplo de los flujos internos de un único proceso, en tiempo continuo, sería

$$\mathbf{F}(\alpha, q_1, q_2, q_3) = \begin{bmatrix} -1 - 5q_1 + 600q_1q_2 / \alpha^{q_3} & -3q_2 / \alpha \end{bmatrix}$$

donde las variables internas son  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$ . En el proceso se consume una cantidad  $1 + 5q_1$  de la materia 1 en el instante 0, se consume  $-3q_2$  de la segunda materia en el instante 1, y se produce una cantidad  $600q_1q_2$  de la primera materia en el instante  $q_3$ . Al igual que las intensidades son no-negativas, las variables internas pueden estar delimitadas por la naturaleza del proceso, delimitaciones que serán para nosotros datos. Aquí supondremos que  $q_1$  y  $q_2$  están delimitadas al intervalo  $[0, 1]$  y  $q_3$  es mayor o igual a 4.

Otro ejemplo con varios procesos, también en tiempo continuo, sería

$$\mathbf{F}(\alpha, q_1, q_2, q_3, q_4) = \begin{bmatrix} -1 - 5q_1 + 600q_1q_2 / \alpha^{q_3} & -3q_2 / \alpha \\ -280 + 575 / \alpha & -12 \\ -120 & -8 + 20 / \alpha^{q_4} \end{bmatrix}$$

donde el primer proceso es el que vimos justo antes, el segundo proceso no tiene ninguna variable interna (es el primer proceso de las matrices de insumos y productos), y el tercer proceso tiene como variable interna  $q_4$ , el momento en el que se efectúa la producción, que está delimitado a ser mayor o igual a 2.

Obviamente, las matrices de insumos y productos, como las matrices escritas en tiempo discreto o en tiempo continuo, son casos particulares de las funciones de flujos, cuando no hay variables internas a los procesos que decidir. Y también las funciones de producción con rendimientos constantes a escala son un caso particular, aunque no nos detendremos en estudiar esto.

Los datos del modelo son las funciones de flujos para todos los procesos, junto con las correspondientes delimitaciones de las variables decisión internas. Resolver el modelo consiste en calcular las incógnitas (el factor de expansión, las intensidades de los procesos, y las variables internas de cada proceso), de manera que la economía crezca con el mayor factor de expansión.

No hay problema lógico en que alguna variable interna afecte a más de un proceso, pero eso complica la exposición, y por eso no trataremos aquí ese caso (pueden tratarse como un único proceso, añadiendo unas variables internas que multiplican los flujos de cada uno, de manera que esas variables internas no sean negativas y sumen 1).

También señalaremos que las variables internas deben cumplir ciertas condiciones. Por ejemplo, no es realista un proceso en el que algún flujo pueda llegar a ser  $\infty$  o  $-\infty$ , para una magnitud válida de las variables internas.

Aunque para abreviar la exposición nos hemos referido ya al caso más general, con tiempo continuo, resulta útil diferenciar el caso en tiempo discreto, porque facilita buscar las soluciones del modelo. Para ello usaremos unas matrices, una para cada paso temporal, que dependen de las variables internas. Los balances materiales actualizados en tiempo discreto resultan

$$\mathbf{XF}(\alpha, q_1, q_2, \dots) = \mathbf{X} \left( \frac{\mathbf{f}_0(q_1, q_2, \dots)}{\alpha^0} + \frac{\mathbf{f}_1(q_1, q_2, \dots)}{\alpha^1} + \frac{\mathbf{f}_2(q_1, q_2, \dots)}{\alpha^2} + \dots \right) = \mathbf{X} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\mathbf{f}_r(q_1, q_2, \dots)}{\alpha^r}$$

Volviendo al tiempo continuo, tampoco hay dificultad en tratar el caso en el que los flujos obedezcan una función dependiente del tiempo, de manera que

$$\mathbf{XF}(\alpha, q_1, q_2, \dots) = \mathbf{X} \int_0^{\infty} \frac{\mathbf{f}(r, q_1, q_2, \dots)}{\alpha^r} dr$$

#### **5.4.1. Planteamiento y condiciones de máximo**

El problema resulta, con variables internas, tanto en tiempo discreto como continuo,

$$\begin{aligned} & \max_{\alpha, \mathbf{X}, \mathbf{Q}} \alpha \\ & \mathbf{XF}(\alpha, \mathbf{Q}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{X} \geq \mathbf{0} \\ & \alpha > 0 \end{aligned}$$

Las  $\mathbf{Q}$  pueden estar sometidas también a unas condiciones; por ejemplo, pueden estar dentro de un intervalo definido.

Así con la matriz de nuestro ejemplo, el problema queda

$$\begin{aligned} & \max_{\alpha, x_1, x_2, x_3, q_1, q_2, q_3, q_4} \alpha \\ & x_1(-1 - 5q_1 + 600q_1q_2 / \alpha^{q_3}) + x_2(-280 + 575 / \alpha) + x_3(-120) = 0 \\ & x_1(-3q_2 / \alpha) + x_2(-12) + x_3(-8 + 20 / \alpha^{q_4}) = 0 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, q_1 \in [0,1], q_2 \in [0,1], q_3 \geq 4, q_4 \geq 2, \alpha > 0 \end{aligned}$$

Obviamente el problema con variables internas es más complicado que otros casos.

El lagrangiano resulta

$$L = \alpha + \mathbf{X}\mathbf{F}(\alpha, \mathbf{Q})\mathbf{Y}$$

Y las condiciones de máximo

$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\mathbf{X}} &= \mathbf{F}(\alpha, \mathbf{Q})\mathbf{Y} \\ \frac{dL}{d\mathbf{Q}} &= \mathbf{X} \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{Q}} \mathbf{Y} \\ \frac{dL}{d\alpha} &= 1 + \mathbf{X} \frac{d\mathbf{F}}{d\alpha} \mathbf{Y} \end{aligned}$$

Las condiciones de máximo con respecto a las intensidades siguen pudiéndose interpretar como los beneficios actualizados; los procesos que operan obtienen beneficios actualizados nulos y los que no operan beneficios actualizados no negativos, como en el caso sin variables internas.

Las condiciones de máximo con respecto a las variables internas implican una maximización de beneficio dentro de los procesos (que operan) para esas variables. En efecto, si estudiamos la maximización del beneficio para los flujos en un proceso  $i$

$$\max_{q_1, q_2, q_3, \dots} \sum_j F_{i,j}(\alpha, q_1, q_2, q_3, \dots) y_j$$

donde  $\alpha$  e  $\mathbf{Y}$  son datos, tenemos que calcular las variables internas  $q_1, q_2, q_3, \dots$  (posiblemente delimitadas) para las que los flujos actualizados ponderados en los precios, los beneficios actualizados, se maximizan.

Las condiciones de máximo para este problema son (para las variables internas que no están delimitadas)

$$\sum_j \frac{dF_{i,j}(\alpha, q_1, q_2, q_3, \dots)}{dq_i} y_j = 0$$

que, multiplicadas por la intensidad correspondiente, forman también las condiciones de máximo de VN para las variables internas. Si una variable interna está delimitada, por ejemplo a ser no negativa, la suma de las derivadas de las funciones con respecto a la variable multiplicadas por los precios debe ser no positiva si la variable interna es nula; este signo también lo tiene que cumplir la derivada del lagrangiano con respecto a la variable interna.

En definitiva, maximizar el crecimiento implica maximizar el beneficio dentro de cada proceso (que opera). Así que, para que el crecimiento del sistema sea máximo, es necesario que en la operación de cada proceso las variables internas se escojan de forma que se maximice el beneficio dentro del proceso.

Por supuesto, esto es también lo que se observa en los capitalismos, en donde las empresas maximizan internamente su beneficio. Pero fijémonos que no hemos supuesto esa maximización interna del beneficio, sino que la deducimos.

Hacemos notar que, a la hora de estudiar VN, somos “marginalistas” pero no subjetivistas. En efecto, hemos usado profusamente el cálculo diferencial, o marginal, y hemos razonado de acuerdo a ese cálculo. Pero no hemos usado “utilidades subjetivas” en nuestro razonamiento.

# Algoritmos sin variables internas

## **6. Consideraciones previas sobre los algoritmos**

VN es un problema del que, por lo menos bajo ciertas condiciones, pueden obtenerse todas las soluciones con una precisión exacta. Es importante subrayar que con la mayoría de los problemas matemáticos éste no suele ser el caso.

Pero en general sólo tendremos la seguridad de haber encontrado todas las soluciones con precisión exacta si el modelo está definido en tiempo discreto, sin variables internas, y si su tamaño no es muy grande. Que el tiempo del problema sea discreto o continuo, que los procesos estén definido con variables internas o no, o el propio tamaño del problema, determinan los algoritmos que podremos usar, y también que podamos obtener o no todas las soluciones y la precisión de éstas. Ésta es la razón por la que, al generalizar el modelo, no nos hemos limitado al caso con variables internas en tiempo continuo, que abarca los demás.

VN es un problema de maximización restringida, y obviamente también podemos intentar encontrar su solución usando algoritmos de propósito general, que han sido desarrollados con el fin de intentar resolver un problema cualquiera de ese tipo. Pero muy a menudo estos algoritmos, precisamente por su carácter no específico, sólo nos permiten atacar algunos problemas, y por eso necesitamos algoritmos específicos.

### **6.1. Tiempo discreto o continuo**

Los casos en tiempo discreto son más fáciles que en tiempo continuo, porque la solución del modelo con aquellos es equivalente a encontrar las raíces de un polinomio, como veremos, y tenemos muy buenos métodos para encontrar todas las raíces de un polinomio. Por eso con los procesos (sin variables internas) en tiempo discreto con algunos algoritmos incluso podremos estar seguros de haber calculado no ya una solución sino todas las soluciones.

Sin embargo en tiempo continuo la solución del modelo es equivalente a encontrar las raíces de una función, que no será necesariamente un polinomio, y para ese problema no tenemos un método que nos garantice encontrar todas las raíces. Por ello en este último caso generalmente no podremos estar seguros de haber encontrado todas las soluciones, o incluso de encontrar alguna, además de que el cálculo es en sí más difícil.

### **6.2. Sin variables internas o con variables internas**

Los modelos con los procesos escritos sin variables internas son más fáciles que los escritos con variables internas, porque con éstos tenemos que encontrar la solución no solo para el factor de expansión, las intensidades y los precios, sino también para las variables de decisión interna, y eso complica mucho el problema. Esta circunstancia justifica que diferenciamos los algoritmos según puedan atacar o no el problema con variables internas.

Con procesos con variables internas, aun en tiempo discreto, dependerá de cómo son las funciones en las que están definidas las variables para saber si podemos estar seguros de

haber encontrado todas las soluciones o no, pero ya avanzamos que generalmente no tendremos esa seguridad. Y el problema es sustancialmente más difícil.

Por supuesto, si el modelo no contiene variables internas también podremos usar los algoritmos para variables internas, porque con variables internas tenemos como caso particular el que no contiene variables internas. Pero el estudio de las variables internas complica en buena medida los algoritmos, y por eso para algunos hemos preferido presentar primero la versión sin esas variables.

### **6.3. Tamaño del problema**

Otro aspecto que resultará clave a la hora de escoger qué algoritmo usar es el tamaño del problema, el número de filas o procesos y el número de columnas o materias. Este tamaño determinará que podamos usar o no ciertos algoritmos, debido a que el coste computacional está muy vinculado a ese tamaño.

Si el problema además tiene variables internas, el coste computacional crece de manera muy considerable.

### **6.4. Precisión de las soluciones**

Otra consideración a tomar en cuenta previamente es el grado de precisión con el que haremos los cálculos. Con el software que acompaña este artículo, Matlab (o su clon gratuito Octave), que puede usarse en el enlace referido en la sección R.2, podremos hacer los cálculos con tres grados de precisión: doble, variable y exacta.

La precisión doble utiliza el coprocesador matemático de los ordenadores, y trabaja con aproximaciones numéricas de 16 cifras (en lo que técnicamente se conoce como formato de coma flotante de doble precisión). No obstante, los errores de redondeo harán que obtengamos soluciones que típicamente tendrán algunos decimales menos de precisión. La precisión doble es la menos exacta de las tres, pero tiene la ventaja de que con ella los cálculos son muchísimo más rápidos que con las otras. Además supone un consumo de memoria mucho menor, por lo que con ella podremos atacar problemas verdaderamente grandes.

La precisión variable usa el módulo de cálculo simbólico de Matlab (u Octave), utilizando cadenas de caracteres para representar los números con la precisión que predefinamos. Así podremos obtener la solución con números que tendrán cualquier precisión que necesitemos. Pero los cálculos en modo simbólico son mucho más lentos que en modo numérico o de doble precisión, y consumen mucha más memoria, por lo que no siempre podremos atacar problemas grandes.

La precisión exacta o infinita usa también el módulo de cálculo simbólico, pero utilizando cadenas de caracteres para representar expresiones matemáticas exactas. De esta manera la lentitud de los cálculos y el consumo de memoria serán mayores aun que en el caso con precisión variable. Pero tiene la ventaja de que la solución será exacta, una expresión matemática exacta que no contiene ningún error, por ejemplo una fracción o un radical.

Para entender bien las tres precisiones,  $\sqrt{2}$  resulta:

en precisión doble: 1.414213562373095;

en precisión variable con 32 cifras: 1.4142135623730950488016887242097;  
con precisión exacta o infinita:  $2^{1/2}$ .

Una solución exacta es de mucho interés para el investigador teórico, pero al investigador empírico a menudo le resulta más que suficiente la precisión doble.

Por otra parte, no todos los algoritmos pueden obtener soluciones exactas del modelo. Esto sólo será posible con algunos, aquellos que no supongan una aproximación sucesiva a la solución aumentando la precisión en cada iteración, sino que busquen la misma siguiendo una pauta sistemática. Además la solución exacta a menudo no será factible con tiempo continuo, y será difícil con variables internas salvo alguna excepción. Y con problemas grandes, aun en el caso de tiempo discreto sin variables internas, tampoco será factible una solución exacta o incluso con precisión variable por el gran coste computacional que supone.

En definitiva, podremos tener la seguridad de obtener todas las soluciones de forma exacta con problemas en tiempo discreto sin variables internas y si el problema es pequeño.

## 7. Autovalores

Puede demostrarse que la solución de VN implica la solución de un sistema de ecuaciones cuadrado, con un número de procesos igual al número de materias, o bien de una combinación lineal de las soluciones de sistemas cuadrados. Una manera de buscar las soluciones de VN es pues descomponer el problema en todos los sistemas cuadrados posibles, o subproblemas, buscar las soluciones para todos los subproblemas, y comprobar si alguna de esas soluciones lo es también del problema original.

Si el problema está escrito sin variables internas, las ecuaciones para los subproblemas cuadrados resultan, tanto en tiempo discreto como continuo,

$$\mathbf{XF}(\alpha) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{F}(\alpha)\mathbf{Y} = \mathbf{0}$$

Estas ecuaciones se conocen como ecuaciones en autovalores, donde se llama autovalores a todos los  $\alpha$  para los que los correspondientes  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$ , los autovectores, no son triviales (no son iguales a  $\mathbf{0}$ ).

Hay algoritmos muy eficientes para el caso en tiempo discreto que pueden encontrar todas las soluciones de los subproblemas, como por ejemplo el algoritmo QR; pero estos algoritmos no permiten obtener una solución exacta, porque proceden iterativamente, y además no pueden aplicarse directamente al caso en tiempo continuo. Si lo que queremos es además encontrar soluciones exactas, entonces en tiempo discreto podremos hacer también esto, pero con un cálculo bastante más costoso

No obstante, para que los  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  sean una solución de VN deben satisfacerse el resto de restricciones, como los signos correspondientes del factor, intensidades y precios y también, si se cumplen las condiciones de regularidad, la derivada del lagrangiano con respecto a  $\alpha$

$$1 + \mathbf{X} \frac{d\mathbf{F}(\alpha)}{d\alpha} \mathbf{Y} = 0$$

## 7.1. Algoritmo

Procederemos:

- 1º, construimos todos los subproblemas cuadrados posibles;
- 2º, resolvemos el problema de autovalores y autovectores para cada subproblema cuadrado;
- 3º, completamos la solución y normalizamos  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  para intentar que se cumplan el resto de condiciones;
- 4º, comprobamos si se cumplen todas las demás condiciones de VN para el conjunto del problema, y si lo hacen tenemos una solución.

Si usamos un algoritmo para resolver los subproblemas que encuentre todas sus soluciones, y más adelante describiremos algoritmos así para el caso en tiempo discreto, entonces el algoritmo de autovalores encontrará todas las soluciones de VN para el factor de expansión. Es importante subrayar que con VN podemos encontrar todas las soluciones del problema en tiempo discreto si disponemos de la potencia de cálculo necesaria, algo que no ocurre con todos los problemas matemáticos.

Este algoritmo nos permite concebir VN como un problema de autovalores generalizado, nos permite entender el vínculo de VN con estos problemas.

Pero el número de subproblemas cuadrados puede llegar a ser enorme para los modelos grandes, y por eso este algoritmo solo es útil con los modelos pequeños, por su gran coste computacional. No obstante, más adelante veremos cómo reducir el número de subproblemas.

## 7.2. Interpretación económica

Aunque el algoritmo pueda parecer muy alejado de los mecanismos económicos reales, está vinculado a las ecuaciones de Sraffa y a la ley de la rentabilidad clásica de Smith y Ricardo.

En efecto, Sraffa postula unas ecuaciones en las que se calculan los precios con los que los procesos (en un número igual al de materias) obtienen la misma tasa de beneficio. Este postulado era también el de los economistas clásicos, quienes defendían que la competencia acaba provocando una situación en la que todos los procesos que operan obtienen la misma tasa de beneficio, y los que no operan una tasa de beneficio menor. Adam Smith, por ejemplo, ya señaló que si un sector obtiene más beneficios la inversión se incrementaría hasta que dejara de ser así, y si obtiene menos se reduciría.

Desde el punto de vista económico, con el algoritmo de los autovalores lo que hacemos es calcular para todas las combinaciones de procesos posibles los precios que permiten que se cumpla la ley de la rentabilidad clásica. En definitiva, resolvemos las ecuaciones de Sraffa para los subproblemas, y escogemos como solución aquellas en las que las intensidades son no-negativas y cumplen la ley de la rentabilidad para el conjunto del sistema.

No obstante, aunque en la realidad efectivamente tiende a cumplirse la ley de la rentabilidad clásica, esto no ocurre comprobando todas las combinaciones de procesos posibles. Esto aleja a nuestro algoritmo de los mecanismos de asignación reales, porque en éstos el proceso de asignación es menos sistemático. Después veremos algoritmos mucho más cercanos a estos mecanismos.



## 7.3. Anexo: solución del problema de autovalores

### 7.3.1. Soluciones exactas en tiempo discreto

Explicaremos a continuación el cálculo de la solución en tiempo discreto de manera exacta.

Dado el factor de expansión  $\alpha$ , los subproblemas resultan sistemas lineales homogéneos. Para que estos sistemas tengan solución para las  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  no-triviales (diferentes de  $\mathbf{0}$ ), se puede demostrar que es necesario que el determinante de  $\mathbf{F}(\alpha)$  sea 0. En tiempo discreto, nos queda

$$\det(\mathbf{F}(\alpha)) = \det\left(\frac{\mathbf{f}_0}{\alpha^0} + \frac{\mathbf{f}_1}{\alpha^1} + \frac{\mathbf{f}_2}{\alpha^2} + \frac{\mathbf{f}_3}{\alpha^3} + \frac{\mathbf{f}_4}{\alpha^4} + \dots\right) = 0$$

Desarrollando este determinante tenemos un polinomio (del inverso) de  $\alpha$ , cuyas raíces o autovalores nos informan de aquellas magnitudes de  $\alpha$  para las que los sistemas lineales homogéneos tienen una solución no trivial para las  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$ , o autovectores. Hay muy buenos algoritmos para encontrar todas las raíces de un polinomio, y también para resolver los sistemas lineales correspondientes a cada raíz.

Por lo tanto, para resolver los subproblemas de forma exacta, procederemos:

1º, desarrollaremos  $\det(\mathbf{F}(\alpha))$ , que en el caso en tiempo discreto será un polinomio (del inverso) de  $\alpha$ ;

2º, calcularemos las raíces de ese polinomio, que son los autovalores;

3º, para cada autovalor  $\alpha$ , resolvemos los sistemas lineales homogéneos correspondientes, que nos dan los  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$ .

Para un polinomio de grado 5 o mayor no es posible en general expresar sus raíces con radicales. Pero los programas de cálculo simbólico tratan como funciones estas raíces, sin intentar expresarlas con radicales, de manera que incluso para los polinomios de grado 5 o mayor podemos obtener soluciones exactas, o con toda la precisión que necesitemos, para los autovalores y para los autovectores correspondientes.

#### 7.3.1.1. Ejemplo

Por ejemplo, supongamos que queremos resolver de manera exacta nuestro problema de 3.5, cuando los balances materiales están escritos con igualdades para simplificar, con las matrices de insumos y productos

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 280 & 12 \\ 120 & 8 \\ 280 & 12 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 575 & 0 \\ 0 & 20 \\ 400 & 0 \end{bmatrix}$$

Empezamos por el subproblema cuadrado formado por las filas 1 y 2, y las columnas 1 y 2,

$$\mathbf{F}(\alpha) = -\mathbf{A} + \mathbf{B}/\alpha = \begin{bmatrix} -280 + 575/\alpha & -12 \\ -120 & -8 + 20/\alpha \end{bmatrix}$$

Desarrollando el determinante nos queda

$$\det(\mathbf{F}(\alpha)) = \det\left(\begin{bmatrix} -280 + 575/\alpha & -12 \\ -120 & -8 + 20/\alpha \end{bmatrix}\right) = 800 - 10200/\alpha + 11500/\alpha^2$$

Resolviendo el polinomio (del inverso) de  $\alpha$  tenemos que hay dos raíces,  $\alpha = 5/4$  y  $\alpha = 23/2$ .

Para la primera raíz resulta

$$\mathbf{F}(5/4) = \begin{bmatrix} -280 + 575/(5/4) & -12 \\ -120 & -8 + 20/(5/4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 180 & -12 \\ -120 & 8 \end{bmatrix}$$

y nos quedan los sistemas lineales homogéneos

$$\mathbf{X}\mathbf{F}(5/4) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 180 & -12 \\ -120 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 180 - x_2 120 & -x_1 12 + x_2 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}(5/4)\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 180 & -12 \\ -120 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 180y_1 - 12y_2 \\ -120y_1 + 8y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuyas soluciones son  $\mathbf{X} = [4, 6]$  e  $\mathbf{Y} = [1, 15]$ . Normalizamos  $\mathbf{Y}$  para que se cumpla la derivada del lagrangiano con respecto al factor, y nos queda  $\mathbf{Y} = [1/2624, 15/2624]$ . Tenemos la solución del subproblema.

Para comprobar si se corresponde con la solución del conjunto del modelo, completamos  $\mathbf{X}$  y  $\mathbf{Y}$ , poniendo como 0 las intensidades de los procesos y los precios de las materias que no están en los subproblemas; en nuestro caso nos queda  $\mathbf{X} = [4, 6, 0]$ ,  $\mathbf{Y} = [1/2624, 15/2624]$ . Y comprobamos si se cumplen todas las demás condiciones de VN, como efectivamente es éste el caso. Tenemos pues una solución.

Si hacemos lo mismo para la segunda raíz,  $23/2$ , entonces obtenemos intensidades con algún elemento negativo, por lo que descartamos esa raíz.

A continuación, procedemos de la misma manera con los demás subproblemas de tamaño  $2 \times 2$ : con el subproblema formado por las filas 1 y 3, y las columnas 1, 2; y con el subproblema con filas 2 y 3 y columnas 1, 2.

Después seguimos con los subproblemas de tamaño  $1 \times 1$ : con fila 1, columna 1; con fila 1, columna 2; con fila 2, columna 1; etc. No obstante, veremos más adelante que en nuestro ejemplo no necesitamos estudiar todos estos subproblemas de tamaño  $1 \times 1$ .

### 7.3.2. Soluciones aproximadas en tiempo discreto

Hay algoritmos muy buenos que permiten obtener todas las soluciones en tiempo discreto, como el algoritmo QR desarrollado para dos matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ . Si tenemos más de dos pasos temporales podemos convertir este caso a dos matrices sin más que añadir para cada proceso una serie de materias que simbolizan la evolución del proceso.

### 7.3.3. Soluciones con tiempo continuo

En tiempo continuo  $\det(\mathbf{F}(\alpha))$  no será en general un polinomio (del inverso) de  $\alpha$ , sino una función, y en general no tenemos algoritmos que nos permitan estar seguros de que hemos obtenido todas raíces de una función arbitraria; ni tampoco podremos recurrir de forma directa a los algoritmos aproximados para el caso polinómico, como el QR. Que podamos obtener una solución exacta o no depende de la estructura de  $\mathbf{F}(\alpha)$ , pero en general no hay muchas esperanzas para esto.

Para resolver los subproblemas en tiempo continuo podemos proceder como el caso exacto en tiempo discreto, sólo que el determinante no resultará en general un polinomio, sino una función de  $\alpha$ , y buscaremos las raíces de esa función. Otra opción es aproximar las funciones en tiempo continuo con polinomios en tiempo discreto.

#### **7.3.4. Subproblemas prescindibles**

Si escribimos el problema con igualdades para los balances materiales, añadiendo procesos de eliminación o incorporación gratuita cuando corresponda, no necesitaremos investigar los subproblemas de tamaño menor, si un subproblema mayor incorpora todas las filas y las columnas del subproblema menor y si subproblema el mayor tiene autovalores definidos (si no se anula su determinante para cualquier  $\alpha$ ). Entonces los subproblemas mayores tienen como autovalores los de los menores, y por ello al resolver el subproblema de tamaño mayor (si tiene autovalores definidos) estamos resolviendo también el problema menor.

Así en nuestro ejemplo no necesitamos resolver el subproblema de tamaño 1\*1 con la fila 1 y la columna 1, porque el subproblema 2\*2 que hemos investigado lo incorpora y tiene autovalores definidos. En efecto, ese subproblema 1\*1 tiene como único autovalor  $\alpha = 585/280$ . Pero si este autovalor fuera una solución de VN tendría que ser también un autovalor del subproblema 2\*2, ya que el modelo está escrito con igualdades para los balances materiales. Esto nos permite no tener que comprobar ese subproblema 1\*1. De hecho en nuestro ejemplo no se necesita resolver más que los 3 subproblemas de tamaño 2\*2, porque los 3 tiene autovalores definidos.

Por lo tanto, una vía para reducir el coste computacional consiste en escribir el problema con igualdades para los balances materiales y descartar los subproblemas de tamaño menor que ya están contenidos en uno de tamaño mayor con determinante no nulo para algún  $\alpha$ . No obstante, entonces debemos considerar el caso en el que para un autovalor existan varios autovectores  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$ .

## **8. Bisección**

Como vimos, el algoritmo de los autovalores nos permite encontrar todas las soluciones para el factor de expansión, incluso en ocasiones de manera exacta, pero es muy costoso desde el punto de vista computacional. Para problemas grandes necesitamos otros planteamientos.

### **8.1. Algoritmo**

El algoritmo de la bisección busca la solución del modelo partiendo como datos de un factor  $\alpha_{sí}$  para el que se cumplen los balances materiales con intensidades no negativas, para los que existe una solución factible, y de un factor  $\alpha_{no}$ , mayor que  $\alpha_{sí}$ , para el que no existe solución factible. Entonces es evidente que tiene que existir una solución para VN con un factor  $\alpha$  contenido en el intervalo  $[\alpha_{sí}, \alpha_{no})$ .

Para encontrarla procederemos:

1º, partimos de un  $\alpha_{sí}$  y un  $\alpha_{no}$ , con  $\alpha_{no}$  mayor que  $\alpha_{sí}$ ,

2º, calculamos  $\alpha_p = (\alpha_{sí} + \alpha_{no}) / 2$ ,

3º, comprobamos si para  $\alpha_p$  existe alguna solución factible; si existe hacemos  $\alpha_{sí} = \alpha_p$ ; si no existe hacemos  $\alpha_{no} = \alpha_p$ ;

4º, volvemos al paso 2º hasta que  $\alpha_{no} - \alpha_{sí}$  sea menor que una cifra preestablecida.

Este algoritmo tiene varios inconvenientes. Primero, necesita partir de un  $\alpha_{sí}$  y un  $\alpha_{no}$ , y no siempre será fácil encontrar unos factores así. Segundo, como el algoritmo siempre trabaja con un intervalo  $[\alpha_{sí}, \alpha_{no})$ , no podrá encontrar soluciones exactas. Y, en su forma simple, sólo encontrará una solución, no todas las que existan (aunque si se descomponen los procesos previamente, pueden buscarse el resto de soluciones; pero esto ocurre con todos los algoritmos que decimos que encuentran una solución). Además, necesita de un algoritmo auxiliar que nos establezca si para un determinado  $\alpha_p$  existe una solución factible o no, si es posible un crecimiento proporcional.

No obstante este algoritmo tiene la ventaja de que siempre es convergente, y que, si usamos un algoritmo auxiliar eficiente, puede encontrar una solución incluso para los problemas muy grandes.

Este algoritmo puede entenderse como una manera “constructiva” de demostrar que VN tiene solución cuando disponemos de los datos que necesita el algoritmo, cuando sabemos que hay un  $\alpha_{no}$  mayor que un  $\alpha_{sí}$ .

## 8.2. Anexo: determinación de $\alpha_{sí}$ y $\alpha_{no}$

### 8.2.1. Existencia de una solución factible con un juego

En varios algoritmos, no sólo con la bisección, es importante saber si existe una solución factible, un crecimiento proporcional posible, para un  $\alpha$  dado. Hay varios algoritmos para comprobar esto, y aquí sólo describiremos uno de esos métodos, vinculado con la Teoría de Juegos. En la tesis se describen otros métodos.

Trataremos ahora el problema escrito con balances materiales con desigualdades, como en el artículo original, de forma que las materias pueden ser eliminadas gratuitamente. Si el problema no estuviera escrito así, se puede transformar a esta forma como se describe en la sección 11.4 de la tesis.

Plantaremos el programa lineal, donde  $\alpha$  es un dato,

$$\begin{aligned} \max_{u, X} u \\ \mathbf{XF}(\alpha) &\geq u \\ \sum \mathbf{X} &= 1 \\ \mathbf{X} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Este programa lineal que puede interpretarse como el cálculo de la mayor cantidad  $u$  que puede retirarse de todos los balances materiales de manera, de forma que las intensidades de los procesos  $\mathbf{X}$  sumen 1 y sean no negativas.

Es evidente que el programa lineal siempre tendrá solución para cualquier  $\alpha$  positivo, porque siempre existirá alguna cantidad  $u$ , aunque sea negativa, que pueda retirarse de los balances materiales. Para que exista un crecimiento proporcional, para que existan unas intensidades que permitan que se cumplan los balances materiales, es necesario que  $u \geq 0$ , ya que si no algún balance material será negativo. Por lo tanto, tenemos una manera de determinar si existe una solución factible en VN para un  $\alpha$  dado, si la solución del programa lineal para ese  $\alpha$  resulta con  $u \geq 0$ .

El programa lineal primal tiene su dual, que queda

$$\begin{aligned} \min_{v, \mathbf{Y}} v \\ \mathbf{F}(\alpha)\mathbf{Y} \leq v \\ \sum \mathbf{Y} = 1 \\ \mathbf{Y} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

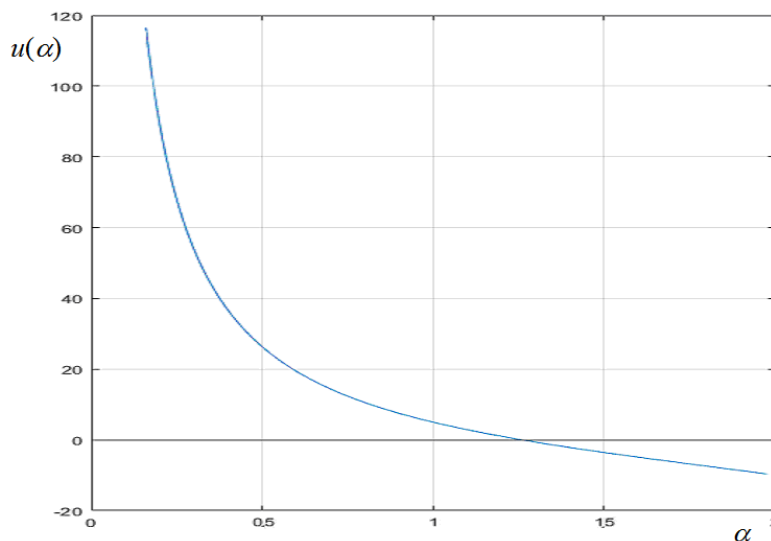
y que puede interpretarse como el calculo de la menor cantidad posible  $v$  que puede retirarse de los balances contables, la ley de la rentabilidad, de forma que los precios de las materias  $\mathbf{Y}$  sumen 1 y sean no negativos. También es evidente que el programa lineal dual tendrá solución para cualquier  $\alpha$  positivo, porque siempre existirá alguna cantidad  $v$ , aunque sea positiva, que permita que se cumplan los balances contables. Para que exista lo que llamaremos una valoración proporcional, para que existan unos precios que permitan que se cumpla la ley de la rentabilidad, es necesario que  $v \leq 0$ .

Notemos que, como para cualquier  $\alpha$  positivo el primal y el dual son factibles, por los teoremas de dualidad de los programas lineales, ambos problemas tienen solución y además  $u = v$ . Si  $u = v > 0$  existirá un crecimiento proporcional, pero no una valoración proporcional. Si  $u = v < 0$  existirá una valoración proporcional, pero no un crecimiento proporcional. Para que exista un crecimiento proporcional máximo, y una valoración proporcional mínima, para que un  $\alpha$  sea solución de VN, es pues necesario (aunque no suficiente) que  $u = v = 0$ .

Este programa lineal está vinculado a la Teoría de juegos, donde la  $u$ , y  $v$ , solución puede ser interpretada como el valor del juego para la matriz de pagos  $\mathbf{F}(\alpha)$ . Igualmente  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  son las estrategias de los jugadores. Vemos pues otro vínculo entre VN y la Teoría de Juegos.

Además la  $u$  solución nos puede servir para encontrar el factor de VN, o un factor para el que exista un crecimiento proporcional. Para ello definiremos la función  $u(\alpha)$ , como la  $u$  solución del juego o programa lineal visto para un factor de expansión  $\alpha$  dado.

Por ejemplo, con el problema con las matrices de insumos y productos visto en §3.1, representando  $u(\alpha)$  en función de  $\alpha$ , tenemos



donde comprobamos que para  $\alpha$  menor que 1.25  $u(\alpha)$  es positiva, y para un  $\alpha$  mayor negativa. Por lo tanto, la solución de VN tiene un  $\alpha$  igual a 1.25. Para factores mayores existirá una valoración proporcional, pero no un crecimiento proporcional, y para factores menos existirá un crecimiento proporcional, pero no una valoración proporcional.

### 8.2.2. Búsqueda de una solución factible

De la teoría de los programas lineales podemos deducir que la tasa a la que cambia la solución  $u$  ante una variación de  $\alpha$  es

$$u'(\alpha) = \mathbf{X} \frac{d\mathbf{F}(\alpha)}{d\alpha} \mathbf{Y}$$

(a veces anotaremos  $\mathbf{F}'(\alpha) = \frac{d\mathbf{F}(\alpha)}{d\alpha}$ ), aunque esta derivada no siempre existirá, porque  $u(\alpha)$  no será necesariamente derivable en todos los puntos. Con esta derivada podemos intentar establecer en qué dirección se encuentra una raíz de  $u(\alpha)$ .

En determinadas situaciones, por ejemplo cuando estamos ante el modelo original, podemos encontrar la solución de VN simplemente buscando la solución de la ecuación  $u(\alpha) = 0$  con cualquiera de los métodos habituales, como el algoritmo de Newton.

### 8.2.3. Buscar un $\alpha_{sí}$ y un $\alpha_{no}$ con el problema original

El algoritmo de la bisección necesita empezar con un  $\alpha_{sí}$ , para el que existe un crecimiento proporcional, y un  $\alpha_{no}$ , para el que no existe.

Si estamos ante el problema original, con las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  y con materias que pueden ser eliminadas de forma gratuita, entonces si existe un  $\alpha_{sí}$  para el que hay un crecimiento proporcional, existirá también un crecimiento proporcional para cualquier  $\alpha$  en el intervalo  $(0, \alpha_{sí}]$ , ya que las materias pueden eliminarse gratuitamente. En esta situación resulta muy sencillo encontrar un  $\alpha_{sí}$  y un  $\alpha_{no}$ . Pasaremos a describir un procedimiento para encontrarlos.

- 1º, partimos de un  $\alpha_p$  mayor que 0, por ejemplo de  $\alpha_p = 1$ ;
- 2º, comprobamos si existe un crecimiento proporcional para  $\alpha_p$ ;
- 3º, si existe redefinimos  $\alpha_{sí} = \alpha_p$  y duplicamos la magnitud de  $\alpha_p$ ; si no existe redefinimos  $\alpha_{no} = \alpha_p$  y reducimos a la mitad la magnitud de  $\alpha_p$ ;
- 4º, volvemos al punto 2º hasta que hayamos definido  $\alpha_{sí}$  y  $\alpha_{no}$ .

Pero este método sólo nos garantiza encontrar un  $\alpha_{sí}$  y un  $\alpha_{no}$  si estamos ante el problema original. Ante otros problemas necesitamos otros procedimientos.

### 8.2.4. Buscar un $\alpha_{sí}$

A menudo nos conviene encontrar un factor de expansión para el que exista un crecimiento proporcional, con modelos que no son necesariamente el original, no sólo para el algoritmo de la bisección sino también para otros algoritmos que veremos más adelante.

Como para que exista un crecimiento proporcional para un  $\alpha$  es necesario  $u(\alpha) \geq 0$ , podemos intentar encontrar un  $\alpha$  siguiendo el siguiente procedimiento, que usa una variante del método de Newton para buscar la raíz de la ecuación  $u(\alpha) = 0$ :

- 1º, partimos de un  $\alpha_p$  mayor que 0, por ejemplo  $\alpha_p = 1$ ;
- 2º, resolvemos el juego para  $\alpha_p$ , y obtenemos  $u(\alpha_p)$ ,  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$ ;
- 3º, si  $u \geq 0$ , entonces existe un crecimiento proporcional para  $\alpha_p$ , por lo que tenemos un  $\alpha_{sí}$  e interrumpimos el algoritmo;
- 4º, calculamos  $u'(\alpha_p) = \mathbf{X} \mathbf{F}'(\alpha_p) \mathbf{Y}$ ;
- 5º, si  $u'(\alpha_p) = 0$ , entonces reducimos a la mitad  $\alpha_p$  y volvemos al paso 2º;
- 6º, calculamos la fórmula de Newton  $d = \alpha_p - u(\alpha_p) / u'(\alpha_p)$ ;
- 7º, dependiendo de la magnitud  $d$ ,
  - si  $d$  está en el intervalo  $[\alpha_p/2, 2 \alpha_p]$  haremos  $\alpha_p = d$ ,
  - si  $d$  es menor que  $\alpha_p / 2$  hacemos  $\alpha_p = \alpha_p / 2$ ,
  - si  $d$  es mayor que  $2 \alpha_p$  hacemos  $\alpha_p = 2 \alpha_p$ ;
- 8º, volvemos al paso 2º hasta un número máximo dado de iteraciones.

Este algoritmo no siempre nos permitirá encontrar un  $\alpha_{sí}$ , porque no siempre será convergente, como ocurre también con el método de Newton. Para intentar paliar esa falta de convergencia hemos acotado el nuevo valor de  $\alpha_p$  en el paso 7º al intervalo  $[\alpha_p/2, 2 \alpha_p]$ ; si fuera necesario se puede hacer más pequeño ese intervalo para facilitar la convergencia. También es problemático el paso 5º, porque es posible que el crecimiento proporcional se encuentre para un  $\alpha$  mayor que un  $\alpha_p$ .

### **8.2.5. Buscar un $\alpha_{no}$**

Usando el procedimiento anterior es posible que en el paso 3º  $u$  sea menor que 0, que no exista un crecimiento proporcional, y por lo tanto ya hemos encontrado un  $\alpha_{no}$ .

Si no fuera el caso, procederemos:

- 1º, partimos de un  $\alpha_p$  mayor que 0, como  $\alpha_p = 1$  o  $\alpha_p = \alpha_{sí}$  encontrado en el procedimiento anterior;
- 2º, comprobamos si existe un crecimiento proporcional para  $\alpha_p$ ;
- 3º, si existe duplicamos la magnitud de  $\alpha_p$ ; si no existe tenemos un  $\alpha_{no} = \alpha_p$  y terminamos el algoritmo;
- 4º, volvemos al punto 2º.

En definitiva, probamos un factor y si hay un crecimiento máximo para él vamos duplicándolo hasta que encontremos uno para el que no exista. Este procedimiento supone que existe un crecimiento máximo, y por lo tanto que duplicando sucesivamente un número acabará siendo mayor que el factor de ese crecimiento máximo.

## **9. Programación lineal secuencial**

Lo habitual es que los problemas no lineales se resuelvan con más dificultad que los problemas lineales, porque para éstos tenemos buenos algoritmos de solución, mientras que para los no lineales no siempre es el caso. Una estrategia útil para resolver los problemas no lineales, sobre todo si se parecen a uno lineal, consiste en partir de magnitud de las incógnitas dada, aproximar linealmente el problema no lineal alrededor de esas magnitudes de las incógnitas, resolver el problema lineal aproximado, e iterar el

algoritmo hasta que converja; si lo hace, porque no siempre es el caso. Esta linealización es la base de algoritmos bien conocidos por su eficacia, como el método de Newton-Raphson para resolver sistemas de ecuaciones no lineales, o con la programación lineal secuencial para resolver programas no lineales.

VN con los procesos sin variables internas es un programa no lineal, porque el factor de expansión entra en las restricciones de manera no lineal, pero tiene una estructura parecida a los programas lineales, por lo que cabe esperar que la programación lineal secuencial sea una estrategia exitosa.

## 9.1. Algoritmo

Procederemos:

- 1º, partimos de unos  $\alpha^{(n)}$  y  $\mathbf{X}^{(n)}$  iniciales dados;
- 2º, resolvemos el programa lineal que resulta de la linealización de VN;
- 3º, si el programa lineal no tiene solución interrumpimos el algoritmo;
- 4º, si tiene solución, definimos  $\alpha^{(n)}$  y  $\mathbf{X}^{(n)}$  con la solución del mismo,  $\alpha$  y  $\mathbf{X}$ ;
- 5º, volvemos a 2º hasta que las variables converjan.

El algoritmo necesita partir de unos donde  $\alpha^{(n)}$  y  $\mathbf{X}^{(n)}$  iniciales con los que comenzar la iteración. Para ello resulta útil que se correspondan a crecimiento proporcional, porque así las restricciones del programa lineal se podrán cumplir para ese factor e intensidades iniciales, normalizando éstas para que sumen 1. Una manera de encontrar un factor e intensidades así es usar el método visto en §8.2.4.

Dado que el algoritmo necesita resolver varios programas lineales, y dado que los programas lineales se pueden resolver para problemas muy grandes, podremos atacar problemas verdaderamente grandes. Además cuando converge lo hace muy rápidamente, como le ocurre al método de Newton para resolver sistemas de ecuaciones no lineales. De hecho lo normal es que necesitemos muchas menos iteraciones que con el método de la bisección, y que por ello podamos atacar problemas más grandes que con éste último algoritmo.

Pero la programación lineal secuencial no siempre es convergente, como le ocurre también al método de Newton. Hay métodos para no tener que interrumpir el algoritmo en el paso 3º si el programa no tiene solución, y también para atacar el problema si las variables no convergen, pero no los describiremos aquí.

No obstante, con este algoritmo queda clara la relación de VN con los programas lineales.

## 9.2. Anexo: linealización de VN

En VN la función objetivo es ya lineal, y linealizando los balances materiales en unos  $\alpha^{(n)}$  y  $\mathbf{X}^{(n)}$  dados nos queda

$$\mathbf{XF}(\alpha) \approx \mathbf{XF}(\alpha^{(n)}) + (\alpha - \alpha^{(n)})\mathbf{X}^{(n)}\mathbf{F}'(\alpha^{(n)})$$

Además nos conviene añadir una normalización para las intensidades, para que no sea posible que sean todas 0, por ejemplo que sumen 1. Por lo tanto, la aproximación linealizada de VN resulta un programa lineal, donde  $\alpha^{(n)}$  y  $\mathbf{X}^{(n)}$  son datos y  $\alpha$  y  $\mathbf{X}$  las incógnitas,



$$\begin{aligned}
& \max_{\alpha, \mathbf{X}} \alpha \\
& \mathbf{X}\mathbf{F}(\alpha^{(n)}) + (\alpha - \alpha^{(n)})\mathbf{X}^{(n)}\mathbf{F}'(\alpha^{(n)}) = \mathbf{0} \\
& \sum \mathbf{X} = 1 \\
& \mathbf{X} \geq \mathbf{0} \\
& \alpha \geq 0
\end{aligned}$$

Las condiciones de máximo del programa lineal resultan

$$\begin{aligned}
& \mathbf{F}(\alpha^{(n)})\mathbf{Y} + \mu \leq \mathbf{0}, & \text{si } \mathbf{X} > \mathbf{0} \text{ se aplica} = \\
& 1 + \mathbf{X}^{(n)}\mathbf{F}'(\alpha^{(n)})\mathbf{Y} \leq \mathbf{0} & \text{si } \alpha > 0 \text{ se aplica} =
\end{aligned}$$

donde  $\mathbf{Y}$  son los multiplicadores de Lagrange correspondientes a la linealización de los balances materiales y  $\mu$  el multiplicador de Lagrange correspondiente a la normalización de las intensidades.

Por lo general, los balances materiales de VN casi siempre se pueden linealizar sin dificultades, pero no cuando los balances materiales no cumplen las condiciones de regularidad que permiten aplicar el método de Lagrange.

Si para unos  $\alpha^{(n)}$  y  $\mathbf{X}^{(n)}$ , que son datos en el problema, existe un crecimiento proporcional, entonces este programa lineal será factible, porque los balances materiales actualizados se cumplirán por lo menos para  $\alpha = \alpha^{(n)}$  y para  $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{(n)}$ , normalizando las intensidades. Como con  $\alpha^{(n)}$  y  $\mathbf{X}^{(n)}$  el problema es factible, si tiene solución (y la tendrá salvo que no esté acotado) su solución también lo es, por lo que  $\alpha^{(n+1)}$  y  $\mathbf{X}^{(n+1)}$  también será factible. En definitiva, si el problema está acotado, si no es posible un factor de expansión infinito, y si partimos de unas variables iniciales factibles, la programación lineal secuencial se moverá siempre dentro de las soluciones factibles.

Si la programación lineal secuencial es convergente para un factor mayor que 0, si obtenemos como solución del programa lineal el factor e intensidades de los que partimos como datos, la solución del programa lineal será la solución de VN, porque entonces se cumplen las condiciones de crecimiento proporcional y las condiciones de máximo de VN ( $\mu$  será 0 ya que la normalización de las intensidades no afecta la magnitud del factor máximo). Además los multiplicadores de Lagrange  $\mathbf{Y}$  del programa lineal serán los precios de VN.

## 10. Simplex

El algoritmo más interesante que trataremos para el caso sin variables internas está inspirado en el algoritmo clásico de la programación lineal, conocido como método Simplex. Pero, a diferencia de la programación lineal, nosotros no trabajaremos con sistemas básicos cuadrados, sino generalmente rectangulares, y con unos criterios de entrada y salida diferentes. Aplicaremos este algoritmo a los sistemas con un número de procesos mayor que el de materias; si tuviéramos más materias que procesos, aplicaríamos su dual.

### 10.1. Algoritmo

Procedemos:

- 1º, partimos de un número pequeño de procesos a los que llamaremos “básicos”;
- 2º, resolvemos VN para los procesos básicos con un algoritmo cualquiera, y obtendremos los correspondientes precios y factor de interés; si este VN no tuviera solución interrumpimos el algoritmo;
- 3º, descartamos de los procesos básicos aquellos que obtengan pérdidas, y que no operarán;
- 4º, con los precios y tipo de interés que obtuvimos con los procesos básicos, calculamos los beneficios que obtienen cada uno de los procesos no básicos;
- 5º, si ningún proceso no básico obtiene beneficios, hemos encontrado una solución al problema e interrumpimos el algoritmo;
- 6º, si algún proceso no básico obtiene beneficios, incorporamos a los procesos básicos el que más beneficios obtenga;
- 7º, tenemos unos nuevos procesos básicos, y volvemos al paso 2º.

Por supuesto, es evidente que con nuestro algoritmo estamos imitando el Simplex de Dantzig y Kantorovich.

Desde el punto de vista computacional, nuestra versión del Simplex es bastante eficaz. Como trabaja con sistemas básicos generalmente rectangulares pero casi-cuadrados, podremos resolver el problema con un número muy grande de materias, y prácticamente con un número ilimitado de procesos. Veremos que esto último resulta muy útil a la hora de estudiar problemas con variables internas.

Si el problema tiene varias soluciones, nuestro Simplex convergerá a una solución que depende de los procesos básicos de los que partamos. Podemos usar esto para intentar buscarlas.

Pero nuestro Simplex no siempre es convergente, y puede entrar en pautas cíclicas. Esto puede paliarse prescindiendo del paso 3º, prescindiendo de descartar procesos básicos con pérdidas.

Si en el paso 5º ningún proceso no básico obtiene beneficios, entonces estamos ante una solución del problema (con unas intensidades nulas para los procesos no básicos), ya que se cumplen todas las condiciones de VN, los balances materiales y los balances contables.

Nos interesa que el sistema básico inicial tenga solución, para no tener que interrumpir el algoritmo en el paso 2º. Si estamos ante un problema con materias eliminables, como el artículo original, a menudo se consigue un sistema básico inicial con solución escribiendo el problema con igualdades e incluyendo entre los básicos los procesos de eliminación gratuita junto con uno o más procesos habituales.

Si partimos de un proceso básico inicial con solución, entonces los sucesivos procesos básicos serán necesariamente factibles, ya que en el paso 3º sólo descartamos los procesos básicos que no operan; con los que quedan que sí operan tenemos siempre una solución factible. Pero esto no garantiza que tengamos siempre una solución acotada en el paso 2º, porque es posible que el proceso no básico incorporado en el paso 6º como el más rentable haga no acotado el problema para los básicos. No obstante si se cumplen ciertas condiciones, como las señaladas en la tesis en la sección 14.1, entonces ninguna

combinación de procesos se corresponderá a un problema no acotado, y por lo tanto en el paso 2° siempre tendremos una solución acotada.

## 10.2. Interpretación económica

Nuestra versión del algoritmo Simplex se parece mucho a ciertos aspectos de la manera de operar en los capitalismos reales. En efecto, en estos sistemas los procesos que efectivamente operan determinan los precios y el factor de interés, de acuerdo a la ley de la rentabilidad clásica; si un proceso no es rentable deja de usarse; si un proceso pasa a ser rentable se pone a operar; los nuevos procesos que operan determinan los nuevos precios y tipo de interés; y se repite el ciclo.

Nosotros con el Simplex procedemos de una manera similar. Los procesos “básicos” que operan determinan los precios, los multiplicadores de Lagrange, y el factor de expansión e interés; los procesos básicos que cumplen las condiciones de máximo con holgura, que dejan de ser rentables, se descartan; los procesos no básicos que incumplen las condiciones de máximo, que pasan a ser más que rentables se incorporan. Y vuelta a comenzar. Aquí el papel de los multiplicadores de Lagrange y de las condiciones de máximo es clave.

Al igual que podemos decir que nuestra versión del algoritmo Simplex imita a los capitalismos, también podemos decir que los capitalismos imitan al Simplex. Aquí el criterio con el que se decide si un proceso se incorpora o abandona la producción es una contabilidad, el beneficio, como en nuestro algoritmo. Los precios juegan un papel esencial en esa contabilidad. Vemos que hay una relación directa entre los multiplicadores de Lagrange y las condiciones de máximo de nuestro modelo matemático y el papel que juegan en el algoritmo y los precios y contabilidades de la realidad y el papel que juegan en el mecanismo económico. Los multiplicadores de Lagrange, o precios, y las condiciones de máximo, o balances contables, son los que determinan la forma de operar del algoritmo.

Por lo tanto la asignación en el capitalismo puede concebirse como un inmenso algoritmo real, que actúa de una forma similar al algoritmo Simplex, que hace en la realidad lo que hacemos con el Simplex sobre el papel, o sobre los chips. Este algoritmo y su forma de operar tan similar a nuestra versión del Simplex, es una manera de entender que la asignación en los capitalismos acabe pareciéndose también al modelo VN.

Si en un sistema real los procesos que no son rentables se descartan, los procesos que son más que rentables se incorporan a la producción, y los procesos que efectivamente operan determinan los precios y el tipo de interés, ese sistema real se comporta como el algoritmo Simplex. Pero el algoritmo Simplex acaba encontrando la solución de VN (cuando es convergente). Por lo tanto, ese sistema real acaba comportándose como VN.

Que el Simplex no sea siempre convergente es también similar a lo que ocurre con los mecanismos de asignación reales, que tampoco convergen siempre. En efecto, las crisis económicas recurrentes a menudo suelen explicarse como crisis financieras o como unos impactos externos al sistema. Desde nuestra perspectiva esta visión es muy limitada. Estudiando los algoritmos de nuestros modelos se comprueba que estos no tienen porqué ser siempre estables, que pueden entrar también en pautas cíclicas. De esto puede establecerse una hipótesis para explicar las crisis, no como consecuencia de

impactos externos al sistema, o como resultado de inestabilidades financieras, sino como resultado de la propia manera en la que la asignación se establece en el capitalismo. Si esta hipótesis se sostiene, las crisis económicas serían consecuencia de la inestabilidad del mecanismo de asignación real.

### 10.3. Anexo: Simplex dual

Si tenemos más materias que procesos podemos aplicar el procedimiento dual:

- 1º, partimos de un número pequeño de materias a las que llamaremos “básicas”;
- 2º, resolvemos VN para las materias básicas con un algoritmo cualquiera, y obtendremos las correspondientes intensidades y factor de expansión; si este VN no tuviera solución interrumpimos el algoritmo;
- 3º, descartamos de las materias básicas aquellas que cumplan los balances materiales con holgura, y que tendrán precio 0;
- 4º, con las intensidades y el factor de expansión que obtuvimos con las materias básicas, calculamos los balances materiales que se corresponden a cada una de las materias no básicas;
- 5º, si ninguna materia no básica incumple su balance material, hemos encontrado una solución al problema e interrumpimos el algoritmo;
- 6º, si alguna materia no básica incumple su balance material, incorporamos a las materias básicas el que más lo incumpla;
- 7º, tenemos unas nuevas materias básicas, y volvemos al paso 2º.

El Simplex dual también admite una interpretación económica. Si en el Simplex primal estudiábamos el proceso de asignación, en el dual estudiamos el proceso de valoración. En los capitalismos reales el criterio que decide que una materia sea o no valorada es el cumplimiento de los balances materiales, como en nuestro algoritmo. Si una materia cumple los balances materiales con holgura, si por ejemplo es una materia eliminable y efectivamente es eliminada, su valor es 0. Y si su valor es 0, se descarta del proceso de valoración, se descarta de las materias básicas. Si una materia que originalmente tiene un precio 0 es demandada (o tiene que ser expulsada) entonces toma valor positivo (o negativo), y se incorpora a las materias básicas.

Si para las materias básicas existe solución factible, es evidente que los sucesivos sistemas básicos tendrán solución factible también, porque siempre podremos recurrir a las antiguas básicas para obtener unos precios que cumplan los balances contables. Pero esto no garantiza que obtengamos una solución acotada en el paso 2º, porque es posible que la materia no básica incorporada en el paso 6º convierta en no acotado el problema para las básicas. No obstante si se cumplen las condiciones señaladas en la tesis en la sección 14.1, en el paso 2º siempre tendremos una solución acotada.

# Algoritmos con variables internas

VN con variables internas sigue siendo un problema de maximización restringida. Por ello podemos intentar encontrar su solución con alguno de los algoritmos generales que atacan este tipo de problemas. Pero esta forma de proceder no siempre es posible, si el número de variables es grande o si el problema tiene una estructura compleja, por lo que necesitamos algoritmos más específicos.

## 11. Muestreo

### 11.1. Algoritmo

Una primera manera de resolver el problema con variables internas es aproximarlo como un problema sin variables internas, y usar cualquier algoritmo para este caso. Esto puede hacerse obteniendo una serie de muestras de las variables internas, mediante un procedimiento sistemático o usando el azar, como veremos más adelante.

Procederemos:

- 1º, extraeremos una serie de muestras para varias combinaciones de las variables internas, sistemáticamente o al azar;
- 2º, sustituimos para cada muestra la magnitud de las variables internas en las fórmulas de los procesos y obtendremos una lista de los procesos con sus flujos ya sin variables internas;
- 3º, resolveremos VN sin variables internas para esos procesos.

Esta manera de proceder nos permite comprobar que el problema con variables internas es básicamente el mismo que sin variables internas (con un pequeño matiz en el que nos detendremos más adelante).

Usando para resolver VN sin variables internas un algoritmo que sabemos que es convergente, como la bisección, tenemos la seguridad de que nuestra aproximación con muestras será convergente también.

Si utilizamos un número de muestras suficientemente grande, tendremos la solución del problema con toda la precisión que necesitemos. Pero la gran dificultad de este algoritmo es que obtener una buena precisión puede implicar un número enorme de muestras, sobre todo si el número de variables internas es grande. Entonces tendremos que usar como “motores” algoritmos más rápidos que la bisección, como el Simplex que puede tratar sin dificultades con un número casi ilimitado de procesos, pero cuya convergencia no está garantizada. Además de que el proceso de obtención de las muestras es costoso en sí. Más adelante veremos cómo paliar esta dificultad.

En cualquier caso, este procedimiento no permite la obtención de soluciones exactas, y la precisión estará determinada por la de la muestra de la que se ha partido.

Si usamos el Simplex para resolver VN, nos conviene que el proceso básico inicial tenga solución. Esto a menudo se consigue escogiendo por cada proceso una muestra en donde tengamos unos consumos y producciones para cada materia involucrada.

## 11.2. Interpretación económica

Ya hemos visto que este algoritmo nos permite afirmar que no hay diferencia esencial entre el problema sin variables internas y con variables internas (con un pequeño matiz), de manera que si tenemos un número de muestras suficientemente grande podremos resolver el problema con variables internas como un problema sin esas variables.

Pero más importante es señalar que la gran dificultad del algoritmo, el número enorme de muestras que pueden ser necesarias para obtener una solución precisa, tiene un vínculo directo con la dificultad del problema de la asignación, y con la división de ésta en unidades de asignación o empresas en la realidad.

Una manera de reducir el número de muestras es tomar en consideración para su variación mutua sólo las variables cuyo cambio mutuo afecten a los flujos consumidos o producidos. De hecho, si un proceso puede subdividirse en conjuntos de sus variables internas, que afectan a los flujos con independencia de los demás conjuntos, cada conjunto puede considerarse como un proceso independiente.

En realidad, esta situación tiene su paralelo en la realidad con la delimitación de las empresas. Que una empresa organice su producción con independencia de otras está vinculado a que su proceso de asignación implica decisiones que son también independientes del de las otras empresas. La división de la asignación en unidades de asignación o empresas tiene su base fáctica en la estructura de las decisiones productivas. La delimitación de las empresas es el resultado pues del proceso de decisión de la asignación. Este será tanto menos difícil cuanto el proceso de decisión sea menor, implique un número menor de variables.

Esta situación tiene su paralelo en nuestro proceso de extracción de muestras. Si pretendiéramos extraer muestras para todas las variables de todos los procesos variando todas con las demás, el número de muestras sería inabordable. Si nos limitamos a las variables dentro de cada proceso el número de muestras será mucho menor.

De la misma forma, si pretendiéramos resolver el problema real de la asignación para el conjunto de toda una economía, el problema resulta inabordable. Si nos limitamos a intentar resolver el problema de la asignación en cada una de las empresas el problema reduce de manera radical su complejidad, se convierte en un conjunto de subproblemas menores, uno por empresa, que además pueden ser resueltos de manera independiente.

Ahora bien, ese proceso de celularización de la asignación en empresas implica que hay que coordinar la operación de las empresas entre sí, de alguna manera. El mecanismo de precios es una manera de intentar coordinar la operación de las empresas. Después veremos algoritmos que usan los precios y el factor de interés como una manera de coordinar la operación de los procesos, como ya señalamos en el Simplex.

Si concretamos más y delimitamos las variables vinculadas entre sí dentro de cada proceso aun reduciremos el número de muestras necesarias. Podemos analizar en parte la estructura interna de una empresa a partir de la estructura de sus variables decisión. Si dentro de cada empresa jerarquizamos el proceso de decisión en departamentos el problema de la asignación se reduce aun más. Igualmente, el proceso de compartimentalización dentro de la empresa implica que ésta tiene que coordinarse internamente de alguna forma.

## 11.3. Anexo: tipos de muestras

### 11.3.1. Muestras con una aproximación poligonal

Generalmente necesitamos unas muestras que recorran todas las combinaciones de insumos con cierta exhaustividad. Para ello distribuiremos la obtención de las muestras a lo largo del intervalo de definición de las variables en intervalos regulares (aunque esto último no es esencial). Por ejemplo, si en un proceso tenemos una variable interna, definida en el intervalo  $[0, 1]$  podemos calcular los flujos del proceso para los siguientes puntos, para las magnitudes de la variable interna  $\{0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$ . Si necesitamos más precisión simplemente aumentaremos el número de puntos.

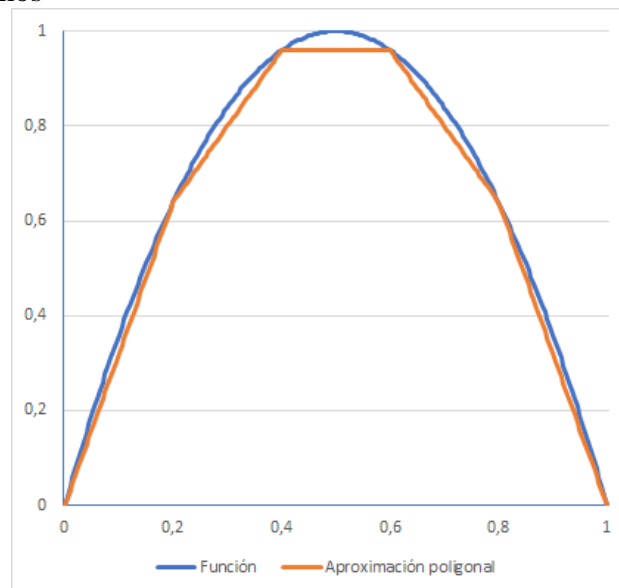
Por ejemplo, supongamos que estamos ante el proceso, con una variable interna,

$$F(\alpha, q_1) = \left[ -q_1 + 4q_1(1 - q_1)/\alpha \quad -1 \right]$$

en donde  $q_1$  está delimitada al intervalo  $[0, 1]$ . Dando valores a  $q_1$  nos quedan los siguientes procesos sin variables internas

|       |                        |    |
|-------|------------------------|----|
| $q_1$ |                        |    |
| 0     | 0                      | -1 |
| 0.2   | $-1/5 + 16/(25\alpha)$ | -1 |
| 0.4   | $-2/5 + 24/(25\alpha)$ | -1 |
| 0.6   | $-3/5 + 24/(25\alpha)$ | -1 |
| 0.8   | $-4/5 + 16/(25\alpha)$ | -1 |
| 1     | -1                     | -1 |

Dado que dos procesos pueden operar simultáneamente, la operación conjunta de dos de estas muestras consecutivas en diferentes proporciones permite aproximar la función original con un polígono. Por ejemplo, si comparamos la función  $4q_1(1 - q_1)$  con la magnitudes que se alcanzan con las muestras, y sus combinaciones con los procesos consecutivos, tenemos



Por supuesto, lo que llamaremos “aproximación poligonal” sólo es exacta en los puntos en los que hemos obtenidos las muestras; en el resto la función se aleja en alguna medida del polígono con las combinaciones de procesos.

Si tuviéramos más de una variable interna procederíamos igual, usando por ejemplo los puntos de extracción detallados arriba para cada una de las variables, y tomando como muestras todas las combinaciones. Haciendo esto para todas las variables en cada proceso, tenemos unos nuevos procesos, ya sin variables internas, para los que podemos usar cualquiera de los algoritmos para VN. Y podemos proceder de esta manera tanto en el caso en tiempo discreto como continuo.

Si una variable interna está definida como no negativa, en el intervalo  $[0, \infty)$ , podemos extraer muestras sin necesidad de que los pasos sean regulares.

Es fácil ver que si el número de variables internas es grande el número de muestras será muy grande también. Si para cada variable interna tenemos 6 puntos, como en el ejemplo de arriba, el número de muestras que resultarán será de  $6^n$ , donde  $n$  es el número de variables internas. Incluso con sólo 6 muestras por variable, obtener  $6^n$  muestras puede ser inabordable si  $n$  es grande.

Pero ya hemos visto que tenemos algoritmos, como el Simplex sin variables internas, que nos permiten atacar problemas con un número prácticamente ilimitado de procesos, por lo que la dificultad principal estará en la capacidad de extraer y almacenar en la memoria todas esas muestras.

### **11.3.2. Muestras aleatorias**

Otra manera de obtener muestras de las combinaciones de variables internas para un proceso es establecerlas al azar. Esta manera de obtener las muestras tiene la limitación de que no permite un análisis sistemático de las combinaciones de variables internas posibles, pero sin embargo sí es útil en ciertos algoritmos, por ejemplo si queremos usar el Simplex, ya que a menudo podremos obtener un sistema básico inicial con solución con una muestra aleatoria por proceso.

### **11.3.3. Una muestra por proceso**

Hay que señalar que, al incluir varias muestras para cada proceso con variables internas, a cada proceso así le corresponderán varios procesos ya sin variables internas, que podrían llegar a operar simultáneamente. Ahora bien, no sólo pueden operar los procesos consecutivos dos a dos, sino también cualquier combinación de los mismos, y eso significa que con la aproximación poligonal no sólo podemos obtener las producciones en los bordes del polinomio, sino también cualquier punto de la envoltura convexa del polinomio. Y éste es el matiz al que hicimos referencia que diferencia la aproximación con muestras del problema original. Si con nuestros procesos se pueden usar varias combinaciones de insumos simultáneamente esto no supone dificultad, pero si sólo se puede usar una combinación sí.

No obstante, si sólo puede usarse una combinación de variables internas para cada proceso, podemos tratar este último caso modificando el algoritmo Simplex de manera que entre los procesos básicos sólo pueda entrar una muestra por proceso (o sólo dos muestras si son consecutivas). Si por ejemplo una muestra de un proceso está incluida entre los procesos básicos del Simplex, y el más rentable de los no-básicos se corresponde a otra muestra de ese mismo proceso (no consecutiva), podemos incorporar esta última muestra y descartar la anterior. Así sólo habrá como mucho una muestra de



algún proceso entre los básicos, y por lo tanto siempre nos moveremos en los bordes del polígono.

#### **11.3.4. Muestras con aumento progresivo de la precisión**

Otra opción, útil cuando el número de variables básicas es muy grande, es usar un muestreo con una precisión relativamente pequeña, y obtener la solución para esas muestras. Extraeremos un nuevo muestreo alrededor de la solución obtenida, con un número de muestras similar al anterior, pero en un intervalo más pequeño, con lo que aumentaremos la precisión. Reiteraremos el procedimiento, con muestreos con un número de muestras similar, pero en intervalos cada vez más pequeños, en el entorno de las sucesivas soluciones.

Aunque este procedimiento no permite soluciones exactas, sí permite obtenerlas con cualquier grado de precisión que necesitemos, limitando el número de muestras a un tamaño razonable.

Al definir el nuevo muestreo, a partir de la solución obtenida con el anterior, conviene que el entorno que abarque sea lo suficientemente grande, por si la solución verdadera del problema está alejada de la obtenida debido a la imprecisión provocada por el muestreo. Si por ejemplo una variable interna está definida en el intervalo  $[0, 1]$ , extraemos 11 muestras por variable (separadas por lo tanto en pasos de 0.1), y la solución es 0.4, el intervalo en el que hacemos el segundo muestreo podría definirse con una amplitud la mitad del anterior alrededor de la solución, extrayendo las nuevas 11 muestras separadas en pasos de 0.05, en el intervalo  $[0.15, 0.65]$ .

Si comprobamos que una nueva solución obtenida está cerca de uno de los extremos del intervalo, conviene repetir el muestreo con la misma precisión desplazándolo en consecuencia, hasta que las soluciones de todas las variables estén relativamente centradas.

Por supuesto, a la hora de decidir la amplitud relativa del nuevo intervalo debe tenerse en cuenta el número de muestras que se están extrayendo; a más muestras menos amplio puede ser ese intervalo.

Si en cada iteración reducimos a la mitad la amplitud del intervalo de análisis (que es una medida muy conservadora, para facilitar que la solución no caiga en un extremo del intervalo), en 20 iteraciones un intervalo inicial queda reducido a una millonésima parte.

## **12. Divide et impera**

### **12.1. Algoritmo**

La asignación en los capitalismos reales se caracteriza por su atomización en unidades de asignación, que maximizan el beneficio, y en la coordinación de esas unidades de asignación, mediante los precios y el tipo de interés.

Construiremos un algoritmo para resolver VN con variables internas que imita en buena medida el funcionamiento de los capitalismos reales. En este algoritmo, en cada proceso la asignación se establece localmente maximizando el beneficio, teniendo en cuenta los precios y el tipo de interés del conjunto del sistema; de la interacción de los procesos surgen los precios y el tipo interés para el conjunto del sistema.

Estos dos procesos en los capitalismos reales son simultáneos, pero nosotros los ejecutaremos sucesivamente para facilitar el cálculo. Una vez obtenida la solución de uno de los problemas, resolveremos el otro y simplemente iteraremos el procedimiento. Podemos comenzar el cálculo en cualquiera de los dos procesos, y por eso tenemos dos versiones del algoritmo.

En una primera versión procederemos:

- 1º, partimos de un factor  $\alpha$  y unos precios  $\mathbf{Y}$  dados;
- 2º, resolvemos los problemas de maximización de beneficio en cada proceso para ese factor y precios, y obtenemos las variables internas y los flujos en cada proceso;
- 3º, resolvemos VN para esos procesos con esos flujos, con alguno de los algoritmos para VN sin variables internas, y obtenemos los precios y el factor  $\alpha$ ;
- 4º, volvemos al punto 2º, hasta que las variables converjan, si lo hacen.

Una segunda versión, que sólo empieza la iteración en el otro punto, consiste en:

- 1º, partimos de unos flujos establecidos para cada proceso;
- 2º, resolvemos VN para esos procesos con esos flujos, con alguno de los algoritmos para VN sin variables internas, y obtenemos los precios y el factor  $\alpha$ ;
- 3º, resolvemos los problemas de maximización de beneficio en cada proceso para ese factor y precios, y obtenemos las variables internas y los flujos en cada proceso
- 4º, volvemos al punto 2º, hasta que las variables converjan, si lo hacen

En cualquiera de las dos versiones, usamos algún algoritmo para resolver VN sin variables internas, para los procesos con los flujos internos ya establecidos, y obtenemos los precios y el factor de interés correspondientes; para estos precios y factor de interés calculamos la maximización del beneficio local en cada proceso para obtener sus flujos internos; e iteramos el procedimiento. La única diferencia entre las dos versiones es el punto en el que iniciamos la iteración.

Para cada proceso, tenemos que calcular las variables internas  $\mathbf{Q}$ , para unos  $\alpha$  e  $\mathbf{Y}$  dados, resolviendo una serie de problemas, uno por cada proceso,

$$\max_{\mathbf{Q}} \sum_j f_j(\alpha, \mathbf{Q}) y_j$$

en donde es posible que las variables internas tengan que cumplir una serie de restricciones. Esta parte del algoritmo implica el problema de asignación local, dentro de cada unidad de producción o empresa.

Para el conjunto del sistema, tenemos que calcular  $\alpha$ ,  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$ , dadas las variables internas  $\mathbf{Q}$ , resolviendo el problema

$$\begin{aligned} & \max_{\alpha, \mathbf{X}} \alpha \\ & \mathbf{X}\mathbf{F}(\alpha, \mathbf{Q}) = 0 \\ & \mathbf{X} \geq 0 \\ & \alpha > 0 \end{aligned}$$

Aquí tratamos la coordinación de las asignaciones locales.

Con este algoritmo no está garantizado que encontremos la solución de cualquier problema. Una primera razón de que esto sea así es que tenemos dos instancias de cálculo, problemáticas cada una por su lado.

Tenemos que resolver el problema VN general sin variables internas. Por supuesto, tenemos algoritmos que son convergentes o que incluso encuentran todas las soluciones. Pero si el problema es grande no podremos usarlos, por su alto coste computacional. Entonces tendremos que recurrir a algoritmos que pueden no converger para según qué problemas.

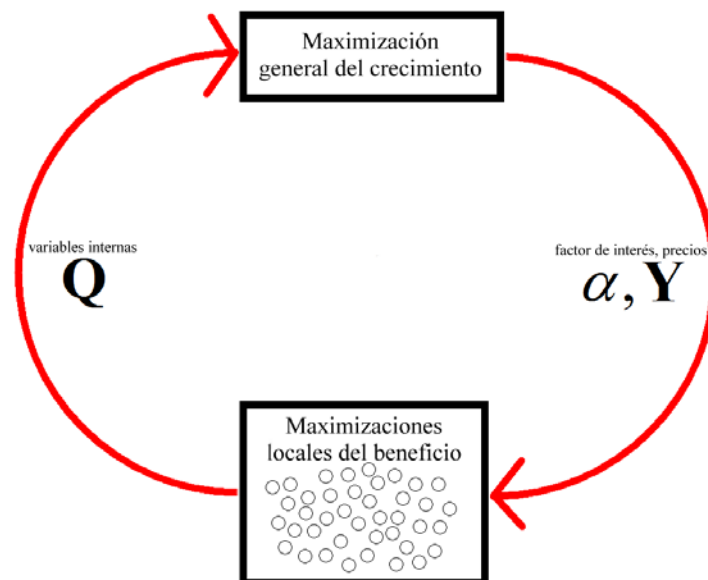
Además tenemos que resolver un conjunto de múltiples maximizaciones de beneficio locales. Después detallaremos cómo hacer esto, pero ya avanzamos que en ocasiones tampoco será sencillo y que habrá problemas locales muy complicados para los que tampoco podremos garantizar que encontremos la solución.

Y además, aun suponiendo que el VN general y que las maximizaciones del beneficio locales encuentren sus respectivas soluciones, la iteración de ambas puede no ser convergente en absoluto; por ejemplo, puede darse una situación como en el “teorema de la telaraña”. Esto puede paliarse si, en vez de usar una iteración directa, usamos una iteración matizada, por ejemplo si los precios y el tipo de interés que se aplican en la maximización del beneficio local no son directamente los del problema general, sino que sólo los variamos en esa dirección (por ejemplo, con la media de los nuevos y los anteriores).

Por otra parte, este algoritmo, al proceder por aproximaciones sucesivas, no encuentra soluciones exactas. No obstante, si planteamos un problema “sencillo”, este algoritmo realmente nos permitirá encontrar una solución con toda la precisión que necesitemos.

## 12.2. Interpretación económica

Representaremos gráficamente la iteración de nuestros algoritmos:



En definitiva, los precios y tipo de interés determinan cómo los procesos tienen que establecer la asignación localmente, y la interacción de los procesos determinan los precios y el tipo de interés. Tenemos asignaciones locales con maximización del beneficio, y coordinación de las asignaciones locales mediante los precios y el tipo de interés.

En los capitalismos reales actuales el problema de establecer la asignación es abrumador. Para entender esta dificultad, imaginemos que pretendemos establecer toda la asignación de manera centralizada.

Primero, sería necesario disponer de un aparato estadístico enorme, para determinar empíricamente los procesos posibles en una sociedad.

Segundo, sería necesario disponer de unos dispositivos de cálculo muy superiores a los disponibles hoy, para resolver un sistema con un número muy grande de variables.

Y tercero, sería necesario tener el poder de ejecutar la asignación calculada.

(Hemos imaginado una asignación centralizada para realizar la asignación del capitalismo, pero si además pretendiéramos establecer un socialismo centralizado tendríamos que afrontar otra tarea más: averiguar cuáles son las necesidades de la gente, tarea que tampoco es precisamente sencilla.)

Por todo ello, con alta tecnología no es posible una pequeña economía establecida de manera autosuficiente, sino que necesita vincularse con otras economías para poder operar. Tampoco es posible una gran economía con una asignación controlada de manera central.

Para afrontar estas tres tareas, en los capitalismos se divide el problema general en subproblemas y se coordinan estos subproblemas con los precios y el tipo de interés. Por supuesto, una primera diferencia de nuestro algoritmo con la realidad es que nosotros usamos dos fases sucesivas, pero en la realidad son simultáneas.

### **12.2.1. Atomización del problema**

En los capitalismos reales la información necesaria para establecer la asignación se limita al nivel de empresa, a pequeña escala, lo que hace el problema mucho más sencillo; no es necesario un enorme aparato estadístico en el ámbito global, sino que dentro de la empresa pueden detectar con más facilidad las necesidades de la producción. El cálculo de la asignación se establece también en el ámbito de la empresa, muy a menudo con estimaciones a ojo de buen cubero, y para un número relativamente pequeño de variables; no es necesario disponer de procedimientos de cálculo excepcionales. La asignación calculada también se ejecuta en el ámbito de la empresa, sin un aparato global que obligue a cada persona a hacer tal o cual cosa, sino con un aparato local para el control de esa obligación, que permite tener mayor control sobre los trabajadores y de la asignación.

Al dividir el problema en subproblemas, el coste de obtener la información, de ejecutar el cálculo, y de llevar a la práctica lo calculado, se reduce muy considerablemente, se hace posible.

Además las empresas tienen que disponer de alguna información sobre los fines que deben buscar internamente para poder establecer una asignación. Esa información la ofrecen los precios y el factor de interés.

### 12.2.2. Coordinación de las empresas atomizadas

Pero queda el problema de coordinar las asignaciones de los subproblemas locales. En los capitalismos reales, una vez obtenida la información localmente, realizado el cálculo localmente, y ejecutada la asignación localmente, se desarrolla la coordinación global de las asignaciones locales mediante el mecanismo de precios.

Los precios y el factor de interés en el algoritmo son el resultado de resolver el modelo para los flujos de los procesos, con las variables internas ya establecidas. Podríamos decir que los precios y el interés surgen pues de la operación de los procesos en conjunto.

Con estos datos las empresas establecen una asignación localmente para maximizar el beneficio, y fijan las variables internas en consecuencia, para determinar los flujos de consumos y producciones.

### 12.3. Anexo: cálculo de la maximización del beneficio en un único proceso

En el algoritmo Divide et impera, así como en otros que señalaremos más adelante, necesitamos resolver, para cada proceso, el problema de calcular las variables internas para las que se maximizan los beneficios, para unos precios y factor de interés dados,

$$\max_{\mathbf{Q}} \sum_j f_j(\alpha, \mathbf{Q}) y_j$$

Este problema es un problema de maximización, quizá restringido a que las variables  $q_i$  estén delimitadas a un intervalo o a unas condiciones internas a ellas. Hay muchos algoritmos numéricos que permiten intentar obtener la solución de un problema así.

Uno, muy poco eficiente pero fácil de entender, es usar una serie de muestras, por ejemplo con la aproximación poligonal, y comprobar para cada muestra cuál es la más rentable. Si usamos un número suficiente de muestras tendremos la solución con toda la precisión que necesitemos.

Pero una exploración sistemática de todas las combinaciones de valores de las variables no es nada eficiente, incluso no es posible si el número de variables es muy grande. Por eso la mayoría de algoritmos usan estrategias de búsqueda que no requieren de investigar un número muy grande de muestras; por ejemplo, una búsqueda local usando el gradiente de la función maximizada, modificando la magnitud de las variables de manera que la función vaya aumentando progresivamente su magnitud.

Otra manera es resolver el sistema de ecuaciones que resulta de las condiciones de máximo del problema. Si las variables internas  $q_i$  no están delimitadas a un intervalo, podemos proceder resolviendo el sistema de ecuaciones, donde  $\alpha$  e  $\mathbf{Y}$  son datos y  $\mathbf{Q}$  las incógnitas

$$\sum_j \frac{df_j(\alpha, \mathbf{Q})}{dq_i} y_j = 0$$

con cualquiera de los algoritmos disponibles a este fin. Si alguna variable  $q_i$  sí estuviera delimitada, por ejemplo a ser no negativa, entonces para esa variable la derivada debe ser no-positiva, y si la variable no es nula debe ser nula; pero hay formas de tratar este caso, como veremos en una sección posterior.

En cualquier caso, dado que la solución de estos problemas no depende de los demás, sino de los precios y factor de interés generales, podemos usar una computación distribuida.

### 13. Autovalores con variables internas

De forma análoga al caso en tiempo discreto, la solución de VN con variables internas tiene que ser o bien un sistema cuadrado o bien una combinación de sistemas cuadrados, para intensidades y precios.

Las ecuaciones para los subproblemas cuadrados resultan, tanto en tiempo discreto como continuo,

$$\mathbf{XF}(\alpha, q_1, q_2, q_3, q_4, \dots) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{F}(\alpha, q_1, q_2, q_3, q_4, \dots)\mathbf{Y} = \mathbf{0}$$

Dado el factor de expansión  $\alpha$ , y las variables internas  $q_1, q_2, q_3, \dots$ , estas ecuaciones resultan sistemas lineales homogéneos, que tendrán una solución no trivial para las  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  cuando

$$\det(\mathbf{F}(\alpha, q_1, q_2, q_3, q_4, \dots)) = 0$$

Estamos en una situación parecida al caso sin variables internas, pero ahora hay que tomar en consideración además esas variables. Por eso, si se cumplen las condiciones de regularidad, también tiene que maximizarse el beneficio dentro de cada proceso que opera y, como antes, tiene que anularse la derivada del lagrangiano con respecto al factor

$$\frac{dL}{d\mathbf{Q}} = \mathbf{X} \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{Q}} \mathbf{Y} = \mathbf{0}$$

$$\frac{dL}{d\alpha} = 1 + \mathbf{X} \frac{d\mathbf{F}}{d\alpha} \mathbf{Y} = 0$$

#### 13.1. Algoritmo

Procederemos:

- 1º, construimos todos los subproblemas cuadrados posibles;
- 2º, resolvemos el problema de autovalores y autovectores para cada subproblema cuadrado, *teniendo en cuenta la maximización del beneficio local en cada proceso*;
- 3º, completamos la solución y normalizamos  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  para intentar que se cumplan las condiciones de signo;
- 4º, comprobamos si se cumplen todas las demás condiciones de VN para el conjunto del problema, y si lo hacen tenemos una solución.

El procedimiento es idéntico al caso son variables internas, pero ahora debemos tener en cuenta la maximización del beneficio en cada proceso, la existencia de variables internas, al resolver el problema de autovalores. Esto complica bastante la solución.

## 13.2. Interpretación económica

La interpretación es similar al caso sin variables internas, teniendo en cuenta la maximización del beneficio local, por lo que no nos detendremos en ella.

Si el algoritmo de los autovalores sin variables internas era la traslación de la ley de la rentabilidad clásica, o de Sraffa, aplicada a todas las posibles combinaciones de procesos, ahora estamos en la misma situación pero teniendo en cuenta la maximización local del beneficio. En definitiva, estamos calculando, para todas las combinaciones posibles de procesos, los precios que se corresponden a la ley de la rentabilidad clásica, pero ahora de manera que en cada proceso se maximice el beneficio con respecto a esos precios y el correspondiente factor. Por supuesto, esto se corresponde también a la visión de Smith y Ricardo del proceso económico.

## 13.3. Anexo: solución del problema de autovalores con variables internas

### 13.3.1. Soluciones exactas

En general será muy difícil, aunque no siempre imposible, encontrar las soluciones exactas con variables internas, más si el problema está en tiempo continuo. Primero explicaremos la base lógica del método que usamos, y después describiremos el procedimiento en sí.

Si para un subproblema cuadrado desarrollamos el determinante, que tiene que anularse para que exista una solución no trivial de intensidades y precios,

$$\det(\mathbf{F}(\alpha, q_1, q_2, q_3, q_4, \dots))$$

éste será un polinomio (del inverso) de  $\alpha$  si estamos en tiempo discreto, o una función de  $\alpha$  si estamos en tiempo continuo. Despejando  $\alpha$  de la ecuación

$$\det(\mathbf{F}(\alpha, q_1, q_2, q_3, q_4, \dots)) = 0$$

nos resulta una función, una por raíz y por lo tanto multivaluada, de las  $q_i$

$$\alpha_j(q_1, q_2, q_3, q_4, \dots)$$

Para cada uno de los valores de la función podemos resolver los sistemas lineales homogéneos

$$\mathbf{X}\mathbf{F}(\alpha_j(q_1, q_2, q_3, q_4, \dots)) = \mathbf{0}$$

tomando las  $q_i$  como parámetros, con lo que conseguimos las intensidades como una función vectorial multivaluada,  $\mathbf{X}_j$ . Tenemos unas funciones, multivaluadas, para  $\alpha$  y  $\mathbf{X}$ . Planteamos para cada uno de los valores el problema

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{Q}} \alpha_j(\mathbf{Q}) \\ \mathbf{X}_j(\mathbf{Q}) \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

No necesitamos plantear como restricción que se cumplen los balances materiales  $\mathbf{X}\mathbf{F}(\alpha, \mathbf{Q}) = \mathbf{0}$  porque, para cualquier  $\mathbf{Q}$ , habrá una solución no trivial con el  $\alpha$  que resulta del valor correspondiente de la función multivaluada. Tampoco tenemos que especificar  $\alpha$  y  $\mathbf{X}$  como variables, porque para cualquier  $\mathbf{Q}$  tenemos sus valores como funciones, y por lo tanto éstas son las únicas incógnitas. Las condiciones de máximo resultan, para las  $\mathbf{Q}$  no delimitadas,

$$\frac{d\alpha_j}{dq_i} + \frac{d\mathbf{X}_j}{dq_i} \lambda = 0$$

Si la restricción se cumple como desigualdad, si  $\mathbf{X}(\mathbf{Q}) > \mathbf{0}$ , su multiplicador de Lagrange  $\lambda$  será 0. Por lo tanto, en este caso, con intensidades positivas, tenemos

$$\frac{d\alpha_j}{dq_i} = 0$$

Si la restricción se cumple como igualdad, si  $\mathbf{X}(\mathbf{Q}) = \mathbf{0}$ , si la intensidad es nula, el multiplicador  $\lambda$  será no negativo, y habría que tomar en consideración la condición de máximo completa. Ahora bien, si en un subproblema cuadrado alguna intensidad es 0 siempre habrá un subproblema cuadrado menor con solución descartando los procesos con intensidades nulas. Podemos pues limitarnos al caso de las intensidades positivas si investigamos todos los subproblemas cuadrados.

Si una  $q_i$  está delimitada, por ejemplo al intervalo  $[a, b]$ , podemos plantear la ecuación correspondiente como

$$(q_i - a)(q_i - b) \frac{d\alpha_j}{dq_i} = 0$$

y comprobar, a posteriori de la solución del sistema de ecuaciones, si

$$\text{cuando } q_i = a, \frac{d\alpha_j}{dq_i} \leq 0$$

$$\text{cuando } q_i = b, \frac{d\alpha_j}{dq_i} \geq 0$$

### 13.3.1.1. Procedimiento

Por lo tanto:

1º, construimos todos los subproblemas cuadrados;

2º, para cada subproblema despejamos  $\alpha$  de la ecuación  $\det(\mathbf{F}(\alpha, \mathbf{Q})) = 0$ , y tenemos  $\alpha$  como una función multivaluada de las variables internas  $\mathbf{Q}$ ;

3º, con cada una de las funciones multivaluadas, resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\frac{d\alpha_j}{d\mathbf{Q}} = 0$$

(teniendo en cuenta las delimitaciones de  $\mathbf{Q}$ , si las hubiera) y tenemos la magnitud de las variables internas para cada función; con esa magnitud especificada, el problema se convierte en un problema de autovalores sin variables internas;

4º, calculamos  $\alpha$  directamente substituyendo las  $\mathbf{Q}$  en la función multivaluada correspondiente;

5º, resolvemos los sistemas lineales homogéneos para obtener los correspondientes  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$ .

### 13.3.1.2. Ejemplo

Vamos a resolver el problema

$$\mathbf{F}(\alpha, \mathbf{Q}) = \begin{bmatrix} -q_1 + 4q_1(1-q_1)/\alpha & -1 \\ -1 & 3/\alpha \end{bmatrix}$$

En el primer proceso se consume  $q_1$  de la materia 1ª en el instante 0, se consume 1 de la materia 2ª en el instante 0, y se produce  $4q_1(1-q_1)$  en el instante 1. El segundo proceso no tiene variables internas, y se consume 1 de la materia 1ª en el instante 0 para producir 3 de la materia 2ª en el instante 1.



Empezamos por el subproblema 2\*2. Su determinante queda

$$-1 - 3 q_1/\alpha + (-12 q_1^2 + 12 q_1)/\alpha^2$$

que es un polinomio de grado 2 (del inverso) de  $\alpha$ .

Anulando el determinante y despejando  $\alpha$  tenemos dos raíces

$$\alpha_1(q_1) = (3^{1/2} (-q_1 (13 q_1 - 16))^{1/2})/2 - (3 q_1)/2$$

$$\alpha_2(q_1) = -(3 q_1)/2 - (3^{1/2} (-q_1 (13 q_1 - 16))^{1/2})/2$$

Para la primera raíz  $\alpha_1(q_1)$  resolvemos el sistema de ecuaciones (en este caso una ecuación, porque sólo hay una variable interna) del paso 3º (vamos a prescindir de las delimitaciones de  $q_1$ ), que para la primera raíz queda

$$\frac{d\alpha_1}{dq_1} = -(3^{1/2} (26 q_1 - 16))/(4 (-q_1 (13 q_1 - 16))^{1/2}) - 3/2 = 0$$

cuya solución es

$$q_1 = 8/13 - (2 \cdot 3^{1/2})/13 \approx 0.3489152$$

Substituyendo nos queda

$$\alpha_1(q_1) = (3 \cdot 3^{1/2})/13 + (3^{1/2} (- (2 \cdot 3^{1/2} + 8) ((2 \cdot 3^{1/2})/13 - 8/13))^{1/2})/2 - 12/13 \approx 1.2086779$$

Tenemos el primer autovalor y su variable interna con precisión exacta. Calcularíamos los autovectores resolviendo los correspondientes sistemas de ecuaciones lineales.

Procederíamos igual con la segunda raíz, que resulta -3.054831763; al ser negativa no nos interesa como solución de VN.

Seguiríamos con los menores de orden 1\*1, de la misma manera.

### 13.3.2. Soluciones aproximadas

Una alternativa es despejar  $\alpha$  como una función multivaluada, como vimos en §13.3.1, y resolver el problema de maximización, con un algoritmo de programación no lineal, para cada uno de los valores de  $\alpha$

$$\max_{\mathbf{Q}} \alpha_j(\mathbf{Q})$$

Esto equivale a resolver el sistema de ecuaciones

$$\frac{d\alpha_j}{d\mathbf{Q}} = 0$$

de manera aproximada, lo que generalmente es mucho más sencillo que de forma exacta. Si las  $\mathbf{Q}$  tienen alguna delimitación podemos tomarla en consideración en el programa no lineal.

Una segunda alternativa para obtener los autovalores y autovectores (que nos interesan) es resolver VN con las variables internas para el sistema cuadrado. Podemos hacer esto con un algoritmo de programación no lineal, con el Muestreo o con el algoritmo Divide et impera. Este procedimiento nos ofrece las intensidades correspondientes, las variables internas, y los precios como los multiplicadores de Lagrange.

## 14. Simplex con variables internas

### 14.1. Algoritmo

Vimos el algoritmo Simplex para los procesos sin variables internas y su vínculo con el funcionamiento del mecanismo mercantil. Ahora estudiaremos el caso con variables internas, muy parecido, pero en donde hay que tener en cuenta la existencia de esas variables. Aplicaremos el algoritmo cuando el número de procesos es mayor que el número de materias.

Procederemos:

- 1º, partimos de un número pequeño de procesos a los que llamaremos “básicos”;
- 2º, resolvemos VN para los procesos básicos *con un algoritmo con variables internas que tenga en cuenta la maximización del beneficio local en cada proceso*, y obtendremos los correspondientes precios y factor de interés; si este VN no tuviera solución interrumpimos el algoritmo;
- 3º, descartamos de los procesos básicos aquellos que obtengan pérdidas, y que no operarán;
- 4º, con los precios y tipo de interés que obtuvimos con los procesos básicos, calculamos los beneficios que obtienen cada uno de los procesos no básicos, *resolviendo la maximización del beneficio local en cada proceso*;
- 5º, si ningún proceso no básico obtiene beneficios, hemos encontrado una solución al problema e interrumpimos el algoritmo;
- 6º, si algún proceso no básico obtiene beneficios, incorporamos a los procesos básicos el que más beneficios obtenga;
- 7º, tenemos unos nuevos procesos básicos, y volvemos al paso 2º.

Hemos subrayado las diferencias con el Simplex para los procesos sin variables internas, que en realidad sólo son dos: en el paso 2º tenemos que resolver VN para los procesos básicos con un algoritmo con variables internas, teniendo en cuenta la maximización del beneficio local en cada proceso para sus variables internas; y en el paso 4º, que también tenemos que tener en cuenta la maximización local (como vimos en §12.3).

Como vemos el algoritmo es idéntico al caso sin variables internas, pero ahora se toma en consideración la maximización local del beneficio, aspecto que en el caso de los procesos sin variables internas se soslayaba. En efecto, si no hay variables internas entonces cada proceso sólo puede operar de una manera, de acuerdo a flujos predefinidos. Con variables internas debe maximizarse el beneficio, tanto a la hora de resolver VN para los procesos básicos, como a la hora de calcular los beneficios del resto de los procesos.

No debemos confundir el Simplex con variables internas con el Divide et impera usando el Simplex sin variables internas para resolver el problema general. El Divide et impera no puede encontrar soluciones exactas, porque procede por aproximaciones sucesivas, aunque use un algoritmo que da soluciones exactas para resolver VN sin variables internas como motor. El Simplex con variables internas sí puede encontrar soluciones exactas, si usa como motor un algoritmo para resolver VN para los procesos básicos que sea exacto también, como el algoritmo de los autovalores con variables internas.

## **14.2. Interpretación económica**

La interpretación económica es similar al caso sin variables internas, por lo que no nos extenderemos en ella. La única particularidad es que ahora tenemos en cuenta la maximización del beneficio a la hora de resolver los problemas básicos, y a la hora de calcular los beneficios de los no-básicos.

También mucho de lo que hemos dicho en el algoritmo Divide et impera es aplicable a ésta versión del Simplex; aquí también estamos usando esa misma estrategia de dividir el problema en subproblemas, por razones similares.

## **15. Consideraciones finales sobre los algoritmos**

### **15.1. Recapitulación sobre los algoritmos**

De los algoritmos que hemos visto cuatro destacan por su especialmente interesante interpretación o implicación económica: Autovalores, Simplex, Muestreo, y Divide et impera. Recordemos muy brevemente su forma de operar.

El algoritmo de Autovalores construye todas las subeconomías cuadradas posibles, resuelve para cada subeconomía las ecuaciones de Sraffa, que implican la ley de la rentabilidad de los clásicos, calculando los precios que permiten que los procesos de la subeconomía obtengan la misma tasa de beneficio (y, si hay variables internas en los procesos, maximizándose el beneficio en cada uno). También calcula las intensidades de la subeconomía para las que se cumplen los balances materiales. Y comprueba si para los precios e intensidades de alguna subeconomía se cumplen los balances materiales y la ley de la rentabilidad para el conjunto de la economía; si se cumplen tenemos una solución.

Matemáticamente esto equivale a resolver un problema matemático clásico, el problema de autovalores, para encontrar las soluciones para todos los subproblemas cuadrados (y si hay variables internas, determinando la magnitud de estas variables de acuerdo a la condición de máximo correspondiente). Para cada solución de los subproblemas, se comprueba si se cumplen las restricciones y condiciones de VN para el resto del problema, y si alguna lo hace tenemos una solución.

El algoritmo Simplex supone que empezamos operando un número pequeño de procesos de todos los disponibles, que llamamos “básicos”. A estos procesos les corresponden un tipo de interés y unos precios, que se obtienen resolviendo el modelo para esos procesos usando otro algoritmo VN. A continuación se descarta de los “básicos” los procesos que no son rentables y que no operaran. Se calculan los beneficios del resto de los procesos (en su caso, maximizando el beneficio internamente) y se incorpora a los “básicos” el proceso más rentable de los no incluidos entre los “básicos”. Tenemos unos nuevos procesos “básicos”, y se repite el procedimiento hasta que todos los procesos cumplan la ley de la rentabilidad para el tipo de interés y los precios de los “básicos”.

Matemáticamente, esto equivale resolver VN para los básicos para obtener su factor de interés y sus multiplicadores de Lagrange. Se descartan de los “básicos” los procesos que cumplen las condiciones de máximo con holgura y que no operaran. Se calculan las condiciones de máximo (y si hay variables internas, determinando la magnitud de estas

variables de acuerdo a la condición de máximo correspondiente), y se incorporan a los “básicos” el proceso no básico que incumpla más las condiciones de máximo. Se itera el procedimiento hasta que todos los procesos cumplan las condiciones de máximo para el factor de interés y los multiplicadores de Lagrange de los “básicos”.

El Muestreo opera con procesos que incluyen variables internas, en los que hay que decidir cómo establecer la asignación internamente. Convierte el problema con variables internas en uno sin esas variables, obteniendo una serie de muestras para las variables internas, y resuelve el problema ya sin variables internas con otro algoritmo VN.

El Divide et impera parte de un tipo de interés y unos precios iniciales. Para cada proceso calcula la asignación local que maximiza el beneficio para esos precios y tipos de interés, con lo que establece las asignaciones locales. Resuelve el problema VN resultante ya sin variables internas, obteniendo unos nuevos precios y tipos de interés e itera el procedimiento.

Matemáticamente, el Divide et impera parte de un factor y unos multiplicadores de Lagrange iniciales. Convierte el problema con variables internas en uno sin variables internas, calculando la magnitud de las variables internas de manera que se cumplan las condiciones de máximo de VN para esas variables. Resuelve el problema VN resultante ya sin variables internas, obteniendo unos nuevos factor y multiplicadores de Lagrange, e itera el procedimiento.

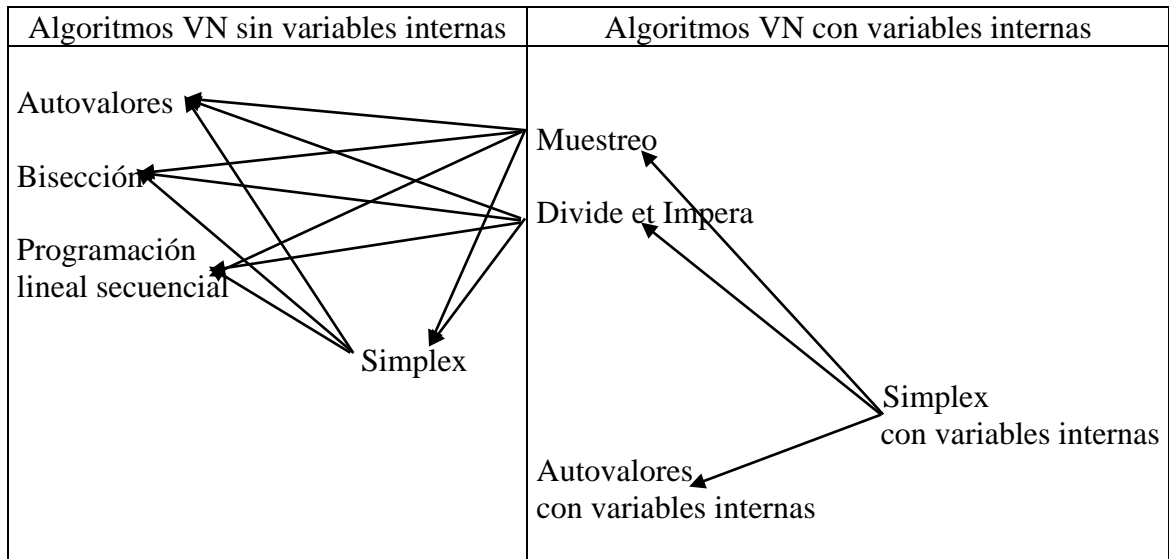
## 15.2. Anexo: principales propiedades de los algoritmos

Recapitularemos ahora sobre las propiedades de los principales algoritmos estudiados: los datos iniciales de los que tiene que partir, la convergencia típica, el coste computacional, el algoritmo interno que usa o “motor”, el número de soluciones que puede encontrar y la precisión máxima que puede alcanzar:

|   | Inicio                     | Convergencia       | Coste    | Motor   | Soluciones      |
|---|----------------------------|--------------------|----------|---|-----------------|
| <b>Autovalores sin variables internas</b> |                            | Siempre            | Alto     | Problema de autovalores                         | Todas, Exactas  |
| <b>Bisección</b>                          | $\alpha_{sí}, \alpha_{sí}$ | Siempre            | Medio    | Juego   | Una, Aproximada |
| <b>Programación lineal secuencial</b>     | $\alpha, X$                | Buena              | Bajo     | Programa lineal                                 | Una, Aproximada |
| <b>Simplex sin variables internas</b>     | Procesos básicos           | Regular            | Muy bajo | <i>Otro algoritmo VN sin variables internas</i> | Una, Exacta     |
| <b>Muestreo</b>                           |                            | La del motor usado | Alto     | <i>Otro algoritmo VN sin variables internas</i> | Una, Aproximada |
| <b>Divide et impera</b>                   |                            | Regular            | Alto     | <i>Otro algoritmo VN sin variables internas</i> | Una, Aproximada |
| <b>Autovalores con variables internas</b> |                            | Siempre            | Muy alto | Problema de autovalores con variables internas  | Todas, Exactas  |
| <b>Simplex con variables internas</b>     | Procesos básicos           | Regular            | Alto     | <i>Otro algoritmo VN con variables internas</i> | Una, Exacta     |

## 15.3. Anexo: motores

Como hemos visto, algunos algoritmos necesitan usar otros como “motores”. Así el Simplex sin variables internas, el Muestreo y el Divide et impera necesitan usar cualquier otro algoritmo VN sin variables internas; el Simplex con variables internas necesita cualquier otro algoritmo VN con variables internas.



A su vez, el resto de algoritmos reseñados usan como “motores” algoritmos para resolver problemas matemáticos más fundamentales. Los algoritmos de los autovalores (con y sin variables internas) resuelven un conjunto de problemas de autovalores (con y sin variables internas); la bisección usa una sucesión de juegos; la programación lineal secuencial utiliza varios programas lineales.

Esta concatenación puede provocar una estructura complicada a la hora de resolver un problema. Por ejemplo, si resolvemos un modelo con el Simplex con variables internas, éste puede usar el Muestreo, que a su vez pueden usar el Simplex sin variables internas, que a su vez pueden usar la Bisección (que a su vez plantea varios juegos cada uno resuelto con un programa lineal, que a su vez se soluciona con varios sistemas de ecuaciones lineales). En cada uno de los estratos se busca la solución del problema apelando a otros más sencillos.

Esta estratificación del cálculo, reduciendo en cada nivel el problema a una sucesión de problemas más sencillos, también tiene su reflejo en la manera en la que se establece la asignación en la realidad, en donde la estratificación de las decisiones en las empresas es también fundamental.

### 15.4. Anexo: algoritmos combinados

Con los problemas sin variables internas de tamaño grande el algoritmo de autovalores, que nos garantiza encontrar todas las soluciones, es demasiado costoso. Por eso necesitamos algoritmos como la programación lineal secuencial, o la bisección. De éstos últimos el primero es mucho más rápido, pero no siempre es convergente, como sí lo es el segundo. Una buena estrategia es combinar los algoritmos, de manera que usemos sus mejores propiedades: la velocidad de la programación lineal secuencial y la convergencia de la bisección.

Para usar estos algoritmos de manera combinada, ejecutaremos una sucesión de algoritmos, comprobando en cada paso si ha encontrado una solución. Si se encontró detenemos el procedimiento, y si no pasamos al siguiente.

Procederemos:

- 1º, lanzamos la programación lineal secuencial, partiendo de un factor 1 y de unas intensidades  $1/\text{número de materias}$ ; comprobamos si se encontró una solución y continuamos si no;
- 2º, lanzamos la búsqueda de  $\alpha_{\text{sí}}$  con el algoritmo visto en §8.2.4, para encontrar un factor e intensidades los que exista un crecimiento proporcional; comprobamos si hay solución para ese factor, intensidades y multiplicadores de Lagrange, y continuamos si no;
- 3º lanzamos la programación lineal secuencial utilizando el factor e intensidades encontrada en el paso anterior; comprobamos si se encontró una solución y continuamos si no;
- 4º, lanzamos la búsqueda de un  $\alpha_{\text{no}}$  para el que no exista un crecimiento proporcional con el algoritmo visto en §8.2.5; comprobamos si hay una solución para  $\alpha_{\text{sí}}$ , las intensidades correspondientes a  $\alpha_{\text{sí}}$  y los multiplicadores de Lagrange correspondientes a  $\alpha_{\text{no}}$ , y continuamos si no se encontró una solución;
- 5º lanzamos el algoritmo de la bisección usando los  $\alpha_{\text{sí}}$  y  $\alpha_{\text{no}}$  encontrados con anterioridad.

Esta combinación de algoritmos es aplicable a problemas de tamaño grande, aunque no desmesurado (para los que tendremos que usar el Simplex). Resulta muy rápida, porque para los problemas fáciles encontrará la solución sólo con el primer paso, y según aumenta la dificultad del problema lo intenta con los pasos siguientes. Además, como en el último paso usa un algoritmo relativamente lento, pero que siempre es convergente, si se ha encontrado previamente un  $\alpha_{\text{sí}}$  y un  $\alpha_{\text{no}}$ , muy a menudo encontrará la solución de casi cualquier problema, de tamaño no desmesurado.

Como hemos dicho, con los problemas grandes sólo será razonable intentar encontrar una solución en precisión doble. Además los algoritmos que incorpora nuestro algoritmo combinado no permiten encontrar soluciones exactas, y sólo encontrarán una solución. Pero, en definitiva, es un procedimiento rápido y muy fiable para encontrar una solución (si existe), aplicable a problemas grandes, y que combina las ventajas de los algoritmos vistos con anterioridad.

Con variables internas también podemos combinar los algoritmos para aprovechar sus mejores propiedades. La aproximación con muestras será siempre convergente si usamos como motor la bisección; pero, si el número de muestras es muy grande, será mucho más costoso que usar la misma aproximación poligonal con el Simplex sin variables internas, que no siempre es convergente. Así que podemos proceder primero usando como motor el Simplex sin variables internas, y si éste no es convergente usar como motor la bisección.

## **15.5. Anexo: bibliografía sobre los algoritmos estudiados**

El algoritmo de autovalores sin variables internas, la Bisección, la Programación lineal secuencial y el Simplex sin variable internas tratados han sido estudiados en la literatura para el modelo original, escrito con las matrices **A** y **B** y con materias eliminables. Nosotros los hemos adaptado para poder estudiar las generalizaciones de §5.

Comentaremos muy brevemente los textos reseñados. Las referencias completas están en la Bibliografía.

### **15.5.1. Autovalores sin variables internas**

Thompson y Weil, “Von Neumann Model Solutions Are Generalized Eigensystems”

(Estudian el algoritmo resolviendo todos los subsistemas de todos los tamaños. Tienen que proceder así, porque en el modelo original los balances materiales se cumplen como desigualdades, y por ello no pueden aplicar lo visto en §7.3.4)

### **15.5.2. Bisección**

Hamburger, Thompson y Weil, “Computation of Expansion Rates for the Generalized von Neumann Model of an Expanding Economy”

(Puede encontrarse la Bisección para el modelo Von Neumann original, usando la función  $u(\alpha)$  descrita en §8.2.1. Ésta función se define en Kemeny, Morgenstern y Thompson, “A Generalization of the von Neumann Model of an Expanding Economy”.)

Mantel, “El modelo general de producción y crecimiento proporcional”,

(Se utiliza la Bisección pero resolviendo un programa lineal para comprobar si existe un crecimiento proporcional; si se cumplen los balances materiales con intensidades no negativas)

### **15.5.3. Programación lineal secuencial**

Robinson, “A linearization technique for solving the irreducible Von Neumann model”.

(Se discuten variantes de este algoritmo de varios autores para el modelo VN original.)

### **15.5.4. Simplex sin variables internas**

Weil, “An Algorithm for the von Neumann Economy”

(Se acerca a la formulación del algoritmo, pero señala varios errores en Thompson y Weil, “Von Neumann Model Solutions Are Generalized Eigensystems”. Véase también, Bródy, *Proportions, prices and planning*, pág. 74 y 75, donde se da una interpretación económica parecida a la nuestra.)

# Referencias

## R.1. Textos de John von Neumann

**Neumann**, John von, *Collected Works*, A. H. Tabú (editor), Pergamon Press, New York 1963.

### R.1.1. El modelo económico

**Neumann**, John von, “Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes”, *Ergebnisse eines mathematischen kolloquiums* (editado por Karl Menger), vol. 8, páginas 73-83, Deuticke, Leipzig 1937.

En español como “Un modelo de equilibrio económico general”, incluido en Barceló, Alfons (editor), *El modelo de Von Neumann*, Departamento de Teoría Económica, Universidad de Valencia, 1975,

<https://www.dropbox.com/sh/pes5eth6td20cyo/AADBk1kROrF3UJ0jgpJSvrXua/Neumann?preview=El+modelo+de+Von+Neumann.pdf>

En inglés como “A Model of General Economic Equilibrium”, *Review of Economic Studies* nº 13, 1945, <http://www.jstor.org/stable/2296111>

### R.1.2. Teoría de juegos

**Neumann**, John von, y Oskar **Morgenstern**, *Theory of Games and Economic Behavior*, 2ª ed., Princeton University Press, 1955,

**Neumann**, John von, “Zur Theorie der Gesellschaftsspiele”, *Mathematische Annalen*, 100, 1928, [https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN235181684\\_0100](https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN235181684_0100)

En inglés como “On the Theory of Games of Strategy”, incluido en A. W. Tucker and R. D. Luce (editores), *Contributions to the Theory of Games*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1959.

### R.1.3. Teoría de autómatas autoreproductivos

**Neumann**, John von, “The general and logical theory of automata”, incluido en L. A. Jeffress (Ed.), *Cerebral mechanisms in behavior; the Hixon Symposium* (pp. 1-41), Wiley, Oxford 1951.

**Neumann**, John von, *Theory of Self-Reproducing Automata*, edited and completed by Arthur W. Burks, University of Illinois Press, Urbana y Londres 1966,

[https://archive.org/details/theoryofselfrepr00vonn\\_0](https://archive.org/details/theoryofselfrepr00vonn_0)

### R.1.4. Otros textos

**Neumann**, John von, *The Computer and the Brain*, Yale University Press, 1958,

<https://archive.org/details/TheComputerAndTheBrain>

En español como *El ordenador y el cerebro*, Bon Ton, Barcelona

**Neumann**, John von, *First Draft of a Report on the EDVAC*, University of Pennsylvania, 1945, <https://archive.org/details/firstdraftofrepo00vonn>



## R.2. Códigos de algoritmos

**Afriat**, Sydney N., “Von Neumann's Economic Model”, incluido en Dore, Mohammed, Sukhamoy Chakravarty y Richard Goodwin (editores), *John von Neumann and modern economics*, Clarendon Press, Oxford 1989. Código en BASIC.

**Bródy**, András, “The implicit dynamics of the von Neumann Growth Model”, *Acta Oeconomica*, Vol. 54 (1), 2004, <https://www.jstor.org/stable/90002527> . Código en MATLAB.

**Muiños**, Manuel, 2011, <https://sites.google.com/site/manuelmuinhospan/> . Códigos en MATLAB.

**Sargent**, Thomas, *Von Neumann Growth Model (and a Generalization)*, 2019, [https://lectures.quantecon.org/py/von\\_neumann\\_model.html](https://lectures.quantecon.org/py/von_neumann_model.html) . Código en Python.

## R.3. Referencias sobre algoritmos

**Afriat**, Sydney N., “Von Neumann's Economic Model”, incluido en Dore, Mohammed, Sukhamoy Chakravarty y Richard Goodwin (editores), *John von Neumann and modern economics*, Clarendon Press, Oxford 1989.

**Bose**, Deb Kumar y **Bose**, Sanjit, “An Algorithm for Computing the von Neumann Balanced Growth Path”, *Econometrica*, Vol. 40, No. 4 (Jul., 1972), <https://www.jstor.org/stable/1912972>

**Bródy**, András, “The implicit dynamics of the von Neumann Growth Model”, *Acta Oeconomica*, Vol. 54 (1), 2004, <https://www.jstor.org/stable/90002527> .

**Burley**, S. P., “Calculating Von Neumann Trajectories by Simulated Market Adjustments”, incluido en Bruckmann, Gerhart y Wilhelm Weber (editores), *Contributions to the Von Neumann Growth Model*, Springer-Verlag, New York y Viena 1971.

**Burley**, S. P., “Dynamic Generalizations of the Von Neumann Model”, incluido en Łoś, Jerzy y Maria W. Łoś,(editores) *Mathematical models in economics*, North-Holland Pub. Co., 1974.

**Hamburger**, Michael J., Gerald L. **Thompson** y Roman L. **Weil Jr.**, “Computation of Expansion Rates for the Generalized von Neumann Model of an Expanding Economy”, *Econometrica*, Vol. 35, No. 3/4, jul.-oct. 1967, <http://www.jstor.org/stable/1905656>

**Mantel**, Rolf R., *An efficient algorithm for the computation of a solution to von Nuemann's model*. Buenos Aires: Instituto Torcuato Di Tella, DTE 68, junio 1969.

**Mantel**, Rolf R., “El modelo general de producción y crecimiento proporcional”, *Económica, La Plata*, Vol. XIV, Número especial, 1999, [https://aaep.org.ar/anales/pdf\\_98/MANTEL.PDF](https://aaep.org.ar/anales/pdf_98/MANTEL.PDF)

**Robinson**, Stephen M., “Numerical solution of the irreducible von Neumann economic model”, *Technical Summary Report No. 1142*, Mathematics Research Center, University of Wisconsin, 1971.

**Robinson**, Stephen M., “A linearization technique for solving the irreducible Von Neumann model”, incluido en Łoś, Jerzy y Maria W. Łoś,(editores) *Mathematical models in economics*, North-Holland Pub. Co., 1974.

**Schroeder**, Roger G., “Linear Programming Solutions to Ratio Games”, *Operations Research*, Vol. 18, No. 2 (Mar. - Apr., 1970), <https://www.jstor.org/stable/168686>

**Thompson**, Gerald L. y Roman L. **Weil**, “Von Neumann Model Solutions Are Generalized Eigensystems”, incluido en Bruckmann, Gerhart y Wilhelm Weber (editores), *Contributions to the Von Neumann Growth Model*, Springer-Verlag, New York y Viena 1971, [https://doi.org/10.1007/978-3-662-24667-2\\_14](https://doi.org/10.1007/978-3-662-24667-2_14)

**Thompson**, Gerald L., “Computing the Natural Factors of a Closed Expanding Economy Model”, *Zeitschrift für Nationalökonomie / Journal of Economics*, Bd. 34, H. 1/2 (1974), pp. 57-68, <https://www.jstor.org/stable/41797656>

**Weil**, Roman L., 'Solutions to the Decomposable von Neumann Model', *Econometrica* 38, 1970, <https://www.jstor.org/stable/1913009>

**Weil**, Roman L., “An Algorithm for the von Neumann Economy”, *Zeitschrift für Nationalökonomie*; Jan 1, 1964, <https://www.jstor.org/stable/41796805>

**Ye**, Yiyun, “On the von Neumann Economic Growth Problem”, *Mathematics of Operations Research*, Vol. 20, No. 3 (Aug., 1995), <https://www.jstor.org/stable/3690174>

#### **R.4. Referencias generales**

*Acta Oeconomica*, Special issue about John von Neumann, Vol. 54 (1), 2004, <https://akademai.com/toc/032/54/1>

**Balinski**, M. L. y H. P. **Young**, “Interpreting Von Neumann Model Prices as Marginal Values”, *Journal of Economic Theory*, 9, 1974.

**Barceló**, Alfons (editor), *El modelo de Von Neumann*, Departamento de Teoría Económica, Universidad de Valencia, 1975. <https://www.dropbox.com/sh/pes5eth6td20cyo/AADBk1kROrF3UJ0jgpJSvrXua/Neumann?preview=El+modelo+de+Von+Neumann.pdf>

**Bródy**, András, *Proportions, prices and planning: a mathematical restatement of labor theory of value*, Akadémiai Kiadó, Budapest 1974.

**Bródy**, András, “Growth or Development?”, *Acta Oeconomica*, Vol. 61 (2) pp. 131–142, 2011

En español como “¿Crecimiento o desarrollo?”, *Revista de Economía Crítica*, nº14, segundo semestre 2012, <http://revistaeconomiacritica.org/sites/default/files/revistas/n14/Articulo-5.-brody.pdf>

**Bruckmann**, Gerhart y Wilhelm **Weber** (editores), *Contributions to the Von Neumann Growth Model*, Springer-Verlag, New York y Viena 1971.

**Champernowne**, David G., “A note on J. v. Neumann’s Article on ‘A Model of Economic Equilibrium’ ”, *Review of Economic Studies*, Vol. 13, 1945,  
<http://www.jstor.org/stable/2296112E>

En español como “Notas sobre el artículo de J. von Neumann ‘Un modelo de equilibrio económico’” incluido en Barceló, Alfons (editor), *El modelo de Von Neumann*, Departamento de Teoría Económica, Universidad de Valencia, 1975.

**Dantzig**, George B. y Mukund N. **Thapa**, *Linear Programming 1: Introduction*, Springer, New York 1997.

**Dantzig**, George B. y Mukund N. **Thapa**, *Linear Programming 2: Theory and Extensions*, Springer, New York 2003.

**Dantzig** George B. y Philip **Wolfe**, “The Decomposition Algorithm for Linear Programs”, *Econometrica*, Vol. 29, No. 4 (Oct., 1961), pp. 767-778  
<https://www.jstor.org/stable/1911818>

**Dore**, Mohammed, Sukhamoy **Chakravarty** y Richard **Goodwin**, (editores) *John von Neumann and modern economics*, Clarendon Press, Oxford 1989.

**Dorfman**, Robert, Paul A. **Samuelson** y Robert M. **Solow**, *Linear programming and economic analysis*, Courier Dover Publications, 1987.

En español como *Programación lineal y análisis económico*, 2ª ed., Aguilar, Madrid 1964.

**Evstigneev**, Igor V. y Klaus Reiner **Schenk-Hoppé**, *The von Neumann-Gale growth model and its Stochastic generalization*, National Centre of Competence in Research, Financial Valuation and Risk Management, Working Paper No. 208, 2006.

**Gale**, David, *The Theory of Linear Economic Models*, McGraw-Hill, New York 1960.

**Gale**, David, “The closed linear model of production”, incluido en Kuhn y Tucker (editores), *Linear Inequalities and Related Systems*, Princeton University Press, 1956.

**Giorgi**, Gorgio, “Eigenvalues and Eigenvectors in von Neumann and Related Growth Models: An Overview and Some Remarks”, *Journal of Mathematics Research*; Vol. 8, No. 1; 2016,

<http://www.ccsenet.org/journal/index.php/jmr/article/download/54604/30194>

**Giorgi**, Gorgio, y Tinne Hoff **Kjeldsen** (editores), *Traces and Emergence of Nonlinear Programming*, Birkhauser, 2014.

**Glimm**, James, John **Impagliazzo** e Isadore **Singer** (editores), *The Legacy of John von Neumann*, American Mathematical Society, 1990.

**Kantorovich**, Leonid V. *The best use of economic resources*, Harvard University Press, 1965.

En español como *La asignación óptima de los recursos económicos*, Ariel, Barcelona 1968.

**Kemeny**, John G., Oskar **Morgenstern** y Gerald L. **Thompson**, “A Generalization of the von Neumann Model of an Expanding Economy”, *Econometrica* 24, 1956, <http://www.jstor.org/stable/1905746>

**Koopmans**, Tjalling C., (editor) *Activity Analysis of Production and Allocation*, John Wiley and Sons, Inc., New York 1951, <http://cowles.econ.yale.edu/P/cm/m13/>

**Koopmans**, Tjalling C., “Economic Growth at a Maximal Rate”, *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 78, No. 3, 1964, <https://www.jstor.org/stable/1879473>

**Kuhn**, Harold W. y Albert W. **Tucker**, (editores) *Linear Inequalities and Related Systems*, Princeton University Press, 1956.

**Kuhn**, Harold W. y Albert W. **Tucker**, *John von Neumann's work in the theory of games and mathematical economics*, Bull. Amer. Math. Soc., Volume 64 Number 3, Part 2 (1958), 100-122, <https://projecteuclid.org/euclid.bams/1183522375>

**Kurz**, Heinz D. y Neri **Salvadori**, *Theory of production: a long-period analysis*, Cambridge University Press, 1997.

**Leontief**, Wassily W., *The Structure of American Economy, 1919-1939: an empirical application of equilibrium analysis*, 2ª ed., Oxford University Press, New York 1951.

En español como *La estructura de la economía americana, 1919-1939: una aplicación empírica del análisis del equilibrio*, Bosch, Barcelona 1958.

**Łoś**, Jerzy y Maria W. **Łoś**, (editores) *Mathematical models in economics*, North-Holland Pub. Co., 1974.

**McKenzie**, Lionel W., *Classical General Equilibrium Theory*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 2002.

**McKenzie**, Lionel W., “Optimal economic growth, turnpike theorems and comparative dynamics” en Kenneth J. Arrow y M. D. Intriligator (editores) *Handbook of Mathematical Economics: Volume III*, North-Holland, Amsterdam 1986.

**Medvedyev**, Péter. “A General Existence Theorem for von Neumann Economic Growth Models”, *Econometrica*, Vol. 52, No. 4, 1984, <https://www.jstor.org/stable/1911193>

**Morgenstern**, Oskar y Gerald L. **Thompson**, *Mathematical theory of expanding and contracting economies*, Lexington Books, 1976.

**Morishima**, Michio, *Theory of Economic Growth*, Oxford University Press, 1969.  
En español como *Teoría del crecimiento económico*, Tecnos, Madrid 1973.

**Morishima**, Michio, “Economic Expansion and the Interest Rate in Generalized von Neumann Models”, *Econometrica*, Vol. 28, No. 2, 1960, <https://www.jstor.org/stable/1907725>

**Muños**, Manuel, *Apuntes sobre la estructura y la evolución de las sociedades*, (tesis doctoral) 2011, <https://eprints.ucm.es/12894/>

**Scarf**, Herbert y Terje **Hansen**, *The Computation of Economic Equilibria*, Yale University Press, 1973.

**Schefold**, Bertram, “Von Neumann and Sraffa: Mathematical Equivalence and Conceptual Difference”, *The Economic Journal*, Vol. 90, No. 357, 1980, <https://www.jstor.org/stable/pdf/2231661>

**Solow**, Robert M. y Paul A. **Samuelson**, “Balanced growth under constant returns to scale”, *Econometrica* 21, 1953, <https://www.jstor.org/stable/1905447>

**Sraffa**, Piero, *Production of Commodities by Means of Commodities. Prelude to a critique of economic theory*, Cambridge University Press, Londres 1960, <https://archive.org/details/ProductionOfCommoditiesByMeansOfCommodities>  
En español como *Producción de mercancías por medio de mercancías*, Oikos-Tau, Barcelona 1966.

**Thompson**, Gerald L. “On the solution of a Game-theoretic problem”, incluido en Kuhn y Tucker (editores), *Linear Inequalities and Related Systems*, Princeton University Press, 1956.

**Vegara**, Josep María, *Economía política y modelos multisectoriales*, Tecnos, Madrid 1979.

## R.5. Biografías y documentales

**ARTE France & BFC Productions**, *John von Neumann, Der Denker des Computer-Zeitalters*, 2014 (en alemán con subtítulos en inglés) <https://www.youtube.com/watch?v=97hfRcrYBtE> .

En francés como *John von Neumann, Prophète du 21e siècle*, [https://www.youtube.com/watch?v=c9pL\\_3tTW2c](https://www.youtube.com/watch?v=c9pL_3tTW2c)

**Blair**, Clay, Jr., “Passing of a Great Mind”, *Life Magazine*, 25 febrero 1957, <https://books.google.es/books?id=rEEEEAAAAMBAJ&pg=PA89#>

**Heims**, Steve J., *John von Neumann and Norbert Wiener, from Mathematics to the Technologies of Life and Death*, MIT Press, Cambridge, Massachussets 1980.  
En español como *John von Neumann y Norbert Wiener*, Salvat, 1989.

**Israel**, Giorgio y Ana **Millán Gasca**, *The World as a Mathematical Game: John von Neumann, Twentieth Century Scientist*, Springer Science & Business Media, 1995, <https://archive.org/details/GiorgioIsraelAnaMillanGascaTheWorldAsAMathematicalGameJohnVonNeumannAndTwentieth>

En español como *El mundo como juego matemático: John von Neumann, un científico del siglo XX*, Nivola, Madrid 2001.

**Kaldor**, Nicholas, “John von Neumann: A personal recollection”, en Dore, Mohammed, Sukhamoy Chakravarty y Richard Goodwin, (editores) *John von Neumann and modern economics*, Clarendon Press, Oxford 1989.

**MacRae**, Norman, *John von Neumann: The Scientific Genius Who Pioneered the Modern Computer, Game Theory, Nuclear Deterrence, and Much More*, Pantheon Press 1992; reeditado por American Mathematical Society, 1999.

**MAFILM**, *Neumann János (John von Neumann)*, 1984, <https://www.youtube.com/watch?v=2ByCwz5GVPw> (en húngaro).

**The Mathematical Association of America**, *John von Neumann – A Documentary*, MAA Video Classics 2, 1966, <https://www.youtube.com/watch?v=Y2jiQXI6nrE>

**Ulam**, Stanislav, “John von Neumann, 1903–1957”, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 64, 1958, <https://www.ams.org/journals/bull/1958-64-03/S0002-9904-1958-10189-5/S0002-9904-1958-10189-5.pdf>